

**UNIVERSIDAD DE ALCALÁ**



**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN**

**DESARROLLO DE TÉCNICAS BASADAS EN FUNCIONES  
BASE CARACTERÍSTICAS PARA EL ANÁLISIS DE  
RADIACIÓN, PROPAGACIÓN Y DISPERSIÓN EN  
ENTORNOS COMPLEJOS**

Autor: Carlos Delgado Hita

Director: Manuel Felipe Cátedra Pérez

Tesis Doctoral presentada en la  
Universidad de Alcalá para la obtención del  
Título de Doctor Ingeniero de Telecomunicación

Alcalá de Henares 2006

## CERTIFICADO DEL DIRECTOR DEL DEPARTAMENTO

**Dña. Enriqueta Muel Muel**, Directora del Departamento de Ciencias de la Computación de la Universidad de Alcalá,

HACE CONSTAR:

Que la tesis titulada “*Desarrollo de Técnicas basadas en Funciones Base Características para el Análisis de Radiación, Propagación y Dispersión en Entornos Complejos*”, presentada por Carlos Delgado Hita para optar al título de Doctor Ingeniero de Telecomunicación y dirigida por Manuel Felipe Cátedra Pérez, ha sido realizada en el Departamento de Ciencias de la Computación de la Universidad de Alcalá y reúne las condiciones exigidas a los trabajos de Doctorado.

Alcalá de Henares, Abril de 2006

Enriqueta Muel Muel

## CERTIFICADO DEL DIRECTOR DE LA TESIS

**D. Manuel Felipe Cátedra Pérez**, Catedrático de Universidad del Departamento de Ciencias de la Computación de la Universidad de Alcalá,

HACE CONSTAR:

Que la tesis titulada “*Desarrollo de Técnicas basadas en Funciones Base Características para el Análisis de Radiación, Propagación y Dispersión en Entornos Complejos*”, presentada por Carlos Delgado Hita para optar al título de Doctor Ingeniero de Telecomunicación, ha sido realizada en el Departamento de Ciencias de la Computación de la Universidad de Alcalá bajo su dirección y reúne las condiciones exigidas a los trabajos de Doctorado.

Alcalá de Henares, Abril de 2006

Manuel Felipe Cátedra Pérez

Desde esta página me gustaría recordar a los que han contribuido de algún modo al desarrollo de esta tesis.

En primer lugar, a mis padres y mi hermana por el simple hecho de haber estado ahí siempre, y por ejercer de revisores con este "ladrillo".

También a Felipe Cátedra por todos los consejos, lecciones, ideas y apoyo que he recibido por su parte durante todo este tiempo.

A los doctorandos que durante estos años han estado (durante más o menos tiempo) en mi misma situación, compartiendo dudas, opiniones y sobre todo la máquina de café: Raúl, Lorena, Eli, Romerita, Stefano ...

A todos los componentes del GEC (antes GSSR), y especialmente a Iván, Oscar y Kiko por todos los favores que me han hecho en este período.

Al Dr. Raj Mittra por su buena acogida, lecciones y consejos durante la estancia en Penn State, así como a la gente del *Electromagnetic Communication Laboratory* con los que compartía la rutina diaria.

Finalmente, a la Comunidad de Madrid por su ayuda para financiar el trabajo realizado durante este tiempo.

A todos, gracias.

# *Resumen*

En esta tesis se aborda el desarrollo de técnicas numéricas eficientes en el análisis de problemas realistas de radiación, propagación y dispersión electromagnética. Las principales aportaciones de la misma están basadas en la expansión de las corrientes como *funciones base características*, también denominadas *modos de corriente* en el contexto de alta frecuencia.

En primer lugar, se desarrollan técnicas numéricas eficientes para la obtención de los campos radiados o dispersados por distribuciones de corriente superficial conocidas, de manera que las expresiones integrales son evaluadas mediante fórmulas analíticas. Para ello se realiza un particionamiento de las superficies en regiones donde el término de fase sufre una variación predominantemente lineal o cuadrática. Esto supone una reducción drástica del coste computacional asociado a casos eléctricamente grandes, así como de la dependencia del mismo con la frecuencia de análisis.

La segunda aportación de la tesis implica la construcción de un método iterativo para el análisis de un número arbitrario de efectos en geometrías modeladas mediante superficies paramétricas. Para ello se hace uso de las técnicas de integración previamente desarrolladas y ampliadas al caso de la obtención de los modos de corriente inducidos por una superficie radiante activa sobre un parche pasivo. Aunque este método es aplicable a distintos tipos de aproximaciones numéricas, se ha hecho un especial énfasis en su utilización combinada con las corrientes de Óptica Física (*PO*, *Physical Optics* en la terminología anglosajona), para lo que también se han aplicado algoritmos orientados al cálculo de las zonas iluminadas y ocultas en cada iteración, así como técnicas de aceleración basadas en el algoritmo Z-Buffer angular.

Finalmente, se han sentado las bases para el desarrollo del *Método de las Funciones Base Características* (*CBFM*, *Characteristic Basis Function Method* en terminología anglosajona) aplicado a superficies paramétricas arbitrarias. Esta técnica numérica rigurosa está basada en la generación de funciones de base y de prueba de alto nivel, expresadas internamente mediante funciones de subdominio, que conducen a la generación de sistemas lineales con un número de incógnitas mucho menor que el obtenido en la aplicación de técnicas convencionales como el *Método de los Momentos*. Para la generación de estas funciones sobre superficies eléctricamente grandes y de variación

suave se recurre a la obtención de los modos de corriente inducidos por un conjunto de ondas planas incidentes desde distintos ángulos.

Cabe destacar que el modelado geométrico empleado en la tesis se basa en la utilización de superficies B-Spline racionales no uniformes (*NURBS*, *Non-Uniform Rational B-Spline* en terminología anglosajona) de grado arbitrario, ampliamente estandarizadas en la actualidad e incluidas en una gran parte de los paquetes comerciales de diseño gráfico, que permiten establecer descripciones muy precisas de los objetos reales.

# *Abstract*

This thesis deals with the development of efficient numerical techniques for the analysis of realistic problems of electromagnetic radiation, propagation and scattering. The main contributions are based on the expansion of the currents in terms of *characteristic basis functions*, which are also called *current modes* when considering the high frequency context.

First, efficient numerical techniques are developed in order to obtain radiated or scattered fields due to known surface current distributions, so that integral expressions can be evaluated by means of analytical formulas. With this purpose, surfaces are partitioned into regions where the phase term undergoes a predominantly linear or quadratic variation, with the result of a drastic decrease of both the computational cost involved in the analysis of electrically large problems and the CPU-time dependence with frequency.

The second contribution of this thesis is related to the development of an iterative technique for the analysis of an arbitrary number of effects in geometries modeled by means of parametric surfaces. With this purpose, the previously developed integration techniques are extended to the case of the calculation of the induced currents on a passive patch due to a radiating surface. Although this method is applicable to different types of numerical approaches, its use combined with the Physical Optics currents has been emphasized, for which algorithms oriented to the calculation of the illuminated and hidden zones in each iteration have been also applied, as well as acceleration techniques based on the angular Z-Buffer algorithm.

Finally, the foundations for the development of the Characteristic Basis Function Method applied to arbitrary parametric surfaces have been developed. This rigorous numerical technique is based on the generation of high-level base and test functions, expressed by means of subdomain functions, that lead to the generation of linear systems with a much smaller number of unknowns than that obtained by the conventional Moment Method. For the generation of these functions on electrically large and smooth surfaces, a set of current modes induced by plane wave excitations from different angles is considered.

It must be remarked that the geometrical modeling considered in this thesis is based on the use of Non-Uniform Rational B-Spline surfaces (NURBS) of arbitrary degree, widely standardized at the present time and included in most commercial CAGD packages, with which it is possible to generate accurate descriptions of real objects.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Motivación de la Tesis . . . . .	1
1.2	Antecedentes . . . . .	2
1.2.1	Métodos de Baja Frecuencia . . . . .	4
1.2.2	Métodos Rigurosos . . . . .	4
1.2.3	Métodos de Alta Frecuencia . . . . .	5
1.2.4	Métodos Híbridos . . . . .	6
1.3	Contexto y Objetivos de la Tesis . . . . .	7
1.4	Estructura de la tesis . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Expresiones Integrales de los Campos</b>	<b>17</b>
2.1	Introducción . . . . .	17
2.2	El Principio de Equivalencia . . . . .	18
2.3	Obtención de las Expresiones Integrales de Campo . . . . .	20
2.3.1	Ecuaciones de Onda de los Potenciales Vectores . . . . .	20
2.3.2	Ecuaciones Integrales de Campo Eléctrico y Magnético . . . . .	24
2.4	La Aproximación de Óptica Física . . . . .	28
2.5	Expresión Diádica de la Función de Green . . . . .	33
2.6	Modos de corriente . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Desarrollo de Métodos Cuasianalíticos de Integración</b>	<b>39</b>
3.1	Introducción . . . . .	39

3.2	Expresión de la Integral . . . . .	40
3.3	Técnicas Cuasianalíticas de Integración . . . . .	43
3.3.1	Aproximación de la Fase Mediante Expresiones Lineales . . . . .	43
3.3.2	Aproximación de la Fase mediante Expresiones Cuadráticas . . . . .	47
3.3.3	Aproximación Polinomial de la Función de Error . . . . .	53
3.4	Algoritmo Adaptativo de Particionamiento . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Análisis de Interacciones Múltiples sobre Dispersores Eléctricamente Grandes</b>	<b>63</b>
4.1	Introducción . . . . .	63
4.2	Muestreo e Interpolación de la Corriente . . . . .	65
4.3	Expresión de las Corrientes Impresas . . . . .	67
4.4	Método Iterativo para la Obtención de los Modos de Corriente Inducidos	70
4.4.1	Aplicación del Método Iterativo con las Corrientes de Óptica Física	77
4.4.2	Preprocesado de las Superficies en el Esquema Iterativo . . . . .	79
4.4.3	Consideraciones Computacionales . . . . .	82
4.5	Identificación de los Modos de Corriente Mediante Técnicas de Estimación Espectral . . . . .	82
4.5.1	Descripción del Algoritmo Matrix Pencil . . . . .	84
4.5.2	Detección de los Modos de Corriente mediante el Algoritmo Matrix Pencil . . . . .	86
4.5.3	Obtención de la Función de Fase a Partir de las Frecuencias Espaciales . . . . .	91
4.6	Obtención de los Campos Radiados o Dispersados . . . . .	93
<b>5</b>	<b>Algoritmos de Ocultación y Aceleración del Método Iterativo</b>	<b>95</b>
5.1	Introducción . . . . .	95
5.2	Ocultación de las Corrientes Impresas por Fuentes Externas . . . . .	97
5.2.1	Ocultación por Iluminación . . . . .	97
5.2.2	Ocultación por Eclipse . . . . .	98

5.3	Ocultación en Efectos Intermedios del Método Iterativo . . . . .	104
5.3.1	Orientación Relativa de los Vectores Normales de Ambos Parches	105
5.3.2	Posición Relativa entre los Parches . . . . .	107
5.3.3	Efectos de Eclipse . . . . .	107
5.4	Algoritmo Adaptativo de Particionamiento de Superficies . . . . .	109
5.5	Técnicas de Aceleración del Análisis Electromagnético en el Método Iterativo . . . . .	118
5.5.1	Revisión de Algoritmos Basados en el Z-Buffer Angular . . . . .	120
<b>6</b>	<b>Aplicación del Método de las Funciones Base Características a Superficies Paramétricas</b>	<b>129</b>
6.1	Introducción . . . . .	129
6.2	Revisión del Método de los Momentos . . . . .	130
6.3	Funciones de Base y Prueba en el Método de los Momentos sobre Superficies Paramétricas . . . . .	134
6.3.1	División de las Superficies . . . . .	134
6.3.2	Funciones de Base sobre Superficies Paramétricas . . . . .	135
6.3.3	Funciones de Prueba sobre Superficies Paramétricas . . . . .	136
6.3.4	Generación de la Matriz de Impedancias . . . . .	137
6.4	Método de las Funciones Base Características . . . . .	140
6.4.1	Construcción de las Funciones Base Características a partir del Espectro de Ondas Planas . . . . .	141
6.4.2	Ortogonalización de las Funciones Base Características mediante la Descomposición en Valores Singulares . . . . .	144
6.4.3	Construcción de la Matriz Reducida . . . . .	148
6.5	Técnicas Numéricas Eficientes para el Cálculo de Interacciones en Campo Lejano . . . . .	150
6.5.1	Aplicación del Método Rápido de los Multipolos . . . . .	151
6.5.2	Disminución del Rango de las Matrices en Interacciones Lejanas	154
<b>7</b>	<b>Resultados</b>	<b>159</b>

7.1	Introducción . . . . .	159
7.2	Validación de las Técnicas de Integración Cuasianalíticas . . . . .	160
7.2.1	Simples Efectos sobre Superficies Paramétricas NURBS . . . . .	160
7.2.2	Dobles Efectos sobre Superficies Paramétricas . . . . .	161
7.2.3	Estudio Paramétrico de la Eficiencia Computacional . . . . .	162
7.3	Validación del Método Iterativo en Problemas de Alta Frecuencia . . . . .	167
7.3.1	Cavidad Cuadrada con Pestaña . . . . .	167
7.3.2	Análisis del Misil SCUD . . . . .	169
7.3.3	Análisis del Avión CN235 . . . . .	170
7.3.4	Análisis del Avión Alphajet . . . . .	172
7.4	Validación del Método de las Funciones Base Características Aplicado a Superficies Paramétricas Arbitrarias . . . . .	174
7.5	Estudio de Técnicas Eficientes en el Método de las Funciones Base Características . . . . .	175
7.5.1	Aplicación del Método Rápido de los Multipolos para el Cálculo de Bloques No Diagonales . . . . .	176
7.5.2	Aplicación del Método Dual-MGS para el Cálculo de Bloques No Diagonales . . . . .	178
<b>8</b>	<b>Conclusiones y Futuras Líneas de Trabajo</b>	<b>181</b>
8.1	Conclusiones . . . . .	181
8.2	Futuras líneas de trabajo . . . . .	183
<b>A</b>	<b>Modelado Geométrico mediante Superficies B-Spline Racionales no Uniformes (NURBS)</b>	<b>185</b>
A.1	Introducción . . . . .	185
A.2	Curvas y Superficies Racionales de Bezier . . . . .	186
A.3	Curvas y Superficies B-Spline . . . . .	189
A.3.1	Curvas y Superficies B-Spline como Conexión de Curvas y Superficies de Bezier . . . . .	192
A.4	Tratamiento Geométrico . . . . .	194

---

<b>B</b>	<b>Métodos para la Resolución de Problemas de Mínimos Cuadrados</b>	<b>201</b>
B.1	Introducción . . . . .	201
B.2	Planteamiento del Problema . . . . .	202
B.3	Resolución Directa de las Ecuaciones Normales . . . . .	203
B.4	Resolución Mediante la Factorización QR . . . . .	204
<b>C</b>	<b>Método del Gradiente Conjugado para la Minimización de Funciones</b>	<b>207</b>
	<b>Referencias</b>	<b>209</b>



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Motivación de la Tesis

Durante las últimas décadas se ha realizado un esfuerzo continuado con vistas al desarrollo de herramientas computacionales eficientes para el análisis electromagnético de los campos radiados y/o dispersados por cuerpos complejos, compuestos por un número arbitrario de superficies, y, que en una buena parte de los casos, presentan un tamaño eléctrico grande o muy grande. El interés despertado por este tipo de aplicaciones se hace patente no sólo dentro del ámbito puramente académico o investigador, sino también dentro de una amplia gama de sectores industriales (como el espacial, aeronáutico, automovilístico o el de las telecomunicaciones), que requieren de herramientas cada vez más eficientes para el análisis y la optimización de diversos parámetros en problemas electromagnéticos.

Actualmente existe una cantidad apreciable de métodos numéricos destinados al análisis de problemas electromagnéticos de diversa índole. Es evidente el hecho de que cada uno de estos métodos posee su propio campo de aplicación, de forma que no existe ninguna técnica numérica que se pueda emplear para resolver todo tipo de problemas. En aplicaciones dirigidas al cálculo de la sección radar (RCS, *radar cross section* en terminología anglosajona), o en problemas de radiación de antenas embarcadas sobre estructuras complejas es común el uso de los denominados *métodos de alta frecuencia*,

que optimizan el coste computacional mediante el uso de aproximaciones asintóticas, ofreciendo unos resultados aceptables en los casos incluidos en su campo de aplicación. Estos métodos, sin embargo, no son los únicos empleados en este tipo de problemas, dado que es relativamente frecuente encontrar objetos con determinadas partes donde los campos calculados mediante las aproximaciones de alta frecuencia no son lo suficientemente precisos. Debido a ello, los métodos de alta frecuencia son a menudo combinados, e incluso hibridados, con otros métodos (denominados *rigurosos*) computacionalmente más exigentes y a la vez más precisos. A pesar de los grandes avances producidos en los sistemas de computación durante los últimos años, muchos casos de interés quedan aún muy lejos de un análisis mediante la utilización de métodos exclusivamente rigurosos, por lo que se han realizado grandes esfuerzos por aliviar esta carga computacional manteniendo al mismo tiempo la precisión en los resultados finales [1, 2].

El Grupo Universitario en el que se ha desarrollado la presente tesis posee experiencia en la aplicación de métodos numéricos para la resolución de diversos problemas electromagnéticos. Como resultado de su línea de investigación han surgido códigos numéricos que abarcan tanto métodos de alta frecuencia [3–6] como métodos rigurosos [7–9]. No obstante, los continuos esfuerzos dentro de las numerosas líneas de investigación en el electromagnetismo computacional hacen que aparezcan técnicas que permiten un aumento de la eficiencia mediante la ampliación o la modificación de los métodos ya existentes, lo cual puede suponer una disminución del tiempo de cálculo requerido en el caso de los métodos rigurosos, y la posibilidad de un aumento de la precisión obtenida mediante el uso de métodos de alta frecuencia, por el hecho de considerar efectos añadidos. La presente tesis representa una contribución al desarrollo de técnicas eficientes tanto en el ámbito de los métodos de alta frecuencia como en el de los métodos rigurosos basados en corrientes superficiales.

## 1.2 Antecedentes

Generalmente se establecen una serie de criterios para la clasificación de los diferentes métodos numéricos empleados en el electromagnetismo. Algunos de estos criterios, así como las clasificaciones derivadas de ellos, son:

- Tratamiento de las ecuaciones de Maxwell según el tamaño eléctrico del problema

- Métodos de Baja Frecuencia
- Métodos Rigurosos
  - \* Métodos integrales
  - \* Métodos diferenciales
- Métodos de Alta Frecuencia
- Métodos Híbridos
- Tipo de discretización empleada
  - Volumétrica
  - Superficial
  - Lineal
- Dominio de análisis
  - Dominio frecuencial
  - Dominio temporal

El primer grupo alude al grado de precisión con que se resuelven los problemas electromagnéticos y a las aproximaciones realizadas en los casos asintóticos. Este grupo es, con frecuencia, el más popular a la hora de establecer el campo de aplicación de los métodos numéricos, razón por la que en esta tesis se hace referencia a la clasificación en él incluida en varias ocasiones. En la presente tesis se trabaja en profundidad con un método de alta frecuencia, aunque considerando también el caso de un método riguroso relacionado con el anterior. El segundo de los grupos se refiere a la forma en la que se definen espacialmente las incógnitas del problema, pudiendo emplearse una distribución tridimensional, bidimensional o unidimensional de las mismas. En los problemas tratados en la presente tesis se consideran corrientes distribuidas sobre las superficies que componen la geometría, por lo que la discretización empleada es *superficial*. El tercer grupo hace referencia al dominio en el que se resuelven las ecuaciones que modelan el problema. En esta tesis se utiliza como hipótesis de trabajo la variación armónica de los campos electromagnéticos, por lo que puede considerarse que se trabaja en el dominio de la frecuencia.

A continuación se enumeran, de forma general, las características de los distintos métodos clasificados según el tamaño eléctrico de los problemas a analizar y al tratamiento que se hace de la formulación electromagnética.

### 1.2.1 Métodos de Baja Frecuencia

Estos métodos son empleados en los casos en que el tamaño eléctrico de los cuerpos es mucho menor que la longitud de onda [10]. Es común hacer la suposición de que no existen variaciones de fase en el campo impreso sobre los mismos, aunque sí existe un fuerte acoplo entre las distintas partes que componen la geometría del problema a analizar. Debido a su ámbito de aplicación, estos métodos son poco utilizados en problemas de dispersión y radiación cuando se consideran objetos complejos.

### 1.2.2 Métodos Rigurosos

La filosofía de los *métodos rigurosos* se basa en la resolución de las ecuaciones de Maxwell, bien sea en su forma diferencial o integral, imponiendo las condiciones de contorno adecuadas para cada problema. Para ello se discretiza la estructura bajo análisis y las propias ecuaciones que gobiernan el comportamiento de los campos electromagnéticos. En la aplicación convencional de estos métodos no se realiza ningún tipo de aproximación, por lo que el error en los resultados obtenidos es debido principalmente al proceso de discretización del problema.

Entre los métodos rigurosos basados en una formulación integral más extendidos se puede citar el *Método de los Momentos* (*MoM*, *Method of Moments* en terminología anglosajona) [11] y el *Método del Gradiente Conjugado combinado con la Transformada Rápida de Fourier* (*CG-FFT*) [12], mientras que atendiendo a los métodos clásicos en los que se emplea una formulación diferencial se encuentran el *Método de los Elementos Finitos* (conocido por las siglas en inglés *FEM*, *Finite Element Method*) [13, 14] y el *Método de las Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo* (o *Finite Difference Time Domain*, *FDTD* en la terminología anglosajona) [15]. Estos dos últimos utilizan discretizaciones volumétricas que generalmente dan lugar a matrices muy dispersas con una gran cantidad de incógnitas, en contraste con las matrices densas y de menor tamaño que suelen aparecer en la aplicación tradicional del *Método de los Momentos*.

### 1.2.3 Métodos de Alta Frecuencia

Los métodos de alta frecuencia aprovechan el elevado grado de desacople producido entre las distintas partes de los objetos bajo estudio cuando éstos presentan un tamaño eléctrico grande, de forma que se pueden realizar aproximaciones que reducen enormemente la carga computacional necesaria para la resolución del problema, sin afectar de manera notable al grado de precisión en los resultados. Gracias a dichas aproximaciones se alivia en gran medida la dependencia de los recursos computacionales (principalmente tiempo de cálculo y memoria utilizada) con la frecuencia de análisis. En muchos casos prácticos de cálculo de sección radar o diagramas de radiación, los métodos de alta frecuencia (o algunas hibridaciones con otro tipo de métodos) son la única forma viable de análisis, por lo que su desarrollo ha adquirido una gran importancia dentro del ámbito industrial.

El método de la *Óptica Geométrica (GO)* [16,17] se basa en el cálculo de contribuciones de distintos *rayos* (suponiendo una longitud de onda infinitamente pequeña), propagados a lo largo de una serie de trayectorias de acuerdo con el principio de *Fermat* o de mínimo camino óptico. Los resultados obtenidos son buenos siempre y cuando los radios de curvatura en los puntos especulares sean pequeños respecto a la longitud de onda. La *Teoría Geométrica de la Difracción (GTD)* puede ser considerada como una ampliación de la *Óptica Geométrica* donde se utiliza una generalización del principio de Fermat para la inclusión de los *rayos difractados* [16]. Tanto en la *Óptica Geométrica* como en la *Teoría Geométrica de la Difracción* se presenta el problema del tratamiento de una serie de lugares geométricos, denominados *caústicas*, donde existen singularidades en la expresión de evaluación de los campos. En las zonas cercanas a las caústicas los valores de campo son muy altos, por lo que las expresiones generales de GO y GTD no son acertadas. La existencia de estas singularidades ha reducido a estos dos métodos (cuya combinación es conocida como GO/GTD, o en ocasiones únicamente como GTD) al análisis de problemas de radiación, ya que para el cálculo de la sección radar el frente de onda plano incidente es susceptible de generar caústicas en muchos casos reales.

El método de la *Óptica Física* (ampliamente conocido por las siglas en inglés *PO*, *Physical Optics*) [10, 18] supone que la corriente sobre una superficie es únicamente dependiente del campo incidente y de los parámetros geométricos de cada punto de la misma, de forma que dicha corriente es la que se obtendría sobre un plano infinito

tangente a la superficie real en el punto bajo análisis. La corriente es considerada nula en las zonas ocultas de la superficie, y el campo dispersado se obtiene mediante la integración de la distribución de corriente sobre las zonas iluminadas de la misma. Estas aproximaciones hacen que la Óptica Física sea más precisa que la Óptica Geométrica, eliminando a la vez la existencia de caústicas, aunque con mayores requerimientos computacionales. Cabe destacar que según la dirección de observación se aleja de la dirección especular, los resultados obtenidos mediante la Óptica Física se van viendo degradados. Para aumentar la precisión en estos casos existe una ampliación, denominada *Teoría Física de la Difracción* (conocida como *PTD*, *Physical Theory of Diffraction* en la terminología anglosajona) [19], que añade un término de corriente denominado *no uniforme* como contribución adicional en las aristas.

#### 1.2.4 Métodos Híbridos

Este tipo de técnicas ha surgido como compromiso entre el alto grado de fiabilidad y precisión obtenido por los métodos rigurosos, y la eficiencia computacional de los métodos asintóticos, que evitan la generación y manipulación de sistemas lineales descritos mediante matrices de gran tamaño. Para lograr este objetivo, los *métodos híbridos* hacen una división del problema según el ámbito de aplicación de los métodos asintóticos, generalmente de alta frecuencia, y de los métodos rigurosos [20–25]. Es sabido que los primeros fallan en zonas de la geometría irregulares o con discontinuidades, por lo que algunos de ellos tratan de mejorar la Teoría Geométrica de la Difracción encontrando un tratamiento para analizar zonas en las que la geometría no varíe suavemente [26]. Otras técnicas intentan reducir el coste computacional introduciendo soluciones asintóticas para las zonas de variación suave dentro del marco del método riguroso [27, 28]. Estos métodos clasifican las distintas partes de la geometría como *suaves* y *abruptas*, entendiendo como partes abruptas aquellas que, debido a su forma, disposición geométrica y/o tamaño eléctrico no son adecuadas para un análisis mediante métodos de alta frecuencia. En la mayor parte de los casos reales, este tipo de regiones representa un pequeño porcentaje de la superficie total.

Si se considera la división zonal de la geometría mencionada en el párrafo anterior, se debe calcular la interacción de partes suaves entre sí, partes suaves con abruptas y entre partes abruptas. En estas últimas es de esperar una variación rápida de las corrientes y los campos, lo cual exige un muestreo denso para poder obtenerlas y representarlas

adecuadamente. En muchas aplicaciones derivadas del Método de los Momentos, las interacciones entre las partes abruptas próximas entre sí se realiza considerando los acoplos de la matriz rigurosa que relacionan los subdominios de una de las zonas con los de la otra [27]. También es necesario emplear este procedimiento en regiones de unión entre dos tipos de zonas diferentes (parte suave con parte abrupta). Cuando las zonas abruptas están relativamente distantes entre sí, se pueden aplicar aproximaciones numéricas para evitar el almacenamiento de las matrices de acoplos y acelerar el proceso de cálculo [29]. Para calcular las interacciones de partes suaves con partes abruptas, partes abruptas con partes suaves, o entre partes suaves, se sigue la misma estrategia, dependiendo de la proximidad entre las mismas. Es común que la aplicación del método de alta frecuencia se destine a las interacciones entre partes suaves distantes entre sí, ya que éstas son muy numerosas en problemas realistas y su aplicación supone una disminución muy notable del tiempo de cálculo.

### 1.3 Contexto y Objetivos de la Tesis

Del hecho de que en el electromagnetismo computacional no exista un método numérico aplicable a todos los problemas posibles se deriva la existencia de una gran cantidad de trabajos de investigación que intentan incrementar la eficiencia de los ya existentes, o incluso desarrollar métodos innovadores que presenten ciertas ventajas a la hora de abordar problemas electromagnéticos concretos. Estos esfuerzos están dirigidos, como consecuencia, tanto hacia los *métodos rigurosos* como hacia los *métodos de alta frecuencia*.

Dentro del ámbito de los *métodos rigurosos*, una gran parte de las líneas de investigación se ve dirigida a intentar aliviar la carga computacional que supone la generación de la *matriz de acoplos*, cuyas dimensiones pueden hacerse inmanejables en problemas de tamaño medianamente grande, así como la resolución del sistema de ecuaciones que, en muchos de los casos, exige la utilización de métodos iterativos [12, 30–32] que en ciertas ocasiones adolecen de problemas de convergencia.

Recientemente han aparecido mejoras a los métodos rigurosos tradicionales, como el Método Rápido de los Multipolos [33], que han incrementado notablemente la eficiencia de los métodos integrodiferenciales, especialmente cuando la solución se obtiene

de forma iterativa al aplicar el operador discretizado a una función, relacionada con distribuciones de corriente o de campo, que se extiende sobre toda la superficie o el volumen de la geometría. Estos métodos evitan la necesidad de almacenar las enormes matrices que aparecen al analizar problemas de gran tamaño, además de acelerar el cálculo del correspondiente operador discretizado. Sin embargo, siguen presentando el inconveniente de necesitar un muestreo de las corrientes (o campos) con una tasa espacial del orden de una decena de muestras por cada longitud de onda, por lo que en casos grandes se necesita mucha memoria para representar estas funciones, además de que la aplicación del operador discretizado es muy costosa en términos de tiempo de cálculo, debido a que los resultados deben ser obtenidos en todos los puntos de muestreo. Por tanto, el poder evitar este muestreo espacial implica un mejor aprovechamiento de la memoria y del tiempo de cálculo.

Pese a que los métodos de alta frecuencia evitan el cálculo de la matriz de acoplos y la subsiguiente resolución de un sistema de ecuaciones, algunos de ellos, como es el caso de la Óptica Física, deben hallar los campos dispersados por distribuciones de corriente conocidas sobre superficies. Esto hace que exista una considerable dependencia de los recursos computacionales requeridos con el tamaño eléctrico de los objetos analizados. Si la corriente se almacena mediante muestras en las dos componentes paramétricas  $(u, v)$  de la superficie, considerando la tasa estandarizada de muestreo de  $\frac{\lambda}{10}$ , el almacenamiento de las corrientes y el cálculo del campo dispersado pueden suponer un esfuerzo computacional considerable cuando el tamaño total del cuerpo es grande, que además se acrecienta drásticamente al realizar un análisis que considere varias interacciones entre superficies. En tal caso, la tarea puede hacerse inviable para la mayoría de los equipos de cálculo disponibles en la actualidad.

Existen varias técnicas destinadas a aliviar la carga computacional que supone realizar una integración numérica sobre el parche en el que está definida la corriente. Algunas de estas técnicas se centran en estudiar y disminuir en lo posible el número de puntos de integración, aprovechando algunas características del tipo de funciones que aparecen en el integrando y la manera en que se discretiza el modelo geométrico [34–39]. En [40] se presenta una técnica en la que los puntos de integración se obtienen de forma adaptativa, enfocada hacia las corrientes de Óptica Física.

Otras técnicas intentan evitar la realización de un mallado de la geometría y el cálculo de la corriente en un conjunto de puntos sobre ella. El *Método de la Fase*

*Estacionaria* [41–43] (Conocido también como *SPM*, *Stationary Phase Method* en terminología anglosajona) reduce la contribución de una superficie a una serie de lugares geométricos (puntos, contornos, vértices) sobre la misma, de forma que el problema se reduce al cálculo de la corriente en estos puntos, mediante teoría de imágenes en el caso de facetas planas o empleando métodos de minimización en parches curvos, para aplicar expresiones cerradas sobre los puntos calculados. En [44–46] se emplea el Método de la Fase Estacionaria conjuntamente con un modelado mediante superficies paramétricas NURBS [47] para el cálculo de sección radar, mientras que su aplicación al caso de problemas de radiación viene propuesto en [48, 49]. Este método también ha sido empleado junto con la Óptica Geométrica en otros trabajos [3, 50], combinando el tratamiento de superficies planas y curvas. En [51] se propone su utilización para el análisis de dobles efectos entre parches. Este método ha sido utilizado en casos complejos, eléctricamente muy grandes y con una gran cantidad de superficies, gracias a su eficiencia trabajando a frecuencias altas. Como contrapartidas, cabe mencionar su sensibilidad frente a deficiencias en el modelado geométrico (alteraciones en las superficies que afectan a la localización de los puntos de fase estacionaria), así como la obtención de campos dispersados únicamente en las direcciones de reflexión especular.

Otro conjunto de trabajos, entre los que se pueden incluir las contribuciones introducidas en esta tesis, se dirigen hacia un cálculo de la expresión integral mediante métodos cuasianalíticos. Para ello se establecen una serie de aproximaciones por las que se describe la corriente de forma que es sencillo utilizar fórmulas cerradas para la obtención del campo dispersado, en lugar de realizar los cálculos numéricamente. En 1968, Ludwig [52] desarrolló un método analítico de integración aplicable a casos en los que la amplitud de la corriente inducida sufre una variación suave, mientras que la fase de la misma varía de forma lineal. En 1975, Gordon [53] propuso un método aplicable a placas planas conductoras por el que la obtención del campo lejano radiado puede obtenerse reduciendo la integral bidimensional de la corriente a una integración sobre el contorno del parche, e incluso a una fórmula analítica cerrada en el caso de que dicho contorno sea poligonal. Esta aproximación implica una amplitud constante y una variación lineal de la fase sobre la placa. Crabtree [54] propuso en 1991 una técnica aplicable sobre superficies paramétricas, que permite la evaluación del campo producido por distribuciones de corriente con amplitud y fase cuadrática, si bien dichas superficies deben estar definidas mediante expresiones bicuadráticas.

Una de las líneas de investigación abordadas en esta tesis se centra en el desarrollo de este tipo de técnicas de integración de corrientes para el cálculo de los campos,

aplicable a la Óptica Física u otro tipo de corrientes obtenidas mediante aproximaciones alternativas. Para ello se emplea una aproximación basada en los *modos de corriente*<sup>1</sup> [55–58], entendida como una expansión de las corrientes sobre superficies suaves y eléctricamente grandes según una serie de funciones cuyos términos de amplitud y fase sufren una variación lenta, de forma que pueden ser representados con una cantidad de información reducida. Además de la disminución de los requerimientos de memoria, la descomposición de la corriente en términos de *modos* hace muy deseable la disponibilidad de fórmulas cuasianalíticas de integración para obtener el campo dispersado. No obstante, en una situación general donde tanto las superficies como los frentes de onda del campo incidente tengan una cierta curvatura, el término de amplitud de un determinado modo de corriente no tiene por qué ser constante, ni el término de fase tiene por qué sufrir una variación de forma lineal. Debido a esto se ha optado por desarrollar expresiones aplicables a este tipo de situaciones [56], que permitan posteriormente su inclusión dentro de un método de análisis iterativo.

La segunda línea de investigación se centra en el desarrollo de un método iterativo aplicable a casos en los que se desee analizar efectos de orden múltiple entre las partes de una estructura compleja, de forma que la fuente activa en muchas de las interacciones esté constituida por una superficie radiante, y no por una fuente puntual u onda plana. Es evidente que, si el problema del cálculo del campo debido a una distribución de corriente mediante integración numérica resulta costoso, en el caso del análisis de múltiples interacciones la complejidad crece de forma exponencial, con lo que se hace absolutamente necesario plantear métodos alternativos. Como ejemplo representativo, el caso del *análisis de cavidades* ha sido exhaustivamente estudiado por grupos de investigación en todo el mundo. La importancia de estas estructuras radica, además de en el interés académico que puedan suscitar, en la frecuencia con la que se presentan en estructuras realistas como tomas de aire de aviones, turbinas, resonadores o en general objetos cercanos entre sí. En [59] se emplea una técnica de trazado de rayos para el análisis de cavidades muy grandes y con geometrías canónicas. Este método se combina en [60] con el cálculo de corrientes de Óptica Física en la apertura de la cavidad, obteniendo resultados aceptables con geometrías relativamente simples, aunque con limitaciones para el cálculo de casos complejos. Típicamente, una solución adoptada ha consistido en emplear un método riguroso para el análisis de este tipo de estructuras [61, 62], y combinar el resultado con otro método de alta frecuencia en el resto de

---

<sup>1</sup>De forma alternativa, los *modos de corriente* pueden ser también denominados *funciones base características* en el contexto de alta frecuencia, ya que son funciones propias de cada superficie y de los parámetros de la onda electromagnética incidente.

la geometría. Otra solución comúnmente adoptada consiste en dividir la estructura en secciones y procesarlas por separado para disminuir el coste computacional [63, 64]. Es evidente que existen muchos casos de cavidades eléctricamente grandes en los que la utilización de un método riguroso clásico exige disponer de mucha potencia computacional, además de que el condicionamiento de este tipo de problemas suele ser pobre, lo que puede originar problemas de convergencia si se emplean métodos iterativos de resolución del sistema de ecuaciones resultante.

La solución adoptada en esta tesis trata de la aplicación de técnicas basadas en *modos de corriente* al problema de las interacciones entre superficies suaves. La experiencia en el uso de métodos de alta frecuencia indica que entre partes suaves razonablemente alejadas entre sí es posible adoptar esta idea de la expansión de la corriente mediante un conjunto de modos de corriente superpuestos, que pueden ser obtenidos partiendo de un conjunto reducido de muestras. En las partes donde existan irregularidades, discontinuidades o uniones abruptas entre superficies, las corrientes son almacenadas mediante muestras, y los campos producidos se calculan mediante técnicas numéricas de integración. El problema principal a tratar consiste, por tanto, en la obtención de los modos de corriente que una superficie radiante induce en otra, bajo las suposiciones mencionadas anteriormente. Como resultado se tiene un método robusto capaz de analizar efectos múltiples considerando superficies eléctricamente grandes [65].

La tercera línea de investigación principal se enmarca en el ámbito del desarrollo de un método riguroso eficiente, basado en los modos de corriente (o funciones base características) como macro-funciones de base para la representación de la corriente sobre los cuerpos. Esta técnica puede ser vista como una ampliación del Método de los Momentos, el cual establece un sistema de ecuaciones lineales mediante la discretización de la geometría y de los operadores integrodiferenciales que gobiernan el comportamiento de los campos a partir de los valores de campo incidente debido a las fuentes externas en cada subdominio. Es frecuentemente tomado como referencia para la validación de otros métodos desarrollados a partir de él y para el contraste en la eficiencia computacional asociada a su aplicación, por lo que han surgido ampliaciones y modificaciones para disminuir los requerimientos computacionales del mismo. En el contexto de esta tesis se ha considerado el desarrollo del *Método de las Funciones Base Características* [66–69] debido al impulso que ha recibido en los últimos años y a su buen comportamiento en el caso del análisis de objetos grandes. Para conseguir un incremento de la eficiencia computacional en el Método de los Momentos se define una serie de funciones de base y de prueba de alto nivel. Las funciones de base en este contexto se denominan

*Funciones Base Características* y guardan una relación muy estrecha con los modos de corriente descritos previamente. Estas funciones de base vienen descritas a un nivel inferior mediante funciones de subdominio. Debido a la experiencia del grupo con la utilización de funciones tejado (o *rooftops*) sobre superficies paramétricas como funciones de base, combinadas con funciones de prueba de tipo cuchilla (o *razor-blade*) [7], se ha optado por utilizarlas como funciones de base y prueba de bajo nivel en el Método de las Funciones Base Características. Mediante la utilización de estas funciones de base de alto nivel, es posible construir una matriz de impedancias con un número de incógnitas reducido, de manera que se evita la utilización de un método iterativo para la resolución del problema. Esto es muy deseable en el análisis de problemas de gran tamaño, ya que en estos casos la resolución del sistema de ecuaciones mediante métodos iterativos debe ser realizada independientemente para cada excitación, haciendo que sea computacionalmente más costosa la resolución del sistema que la generación de la matriz de acoplos. Mediante la aplicación de métodos directos (como ejemplo, los basados en la descomposición LU de la matriz reducida) la obtención de resultados para distintas excitaciones es muy rápida una vez que la matriz ha sido factorizada.

Es importante destacar que en la tesis se ha empleado un modelado geométrico basado en superficies *B-Spline Racionales no Uniformes* (*NURBS, Non Uniform Rational B-Spline* en la terminología anglosajona) [47] debido, en primer lugar, a la enorme popularidad que han adquirido como entidades estándar de modelado geométrico. Otra razón para su utilización viene dada por la dilatada experiencia del Grupo Universitario en su manejo y los buenos resultados que se han derivado de él [70]. Finalmente, la utilización de este tipo de superficies paramétricas permite la expresión de las corrientes sobre un parche genérico mediante un par de coordenadas paramétricas, facilitando enormemente la generalización de las expresiones obtenidas a la hora de integrar dichas corrientes a parches de forma arbitraria.

## 1.4 Estructura de la tesis

### □ *Capítulo 1*

Se trata de un capítulo introductorio donde se estudia el interés que suscita el desarrollo de la tesis dentro del marco de los métodos numéricos relacionados (sección 1.1), así como una clasificación y una breve exposición de las técnicas más

tradicionales en la sección 1.2. Posteriormente se ofrece una visión del contexto y la evolución de los métodos de análisis que han influenciado sustancialmente a esta tesis, así como los objetivos perseguidos en el desarrollo de la misma, en la sección 1.3. En la sección 1.4 se desglosa la estructura de la memoria.

□ *Capítulo 2*

Consiste en un capítulo donde se establecen las bases teóricas de la formulación electromagnética empleada en la tesis. Tras una introducción (sección 2.1) se expone brevemente el principio de equivalencia en la sección 2.2. A partir de este principio, y siguiendo un desarrollo de las ecuaciones de Maxwell, se obtienen las ecuaciones de campo en la sección 2.3. Posteriormente, se analizan los procedimientos de aproximación asintótica de los que hace uso el método de la Óptica Física en la sección 2.4, dada su relevancia en el desarrollo de la tesis. La sección 2.5 presenta la formulación compacta mediante expresiones diádicas de la función de Green. Finalmente, en la sección 2.6 se ofrece una breve introducción a la descomposición de la corriente en términos de modos, concepto utilizado con profusión a lo largo de la presente tesis.

□ *Capítulo 3*

En este capítulo se desarrollan técnicas cuasianalíticas para la obtención de los campos radiados por superficies que soportan distribuciones de corriente expresadas en forma de modos. Tras una explicación de la estructura del capítulo en la sección 3.1 se realiza un desarrollo de la expresión del campo debido a un modo de corriente (sección 3.2), para adecuarlo a las expresiones utilizadas en secciones posteriores. La sección 3.3 constituye el núcleo del capítulo, donde se desarrollan técnicas partiendo de regiones de la superficie donde el término de fase está expresado mediante expresiones lineales o cuadráticas más un término residual. Finalmente se muestra esquemáticamente el procedimiento empleado para realizar particiones sobre la superficie en las que aplicar los métodos de integración expuestos anteriormente (sección 3.4).

□ *Capítulo 4*

En este capítulo se desarrolla un método iterativo, basado en aproximaciones de alta frecuencia, para considerar un número arbitrario de interacciones entre las distintas superficies que componen la geometría. En la sección 4.1 se presenta la estructura del capítulo, tras lo cual se hace un breve análisis acerca del procedimiento de muestreo empleado para aproximar posteriormente los modos de corriente mediante funciones analíticas (sección 4.2). En la sección 4.3 se analiza el caso de la obtención de los modos de corriente impresos por una onda

plana o por una fuente puntual cercana a la geometría. La sección 4.4 contiene el procedimiento empleado para la obtención de los modos de corriente que una superficie radiante activa induce sobre otra pasiva. En la sección 4.5 se analiza una alternativa basada en la utilización de técnicas espectrales para la estimación de los modos de corriente existentes sobre una superficie. En la sección 4.6 se obtienen las expresiones para el cálculo de los campos dispersados por un modo de corriente en una dirección de observación determinada, según la aproximación de Óptica Física.

#### □ *Capítulo 5*

Este capítulo trata sobre los algoritmos utilizados en la determinación de las zonas ocultas e iluminadas de la superficie, así como de las técnicas de aceleración consideradas. La sección 5.1 es una introducción al capítulo, tras lo que se exponen los algoritmos para la ocultación del campo incidente a partir de fuentes externas (onda plana o fuentes puntuales) en la sección 5.2. La ocultación en los efectos intermedios del método iterativo es analizada en la sección 5.3, tras lo que se expone un método para la obtención de las zonas iluminadas y ocultas mediante el particionamiento de las superficies en regiones (sección 5.4). En la sección 5.5 se exponen brevemente las técnicas empleadas en la aceleración del método iterativo, basadas en el descarte rápido de superficies mediante una serie de criterios expuestos en la sección. Finalmente, en la sección 5.5.1 se presentan de forma resumida las principales características de los algoritmos de aceleración basados en el Z-Buffer angular que se han aplicado en esta tesis.

#### □ *Capítulo 6*

En este capítulo se analiza la aplicación del Método de las Funciones Base Características a superficies paramétricas, empleando funciones de tipo tejado y cuchilla como funciones de base y prueba de bajo nivel. La sección 6.1 es una introducción al capítulo, tras lo que se revisa el Método de los Momentos convencional (sección 6.2). En la sección 6.3 se expone la aplicación de las funciones tipo tejado como funciones de base y las funciones de tipo cuchilla como funciones de prueba en el Método de los Momentos. En la sección 6.4 se expone el Método de las Funciones Base Características y su combinación con las funciones anteriormente mencionadas. Finalmente, en la sección 6.5 se estudian dos técnicas numéricas destinadas a la aceleración de los cálculos de los bloques no diagonales en el Método de las Funciones Base Características.

#### □ *Capítulo 7*

7.1 Este capítulo recopila una serie de resultados obtenidos mediante la apli-

cación práctica de las técnicas numéricas descritas en la tesis. Tras una breve introducción al contenido del capítulo (sección 7.1) se realiza un análisis del grado de precisión y eficiencia de las técnicas cuasianalíticas para la obtención de los campos (sección 7.2). Posteriormente se realiza un estudio de la evolución de la eficiencia computacional en el método propuesto, al variar ciertos parámetros geométricos (sección 7.3). En la sección 7.3 se presentan los resultados del análisis de varios problemas realistas. El apartado 7.4 ofrece un resultado de la aplicación del Método de las Funciones Base Características sobre una superficie curva. Finalmente, en la sección 7.5 se estudia la aplicación de técnicas eficientes para el cálculo de los bloques no diagonales de la matriz reducida.

□ *Capítulo 8*

En este capítulo se presentan las conclusiones (sección 8.1) derivadas del desarrollo de la tesis, y se indican las líneas de trabajo futuras (sección 8.2) más interesantes por las que se puede continuar el trabajo desarrollado en la misma.



# Capítulo 2

## Expresiones Integrales de los Campos

### 2.1 Introducción

En este capítulo se realiza un desarrollo de la formulación necesaria para obtener las expresiones integrales de los campos eléctrico y magnético empleadas en esta tesis. En la sección 2.2 se presenta el principio de equivalencia, gracias al cual se consideran las fuentes radiando en un medio homogéneo. En la sección 2.3.1 se parte de las ecuaciones de Maxwell para definir los potenciales vectores auxiliares,  $\vec{A}$  y  $\vec{F}$ , así como los escalares  $\phi_e$  y  $\phi_m$ . Los campos son expresados en función de estos potenciales y finalmente se llega a las ecuaciones de onda de  $\vec{A}$  y  $\vec{F}$ . Las soluciones a las mismas, como se muestra en la sección 2.3, proporcionan expresiones integrales para el cálculo de los potenciales vectores en problemas genéricos tridimensionales. A partir de ellos y utilizando el principio de equivalencia, en la sección 2.3.2 se obtienen las ecuaciones integrales de campo eléctrico y magnético sobre la superficie de los objetos bajo análisis. En este punto se enfatiza el caso de cuerpos conductores eléctricos perfectos, por ser el considerado en esta tesis, aunque la expansión a superficies de materiales dieléctricos puede ser llevada a cabo de manera sencilla a partir del teorema de dualidad. En la sección 2.4 se abordan los principios teóricos que definen la aproximación de alta frecuencia de la *Óptica Física*, señalando también las características y limitaciones de su

campo de aplicación, y mostrando un esquema iterativo por el que calcular un número arbitrario de efectos entre superficies mediante esta aproximación. La sección 2.5 trata sobre las funciones de Green expresadas de forma compacta mediante funciones diádicas. Finalmente, en el apartado 2.6 se hace una breve introducción a la expansión de las corrientes en forma de modos, concepto profusamente empleado en esta tesis, y se muestra un ejemplo gráfico donde se pueden apreciar algunas ventajas de su utilización.

## 2.2 El Principio de Equivalencia

El Principio de Equivalencia establece la posibilidad de sustituir al objeto bajo estudio por un conjunto de corrientes equivalentes [17, 71], sustituyendo el medio original por el espacio libre. Dichas corrientes compensan esta sustitución y reemplazan a las corrientes reales que radian campo en presencia del objeto. Evidentemente, el campo radiado por las corrientes equivalentes debe ser igual que el de las corrientes reales en una región del espacio. En la figura se muestra un esquema que ilustra esta situación, considerando un objeto conductor perfecto genérico, que encierra un volumen  $V$  y se encuentra delimitado por la superficie  $S$ . Se asume que el medio exterior al objeto viene definido por las constantes  $\varepsilon$  y  $\mu$ .

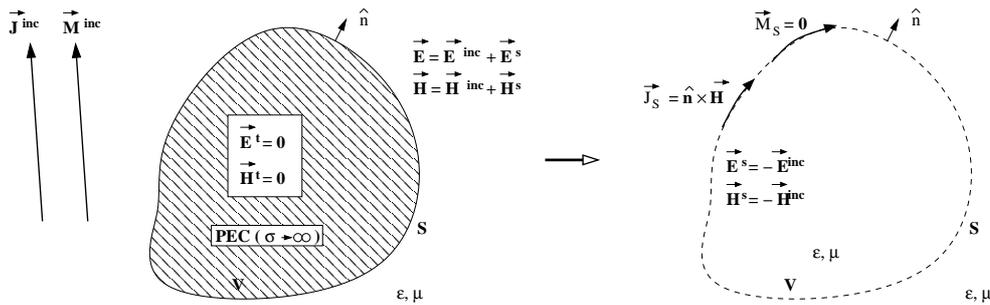


Figura 2.1: Esquema ilustrativo del principio de equivalencia para un objeto conductor.

En ausencia del objeto, existen unos campos  $\vec{E}^{inc}$  y  $\vec{H}^{inc}$ , debidos a las fuentes externas  $\vec{J}^{inc}$  y  $\vec{M}^{inc}$ . Si se considera al objeto, y asumiendo que es perfectamente conductor, los campos en el interior del mismo son nulos, mientras que en el medio exterior se pueden expresar como suma de dos contribuciones: el campo incidente, producido por las fuentes externas, y el campo dispersado por el objeto:

$$\vec{E} = \vec{E}^{inc} + \vec{E}^s \quad (2.1)$$

$$\vec{H} = \vec{H}^{inc} + \vec{H}^s \quad (2.2)$$

En esta situación, la componente tangencial de campo eléctrico sobre el objeto es nula, por lo que también lo será la densidad de corriente magnética  $\vec{M}$ :

$$\vec{M} = -\hat{n} \times \vec{E} \quad (2.3)$$

De esta forma se tiene la igualdad:

$$-\hat{n} \times \vec{E}^{inc} = \hat{n} \times \vec{E}^s \quad (2.4)$$

La expresión de la densidad de corriente eléctrica sobre el objeto viene dada por la componente tangencial del campo magnético:

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H} = \hat{n} \times (\vec{H}^{inc} + \vec{H}^s) = \hat{n} \times \vec{H}^{inc} + \hat{n} \times \vec{H}^s \quad (2.5)$$

De esta manera es posible sustituir el problema real por uno equivalente en el que existe un medio homogéneo  $(\epsilon, \mu)$  tanto dentro como fuera del volumen  $V$  ocupado por el objeto. Esto se hace sustituyendo al objeto por una serie de corrientes que permiten el cálculo del campo que dispersa el mismo, radiando en un medio homogéneo. Hay que tener en cuenta que estas corrientes permiten obtener el campo dispersado  $(\vec{E}^s, \vec{H}^s)$  fuera del volumen ocupado por el objeto, mientras que en su interior se obtendrá  $-\vec{E}^{inc}$  y  $-\vec{H}^{inc}$ , ya que debido al cambio de signo del vector normal se cumple que:

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times (\vec{H}^s + \vec{H}^{inc}) = \hat{n} \times [\vec{H}^s - (-\vec{H}^{inc})] \quad (2.6)$$

$$\vec{M}_s = -\hat{n} \times (\vec{E}^s + \vec{E}^{inc}) = -\hat{n} \times [\vec{E}^s - (-\vec{E}^{inc})] \quad (2.7)$$

A partir de este modelo de corrientes radiando en el medio  $(\varepsilon, \mu)$ , que en la mayoría de aplicaciones prácticas es el espacio libre, se pueden obtener ecuaciones integrales considerando los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ , denominadas respectivamente *Ecuación Integral de Campo Eléctrico* y *Ecuación Integral de Campo Magnético*, ampliamente conocidas por las siglas anglosajonas *EFIE* (*Electric Field Integral Equation*) y *MFIE* (*Magnetic Field Integral Equation*).

## 2.3 Obtención de las Expresiones Integrales de Campo

### 2.3.1 Ecuaciones de Onda de los Potenciales Vectores

El punto de partida para obtener la ecuación integral de campo eléctrico y magnético viene dado por las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial. Estas ecuaciones, para un medio homogéneo y suponiendo variación armónica de los campos [72], vienen expresadas a continuación:

$$\nabla \times \vec{E} = -\vec{M} - j\omega\mu\vec{H} \quad (2.8)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\varepsilon\vec{E} \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{q_{ve}}{\varepsilon} \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = \frac{q_{vm}}{\mu} \quad (2.11)$$

donde  $q_{ve}$  representa la densidad de carga eléctrica y  $q_{vm}$  la densidad de carga magnética.

En una región libre de fuentes de campo magnético, el vector densidad de flujo magnético  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  es siempre solenoidal. En esta situación, de la expresión (2.11) se deduce que se ha de cumplir que  $\nabla \cdot \mu \vec{H} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$ . A esta igualdad se le puede aplicar la identidad vectorial que establece que la divergencia de un rotacional es nula:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \quad (2.12)$$

De esta manera se introduce el concepto de potencial vector magnético  $\vec{A}$ . La expresión de la intensidad de campo magnético puede ser reescrita en función de este potencial de la siguiente forma:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \quad (2.13)$$

De una forma análoga al razonamiento seguido para introducir el potencial  $\vec{A}$ , se puede emplear la propiedad de que en una región libre de fuentes eléctricas, la densidad de flujo eléctrico es solenoidal:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \varepsilon \vec{E} = 0 \quad (2.14)$$

De esta forma, siguiendo un proceso similar al utilizado en el caso anterior,  $\vec{D}$  puede ser expresado como el rotacional de un nuevo vector  $\vec{F}$ , cumpliendo:

$$\nabla \cdot (-\nabla \times \vec{F}) = 0 \quad (2.15)$$

y:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = -\nabla \times \vec{F} \quad (2.16)$$

Aplicando las igualdades (2.13) y (2.16) a las expresiones (2.8) y (2.9), respectivamente, se tiene:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega (\nabla \times \vec{A}) \quad (2.17)$$

$$\nabla \times \vec{H} = -j\omega (\nabla \times \vec{F}) \quad (2.18)$$

Las expresiones anteriores pueden ser reescritas como:

$$\nabla \times (\vec{E} + j\omega \vec{A}) = 0 \quad (2.19)$$

$$\nabla \times (\vec{H} + j\omega \vec{F}) = 0 \quad (2.20)$$

En esta ocasión es posible aplicar una nueva identidad vectorial, que establece que el rotacional de un gradiente es nulo. Por tanto, los términos entre paréntesis en las expresiones (2.19) y (2.20) pueden ser escritas como el gradiente de dos funciones potenciales escalares arbitrarias, dependientes de la posición (potencial escalar eléctrico,  $\phi_e$ , y magnético,  $\phi_m$ ):

$$\vec{E} + j\omega \vec{A} = -\nabla \phi_e \quad (2.21)$$

$$\vec{H} + j\omega \vec{F} = -\nabla \phi_m \quad (2.22)$$

A continuación, si se toma el rotacional a ambos lados de las expresiones (2.13) y (2.16), y asumiendo que el medio es homogéneo, se tiene:

$$\mu \nabla \times \vec{H} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} \quad (2.23)$$

$$\varepsilon \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \nabla \times \vec{F} \quad (2.24)$$

Y en este punto es posible aplicar la siguiente igualdad vectorial:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{g} = \nabla (\nabla \cdot \vec{g}) - \nabla^2 \vec{g} \quad (2.25)$$

Utilizando la identidad anterior y las ecuaciones (2.8), (2.9), (2.23) y (2.24), se obtienen las expresiones:

$$\mu \vec{J} + j\omega\mu\varepsilon \vec{E} = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (2.26)$$

$$\varepsilon \vec{M} + j\omega\mu\varepsilon \vec{H} = \nabla (\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} \quad (2.27)$$

Es posible definir en este momento la divergencia de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{F}$ , ya que son independientes de sus rotacionales, definidos anteriormente. Existen varias expresiones empleadas típicamente para ello. Por la simplificación que introduce, una de las más populares es la llamada *condición (o gauge) de Lorentz*:

$$\nabla \cdot \vec{A} = -j\omega\varepsilon\mu\phi_e \quad (2.28)$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = -j\omega\varepsilon\mu\phi_m \quad (2.29)$$

De esta forma quedan bien definidos tanto los potenciales vectores como los escalares. Combinando por separado las expresiones (2.28), (2.26) y (2.21) para el vector  $\vec{A}$ , y (2.29), (2.27) y (2.22) para  $\vec{F}$ , se obtienen las ecuaciones de onda de los vectores potenciales que, haciendo  $\beta^2 = \omega^2\mu\varepsilon$ , son:

$$\nabla^2 \vec{A} + \beta^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad (2.30)$$

$$\nabla^2 \vec{F} + \beta^2 \vec{F} = -\varepsilon \vec{M} \quad (2.31)$$

### 2.3.2 Ecuaciones Integrales de Campo Eléctrico y Magnético

En este apartado se obtiene la formulación integral correspondiente a los campos eléctrico y magnético asociados a un problema electromagnético. Para ello, en primer lugar se obtienen las expresiones integrales de los potenciales vectores a partir de las ecuaciones de onda (2.30) y (2.31), para posteriormente aplicarlas en las expresiones de la *EFIE* y *MFIE*. Finalmente, se mencionarán las aproximaciones que es posible realizar en caso de que la geometría analizada esté compuesta por superficies conductoras, ya que es el caso considerado en esta tesis.

Supóngase una fuente de corriente eléctrica según una coordenada genérica  $\alpha$  (donde  $\alpha = x, y, z$ ). Bajo esta consideración, la ecuación de onda (2.30) se puede expresar como:

$$\nabla^2 A_\alpha + \beta^2 A_\alpha = -\mu J_\alpha \quad (2.32)$$

Para resolver la ecuación se puede considerar en primer lugar el caso estático (haciendo  $\beta = 0$ ):

$$\nabla^2 A_\alpha = -\mu J_\alpha \quad (2.33)$$

La expresión anterior constituye la ecuación de *Poisson*, cuya solución es conocida:

$$A_\alpha = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{J_\alpha}{R} dV' \quad (2.34)$$

En esta expresión,  $R$  representa la distancia radial del punto fuente sobre el objeto al punto de observación. La solución armónica en el tiempo se obtiene multiplicando la anterior por el término de fase  $e^{-j\beta R}$  [17]:

$$A_\alpha = \frac{\mu}{4\pi} \int_V J_\alpha \frac{e^{-j\beta R}}{R} dV' \quad (2.35)$$

A partir de (2.35) se puede expresar el potencial vector magnético  $\vec{A}$  de forma vectorial:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \vec{J} \frac{e^{-j\beta R}}{R} dV' \quad (2.36)$$

y, análogamente, la expresión del potencial vector eléctrico  $\vec{F}$  viene dada por:

$$\vec{F} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_V \vec{M} \frac{e^{-j\beta R}}{R} dV' \quad (2.37)$$

en el caso de que las corrientes se extiendan únicamente a la superficie  $S$  del cuerpo, las expresiones (2.36) y (2.37) se pueden reducir a:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \vec{J} \frac{e^{-j\beta R}}{R} dS' \quad (2.38)$$

$$\vec{F} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_S \vec{M} \frac{e^{-j\beta R}}{R} dS' \quad (2.39)$$

A partir de este punto se considerará que los problemas electromagnéticos bajo análisis están modelados mediante objetos conductores eléctricos perfectos (o *PEC* en la terminología anglosajona), por ser el caso considerado en la presente tesis. Ello implica que no existe densidad de carga ni de corriente eléctrica, y por tanto el potencial vector  $\vec{F}$  es nulo, por lo que los campos son expresados por medio del potencial vector  $\vec{A}$ . La ampliación al caso de medios materiales puede ser llevada a cabo sin dificultad empleando el teorema de dualidad [17], que establece relaciones de similitud entre las expresiones de ambos potenciales, corrientes y campos generados.

La ecuación integral de campo eléctrico se basa en la condición de contorno por la que en un objeto conductor eléctrico perfecto el campo eléctrico tangencial se anula sobre la superficie, como se ha visto en la sección 2.2. El campo incidente induce sobre  $S$  una corriente eléctrica que, a su vez, genera el campo dispersado por el objeto. Una vez conocida la corriente, este campo puede calcularse en cualquier punto del espacio combinando (2.21) con (2.28) para obtener la expresión:

$$\vec{E}^s(\vec{r}) = -j\omega \vec{A}(\vec{r}) - j\frac{1}{\omega\mu\epsilon} \nabla (\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r})) \quad (2.40)$$

Empleando la expresión integral del potencial vector magnético obtenida anteriormente, (2.40) puede reescribirse de la forma:

$$\vec{E}^s(\vec{r}) = \frac{-j\omega\mu}{4\pi} \int_S \vec{J}_s(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dS' - \frac{j}{4\pi\omega\epsilon} \nabla \int \nabla' \cdot \vec{J}_s(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dS' \quad (2.41)$$

donde  $\vec{r}$  indica el punto de observación y  $\vec{r}'$  hace referencia al punto fuente de campo. El operador nabla primado actúa sobre éste último, mientras que sin primar lo hace sobre la fuente. Se ha introducido también la función de *Green* en espacio libre,  $G(\vec{r}, \vec{r}')$ , definida como:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-jK|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (2.42)$$

siendo  $K$  el número de onda, equivalente al valor de  $\beta$  en la ecuación de onda, pero frecuentemente utilizado en su lugar en problemas de radiación. Si los puntos de observación se ven restringidos a la propia superficie  $S$  donde la corriente está definida, el desvanecimiento de la componente tangencial de campo eléctrico junto con la aplicación del principio de equivalencia permiten imponer la condición:

$$\hat{n} \times \vec{E}(\vec{r}) = \hat{n} \times [\vec{E}^{inc}(\vec{r}) + \vec{E}^s(\vec{r})] = 0, \quad \vec{r} \in S \quad (2.43)$$

con lo cual:

$$\vec{E}^{inc}(\vec{r}) = -\vec{E}^s(\vec{r}), \quad \vec{r} \in S \quad (2.44)$$

y, aplicando (2.44) a la expresión (2.41), se obtiene de forma inmediata la expresión de la ecuación integral de campo eléctrico (*EFIE*) para un problema genérico tridimensional, y aplicable tanto al caso de objetos cerrados como de superficies abiertas:

$$\begin{aligned} \text{EFIE} \implies \vec{E}^{inc}(\vec{r}) &= \frac{j\omega\mu}{4\pi} \int_S \vec{J}_s(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dS' + \\ &+ \frac{j}{4\pi\omega\epsilon} \nabla \int_S \nabla' \cdot \vec{J}_s(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dS', \quad \vec{r} \in S \end{aligned} \quad (2.45)$$

Para la obtención de la ecuación integral de campo magnético se sigue un proceso similar, empleando la condición de contorno que establece que la densidad de corriente eléctrica total sobre la superficie conductora  $S$  es igual a la componente tangencial del campo magnético existente en ella. Utilizando (2.13) se tiene:

$$\vec{H}^s(\vec{r}) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \quad (2.46)$$

Empleando la definición de la función de Green en espacio libre, (2.46) puede expresarse como:

$$\vec{H}^s(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int_S \vec{J}_s(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dS' \quad (2.47)$$

La expresión anterior puede simplificarse teniendo en cuenta que las derivadas de la corriente eléctrica respecto al punto de observación son nulas, y considerando la siguiente identidad vectorial:

$$\nabla \times (\vec{g} \phi) = \phi \nabla \times \vec{g} + \nabla \phi \times \vec{g} \quad (2.48)$$

se tiene:

$$\vec{H}^s(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \nabla G(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{J}_s(\vec{r}') dS' \quad (2.49)$$

donde el gradiente de la función de Green en espacio libre, respecto al punto de observación, viene dado por:

$$\nabla G(\vec{r}, \vec{r}') = - \left( \frac{1 + jKR}{R^2} \right) e^{-jKR} \hat{R}, \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'|, \quad \hat{R} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.50)$$

Sobre los puntos de la superficie, se debe cumplir que la densidad de corriente eléctrica inducida sea igual a la componente tangencial del campo magnético:

$$\vec{J}_s(\vec{r}) = \hat{n} \times \vec{H}(\vec{r}) = \hat{n} \times \left[ \vec{H}^{inc}(\vec{r}) + \vec{H}^s(\vec{r}) \right], \quad \vec{r} \in S \quad (2.51)$$

con lo que, a partir de la expresión de campo magnético dispersado dado por (2.49), se obtiene la ecuación integral de campo magnético (*MFIE*), únicamente aplicable al caso de cuerpos cerrados:

$$MFIE \implies \vec{J}_s(\vec{r}) = \hat{n} \times \left\{ \vec{H}^{inc}(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi} \int_S \nabla G(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{J}_s(\vec{r}') dS' \right\} \quad (2.52)$$

## 2.4 La Aproximación de Óptica Física

La resolución de las ecuaciones integrodiferenciales (2.45) y (2.52) mediante métodos rigurosos ofrece unos resultados muy precisos, y por tanto parejos a las medidas de campo obtenidas en cámaras anecoicas o mediante otros dispositivos. Sin embargo, hay que tener presente que, tanto para discretizar la geometría como los operadores que aparecen en estas expresiones, es necesario emplear funciones de subdominio de un tamaño

del orden de una décima de longitud de onda, o incluso inferior. Esta discretización implica la generación de problemas lineales que llevan asociados matrices cuyo manejo y almacenamiento, en la mayoría de los análisis de objetos eléctricamente grandes, son inabordables incluso con equipos informáticos de última generación. Debido a esto es imprescindible contar con aproximaciones que, en este tipo de situaciones, ofrezcan resultados suficientemente satisfactorios [1, 73].

La Óptica Física [74], también conocida frecuentemente como *aproximación de Kirchhoff*, supone un paso intermedio entre los métodos rigurosos y los basados en el trazado de rayos. Esta aproximación utiliza la óptica de rayos para estimar la corriente sobre una superficie, calculando posteriormente las integrales de radiación para obtener los campos dispersados.

Una de las aproximaciones introducidas por la Óptica Física consiste en suponer que la corriente inducida en un punto de una superficie de la geometría es igual a aquella que se induciría en un plano infinito tangente a la superficie en dicho punto. Esto implica que todos los puntos de la superficie se encuentran desacoplados entre sí, de manera que en cada punto la corriente inducida depende exclusivamente del campo incidente. Aplicando el principio de equivalencia a una superficie PEC, y bajo la hipótesis realizada, se debe cumplir que, sobre los puntos de la superficie, los campos satisfagan las condiciones:

$$\hat{n}(\vec{r}') \times \vec{E}(\vec{r}') = 0, \quad \vec{r}' \in S \quad (2.53)$$

$$\hat{n}(\vec{r}') \times \vec{H}(\vec{r}') = \hat{n}(\vec{r}') \times [\vec{H}^{inc}(\vec{r}') + \vec{H}^s(\vec{r}')] = 2\hat{n}(\vec{r}') \times \vec{H}^{inc}(\vec{r}'), \quad \vec{r}' \in S \quad (2.54)$$

esto es debido a que las componentes tangenciales del campo dispersado y del campo incidente se encuentran en fase y su amplitud es la misma. La corriente inducida en ese punto de la superficie es:

$$\vec{J}(\vec{r}') = 2\hat{n}(\vec{r}') \times \vec{H}^{inc}(\vec{r}') \quad (2.55)$$

$$\vec{M}(\vec{r}') = 0 \quad (2.56)$$

Esta simplificación, válida en los casos en que las superficies presentan un tamaño y un radio de curvatura eléctricamente grandes, constituye una relajación enorme de los requisitos computacionales utilizados por los métodos rigurosos, ya que se elimina la corriente como incógnita y únicamente se deben considerar las integrales de radiación (2.41) y (2.47) para calcular los campos dispersados por el objeto. Sin embargo, aunque se consideren desacoplados todos los puntos de cada superficie en la geometría, sí se pueden considerar interacciones entre superficies diferentes que constituyen grupos de puntos lejanos entre sí. En tal caso se pueden analizar por separado los distintos efectos que tienen lugar en cada caso, al igual que se hace en métodos basados en trazado de rayos como *GO/GTD*, donde se consideran reflexiones simples, dobles, triples o de órdenes superiores. El poder visualizar cada efecto por separado permite, a diferencia de los métodos rigurosos, obtener una visión intuitiva de la interacción física entre la geometría y la perturbación electromagnética. En la figura 2.2 se muestra gráficamente un caso en el que están considerados cuatro efectos o interacciones entre superficies. La corriente eléctrica en cada parche es calculada a partir del campo magnético dispersado por la superficie origen, según la expresión (2.49). Finalmente se calcula el campo dispersado (eléctrico o magnético), para lo que se pueden realizar aproximaciones de campo lejano en caso de que el objetivo del análisis sea la obtención de la RCS [75] o del diagrama de radiación de una antena cercana a la geometría, o las expresiones exactas en caso de que se desee obtener el campo cercano en uno o varios puntos de observación.

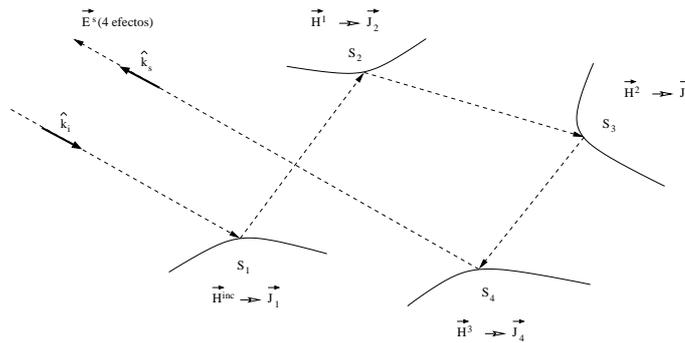


Figura 2.2: Esquema ilustrativo de un caso en el que se consideran cuatro interacciones entre una onda incidente y la geometría.

Otra aproximación introducida por la Óptica Física consiste en la suposición de que los campos en las regiones no iluminadas (u ocultas) de la superficie son nulos.

Esto implica una discontinuidad de los campos en la frontera de sombra (figura 2.3), ya que las integrales se extienden únicamente a las zonas iluminadas de la geometría. Al igual que en la simplificación anterior, la validez de esta aproximación radica en que el tamaño eléctrico de los objetos sea elevado. En el capítulo 5 se realiza un análisis más extenso del problema de la ocultación.

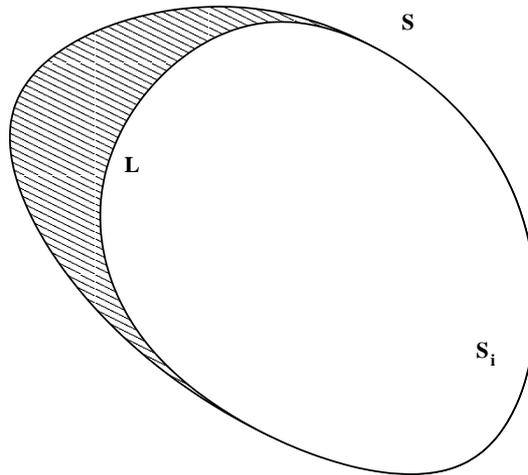


Figura 2.3: Zona iluminada  $S_i$  y frontera de sombra  $L$  sobre la superficie  $S$ .

Es común encontrar en la literatura expresiones de la integral de Óptica Física obtenidas a partir de la aproximación de campo lejano ( $\vec{r} \rightarrow \infty$ ), realizando la siguiente aproximación de la función de Green en espacio libre y de su gradiente:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-jKr}}{r} e^{j\vec{K}_s \cdot \vec{r}'} \quad (2.57)$$

$$\nabla' G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-jKr}}{r} j\vec{K}_s e^{j\vec{K}_s \cdot \vec{r}'} \quad (2.58)$$

donde  $\vec{K}_s = K\hat{k}_s$ , siendo  $\hat{k}_s$  el vector unitario en la dirección que une el punto origen y el punto destino, y  $r = |\vec{r}|$ .

Esta aproximación se utiliza junto con un desarrollo de las ecuaciones de *Stratton-Chu* [76, 77], que expresan los campos dispersados mediante la integración sobre una

superficie cerrada de expresiones que utilizan las componentes tangenciales y normales de los campos. En este caso, para resolver el problema de la discontinuidad, mostrado en la figura 2.3, y hacer que las expresiones resultantes cumplan las ecuaciones de Maxwell (esto es, emplear una integración sobre superficies abiertas), se pueden introducir unos términos que realizan una integral de línea a lo largo de la frontera de sombra  $L$  [10]:

$$\vec{E}_L(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi j\omega\epsilon} \oint_L \nabla' G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{H}(\vec{r}') \cdot d\vec{l} \quad (2.59)$$

$$\vec{H}_L(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi j\omega\mu} \oint_L \nabla' G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{l} \quad (2.60)$$

De esta forma, los campos dispersados corregidos con estos términos y particularizados para cuerpos conductores eléctricos perfectos vienen dados por:

$$\vec{E}^s(\vec{r}) = \vec{E}_{S_i}^s(\vec{r}) + \vec{E}_L(\vec{r}) \quad (2.61)$$

$$\vec{H}^s(\vec{r}) = \vec{H}_{S_i}^s(\vec{r}) + \vec{H}_L(\vec{r}) \quad (2.62)$$

donde  $\vec{E}_{S_i}^s(\vec{r})$  y  $\vec{H}_{S_i}^s(\vec{r})$  resultan de aplicar las integrales de radiación sólo a la zona iluminada de la geometría.

Convirtiendo las integrales de línea en integrales superficiales [10], y considerando el caso de dispersores PEC, los campos dispersados en zona lejana vienen dados por [43]:

$$\begin{aligned} \vec{E}^s(\vec{r}) = & \frac{j\omega\mu}{2\pi} \frac{e^{-jKr}}{r} \int_{S_i} \left\{ -\left[ \hat{n}(\vec{r}') \times \vec{H}^{inc}(\vec{r}') \right] + \right. \\ & \left. + \left( \hat{k}_s \cdot \left[ \hat{n}(\vec{r}') \times \vec{H}^{inc}(\vec{r}') \right] \right) \hat{k}_s \right\} e^{j\vec{K}_s \cdot \vec{r}'} dS' \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\vec{H}^s(\vec{r}) = \frac{jK}{2\pi} \frac{e^{-jKr}}{r} \int_{S_i} \left\{ - \left[ \hat{n}(\vec{r}') \times \vec{H}^{inc}(\vec{r}') \right] \times \hat{k}_s \right\} e^{j\vec{K}_s \cdot \vec{r}'} dS'$$

Si se considera exclusivamente el campo eléctrico dispersado, y empleando las condiciones de contorno (2.53) y (2.54) sobre la superficie, se puede obtener la expresión general del campo eléctrico dispersado:

$$\vec{E}^s(\vec{r}) = \frac{-j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jKr}}{r} \int_{S_i} \left\{ \left( \hat{k}_s \times \vec{J}_s(\vec{r}') \right) \times \hat{k}_s \right\} e^{j\vec{K}_s \cdot \vec{r}'} dS' \quad (2.64)$$

donde  $\vec{J}_s(\vec{r})$  es la corriente resultante en el punto  $\vec{r}$  de la superficie que contribuye al campo scattering. Esta expresión puede ser aplicada, por tanto, para el cálculo del campo dispersado por la superficie  $S_4$  en el esquema de la figura 2.2.

## 2.5 Expresión Diádica de la Función de Green

Como se ha visto a lo largo de este capítulo, las expresiones integrodiferenciales que definen los problemas electromagnéticos pueden ser representadas, de forma general, mediante la ecuación:

$$L(\vec{h}) = \vec{f} \quad (2.65)$$

donde  $L$  es un operador integrodiferencial. En la mayoría de los casos, esta expresión no puede ser representada de forma compacta mediante la utilización de una función de Green escalar, entendiéndose como función de Green aquella que obtiene el campo debido a un punto fuente. Debe destacarse que dicha función es dependiendo del tipo de campo a obtener ( $\vec{E}$  o  $\vec{H}$ ), de la fuente ( $\vec{J}$ ,  $\vec{M}$ ) y de otros parámetros en la definición del problema. Una representación genérica adecuada de la solución de (2.65) en el caso de que las incógnitas se extiendan sobre una superficie  $S$  puede ser expresada de la forma:

$$h_x(\vec{r}) = \int_S [f_x(\vec{r}')G_{xx}(\vec{r}, \vec{r}') + f_y(\vec{r}')G_{xy}(\vec{r}, \vec{r}') + f_z(\vec{r}')G_{xz}(\vec{r}, \vec{r}')] dS' \quad (2.66)$$

$$h_y(\vec{r}) = \int_S [f_x(\vec{r}')G_{yx}(\vec{r}, \vec{r}') + f_y(\vec{r}')G_{yy}(\vec{r}, \vec{r}') + f_z(\vec{r}')G_{yz}(\vec{r}, \vec{r}')] dS' \quad (2.67)$$

$$h_z(\vec{r}) = \int_S [f_x(\vec{r}')G_{zx}(\vec{r}, \vec{r}') + f_y(\vec{r}')G_{zy}(\vec{r}, \vec{r}') + f_z(\vec{r}')G_{zz}(\vec{r}, \vec{r}')] dS' \quad (2.68)$$

de esta forma se considera la situación de que una componente de la fuente produzca un campo en una dirección distinta a la original. Para expresar estas relaciones de una forma compacta, se utiliza la representación tensorial o diádica de la función de Green [78–82]:

$$\vec{h}(\vec{r}) = \int_S \vec{f}(\vec{r}') \vec{G}(\vec{r}, \vec{r}') dS' \quad (2.69)$$

donde:

$$\vec{G}((\vec{r}), (\vec{r}')) = \hat{a}_x \vec{G}_x(\vec{r}, \vec{r}') + \hat{a}_y \vec{G}_y(\vec{r}, \vec{r}') + \hat{a}_z \vec{G}_z(\vec{r}, \vec{r}') \quad (2.70)$$

Para formar la función de Green diádica, se deben calcular los tres vectores  $\vec{G}_x(\vec{r}, \vec{r}')$ ,  $\vec{G}_y(\vec{r}, \vec{r}')$  y  $\vec{G}_z(\vec{r}, \vec{r}')$  aplicando el operador  $L$  de la forma:

$$L \left\{ \vec{G}_x(\vec{r}, \vec{r}') \right\} = \hat{a}_x \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.71)$$

$$L \left\{ \vec{G}_y(\vec{r}, \vec{r}') \right\} = \hat{a}_y \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.72)$$

$$L \left\{ \vec{G}_z(\vec{r}, \vec{r}') \right\} = \hat{a}_z \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.73)$$

y las condiciones de contorno adecuadas, según el problema considerado. Una vez obtenida la función  $\vec{G}(\vec{r}, \vec{r}')$ , ésta puede ser expresada en forma matricial:

$$\vec{G}(\vec{r}, \vec{r}') = \begin{bmatrix} \Gamma_{xx}^{\alpha\beta} & \Gamma_{xy}^{\alpha\beta} & \Gamma_{xz}^{\alpha\beta} \\ \Gamma_{yx}^{\alpha\beta} & \Gamma_{yy}^{\alpha\beta} & \Gamma_{yz}^{\alpha\beta} \\ \Gamma_{zx}^{\alpha\beta} & \Gamma_{zy}^{\alpha\beta} & \Gamma_{zz}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

donde el índice  $\alpha$  hace referencia al tipo de campo calculado y  $\beta$  indica la fuente del mismo. Como ejemplo ilustrativo, los elementos  $\Gamma_{ij}$  de la matriz para la función de Green del campo eléctrico debido a la corriente eléctrica y suponiendo el caso de propagación en espacio libre, vienen dados por [72]:

$$\Gamma_{ii}^{EJ} = \left( -j\omega\mu + \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial i^2} \right) \frac{\psi}{4\pi} \quad (2.75)$$

$$\Gamma_{ij}^{EJ} = \frac{1}{j\omega\epsilon 4\pi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial i \partial j}; \quad i \neq j \quad (2.76)$$

donde  $\psi$  es la función de Green escalar en espacio libre, definida en (2.42). El cambio de notación introducido se debe a motivos de claridad en la lectura, ya que en esta sección se ha denotado por  $G$  a una función de Green genérica, y no sólo a la de espacio libre.

En capítulos posteriores se hace referencia a este tipo de notación para definir las funciones de Green, debido a las ventajas que su utilización conlleva para clarificar la lectura de las expresiones integrales.

## 2.6 Modos de corriente

En capítulos posteriores de la tesis se emplea el término *modos de corriente* para expresar una expansión de la misma mediante un sumatorio de funciones exponenciales complejas, cada una de ellas formada por un término vectorial de amplitud y un término escalar de fase, ambos de variación lenta sobre el dominio en el que están definidos. Esta variación suave es posible siempre que las superficies que soportan estas corrientes sean eléctricamente grandes en tamaño y radio de curvatura, y no estén excesivamente cercanas a la fuente de campo. Estas condiciones son similares a las que definen el campo de aplicación de la Óptica Física, por lo que la expansión de las corrientes de PO por medio de modos de corriente resulta ser muy apropiada. Posteriormente se comentan las ventajas de este tipo de representación frente a otras alternativas.

La expresión general de una distribución de corriente superficial sobre  $S$  en términos de modos de corriente viene dada por:

$$\vec{J}(\vec{r}') = \sum_{m=1}^N \vec{S}_m(\vec{r}') e^{-j\phi_m(\vec{r}')}, \quad \vec{r}' \in S \quad (2.77)$$

A modo de ejemplo se ha calculado la corriente de PO sobre una superficie semi-cilíndrica (figura 2.4) con un radio de 0,45 metros y una longitud de 8,94 metros, con su eje orientado a lo largo del eje  $y$ , que induce una onda plana incidente según  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\phi = \pi$ , polarizada en la componente  $\theta$ . En las figuras 2.5 y 2.6 se observan las componentes real e imaginaria, respectivamente, de la componente  $y$  de la corriente inducida. Las figuras 2.7 y 2.8 muestran la misma corriente representada como un modo (funciones de amplitud y fase). No se ha representado la componente imaginaria del modo de la componente  $y$  de la amplitud del modo de corriente debido a que es nula para esta dirección de incidencia. Se observa que la variación de las funciones que definen el modo de corriente es mucho más suave que la de las muestras de la misma, lo cual permite, como se estudia en los capítulos siguientes, reducir los recursos computacionales necesarios para su almacenamiento y para el cálculo de los campos dispersados.

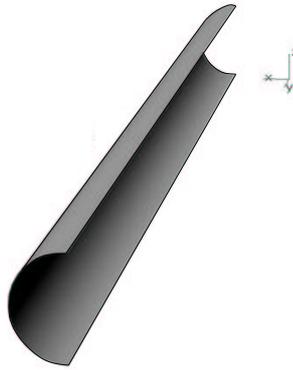


Figura 2.4: *Superficie semicilíndrica.*

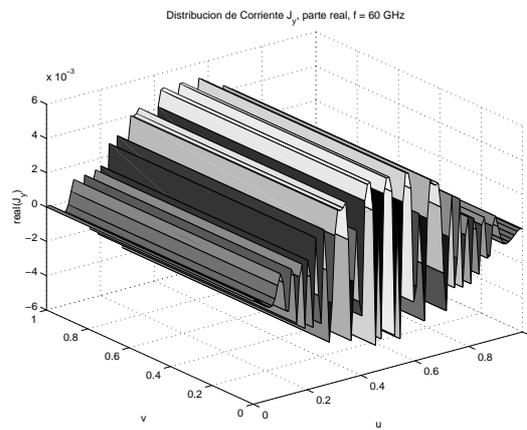


Figura 2.5: *Componente real de la corriente  $J_y$ .*

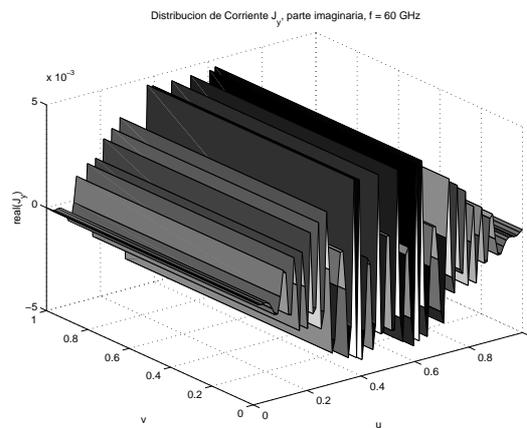


Figura 2.6: *Componente imaginaria de la corriente  $J_y$ .*

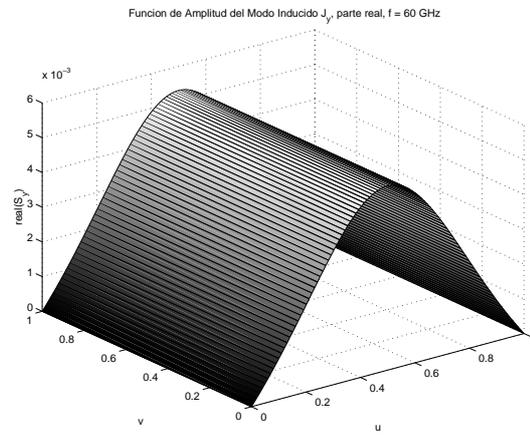


Figura 2.7: *Componente real de la amplitud del modo de corriente  $J_y$ .*

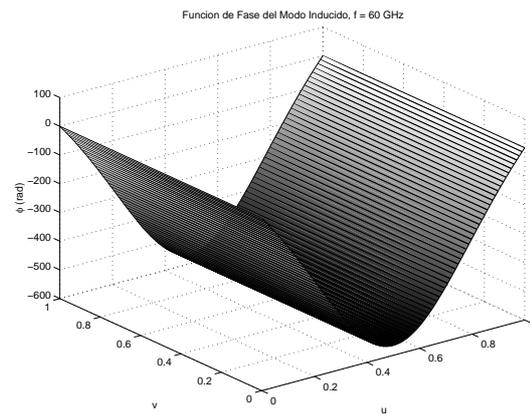


Figura 2.8: *Fase del modo de corriente.*

# Capítulo 3

## Desarrollo de Métodos Cuasianalíticos de Integración

### 3.1 Introducción

Como se ha indicado con anterioridad, la utilización de métodos que consideran las distribuciones superficiales de corriente sobre los parches de la geometría requiere el cálculo de expresiones integrales para la obtención de los campos radiados. En el caso de los métodos de alta frecuencia, la aproximación de Óptica Física tiene acarreado un coste computacional creciente con la frecuencia de análisis debido a la necesidad de cálculo, almacenamiento e integración de estas corrientes.

En este capítulo se presentan técnicas destinadas a aliviar el tiempo de cálculo en el proceso de integración de la corriente para la obtención de los campos radiados. Para ello, empleando la aproximación de los modos de corriente, en la sección 3.2 se desarrolla la expresión integral considerando aproximaciones polinómicas para los términos de amplitud y fase. En la sección 3.3 se aplican técnicas para la obtención de los campos radiados cuando en cada región de integración de una partición previamente establecida de la superficie la fase está cercana a ser lineal (sección 3.3.1) o a una función cuadrática bidimensional (sección 3.3.2). Dentro de este último caso se presenta el problema de la aproximación eficiente de la *función de error compleja* ( $erf$ ), para el que se propone en

la sección 3.3.3 una solución basada en un desarrollo de su expresión en forma de serie numérica. Finalmente, en la sección 3.4 se expone el procedimiento adoptado para, una vez conocida la función de fase en forma polinomial sobre la superficie, realizar una partición de la misma de manera que en las regiones generadas se garantice la precisión de los resultados obtenidos mediante las aproximaciones propuestas en las secciones 3.3.1 y 3.3.2.

## 3.2 Expresión de la Integral

Para el desarrollo de las expresiones analíticas que permitan la obtención de los campos, conviene partir de una situación inicial en la que la corriente inducida sobre una superficie esté expresada como una suma de funciones exponenciales complejas, definidas en toda la superficie o en un conjunto de regiones de la misma. También se asume que cada una de estas funciones o *modos de corriente* está formada por un término de amplitud y un término de fase, ambos de variación suave sobre el dominio en que está definidos. Esta descomposición permite expresar una distribución de corriente sobre superficies eléctricamente grandes de forma eficiente.

La expresión general de la corriente sobre un parche puede escribirse como superposición de un número finito de modos de corriente :

$$\vec{S}(\vec{r}) = \sum_{m=1}^N \vec{S}_m(\vec{r}) e^{-j\phi_m(\vec{r})} \quad (3.1)$$

donde  $\vec{S}_m(\vec{r})$  es la función de amplitud y  $\phi_m(\vec{r})$  la función de fase que caracteriza al m-ésimo modo. Más adelante se utilizará esta propiedad para realizar la integración de forma eficiente.

Para calcular el campo en un determinado punto de observación, indicado por el vector de posición  $\vec{r}$ , una vez conocida la corriente sobre la superficie, es necesario el cálculo de una expresión de la forma:

$$I = \int_S \sum_{m=1}^N \vec{S}_m(\vec{r}') e^{-j\phi_m(\vec{r}')} \overline{G}(\vec{r}, \vec{r}') dS' \quad (3.2)$$

Donde S indica la superficie sobre la que se distribuye la corriente y el término  $\overline{G}(\vec{r}, \vec{r}')$  es una función de Green diádica.

En los casos en que la superficie no esté excesivamente cerca del punto de observación, la función de Green también presenta un comportamiento suave en módulo y fase, lo que hace posible escribirla como:

$$\overline{G}(\vec{r}, \vec{r}') = A(\overline{G}(\vec{r}, \vec{r}')) e^{-j\Phi(\overline{G}(\vec{r}, \vec{r}'))} \quad (3.3)$$

donde la función  $A(\overline{G}(\vec{r}, \vec{r}'))$  indica el término de amplitud de la función de Green y  $\Phi(\overline{G}(\vec{r}, \vec{r}'))$  se refiere al término de fase de la misma. De esta manera, se puede expresar todo el integrando como:

$$I = \int_S \sum_{m=1}^N \vec{M}_m(\vec{r}') e^{-j\Phi_m(\vec{r}')} dS' \quad (3.4)$$

donde las funciones  $\vec{M}_m(\vec{r}')$  y  $\Phi_m(\vec{r}')$  incluyen los términos de amplitud y fase del modo de corriente  $m$  y de la función de Green de manera conjunta:

$$\vec{M}_m(\vec{r}') = \vec{S}_m(\vec{r}') A(\overline{G}(\vec{r}, \vec{r}')) \quad (3.5)$$

$$\Phi_m(\vec{r}') = \phi_m(\vec{r}') + \Phi(\overline{G}(\vec{r}, \vec{r}')) \quad (3.6)$$

El par de funciones (amplitud y fase) que definen el integrando en (3.4), bajo las hipótesis propuestas (superficie de suave y puntos fuente y observación no demasiado cercanos) presentan también una variación lenta sobre la superficie, lo cual puede ser

aprovechado, como se verá más adelante, para la utilización de aproximaciones polinomiales que deriven en métodos analíticos para la obtención de los campos radiados. Como se ha comentado previamente, el integrando se puede ver como un sumatorio de las contribuciones de todos los modos existentes sobre  $S$ , por lo que la expresión del campo queda vinculada a la resolución de cada una de dichas integrales.

Si se considera un modelado geométrico mediante superficies paramétricas, las funciones que definen al modo dependen de las coordenadas  $(u, v)$  sobre el parche. De esta forma, (3.4) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{m=1}^N \vec{M}_m(u, v) e^{-j\Phi_m(u, v)} | \vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v) | dudv \quad (3.7)$$

Donde se ha asumido que el dominio para ambas componentes paramétricas es  $[0,1]$ . El término  $| \vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v) |$  da cuenta del elemento diferencial de área en coordenadas paramétricas. Para su cálculo se emplean las derivadas de la superficie NURBS en las componentes  $u$  y  $v$ :

$$\begin{aligned} \vec{r}_u(u, v) &= \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} \\ \vec{r}_v(u, v) &= \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Las funciones  $\vec{M}_m(u, v)$  y  $\Phi_m(u, v)$  pueden ser aproximadas mediante un número reducido de muestras en ambas coordenadas. En [83] se propone un método para su interpolación mediante superficies de Bezier, que permiten guardar los valores de corriente sobre un parche utilizando una cantidad reducida de memoria para su almacenamiento. Otra posible forma de almacenamiento eficiente consiste en la utilización de polinomios bidimensionales construidos mediante una aproximación de mínimos cuadrados, que además es la expresión en la que se basan los métodos analíticos de integración propuestos en este mismo capítulo. No obstante, es importante realizar una distinción entre la forma de almacenamiento de la corriente y las expresiones con las que se describe la misma en los métodos de integración, de forma que pueden combi-

narse las aproximaciones basadas en parches de Bezier para el almacenamiento con las puramente polinomiales para la integración.

### 3.3 Técnicas Cuasianalíticas de Integración

#### 3.3.1 Aproximación de la Fase Mediante Expresiones Lineales

La primera técnica para la obtención de los campos presentada en este capítulo se basa en un particionamiento de la superficie sobre la que está descrita la corriente, compuesto por regiones en las que la fase varía de una forma aproximadamente lineal. El error de no linealidad cometido es controlado mediante un umbral fijado *a priori*, y se traduce en un término residual de variación lenta que posteriormente se incluye en la función de amplitud del integrando.

Partiendo de la expresión general (3.4) se realiza un desarrollo de Taylor bidimensional en torno a un punto de referencia sobre la superficie NURBS,  $(u_0, v_0)$ . Por conveniencia, en la aplicación práctica de esta técnica, se ha considerado a  $(u_0, v_0)$  como el punto central de la región considerada para la integración. Tras el cálculo del desarrollo en serie de Taylor, el término de fase del integrando puede expresarse de la forma:

$$\Phi(u, v) = \Phi(u_0, v_0) + \omega_{u_0}(u - u_0) + \omega_{v_0}(v - v_0) + R(u, v) \quad (3.9)$$

donde:

$$\omega_{u_0} = \left. \frac{\partial \Phi(u, v)}{\partial u} \right|_{u=u_0, v=v_0} \quad (3.10)$$

$$\omega_{v_0} = \left. \frac{\partial \Phi(u, v)}{\partial v} \right|_{u=u_0, v=v_0}$$

La función residual  $R(u, v)$  incluye todos los términos no lineales de la función de fase. Para acotar su amplitud, dicha función debe ser inferior a un determinado umbral angular predeterminado,  $\gamma$ . Se ha comprobado que con valores de  $\gamma$  situados entre 1 y 2 radianes se obtienen buenos resultados en la mayoría de los casos. Cuando la función residual exceda en algún punto de la superficie el valor del umbral, se debe proceder a una división previa del parche en regiones que aseguren la condición:

$$R(u, v) \leq \gamma_{umbral} \quad \text{sobre } S \quad (3.11)$$

Una vez asegurada la condición (3.11) sobre la superficie  $S$ , es posible incluir el término residual en la función de amplitud del integrando sin alterar notablemente su comportamiento suave. De esta manera, denotando a  $I_m$  como a la integral debida a uno de los modos en la expresión (3.7), resulta:

$$I_m = e^{-j\Phi(u_0, v_0)} \int_0^1 \int_0^1 \vec{M}'_m(u, v) e^{-j[\omega_{u0}(u-u_0) + \omega_{v0}(v-v_0)]} dudv \quad (3.12)$$

donde:

$$\vec{M}'_m(u, v) = \vec{M}_m(u, v) |\vec{r}'_u(u, v) \times \vec{r}'_v(u, v)| e^{-jR(u, v)} \quad (3.13)$$

A la vista de la expresión (3.13) es fácil establecer el efecto que el umbral  $\gamma_{umbral}$  tiene sobre esta nueva función de amplitud. Esta constante determina una variación adicional de la fase dentro del término de amplitud. Dado que, como se mostrará a continuación, se realiza una posterior aproximación polinomial, un valor de  $\gamma$  sobredimensionado puede ocasionar una oscilación excesiva de la citada función, de forma que tanto su expresión en forma polinomial como el valor final de campo estimado adolezcan de una precisión pobre.

Si en la expresión (3.12) se realiza un cambio de variable para establecer el origen del sistema de coordenadas paramétricas en el punto  $(u_0, v_0)$ , se puede reescribir la misma como:

$$I_m = e^{-jA} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \overrightarrow{M}'_m(u, v) e^{-j(\omega_{u0}t_1 + \omega_{v0}t_2)} dt_1 dt_2 \quad (3.14)$$

donde  $t_1$  y  $t_2$  dan cuenta del cambio realizado:

$$\begin{aligned} t_1 &= u - \frac{1}{2} \\ t_2 &= v - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

El término de fase constante,  $A$ , viene dado por:

$$A = \Phi(u_0, v_0) + \omega_{u0} \left( \frac{1}{2} - u_0 \right) + \omega_{v0} \left( \frac{1}{2} - v_0 \right) \quad (3.16)$$

Es posible extender el dominio de integración a  $(-\infty, \infty)$  mediante la inclusión de funciones pulso como factores en el integrando:

$$I_m = e^{-jA} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overrightarrow{M}'_m(t_1, t_2) p(t_1) p(t_2) e^{-j(\omega_{u0}t_1 + \omega_{v0}t_2)} dt_1 dt_2 \quad (3.17)$$

Las funciones pulso introducidas vienen definidas por:

$$p(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.18)$$

La expresión (3.17) puede ser interpretada como la transformada bidimensional de Fourier de la función  $\overrightarrow{M}'_m(t_1, t_2)$ , enventanada por las funciones pulso  $p(t_1)$  y  $p(t_2)$  y evaluada en las frecuencias  $w_{u_0}$  y  $w_{v_0}$ . Dado que el término de amplitud del integrando experimenta una variación suave bajo las condiciones establecidas previamente, es posible realizar una aproximación polinomial basada en mínimos cuadrados, para generar

un polinomio bidimensional de grado  $G_1 \times G_2$ , que permite expresar la citada función como:

$$\vec{M}(u, v) = \sum_{p=0}^{G_1} \sum_{q=0}^{G_2} \vec{c}_{p,q} u^p v^q \quad (3.19)$$

El grado de los polinomios, junto al valor umbral utilizado en (3.11) para acotar la función residual, determinan la precisión en los resultados obtenidos. En un caso general, si se reduce el valor de  $\gamma$ , el algoritmo de particionado previo al proceso de integración genera un número mayor de regiones donde posteriormente se realizan las aproximaciones del integrando por medio de funciones polinómicas, suponiendo un mayor tiempo de cálculo y, como consecuencia, una mayor precisión en los resultados finales. Por otra parte, la elección de polinomios de grado elevado conlleva un coste computacional añadido a la hora de realizar la aproximación de mínimos cuadrados, que requiere la generación y resolución de un sistema de ecuaciones con tantas incógnitas como coeficientes a resolver (apéndice B). Por lo tanto conviene realizar una estimación previa del grado a tomar en cada componente paramétrica, en base a criterios como el tamaño de la región, la variación de la corriente inducida o la distancia entre la superficie radiante y los puntos de observación. Además, desde el punto de vista numérico, los sistemas a resolver en este tipo de problemas de mínimos cuadrados suelen estar mal condicionados, por lo que, considerando estas observaciones, se recomienda no utilizar polinomios de grado alto. En las simulaciones realizadas durante el desarrollo de esta tesis se han empleado polinomios de grado 4 o inferior en ambas coordenadas  $(t_1, t_2)$  con resultados satisfactorios.

Una vez obtenida la expresión polinomial para la función de amplitud del integrando, la obtención de la integral pasa por la utilización de la transformada de Fourier que establece que:

$$t^n x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j^n \frac{d^n X(\omega)}{d\omega^n} \quad (3.20)$$

Considerando esta transformación, y una vez hallados los coeficientes que aparecen en (3.19), resulta inmediata la obtención del valor de campo radiado por la corriente existente en la región del parche NURBS:

$$I = e^{-jA} \sum_{p=0}^{G_1} \sum_{q=0}^{G_2} \vec{\mathcal{C}}_{p,q} \left\{ j^p \frac{d^p}{dw_u^p} \text{sinc}(w_u) j^q \frac{d^q}{dw_v^q} \text{sinc}(w_v) \right\} \Bigg|_{w_u=w_{u0}, w_v=w_{v0}} \quad (3.21)$$

### 3.3.2 Aproximación de la Fase mediante Expresiones Cuadráticas

La técnica numérica mostrada en la sección anterior hace uso de una división en regiones en las que el término de fase del integrando está cercano a ser lineal. La mayor parte de las geometrías realistas, sin embargo, contienen algunas partes curvadas, o bien superficies con *puntos degenerados*, para las cuales la fase de la corriente inducida varía de forma no lineal en el dominio paramétrico aunque en el real lo haga linealmente. Existen, además, muchas situaciones en las que el frente de onda que incide en una superficie no es plano, como en el caso de que la excitación esté compuesta por una o varias fuentes puntuales o cuando se analiza la corriente que una superficie radiante induce sobre otra que no se encuentre a una distancia exageradamente lejana a ella. Debido a la frecuencia con la que se presentan este tipo de casos, resulta interesante investigar la posibilidad de expresar el término de fase en (3.7) como una función cuadrática. En el caso de utilizar un desarrollo en serie de Taylor de orden 2 en torno al punto  $(u_0, v_0)$ , la expresión del término de fase puede ser escrita del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \Phi(u, v) = & \Phi(u_0, v_0) + \omega_{u_0}(u - u_0) + \omega_{v_0}(v - v_0) + \omega_{2u_0}(u - u_0)^2 + \\ & + \omega_{2v_0}(v - v_0)^2 + \omega_{u_0v_0}(u - u_0)(v - v_0) + R^3(u, v) \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde la función  $R^3(u, v)$  contiene a todos los términos de orden superior a 2 del desarrollo. Los coeficientes vienen dados por las derivadas paramétricas primeras y segundas de la superficie NURBS:

$$\begin{aligned}
\omega_{u_0} &= \left. \frac{\partial \Phi(u, v)}{\partial u} \right|_{u=u_0, v=v_0} \\
\omega_{2u_0} &= \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi(u, v)}{\partial u^2} \right|_{u=u_0, v=v_0} \\
\omega_{v_0} &= \left. \frac{\partial \Phi(u, v)}{\partial v} \right|_{u=u_0, v=v_0} \\
\omega_{u_0 v_0} &= \left. \frac{\partial^2 \Phi(u, v)}{\partial u \partial v} \right|_{u=u_0, v=v_0} \\
\omega_{2v_0} &= \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi(u, v)}{\partial v^2} \right|_{u=u_0, v=v_0}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Modificando estos coeficientes se llega a la expresión general de un polinomio cuadrático bidimensional:

$$\Phi(u, v) = c_{00} + c_{10}u + c_{20}u^2 + c_{01}v + c_{11}uv + c_{02}v^2 + R^3(u, v) \tag{3.24}$$

donde:

$$\begin{aligned}
c_{00} &= \Phi(u_0, v_0) - \omega_{u_0}u_0 - \omega_{v_0}v_0 - \omega_{2u_0}u_0^2 - \omega_{2v_0}v_0^2 - \omega_{u_0}\omega_{v_0}u_0v_0 \\
c_{10} &= \omega_{u_0} - \omega_{2u_0}u_0 - \omega_{u_0v_0}v_0 \\
c_{20} &= \omega_{2u_0} \\
c_{01} &= \omega_{v_0} - \omega_{2v_0}v_0 - \omega_{u_0v_0}u_0 \\
c_{11} &= \omega_{u_0v_0} \\
c_{02} &= \omega_{2v_0}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Con estas consideraciones, la expresión (3.7) puede ser reescrita de la forma:

$$I_m = e^{-jc_{00}} \int_0^1 \int_0^1 \vec{M}_m(u, v) e^{-j[c_{10}u + c_{20}u^2 + c_{01}v + c_{11}uv + c_{02}v^2]} dudv \tag{3.26}$$

donde la función de amplitud  $\vec{M}'_m(u, v)$  viene dada por:

$$\vec{M}'_m(u, v) = \vec{M}_m(u, v) |\vec{r}'_u(u, v) \times \vec{r}'_v(u, v)| e^{-jR^3(u, v)} \quad (3.27)$$

Para el funcionamiento correcto de las técnicas analíticas de integración al emplear expresiones cuadráticas para el término de fase del integrando, se requiere el cumplimiento de las mismas premisas que fueron expuestas en la variante del término lineal de fase, es decir, que la función  $\vec{M}'_m(u, v)$  sea aproximable polinomialmente y que el término residual  $R^3(u, v)$  esté acotado por un umbral prefijado:

$$R^3(u, v) \leq \gamma_{umbral} \quad \text{sobre } S \quad (3.28)$$

Se supone una aproximación de la función de amplitud del integrando en forma polinómica, tal y como viene expresada por (3.19). De esta manera, la resolución de la integral (3.26) se reduce a la suma de las integrales de cada monomio multiplicado por la función de fase.

En la literatura existen en algunas referencias de fórmulas analíticas unidimensionales cuando el integrando consiste en una potencia de la variable de integración multiplicada por un término exponencial cuadrático [84]. A partir de ellas, es posible generalizar fórmulas para una potencia  $N$  de dicha variable y un término exponencial imaginario puro:

$$I_{M,N} = \int x^N e^{-j(ax^2+2bx)} dx = \frac{P_N(x)e^{-j(ax^2+bx)} + K_N e^{-j\frac{b^2}{a}} \operatorname{erf} \left[ \frac{j}{\sqrt{ja}}(ax + b) \right]}{2^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1} a^N \sqrt{ja}} + C \quad (3.29)$$

La tabla 3.1 muestra los coeficientes de los polinomios  $P_N(x)$ , así como las constantes  $K_N$ , para distintos valores del exponente  $N$ . Conviene señalar la singularidad de la expresión anterior cuando  $c_{02} = 0$ , lo cual implica que la expresión no es aplicable cuando la componente cuadrática del término de fase es muy débil. En estos casos, sin embargo, la aproximación de fase lineal mostrada en la sección 3.3.1 es muy adecuada.

Por tanto, las dos técnicas expuestas en este capítulo pueden complementarse para reforzar su eficiencia.

N	$\frac{P_N(x)}{\sqrt{ja}}$	$\frac{K_N}{\sqrt{\pi}}$
0	0	1
1	$j$	$-b$
2	$2j(ax - b)$	$2b^2 - ja$
3	$2j(a^2x^2 - abx + b^2) + 2a$	$b(3ja - 2b^2)$
4	$4j(a^3x^3 - a^2bx^2 + b^2ax - b^3) + a(6ax - 10b)$	$4b^2(b^2 - 3ja) - 3a^2$
5	$4j(a^4x^4 - a^3bx^3 + a^2b^2x^2 - ab^3x + b^4) + a(8a^2x^2 - 14abx + 18b^2 - 8aj)$	$b(-4b^4 + 20jb^2a + 15a^2)$
6	$8j(a^5x^5 - a^4bx^4 + a^3b^2x^3 - a^2b^3x^2 + ab^4x - b^5) + a(20a^3x^3 - 36a^2bx^2 + 48ab^2x - 56b^3) - 30ja^3x + 66ja^2b$	$8b^6 - 60jab^4 - 90a^2b^2 + 15ja^3$
7	$8j(a^6x^6 + a^5bx^5 + a^4b^2x^4 - a^3b^3x^3 + a^2b^4x^2 - ab^5x + b^6) + a(24a^4x^4 - 44a^3bx^3 + 60a^2b^2x^2 - 48a^2 + 80b^4) - 48ja^4x^2 - 72a^2b^3x + 114ja^3bx - 174ja^2b^2$	$84jab^5 - 8b^7 - 105jba^3 + 210b^3a^2$

Tabla 3.1: Valores analíticos de los coeficientes en la expresión 3.29 para distintos valores de  $N$

La fórmula analítica unidimensional mostrada en (3.29) puede ser ampliada al caso de integración 2D integrando primero en una componente y después en la otra. De esta manera se obtiene:

$$I_{M,N} = \int_{u-}^{u+} \int_{v-}^{v+} u^M v^N e^{-j(\Phi(u,v) - R^3(u,v))} dudv = \quad (3.30)$$

$$e^{-jc_{00}} \int_{u-}^{u+} u^M e^{-j(c_{10}u + c_{20}u^2)} \left[ \int_{v-}^{v+} v^N e^{-j(c_{01}v + c_{11}uv + c_{02}v^2)} dv \right] du$$

Para resolver la integral anterior, se procede a definir una función bidimensional,

denotada como  $F^{(N)}$ , cuya única dependencia con  $u$  es debida al término cruzado de fase,  $c_{11}$ . Esta función engloba a la expresión encerrada entre corchetes en (3.30):

$$F^{(N)}(u, v) = \int v^N e^{-j(c_{01}v + c_{11}uv + c_{02}v^2)} dv \quad (3.31)$$

incluyendo la función anterior en (3.30) resulta:

$$I_{M,N} = e^{-jc_{00}} \int_{u^-}^{u^+} u^M e^{-j(c_{10}u + c_{20}u^2)} (F^{(N)}(u, v^+) - F^{(N)}(u, v^-)) du$$

Aplicando la fórmula vista para el caso unidimensional (3.29) a la expresión anterior, es posible determinar una solución analítica para la integral indefinida (3.30) mediante la utilización de un par de funciones auxiliares,  $S(v)$  y  $T(v)$ :

$$I_{M,N} = \frac{e^{-jc_{00}}}{2^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1} c_{02}^N \sqrt{j c_{02}}} [S(v^+) - S(v^-) + T(v^+) - T(v^-)] \quad (3.32)$$

donde las funciones  $S(v)$  y  $T(v)$  vienen dadas por:

$$S(v) = e^{-j(c_{01}v + c_{02}v^2)} \int_{u^-}^{u^+} u^M P_N(u, v) e^{-j(c_{10}u + c_{11}uv + c_{20}u^2)} du \quad (3.33)$$

$$T(v) = e^{j\frac{c_{01}^2}{4c_{02}}} \int_{u^-}^{u^+} u^M e^{-j\left(\left\{c_{10} - \frac{c_{01}c_{11}}{2c_{02}}u\right\} + \left\{c_{20} + \frac{c_{11}}{4c_{02}}u^2\right\}\right)} \cdot \operatorname{erf} \left[ \frac{j}{\sqrt{j c_{02}}} \left\{ c_{02}v + \frac{c_{01}}{2} + \frac{c_{11}}{2}u \right\} \right] Q_N(u) du \quad (3.34)$$

Los coeficientes de los polinomios  $P_N(u, v)$  y  $Q_N(u)$ , que han sido hallados analíticamente, son mostrados en la tabla 3.2 para una serie de valores de la potencia

$N$ . Nótese que, dado que en (3.32) se exige fijar la variable  $v$ , el cálculo de  $S(v_a)$ , para un valor de  $v_a$  definido dentro del dominio paramétrico, resulta inmediato con la aplicación de (3.29). El caso del cálculo de  $T(v_a)$  parece implicar una mayor dificultad por existir la *función de error compleja* como factor en el integrando. Sin embargo, como se verá en la siguiente sección, en la mayoría de los casos es posible expresar dicha función como suma de dos polinomios, uno de los cuales aparece además multiplicado por una función exponencial compleja, de manera que tras una correcta manipulación del integrando se puede obtener el valor de  $T(v_a)$  utilizando nuevamente (3.29).

$N$	$\frac{P_N(u,v)}{\sqrt{j c_{02}}}$	$\frac{Q_N(u)}{\sqrt{\pi}}$
0	0	1
1	$j$	$-\frac{1}{2}(c_{01} + c_{11}u)$
2	$-j c_{01} - j c_{11}u + 2j c_{02}v$	$\frac{1}{2}c_{01}^2 - j c_{02} + c_{01}c_{11}u + \frac{1}{2}c_{11}^2u^2$
3	$\frac{1}{2}j c_{01}^2 + 2c_{02} + j c_{01}c_{11}u + \frac{1}{2}j c_{11}u^2 - j c_{01}c_{02}v - j c_{02}c_{11}uv + 2j c_{02}^2v^2$	$\frac{1}{2}c_{01}(3j c_{02} - \frac{1}{2}c_{01}^2) + [\frac{1}{2}c_{11}(3j c_{02} - \frac{1}{2}c_{01}^2)]u - \frac{3}{4}c_{01}c_{11}^2u^2 - \frac{1}{4}c_{11}^3u^3$
4	$-c_{01}(\frac{1}{2}j c_{01}^2 + 5c_{02}) - (\frac{3}{2}j c_{01}^2c_{11} - 5c_{02}c_{11})u - (\frac{3}{2}j c_{01}c_{11}^2)u^2 - (\frac{1}{2}j c_{11}^3)u^3 + (j c_{02}c_{01}^2 + 6c_{02}^2)v + (2j c_{01}c_{11}c_{02})uv + (j c_{02}c_{11}^2)u^2v - (2j c_{02}^2c_{01})v^2 - (2j c_{02}^2c_{11})uv^2 + (4j c_{02}^3)v^3$	$c_{01}^2(\frac{1}{4}c_{01}^2 - 3j c_{02}) - 3c_{02}^2 + [\frac{1}{2}c_{01}^3c_{11} + 2c_{01}c_{11}(\frac{1}{4}c_{01}^2 - 3j c_{02})]u + [\frac{4}{3}c_{01}^2c_{11}^2 + c_{11}^2(\frac{1}{4}c_{01}^2 - 3j c_{02})]u^2 + c_{01}c_{11}^3u^3 + \frac{1}{4}c_{11}^4u^4$
5	$\frac{1}{4}j c_{01}^4 + \frac{9}{2}c_{02}c_{01}^2 - 8j c_{02}^2 + (j c_{01}^3c_{11} + 9c_{02}c_{01}c_{11})u + (\frac{3}{2}j c_{01}^2c_{11}^2 + \frac{9}{2}c_{02}c_{11}^2)u^2 + (j c_{01}c_{11}^3)u^3 + (\frac{1}{4}j c_{11}^4)u^4 - (\frac{1}{2}j c_{02}c_{01}^3 - 7c_{02}^2c_{01})v - (\frac{3}{2}j c_{02}c_{01}^2c_{11} - 7c_{02}^2c_{11})uv - (\frac{3}{2}j c_{02}c_{01}c_{11}^2)u^2v - (\frac{1}{2}j c_{02}c_{11}^3)u^3v + (j c_{02}^2c_{01}^2 + 8c_{02}^3)v^2 + (2j c_{02}^2c_{01}c_{11})uv^2 + (j c_{02}^2c_{11}^2)u^2v^2 - (2j c_{02}^3c_{01})v^3 - (2j c_{02}^3c_{11})uv^3 + (4j c_{02}^4)v^4$	$-\frac{1}{2}c_{01}(\frac{1}{4}c_{01}^4 - 5j c_{02}c_{01}^2 - 15c_{02}^2) + \frac{1}{2}[c_{01}(10j c_{01}c_{02}c_{11} - c_{01}^3c_{11}) + c_{11}(-\frac{1}{4}c_{01}^4 + 5j c_{02}c_{01}^2 + 15c_{02}^2)]u + \frac{1}{2}[c_{01}(5j c_{02}c_{11}^2 - \frac{3}{2}c_{01}^2c_{11}^2) + c_{11}(10j c_{01}c_{02}c_{11} - c_{01}^3c_{11})]u^2 - \frac{1}{2}[c_{01}^2c_{11}^3 - c_{11}(5j c_{02}c_{11}^2 - \frac{3}{2}c_{01}^2c_{11}^2)]u^3 - (\frac{5}{8}c_{01}c_{11}^4)u^4 - (\frac{1}{8}c_{11}^5)u^5$

Tabla 3.2: Valores analíticos de los coeficientes en las expresiones 3.33 y 3.34 para distintos valores de  $N$

### 3.3.3 Aproximación Polinomial de la Función de Error

Se conocen varios algoritmos numéricos que aproximan la función de error (*erf*) real mediante aproximaciones racionales, dependiendo de la precisión deseada. En el caso complejo se recurre a algoritmos iterativos [84], en los que se utilizan series infinitas para ir reduciendo progresivamente el error cometido. Esta función, sin embargo, suele presentar un comportamiento oscilante cuando el argumento es una función compleja lineal, por lo que, con vistas a su almacenamiento, resulta más apropiado descomponerla en los siguientes términos:

$$erf(\alpha(u, v) + j\beta(u, v)) = C(u, v) + D(u, v)e^{-2j\alpha(u, v)\beta(u, v)} \quad (3.35)$$

A partir de la expresión (3.34) se desprende que el argumento de la función de error compleja siempre va a venir determinado por tres de los coeficientes del término de fase. El citado argumento de la función de error es:

$$\alpha(u, v) + j\beta(u, v) = \frac{j}{\sqrt{j}c_{02}} \left\{ c_{02}v + \frac{c_{01}}{2} + \frac{c_{11}}{2}u \right\} \quad (3.36)$$

Para la evaluación de la función de error compleja se puede recurrir a su expresión mediante una suma infinita de términos [84]:

$$erf(x + jy) = erf(x) + \frac{e^{-x^2}}{2\pi x} [(1 - \cos(2xy)) + j\sin(2xy)] + \quad (3.37)$$

$$+ \frac{2}{\pi} e^{-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{4}n^2}}{n^2 + 4x^2} [f_n(x, y) + jg_n(x, y)] + \varepsilon(x, y)$$

donde:

$$\begin{aligned}
f_n(x, y) &= 2x - 2x \cosh(ny) \cos(2xy) + n \sinh(ny) \sin(2xy) \\
g_n(x, y) &= 2x \cosh(ny) \sin(2xy) + n \sinh(ny) \cos(2xy) \\
\varepsilon(x, y) &\approx 10^{-16} |\operatorname{erf}(x + jy)|
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Desarrollando la expresión anterior se puede llegar a (3.35), obteniendo las funciones  $C(u, v)$  y  $D(u, v)$ :

$$C(u, v) = \operatorname{erf}(\alpha(u, v)) + \frac{e^{-\alpha^2(u, v)}}{2\pi\alpha(u, v)} + \frac{4}{\pi}\alpha(u, v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\left(\alpha^2(u, v) + \frac{n^2}{4}\right)}{n^2 + 4\alpha^2(u, v)} \tag{3.39}$$

$$D(u, v) = \frac{-e^{-\alpha^2}}{2\pi\alpha(u, v)} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\alpha(u, v) + \frac{jn}{2}\right) \left(e^{n\beta(u, v) - \alpha^2(u, v) - \frac{n^2}{4}} + e^{-n\beta(u, v) - \alpha^2(u, v) - \frac{n^2}{4}}\right)}{n^2 + 4\alpha^2(u, v)} \tag{3.40}$$

La función de error de  $\alpha(u, v)$  puede calcularse según la aproximación racional [84]:

$$\operatorname{erf}(\alpha(u, v)) = 1 - (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5) e^{-\alpha(u, v)^2} + \varepsilon(\alpha(u, v)) \tag{3.41}$$

donde los valores de  $t$ , los coeficientes  $a_i$  y la función  $\varepsilon(\alpha(u, v))$  son:

$$\begin{aligned}
t &= \frac{1}{1 + px}, & p &= 0,3275911 \\
a_1 &= 0,254829592 \\
a_2 &= -0,284496736 \\
a_3 &= 1,421413741 \\
a_4 &= -1,453152027 \\
a_5 &= 1,061405429 \\
|\varepsilon(\alpha(u, v))| &\leq 1,5 \cdot 10^{-7}
\end{aligned}
\tag{3.42}$$

Los sumatorios que aparecen en (3.39) y (3.40) deben ser truncados para conseguir la precisión deseada. Se debe destacar que estas funciones presentan una variación suave, por lo que es posible expresarlas a partir de un conjunto reducido de muestras. A modo de ejemplo, en la figura 3.1 se muestra la evolución de las funciones  $C(u, v)$  y  $D(u, v)$  cuando se varían los valores de los coeficientes que aparecen en la expresión (3.36). Se ha considerado un valor fijo para  $v$ , por lo que en el ejemplo las funciones reciben como argumento una función lineal de  $u$ . Se observa cómo la variación de las funciones es lenta en todos los casos, favoreciendo su almacenamiento por medio de polinomios. De esta manera se consigue que el cálculo de (3.34) pueda ser realizado mediante la expresión (3.29).

### 3.4 Algoritmo Adaptativo de Particionamiento

Los dos métodos para la obtención de los campos radiados por superficies de corriente expuestos en las secciones 3.3.1 y 3.3.2 exigen, como ya se ha visto, que la superficie sobre la que se sitúa la corriente sea dividida en una serie de regiones, de modo que en cada una de ellas el término de amplitud del integrando varíe suavemente. Dicho término de amplitud contiene las contribuciones de la amplitud de la corriente inducida sobre el parche, la función de Green, y el término residual procedente del procesado de la función de fase. De este hecho se deriva la necesidad de disponer de un algoritmo que genere el mencionado conjunto de regiones a partir únicamente de la información del término de fase.

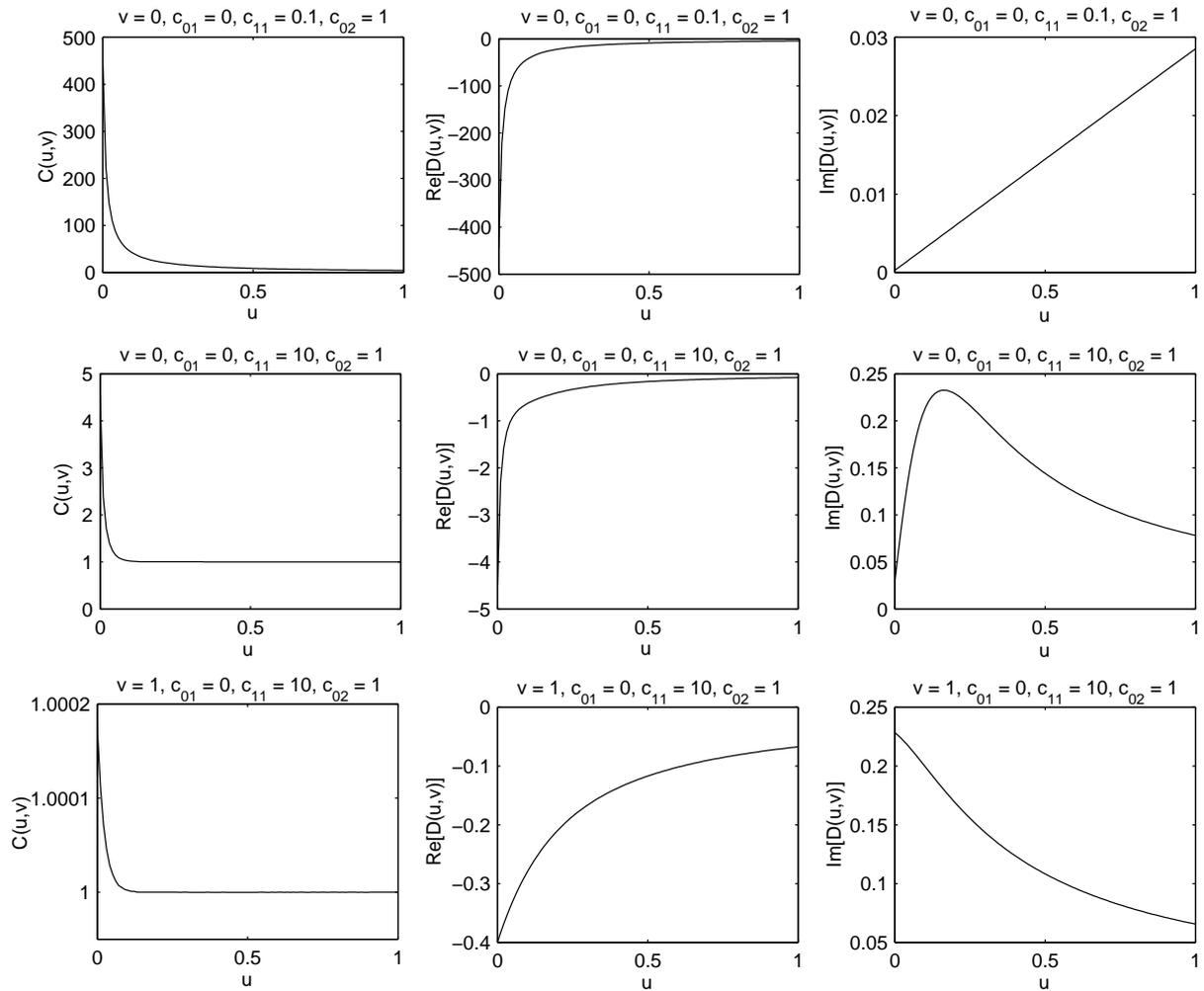


Figura 3.1: Ejemplos de  $C(u,v)$  y  $D(u,v)$  empleando un valor de  $v$  prefijado y diferentes valores para los coeficientes de la aproximación polinomial de fase.

Para ello se considera como punto de partida una única región que engloba a toda la superficie. Dado que se conoce el término de fase  $\Phi(u, v)$  que aparece en la expresión (3.7), el objetivo es determinar si el término residual de la expansión en serie de Taylor es suficientemente pequeño en toda la región. Se considera al punto central,  $(u_0, v_0)$ , como punto en torno al cual se realiza la aproximación. Para evaluar si se cumple la condición (3.11) o (3.28) en toda la región considerada, se establece una malla de puntos ( $4 \times 4$  o  $5 \times 5$  suele ser suficiente) sobre la misma y se evalúa el residuo en cada uno. En caso de que la condición no se cumpla para alguno de ellos, se debe realizar una subdivisión de la superficie y repetir el mismo procedimiento (mallado de puntos y evaluación de los valores del residuo) tomando como puntos centrales los centros de las regiones.

La situación de parada del algoritmo es comprobada al final de cada iteración del mismo, y consiste en la evaluación de dos condiciones:

- Valor de la función residual en los puntos de muestreo.
- Tamaño de las regiones consideradas no válidas.

El algoritmo es detenido, por tanto, cuando se cumple que en cada punto de muestreo sobre el dominio paramétrico el valor de la función residual es inferior al umbral estipulado, o cuando el tamaño eléctrico de las regiones que aún quedan por dividir es inferior a un tamaño mínimo (típicamente del orden de  $\lambda$ ). En este último caso se procede a realizar una integración mediante fórmulas numéricas (por ejemplo, *fórmulas de cuadratura Gaussianas* [84–86]), debido a que, para el reducido tamaño de la región, el empleo de fórmulas analíticas no supone una mejora sustancial en el tiempo de cálculo necesario ni, por supuesto, en la cantidad de memoria requerida para su almacenamiento.

En la figura 3.2 se muestra, a modo de ejemplo, una función de fase sobre la que se desea aplicar el algoritmo de particionamiento. Se ha elegido un caso unidimensional con el fin de clarificar el proceso, resultando inmediata su ampliación a dos componentes paramétricas. Es importante destacar que como punto de partida se considera todo el segmento paramétrico sobre el que está definida dicha función como una única región. Se asumirá, además, que la región inicial sobre la que está definida la función de fase

se extiende sobre un segmento eléctricamente grande, de modo que no se llegue a la condición de parada debido a un tamaño reducido de las regiones generadas.

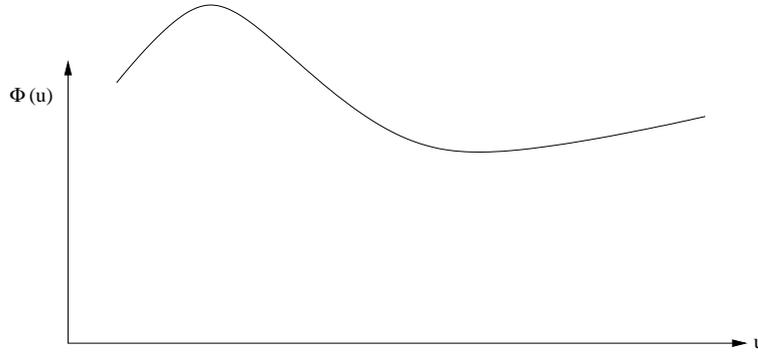


Figura 3.2: *Función de fase unidimensional.*

Inicialmente se considera el punto  $u_0$ , donde a partir de la derivada paramétrica de la función se obtiene la recta tangente a la curva. El valor de la función residual viene dado por la diferencia entre el valor real de la función y el de esta recta tangente. El umbral  $\gamma$  considerado para establecer la validez de una región viene también indicado gráficamente en la figura. Utilizando 4 puntos de muestreo sobre la región inicial se han marcado los valores de dicha función residual en un trazo más grueso.

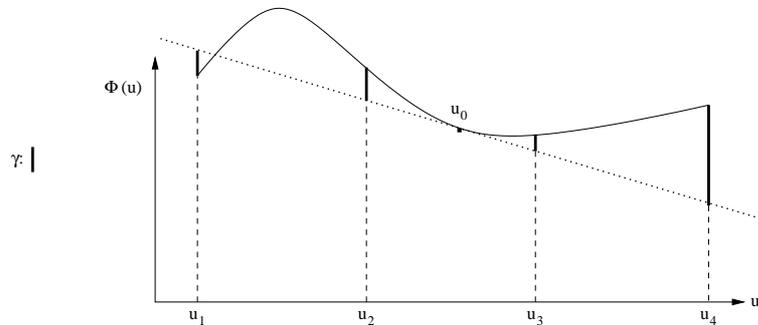


Figura 3.3: *Algoritmo de particionamiento: Cálculo de la función  $R(u)$  considerando una aproximación lineal de la fase. Inicialmente se considera una única región.*

Dado que la amplitud del residuo en varios de los puntos de muestreo es mayor que la del umbral, se procede a la subdivisión del dominio inicial. Se toma como punto delimitador el anterior centro  $u_0$ , aunque también es posible emplear otros criterios para establecer dónde romper la zona anterior en nuevas regiones (por ejemplo, dependiendo de la cantidad y situación de puntos de muestreo donde la función residual es inferior a  $\gamma$ ).

Tras la generación de las nuevas regiones, nuevamente se aplica sobre cada una de

ellas el procedimiento de cálculo de la función residual considerando una aproximación lineal de la fase  $\Phi(u, v)$ . Para ello se consideran los dos nuevos centros de las regiones,  $u_0^{(1)}$  y  $u_0^{(2)}$ . La figura 3.4 muestra la situación resultante. Se puede apreciar que en toda la *región 1* se cumple el criterio de que la amplitud de la función residuo no exceda la constante umbral  $\gamma$ , por lo que dicha región se considera válida, lo que implica que no se verá afectada por iteraciones posteriores del algoritmo de particionamiento. La función residual es excesivamente grande en algunas partes de la *región 2*, lo que queda de manifiesto al observar la diferencia entre la función de fase y la recta tangente al punto  $u_0^{(2)}$  en  $u_1^{(2)}$ . Ya que el único punto problemático de los considerados es  $u_1^{(2)}$ , es lógico pensar que hace falta establecer una nueva región en torno a este punto.

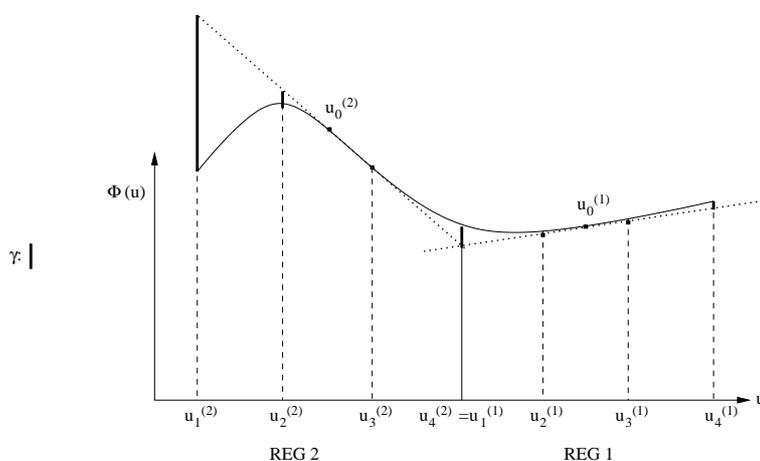


Figura 3.4: Algoritmo de particionamiento: Procesado de las dos nuevas regiones generadas.

En la figura 3.5 se muestra gráficamente el cálculo de la función  $R(u)$  en una serie de puntos de muestreo sobre las dos nuevas regiones generadas. Conviene destacar que la región 2 en la iteración anterior ha sido dividida tomando como frontera el punto  $u_2^{(3)}$ , dado que el resto de la región sí cumple con las premisas exigidas por la aproximación de fase lineal. En la figura se observa que las dos nuevas regiones consideradas son válidas y por tanto todo el segmento inicial queda dividido en las tres regiones mostradas en la figura.

En el ejemplo anterior se ha considerado la descomposición del segmento en el que estaba definida inicialmente la función de fase, de manera que dentro de cada región una aproximación lineal de la citada función sea suficientemente precisa. En el caso de emplear una aproximación cuadrática para expresar la fase dentro de cada región, con el objetivo de aplicar posteriormente el método descrito en la sección 3.3.2, resulta obvio pensar que es posible hacer el tamaño de cada región más grande, además de

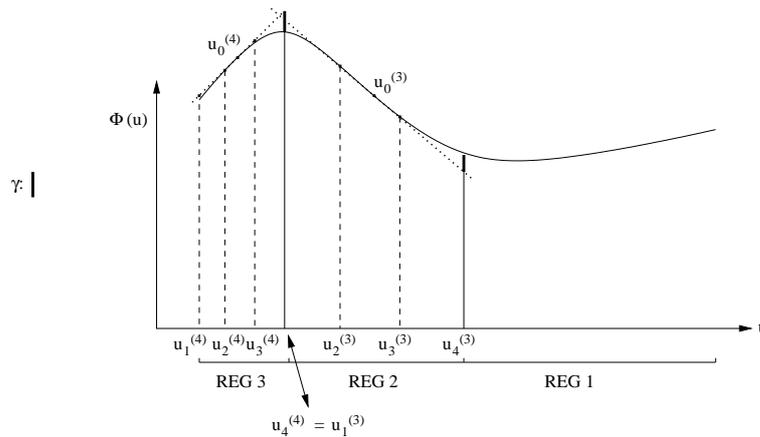


Figura 3.5: Algoritmo de particionamiento: Situación de parada.

reducir el valor de la función residual en cada punto de muestreo. El menor número de regiones a considerar generalmente compensa la mayor carga computacional que supone la aplicación de las fórmulas para el cálculo del campo. En la figura 3.6 se puede observar el resultado de emplear una aproximación cuadrática para el término de fase en cada región (que en el caso unidimensional se traduce en una parábola tangente al punto central de la región).

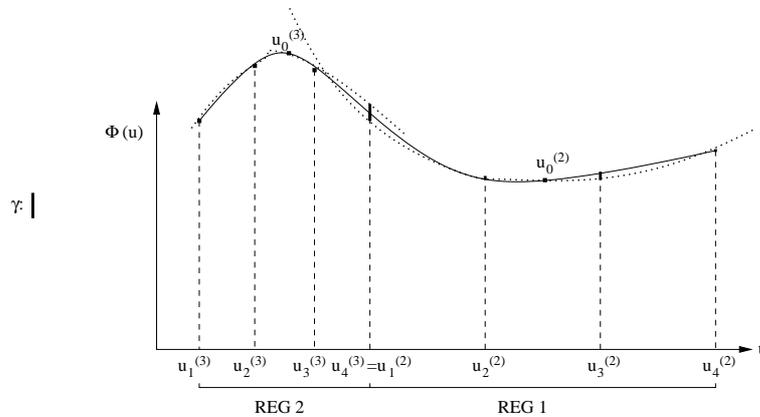
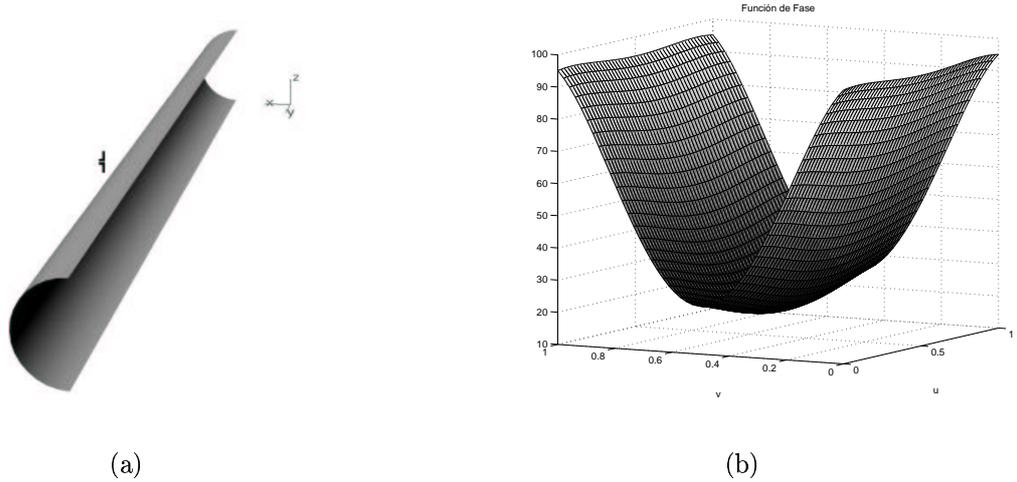


Figura 3.6: Resultado del particionamiento empleando la aproximación de fase cuadrática.

Como se puede ver en la figura, únicamente 2 regiones son necesarias en este caso frente a las 3 requeridas anteriormente. Generalmente la reducción del número de regiones es mucho mayor en casos realistas y eléctricamente grandes. Como prueba de ello, en la figura 3.7 se muestra un caso en el que se ha situado una fuente puntual frente a una superficie semicilíndrica de longitud 8,94 metros y de radio 0,45 metros (figura 3.7(a)). Se han representado dos gráficos correspondientes a la división del dominio paramétrico considerando las dos aproximaciones expuestas (expresión lineal y

cuadrática de la fase en cada región). La función de fase ha sido obtenida considerando una fuente puntual situada a una distancia de 0,55 metros del punto central de la superficie, como se puede observar en la figura. En las figuras 3.7(c) y 3.7(d) se observa el resultado de procesar la función de fase mostrada en la figura 3.7(b), obtenida a una frecuencia de 1 GHz, con el algoritmo adaptativo de particionamiento.



1	45	65	64	62	70	72
0.9	24	47	46	44	63	71
0.8	9		26	25		48
0.7	29		51	50		66
0.6	10		28	27		49
0.5	13	33	54	31	53	52
0.4	2	12	34	11	32	30
0.3	37	58	69	56	68	67
0.2	14	36	59	35	57	55
0.1	17		40	39		60
0	3		16	15		38
	4		19	18		41
	6	23	22	20	42	61
	1	8	7	5	21	43

1				
0.9	18	29	27	32
0.8	7	19	17	28
0.7	10	22	21	30
0.6	2	9	8	20
0.5	13	25	24	31
0.4	3	12	11	23
0.3	5	16	14	26
0.2	1	6	4	15
0.1				
0				

Figura 3.7: Comparación del esquema de particiones empleando las dos aproximaciones en el algoritmo adaptativo. (a): Esquema geométrico: Superficie semicilíndrica frente a una fuente puntual; (b): Función de fase del modo de corriente inducido por la fuente puntual sobre la superficie semicilíndrica, a la frecuencia de 1 GHz; (c): Esquema resultante de la aplicación de la aproximación lineal de la fase en cada región; (d): Esquema resultante de la aplicación de la aproximación cuadrática de la fase en cada región.

Se observa cómo el número de regiones a procesar se reduce de 72 en el caso de emplear la aproximación lineal de la función de fase a 32 si se utiliza la aproximación cuadrática. Esta diferencia depende, además del tamaño eléctrico del parche analizado, de su curvatura y de la distancia hasta la fuente radiante. Además, la dependencia del número de regiones generadas con la frecuencia se ve relajado en el caso de emplear la aproximación cuadrática de fase. La tabla 3.3 muestra la evolución de la cantidad de regiones en un barrido en frecuencia, de 1 GHz a 50 GHz. A medida que aumenta el tamaño eléctrico de la superficie se va reduciendo el cociente entre el número de regiones generadas con las aproximaciones cuadrática y lineal de fase, de 0,44 a 1 GHz (72 frente a 32 divisiones) hasta 0,11 a 50 GHz (3128 frente a 356 divisiones).

<b>Frecuencia (GHz)</b>	1	2	5	10	20	50
<b>Número de regiones generadas : Aproximación de fase lineal</b>	72	152	340	692	1308	3128
<b>Número de regiones generadas: Aproximación de fase cuadrática</b>	32	44	80	116	184	356

Tabla 3.3: *Comparación del número de regiones generadas, en función de la frecuencia y a partir de la función de fase, para una aproximación lineal y otra cuadrática de la misma.*

# Capítulo 4

## Análisis de Interacciones Múltiples sobre Dispersores Eléctricamente Grandes

### 4.1 Introducción

En este capítulo se presenta un método aplicable a casos en los que se desee analizar efectos de orden múltiple entre las partes de una estructura compleja, de forma que la fuente activa en muchas de las interacciones esté constituida por una superficie radiante, y no por una fuente puntual u onda plana. Es evidente que, si el problema del cálculo del campo debido a una distribución de corriente mediante integración numérica resulta costoso, en el caso del análisis de múltiples interacciones la complejidad crece de forma exponencial, con lo que se hace absolutamente necesario plantear métodos alternativos. Dichos métodos, en el contexto en el que se ha desarrollado esta tesis, pasan por la necesidad de aprovechar la expansión de las corrientes en forma de modos para disminuir los requerimientos de tiempo de cálculo y memoria necesaria para el almacenamiento de las corrientes. En la sección 4.2 se estudia el hecho de que a partir de unos pocos puntos de muestreo sea posible estimar los valores de corriente en una región amplia de la superficie, de acuerdo a la forma en la que se muestrean por separado las funciones de amplitud y de fase de un modo de corriente para su posterior

interpolación o aproximación. Este tipo de muestreo se compara, además, con otras técnicas que consideran la obtención de muestras de corriente sin realizar ningún tipo de aproximación. A continuación, en la sección 4.3 se analiza el caso de los modos de corriente inducidos por fuentes puntuales sobre superficies genéricas, en el que las funciones de fase pueden ser obtenidas de forma inmediata. Evidentemente, esta situación es la que precede de forma natural al proceso iterativo de cálculo de interacciones entre superficies, dado que en la gran mayoría de los casos prácticos las excitaciones vienen dadas por fuentes puntuales o por conjuntos de ellas. En la sección 4.4 se estudia el método iterativo entre superficies propiamente dicho, en el que tanto las corrientes que actúan como fuentes como las que resultan inducidas por aquéllas son expresadas mediante modos de corriente [65]. Para el cálculo eficiente de los campos en los puntos de muestreo sobre las superficies se emplean los métodos vistos en el capítulo 3. En la sección 4.4 se consideran los campos generados por distribuciones de corriente, sin especificar ninguna aproximación o método concreto para el cálculo de las mismas, lo que hace que las expresiones utilizadas se puedan aplicar a distintas formulaciones. Un caso concreto es tratado en la sección 4.4.1, donde se propone el método iterativo aplicado a las corrientes de Óptica Física sobre superficies conductoras.

Una de las hipótesis de trabajo de la técnica propuesta en la sección 4.4 consiste en que las dos superficies involucradas en cada interacción no estén excesivamente próximas entre sí. Evidentemente, esto no ha de cumplirse en un caso general, por lo que en la sección 4.4.2 se presenta un esquema de particionamiento de las dos superficies en zonas donde pueda aplicarse la aproximación de modos para expandir las corrientes o para el cálculo de los campos, y zonas en las que la corriente deba ser muestreada más densamente, bien para su almacenamiento o bien para calcular su contribución al campo dispersado, debido a la variación brusca de la distribución de corriente en estas regiones. En las partes donde existan irregularidades, discontinuidades o uniones abruptas entre superficies, las corrientes serán almacenadas mediante muestras, y los campos producidos se calcularán mediante técnicas numéricas de integración. En la sección 4.4.3 se hace énfasis en algunas consideraciones computacionales para la optimización de la eficiencia en la aplicación del método iterativo.

En la sección 4.5 se analiza un método alternativo para la obtención de las corrientes en forma de modos, empleando *técnicas de estimación espectral*. Concretamente se ha utilizado el método de superresolución conocido como *Pincel de Matrices*, descrito brevemente en la sección 4.5.1, aunque es posible emplear otros métodos existentes basándose en el procedimiento expuesto, consistente en aplicar el algoritmo de esti-

mación espectral a lo largo de segmentos isoparamétricos donde se obtienen varias muestras de la corriente inducida para obtener los parámetros que caracterizan a cada modo existente. El procedimiento utilizado para la obtención de la función de fase a partir de las frecuencias espaciales obtenidas mediante la estimación espectral es mostrado en la sección 4.5.3.

Finalmente, la sección 4.6 trata las expresiones para la obtención del campo dispersado en una dirección de observación mediante la aproximación de Óptica Física debido a las corrientes eléctricas existentes sobre una superficie, expandidas como modos de corriente.

## 4.2 Muestreo e Interpolación de la Corriente

Existen trabajos dedicados al estudio de métodos de muestreo óptimos para el análisis de problemas electromagnéticos donde se consideran funciones (por ejemplo, corrientes) limitadas en banda. Bucci [87–89] ha desarrollado algunas contribuciones notables en este campo. Sin embargo, el método de muestreo empleado en el presente trabajo es distinto de los analizados en estas referencias, por motivos que se discutirán a continuación.

Considérese un caso en el que un campo  $E(\xi)$  varía a lo largo de una curva  $C$ . De acuerdo con la premisa de separación de las funciones de amplitud y fase con variación suave, el campo puede expresarse de la siguiente forma:

$$E(\xi) = F(\xi)e^{-j\phi(\xi)} \quad (4.1)$$

La fórmula propuesta por Bucci para el muestreo de una función limitada en banda, tomando como límite de la banda un valor  $w$ , sugiere el uso de la siguiente función de amplitud:

$$F_w(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(w\xi)}{\xi} \otimes F(\xi) \quad (4.2)$$

donde el símbolo  $\otimes$  denota la convolución. Debe destacarse que  $F_W(\xi)$  es una señal de banda estrecha obtenida tras un filtrado paso banda del campo  $E(\xi)$ , por lo que puede ser muestreada en banda base empleando una frecuencia de muestreo baja, dado que está limitada en banda a  $w$ .

En los casos considerados en esta tesis se realiza un muestreo por separado de las funciones de amplitud y fase,  $F_i(\xi)$  y  $\phi(\xi)$ , de cada uno de los modos en los que se puede descomponer el campo:

$$E(\xi) = \sum_{i=1}^N F_i(\xi) e^{-j\phi_i(\xi)} \quad (4.3)$$

Las diferencias entre ambos procedimientos de muestreo se pueden mostrar de forma sencilla observando gráficamente la forma de  $\tilde{F}(\omega)$ , la transformada de Fourier de la función  $F(\psi)$ . La figura 4.1 muestra la forma de la función  $\tilde{F}_1(\omega)$ , extendida sobre todas las frecuencias en un ancho de banda  $B$ . El método propuesto por Bucci para muestrear la señal puede considerarse óptimo en este caso. La figura 4.2, en la que se muestra el espectro  $\tilde{F}_2(\omega)$  contrasta con la anterior porque su ancho de banda es el mismo, aunque ésta puede definirse mediante dos bandas estrechas de frecuencia,  $\Delta B_1$  y  $\Delta B_2$ , en lugar de hacerlo de una forma continua. La aplicación de la fórmula (4.2) en este caso consideraría de nuevo el ancho de banda total, en lugar de discriminar las dos subbandas existentes.

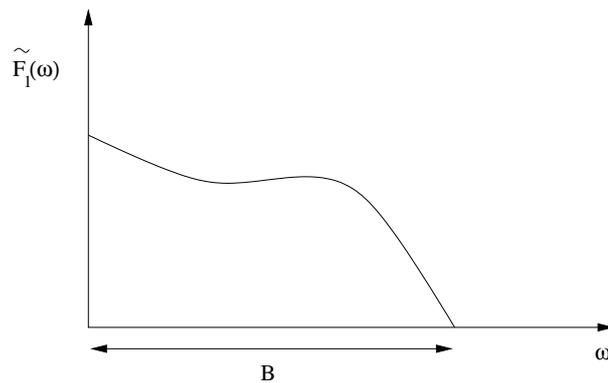


Figura 4.1: *Espectro de una señal con la energía repartida de forma continua en toda la banda B.*

Para considerar estos casos, han surgido algunos trabajos [90] que utilizan un filtrado de la señal en subbandas y una traslación posterior a la banda base, donde se

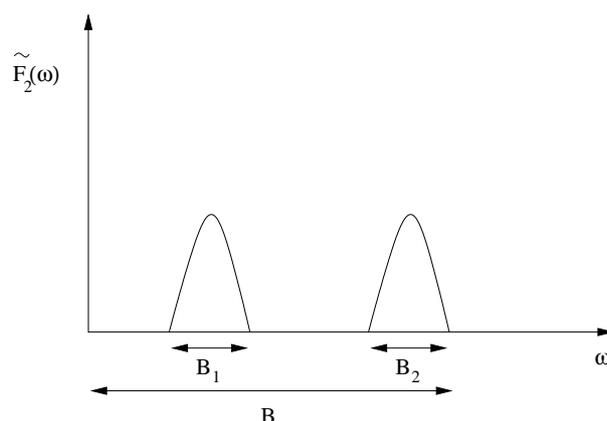


Figura 4.2: Espectro de una señal con la energía concentrada en dos subbandas,  $\Delta B_1$  y  $\Delta B_2$ .

puede realizar un muestreo más eficiente. El filtrado es equivalente a la localización de los dos *modos* observados en la figura 4.2, mientras que el muestreo en banda base equivale a tomar muestras de las funciones de amplitud y fase (de banda estrecha),  $F_i(\xi)$  y  $\phi_i(\xi)$ , que caracterizan a cada modo. Otros trabajos que tratan de aprovechar la lentitud con que varían estas funciones pueden ser consultados en [91, 92]. Altman y Mittra han estudiado cómo los modos de corriente son invariantes en frecuencia, salvo por un factor de escala frecuencial. Esto ha sido aprovechado para encontrar soluciones a varias frecuencias utilizando ciertas frecuencias intermedias [93, 94].

Durante el desarrollo de la tesis, se han empleado valores típicos de entre 4 y 7 puntos de muestreo en cada coordenada paramétrica, dependiendo de parámetros como el tamaño eléctrico de la región considerada o de estimaciones *a priori* de la variación de las funciones de amplitud y fase de los modos. Resulta evidente que la utilización de un número tan reducido de muestras en problemas que pueden presentar superficies de varios cientos de longitudes de onda cuadradas supone un incremento enorme de la eficiencia computacional en comparación con métodos clásicos en los que la corriente se expande mediante funciones de subdominio.

### 4.3 Expresión de las Corrientes Impresas

En una gran cantidad de casos reales, las fuentes de campo electromagnético vienen dadas bien por ondas incidentes (generalmente ondas planas, como es el caso de pro-

blemas de cálculo de sección radar), o bien por fuentes simples (como dipolos u otras estructuras radiantes con un determinado diagrama de radiación). En estos casos la obtención de los modos de corriente impresos sobre las superficies de la geometría resulta sencilla, debido a que la función de fase "desenrollada" (*unwrapped* en terminología anglosajona) queda bien definida, dependiente de la frecuencia de trabajo y de la distancia de cada punto de la geometría a un punto fijo que se considera como centro de fase. De esta manera se obtienen las corrientes iniciales en el proceso iterativo cuando se desea considerar varios efectos.

Dependiendo del tipo de aproximación que se emplee para obtener las corrientes (Óptica Física u otra formulación equivalente), la función de amplitud de los modos inducidos puede adoptar distintas formas, aunque generalmente son similares entre sí, mientras que la función de fase es independiente de la aproximación utilizada, debido a que sólo tiene en cuenta distancias eléctricas entre puntos.

### Modo de Corriente Impreso por Onda Plana Incidente

En el caso de que la excitación venga dada por una onda plana (como es el caso del análisis de RCS monoestática o biestática), la expresión general de la onda incidente viene dada por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-j\vec{K}_i \cdot \vec{r}} \quad (4.4)$$

Donde  $\vec{E}_0$  representa la amplitud de la onda plana, y  $\vec{K}_i$  es el vector de ondas:

$$\vec{K}_i = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{k}_i \quad (4.5)$$

siendo  $\hat{k}_i$  la dirección de incidencia de la onda plana.

A la vista de la expresión anterior, resulta inmediata su descomposición en la forma de un modo de corriente, haciendo:

$$\begin{aligned}\vec{S}_1(\vec{r}') &= 2\hat{n}(\vec{r}') \times \left[ \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \hat{k}_i \times \vec{E}_0 \right] \\ \phi_1(\vec{r}') &= \vec{K}_i \cdot \vec{r}'\end{aligned}\quad (4.6)$$

### Modo de Corriente Impreso por Dipolo

Análogamente, en el caso de que la fuente sea modelable mediante uno o varios dipolos infinitesimales eléctricos o magnéticos, polarizados según  $\hat{z}$ , los campos radiados [17] pueden ser expresados en forma de modos a partir de las funciones mostradas en la tabla 4.1. El término  $I_e l$  o  $I_m l$  (producto de la corriente eléctrica o magnética por la longitud del dipolo) es conocido como el *momento dipolar*,  $R$  es la distancia entre el dipolo y el punto de observación y  $K$  es el número de onda. Puede observarse que los campos radiados por el dipolo magnético pueden ser obtenidos aplicando el teorema de dualidad [17] a de las expresiones para el dipolo eléctrico.

	Dipolo Eléctrico	Dipolo Magnético
Función de Amplitud ( $E_r$ )	$\eta \frac{I_e l \cos\theta}{2\pi R^2} \left( 1 + \frac{1}{jKR} \right)$	0
Función de Amplitud ( $E_\theta$ )	$j\eta \frac{KI_e l \sin\theta}{4\pi R} \left[ 1 + \frac{1}{jKR} - \frac{1}{(KR)^2} \right]$	0
Función de Amplitud ( $E_\phi$ )	0	$-j \frac{KI_m l \sin\theta}{4\pi R} \left( 1 + \frac{1}{jKR} \right)$
Función de Amplitud ( $H_r$ )	0	$\frac{1}{\eta} \frac{I_m l \cos\theta}{2\pi R^2} \left( 1 + \frac{1}{jKR} \right)$
Función de Amplitud ( $H_\theta$ )	0	$j \frac{1}{\eta} \frac{KI_m l \sin\theta}{4\pi R} \left[ 1 + \frac{1}{jKR} - \frac{1}{(KR)^2} \right]$
Función de Amplitud ( $H_\phi$ )	$j \frac{KI_e l \sin\theta}{4\pi R} \left( 1 + \frac{1}{jKR} \right)$	0
Función de Fase	$KR$	$KR$

Tabla 4.1: *Funciones de amplitud y fase para los campos generados por un dipolo eléctrico o magnético*

La obtención de las corrientes inducidas sobre la superficie se derivan de las expresiones para los campos radiados. En el caso de considerar la aproximación de Óptica Física, las funciones de amplitud y fase del modo de corriente vienen dadas por:

$$\vec{S}_1(\vec{r}') = 2\hat{n}(\vec{r}') \times \vec{A}(\vec{H}(\vec{r}')) \quad (4.7)$$

$$\phi_1(\vec{r}') = K |\vec{r}' - \vec{r}'_{dip}| \quad (4.8)$$

donde  $\vec{A}(\vec{H})$  es la función de amplitud del campo radiado sobre la superficie y  $\vec{r}'_{dip}$  es el vector de posición del dipolo.

## 4.4 Método Iterativo para la Obtención de los Modos de Corriente Inducidos

En este apartado se propone un procedimiento para el cálculo de la distribución de corriente que una superficie induce en otra, asumiendo que ambas son eléctricamente grandes, de variación lenta y no excesivamente cercanas (en la sección 4.4.2 se estudia el caso de que los dos parches tengan zonas adyacentes). Este procedimiento es empleado de forma iterativa para el cálculo de efectos intermedios, es decir, para las interacciones que involucran a dos superficies de la geometría [95].

En la figura 4.3 se muestra gráficamente un caso general, donde se distingue una *superficie activa* u *origen* ( $D$ ), y una *superficie pasiva* o *destino* ( $X$ ), ambas implicadas en una iteración del algoritmo. El objetivo es el cálculo de las corrientes inducidas en  $X$  de forma eficiente, empleando un número reducido de muestras sobre la misma, a partir de las existentes, ya conocidas, en  $D$ . Resulta evidente que en estadios posteriores del proceso iterativo la superficie  $X$  puede pasar a ser la activa, de forma que el procedimiento de cálculo se repite hasta llegar a una condición de parada debido al procesado de todas las interacciones posibles, o de un conjunto de interacciones seleccionadas previamente, según una estimación sobre la magnitud de su contribución al valor final de campo.

Para calcular las corrientes sobre  $X$  es necesario obtener el campo en un conjunto de puntos de muestreo sobre la misma. En adelante, y para clarificar la notación, se emplearán coordenadas paramétricas primadas para indicar puntos sobre la superficie  $D$ , y coordenadas sin primar para hacer referencia a puntos situados sobre  $X$ . También

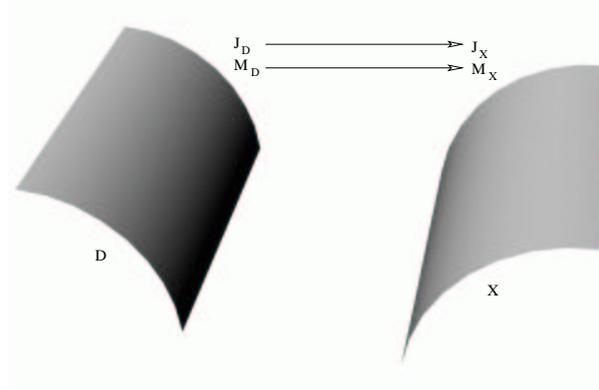


Figura 4.3: Esquema general de la interacción entre dos superficies. El modo de corriente sobre  $D$  genera uno o varios modos inducidos en  $X$ .

se denotará como  $(u_0, v_0)$  a un punto de muestreo genérico sobre  $X$ . Asumiendo que ambas superficies están definidas mediante sus coordenadas paramétricas, el integrando de la expresión a evaluar para obtener el campo eléctrico o magnético dispersado es una función tetradimensional, de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(\vec{r}(u, v)) \\ \vec{H}(\vec{r}(u, v)) \end{array} \right\} = \int_{u_D^-}^{u_D^+} \int_{v_D^-}^{v_D^+} \vec{I}((u, v), (u', v')) du' dv' \quad (4.9)$$

donde  $(u, v)$  indica el punto de observación sobre  $X$ ,  $(u', v')$  el punto fuente sobre  $D$  y los valores  $u_D^-$ ,  $u_D^+$ ,  $v_D^-$  y  $v_D^+$  indican el dominio paramétrico de integración. Como se mostrará posteriormente, para interpolar la nueva corriente sobre  $X$  basta con conocer la amplitud del campo en el conjunto de puntos de muestreo junto con las derivadas paramétricas de la fase. Si se considera que  $\vec{I}$  contiene la contribución del  $m$ -ésimo modo de corriente sobre  $D$ , La función integrando puede ser ampliada como sigue:

$$\vec{I}((u, v), (u', v')) = \vec{S}_m(u', v') e^{-j\phi_m(u', v')} \overline{G}((u, v), (u', v')) | \vec{r}_u(u', v') \times \vec{r}_v(u', v') | \quad (4.10)$$

En la expresión anterior,  $\vec{S}_m$  es la función de amplitud del modo de corriente (eléctrica o magnética, dependiendo del tipo de campo que se desee calcular) en  $D$ ,  $\overline{G}$  es la función de Green correspondiente al problema considerado, y  $| \vec{r}_u(u', v') \times \vec{r}_v(u', v') |$  representa el elemento diferencial de superficie en las co-

ordenadas paramétricas de  $D$ , como ya se ha visto en la sección 3.2. Si se reescribe la expresión (4.10) en términos de una función de amplitud y una función de fase,  $\vec{M}$  y  $\Phi$  respectivamente, se tiene:

$$\vec{I}((u, v), (u', v')) = \vec{M}((u, v), (u', v')) e^{-j\Phi((u, v), (u', v'))} \quad (4.11)$$

donde  $\vec{M}$  y  $\Phi$  son los términos de amplitud y de fase del integrando en (4.9). Esta función puede ser considerada como un "modo" para ambos pares de coordenadas paramétricas,  $(u, v)$  y  $(u', v')$ , y por tanto puede ser interpolado o aproximado a partir de un conjunto de muestras. Se asume, por tanto, que se dispone de expresiones polinomiales bidimensionales, en función de las variables  $(u', v')$  que definen las funciones  $\vec{M}((u_0, v_0), (u', v'))$  y  $\Phi((u_0, v_0), (u', v'))$  en el dominio  $D$ , para todos los puntos de muestreo  $(u_0, v_0)$  en  $X$ .

La función  $\Phi$  puede ser aproximada utilizando un desarrollo de Taylor para puntos de la superficie  $X$  próximos al punto de muestreo  $(u_0, v_0)$  y para una subregión de  $D$  cuyo centro sea el punto  $(u'_0, v'_0)$ . En el dominio paramétrico, esa subregión es un rectángulo de dimensiones  $\Delta u'_0$  y  $\Delta v'_0$ . Se asume que el dominio  $D$  queda totalmente cubierto por un conjunto de subregiones rectangulares en el dominio paramétrico y que no existe solapamiento entre las mismas.

En la subregión centrada en  $(u'_0, v'_0)$  y en torno al punto  $(u_0, v_0)$ ,  $\Phi$  puede ser aproximada por la función  $\Phi_a$  utilizando la expansión de Taylor:

$$\Phi((u, v), (u', v')) = \Phi_a((u, v), (u', v')) + R^2((u_0, v_0), (u', v')) \quad (4.12)$$

donde:

$$\begin{aligned} \Phi_a((u, v), (u', v')) = & \Phi((u_0, v_0), (u'_0, v'_0)) + \omega_{u_0}(u - u_0) + \omega_{v_0}(v - v_0) + \\ & \omega_{u'_0}(u' - u'_0) + \omega_{v'_0}(v' - v'_0) \end{aligned} \quad (4.13)$$

las derivadas paramétricas de la función de fase son:

$$\omega_{\alpha_0} = \left. \frac{\partial \Phi((u, v), (u', v'))}{\partial \alpha} \right|_{u=u_0, v=v_0, u'=u'_0, v'=v'_0}, \quad \alpha = u, v, u', v' \quad (4.14)$$

La función residual  $R^2((u_0, v_0), (u', v'))$  incluye los términos de órdenes superiores de la serie de Taylor, y se asume que, debido a la división de  $D$  en subregiones, varía dentro de un margen limitado (por ejemplo,  $\pm 1$  radián) en la subregión centrada en  $(u'_0, v'_0)$ . Esta función se calcula considerando la diferencia entre la expresión completa y la expresión aproximada de la fase,  $\Phi$  y  $\Phi_a$ , respectivamente.

Partiendo de la función de fase en (4.11), de manera alternativa a la expresión (4.12) y bajo las mismas suposiciones (desarrollo en torno al punto  $(u_0, v_0)$  en  $X$  y  $(u'_0, v'_0)$  en  $D$ ), es posible considerar los términos cuadráticos de la expansión de Taylor además de los lineales, de manera que la fase quede expresada de la siguiente forma:

$$\Phi((u, v), (u', v')) = \Phi_b((u, v), (u', v')) + R^3((u_0, v_0), (u', v')) \quad (4.15)$$

donde la función  $\Phi_b$  viene dada por:

$$\begin{aligned} \Phi_b((u, v), (u', v')) = & \Phi_a((u, v), (u', v')) + \\ & \omega_{2u_0}(u - u_0)^2 + \omega_{2v_0}(v - v_0)^2 + \omega_{2u'_0}(u' - u'_0)^2 + \omega_{2v'_0}(v' - v'_0)^2 + \\ & \omega_{u_0v_0}(u - u_0)^2(v - v_0)^2 + \omega_{u'_0v'_0}(u' - u'_0)^2(v' - v'_0)^2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde  $\Phi_a((u, v), (u', v'))$ , es la función mostrada en (4.13), conteniendo el término constante y los términos de primer orden del desarrollo. La función residual,  $R^3$  en (4.15), contiene el resto de los términos del desarrollo.

Las derivadas paramétricas espaciales de segundo orden que aparecen en la expresión de  $\Phi_b$  son:

$$\omega_{2\alpha_0} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi((u, v), (u', v'))}{\partial \alpha^2} \Bigg|_{u=u_0, v=v_0, u'=u'_0, v'=v'_0}, \quad \alpha = u, v, u', v' \quad (4.17)$$

$$\omega_{\alpha_0\beta_0} = \frac{\partial^2 \Phi((u, v), (u', v'))}{\partial \alpha \partial \beta} \Bigg|_{u=u_0, v=v_0, u'=u'_0, v'=v'_0}, \quad \begin{array}{l} \alpha = u, \beta = v \\ \alpha = u', \beta = v' \end{array} \quad (4.18)$$

Considerando la expansión del integrando de (4.9) en las ya descritas funciones de amplitud y fase, y el desarrollo del término de fase de (4.12), la contribución de la corriente de la subregión centrada en  $(u'_0, v'_0)$  en  $D$  al campo en los puntos de muestreo  $(u_0, v_0)$  en el dominio  $X$  puede ser expresada como:

$$\begin{Bmatrix} \vec{E}(\vec{r}(u, v)) \\ \vec{H}(\vec{r}(u, v)) \end{Bmatrix} = e^{-jA^{(1)}(u, v)} \begin{Bmatrix} \vec{E}_0^{(1)}(u_0, v_0) \\ \vec{H}_0^{(1)}(u_0, v_0) \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

Donde  $A^{(1)}(u, v)$  es una función que contiene información acerca de la variación de la fase, mediante una aproximación lineal, del campo en torno al punto  $(u_0, v_0)$ :

$$A^{(1)}(u, v) = \Phi((u_0, v_0), (u'_0, v'_0)) + \omega_{u_0}(u - u_0) + \omega_{v_0}(v - v_0) \quad (4.20)$$

Por su parte, el vector  $\vec{E}_0^{(1)}$  o  $\vec{H}_0^{(1)}$ , dependiendo si se desea calcular el campo eléctrico o magnético, proporciona la amplitud y parte del valor de fase del campo en  $(u_0, v_0)$ :

$$\begin{Bmatrix} \vec{E}_0^{(1)}(u_0, v_0) \\ \vec{H}_0^{(1)}(u_0, v_0) \end{Bmatrix} = \int_{u'_0 - \frac{\Delta u'_0}{2}}^{u'_0 + \frac{\Delta u'_0}{2}} \int_{v'_0 - \frac{\Delta v'_0}{2}}^{v'_0 + \frac{\Delta v'_0}{2}} \vec{M}^i(u_0, v_0, u', v') e^{-j[\omega_{u'_0}(u' - u'_0) + \omega_{v'_0}(v' - v'_0)]} du' dv' \quad (4.21)$$

donde:

$$\vec{M}'(u_0, v_0, u', v') = \vec{M}(u_0, v_0, u', v') e^{-jR^2(u_0, v_0, u', v')} \quad (4.22)$$

De forma alternativa, si se considera la expansión dada por (4.15), el campo creado por la corriente confinada en la región de la superficie  $D$  sobre el punto de muestreo en  $X$  viene dado por:

$$\begin{Bmatrix} \vec{E}(\vec{r}(u, v)) \\ \vec{H}(\vec{r}(u, v)) \end{Bmatrix} = e^{-jA^{(2)}(u, v)} \begin{Bmatrix} \vec{E}_0^{(2)}(u_0, v_0) \\ \vec{H}_0^{(2)}(u_0, v_0) \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

Donde  $A^{(2)}(u, v)$ , que añade los términos cuadráticos a  $A^{(1)}(u, v)$ , tiene la forma:

$$A^{(2)}(u, v) = A^{(1)} + \omega_{2u_0}(u - u_0)^2 + \omega_{2v_0}(v - v_0)^2 + \omega_{u_0v_0}(u - u_0)(v - v_0) \quad (4.24)$$

Los vectores  $\vec{E}_0^{(2)}$  o  $\vec{H}_0^{(2)}$  vienen dados por la expresión:

$$\begin{Bmatrix} \vec{E}_0^{(2)}(u_0, v_0) \\ \vec{H}_0^{(2)}(u_0, v_0) \end{Bmatrix} = \int_{u'_0 - \frac{\Delta u'_0}{2}}^{u'_0 + \frac{\Delta u'_0}{2}} \int_{v'_0 - \frac{\Delta v'_0}{2}}^{v'_0 + \frac{\Delta v'_0}{2}} \vec{M}''(u_0, v_0, u', v') \cdot e^{-j[\omega_{u'_0}(u' - u'_0) + \omega_{v'_0}(v' - v'_0) + \omega_{2u'_0}(u' - u'_0)^2 + \omega_{2v'_0}(v' - v'_0)^2 + \omega_{u'_0v'_0}(u' - u'_0)(v' - v'_0)]} du' dv' \quad (4.25)$$

donde:

$$\vec{M}''(u_0, v_0, u', v') = \vec{M}(u_0, v_0, u', v') e^{-jR^3(u_0, v_0, u', v')} \quad (4.26)$$

La expresión (4.21) puede ser fácilmente identificada con (3.12) y, por tanto, es posible calcular la integral mediante el procedimiento cuasi-analítico mostrado en la

sección 3.3.1. Análogamente, en el caso de que la expansión de Taylor se haya completado con los términos cuadráticos, resulta inmediato aplicar el método propuesto en la sección 3.3.2 para el cálculo de la integral (4.25). De cualquiera de estas dos formas se puede obtener la contribución de la zona de la superficie activa correspondiente al rectángulo con centro en el punto  $(u'_0, v'_0)$  sobre todo el parche pasivo, expresando el campo como un modo según la expresión (4.19). Repitiendo este proceso con cada uno de los rectángulos generados en el dominio paramétrico de  $D$  se obtiene el campo total como un conjunto de modos superpuestos en la superficie  $X$ . En la figura 4.4 se muestra gráficamente el proceso descrito, con las superficies reales y un esquema de los dominios paramétricos.

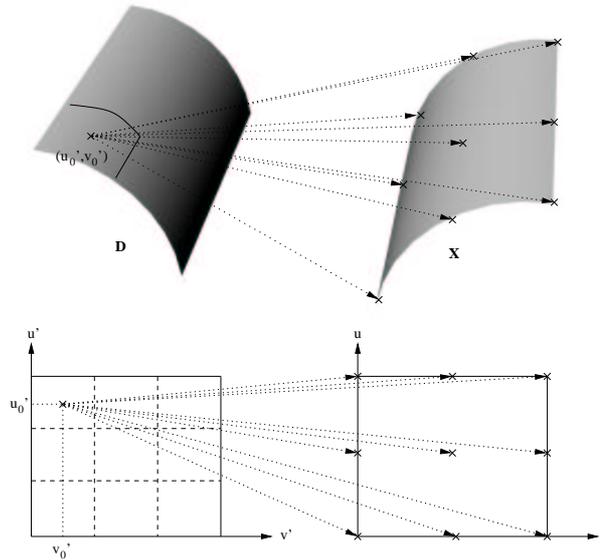


Figura 4.4: Obtención de un modo de corriente inducido sobre la superficie  $X$  debido a una región (rectángulo en coordenadas paramétricas centrado en  $(u'_0, v'_0)$ ) en la superficie  $D$ .

Es importante destacar que el criterio para la división de la superficie  $D$  en sub-regiones expuesto anteriormente está basado únicamente en la forma en que varía la función de fase del integrando. La elección de un desarrollo de la fase utilizando los términos cuadráticos ofrece la posibilidad de aumentar el tamaño de las regiones en las que se divide la superficie  $D$  y, por tanto, obtener como resultado un número menor de modos para expresar la distribución de campo sobre  $X$ . Como contrapartida se puede señalar la mayor complejidad numérica que supone la aplicación del método cuasianalítico de integración mostrado en la sección 3.3.2. Una solución eficiente de compromiso consiste en emplear una u otra alternativa dependiendo del grado de variación del término de fase. Ya que inicialmente el término de fase de un modo de corriente viene expresado mediante un polinomio de grado alto (se ha trabajado con

polinomios de hasta grado 4 ó 5 en cada componente de la superficie), resulta sencillo estimar si la fase dentro de una zona está más cercana de ser lineal o cuadrática, eligiendo en cada caso la opción más acertada.

#### 4.4.1 Aplicación del Método Iterativo con las Corrientes de Óptica Física

En la sección (4.4) se ha presentado un método iterativo en el que se considera el cálculo de los campos  $\vec{E}$  y/o  $\vec{H}$  a partir de las corrientes eléctricas y magnéticas sobre la superficie. Estas corrientes pueden ser obtenidas empleando diversas aproximaciones, como puede ser el resultado de la aplicación del teorema de equivalencia [17,72]. En esta sección se muestran las particularidades de la utilización de las corrientes de Óptica Física sobre estructuras conductoras en el método iterativo.

Si se considera la aproximación de PO sobre superficies conductoras [76, 77], las corrientes magnéticas se suponen nulas, mientras que las corrientes eléctricas pueden ser calculadas a partir del campo magnético incidente:

$$\begin{aligned}\vec{J}(\vec{r}) &= 2\hat{n}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r}) \\ \vec{M}(\vec{r}) &= 0\end{aligned}\tag{4.27}$$

Esto implica que el esquema de cálculo de las corrientes inducidas en una interacción genérica entre dos superficies es el mostrado en la figura 4.5.

El cálculo del campo magnético en  $X$  viene dado, como se indica en el desarrollo realizado en el capítulo 2, por la expresión:

$$\vec{H}_X(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_D \nabla G_0(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{J}_D(\vec{r}') dS' \tag{4.28}$$

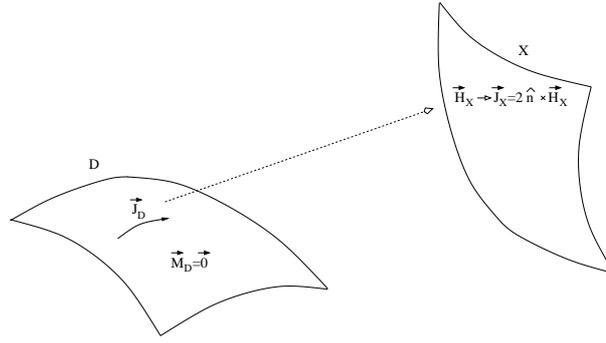


Figura 4.5: Esquema iterativo con las corrientes de PO y superficies conductoras.

donde  $G_0$  es la función de Green en espacio libre. Si se expresa la corriente eléctrica sobre la superficie  $D$  mediante modos de corriente se puede escribir:

$$\vec{J}_D(\vec{r}') = \sum_{m=1}^N \vec{S}_m(\vec{r}') e^{-j\phi_m(\vec{r}')} \quad (4.29)$$

Si se identifican los términos que aparecen en la expresión (4.11), los términos de amplitud y fase correspondientes a la contribución del  $m$ -ésimo modo de corriente eléctrica en el integrando son:

$$\vec{M}((u, v), (u', v')) = \frac{e^{jKR((u, v), (u', v'))}}{4\pi} \nabla G_0(\vec{r}'(u, v), \vec{r}'(u', v')) \times \vec{S}_m(\vec{r}'(u', v')) \quad (4.30)$$

$$\Phi((u, v), (u', v')) = \phi_m(u', v') + KR((u, v), (u', v')) \quad (4.31)$$

donde:

$$R = | \vec{r}'(u, v) - \vec{r}'(u', v') | \quad (4.32)$$

El integrando, expresado de esta forma, puede ser identificado de inmediato con las expresiones utilizadas en el apartado (4.4), favoreciendo a su vez tanto el cálculo

eficiente del campo magnético como la expresión de las corrientes eléctricas inducidas sobre  $X$  mediante modos.

#### 4.4.2 Preprocesado de las Superficies en el Esquema Iterativo

El procedimiento descrito en la sección 4.4 es aplicable a situaciones en las que tanto las corrientes existentes sobre el parche activo como las inducidas en el parche pasivo pueden ser expresadas mediante modos. Sin embargo, al existir zonas en la geometría donde ambas superficies están muy próximas entre sí, debido a la dependencia de la función de Green con la inversa de la distancia entre el punto fuente de campo y el punto de observación se produce una variación brusca de la amplitud de los campos dispersados sobre estas regiones, de manera que la expansión de las corrientes mediante modos (lo que implica aproximaciones polinomiales) no resulta adecuada en ellas. Por esta razón se hace necesario realizar un preprocesado geométrico donde, a partir de la distancia eléctrica entre puntos de ambas superficies, se distingan las siguientes regiones:

- *Zonas lejanas o analíticas*: Son las regiones para las que todos los puntos cumplen que la distancia a cualquier punto de la otra superficie es igual o superior a un umbral  $\Delta$  fijado con anterioridad. Dependiendo de la superficie a la que corresponde este tipo de zona, se pueden asumir distintas aproximaciones numéricas:
  - Zonas de la *superficie activa lejanas* a toda la superficie pasiva:
 

En el caso de la superficie activa, al procesar una de estas regiones se pueden calcular los campos sobre la superficie pasiva utilizando las aproximaciones cuasianalíticas vistas en el capítulo 3, dado que está garantizada una variación suave de la amplitud de la función de Green.
  - Zonas de la *superficie pasiva lejanas* a toda la superficie activa:
 

En el caso de la superficie pasiva, dentro de este tipo de regiones se pueden obtener los campos en un conjunto reducido de puntos de muestreo, porque se asegura una correcta aproximación posterior de los mismos empleando funciones que abarcan un dominio amplio.
- *Zonas cercanas o numéricas*: Son las regiones cercanas entre las dos superficies,

en función del criterio prefijado según el umbral  $\Delta$ . Conviene distinguir varios casos posibles en el tratamiento de este tipo de zonas:

- Zonas de la *superficie activa cercanas* a alguna región de la superficie pasiva: Al considerar la contribución de la región cercana de la superficie activa con la región cercana de la superficie pasiva, debido a la variación brusca de la amplitud de la función de Green, no se puede aplicar ningún procedimiento cuasianalítico para la aceleración en la obtención de los campos. Por tanto, se debe recurrir a una integración numérica. Sin embargo, la contribución de esta región sobre la región lejana de la superficie pasiva está exenta de estas restricciones, por lo que se puede considerar toda la superficie activa (regiones cercanas y regiones lejanas) para calcular mediante fórmulas analíticas su contribución conjunta.
- Zonas de la *superficie pasiva cercanas* a alguna región de la superficie activa: En ellas las corrientes son almacenadas mediante un muestreo más denso, del orden de una decena de muestras por cada longitud de onda. En interacciones posteriores, en el cálculo del campo dispersado por dichas corrientes se emplea una técnica de integración numérica.

Desde el punto de vista de la experiencia adquirida durante el desarrollo de esta tesis, un valor de la distancia umbral  $\Delta$  de entre  $\lambda$  y  $1,5\lambda$  supone un buen compromiso entre precisión en los resultados y tiempo de cálculo empleado en la integración numérica de este tipo de regiones. También conviene precisar que el preprocesado de la superficie activa para obtener las regiones cercanas o lejanas sólo se realiza cuando las corrientes sobre ella estén definidas por medio de modos, debido a que el objetivo de dicho particionamiento consiste en un incremento de la eficiencia computacional al conocer qué zonas de la misma utilizar en los métodos cuasianalíticos. Si la corriente existente en el parche origen varía muy bruscamente y está almacenada mediante muestras sólo cabe la opción de calcular el campo mediante una integración numérica.

Con el fin de clarificar el proceso del cálculo del campo combinando técnicas cuasianalíticas con técnicas numéricas, y el almacenamiento de las corrientes mediante la combinación de un muestreo denso con funciones de dominio extendido, en la figura 4.6 se observa un ejemplo en el que las superficies  $D$  y  $X$  forman una estructura diédrica. Se han distinguido cuatro regiones, señaladas como  $D_A$ ,  $D_N$ ,  $X_A$  y  $X_N$ , donde el subíndice  $A$  denota zonas lo suficientemente separadas, y el subíndice  $N$  indica zonas

cercanas entre sí. El proceso para el cálculo de las corrientes inducidas en la superficie  $X$ , según lo indicado anteriormente, puede realizarse siguiendo secuencialmente los siguientes pasos:

1. Corriente inducida por  $D$  sobre  $X_A$ : Se calcula según la aproximación vista en la sección 4.4. Dado que se garantiza la distancia mínima entre regiones, los campos necesarios para el cálculo de las corrientes inducidas son calculados mediante aproximaciones cuasi-analíticas, y las propias corrientes sobre  $X_A$  son almacenadas mediante modos.
2. Corriente inducida por  $D_N$  sobre  $X_N$ : Dada la proximidad entre ambas regiones, esta contribución se calcula mediante una integración numérica. Además, la corriente en la zona  $X_N$  se almacena empleando una tasa de muestreo del orden de  $\frac{\lambda}{10}$ .
3. Corriente inducida por  $D_A$  sobre  $X_N$ : En este caso se cumplen los requisitos para calcular la contribución utilizando métodos cuasianalíticos. Las corrientes así calculadas en  $X_N$  pueden ser almacenadas mediante modos o sumando los valores correspondientes a las muestras obtenidas en el paso anterior (Corriente inducida por  $D_N$  sobre  $X_N$ ).

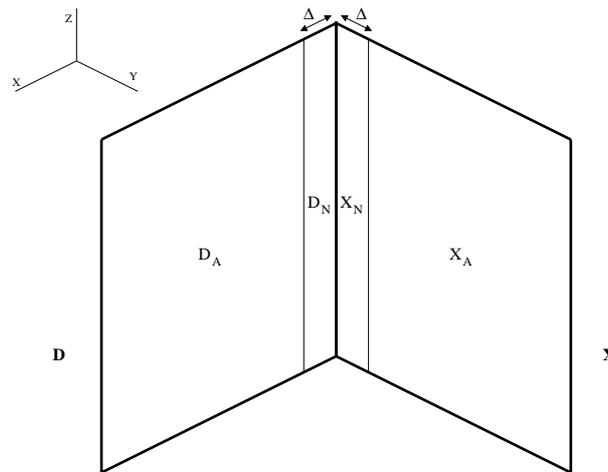


Figura 4.6: Esquema de las zonas generadas según la distancia entre regiones de las superficies  $D$  y  $X$ .

### 4.4.3 Consideraciones Computacionales

El esquema iterativo previamente expuesto es aplicable para el análisis de efectos de orden  $N$  sobre geometrías complejas. Como se ha visto en la sección 4.4.2, en un caso general se pueden combinar los dos tipos de almacenamiento de corrientes ya indicados, dependiendo de la posición relativa entre las dos superficies.

Es importante destacar además la necesidad de seleccionar los pares de superficies (activa y pasiva) dentro de un orden que optimice la eficiencia computacional, de forma que las corrientes calculadas y almacenadas para una determinada interacción sean calculadas una única vez, se utilicen para todas las interacciones posteriores en las que sean requeridas, y posteriormente se libere la memoria asignada a tal efecto. Con el fin de lograr este objetivo, para el cálculo de las corrientes inducidas las superficies activa y pasiva en cada interacción deben ser seleccionadas de manera que se recorra secuencialmente cada una de las ramas de una estructura en forma de árbol invertido. Cada una de dichas ramas contiene un *camino* o conjunto de interacciones entre superficies, de manera que al descender un nivel en el árbol se añade un efecto a los ya considerados hasta ese momento. Una vez recorrida una rama en su totalidad, es posible liberar todos los recursos reservados para el almacenamiento de las corrientes, ya que no es necesario reutilizar los datos. Ciertas ramas (o terminaciones de ramas) pueden ser descartadas con antelación al utilizar ciertos algoritmos de aceleración, como pueden ser ciertos criterios basados en la geometría de las superficies [96], el algoritmo Z-Buffer [97–100] u otras técnicas basadas en la selección de los caminos con una mayor contribución para el resultado final.

## 4.5 Identificación de los Modos de Corriente Mediante Técnicas de Estimación Espectral

En esta sección se presenta una forma alternativa para la obtención de modos de corriente inducidos en una superficie, basada en la utilización de *métodos de estimación espectral* para la obtención de las frecuencias espaciales y los valores de amplitud de los mismos en un conjunto de muestras de una superficie. Si se considera la importancia de la precisión en la obtención de los modos de corriente, lo cual implica determinar tanto

la función de amplitud como la función de fase de cada uno de ellos, se puede decir que el término de fase es más crítico debido fundamentalmente a un par de motivos: por un lado, el error aceptable en la aproximación al utilizar funciones de dominio amplio, como superficies NURBS o polinomios, es menor para el término de fase que para el término de amplitud. Un error relativo del 0,1 % al aproximar la amplitud del modo puede ser perfectamente aceptable en la mayoría de los casos, pero inadmisibles en el caso de la fase, si ésta varía en un rango de miles de radianes. Por otra parte, al calcular en un caso general las corrientes que una superficie radiante induce en otra, no se dispone de los valores de "fase desenrollada" en el conjunto de puntos de muestreo considerado, sino que se conocen los valores de la fase dentro del rango  $[-\pi, \pi]$  en los mismos, además de no poder hacer una distinción clara ni del número de modos existentes ni de la amplitud y la fase que corresponde a uno.

El método mostrado en la sección 4.4 soluciona los problemas ya comentados de una forma robusta, haciendo que cada modo en la superficie pasiva sea debido a una región de la superficie activa. De esta manera se obtiene sin ambigüedad y de forma rápida la función de fase de cada modo de corriente, aunque puede ocurrir que la cantidad de modos generados sea mayor que el número óptimo, entendiendo como número óptimo la cantidad mínima de modos de corriente con que se puede representar la corriente sobre la superficie con un error aceptable.

La *Transformada de Fourier* es un método ampliamente utilizado para la estimación del espectro de una señal, además de requerir un coste computacional reducido. En este caso, sin embargo, su utilización para determinar los distintos modos existentes en una región no resulta ser adecuada, debido a que, por una parte, la resolución que ofrece depende del tamaño de la zona en la que se sitúan las muestras, siendo necesario tomar una ventana exageradamente grande para obtener una resolución aceptable (es posible que incluso mayor que la propia superficie). Por otro lado, requiere situar muestras de corriente equiespaciadas en dicha ventana. La distancia entre dos de estas muestras debe ser pequeña para evitar el solapamiento del espectro en el rango de frecuencias visibles, por lo que se requiere un número total elevado de muestras. Esto hace que, a pesar de que existan algoritmos rápidos para el cálculo de la transformada, la eficiencia computacional disminuya en gran medida debido a la necesidad de calcular las corrientes en muchos puntos de muestreo. Debido a esto, se ha optado por emplear el método del *Pincel de Matrices*, más conocido por su nombre anglosajón *Matrix Pencil* [101, 102] (ver sección 4.5.1), que se puede enmarcar dentro de los denominados *métodos de superresolución*, debido a su capacidad para obtener los parámetros de las

ondas existentes con un número reducido de muestras.

### 4.5.1 Descripción del Algoritmo Matrix Pencil

El algoritmo Matrix Pencil se emplea para la estimación de las frecuencias de una suma de secuencias sinusoidales de la forma:

$$x_i = \sum_{k=1}^M |h_k| e^{j\omega_k(i-1)+\phi_k}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.33)$$

Para la aplicación práctica del algoritmo en el contexto de esta tesis, la secuencia de muestras  $x_i$  representa a una componente de corriente, según  $u$  o  $v$ , evaluada en el  $i$ -ésimo punto de muestreo, mientras que  $\omega_k(i-1)$  se corresponde con la  $k$ -ésima frecuencia espacial multiplicada por el incremento en la componente paramétrica correspondiente,  $\omega_k u(\vec{r}_0) \Delta u$  o  $\omega_k v(\vec{r}_0) \Delta v$ .

Agrupando términos, la expresión (4.33) puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$x_i = \sum_{k=1}^M h_k z_k^{(i-1)} \quad (4.34)$$

donde el término  $h_k$  es:

$$h_k = |h_k| e^{j\phi_k} \quad (4.35)$$

y el término  $z_k$  es:

$$z_k = e^{j\omega_k} \quad (4.36)$$

Dada la expresión (4.34), el algoritmo Matrix Pencil realiza una estimación de las  $M$  frecuencias complejas que aparecen en la misma. Para ello, a partir de las muestras de la secuencia se generan las siguientes matrices:

$$[G_1]_{(N-L) \times L} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_L \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N-L} & x_{N-L+1} & \dots & x_{N-1} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$[G_2]_{(N-L) \times L} = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & \dots & x_{L+1} \\ x_3 & x_4 & \dots & x_{L+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N-L+1} & x_{N-L+2} & \dots & x_N \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

El valor de  $L$  (parámetro *pincel* o *pencil* en terminología anglosajona) se fija de forma que  $M \leq L \leq N$ . En muchas ocasiones se toma un valor típico cercano a  $\frac{2N}{3}$ .

Después de la generación de las matrices, el algoritmo debe resolver el siguiente problema de valores propios:

$$([G_2] - \xi [G_1])p = 0 \quad (4.39)$$

Al obtener la solución del problema de valores propios (4.39), aparecen  $M$  autovalores principales, coincidiendo con el número de ondas existentes, y  $(M - N)$  autovalores menores, con magnitudes muy inferiores a los principales. Desechando estos últimos, las frecuencias  $\omega_k$  se obtienen a partir de las soluciones  $\xi_i = z_i$ , donde  $i = 1, \dots, M$ .

Es evidente el hecho de que no se tiene por qué conocer con antelación el número de ondas  $M$ . Sin embargo, su identificación resulta sencilla mediante una comparación de las magnitudes de las soluciones de (4.39). El salto entre el autovalor principal más pequeño y el autovalor menor más grande depende directamente de la relación señal a ruido. En la aplicación del método realizada para la estimación de los modos de corriente, el cálculo de muestras de corriente en una serie de puntos implica que no existe

dicha contaminación por ruido, salvo posibles errores de truncamiento dependiendo de la precisión de la máquina, por no ser las muestras totalmente equidistantes o por existir una pequeña variación en la amplitud de la onda a lo largo del segmento en el que se sitúan los puntos de muestreo. En cualquier caso la relación señal a ruido es muy grande, por lo que la distinción de los autovalores principales de los menores es inmediata.

Una vez hallados los valores  $z_i$ , se procede al cálculo de las amplitudes planteando la siguiente ecuación matricial:

$$[X] = [Z][H] \quad (4.40)$$

donde:

$$[X] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \quad [Z] = \begin{bmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \dots & z_M^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \dots & z_M^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_M^{N-1} \end{bmatrix}, \quad [H] = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Para determinar los distintos términos  $h_i$ , por tanto, basta con multiplicar al vector  $[X]$  por la matriz pseudoinversa (inversa por la izquierda) de  $[Z]$ , denotada como  $[Z]^T$ :

$$[Z]^T [X] = [H] \quad (4.42)$$

### 4.5.2 Detección de los Modos de Corriente mediante el Algoritmo Matrix Pencil

En este apartado se propone un procedimiento para la obtención de los valores de la amplitud y las frecuencias espaciales de un conjunto de modos de corriente definidos

sobre una superficie. Dichos parámetros se obtienen a partir de los valores de corriente en un conjunto de puntos de muestreo y en sus proximidades, considerando por separado cada componente de corriente ( $u$  y  $v$ ).

Utilizando la expansión en términos de modos de corriente, cada una de las componentes de la corriente  $\vec{J}$  o  $\vec{M}$  puede ser expresada cerca de un punto  $\vec{r}_0$  de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_\alpha(\vec{r}_0 + \Delta \vec{r}) \\ M_\alpha(\vec{r}_0 + \Delta \vec{r}) \end{array} \right\} = \sum_{L=1}^{\Omega_\alpha} A_{\alpha L}(\vec{r}_0) e^{j\omega_{\alpha L u}(\vec{r}_0)\Delta u + j\omega_{\alpha L v}(\vec{r}_0)\Delta v} \quad (4.43)$$

donde  $A_{\alpha L}$  es la amplitud del  $L$ -ésimo modo de corriente y  $\omega_{\alpha L u}$  y  $\omega_{\alpha L v}$  son las componentes en  $u$  y en  $v$  del vector de onda del modo,  $\omega_{\alpha L}$ .

Los parámetros a determinar mediante la aplicación del método de estimación espectral son el número de modos  $\Omega_\alpha$ , los vectores de onda ( $\omega_{\alpha L}$ ,  $L = 1, \dots, \Omega_\alpha$ ) y las amplitudes complejas  $A_{\alpha L}$  que definen a la componente  $\alpha$  del modo de corriente en el punto  $\vec{r}_0$ . Después de estimar estos parámetros en una malla de puntos de muestreo sobre la superficie se pueden aproximar los distintos términos mediante funciones continuas en ambas componentes [83]. Conviene destacar que en la mayor parte de los casos es suficiente con considerar un número reducido de modos de corriente.

Para conocer los parámetros que identifican a los modos de corriente existentes en un punto de muestreo  $(u_0, v_0)$  de la superficie pasiva, se consideran las líneas isoparamétricas en  $u$  y en  $v$  que se cruzan en dicho punto. Es evidente que, aunque en el espacio paramétrico ambas líneas son perfectamente ortogonales, esto no tiene por qué ocurrir en el espacio real. Sobre ellas se sitúan dos *peines* o conjuntos de muestras, de manera que se disponga de un peine en  $u$  y un peine en  $v$ , ambos centrados en  $(u_0, v_0)$ , sobre los que se aplica el algoritmo de estimación espectral, obteniendo la amplitud y las componentes frecuenciales de cada modo en las dos direcciones. Se puede destacar la conveniencia de emplear de esta forma la versión unidimensional del algoritmo Matrix Pencil en lugar de hacerlo sobre una malla de muestras bidimensional [103] por motivos evidentes de eficiencia computacional. En la figura 4.7 se muestra la colocación de las muestras en cada peine, tanto en el espacio real como en el paramétrico.

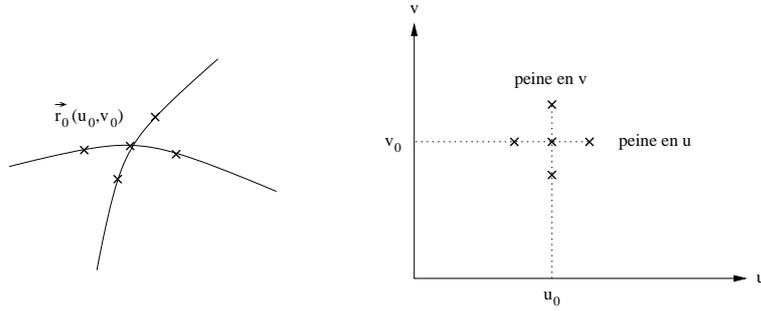


Figura 4.7: Situación de los dos peines de muestras, sobre la superficie y en el dominio paramétrico.

Es necesario, por tanto, conocer la corriente en cada uno de los puntos de ambos peines. Si se denota como  $\vec{r}_1$  a un punto genérico del peine en  $u$ , y  $\Delta u$  al incremento en esa componente paramétrica desde el punto  $\vec{r}_0$ , la componente en  $\alpha$  de la corriente en el punto  $\vec{r}_1$  viene dada por:

$$\begin{Bmatrix} J_\alpha(\vec{r}_1) \\ M_\alpha(\vec{r}_1) \end{Bmatrix} = \sum_{L=1}^{\Omega_\alpha} A_{\alpha L}(\vec{r}_0) e^{j\omega_{\alpha L}(\vec{r}_0)\Delta u} \quad (4.44)$$

Los puntos dentro del peine en  $u$  deben ser elegidos de forma que la distancia entre dos de ellos consecutivos sea uniforme. De esta manera, se puede modificar (4.44) para expresar  $J_\alpha$  en el  $i$ -ésimo punto del peine en  $u$  como:

$$\begin{Bmatrix} J_\alpha(\vec{r}_i) \\ M_\alpha(\vec{r}_i) \end{Bmatrix} = \sum_{L=1}^{\Omega_\alpha} A_{\alpha L}(\vec{r}_0) e^{j\omega_{\alpha L}(\vec{r}_0)\Delta\xi(i-1)} \quad (4.45)$$

donde  $\Delta\xi$  es la distancia existente entre dos puntos consecutivos del peine. Esta expresión es la forma en la que el algoritmo Matrix Pencil asume que está estructurada la secuencia de muestras que se le aplica, por lo que al ser aplicado Matrix Pencil puede ser aplicado directamente para obtener los parámetros  $\Omega_\alpha$ ,  $A_{\alpha L}$  y  $\omega_{\alpha L}$  que aparecen en la misma.

Es conveniente que la longitud total de cada peine sea pequeña (generalmente inferior a la longitud de onda) debido a que en el algoritmo Matrix Pencil se asume que la amplitud de cada onda es constante, por lo que el hecho de tomar un peine de muestras

a lo largo del cual la amplitud del modo varíe significativamente puede degradar el resultado. Por otra parte, si las muestras están demasiado cercanas entre sí pueden aparecer errores numéricos por la precisión con la que se almacenan los valores. Generalmente, separaciones entre muestras de  $\frac{\lambda}{20}$  a  $\frac{\lambda}{10}$  ofrecen resultados aceptables. El número de muestras a utilizar en cada peine puede situarse entre 6 y 16 en la mayor parte de los casos, de manera que sea ligeramente superior al doble del número esperado de modos. Al ser la longitud de los peines reducida también se puede hacer la suposición de que en el espacio real los dos segmentos isoparamétricos son aproximadamente ortogonales.

El algoritmo Matrix Pencil requiere una serie de muestras distribuidas de forma equiespaciada, presentando un buen comportamiento frente a señales relacionadas de forma coherente. Existen otros métodos de superresolución, como el algoritmo MUSIC [104], que evitan la necesidad de que la distancia entre muestras consecutivas sea uniforme, pero no son aplicables en el caso de modos relacionados de forma coherente.

Como ejemplo de las prestaciones del método anteriormente analizado, considérese el caso mostrado en la figura 4.8(a), compuesto por dos superficies NURBS, curvas en una de las componentes con un radio de curvatura de 5 m. Las coordenadas de los vértices se pueden observar en la misma figura. Se ha considerado una onda plana incidente polarizada según  $\theta$ , con una dirección de incidencia dada por  $\phi = 180^\circ$  y  $\theta = 45^\circ$ . La frecuencia de trabajo es de 500 MHz, de forma que el lado recto de las superficies tiene un tamaño eléctrico de  $6,66\lambda$  y el lado curvo es ligeramente superior. En los resultados se ha considerado la corriente inducida en la superficie 2 debida a la corriente de Óptica Física sobre la superficie 1, debida a la onda plana incidente. De esta forma puede verse el resultado como el efecto de una doble reflexión. Las figuras 4.8(b), 4.8(c) y 4.8(d) muestran las componentes cartesianas de la corriente sobre la superficie 2, mientras que las figuras 4.8(e) y 4.8(f) reflejan las frecuencias espaciales halladas en  $u$  y  $v$ , respectivamente. Para ello se ha utilizado una malla de  $7 \times 7$  puntos de muestreo. Para la aplicación del algoritmo Matrix Pencil se han utilizado peines de 9 puntos, fijando el valor del parámetro  $L$  a 5 y la longitud de los peines a  $1,4\lambda$ .

La figura 4.9 muestra la precisión obtenida después de aproximar el modo de corriente mediante polinomios bidimensionales. Para ello, sobre una malla de puntos de muestreo en la superficie 2 se ha calculado la diferencia entre una evaluación puramente numérica o de "fuerza bruta" de las corrientes de Óptica Física resultantes de la doble reflexión considerada y el resultado de calcular las mismas corrientes a partir de

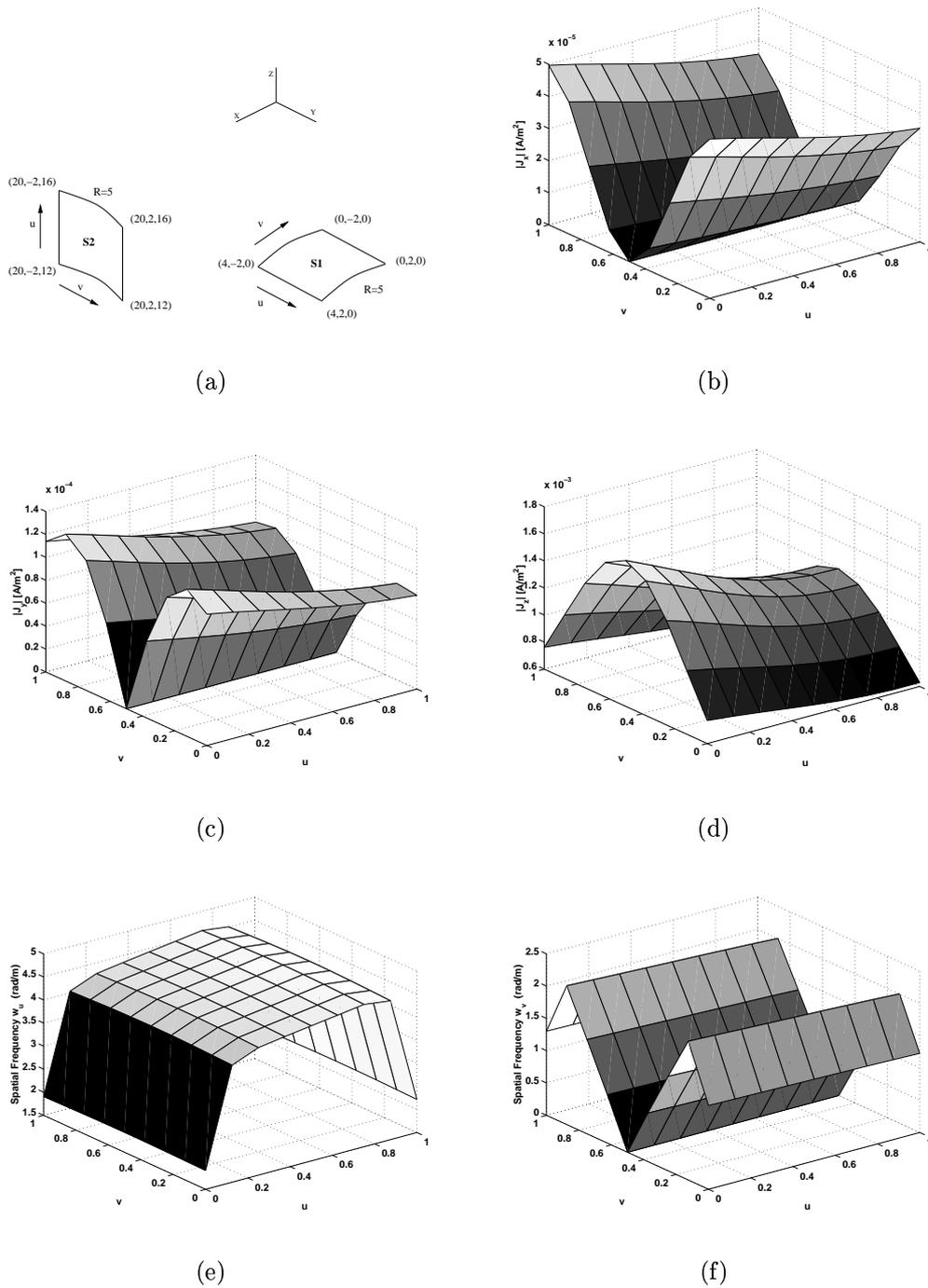


Figura 4.8: Aplicación del algoritmo *Matrix Pencil* para la detección de los parámetros del modo de corriente en una doble reflexión. (a): Esquema geométrico; (b), (c), (d): Funciones de amplitud en las componentes cartesianas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; (e), (f): Frecuencias espaciales detectadas en  $u$  y  $v$ , respectivamente.

evaluaciones de los polinomios de aproximación. En la figura se muestran los errores absolutos, de manera que queda patente el alto grado de precisión obtenido al calcular las corrientes.

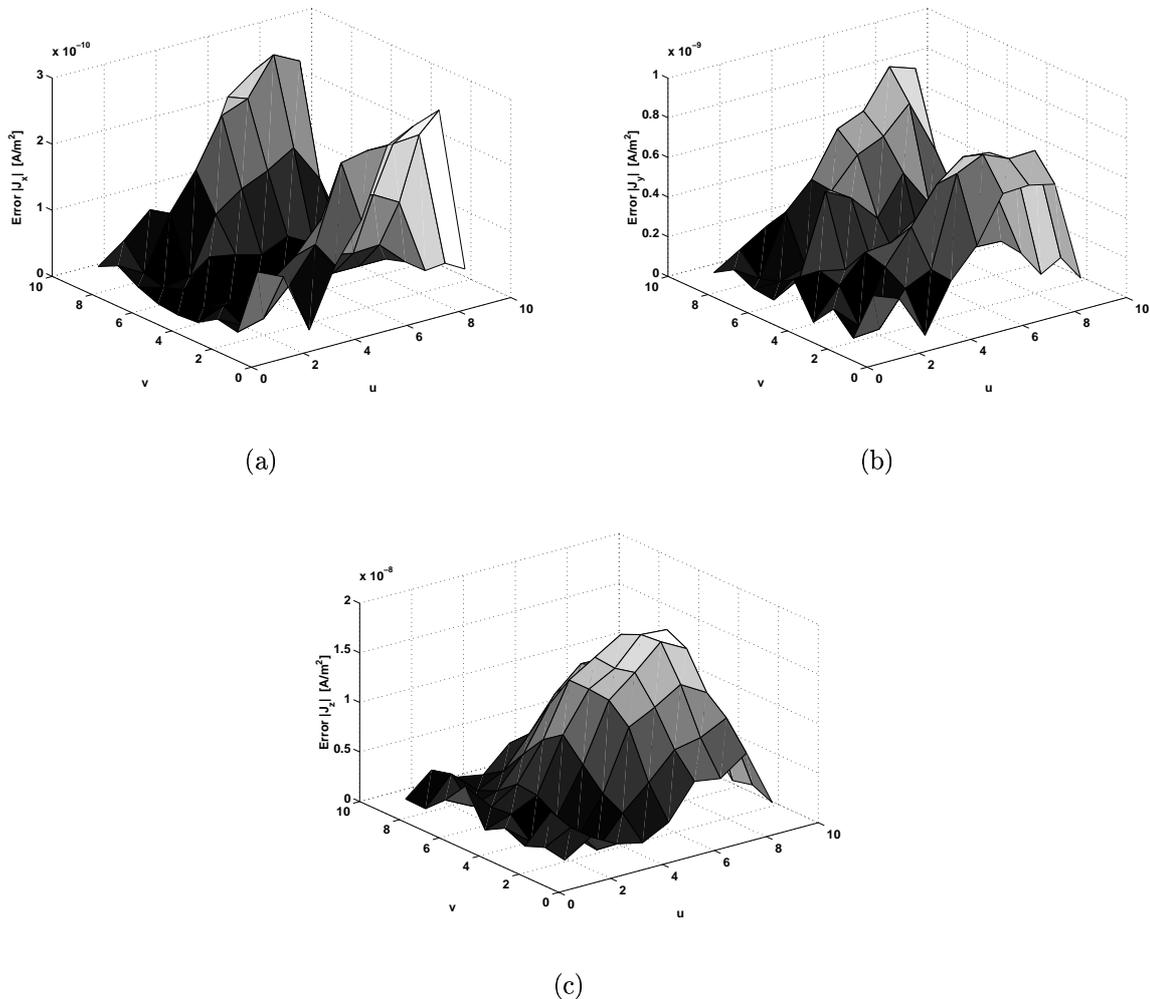


Figura 4.9: Errores absolutos cometidos al aproximar polinomialmente las corrientes del ejemplo mostrado en la figura 4.8, en las componentes  $x$  (a),  $y$  (b),  $z$  (c).

### 4.5.3 Obtención de la Función de Fase a Partir de las Frecuencias Espaciales

Asumiendo una variación lenta tanto de la función de amplitud como de las componentes de frecuencia espaciales  $\omega_u(u, v)$  y  $\omega_v(u, v)$  de un modo de corriente, estas funciones pueden ser obtenidas en la región en la que está definido el modo a partir

de sus valores en los puntos de muestreo. Como se ha comentado anteriormente, para la aproximación se pueden emplear diversos tipos de funciones que abarquen todo el dominio, como parches NURBS [83] o expresiones polinomiales.

La obtención del término de fase,  $\Phi(u, v)$ , se lleva a cabo considerando que las componentes de su gradiente son las frecuencias espaciales del modo de corriente:

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial u}\hat{u} + \frac{\partial\Phi}{\partial v}\hat{v} \quad (4.46)$$

Después de aproximar las funciones  $\omega_u(u, v)$  y  $\omega_v(u, v)$ , se puede llevar a cabo una integración de las mismas para obtener expresiones analíticas de la función de fase. Escribiendo dichas expresiones como  $\Phi_u$  y  $\Phi_v$ , se tiene:

$$\Phi_u(u, v) = \int \omega_u(u, v) du \quad (4.47)$$

$$\Phi_v(u, v) = \int \omega_v(u, v) dv \quad (4.48)$$

Las funciones  $\Phi_u$  y  $\Phi_v$  así calculadas sólo deben diferir en una constante en todos los puntos de la superficie. Empleando ambas expresiones se puede definir una función de fase promediada:

$$\Phi_m(u, v) = \frac{(\Phi_u(u, v) + \Phi_v(u, v))}{2} \quad (4.49)$$

Una vez obtenida esta nueva función de fase, se ajusta en cada punto de muestreo el valor de la fase:

$$\Phi(u, v) = \Phi_m(u, v) + \Phi(u_0, v_0) - \Phi_m(u_0, v_0) \quad (4.50)$$

donde  $\Phi(u_0, v_0)$  es el valor de la fase en el punto de muestreo.

## 4.6 Obtención de los Campos Radiados o Dispersados

Es evidente que, durante el proceso iterativo de análisis electromagnético, además del cálculo de las corrientes que una superficie activa induce en el resto de la geometría, es necesario calcular también el campo que dicha superficie dispersa en la dirección de observación bajo análisis en el caso de cálculo de RCS o de diagramas de radiación. Es posible que la corriente sobre la superficie activa no contribuya al campo dispersado de forma directa, pero sí lo haga induciendo corriente en otras superficies, como suele ocurrir a menudo en el análisis de cavidades, donde sólo las superficies cercanas a la apertura pueden radiar campo fuera de ella. En el capítulo 5 se realiza un estudio más detallado del problema de la ocultación.

De acuerdo con las expresiones de Óptica Física obtenidas en el capítulo 2, el campo eléctrico dispersado en una dirección de observación  $\hat{k}_s$  por la corriente eléctrica soportada en la superficie  $S$  viene dado por la expresión:

$$\vec{E}_s(\vec{r}) = \frac{-j\omega\mu}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jKr}}{r} \cdot \int_S \left[ \hat{k}_s \times \vec{J}_s(\vec{r}') \times \hat{k}_s \right] e^{jK(\hat{k}_s \cdot \vec{r}')} dS' \quad (4.51)$$

donde  $K$  es el número de onda. Si se asume una expansión de  $\vec{J}_s$  mediante modos de corriente, se puede escribir:

$$\vec{J}_s(\vec{r}) = \sum_{m=1}^N \vec{S}_m(\vec{r}) e^{-j\phi_m(\vec{r})} \quad (4.52)$$

con lo cual, la integral de PO dada por (4.51) queda de la siguiente forma:

$$\vec{E}_s(\vec{r}) = \frac{-j\omega\mu}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jKr}}{r} \cdot \int_S \sum_{m=1}^N \left[ \hat{k}_s \times \vec{S}_m(\vec{r}') \times \hat{k}_s \right] e^{-j\{\phi_m(\vec{r}') + K(\hat{k}_s \cdot \vec{r}')\}} dS' \quad (4.53)$$

La expresión (4.53), reescrita de forma más compacta, viene dada por:

$$\vec{E}_s(\vec{r}) = \frac{-j\omega\mu}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jKr}}{r} \cdot \int_S \sum_{m=1}^N \vec{M}_m(\vec{r}') e^{-j\Phi_m(\vec{r}')} dS' \quad (4.54)$$

con las funciones  $\vec{M}_m(\vec{r})$  y  $\Phi_m(\vec{r})$  definidas de la siguiente forma:

$$\vec{M}_m(\vec{r}) = \hat{k}_s \times \vec{S}_m(\vec{r}) \times \hat{k}_s \quad (4.55)$$

$$\Phi_m(\vec{r}) = e^{-j\{\phi_m(\vec{r}) + K(\hat{k}_s \cdot \vec{r})\}} \quad (4.56)$$

si la superficie  $S$  es suave y eléctricamente grande, y bajo la hipótesis de que  $\vec{J}_s$  queda bien expresada por (4.52) con funciones de amplitud y fase de variación lenta para cada modo de corriente, es posible aplicar los métodos expuestos en el capítulo 3 con el fin de incrementar la eficiencia en la obtención del campo dispersado.

# Capítulo 5

## Algoritmos de Ocultación y Aceleración del Método Iterativo

### 5.1 Introducción

En la mayoría de las aplicaciones numéricas basadas en métodos de alta frecuencia se hace necesaria la utilización de una serie de algoritmos de procesamiento geométrico, que desempeñan diversas tareas de una importancia vital para el funcionamiento correcto y eficiente del método electromagnético al que van unidos. Por una parte se puede destacar el preprocesado geométrico, destinado a la obtención de parámetros correspondientes a las distintas superficies, como el muestreo de puntos y vectores normales, la división de superficies en regiones según la curvatura, la detección de parches degenerados, el cálculo del área de cada una de las superficies del modelo o la clasificación de las mismas en base a una serie de criterios predeterminados. Es evidente que al tratar con geometrías de varios cientos o miles de parches el tratamiento geométrico debe ser minuciosamente diseñado.

Existen, además, algoritmos muy ligados a la geometría que a su vez se relacionan con el método electromagnético empleado. Entre ellos se pueden destacar dos grupos para los que, debido a su importancia durante el desarrollo de esta tesis, se ha dedicado este capítulo.

En primer lugar se pueden mencionar aquellos que tratan el *problema de la ocultación* [105], entendido como la selección de una serie de superficies (o más específicamente, de *regiones* de superficies) que deben ser incluidas en el procesado electromagnético y el deshecho de otras, bien porque su contribución se estima irrelevante o porque su inclusión implicaría la aparición de errores en los resultados finales. Debe considerarse, en primer lugar, que normalmente los algoritmos de ocultación dependen del método electromagnético empleado, aunque suelen presentar características generales similares. En la sección 5.2 se estudian los algoritmos de ocultación aplicables a los campos impresos debidos a las fuentes externas a la geometría (por efecto de ondas planas o fuentes puntuales). Se distingue el caso de ocultación por iluminación (sección 5.2.1) y ocultación por eclipse (sección 5.2.2). Otro grupo de algoritmos de ocultación son aquellos se emplean en los efectos intermedios, lo que equivale a considerar una superficie radiante. En la sección 5.3 se analizan estos algoritmos, distinguiendo tres criterios diferentes en los apartados 5.3.1, 5.3.2 y 5.3.3. En la sección 5.4 se propone un algoritmo para la división de una superficie en regiones de acuerdo con los resultados obtenidos por los algoritmos de ocultación.

El segundo grupo de algoritmos incluido en este capítulo hace referencia a la aceleración del método iterativo, entendida como el aumento de la eficiencia computacional al tratar problemas complejos. Para ello se han empleado algoritmos basados en el Z-Buffer angular [97], debido a la eficacia demostrada al ser aplicado en métodos de alta frecuencia [99]. Un punto importante a destacar es la existencia de diversos algoritmos basados en el Z-Buffer angular que, si bien parten de una base común, obtienen los datos de distintas formas dependiendo del efecto electromagnético que se pretende acelerar (visión directa, simple reflexión, dobles efectos, campo cercano) y de las características de la fuente (fuente puntual, onda plana incidente). Esto hace que la utilización del Z-Buffer angular englobe a toda una familia de algoritmos. En [100] y [99] se puede obtener una descripción detallada de cada uno de ellos. En la sección 5.5 se hace un repaso de las características de algunos algoritmos típicamente utilizados para descartar superficies. En el apartado 5.5.1 se revisa la aplicación del Z-Buffer angular de visión directa de una fuente puntual con superficies curvas, así como el caso de visión directa entre superficies arbitrarias, ambos aplicados al método contenido en esta tesis.

## 5.2 Ocultación de las Corrientes Impresas por Fuentes Externas

En este tipo de casos conviene tener en cuenta que, según la función desempeñada y de las características del problema, se puede realizar la siguiente clasificación:

### 5.2.1 Ocultación por Iluminación

Se produce cuando algún punto de la superficie no es visible desde la fuente por la *cara activa* de la superficie (aquella para la que el vector normal es saliente). Este tipo de ocultación debe ser considerado por métodos como la Óptica Física, que sólo considera la existencia de corriente en las zonas iluminadas de los parches, o la Óptica Geométrica. La condición para que un punto  $(u_a, v_a)$  sobre la superficie considerada se encuentre iluminado, expresada matemáticamente, es:

$$\hat{k}_i(\vec{r}(u_a, v_a)) \cdot \hat{n}(u_a, v_a) < 0 \quad (5.1)$$

donde  $\hat{k}_i(\vec{r}(u_a, v_a))$  es el vector de incidencia de la onda sobre el punto de la superficie y  $\hat{n}(u_a, v_a)$  es el vector normal en el mismo. Esta condición es conocida como *criterio de iluminación* (o *culling*, en terminología anglosajona). Su evaluación en un conjunto pequeño de puntos de muestreo sobre la superficie requiere un esfuerzo computacional reducido y se realiza de forma similar en el caso de que la fuente de campo sea puntual y cercana a la superficie o una onda plana. En caso de que todo el parche se encuentre iluminado, se considera la posibilidad de su contribución y se somete al resto del procesado (algoritmos de ocultación por eclipse y algoritmos para estimar la relevancia de su contribución). Si el parche completo se encuentra oculto por iluminación, se descarta el cálculo de las corrientes impresas sobre el mismo. Cuando se presenta el caso de que una parte de los puntos de muestreo evaluados están ocultos por iluminación y el resto se encuentran iluminados, se debe proceder a una identificación más precisa de la zona donde considerar la corriente, aplicando el algoritmo descrito en la sección 5.4. En la figura 5.1 se muestra un esquema geométrico de las zonas iluminadas y de sombra en una superficie, considerando una fuente radiante puntual y

una onda plana incidente.

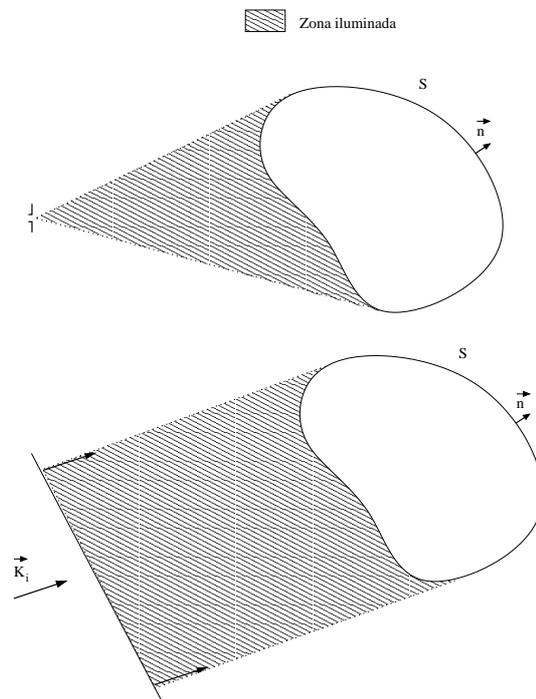


Figura 5.1: Zona iluminada y zona de sombra en una superficie, para una fuente puntual cercana o lejana (onda plana incidente).

## 5.2.2 Ocultación por Eclipse

Este fenómeno surge cuando existe alguna otra parte de la geometría que se interpone entre la fuente y la superficie a analizar, bien ocultándola totalmente o de forma parcial. Se trata de un problema de mayor complicación que el de la ocultación por iluminación, y por tanto exige un mayor coste computacional. En esta situación conviene diferenciar el caso de una fuente de campo puntual cercana del de una fuente situada a una distancia infinita (onda plana), debido a las diferencias en su tratamiento. Ambos casos se encuentran ilustrados gráficamente en la figura 5.2.

- *Fuente puntual*

La determinación de los parches que eclipsan a una superficie dada en este caso implica la utilización de *técnicas de trazado de rayos* y la interrogación de los parches susceptibles de provocar la ocultación. Desde la fuente de campo se

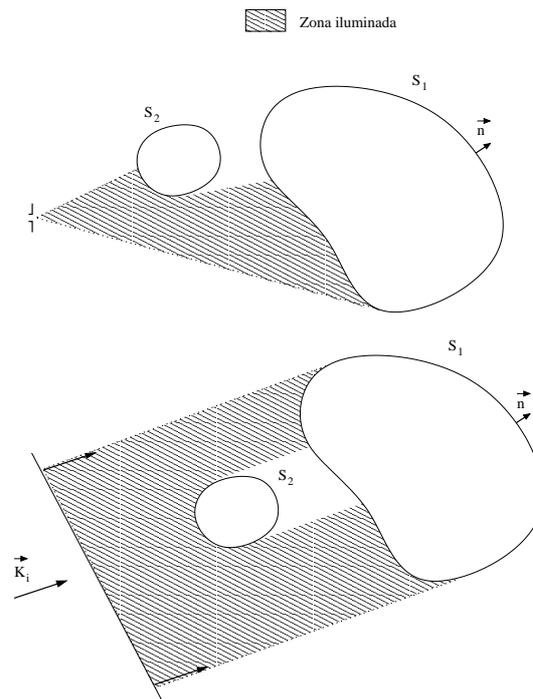


Figura 5.2: Zona iluminada y zona eclipsada en una superficie  $S_1$  por interposición de  $S_2$ , para una fuente puntual cercana o lejana (onda plana incidente).

proyectan rayos hacia cada uno de los puntos a muestrear y se analizan las intersecciones con el resto de superficies que, debido a su posición relativa a la fuente y a la superficie bajo estudio, pueden producir el efecto de eclipse.

En el caso de analizar la intersección de un rayo con una faceta plana (figura 5.3), el coste computacional asociado es bajo y el algoritmo empleado consiste en la realización secuencial de las siguientes tareas:

1. Determinación del punto de corte de la recta que pasa por la fuente y por el punto de la superficie para el que se quiere analizar la ocultación por eclipse con el plano en el que está contenida la faceta, mediante la utilización de una fórmula analítica cerrada.
2. Determinación de la posición del punto de corte: En caso de existir el punto de corte de la recta con el plano, se analiza si éste se encuentra en la trayectoria que seguiría un rayo lanzado desde la fuente hacia el punto de muestreo, o en la trayectoria con sentido contrario, o dicho de otra forma, si está localizado *delante* o *detrás* de la fuente.
3. Determinación del corte con el parche plano: En caso de que se haya determinado que el punto de corte con el plano está situado delante de la fuente,

se procede a analizar si se encuentra dentro de la faceta considerada. Para ello se realiza un cambio de coordenadas del parche y del punto de corte a un sistema de dos dimensiones, y se estudia si el punto considerado se encuentra dentro de la envolvente convexa del polígono formado por los lados del parche plano [106]. En caso de que dichos lados sean curvos se realiza un muestreo del contorno del parche y se aplica el mismo procedimiento.

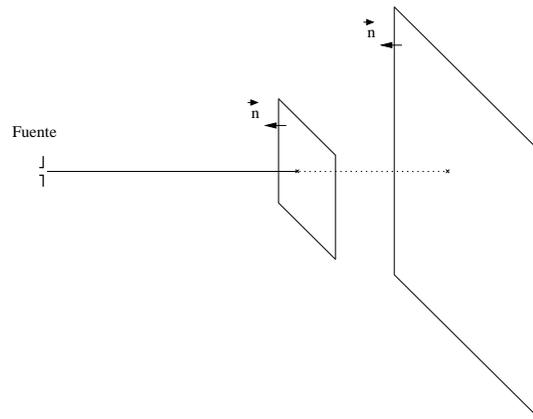


Figura 5.3: Esquema de la ocultación por eclipse de una superficie por la interposición de un parche plano.

Si el parche candidato a ocultar al punto bajo estudio es una superficie curva genérica, se debe recurrir a la utilización de *métodos numéricos de minimización* de funciones, mucho más costosos en términos computacionales que la evaluación de fórmulas analíticas. Debido a ello, es común emplear un criterio rápido para descartar superficies como procesado previo a la minimización propiamente dicha, consistente en generar el paralelepípedo que contiene al parche en consideración a partir de los valores máximos y mínimos de sus componentes espaciales, y ejecutar el test de intersección analítico para cada una de sus seis caras, de igual forma que si se tratara de superficies planas. En caso de que el rayo no corte a ninguna de las caras no es necesario continuar con el proceso de minimización. Este sencillo criterio resulta ser enormemente eficiente en muchos casos de análisis de geometrías complejas.

Si se encuentra corte con alguna de las caras de la caja construida, se procede a aplicar un algoritmo de minimización, utilizando como función a minimizar el cuadrado de la distancia entre el rayo lanzado desde la fuente y un punto de la superficie, por lo que se trata de una función de las dos variables paramétricas  $u$  y  $v$  del parche interrogado [100]. Matemáticamente se puede escribir como:

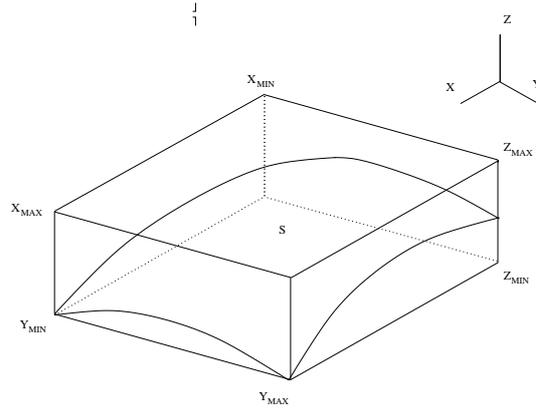


Figura 5.4: Construcción del paralelepípedo que circunscribe a la superficie curva como criterio rápido de descarte de superficies.

$$f(u, v) = d^2(u, v) = (\vec{r}(u, v) - \vec{r}_f) \cdot (\vec{r}(u, v) - \vec{r}_f) - [\hat{v} \cdot (\vec{r}(u, v) - \vec{r}_f)]^2 \quad (5.2)$$

donde  $\vec{r}(u, v)$  es el vector de posición del punto sobre la superficie,  $\vec{r}_f$  indica la posición de la fuente, y  $\hat{v}$  es el vector unitario según el rayo. Si se denota por  $\vec{r}_o$  al punto destino del mismo,  $\hat{v}$  viene determinado por:

$$\hat{v} = \frac{\vec{r}_o - \vec{r}_f}{|\vec{r}_o - \vec{r}_f|} \quad (5.3)$$

de la expresión (5.3) se deduce que es necesario contemplar el caso de que la fuente se encuentre muy cercana al punto de destino del rayo para evitar inestabilidades numéricas.

Existen varios métodos numéricos para realizar la minimización de una función como la dada por (5.2). La técnica escogida, debido a la robustez y eficiencia demostradas en muchas otras aplicaciones, ha sido el *Método del Gradiente Conjugado* [107], que permite la minimización de una función de un número arbitrario de variables, continua y derivable. Este método, descrito de forma concisa en el apéndice C, requiere conocer las derivadas parciales de la función a minimizar, que en este caso vienen dadas por:

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial \alpha} = 2(\vec{r}(u, v) - \vec{r}_f) \cdot \vec{r}_\alpha(u, v) - 2[\hat{v} \cdot (\vec{r}(u, v) - \vec{r}_f)](\hat{v} \cdot \vec{r}_\alpha(u, v)) \quad (5.4)$$

donde  $\alpha = u, v$  y  $\vec{r}_\alpha(u, v)$  indica la derivada paramétrica de la superficie respecto a la misma (ver apéndice A). El Método del Gradiente Conjugado requiere una

serie de *puntos semilla* como valores iniciales en el proceso iterativo. Dichos puntos pueden ser obtenidos a partir de un muestreo poco denso de puntos sobre la superficie para los que se evalúa la distancia al rayo, de manera que los puntos semilla sean aquellos más cercanos a él. Al minimizar la función  $f(u, v)$  se obtiene el punto de la superficie más cercano al rayo,  $(u_0, v_0)$  (Ver figura 5.5). Para considerar la existencia de intersección del rayo con el parche se deben cumplir las siguientes condiciones:

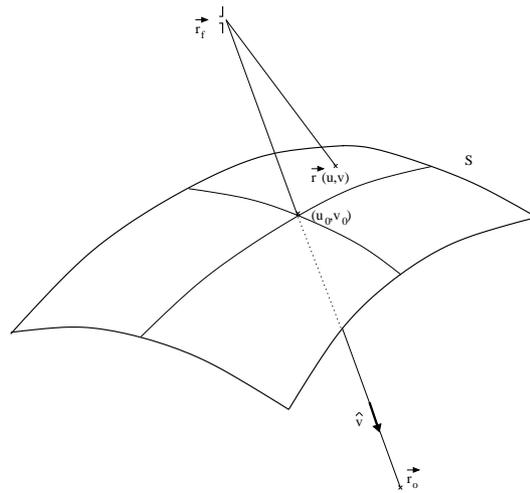


Figura 5.5: Esquema geométrico de la aplicación del método de minimización sobre una superficie curva  $S$ .

1. El valor de la función en el punto de distancia menor entre el rayo y la superficie,  $(u_0, v_0)$ , debe ser teóricamente nulo para que exista el corte. Computacionalmente se requiere que se satisfaga la condición:

$$f(u_0, v_0) \leq \delta_M \quad (5.5)$$

donde  $\delta_M$  es un valor suficientemente pequeño, dependiente de la precisión de la máquina y de los parámetros utilizados en el Método del Gradiente Conjugado.

2. El punto  $(u_0, v_0)$  debe pertenecer al dominio paramétrico considerado en la superficie curva bajo análisis.

Suponiendo el cumplimiento de estas dos condiciones, finalmente se debe determinar si el punto de intersección encontrado se encuentra en el trayecto del rayo entre  $\vec{r}_f$  y  $\vec{r}_o$ . De no ser así, a pesar de existir intersección entre el rayo y la superficie, el punto de muestreo no se encuentra eclipsado por ésta.

- *Onda plana incidente*

Cuando una onda plana incide sobre la geometría, no es posible realizar un análisis de la ocultación por medio de técnicas de trazado de rayos, ya que sería necesario considerar un número exageradamente alto de ellos para obtener un resultado aceptable. El procedimiento adoptado en este caso es aplicable a superficies planas o curvas de manera indistinta y consiste en la proyección del punto a analizar y de cada superficie sobre una pantalla situada en un plano perpendicular a la dirección de incidencia. Para mejorar la eficiencia del algoritmo se puede considerar un conjunto de puntos de muestreo para los que se quiere evaluar la ocultación por eclipse de una vez, en lugar de hacerlo de uno en uno. Los pasos a seguir en este procesado son los siguientes:

1. Generación de la pantalla de proyección

La pantalla de proyección es generada a partir de un cambio de coordenadas, donde el eje  $Z$  se hace coincidir con la dirección de incidencia de la onda plana. La pantalla queda, por tanto, situada en el plano  $XY$ . Los límites de la misma se obtienen a partir de los valores extremos de las componentes espaciales de todo el modelo geométrico, obtenidos a partir de un muestreo de puntos sobre cada uno de los parches en un preprocesado geométrico. Esta pantalla, a su vez, se divide en una serie de celdas con un tamaño predeterminado  $\Delta x$  y  $\Delta y$ , que forman una rejilla sobre la misma, como se muestra en la figura 5.6.

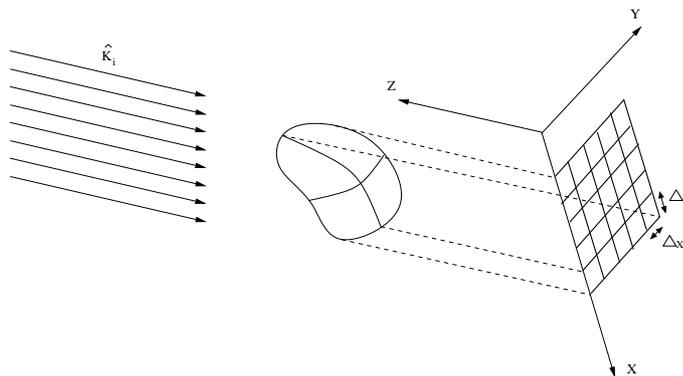


Figura 5.6: *Pantalla de proyección y rejilla.*

2. Rellenado de la rejilla con las superficies y el punto bajo estudio

Después de generar la rejilla de proyección, se construyen unas matrices de datos donde se indica el número total de parches cuya proyección ocupa (parcial o totalmente) cada celda y los índices de éstos, y de igual manera

se almacena el número total de puntos de muestreo (para los que se analiza la ocultación) situados en cada celda y los índices de los mismos.

### 3. Análisis de la ocultación del punto

Finalmente se determina si cada uno de los puntos de muestreo incluidos en el procesado anterior es visible o está oculto. Para ello, se recorren las celdas de la pantalla de proyección con el fin de localizar aquellas que contienen puntos a analizar. Una vez que se localiza a un punto en una de las celdas, sólo se interroga al conjunto de parches cuya proyección esté situada en la misma, pudiendo añadir también los de las celdas limítrofes para evitar errores debido a la discretización de las proyecciones de los parches. Para cada uno de los parches que, bajo esta situación, son considerados candidatos a ocultar al punto analizado, se proyecta la envolvente convexa de la nube de puntos obtenida mediante un muestreo en el preprocesado geométrico del problema en la pantalla de proyección. De esta forma, el problema se reduce a determinar si el punto a analizar está contenido en el polígono proyectado [108]. En caso de que sea así sólo queda por determinar, observando la componente  $z$  del punto y del parche (en el nuevo sistema de coordenadas), si la superficie está situada delante del punto, provocando la ocultación por eclipse. En caso de ser así se marca el punto de muestreo como oculto y se pasa al análisis del siguiente. En caso contrario, se selecciona el próximo parche localizado en la celda correspondiente de la pantalla de proyección y se aplica el mismo procedimiento.

En la figura 5.7 se muestra gráficamente el procedimiento de proyección del parche  $S$  y del punto  $P$  sobre la pantalla, según se ha expuesto anteriormente.

## 5.3 Ocultación en Efectos Intermedios del Método Iterativo

En el caso del análisis de un problema electromagnético por medio del método iterativo descrito en la sección 4.4, cuando el orden de los efectos a considerar es igual o superior a dos se produce la aparición de casos en los que una superficie radia un campo que, a su vez, induce unas corrientes en otras superficies relativamente cercanas a ella. Es evidente que, para analizar el efecto de los parches que pueden ocultar a cada una de

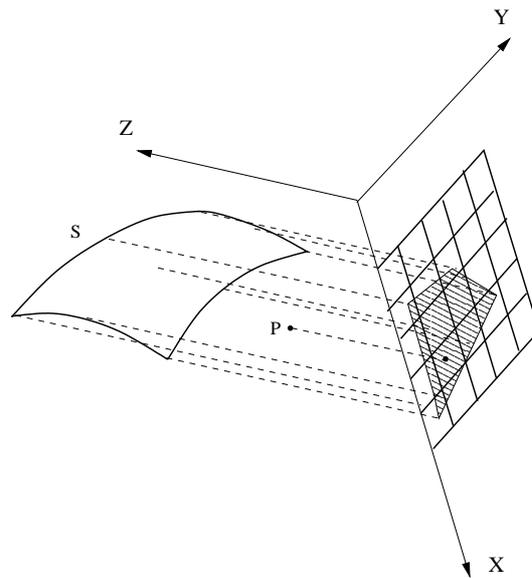


Figura 5.7: *Proyección de la envolvente convexa del parche  $S$  y el punto de muestreo  $P$  en la pantalla.*

ellas, no se pueden emplear los procedimientos descritos en la sección 5.2, debido a que la fuente no es modelable mediante un foco puntual ni una onda plana incidente.

Para determinar si es necesario considerar un par de superficies (o de regiones) se siguen una serie de criterios, aplicándolos en orden creciente de coste computacional con el fin de favorecer los descartes rápidos de pares de regiones de superficies en la medida de lo posible:

### 5.3.1 Orientación Relativa de los Vectores Normales de Ambos Parches

El primer criterio a tener en cuenta consiste en una comparación de la orientación relativa de los vectores normales sobre ambos parches. Considérese para ello una malla de puntos de muestreo donde se han obtenido los vectores normales. Si se denota como  $M_1$  al conjunto de puntos sobre la región activa  $S_1$ , cada uno de ellos expresado por su par de coordenadas paramétricas, y análogamente como  $M_2$  al conjunto de puntos de muestreo sobre la superficie pasiva  $S_2$ , se puede escribir la condición como:

$$\hat{n}_1(u_0, v_0) \cdot \hat{n}_2(u'_0, v'_0) \leq \gamma, \quad \forall (u_0, v_0) \in M_1, (u'_0, v'_0) \in M_2 \quad (5.6)$$

donde  $\hat{n}_1$  y  $\hat{n}_2$  son los vectores normales en los puntos sobre  $S_1$  y  $S_2$ , respectivamente, y  $\gamma$  es el coseno del ángulo mínimo  $\alpha_m$  que deben formar los vectores normales de ambas superficies para que éstas sean incluidas en el proceso iterativo (figura 5.8):

$$\gamma = \cos(\alpha_m) \quad (5.7)$$

el valor típico de  $\alpha_m$  puede situarse entre los 20 y los 30 grados. Un ángulo umbral muy pequeño supone unas corrientes inducidas despreciables, mientras que si este parámetro se aumenta excesivamente los resultados pueden adolecer de falta de precisión. Obsérvese que en el caso de tratar con superficies planas basta con calcular el vector normal en un único punto de cada superficie.

En el caso de calcular la sección radar monoestática considerando sólo el efecto de doble reflexión, este criterio puede hacerse más restrictivo, de manera que los parches involucrados deban ser *cuasiperpendiculares* para ser considerados en el proceso iterativo, entendiendo como cuasiperpendicularidad la situación en que el ángulo entre los vectores normales de ambos parches sea aproximadamente de  $90^\circ$ :

$$|\hat{n}_1(u_0, v_0) \cdot \hat{n}_2(u'_0, v'_0)| \leq \gamma, \quad \forall (u_0, v_0) \in M_1, (u'_0, v'_0) \in M_2 \quad (5.8)$$

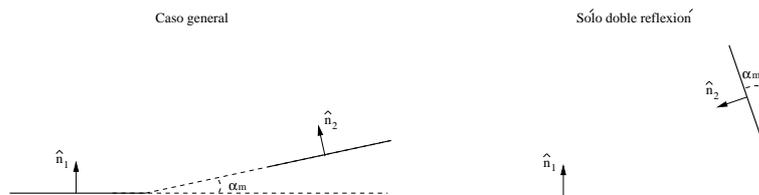


Figura 5.8: Esquema ilustrativo del criterio de la orientación de los vectores normales.

### 5.3.2 Posición Relativa entre los Parches

Es posible que, pese a cumplirse los criterios (5.6) o (5.8), la posición entre las dos superficies consideradas sea tal que no permita que  $S_1$  induzca corriente en la cara activa de  $S_2$ . Con el fin de incluir esta posibilidad, para cada punto de muestreo  $(u_0, v_0)$  en  $S_1$  se construye un conjunto de vectores con origen en dicho punto y dirigidos hacia cada uno de los puntos de muestreo sobre  $S_2$ . La condición para el cumplimiento de este criterio viene dada por las dos condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} \hat{n}_1 \cdot \hat{s}((u_0, v_0), (u'_0, v'_0)) &\geq \gamma, & \forall (u_0, v_0) \in M_1, (u'_0, v'_0) \in M_2 \\ \hat{n}_2 \cdot \hat{s}((u_0, v_0), (u'_0, v'_0)) &\leq -\gamma, & \forall (u_0, v_0) \in M_1, (u'_0, v'_0) \in M_2 \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde, si se denota como  $\vec{r}(u_0, v_0)$  al vector de posición en el punto  $(u_0, v_0)$  de  $S_1$  y como  $\vec{r}(u'_0, v'_0)$  al vector de posición en  $(u'_0, v'_0)$  sobre  $S_2$ , el vector unitario  $\hat{s}$  se expresa de la siguiente forma:

$$\hat{s}((u_0, v_0), (u'_0, v'_0)) = \frac{\vec{r}(u_0, v_0) - \vec{r}(u'_0, v'_0)}{|\vec{r}(u_0, v_0) - \vec{r}(u'_0, v'_0)|} \quad (5.10)$$

### 5.3.3 Efectos de Eclipse

Tras la validación de los dos criterios rápidos de descarte de pares de superficies anteriormente mencionados, se debe determinar si en la interacción entre ambas superficies existe algún otro parche que produzca el efecto de ocultación por eclipse. Es importante señalar que la mayor parte de los casos de análisis de geometrías realistas (aviones, barcos, satélites, etc.) los cuerpos bajo estudio son cerrados y las ocultaciones por eclipse en efectos intermedios son muy pocas, además de que, en caso de que se produzcan, generalmente resulta eclipsada toda la superficie pasiva, por lo que no es necesario realizar subdivisiones. Esta situación es deseable debido al gran esfuerzo computacional que es necesario realizar para particionar superficies por eclipse en efectos intermedios.

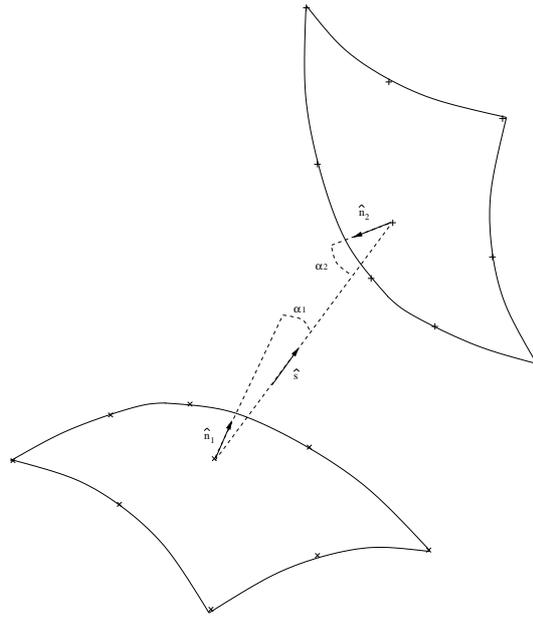


Figura 5.9: Esquema ilustrativo del criterio de análisis de la posición relativa de los parches.

Como caso representativo de esta situación, considérese el esquema geométrico mostrado en la figura 5.10, donde se observan las superficies  $S_1$  y  $S_2$  eclipsadas de forma parcial y total por  $S_3$ . En la sección 5.4 se analizará el procedimiento a seguir en el caso de presentarse una situación en la que una superficie se encuentra parcialmente oculta para otra debido a un tercer parche.

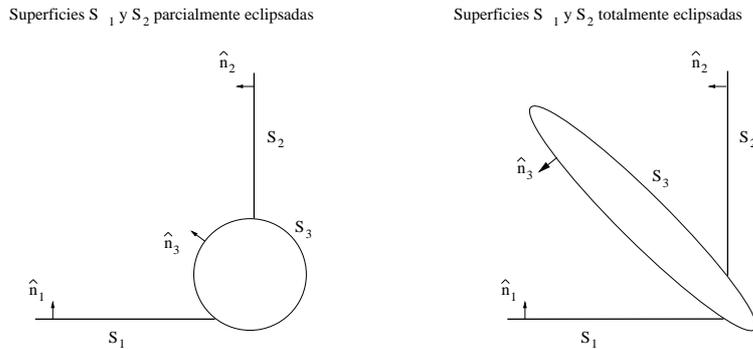


Figura 5.10: Situación de eclipse parcial y total en la interacción entre dos superficies  $S_1$  y  $S_2$ .

Para analizar la ocultación por eclipse de la superficie  $S_2$  con  $S_1$  debido al resto de los parches del modelo geométrico, se emplea un muestreo de puntos sobre cada una de las superficies, siendo suficiente en muchos casos considerar los puntos vértices del dominio paramétrico junto al punto central (esto es, los puntos  $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$  y  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ) en ambas superficies. Una vez hecho esto, se lanzan rayos desde cada uno de

los puntos de muestreo sobre  $S_1$  hacia todos los puntos obtenidos en  $S_2$  y se analiza su intersección con el resto de parches de la geometría, aplicando los algoritmos correspondientes según la naturaleza de cada superficie (fórmulas analíticas para parches planos y minimización numérica de la función distancia para curvos). Tras este procesado se tiene una estimación aproximada de la zona de  $S_1$  visible para  $S_2$ , que será convenientemente refinada por el algoritmo adaptativo expuesto en la sección 5.4.

## 5.4 Algoritmo Adaptativo de Particionamiento de Superficies

En esta sección se expone el procedimiento para la obtención de las zonas de la geometría que, en cada interacción entre un par de parches (o entre un parche y una fuente puntual) deben ser consideradas. Nótese que en la sección 4.4 y posteriores se ha empleado la hipótesis de trabajo de visión directa entre dos superficies o parches completos (parche  $D$  activo y parche  $X$  pasivo). En pocos casos reales cada superficie es totalmente visible para el resto de la geometría, por lo que la aplicación de los algoritmos de ocultación, como ya se ha señalado, es fundamental. En esta tesis se ha trabajado profusamente con las corrientes de Óptica Física, que se suponen nulas en las zonas de sombra de la geometría. Dado que los métodos de campo empleados se basan en una integración superficial de las corrientes, es imprescindible detectar las zonas donde calcularlas, analizando los efectos de sombra que pueden aparecer. Estas zonas son, además, determinadas con una precisión suficiente para ofrecer resultados satisfactorios, manteniendo a la vez un compromiso con el tiempo invertido en el procesado de las ocultaciones. Debe destacarse que para una misma superficie la partición realizada es totalmente distinta dependiendo de la parte de la geometría con la que se esté analizando la interacción, de forma que el algoritmo de ocultación y el de particionamiento se encuentran integrados en el propio método electromagnético.

Como resultado del algoritmo de particionamiento por ocultación, se tendrá un conjunto de regiones, definidas mediante rectángulos en el dominio paramétrico de los parches originales, que podrán pertenecer a tres tipos de zonas:

1. **Zonas Visibles**

Las zonas visibles de una superficie son aquellas que deben ser totalmente consideradas en el procesado electromagnético, según se ha expuesto en este mismo capítulo.

## 2. *Zonas Ocultas*

Las zonas ocultas de un parche son aquellas contenidas por completo en la región de sombra del parche, lo que implica que, en caso de utilizar la aproximación de PO, soportarán una corriente inducida nula.

## 3. *Zonas de Frontera de Sombra*

Este tipo de zonas delimita la *frontera de sombra* del parche. Son zonas de tamaño muy pequeño, del orden de fracciones de la longitud de onda, que se tratan de forma numérica (bien para el almacenamiento de corriente mediante muestras o bien para la integración numérica de la misma) y en las que existen puntos iluminados y puntos ocultos. Para una distinción óptima de la región del parche iluminada y la oculta, el tamaño de este tipo de zonas debe ser nulo. Sin embargo, su utilización supone un compromiso en el que se puede controlar el grado de la aproximación en el cálculo de la frontera de sombra y, por tanto, el tiempo dedicado al procesado del problema de ocultación. Los valores típicos empleados en esta tesis para definir el tamaño de este tipo de zonas en el algoritmo de particionamiento oscilan entre  $\frac{\lambda}{10}$  y  $\frac{\lambda}{3}$  en cada coordenada paramétrica.

Es importante destacar que en las zonas de frontera de sombra la tasa de muestreo de la corriente debe ser notablemente superior a la tasa estándar empleada en las regiones visibles donde se emplea la integración numérica. En cada uno de estos puntos de muestreo se debe realizar un análisis de la ocultación, debido a lo que es conveniente que el tamaño de estas regiones sea reducido. Esto es así debido a la sensibilidad del campo dispersado con la posición de la frontera de sombra. Un error de una fracción de longitud de onda de la misma produce un efecto de escalonado en la amplitud del campo dispersado, que puede ser controlado variando la tasa de muestreo en este tipo de zonas. Para ello, se define una *constante de refinamiento*  $N_r$ , que indica el número de subdivisiones a realizar dentro del subdominio que se utilizaría con la tasa de muestreo estándar. Esto quiere decir que, si se considera a ésta última como  $\frac{\lambda}{N}$ , en las regiones de frontera de sombra la tasa efectiva de muestreo es de  $\frac{\lambda}{N \cdot N_r}$ .

Como ejemplo ilustrativo del efecto de escalonado derivado de una tasa de muestreo demasiado baja, en la figura 5.11 se muestra el esquema geométrico de una cavidad

formada por un cubo de dimensiones  $3\lambda \times 3\lambda \times 3\lambda$  donde una de las caras situadas paralelas al plano canónico ZY se encuentra abierta. En la figura se han señalado los índices de los vectores normales, que en el ejemplo identificarán también a cada una de las cinco superficies. Los parches se han construido con los vectores normales apuntado hacia el interior de la cavidad, con lo que no se ha modelado el exterior de la misma. Considérese el efecto de simple reflexión en el cálculo de la RCS monoestática según la polarización  $\theta - \theta$  para un barrido en la coordenada esférica  $\phi$ , fijando el valor de  $\theta$  a noventa grados. Concretamente, se considerarán 101 direcciones de observación entre  $\phi = 65^\circ$  y  $\phi = 85^\circ$ . Esto implica que las tres superficies involucradas en el problema son las correspondientes a los índices 1, 2 y 3. En el barrido considerado, la superficie 3 produce un efecto de eclipse sobre las otras dos, generando una zona de sombra cuyo efecto es el objeto de estudio en este ejemplo. El esquema de la figura 5.12 muestra la división en zonas de las superficies 1 y 2 (parcial y totalmente ocultas, respectivamente) debido a la ocultación por eclipse al incidir una onda con la dirección  $\hat{k}_i$  sobre la cavidad.

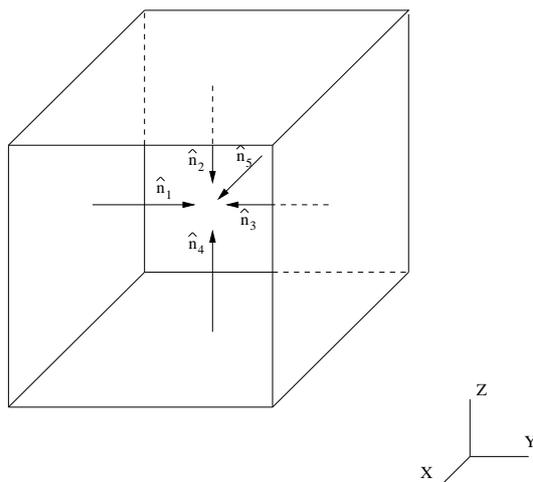


Figura 5.11: Geometría de una cavidad cúbica, modelada con cinco placas planas con un tamaño eléctrico de  $3\lambda$  de lado.

En la figura 5.13 se aprecia el resultado del cálculo de RCS monoestática para tres niveles de refinamiento de los puntos de integración, haciendo  $N_r = 1, 3$  y  $7$ . Estas tres líneas se corresponden con un muestreo tomando 10, 30 y 70 puntos por longitud de onda en la zona estrecha rellena con trazo negro en la figura 5.12. Los escalones son muy notables para  $N_r = 1$ , convirtiéndose en un rizado para  $N_r = 3$  y haciéndose prácticamente imperceptibles en el caso de  $N_r = 7$ . En la tabla 5.1 se muestran los tiempos de ejecución de varios casos en los que se ha variado este parámetro. Si se cambia la anchura de la zona de frontera de sombra no se observa ninguna diferencia

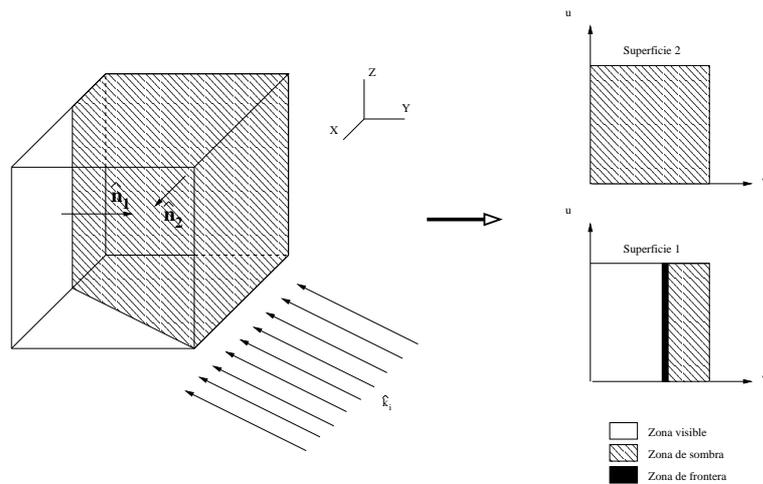


Figura 5.12: Esquema de las zonas generadas por la ocultación en la geometría de la figura 5.11.

apreciable en los resultados, aunque sí en los tiempos debido a que si se hace muy estrecha aumenta ligeramente el tiempo invertido en la determinación de la misma. Por otra parte, al estrechar esta zona se requieren menos muestras para calcular su contribución. Los valores típicos de tamaño mencionados anteriormente suponen un compromiso entre estos dos efectos.

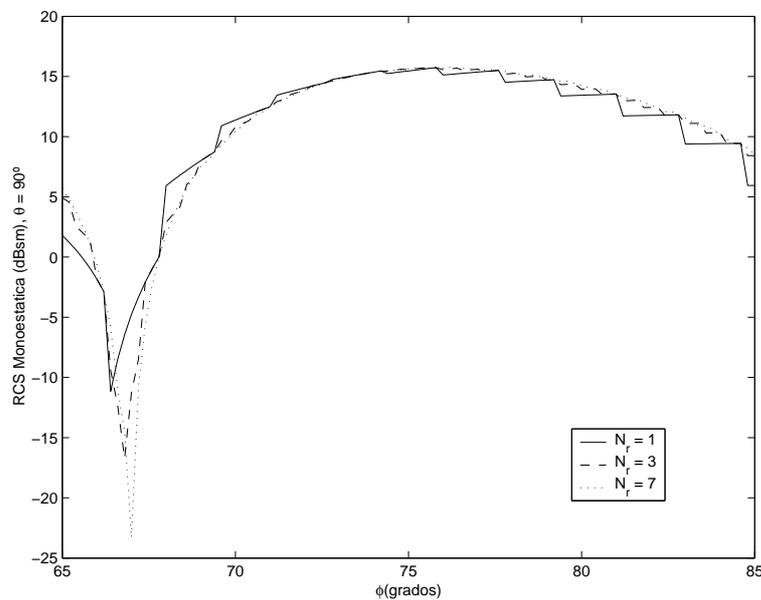


Figura 5.13: Sección radar monoestática (sólo simple reflexión).

A continuación se expone el algoritmo utilizado para la obtención del conjunto de regiones que definen cada uno de los tres tipos de zona enumerados. Como punto de

$N_r$	<i>Tiempo de cálculo (s)</i>
1	13
2	14
3	15
4	17
5	18
6	21
7	22

Tabla 5.1: *Tiempo de cálculo empleado para distintos valores del parámetro  $N_r$ .*

partida se supondrá una superficie  $S$  de un tamaño eléctricamente grande, y una región definida sobre la misma,  $S_1$ , que en la primera iteración del algoritmo comprenderá la totalidad de  $S$ . El subíndice indica el índice de las regiones según son generadas, por lo que en el algoritmo descrito a continuación se empleará un subíndice genérico  $i$ , de manera que se haga referencia a una región cualquiera que aparezca en el proceso de división. Los puntos de cada región son el objeto del análisis de ocultaciones mediante la realización de las siguientes tareas:

- Sobre la región  $S_i$  se define un conjunto de puntos de muestreo para ser analizados en busca de zonas de sombra. Estos puntos pueden formar una malla muy poco densa, en aplicaciones prácticas se han utilizado muestreos de  $3 \times 3$  puntos en cada superficie o incluso los cuatro puntos de los vértices del dominio paramétrico más el punto central de la región. En ellos se aplican los procedimientos ya analizados de búsqueda de ocultaciones por iluminación o eclipse, en orden creciente de complejidad computacional.
- En función del resultado obtenido en el análisis de la malla de puntos de muestreo, se presentan las siguientes situaciones:
  - Ninguno de los puntos de muestreo se encuentra oculto: En este caso, se asume que la región  $S_i$  es totalmente visible y se considera para soportar las corrientes inducidas por los campos incidentes.
  - Todos los puntos se encuentran ocultos: En esta situación, se asume una

corriente inducida nula en la región  $S_i$ , descartando su contribución en efectos posteriores.

- Existen puntos visibles y puntos ocultos: Sobre la región hay una zona iluminada, una zona de frontera de sombra y una zona totalmente oculta. Antes de proceder a la subdivisión, se estima el tamaño eléctrico de la región y se compara su área con un valor prefijado. La región  $i$  se divide si se cumple la siguiente condición:

$$A(S_i) > A_{umbra} \quad (5.11)$$

El valor de  $A_{umbra}$  depende del tamaño aceptado para las regiones de frontera de sombra. Se ha comentado previamente que el tamaño del lado de una de estas zonas suele estar comprendido entre  $\frac{\lambda}{10}$  y  $\frac{\lambda}{3}$ , lo que implica valores de  $A_{umbra}$  situados entre  $\frac{\lambda^2}{100}$  y  $\frac{\lambda^2}{9}$ . En caso de que no se cumpla la condición (5.11), la región  $S_i$  es considerada como de frontera de sombra y no se subdivide. En caso de cumplimiento de (5.11), se procede a la división de la región original, originando tres nuevas regiones y modificando los límites de la actual, de acuerdo con el esquema mostrado en la figura 5.14.

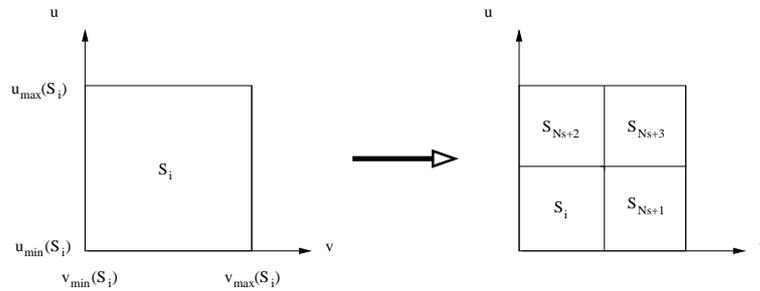


Figura 5.14: Subdivisión de una región en el algoritmo adaptativo de particionamiento.

La variable  $N_s$  de la figura hace referencia al número total de superficies existentes sobre el parche original.

Tras realizar la división, se vuelve a repetir el proceso de muestreo y cálculo de ocultación en la región modificada  $S_i$ , con otra posible subdivisión de la misma. El algoritmo se repite hasta que se alcance la condición de no división de la región, tras lo que se toma la siguiente región previamente generada y se repite el proceso, haciendo  $i = i + 1$ . El algoritmo de particionamiento termina cuando se hayan procesado todas las regiones generadas por el mismo.

Tras la ejecución del algoritmo, se realiza un procesado para agrupar todas las regiones colindantes que sean del mismo tipo, con el objetivo de reducir los recursos computacionales necesarios para su descripción. En la figura 5.15 se muestra de forma gráfica un ejemplo de la evolución del algoritmo descrito.

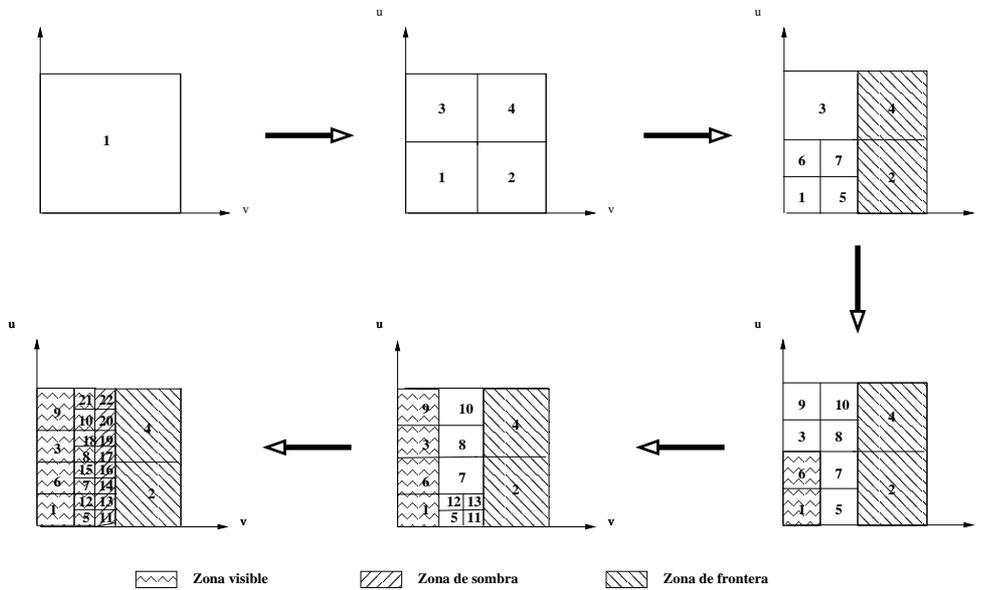


Figura 5.15: *Ejemplo de evolución del algoritmo de particionamiento.*

El caso del particionamiento de las dos superficies (activa y pasiva) involucradas en un efecto intermedio del método iterativo supone una variación respecto al algoritmo presentado, debido a que hay dos regiones de superficies involucradas. Sea  $S_{1i}$  una región situada en la superficie activa y  $S_{2j}$  una región sobre la superficie pasiva. En la primera iteración ( $i = 1, j = 1$ ) estas regiones deben comprender totalmente a sus respectivas superficies. El algoritmo de particionamiento en este caso viene descrito por los siguientes pasos:

- Al igual que en el caso en el que se considera una sólo superficie, se establece un mallado de puntos de muestreo sobre ambas regiones. Una vez hecho esto se toma cada uno de los puntos generados sobre  $S_{1i}$  y, sobre todos los puntos en  $S_{2j}$ , se analiza la ocultación empleando los tres criterios expuestos en la sección 5.3:
  - *Orientación relativa entre los vectores normales.*
  - *Posición relativa entre los puntos de muestreo.*
  - *Efectos de eclipse.*

Para cada uno de los puntos sobre  $S_{1i}$  se almacena el número puntos visibles sobre  $S_{2j}$ . De forma análoga, para cada punto de muestreo en la región  $S_{2j}$  se guarda el número de puntos de  $S_{1i}$  con los que existe visión directa. Para considerar que no es necesario subdividir las superficies  $S_{1i}$  y  $S_{2j}$ , cada uno de los puntos de la primera debe ver directamente a todos los demás sobre la segunda. En caso de que no se cumpla esta condición, debe realizarse una subdivisión de una o ambas superficies, y repetir el procedimiento de forma adaptativa.

- En esta situación, los tres casos que pueden aparecer son:
  - Todos los puntos sobre la región  $S_{2j}$  son visibles desde cualquier punto en  $S_{1i}$ : Se considera visión directa entre las dos regiones, y por tanto son consideradas como regiones iluminadas.
  - Todos los puntos sobre la región  $S_{2j}$  están ocultos desde  $S_{1i}$ : Ambas regiones están ensombrecidas y, por tanto, se descarta su interacción.
  - El número de puntos visibles es diferente para cada punto de muestreo en  $S_{1i}$  y/o en  $S_{2j}$ : Es necesario realizar una subdivisión de las superficies para determinar la frontera de sombra en ambas. Para determinar la superficie a dividir, se hace uso de las variables donde se ha guardado el número de puntos visto por cada uno de ellos. Se dividirá la superficie con el punto de muestreo que tenga menos visibilidad. En caso de que exista un conjunto de puntos de muestreo colindantes para los que toda la otra superficie sea visible, se almacena toda la región delimitada por ellos como zona iluminada, y se divide la que se sitúa en torno al resto. En la figura 5.16 se muestra un caso práctico bidimensional donde en cada región se emplean tres puntos de muestreo. Por simplicidad se ha optado por realizar la división siempre en la superficie  $S_2$ , aunque, como ya se ha comentado antes, este procedimiento puede ser llevado a cabo en ambas superficies, dependiendo del grado de visibilidad de cada punto. Obsérvese que, en la región inicial, uno de los puntos de  $S_2$  está totalmente oculto para  $S_1$ , mientras que en los otros dos  $S_1$  es totalmente visible. Esto hace que se almacene la zona superior como iluminada y se realice una subdivisión en la zona cercana al punto oculto. Al repetir el procedimiento se encuentra una zona totalmente oculta entre dos puntos que no son visibles para  $S_1$ . Tras otras dos iteraciones se llega a una situación en la que se han detectado dos zonas visibles, que pueden ser unidas, y una zona de sombra. La zona restante puede ser considerada zona de frontera si su tamaño no excede el umbral indicado por la condición

(5.11). En otro caso el algoritmo puede continuar con el refinamiento hasta alcanzar una situación de parada.

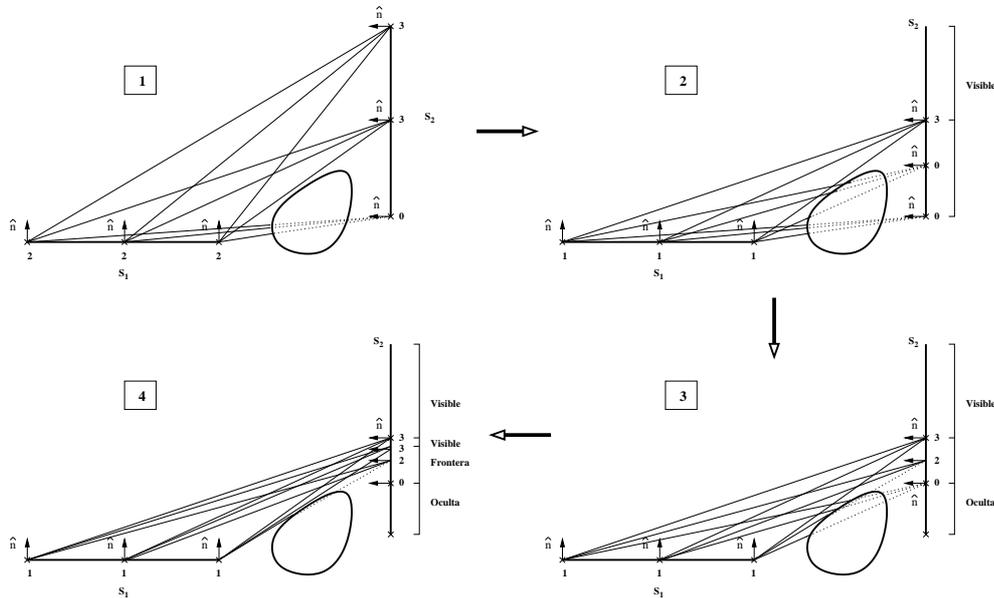


Figura 5.16: Esquema del algoritmo de división en un efecto intermedio del método iterativo.

Resulta inmediato reconocer la no dependencia de la dirección de incidencia de la onda electromagnética en el procedimiento recientemente expuesto de división adaptativa de las superficies involucradas. Un análisis riguroso de la ocultación podría tener en cuenta estas direcciones para una mejor definición de las zonas de contribución. Sin embargo, el procedimiento propuesto en esta sección es preferible debido principalmente a los tres motivos que siguen:

- En una interacción genérica, con superficies curvas y considerando múltiples efectos, no existe una dirección de incidencia claramente definida, sino un conjunto de muchas de ellas, aproximables mediante técnicas de trazado de rayos. El calcular los efectos de ocultación de todos estos rayos puede resultar una tarea computacionalmente inadmisibles.
- El error cometido en la aproximación realizada es pequeño, ya que en las zonas visibles y de frontera encontradas en una de las superficies están contenidas la mayor parte de las direcciones especulares de las ondas incidentes en la otra. Esto quiere decir que el considerar direcciones de incidencia, además de aumentar el coste del procesado de ocultación, agrega zonas de la superficie que sólo

contribuyen al campo dispersado mediante reflexión difusa, con lo que su efecto en la magnitud del resultado final puede ser despreciable.

- El hacer el procesado de ocultación independiente de la incidencia lo convierte en un preprocesado que únicamente debe ser realizado para cada frecuencia que se desee considerar en el análisis del problema.

## 5.5 Técnicas de Aceleración del Análisis Electromagnético en el Método Iterativo

En entornos complejos, como modelos geométricos para aplicaciones de cálculos orientados a telefonía móvil, o blancos radar reales, es común trabajar con varios cientos o miles de superficies. Sin embargo, para cada dirección de observación sólo un pequeño porcentaje de ellas debe ser consideradas para el análisis electromagnético, debido a que la mayor parte suelen encontrarse ocultas, o en posiciones que hacen que su contribución al resultado final sea totalmente despreciable. Ante esta situación se impone la necesidad de discriminar las superficies a considerar mediante un proceso de trazado de rayos unido a algoritmos que incrementen la eficiencia de la simulación [4, 97, 99]. Algunas de estas técnicas, aplicadas a la propagación de ondas electromagnéticas en las bandas UHF y superiores, se utilizan típicamente en aplicaciones de trazado de rayos dentro del campo de la computación gráfica, lo que implica un ámbito multidisciplinar en desarrollo que evoluciona de una forma muy dinámica.

De acuerdo con sus objetivos, las técnicas de aceleración del trazado de rayos se pueden clasificar en cuatro grupos, comentados a continuación:

1. *Reducción del coste asociado a cada intersección de los rayos con las superficies.*

Los modelos de facetas, por ejemplo, utilizan superficies poligonales planas para el modelado de la geometría. Para este tipo de superficies el coste de la intersección rayo-faceta es relativamente bajo, aunque este formato lleva asociado el *error de faceteado*, ya que la superficie modelada no se ajusta totalmente al objeto real.

2. *Reducción del número total de interrogaciones a realizar.*

El test de ocultación debe ser aplicado a cada uno de los rayos lanzados, por lo que aunque el realizarlo para un solo rayo no sea computacionalmente costoso, es posible que para modelos geométricos complejos el tiempo de cálculo requerido sea muy grande, sobre todo si se incluyen efectos múltiples. Descartando determinadas superficies puede reducirse enormemente el tiempo que conlleva la simulación, especialmente en el caso de superficies curvas. Algunos algoritmos que cabe destacar dentro de este grupo son el algoritmo de Partición Binaria Espacial (BSP, Binary Space Partitioning en la terminología anglosajona) [97, 109–111], el algoritmo de *Partición Volumétrica Espacial* (conocido por las siglas en inglés *SVP*, *Spatial Volumetric Partitioning*) [97, 112] y el algoritmo *Z-Buffer angular* (*AZB*) derivado de técnicas de aceleración en computación gráfica, y más concretamente de la técnica conocida como *Light Buffer* [113]. Los algoritmos de aceleración que se han aplicado al método iterativo presentado en el capítulo 4 están basados en el Z-Buffer angular, y sus fundamentos se comentan en la sección 5.5.1. No es el objetivo de este capítulo realizar una descripción extensa de los mismos, por lo que se insta al lector a consultar las referencias [4, 97, 99, 100] para un análisis en profundidad.

Una característica importante de estas técnicas es que por el hecho de discriminar las superficies que pueden contribuir a un determinado efecto electromagnético las hacen ser aplicables a todos los métodos de alta frecuencia, dado que procesan cada una de las superficies de forma aislada, y no sólo a los basados en el trazado de rayos como GTD/UTD o en una integración de corrientes superficiales.

### 3. *Reducción del número total de rayos lanzados.*

En ocasiones es posible estimar durante el proceso de trazado de rayos la contribución de uno de ellos al resultado final. En estos casos, si la contribución citada se halla por debajo de un cierto umbral, el rayo puede ser descartado. Con esta técnica el número de rayos lanzados puede verse considerablemente reducido, especialmente si se aplican métodos basados en el lanzamiento masivo de rayos (Conocido en la terminología anglosajona como *SBR*, *Shooting and Bouncing Rays*) [97, 114, 115], consistente en lanzar una gran cantidad de rayos en todas las direcciones.

### 4. *Sustitución de los rayos individuales por entidades más generales.*

Estas técnicas sustituyen el concepto de rayo por otra entidad más general, como conos de sección circular o poligonal. La idea básica consiste en trazar muchos rayos de forma simultánea.

### 5.5.1 Revisión de Algoritmos Basados en el Z-Buffer Angular

En este algoritmo el espacio se divide en sectores esféricos denominados *anxels* (palabra anglosajona derivada de *angular elements* o elementos angulares), definidos por índices en las coordenadas  $\theta$  y  $\phi$ , que son representados por celdas en la denominada matriz AZB, donde se almacenan las superficies que, dentro de cada *anxel*, pueden contribuir al campo electromagnético mediante un determinado efecto. Estos parches son, además, ordenados según la distancia al foco puntual o la superficie que hace el papel de fuente, según el *algoritmo del pintor* [97]. Esta forma de ordenación de los parches hace que en primer lugar se interroguen aquellos que más probabilidades tienen de producir efectos de ocultación, debido a su cercanía a la fuente. Las características de los algoritmos desarrollados mediante el Z-Buffer angular son especialmente indicados para problemas de propagación en geometrías eléctricamente grandes o muy grandes.

En la figura 5.17 se muestra el esquema de una de estas ventanas angulares. Para hacer referencia a uno de estos elementos dentro de toda la partición espacial realizada, se emplea un par de índices en las coordenadas esféricas  $\theta$  y  $\phi$ , habiendo fijado previamente el número de divisiones en cada una de estas dos componentes, o los incrementos  $\Delta\theta$  y  $\Delta\phi$ , indicadores del margen angular ocupado por cada *anxel* en las dos componentes esféricas. Por tanto es posible representar, a partir de un sistema de referencia definido (y que, como se verá más adelante, puede variar en función del algoritmo a utilizar) cualquier dirección en un plano que se denomina *AZB*.

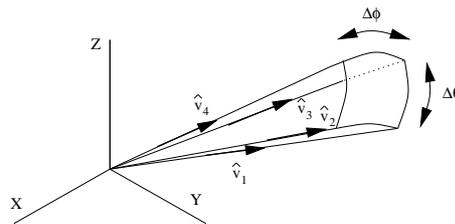


Figura 5.17: *Región angular o anxel.*

El número total de *anxels* es igual al número de divisiones en  $\theta$  multiplicado por el número de divisiones en  $\phi$ . Como el margen en  $\theta$  es de  $180^\circ$  y el margen en  $\phi$  es de  $360^\circ$ , se debe cumplir la expresión:

$$N = N_{DIV\theta} \cdot N_{DIV\phi} = \frac{180}{\Delta\theta} \cdot \frac{180}{\Delta\phi} \quad (5.12)$$

Donde  $N$  es el número total de anxels, y  $\Delta\theta$  y  $\Delta\phi$  son los márgenes angulares mostrados en la figura 5.17, expresados en grados. Dado que  $N$  debe ser un número entero, dichos márgenes deben ser divisores de  $180^\circ$  y  $360^\circ$ , respectivamente. En la figura 5.17 se representan también los cuatro vectores unitarios en las direcciones que limitan una región angular. Bajo la suposición de que el anxel mostrado en la figura es el correspondiente a los índices  $(i, j)$  dentro de la matriz que las ventanas angulares forman en el plano AZB, las componentes esféricas de estos vectores se pueden expresar como:

$$\begin{aligned}\hat{v}_{1r} &= 1 \\ \hat{v}_{1\theta} &= i \cdot \Delta\theta \\ \hat{v}_{1\phi} &= i \cdot \Delta\phi\end{aligned}\tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}\hat{v}_{2r} &= 1 \\ \hat{v}_{2\theta} &= i \cdot \Delta\theta \\ \hat{v}_{2\phi} &= (i - 1) \cdot \Delta\phi\end{aligned}\tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}\hat{v}_{3r} &= 1 \\ \hat{v}_{3\theta} &= (i - 1) \cdot \Delta\theta \\ \hat{v}_{3\phi} &= i \cdot \Delta\phi\end{aligned}\tag{5.15}$$

$$\begin{aligned}\hat{v}_{4r} &= 1 \\ \hat{v}_{4\theta} &= (i - 1) \cdot \Delta\theta \\ \hat{v}_{4\phi} &= (i - 1) \cdot \Delta\phi\end{aligned}\tag{5.16}$$

Dado que el valor de la componente radial no es relevante a la hora de definir las direcciones, conviene utilizar una representación más sencilla en el denominado plano AZB, donde los ejes van asociados a las coordenadas  $\theta$  y  $\phi$ . En dicho plano los anxels se comportan como elementos de una matriz, por lo que se puede acceder a uno de ellos mediante dos índices. Una dirección trazada desde el origen se representa mediante un punto, contenido en alguna de las ventanas representadas anteriormente. El objetivo de los algoritmos basados en la técnica del Z-Buffer angular consiste en determinar las

superficies del modelo geométrico que pueden contribuir al campo electromagnético observado en una determinada dirección mediante un determinado tipo de efecto (Campo directo, reflexión, etc.)

Como ejemplo, en la figura 5.18 se muestra una situación simple en la que únicamente existen dos superficies que contribuyen al campo observado mediante un efecto determinado. El área sombreada indica las direcciones de salida posibles para cada una de las superficies. Como se observa en la figura, el parche 1 contribuirá al campo observado dentro de las ventanas angulares (2, 1), (2, 2), (3, 1) y (3, 2). Por su parte, la segunda superficie lo hará en las ventanas (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 3) y (4, 4). De esta manera, para cada anxel se debe guardar el índice de las curvas que contribuyen al campo en las direcciones de salida contenidas en él. Así, a la hora de calcular el campo en una de las direcciones contenidas en el anxel (1, 2) no se realiza el test de intersección con ninguna superficie, mientras que en el caso de que la dirección de salida esté contenida en el anxel (2, 2) se realiza el test únicamente con la superficie número 1, ya que la superficie número 2 no está almacenada dentro de ese anxel.

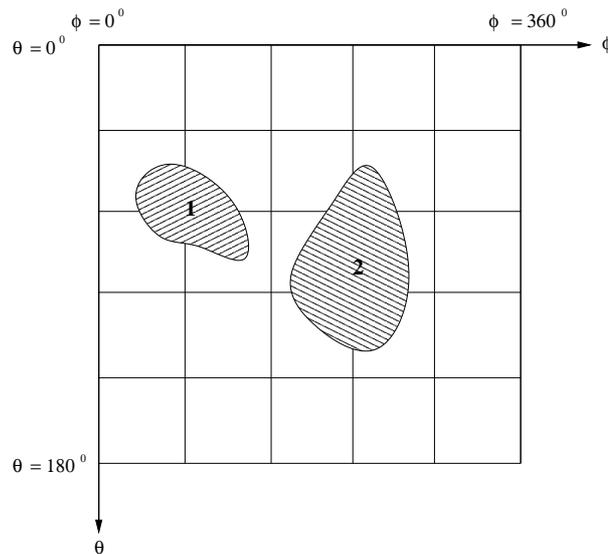


Figura 5.18: *Ejemplo de proyección de superficies sobre el plano AZB.*

Como se ha visto, dependiendo de los márgenes angulares  $\Delta\theta$  y  $\Delta\phi$  varía el tamaño y el número de anxels. Cuanto mayor sea este valor, menor es el número de superficies almacenadas en cada uno, por lo que se reduce el número de interrogaciones a realizar, teniendo en cuenta que a partir de un determinado tamaño no se aprecia una mejora en este aspecto. Sin embargo, se necesita más memoria, ya que es necesario almacenar más datos. Por otra parte, el algoritmo Z-Buffer angular también requiere un tiempo

de cálculo, que se incrementa al aumentar el número de anxls. A la hora de elegir el tamaño de los márgenes angulares hay que buscar un compromiso entre rapidez y memoria.

A continuación se exponen sucintamente las características principales de los dos algoritmos aplicados en la presente tesis, ambos basados en la partición espacial establecida por el Z-Buffer angular.

### **Z-Buffer Angular de Visión Directa de Fuente para Superficies Arbitrarias**

Mediante la utilización de este algoritmo es posible obtener información sobre los parches vistos de forma directa por un foco o fuente puntual, para el rango de direcciones contenidas dentro de un determinado anxel. La principal utilidad de la matriz generada es la determinación de ocultaciones por iluminación o por eclipse en el primer tramo de la trayectoria recorrida por un rayo, es decir, del tramo que une la fuente con los puntos sobre un parche arbitrario en los que se desea analizar la ocultación.

Las superficies directamente iluminadas por la fuente son almacenadas en las correspondientes celdas del plano AZB, donde cada una de ellas es la representación de un anxel en dicho plano. Además, las superficies en cada anxel son ordenadas según la distancia del vértice más cercano de la caja que las contiene a la fuente. De esta manera, cuando se desea comprobar si un rayo está oculto por alguna de las superficies contenidas en dicho anxel se interroga primero a los parches más cercanos, que son a su vez los más probables de interceptar al rayo.

Toda la información obtenida por el algoritmo, dependiente de la geometría y de la fuente, se guarda en lo que se conoce como matriz AZB. En este caso se tiene una matriz AZB por cada una de las fuentes involucradas en el problema bajo análisis.

Es importante reseñar que para el caso de superficies curvas genéricas, debido al coste computacional asociado, no se utiliza la información de todos los puntos de la superficie, sino que se dispone de un número finito de puntos de muestreo. En este caso, una buena solución consiste en inscribir la curva en una caja rectangular y trabajar con los ocho vértices, ya que al contener totalmente a la superficie ofrece la seguridad

de considerar todos los puntos de la misma, sin necesidad de realizar un muestreo que conllevaría una carga computacional más acusada. Como contrapartida, en la matriz AZB pueden verse incluidas superficies en algunos anxeles para los que realmente no exista visión directa, ya que la caja ocupa un volumen mayor que la superficie que encierra.

Todas las superficies a evaluar para ser incluidas en el Z-Buffer de visión directa de la fuente deben cumplir, al menos en un conjunto de puntos sobre las mismas, que exista la condición de visibilidad por el criterio de *culling* o del vector normal, matemáticamente expresado mediante (5.1). De esta forma se asegura que, al menos en una porción de la superficie, la cara activa de la misma se encuentra orientada hacia la fuente. Al comprobar esta condición por lo general es posible eliminar un número considerable de superficies candidatas a entrar en la matriz AZB. Para evaluar esta situación se hace necesario realizar un muestreo de puntos ( $X_i$ ) y vectores normales ( $\hat{n}_{si}$ ) sobre las superficies curvas del modelo, y evaluar la citada condición en cada uno de estos puntos. En la figura 5.19 se muestra un ejemplo en el que se aplica dicho criterio a uno de los puntos de muestreo de la superficie.

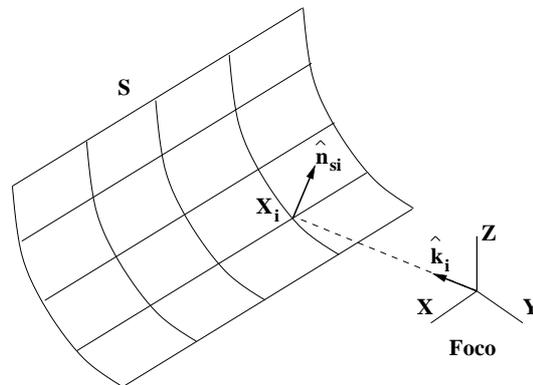


Figura 5.19: Aplicación del criterio del vector normal sobre una malla de puntos de muestreo.

Si la superficie no está oculta por iluminación puede ocurrir que haya ocultación por eclipse, en el caso de que otra superficie interrumpa la visión directa entre la fuente y el parche estudiado en una determinada dirección. Determinar este segundo tipo de ocultación suele requerir un mayor esfuerzo computacional, por lo que generalmente se aplica a un subconjunto reducido de los puntos de muestreo considerados para la comprobación del criterio de *culling*, que puede limitarse a los cuatro vértices del dominio paramétrico. El particionamiento de las superficies, según se ha visto en la sección 5.4, se lleva a cabo de forma conjunta con el método iterativo de análisis, mientras que los algoritmos basados en el Z-Buffer son criterios rápidos de descarte de parches, lo que

justifica el emplear pocos puntos de muestreo.

El procedimiento a seguir para construir la matriz AZB asociada al Z-buffer de visión directa de una fuente puntual se basa en la obtención de los valores angulares de cada uno de los ocho vértices de la caja en la que se inscribe cada parche de la geometría. Se deben determinar los valores máximos y mínimos de  $\theta$  y  $\phi$ , denotados por  $\theta_{max}$ ,  $\theta_{min}$ ,  $\phi_{max}$  y  $\phi_{min}$ . Así es posible hallar los márgenes  $\Delta\theta_s$  y  $\Delta\phi_s$  ocupados por la superficie, a partir de los cuales se determinan los anxels donde se debe incluir al parche considerado. Un ejemplo que ilustra esto es el que se muestra en la figura 5.20.

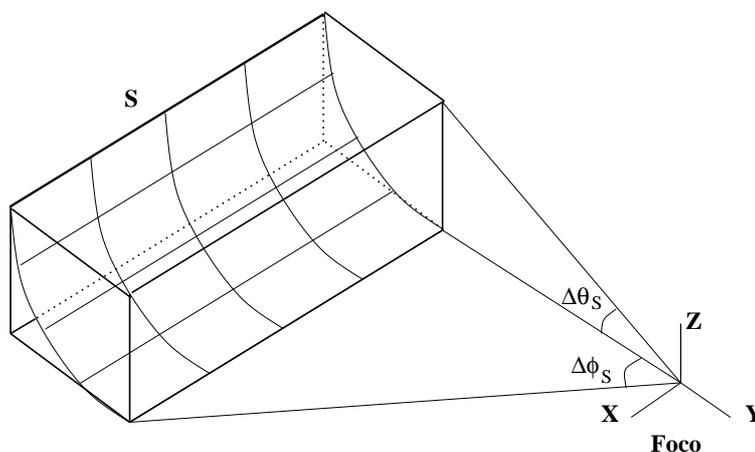


Figura 5.20: Márgenes angulares ocupados por la caja que encierra a la superficie  $S$ .

Una vez obtenidos los valores extremos en  $\theta$  y  $\phi$  para la caja, se proyectan sobre el plano AZB, originando un rectángulo en el mismo. Se debe considerar la posibilidad de que los citados valores no se correspondan con los extremos reales, es decir, que los valores máximos (o mínimos) de  $\theta$  y  $\phi$  reales se obtengan en puntos que no sean los vértices de la caja. Para ello, se aplica un procesado considerando estos *casos especiales* [99, 100]. Este procesado debe ser realizado cuando se cumpla que  $\Delta\phi_s > \pi$ .

Después de haber hallado el rectángulo de proyección de la caja y de realizar el procesado de casos especiales se construye un rectángulo en el plano AZB con los valores extremos calculados. En las figuras 5.21(a) y 5.21(b) se muestra en sombreado diagonal la proyección de dicho rectángulo, y en sombreado ondulado el conjunto de anxels ocupados por esta proyección. En las figuras se representa el caso normal (región angular interior) y el caso especial (región angular exterior).

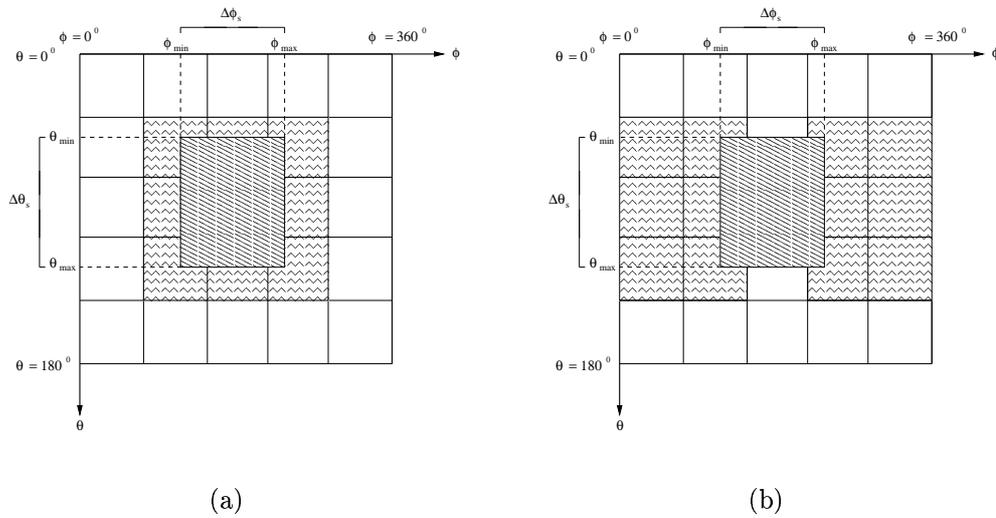


Figura 5.21: Localización de las celdas en el plano AZB. (a): Caso normal; (b): Caso especial.

Una vez hallados los anxeles ocupados por cada superficie, se incluye a la misma en las celdas correspondientes de la matriz AZB. Es conveniente ordenar los parches dentro de cada anxel por la distancia a la fuente, de forma que la primera superficie dentro de una celda de la matriz sea aquella para la cual uno de los vértices de la caja que la engloba diste menos de la fuente que el resto de los vértices de las cajas correspondientes a las demás. Para ello es necesario calcular la distancia de cada uno de los vértices de la caja a la fuente, y comparar luego la distancia mínima obtenida con la correspondiente distancia mínima de las demás superficies almacenadas en cada celda.

Dado que la matriz AZB resultante está ligada tanto a la geometría del modelo como a la posición de cada fuente, se hace necesario incluir este algoritmo como parte del procesado previo al tratamiento electromagnético. La ventaja de los algoritmos que sólo van asociados a la geometría radica en la posibilidad de guardar los resultados, pues la posición de la fuente no es relevante para su cálculo, de manera que sólo es necesario ejecutarlos una vez para cada modelo geométrico. El algoritmo Z-buffer angular de visión directa de superficies es independiente de las fuentes existentes en el problema a tratar.

## Z-Buffer Angular de Visión Directa de Superficies Arbitrarias

La matriz AZB generada por este algoritmo permite obtener las superficies que pueden interceptar un rayo que tenga como origen a cualquiera de los puntos de un parche y con una dirección determinada, contenida dentro de un anxel. Dicha matriz puede ser utilizada para la determinación de ocultaciones por eclipse en los tramos de salida de efectos de orden simple, como puede ser el tramo de salida tras la reflexión en una superficie, o de orden múltiple, como la ocultación de los tramos intermedios (o el tramo final) de reflexiones de orden  $n$  o de tramos intermedios en efectos combinados. Para crear una matriz Z-Buffer donde la fuente es una superficie el primer paso consiste en generar la caja que encierra a la misma. Posteriormente, tomando como origen cada uno de los ocho vértices de la caja, se crean ocho matrices. La matriz AZB global de la superficie se crea a partir de la información guardada en las ocho matrices de los vértices, de forma que si una superficie ocupa un anxel en una matriz de un vértice, ocupa también ese mismo anxel en la matriz de la superficie.

El criterio de *culling* extendido dos superficies  $i$  y  $j$  implica tomar un conjunto de puntos con una separación  $\Delta u$  y  $\Delta v$  en el espacio paramétrico para cada uno de los dos parches. Por tanto, existen  $[\frac{1}{\Delta u} + 1][\frac{1}{\Delta v} + 1]$  puntos de muestreo sobre cada superficie. Sobre la superficie  $i$  se obtienen los puntos de muestreo  $\vec{P}_{m,n}^i$ , donde  $m$  indica el índice del punto en la coordenada  $u$  y  $n$  el índice en la coordenada  $v$ , mientras que las muestras sobre la superficie  $j$  son  $\vec{P}_{p,q}^j$ , con una definición similar para ambos índice  $p$  y  $q$ . Para cada punto de muestreo sobre  $i$  es posible construir  $[\frac{1}{\Delta u} + 1][\frac{1}{\Delta v} + 1]$  vectores al unirlos con cada una de las muestras sobre  $j$ . Para que exista visión directa entre las dos superficies en estos puntos, es necesario que se cumplan las siguientes condiciones:

$$\hat{k}_{(m,n),(p,q)} \cdot \hat{n}_{(p,q)}^j \leq 0 \quad (5.17)$$

$$\hat{k}_{(m,n),(p,q)} \cdot \hat{n}_{(m,n)}^i \geq 0 \quad (5.18)$$

donde  $\hat{n}_{(\beta u, \beta v)}^\alpha$  es el vector normal de la superficie  $\alpha$  en el punto de muestreo dado por los índices  $(\beta u, \beta v)$ , y el vector unitario  $\hat{k}_{(m,n),(p,q)}$ , mostrado gráficamente en la

figura 5.22, se define como:

$$\hat{k}_{(m,n),(p,q)} = \frac{\vec{P}_{m,n}^i - \vec{P}_{p,q}^j}{|\vec{P}_{m,n}^i - \vec{P}_{p,q}^j|} \quad (5.19)$$

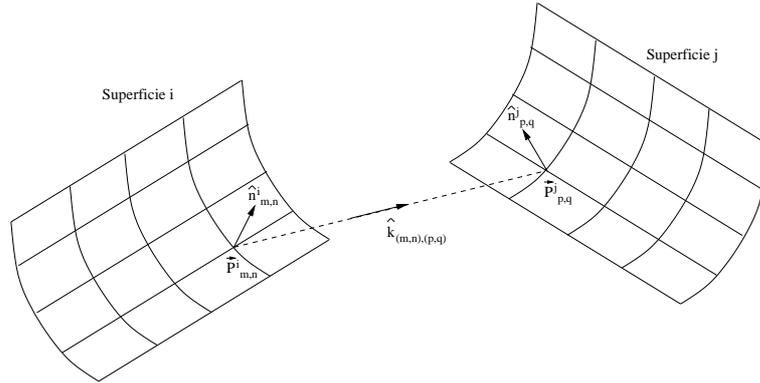


Figura 5.22: Esquema de la aplicación del criterio de culling extendida a dos superficies.

Tomando como fuente cada uno de los vértices que definen la caja que contiene a la superficie activa  $i$ , se extraen los dos límites angulares relativos en  $\theta$  y los dos en  $\phi$ . De esta manera, se obtiene un vector de 16 valores en  $\theta$  y otros 16 en  $\phi$  (límites máximos y mínimos de cada vértice), de donde se pueden extraer los límites absolutos en  $\theta$  y  $\phi$  que determinan el rectángulo que la superficie  $j$  ocupa en el plano AZB. Al igual que en el caso anterior, se deben considerar los casos especiales cuando la región angular ocupada es exterior al rectángulo de proyección cuando cada vértice actúa como fuente.

Este procedimiento se repite con todos los posibles pares de superficies activa-pasiva. Una ventaja muy importante de este algoritmo consiste en que toda la información generada es dependiente sólo de la geometría del problema. Por lo tanto, únicamente es necesario calcular las matrices una vez y posteriormente guardarlas en un dispositivo de almacenamiento. En análisis posteriores la generación de estas matrices es inmediata, ya que sólo hay que cargar los datos guardados previamente.

# Capítulo 6

## Aplicación del Método de las Funciones Base Características a Superficies Paramétricas

### 6.1 Introducción

Este capítulo se centra en la aplicación de los *modos de corriente* en el contexto de un método riguroso, desarrollado como ampliación del Método de los Momentos. Para ello, en primer lugar se presenta una revisión del Método de los Momentos convencional (sección 6.2), donde únicamente se analiza el proceso de discretización del operador integrodiferencial y la generación de la matriz de ecuaciones lineales, sin especificar ningún tipo de funciones de base o prueba. En la sección 6.3 se profundiza en la aplicación del Método de los Momentos a modelados geométricos consistentes en un conjunto de superficies paramétricas NURBS, mediante la inclusión de funciones de tipo tejado y cuchilla como funciones de base y de prueba, respectivamente (conocidas como *rooftops* y *razor-blades* en la terminología anglosajona). El proceso de división de un parche NURBS en subdominios es comentado en la sección 6.3.1, mientras que la utilización de las funciones de base y prueba anteriormente indicadas se analiza en las secciones 6.3.2 y 6.3.3. Posteriormente, en la sección 6.3.4 se desarrollan las expresiones para la obtención de los coeficientes de la *matriz de acoplos o impedancias* utilizando

las funciones propuestas anteriormente y la formulación integral de campo eléctrico (EFIE). En la sección 6.4 se introduce el Método de las Funciones Base Características, desarrollado en los últimos años [66, 68, 69]. En este método, la primera tarea a realizar en el análisis de un problema electromagnético consiste en la división de la geometría en bloques y la generación de las macro-funciones de base para cada uno de ellos, ya que éstas son propias de parámetros geométricos y de la frecuencia de análisis (aunque su dependencia con la frecuencia puede ser mitigada, como se muestra en [93]). En la sección 6.4.1 se muestra cómo para obtener estas funciones base características se emplea un conjunto de ondas planas incidentes desde varias direcciones (*Espectro de Ondas Planas* o *Plane Wave Spectrum (PWS)* en la terminología anglosajona), que pueden ser obtenidas mediante la aproximación de PO en el caso de superficies eléctricamente grandes y de variación suave, o utilizando el Método de los Momentos convencional para cada bloque en caso contrario. Una vez obtenidas las corrientes se puede recurrir a métodos de ortogonalización para la reducción del número de funciones de base a utilizar (sección 6.4.2). Tras realizar este paso, se construye la *matriz reducida* de impedancias, empleando los acoplos previamente obtenidos entre las funciones de base y de prueba de bajo nivel (sección 6.4.3) para generar los bloques diagonales. Los bloques no diagonales de la matriz reducida pueden ser calculados mediante técnicas numéricas rápidas (sección 6.5) que agilicen los productos matriz-vector. En este capítulo se analiza la aplicación del Método Rápido de los Multipolos en la sección 6.5.1, y la reducción del rango numérico de las submatrices correspondientes a los bloques no diagonales mediante una variante del Método de Gram-Schmidt Modificado (sección 6.5.2).

## 6.2 Revisión del Método de los Momentos

El Método de los Momentos se ha convertido en las últimas décadas en un referente a menudo utilizado como punto de apoyo y de comparación con otras técnicas más novedosas. Es muy común su utilización combinada o hibridada con otros métodos [26–28], especialmente en problemas abiertos de cálculo de sección radar o diagramas de radiación con modelados superficiales, ya que únicamente requiere la generación de incógnitas sobre el cuerpo dispersor. Dependiendo de las condiciones de contorno que se enfatizan en cada problema, es común utilizar este método para la resolución de la *EFIE*, *MFIE* o una combinación lineal de ambas, conocida como *ecuación integral de*

*campo combinado* (*CFIE* en terminología anglosajona). En cualquiera de estos casos, el Método de los Momentos ha sido empleado para plantear el problema numérico asociado a cada problema físico, convirtiendo las ecuaciones integrodiferenciales en un sistema lineal de ecuaciones algebraicas.

Como se ha estudiado en el capítulo (2), la expresión general del problema a resolver puede ser escrita como:

$$L(h) = f \quad (6.1)$$

siendo  $L$  el operador integrodiferencial que actúa sobre la corriente incógnita  $h$  y  $f$  una función conocida. Ya que en un caso general no existe una expresión analítica exacta de las corrientes como solución al problema planteado, se recurre a expandir la incógnita mediante un conjunto de *funciones de base* (o *funciones base*)  $B_i$ ,  $i = 1 \dots N$  a las que se asocia un conjunto de *coeficientes* o *pesos*  $\alpha_i$ ,  $i = 1 \dots N$ :

$$h = \sum_{i=1}^N B_i \alpha_i \quad (6.2)$$

Es importante resaltar que la forma de cada una de las funciones base  $B_i$  es conocida. El conjunto de estas funciones debe ser escogido, por tanto, de manera que se pueda representar una corriente arbitraria con un elevado grado de precisión. Esto implica que las únicas incógnitas a determinar son los pesos que multiplican a las funciones base.

Si se emplea esta expansión como forma de expresar la corriente en (6.1), y asumiendo que el operador  $L$  es lineal (ya que lo son las ecuaciones de Maxwell) resulta:

$$\tilde{f} = \sum_{i=1}^N L(B_i) \alpha_i \quad (6.3)$$

En el caso de que las funciones  $B_i$  hayan sido adecuadamente escogidas, se puede

asumir que el error al representar las corrientes es despreciable, y por tanto  $\check{f} \approx f$ . La expresión (6.3) consiste en una ecuación no lineal con  $N$  incógnitas. Para resolverla de forma numérica se discretiza por medio de un conjunto de *funciones prueba*  $W_i$ ,  $i = 1 \dots M$  dentro del dominio en el que está definido el operador integrodiferencial. La discretización viene dada por el producto interno con estas funciones a ambos lados de (6.3):

$$\sum_{i=1}^N \langle W_j, L(B_i) \rangle \alpha_i = \langle W_j, f \rangle, \quad j = 1 \dots M \tag{6.4}$$

Los productos internos entre las funciones que aparecen en (6.4) se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} \langle W_j(\vec{x}), L(B_i(\vec{x})) \rangle &= \int_D W_j(\vec{x}) \cdot L^*(B_i(\vec{x})) d\vec{x} \\ \langle W_j(\vec{x}), f(\vec{x}) \rangle &= \int_D W_j(\vec{x}) \cdot f^*(\vec{x}) d\vec{x} \end{aligned} \tag{6.5}$$

donde  $\vec{x}$  indica el punto de integración dentro del dominio  $D$  y  $*$  es el operador complejo conjugado. A partir de (6.4) es posible plantear un sistema de  $M$  ecuaciones lineales con  $N$  incógnitas que se puede representar en forma matricial como:

$$[Z][J] = [V] \tag{6.6}$$

Donde:

$$[Z] = \begin{pmatrix} \langle W_1, L(B_1) \rangle & \langle W_1, L(B_2) \rangle & \cdots & \langle W_1, L(B_N) \rangle \\ \langle W_2, L(B_1) \rangle & \langle W_2, L(B_2) \rangle & \cdots & \langle W_2, L(B_N) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle W_N, L(B_1) \rangle & \langle W_N, L(B_2) \rangle & \cdots & \langle W_N, L(B_N) \rangle \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

$$[J] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

$$[V] = \begin{pmatrix} \langle W_1, f \rangle \\ \langle W_2, f \rangle \\ \vdots \\ \langle W_N, f \rangle \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

Una vez calculada la matriz  $Z$ , conocida como *matriz de acoplos* o de *impedancias*, y tras obtener los valores del término independiente  $V$  (*vector de tensiones*), se procede a la resolución del sistema de ecuaciones. Si se considera una discretización superficial de la misma, el número de incógnitas es directamente proporcional a  $\frac{1}{\lambda^2}$ , mientras que el tamaño de la matriz de acoplos crece en proporción a  $\frac{1}{\lambda^4}$ . En una aplicación convencional del Método de los Momentos se suele emplear alrededor de una decena de funciones de base por cada longitud de onda con el fin de obtener una buena representación de la corriente sobre el cuerpo. Esta densidad en el muestreo, junto con la gran dependencia del coste computacional con la frecuencia de análisis y con el hecho de que  $Z$  es una matriz densa en un caso general hacen que a partir de un tamaño eléctrico de unas cuantas longitudes de onda la única forma viable de resolver (6.6) sea mediante la utilización de métodos iterativos. Para solventar esta acusada carga computacional, han surgido técnicas que alivian las necesidades de almacenamiento para la matriz  $Z$ , además de realizar más eficientemente los productos matriz-vector cuando se resuelve (6.6) de una forma iterativa.

Una técnica eficiente que ha alcanzado una gran popularidad es el Método Rápido de los Multipolos [33, 71], conocida también en la terminología anglosajona como *FMM* o *Fast Multipole Method*. Este método evita el cálculo de las interacciones entre elementos lejanos en la generación de la matriz  $Z$ , convirtiéndola en una matriz dispersa, además de acelerar el cálculo de los productos matriz-vector.

Otra técnica eficiente, alternativa a la anterior, se basa en que las interacciones entre zonas lejanas de la geometría dan origen a bloques de la matriz  $Z$  que son *deficientes en rango*, esto es, pueden ser representados mediante un producto de sub-matrices de

un rango inferior. Esta característica es aprovechada por técnicas como el *Método de Gram-Schmidt Modificado (MGS)* [116], basado en una descomposición  $QR$  parcial de estos bloques.

La utilización de estas dos técnicas se indica de una manera concisa en las secciones 6.5.1 y 6.5.2. Se remite al lector a la consulta de las referencias expuestas en los párrafos anteriores para un análisis en profundidad de las mismas.

## 6.3 Funciones de Base y Prueba en el Método de los Momentos sobre Superficies Paramétricas

El tipo de funciones de base considerado en este trabajo han sido las funciones *tejado* (o *rooftops*, en terminología anglosajona) sobre superficies paramétricas [7, 117, 118]. Esto se debe en gran parte a la experiencia adquirida por el grupo de investigación donde se ha desarrollado la tesis en la aplicación de estas funciones de base, así como en los buenos resultados obtenidos con su utilización. Por las mismas razones, se han utilizado funciones *cuchilla* o *razor-blade* [119] como funciones de test, teniendo en cuenta que tanto éstas como las funciones de base están adaptadas a la naturaleza curva de las superficies paramétricas.

### 6.3.1 División de las Superficies

La forma de definir estas funciones base sobre una superficie paramétrica origen se basa en una división de la misma en subparches de un tamaño reducido, generalmente del orden de  $\frac{\lambda}{10}$  en cada componente paramétrica. Para ello se debe estimar el tamaño de cada una de las cuatro curvas frontera que delimitan al parche original. Estas curvas pueden denotarse como  $u^-$ ,  $u^+$ ,  $v^-$  y  $v^+$ , para las que, respectivamente, se fija  $u = 0$ ,  $u = 1$ ,  $v = 0$  ó  $v = 1$ , permitiendo variar la otra componente paramétrica entre 0 y 1. La longitud de cada una de estas curvas puede ser estimada mediante una aproximación por un conjunto de tramos rectos.

Una vez obtenido el tamaño de las curvas frontera, se procede a realizar una división

de todo el dominio paramétrico. Para obtener el número de divisiones a realizar en  $u$  y en  $v$  se consideran las curvas de frontera de mayor longitud en estas componentes. De esta forma, el resultado de la división consiste en un conjunto de rectángulos del mismo tamaño sobre el dominio paramétrico original. Nótese que sobre el dominio real el tamaño es variable y dependiente de la forma de la superficie.

Cada uno de los subparches generados por el proceso de división puede ser considerado como una entidad paramétrica independiente limitada por cuatro curvas de contorno, dentro del dominio paramétrico original. Cada una de estas curvas de contorno está compartida por dos de los parches del modelo y se denomina *lado*. Los lados del modelo, por tanto, son los contornos de cada uno de los subparches en que se ha dividido el parche origen, pero no aquéllos contenidos en el contorno de dicho parche.

### 6.3.2 Funciones de Base sobre Superficies Paramétricas

Según el esquema de división de parches propuesto, se asocia una función de base a cada uno de los lados generados en el modelo, lo que implica una nueva incógnita en el sistema de ecuaciones. Para cada uno de los lados la corriente fluye de un subparche a otro siguiendo las líneas isoparamétricas según  $v$  en el caso de que el lado sea  $u = cte$ , y según  $u$  en caso de tratarse de un lado  $v = cte$ . Para asegurar una densidad de carga constante en ambos subparches, la divergencia de la corriente ha de ser constante. La carga asociada al subparche de donde fluye la corriente es  $\frac{-1}{j\omega}$ , mientras que la asociada al que la recibe es  $\frac{1}{j\omega}$  [117, 118]. La relación entre la carga y la divergencia de la corriente viene dada por la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}') = -j\omega\sigma(\vec{r}') \quad (6.10)$$

Con estas consideraciones, la corriente asociada a un lado genérico  $l$  de la superficie original en un subparche  $P$  desde el que fluye la corriente puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\text{Lado según } u^-: \quad \vec{J}(u, v) = \frac{\vec{r}'_u(u, v)}{S\sqrt{g(u, v)}} \int_{u_{min}}^u \sqrt{g(u, v)} du \quad (6.11)$$

$$\text{Lado según } u^+: \quad \vec{J}(u, v) = \frac{\vec{r}_u^\rightarrow(u, v)}{S\sqrt{g(u, v)}} \int_{u_{min}}^{u_{max}-u} \sqrt{g(u, v)} du \quad (6.12)$$

$$\text{Lado según } v^-: \quad \vec{J}(u, v) = \frac{\vec{r}_v^\rightarrow(u, v)}{S\sqrt{g(u, v)}} \int_{v_{min}}^v \sqrt{g(u, v)} dv \quad (6.13)$$

$$\text{Lado según } v^+: \quad \vec{J}(u, v) = \frac{\vec{r}_v^\rightarrow(u, v)}{S\sqrt{g(u, v)}} \int_{v_{min}}^{v_{max}-v} \sqrt{g(u, v)} dv \quad (6.14)$$

donde:

$$\vec{r}_u^\rightarrow(u, v) = \frac{\partial \vec{r}^\rightarrow(u, v)}{\partial u} \quad (6.15)$$

$$\vec{r}_v^\rightarrow(u, v) = \frac{\partial \vec{r}^\rightarrow(u, v)}{\partial v} \quad (6.16)$$

$$g(u, v) = \sqrt{[\vec{r}_u^\rightarrow(u, v) \cdot \vec{r}_u^\rightarrow(u, v)] [\vec{r}_v^\rightarrow(u, v) \cdot \vec{r}_v^\rightarrow(u, v)] + [\vec{r}_u^\rightarrow(u, v) \cdot \vec{r}_v^\rightarrow(u, v)]^2} \quad (6.17)$$

y  $S$  es el área del subparche  $P$ . Expresiones similares pueden ser aplicadas para el otro subparche que comparte el lado  $l$  con  $P$ .

### 6.3.3 Funciones de Prueba sobre Superficies Paramétricas

Para realizar el promediado de las ecuaciones integrales se utilizan funciones curvas de tipo cuchilla, dado que se ha demostrado su conveniencia en combinación con las funciones de base de tipo tejado. Para elegir la forma en que colocar estas funciones se debe tener en cuenta el tipo de formulación empleada. Concretamente, en el caso de la *EFIE* la componente de campo eléctrico de mayor magnitud se presenta en la

dirección de la corriente, por lo que resulta adecuado definir las funciones cuchilla en una dirección paralela a la misma, mientras que en caso de emplear la *MFIE* dichas funciones se colocan en la dirección transversal a la corriente eléctrica, paralelas a la componente de mayor magnitud de campo magnético [107]. En este capítulo se considerará la resolución de la *EFIE*, por lo que a cada lado se le asocia una función cuchilla de amplitud unidad, que une el centro de los subdominios que generan dicho lado. En la figura 6.1 se muestra gráficamente un esquema de la colocación de una función cuchilla en el dominio paramétrico y real.

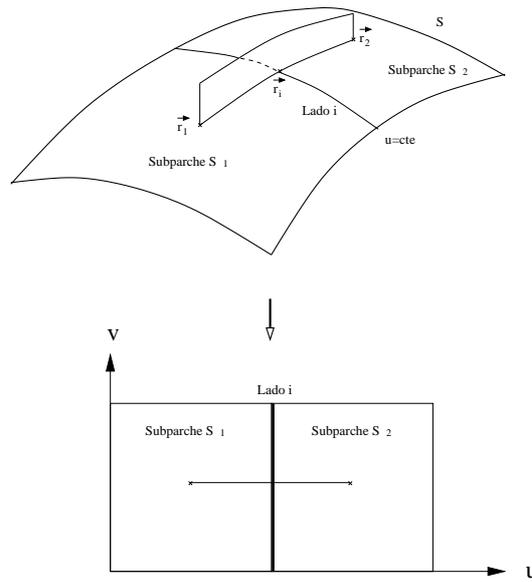


Figura 6.1: Esquema ilustrativo de la colocación de la funciones cuchilla para un lado  $l$  del modelo según  $u=cte$ .

Para acelerar los cálculos es común aproximar la función cuchilla por dos tramos rectos, cada uno del centro de cada parche al centro del lado, de forma que las integra- ciones requeridas por los productos internos puedan ser fácilmente aproximadas.

### 6.3.4 Generación de la Matriz de Impedancias

Este proceso generalmente conlleva una cantidad de tiempo de cálculo considerable, debido a que se deben considerar las interacciones entre cada una de las funciones de base generadas y cada función de prueba, como se muestra de forma gráfica en la figura 6.2. En ella se considera la función tejado asociada al lado  $j$  como fuente, situada en los subdominios  $S_1$  y  $S_2$ , y el campo generado por ella se promedia mediante la

función cuchilla correspondiente al lado  $i$ , y extendida hasta los puntos centrales de los subdominios  $S_3$  y  $S_4$ , denotados como  $\vec{r}_3$  y  $\vec{r}_4$ , respectivamente. Los puntos medios de los lados  $i$  y  $j$  se representan mediante los vectores de posición  $\vec{r}_i$  y  $\vec{r}_j$ .

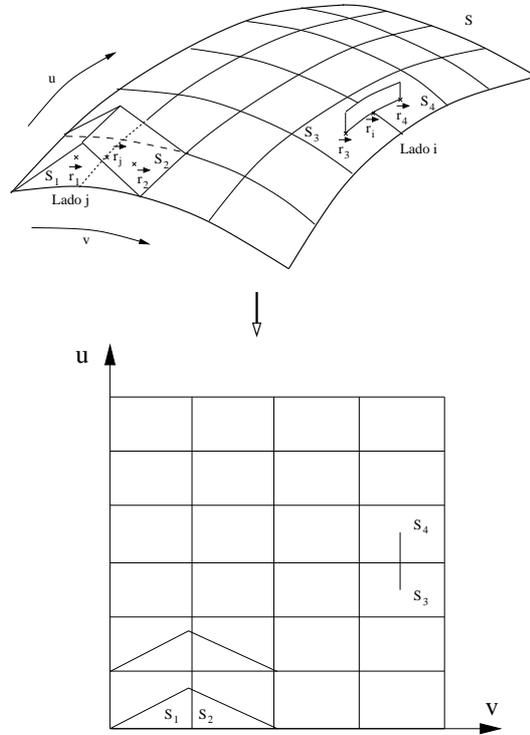


Figura 6.2: Esquema de una situación general en el cálculo del acoplo entre dos subdominios utilizando la EFIE.

El modo de calcular dichas interacciones depende de la formulación integral empleada. En caso de utilizar la EFIE, la expresión desarrollada en el capítulo 2 es:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{inc}(\vec{r}) &= \frac{j\omega\mu}{4\pi} \int_S \vec{J}_s(\vec{r}') G((\vec{r}), (\vec{r}')) dS' + \\ &+ \frac{j}{4\pi\omega\epsilon} \nabla \int_S \nabla' \cdot \vec{J}_s(\vec{r}') G((\vec{r}), (\vec{r}')) dS', \quad \vec{r} \in S \end{aligned} \tag{6.18}$$

En la expresión anterior es común separar cada uno de los dos sumandos y calcular su contribución al acoplo de forma independiente. El primero de ellos se denomina *acoplo inductivo*, y se denota como  $Z_{ind}$ . El segundo es el *acoplo capacitivo*, referenciado como  $Z_{cap}$ .

El cálculo de estos términos implica una integración cuádruple, en los dominios paramétricos bidimensionales del subdominio origen y del subdominio de observación. Para aligerar este coste computacional, y teniendo en cuenta que el término de campo inductivo radiado por una función de base varía poco al desplazar el punto de observación a lo largo de la función cuchilla, se muestrea el mismo en los dos puntos  $\vec{r}_{i+}$  y  $\vec{r}_{i-}$  que unen el punto central de cada subparche con el centro del lado. De esta forma sólo se considera la integración sobre los subdominios fuente:

$$\begin{aligned}
 Z_{ij}^{ind} = & \frac{j\omega\mu}{4\pi} \left[ (\vec{r}_i - \vec{r}_3) \cdot \int_{S_1} \vec{J}_j^{S_1}(\vec{r}') G(\vec{r}_{i-}, \vec{r}') dS' + \right. \\
 & \left. + (\vec{r}_4 - \vec{r}_i) \cdot \int_{S_2} \vec{J}_j^{S_2}(\vec{r}') G(\vec{r}_{i+}, \vec{r}') dS' \right]
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

En el caso del cálculo del acoplo capacitivo, la expresión que obtiene el campo debido a la densidad de carga eléctrica de la  $l$ -ésima función base es el gradiente de una función potencial, por lo que al realizar el producto interno de esta función con la función cuchilla del lado  $i$  el resultado sólo depende el valor de la función potencial en los dos extremos de la misma. Separando, a su vez, las contribuciones de los subparches  $S_1$  y  $S_2$  en estos extremos, la componente capacitiva del acoplo viene dada por los siguientes cuatro términos [117, 118]:

$$Z_{ij}^{cap} = P^{S_1}(\vec{r}_4) - P^{S_1}(\vec{r}_3) - [P^{S_2}(\vec{r}_4) - P^{S_2}(\vec{r}_3)] \tag{6.20}$$

donde:

$$P^{S_1}(\vec{r}_4) = \frac{j}{4\pi\omega\epsilon} \int_{S_1} \frac{G(\vec{r}_4, \vec{r}')}{A_{S_1}} dS' \tag{6.21}$$

donde  $A_{S_1}$  es el área del subdominio  $S_1$ . De forma similar, el resto de los términos pueden ser calculados de la siguiente manera:

$$P^{S_1}(\vec{r}_3) = \frac{j}{4\pi\omega\varepsilon} \int_{S_1} \frac{G(\vec{r}_3, \vec{r}')}{A_{S_1}} dS' \quad (6.22)$$

$$P^{S_2}(\vec{r}_4) = \frac{j}{4\pi\omega\varepsilon} \int_{S_2} \frac{G(\vec{r}_4, \vec{r}')}{A_{S_2}} dS' \quad (6.23)$$

$$P^{S_2}(\vec{r}_3) = \frac{j}{4\pi\omega\varepsilon} \int_{S_2} \frac{G(\vec{r}_3, \vec{r}')}{A_{S_2}} dS' \quad (6.24)$$

## 6.4 Método de las Funciones Base Características

Como se ha visto anteriormente, la aplicación convencional del Método de los Momentos conduce al planteamiento de un sistema denso de ecuaciones lineales, según la expresión matricial (6.6). Típicamente, un caso complejo puede suponer la generación de varios miles de incógnitas y, teniendo en cuenta que las necesidades de almacenamiento y de tiempo de cálculo crecen según el cuadrado y el cubo del número de incógnitas, respectivamente, la utilización de métodos iterativos de resolución es primordial, aunque de esta forma se requiere resolver el sistema para cada dirección de incidencia. Con estas consideraciones, sería muy deseable disponer de un procedimiento para reducir el número de incógnitas de manera que el sistema resultante pudiera ser calculado mediante un método directo (como los basados en la popular descomposición  $LU$  [120, 121]).

El Método de las Funciones Base Características [66, 68] tiene como objetivo la reducción del número de incógnitas mediante la introducción de macro-funciones de base de alto nivel, de forma que el sistema resultante pueda ser resuelto de forma directa sin que el condicionamiento del mismo se vea deteriorado. Además es independiente del tipo de funciones de base y de prueba *de bajo nivel* utilizadas, así como de la formulación integral empleada. En este método, la geometría se divide en una serie de bloques, para los que a continuación se calculan las funciones base características, ya que son dependientes de la geometría. Estas funciones de alto nivel pueden estar descritas a partir de funciones de subdominio de un nivel inferior, como las funciones tejado descritas en este capítulo. Una vez calculadas, se genera la *matriz reducida* de

acoplos, de tamaño menor que la que resultaría de la aplicación directa del Método de los Momentos, tras lo cual se resuelve el sistema por medio de un método directo.

Para exponer el funcionamiento del método, supóngase una geometría arbitraria dividida en  $K$  bloques (que, por lo general, son superficies o regiones de ellas). El número de lados o incógnitas en cada uno de estos bloques se denotará como  $N_i$ , para  $i = 1 \dots K$ . El tamaño de cada bloque, como se verá más adelante, depende del método que se vaya a emplear para procesar las funciones base características en él. En general, tamaños de entre  $2\lambda$  y  $4\lambda$  han resultado adecuados en los casos estudiados en la presente tesis.

### 6.4.1 Construcción de las Funciones Base Características a partir del Espectro de Ondas Planas

Esta técnica, orientada a problemas de sección radar, utiliza para el cálculo de las funciones base características un conjunto de excitaciones formado por  $P$  ondas planas incidentes desde diversas direcciones. Si se considera un caso genérico de análisis en el que se van a considerar muchas direcciones de observación en un rango angular amplio y un bloque de geometría arbitraria, puede ser necesario que las excitaciones cubran el rango angular completo. En caso de que sólo se vaya a analizar un pequeño margen angular, dependiendo de la posición relativa de los bloques y su geometría se puede aprovechar la simetría para reducir el número de excitaciones empleadas. En la figura 6.3 se muestra un ejemplo bidimensional donde la separación angular entre excitaciones se denota por  $\Delta\theta$ . En la figura se ha empleado un valor de  $\Delta\theta = 15^\circ$ , por lo que resultan 24 ondas distintas para cubrir el espectro completo. En un problema tridimensional el número total de ondas incidentes es de  $P = \left\lceil \frac{180^\circ}{\Delta\theta} \cdot \frac{360^\circ}{\Delta\phi} \right\rceil$  (o  $P = \left\lceil \left( \frac{180^\circ}{\Delta\theta} - 1 \right) \cdot \frac{360^\circ}{\Delta\phi} \right\rceil$  considerando el caso especial de que la dirección  $\theta = 0^\circ$  o  $\theta = 180^\circ$  esté incluida en el barrido). La separación angular entre excitaciones tanto en  $\theta$  como en  $\phi$  es típicamente de entre  $10^\circ$  y  $15^\circ$  para bloques de tamaños de hasta  $3\lambda$ , aunque para bloques más grandes puede ser necesario reducirlo.

El método para el cálculo de las corrientes inducidas por el conjunto de excitaciones puede ser elegido de una forma muy flexible, dependiendo de características geométricas como el tamaño eléctrico del bloque, el radio de curvatura o la existencia

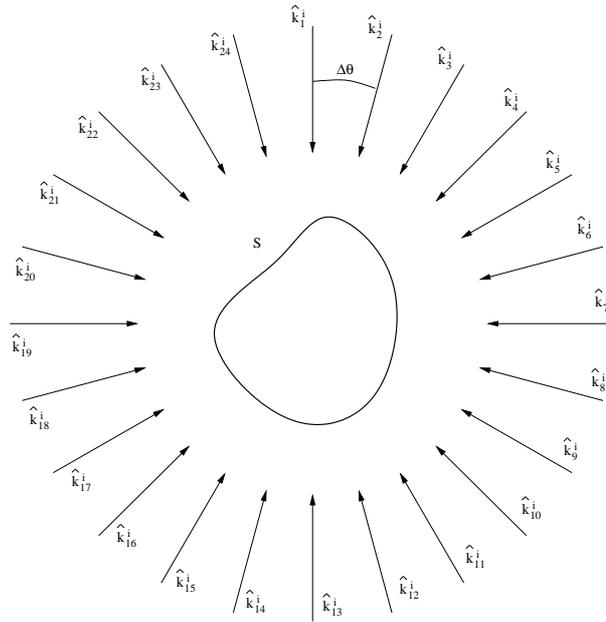


Figura 6.3: *Excitación de un bloque mediante el espectro de ondas planas en un caso bidimensional.*

de irregularidades sobre el mismo. En caso de que el tamaño sea pequeño o la superficie presente zonas irregulares o muy curvadas, se puede recurrir al Método de los Momentos convencional para el cálculo de las corrientes inducidas por el espectro de ondas planas incidente, resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$[Z]^{(i,i)} [J]_k^i = [V]_k^{inc}, \quad k = 1 \dots P \tag{6.25}$$

donde  $[Z]^{(i,i)}$  representa la submatriz de acoplos del Método de los Momentos correspondiente al bloque  $i$ -ésimo,  $[J]_k^i$  es el vector incógnita de corrientes inducidas por la  $k$ -ésima onda plana ( $\hat{k}_k^i$ ) sobre dicho bloque, y  $[V]_k^{inc}$  es el vector de tensiones de dicha onda sobre el bloque considerado. Nótese que el sistema (6.25) representa un problema aislado dentro de toda la geometría, donde el bloque considerado es una superficie (o un región de un parche) de tamaño reducido, y por tanto puede ser resuelto de forma rápida.

Cuando a partir de una superficie eléctricamente grande se generan varios bloques de menor tamaño, la resolución de (6.25) para cada uno de ellos puede dar lugar a soluciones erróneas debido a que no se considera la continuidad eléctrica entre bloques.

En este tipo de situaciones, para garantizar dicha continuidad se extiende cada bloque una distancia  $\Delta_u$  y  $\Delta_v$  en las componentes paramétricas que delimitan los extremos del dominio de ese bloque. En la figura 6.4 se muestra gráficamente este procedimiento.

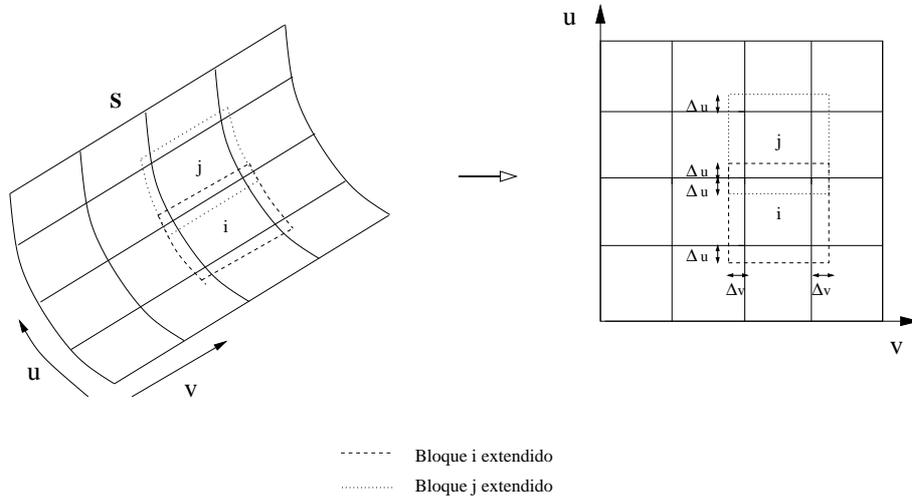


Figura 6.4: *Extensión de los bloques para asegurar la continuidad eléctrica.*

En esta situación, se debe resolver el sistema correspondiente al bloque extendido, con lo cual la expresión (6.25) queda modificada de la siguiente manera:

$$[Z_e]^{(i,i)} [J_e]_k^i = [V_e]_k^{inc}, \quad k = 1 \dots P \quad (6.26)$$

donde  $[Z_e]^{(i,i)}$  se corresponde con la submatriz de acoplos del bloque  $i$  extendido, con dimensión  $(N_i + N_{\Delta i}) \times (N_i + N_{\Delta i})$ , siendo  $N_{\Delta i}$  el número de incógnitas añadidas por la extensión del bloque.  $[J_e]_k^i$  y  $[V_e]_k^{inc}$  también consideran a estos nuevos subdominios incluidos en la extensión. Tras resolver el sistema (6.26), el vector  $[J]_k^i$  se genera a partir de  $[J_e]_k^i$  considerando únicamente los subdominios situados dentro del bloque original  $i$ . De esta forma se evita incluir los efectos que aparecen en los bordes del bloque.

En el caso de que las superficies sean de mayor tamaño y de curvatura suave se pueden emplear aproximaciones, como considerar las corrientes de Óptica Física inducidas por cada excitación incidente [122], de forma que no sea necesario resolver ningún sistema de ecuaciones. Debe destacarse que, aunque se utilicen corrientes de Óptica Física, ésta viene expresada en forma de funciones de subdominio al igual que si fuera calculada mediante el Método de los Momentos. Al expandir esta corriente mediante funciones tejado se tiene la corriente aproximada  $B_k^i(u, v)$ , según la expresión:

$$B_k^i(u, v) = 2\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sum_{n=1}^{N_i} \left\{ \hat{n}(u_{0n}, v_{0n}) \times \left[ \hat{k}_k^i \times \vec{E}_0 \right] \cdot e^{-jk(\hat{k}_k^i \cdot \vec{r}(u_{0n}, v_{0n}))} \right\} \cdot T_n(u, v) \quad (6.27)$$

donde las coordenadas  $(u_{0n}, v_{0n})$  determinan el centro del lado  $n$ ,  $\hat{n}$  es el vector normal de la superficie y  $\vec{r}$  es el vector de posición sobre la misma. El valor  $\vec{E}_0$  indica la amplitud de la onda incidente. La función  $T_n(u, v)$  es el rooftop situado sobre el lado  $n$  de la geometría. Si se denota como  $\chi_i$  a la amplitud del rooftop  $i$ , se puede expresar (6.27) de forma más compacta haciendo:

$$\tilde{B}_k^i(u, v) = \sum_{n=1}^{N_i} \chi_n T_n(u, v) \quad (6.28)$$

donde  $\tilde{B}_k^i(u, v)$  representa la expansión mediante funciones tejado de la corriente de Óptica Física. El vector de corrientes  $[J]_k^i$  se genera mediante los coeficientes de expansión  $\chi_n$ :

$$[J]_k^i = \left( \chi_1 \quad \chi_2 \quad \dots \quad \chi_{N_i} \right)^T \quad (6.29)$$

### 6.4.2 Ortogonalización de las Funciones Base Características mediante la Descomposición en Valores Singulares

Mediante el procedimiento indicado en la sección 6.4.1 es posible obtener a partir de un conjunto de excitaciones las corrientes inducidas asociadas. El rango angular cubierto por las ondas incidentes es tal que se considera que la corriente existente en el bloque  $i$  en un problema general puede ser expresada como una combinación lineal de las corrientes  $[J]_k^i$  calculadas. Sin embargo, el número de ondas resultantes puede ser elevado, sobre todo al considerar problemas tridimensionales, además de que el conjunto de vectores de corriente inducida no es ortogonal, por lo que no es adecuado emplear directamente estos vectores como las funciones base de alto nivel. Con el fin de reducir significativamente el número de funciones base características a considerar,

y hacer que éstas constituyan un conjunto ortogonal de vectores se propone emplear la descomposición en valores singulares [122, 123]. Para ello se construye en primer lugar la matriz  $[J]_{EOP}^i$ , conteniendo todas las corrientes inducidas por el espectro de ondas planas, de la siguiente forma:

$$[J]_{EOP}^i = \begin{pmatrix} \{[J]_1^i\}^T \\ \{[J]_2^i\}^T \\ \vdots \\ \{[J]_P^i\}^T \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

las dimensiones de  $[J]_{EOP}^i$  son, por tanto  $P \times N_i$ , situando en cada fila los valores de corriente en los subdominios del bloque, y en cada columna las corrientes impresas por las distintas ondas planas incidentes. Aplicando la Descomposición en Valores Singulares (SVD) a esta matriz se tiene:

$$[J]_{EOP}^i = [U] [D] [V]^* \quad (6.31)$$

donde \* denota el operador traspuesto conjugado,  $[U]$  es una matriz ortogonal de dimensión  $P \times P$ ,  $[V]$  es una matriz ortogonal de dimensión  $N_i \times N_i$  y  $[D]$  es una matriz de dimensiones  $P \times N_i$  cuya parte diagonal contiene los valores singulares. Se supondrá que al realizar la descomposición dichos valores están ordenados de mayor a menor por columnas, de la siguiente manera:

$$[D] = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_P \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

donde la matriz  $[D]$  ha sido reducida a su parte diagonal ( $\min(P, N_i)$  primeras columnas), y:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_P \tag{6.33}$$

Se debe considerar además que las columnas de las matrices  $[U]$  y  $[V]$  son ortonormales:

$$\sum_{i=1}^P U_{i,k} U_{i,n} = \delta_{(k,n)}, \quad \begin{matrix} 1 \leq k \leq P \\ 1 \leq n \leq P \end{matrix} \tag{6.34}$$

$$\sum_{j=1}^{N_i} V_{j,k} V_{j,n} = \delta_{(k,n)}, \quad \begin{matrix} 1 \leq k \leq N_i \\ 1 \leq n \leq N_i \end{matrix} \tag{6.35}$$

Con el fin de mejorar la eficiencia computacional del proceso de la descomposición SVD, una buena solución consiste en la separación de las componentes  $u$  y  $V$  de la corriente y su procesado por separado, de manera que se construyan dos matrices de menor tamaño:

$$[J]_{EOP}^{i,u} = \begin{pmatrix} \{ [J]_1^{i,u} \}^T \\ \{ [J]_2^{i,u} \}^T \\ \vdots \\ \{ [J]_P^{i,u} \}^T \end{pmatrix} \tag{6.36}$$

$$[J]_{EOP}^{i,v} = \begin{pmatrix} \{ [J]_1^{i,v} \}^T \\ \{ [J]_2^{i,v} \}^T \\ \vdots \\ \{ [J]_P^{i,v} \}^T \end{pmatrix} \tag{6.37}$$

donde  $[J]_k^{i,u}$  contiene las corrientes impresas por la onda incidente  $k$  en la dirección  $u$  sobre el bloque  $i$ , y  $[J]_k^{i,v}$  representa de forma análoga las corrientes según  $v$ .

Observando los valores singulares obtenidos  $\sigma_i$ , se aprecia que su magnitud decae rápidamente, de forma que generalmente se puede distinguir un pequeño grupo de ellos con mayor amplitud que el resto. Esta propiedad hace que la matriz original pueda ser representada con una buena precisión mediante un conjunto reducido de columnas de las matrices  $[U]$  y  $[V]$  (vectores singulares), aumentando la eficiencia en el almacenamiento y en cálculos posteriores en los que intervenga la matriz original [121]. En la figura 6.5 se muestra como ejemplo un bloque constituido por una placa plana situada en el plano  $XY$ , con una longitud eléctrica de  $4\lambda$  de lado. Se han obtenido las corrientes de Óptica Física mediante un barrido con  $\theta = 0^\circ \dots 90^\circ$ ,  $\phi = 0^\circ \dots 360^\circ$  y separaciones angulares de  $10^\circ$ , de forma que se han utilizado un total de 289 ondas polarizadas en la componente  $\theta$ . Se ha realizado la SVD separando las componentes de corriente según  $u$  y  $v$ , obteniendo los valores singulares representados en las figuras 6.6 y 6.7, respectivamente. En ambos casos se aprecia el desvanecimiento rápido de las amplitudes.

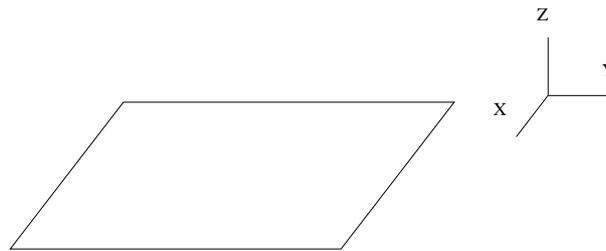


Figura 6.5: Placa plana de un tamaño de  $4\lambda$  de lado, situada en el plano  $XY$ .

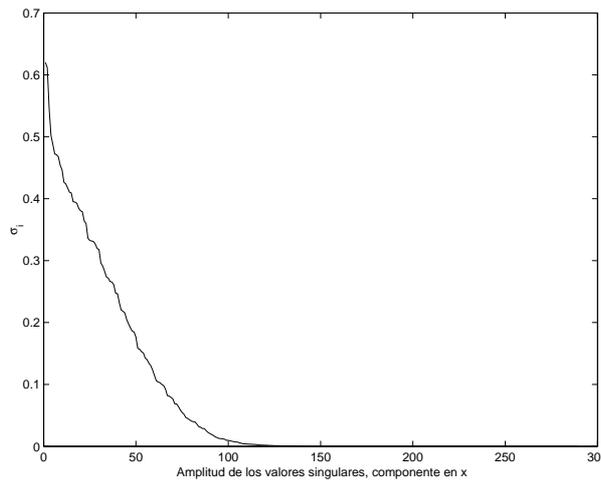


Figura 6.6: Valores singulares obtenidos para la corriente según  $x$ .

Tras la descomposición del vector de corrientes según la expresión (6.31), y con las consideraciones anteriormente expuestas, se procede a truncar el número de funciones

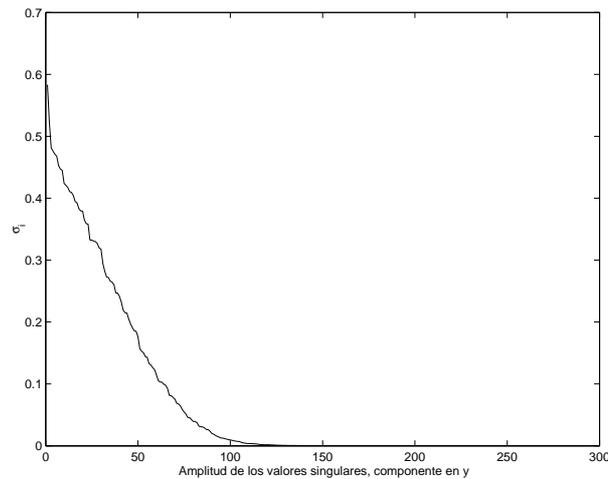


Figura 6.7: Valores singulares obtenidos para la corriente según  $y$ .

base consideradas mediante la utilización de un umbral  $\gamma$ , de manera que únicamente se considera un vector singular  $i$  si se cumple la condición:

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_i} \leq \gamma \quad (6.38)$$

de esta forma, de las  $P$  corrientes impresas iniciales inducidas en el bloque  $i$  se selecciona un conjunto de  $M_i$  funciones base características, siendo  $M_i < P$ , construidas a partir de las columnas de la matriz  $[V]$  correspondientes a los valores singulares para los que se cumpla la condición (6.38), y que se denotarán como  $J_{i,m}$ ,  $m = 1 \dots M_i$ . En caso de realizar por separado la SVD de las componentes en  $u$  y  $v$  de las corrientes,  $M_i$  será el número total de funciones características resultantes ( $M_i = M_i^u + M_i^v$ ), donde una parte de ellas modelarán la corriente según  $u$  y otra parte la corriente según  $v$ .

### 6.4.3 Construcción de la Matriz Reducida

Una vez obtenido el conjunto de funciones base características del problema, éstas pueden ser guardadas en un dispositivo de almacenamiento y recuperadas en análisis posteriores. La matriz reducida está compuesta por un conjunto de submatrices, de la siguiente forma:

$$[Z]^R = \begin{pmatrix} [Z]_{1,1}^R & [Z]_{1,2}^R & \cdots & [Z]_{1,K}^R \\ [Z]_{2,1}^R & [Z]_{2,2}^R & \cdots & [Z]_{2,K}^R \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [Z]_{K,1}^R & [Z]_{K,2}^R & \cdots & [Z]_{K,K}^R \end{pmatrix} \quad (6.39)$$

donde la submatriz  $[Z]_{i,j}^R$  representa el acoplo entre los bloques  $i$  y  $j$ , con  $1 \leq i \leq K$ ,  $1 \leq j \leq K$ . Los términos diagonales, consistentes en el acoplo de un bloque consigo mismo, pueden ser calculados a partir de los coeficientes de la matriz de impedancias del Método de los Momentos, mientras que para los términos no diagonales se puede evitar el tener que calcular los acoplos del Método de los Momentos debido a que, por tratarse de acoplos en campo lejano, se pueden utilizar aproximaciones eficientes (sección 6.5). La expresión de la submatriz de un bloque genérico es:

$$[Z]_{i,j}^R = \begin{pmatrix} \langle L(J_{j,1}), W_1^i \rangle & \langle L(J_{j,2}), W_1^i \rangle & \cdots & \langle L(J_{j,M_i}), W_1^i \rangle \\ \langle L(J_{j,1}), W_2^i \rangle & \langle L(J_{j,2}), W_2^i \rangle & \cdots & \langle L(J_{j,M_i}), W_2^i \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle L(J_{j,1}), W_{M_i}^i \rangle & \langle L(J_{j,2}), W_{M_i}^i \rangle & \cdots & \langle L(J_{j,M_i}), W_{M_i}^i \rangle \end{pmatrix} \quad (6.40)$$

donde  $W_k^i$  es la  $k$ -ésima función de prueba en el bloque  $i$ , y  $M_i$  es el número de estas funciones en el mismo. Si se emplean como funciones de prueba las funciones cuchilla analizadas en la sección 6.3.3, la función  $W_k^i$  viene definida por  $N_i$  cuchillas cuya amplitud depende de cada función base característica, según la expresión dada por :

$$W_k^i(u, v) = \sum_{n=1}^{N_i} J_{i,k}(n) R_n(u, v) \quad (6.41)$$

donde  $R_n(u, v)$  es la función cuchilla asociada al lado  $n$ , y  $J_{i,k}(n)$  es el coeficiente del rooftop  $n$  para la función base característica  $k$ .

Utilizando la expansión de las funciones de base y de prueba de alto nivel por medio de sus homólogas de bajo nivel (funciones tejado y cuchilla), el acoplo entre la función

base característica  $n$  y la función de prueba  $m$  viene dado por:

$$\langle L(J_{j,n}), W_m^i \rangle = \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_n} J_{j,n}(l) J_{i,m}^*(k) \langle T_l(u, v), R_k(u', v') \rangle \quad (6.42)$$

Introduciendo los coeficientes de la matriz de acoplos del método de los momentos en (6.42) se tiene:

$$\langle L(J_{j,n}), W_m^i \rangle = \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_n} J_{j,n}(l) J_{i,m}^*(k) Z_{k,l} \quad (6.43)$$

donde  $Z_{k,l}$  es el coeficiente que da cuenta del acoplo entre la función tejado asociada al lado  $l$  y la función cuchilla asociada al lado  $k$ , calculado según se ha indicado en la sección 6.3.4.

## 6.5 Técnicas Numéricas Eficientes para el Cálculo de Interacciones en Campo Lejano

En la sección anterior se ha obtenido la expresión general para el cálculo del acoplo entre una función base característica y una macro-función de prueba compuesta a partir de funciones cuchilla. Para ello se emplean los acoplos entre las funciones tejado y cuchilla correspondientes al conjunto de lados incluidos dentro de ambos bloques. Sin embargo, al considerar bloques distantes no es necesario el cálculo del acoplo de forma rigurosa debido a la existencia de técnicas numéricas rápidas para considerar su interacción. En esta sección se analizan dos posibles soluciones para el aumento de la eficiencia computacional en la aplicación del método riguroso presentado en este capítulo.

La expresión (6.43) puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\langle L(J_{j,n}), W_m^i \rangle = \sum_{k=1}^{N_m} J_{i,m}^*(k) \left[ \sum_{l=1}^{N_n} Z_{k,l} J_{j,n}(l) \right] \quad (6.44)$$

donde se recuerda que  $J_{j,n}(l)$  es la amplitud de la función tejado  $l$  del bloque  $j$  para la  $n$ -ésima función base característica.

La expresión encerrada entre corchetes en (6.44) da cuenta del campo promediado que las funciones tejado por las que está definida la función base característica  $n$  generan sobre la zona en la que está definida la función tejado  $k$ . Esta operación, realizada para los diferentes valores de  $k$  dentro del bloque  $i$ , involucra un *producto matriz-vector*, que es donde más tiempo de cálculo se emplea, teniendo en cuenta que se repite para los distintos bloques y las funciones base características extendidas sobre ellos. Las técnicas presentadas a continuación tienen como objetivo, por tanto, reducir el coste computacional asociado a esta operación, además de las ventajas derivadas de no necesitar realizar el cálculo de todos los elementos de la matriz de acoplos.

### 6.5.1 Aplicación del Método Rápido de los Multipolos

Buena parte de la teoría en la que se basa el Método Rápido de los Multipolos reside en el *Teorema de la Adición* [124–126], por el que una onda esférica propagada desde un punto  $P$  puede ser expresada como superposición de ondas esféricas armónicas referidas a un origen  $P'$ . El Teorema de la Adición en tres dimensiones permite descomponer la función de Green escalar de la siguiente forma [33]:

$$\frac{e^{jk|\vec{r}_1 + \vec{r}_2|}}{|\vec{r}_1 + \vec{r}_2|} = jk \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (2i+1) j_i(kr_2) h_i^{(1)}(kr_1) P_i(\hat{r}_2 \cdot \hat{r}_1), \quad r_2 < r_1 \quad (6.45)$$

donde  $j_i$  es una función esférica de Bessel de primera especie,  $h_i^{(1)}$  es una función esférica de Hankel de primera especie y  $P_i$  es un polinomio de Legendre.

Una parte de la expresión anterior puede ser expresada como una integral sobre la esfera unitaria  $S_0$  como sigue [76]:

$$4\pi j^i j_i(kr_2) P_i(\hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2) = \int_{S_0} e^{jk(\hat{k} \cdot \vec{r}_2)} P_i(\hat{k} \cdot \hat{r}_1) d\hat{k} \quad (6.46)$$

La integración sobre la esfera unidad se realiza mediante técnicas de cuadratura gaussianas, empleando  $2L^2$  puntos de integración, donde  $L \approx kd + 1,8d_0^{\frac{2}{3}}(kd)^{\frac{1}{3}}$ , siendo  $d$  el diámetro máximo de un grupo, y el número de dígitos de precisión es  $d_0 = \log(\frac{1}{\epsilon})$ , donde  $\epsilon$  indica el máximo error tolerable al truncar el sumatorio [33].

Utilizando (6.46) en (6.45) y limitando el sumatorio a  $N$  términos se tiene la aproximación:

$$\frac{e^{jk|\vec{r}_1 + \vec{r}_2|}}{|\vec{r}_1 + \vec{r}_2|} = \frac{jk}{4\pi} \int_{S_0} e^{jk(\hat{k} \cdot \vec{r}_2)} \sum_{i=0}^N j^i (2i + 1) h_i^{(1)}(kr_1) P_i(\hat{k} \cdot \hat{r}_1) d\hat{k} \quad (6.47)$$

El Método Rápido de los Multipolos exige la división de la geometría en una serie de particiones o grupos. En su combinación con el Método de las Funciones Base Características dichos grupos pueden hacerse iguales a los bloques allí empleados. En la figura 6.8 se muestra en un esquema el proceso de cálculo del campo que el elemento  $i$ , perteneciente al grupo  $M'$ , genera en el elemento  $j$  del grupo  $M$ . Dentro de cada grupo se selecciona un punto como representante del mismo. La descomposición de la función de Green escalar dada por (6.47) se aplica entonces a los trayectos que van desde cada punto fuente de campo al punto representante de su grupo ( $\vec{r}_m^{\rightarrow} - \vec{r}_i^{\rightarrow}$ ), desde ese representante al representante del grupo destino ( $\vec{r}_m^{\rightarrow} - \vec{r}_m^{\rightarrow}$ ), y finalmente del representante del grupo destino al punto de observación ( $\vec{r}_j^{\rightarrow} - \vec{r}_m^{\rightarrow}$ ), en tres procesos denominados *agregación*, *traslación* y *disgregación*.

Debido a que todos los elementos del grupo origen son agregados al mismo punto, sólo es necesario realizar el cálculo del operador de traslación entre los representantes de los grupos. El término  $(j, i)$  de la matriz de impedancias, considerando la formulación *EFIE*, viene dado por [33]:

$$Z_{ji} = \int_{S_0} \vec{V}_{fmj}^E(\hat{k}) \cdot \alpha_{mm'}(\vec{k}, \vec{r}_{mm'}) \vec{V}_{sm'i}^E(\hat{k}) d\hat{k} \quad (6.48)$$

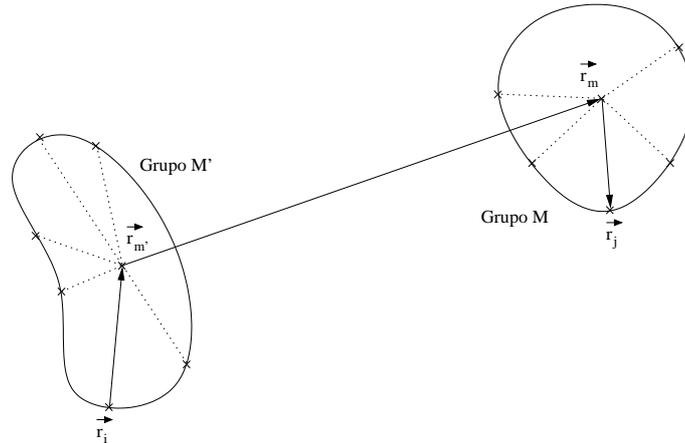


Figura 6.8: Esquema geométrico para la aplicación del Método Rápido de los Multipolos.

donde los tres operadores que intervienen pueden ser calculados de la siguiente manera:

$$\text{Agregación} \Rightarrow \vec{V}_{sm'i}^E(\hat{k}) = \int_{u_{T_i}^-}^{u_{T_i}^+} \int_{v_{T_i}^-}^{v_{T_i}^+} e^{-j\hat{k} \cdot \vec{r}_{im'}} (\bar{I} - \hat{k}\hat{k}) \cdot \vec{T}_i(u', v') du' dv' \quad (6.49)$$

$$\text{Traslación} \Rightarrow \alpha_{mm'}(\vec{k}, \vec{r}_{mm'}) = \frac{jk}{4\pi} \sum_{i=0}^N j^i (2i+1) h_i^{(1)}(kr_{mm'}) P_i(\hat{r}_{mm'} \cdot \hat{k}) \quad (6.50)$$

$$\text{Disgregación} \Rightarrow \vec{V}_{fmj}^E(\hat{k}) = \int_{u_{R_j}^-}^{u_{R_j}^+} \int_{v_{R_j}^-}^{v_{R_j}^+} e^{-j\hat{k} \cdot \vec{r}_{jm}} (\bar{I} - \hat{k}\hat{k}) \cdot \vec{R}_j(u', v') du' dv' \quad (6.51)$$

donde los límites de integración  $u_{T_i}^-, u_{T_i}^+, v_{T_i}^-, v_{T_i}^+$  en el término de agregación hacen referencia a los límites del dominio paramétrico donde está definida la función tejado asociada al elemento  $i$ ,  $T_i$ , y los límites del término de disgregación  $u_{R_j}^-, u_{R_j}^+, v_{R_j}^-, v_{R_j}^+$  indican el dominio paramétrico donde se extiende la función cuchilla  $R_j$ , situada en el lado  $j$ .

Con esto, el producto matriz-vector que aparece en (6.44) puede ser reescrito como:

$$\sum_{l=1}^{N_n} Z_{k,l} J_{j,n}(l) = \int_{S_0} \vec{V}_{fmk}^E(\hat{k}) \sum_{m'} \alpha_{mm'}(\vec{k}, \vec{r}'_{mm'}) \sum_{l=1}^{N_n} \vec{V}_{sm'l}^E(\hat{k}) J_{j,n}(l) \quad (6.52)$$

donde  $m'$  hace referencia a todos los grupos resultantes de la descomposición del bloque  $j$  (generalmente uno, pero puede haber más en caso de que el tamaño del bloque sea grande). La complejidad computacional resultante es  $O(N^{\frac{3}{2}})$ , frente a la complejidad  $O(N^2)$  asociada a la aplicación convencional del Método de los Momentos.

### 6.5.2 Disminución del Rango de las Matrices en Interacciones Lejanas

La segunda técnica aplicable a la aceleración del método riguroso expuesto en este capítulo consiste en la descomposición de la submatriz asociada a los acoplos entre dos bloques  $i$  y  $j$  como producto de dos matrices de rango inferior. Se ha demostrado [116, 127] que al debilitarse el acoplo entre ambos bloques, debido a la distancia o a la orientación relativa entre ellos, disminuye el rango efectivo de su matriz de acoplos.

Sea  $A$  a la matriz de acoplos entre los bloques  $i$  y  $j$ , y supóngase que el número de funciones base características en los bloques es  $M_i$  y  $M_j$ , de forma que la dimensión de  $A$  es  $M_i \times M_j$ . En esta situación, si se realiza la factorización  $QR$  parcial con pivotaje por columnas de  $A$  [120], en una iteración  $k$  del algoritmo la estructura de la matriz  $R$  puede escribirse como:

$$\hat{R}^{(k)} = \begin{pmatrix} \hat{R}_{11}^{(k)} & \hat{R}_{12}^{(k)} \\ 0 & \hat{R}_{22}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (6.53)$$

donde  $\hat{R}_{11}^{(k)}$  es una matriz de dimensiones  $k \times k$ ,  $\hat{R}_{12}^{(k)}$  es una matriz  $k \times (M_j - k)$  y  $\hat{R}_{22}^{(k)}$  es una matriz  $(M_i - k) \times (M_j - k)$ . La deficiencia de rango aparece cuando en alguna iteración la matriz  $\hat{R}_{22}^{(k)}$  se aproxima a cero, según la condición:

$$\| \hat{R}_{22}^{(k)} \|_2 \leq \epsilon_1 \| A \|_2 \tag{6.54}$$

donde  $\epsilon_1$  es un parámetro suficientemente pequeño, dependiente del grado de precisión de la máquina. En caso de cumplirse la condición (6.54), la matriz  $A$  original puede ser aproximada por el producto de dos matrices de rango  $k$ :

$$A \approx \hat{Q} \hat{R} \tag{6.55}$$

donde  $\hat{Q}$  es una matriz  $M_i \times k$ , con columnas ortogonales, y  $\hat{R}$  es una matriz  $k \times M_j$ , construída mediante los bloques no nulos de la descomposición:

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \hat{R}_{11}^{(k)} & \hat{R}_{12}^{(k)} \end{pmatrix} \tag{6.56}$$

Un método eficiente para la generación de las matrices  $\hat{R}$  y  $\hat{Q}$  es el *Método de Gram-Schmidt Modificado*, conocido por las siglas anglosajonas *MGS* [116,128]. En este método se rellena la matriz  $\hat{Q}$  mediante un conjunto ortonormal de vectores columna [129,130], empleando pivotaje parcial de forma que los vectores columna de la matriz  $A$  dominantes son considerados en primer lugar. La precisión del método se puede controlar incorporando un umbral de error de forma que el algoritmo MGS se detenga cuando la información añadida por un nuevo vector columna no sea significativa. En [131] se presenta un método similar basado en el algoritmo de bidiagonalización de Lanczos.

Sea  $u_i$  el  $i$ -ésimo vector columna de  $A$ , con  $i = 1 \dots M_j$ , y de forma análoga sea  $v_j$  el  $j$ -ésimo vector fila, para  $j = 1 \dots M_i$ . Bajo estas suposiciones, el algoritmo MGS convencional con pivotaje parcial para la factorización QR de una matriz  $A$  viene definido por los siguientes pasos:

1. Encontrar el índice  $k$  tal que  $\| u_k \| = \max \{ \| u_1 \|, \| u_2 \|, \dots, \| u_{M_j} \| \}$
2.  $\tau = \tau_1 = \| u_k \|$

3.  $r = 0$

4. Mientras  $\tau > \epsilon\tau_1$  se repite el siguiente proceso:

(a)  $r = r + 1$

(b)  $col(r) = k$

(c)  $\tilde{q} = u_k - \sum_{j=1}^{r-1} \langle u_k, q_j \rangle q_j$

(d)  $q_r = \frac{\tilde{q}}{\|\tilde{q}\|}$

(e)  $u_j = u_j - \langle u_j, q_r \rangle q_r$ , para  $j = 1, \dots, M_j$  y  $j \neq col(1), \dots, col(r)$

(f) Encontrar el índice  $k$  tal que  $\|u_k\| = \max \{ \|u_1\|, \|u_2\|, \dots, \|u_{M_j}\| \}$  y  $k \neq col(1), \dots, col(r)$

(g)  $\tau = \|u_k\|$

donde  $\epsilon$  define el umbral utilizado para la parada del algoritmo, relativo al vector columna de mayor norma. La matriz  $\hat{Q}$  viene determinada por todas las columnas  $q_i$  halladas, para  $i = 1, \dots, r$ .

El proceso anteriormente descrito realiza de forma directa una factorización  $QR$  parcial. La complejidad computacional asociada es  $O(N^2)$ , debido a que es necesario disponer de toda la matriz  $A$  ensamblada antes de proceder a la factorización. Esto significa conocer la matriz de acoplos entre rooftops y cuchillas del problema completo, lo que puede resultar muy costoso en problemas grandes. Con el fin de aliviar la carga computacional asociada a este proceso, Burkholder y Lee propusieron en [116] una variación conocida como *Método Dual Modificado de Gram-Schmidt (Dual-MGS)*, que permite realizar una factorización aproximada sin tener un conocimiento previo de la matriz original. Para ello se seleccionan las filas y columnas dominantes de  $A$  (que deben ser calculadas durante el proceso) a partir de la información obtenida de filas y columnas calculadas anteriormente. El proceso se detiene cuando las últimas columnas añadidas a  $\hat{Q}$  no aportan una información significativa. La matriz  $\hat{R}$  se construye después utilizando las filas y columnas de  $A$  previamente obtenidas. Este proceso viene descrito por los siguientes pasos:

1.  $row(1) = 1; p_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$

2. Encontrar el índice  $k$  tal que  $|p_{1,k}| = \max \{ |p_{1,1}|, \dots, |p_{1,M_j}| \}$

3.  $col(1) = k; q_1 = \frac{u_k}{\|u_k\|}$
4.  $\tau = \tau_1 = \|u_k\|$
5.  $r = 1$
6. Mientras  $\tau > \epsilon\tau_1$  se repite el siguiente proceso:
  - (a) Encontrar el índice  $k$  tal que  $|q_{r,k}| = \max\{|q_{r,1}|, \dots, |q_{r,M_i}|\}$  y  $k \neq row(1), \dots, row(r)$
  - (b)  $r = r + 1$
  - (c)  $row(r) = k$
  - (d)  $\tilde{p} = v_k - \sum_{i=1}^{r-1} \langle v_k, p_i \rangle p_i$
  - (e)  $p_r = \frac{\tilde{p}}{\|\tilde{p}\|}$
  - (f) Encontrar el índice  $k$  tal que  $|p_{r,k}| = \max\{|p_{r,1}|, \dots, |p_{r,M_j}|\}$  y  $k \neq col(1), \dots, col(r-1)$
  - (g)  $col(r) = k$
  - (h)  $\tilde{q} = u_k - \sum_{j=1}^{r-1} \langle u_k, q_j \rangle q_j$
  - (i)  $q_r = \frac{\tilde{q}}{\|\tilde{q}\|}$
  - (j)  $\tau = \|\tilde{q}\|$
7.  $r = r - 1$

La matriz  $\hat{R}$  es obtenida a partir de una recolocación de las filas  $v_1, \dots, v_r$  de  $A$  y las columnas  $q_1, \dots, q_r$  de  $\hat{Q}$ . Para cada columna  $j$  de la matriz  $\hat{R}$  se debe resolver el siguiente sistema lineal:

$$v_{row(i),j} = \sum_{k=1}^r q_{k,row(i)} \hat{R}_{k,j} \tag{6.57}$$

Por tanto, dicho sistema debe ser resuelto  $M_j$  veces mediante una factorización  $LU$ .

Al igual que en el algoritmo  $MGS$  convencional, en este caso se emplea el umbral  $\epsilon$  para establecer la condición de parada. Sin embargo, puede ocurrir que en este caso

la condición de parada se dé de forma prematura, debido a que el procedimiento de selección de filas y columnas se basa en una estimación. Para prevenir este tipo de casos es conveniente extender el algoritmo durante un número de iteraciones añadidas a aquella en la que se detecta la condición de parada. Este número puede ser dependiente del tamaño del bloque. Si en todas las iteraciones añadidas se vuelve a repetir la condición de parada, se puede terminar la ejecución, mientras que si en alguna de ellas se genera una columna de la matriz  $\hat{Q}$  con una cantidad de información significativa se considera que las condiciones de parada anteriores son falsas y se continúa con la ejecución. En casos prácticos, utilizando este mecanismo para prevenir las paradas prematuras el algoritmo ha presentado un buen comportamiento para tamaños de bloque de hasta unos 2500 elementos en el peor de los casos.

Se puede destacar que los métodos basados en la reducción del rango de los bloques presentan la ventaja de no ser dependientes del kernel de la ecuación integral, lo que no ocurre con el Método Rápido de los Multipolos, ya que depende de la expresión explícita de la función de Green, por lo que en ciertas aplicaciones puede disminuir su eficiencia. Se ha demostrado que dimensionando adecuadamente el número de grupos y las funciones de base en cada uno de ellos la complejidad del algoritmo Dual-MGS es de  $O(N^{\frac{3}{2}})$  [116].

# Capítulo 7

## Resultados

### 7.1 Introducción

En este capítulo se muestran algunos resultados representativos obtenidos mediante la aplicación práctica de las técnicas desarrolladas en la tesis. En primer lugar se realiza una validación de las técnicas para la obtención de los campos radiados (apartado 7.2). El cálculo de simples efectos sobre superficies curvas es considerado en la sección 7.2.1, mientras que el caso de dobles efectos se contempla en la sección 7.2.2. En ambos apartados se estudia tanto la precisión obtenida como la evolución de la eficiencia computacional a varias frecuencias. En la sección 7.2.3 se realiza un estudio de la evolución del tiempo de cálculo al variar el tamaño de las superficies y la separación entre ellas. El análisis de problemas complejos es llevado a cabo en la sección 7.3. La aplicación del método iterativo para el cálculo de contribuciones por efectos de orden elevado es analizada en un ejemplo práctico en la sección 7.3.1, a dos frecuencias diferentes. Posteriormente se analizan varias geometrías realistas (secciones 7.3.2, 7.3.3 y 7.3.4). Finalmente se presta atención a la aplicación del Método de las Funciones Base Características en la sección 7.4. En el apartado 7.5 se analiza la utilización de técnicas eficientes para la generación de los términos no diagonales de la matriz reducida. Más concretamente, se estudia la aplicación del Método Rápido de los Multipolos (sección 7.5.1) y de la versión dual del Método Modificado de Gram-Schmidt (sección 7.5.2).

## 7.2 Validación de las Técnicas de Integración Cuasianalíticas

En la siguiente sección se presentan los resultados correspondientes a un conjunto de problemas electromagnéticos analizados con el objetivo de realizar un estudio del comportamiento de las técnicas cuasianalíticas presentadas en la tesis para la obtención de los campos dispersados. En todos los casos se han utilizado las corrientes de Óptica Física, y el estudio se ha enfocado tanto hacia el grado de precisión obtenida como hacia la eficiencia computacional.

### 7.2.1 Simples Efectos sobre Superficies Paramétricas NURBS

Para validar la aplicación del método de integración cuasianalítica considerando efectos simples sobre superficies curvas se ha considerado un problema de cálculo de campo cercano utilizando la geometría mostrada en la figura 7.1, consistente en un sector cilíndrico de radio  $R = 5m$  con vértices en los puntos  $(0, -2, 0)$ ,  $(4, -2, 0)$ ,  $(4, 2, 0)$  y  $(0, 2, 0)$ . Se han distribuido 200 puntos de observación a lo largo de un segmento entre los puntos  $(10, 0, 3)$  y  $(10, 0, 23)$ . El análisis se ha realizado considerando las frecuencias de  $1, 2, 4$  y  $7$  GHz.

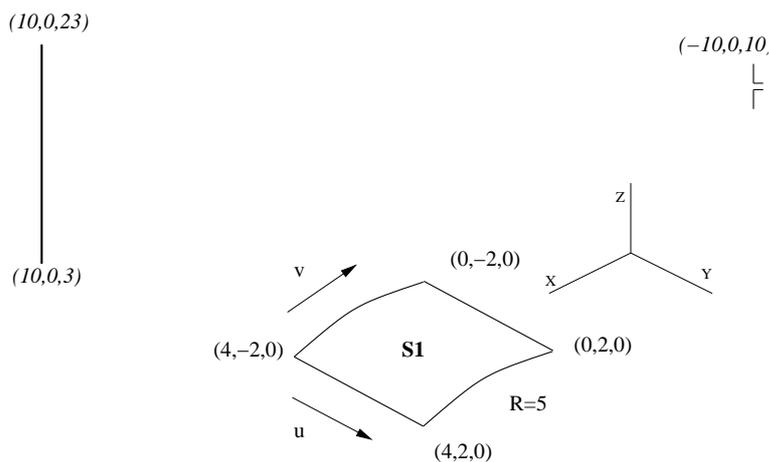


Figura 7.1: Geometría curva empleada en la simulación

Para la validación del grado de precisión en los resultados obtenidos, se han realizado comparaciones con los resultados devueltos por la aplicación de la integración

numérica de las corrientes de Óptica Física empleando 10 muestras por cada longitud de onda. El error relativo cometido al utilizar el método propuesto es inferior al 1% respecto a la utilización de la integral numérica en todos los casos simulados. En la figura 7.2 se muestra, a modo de ejemplo, el resultado obtenido al calcular la componente  $y$  del campo magnético en la línea de puntos de observación anteriormente mencionada, comparado con el devuelto por la integración numérica por "fuerza bruta" a una frecuencia de  $4\text{ GHz}$ .

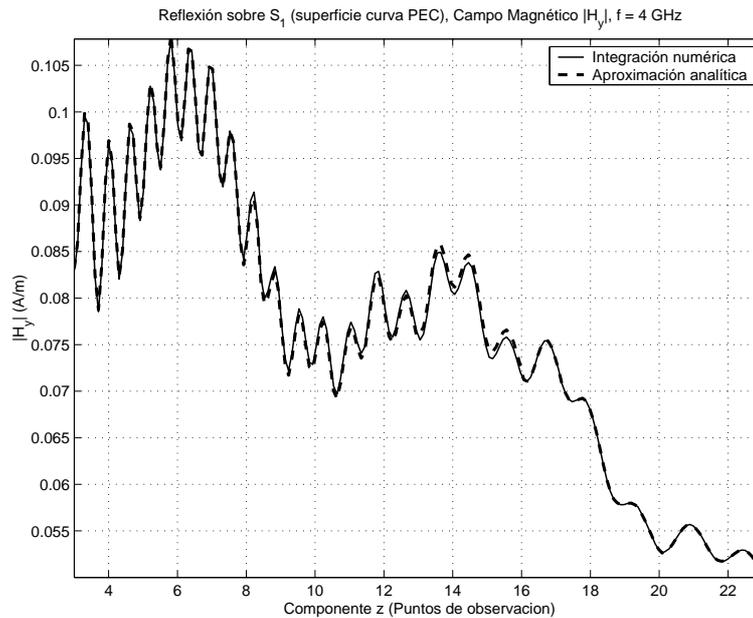


Figura 7.2: *Campo obtenido*

En la tabla 7.1 se muestra los tiempos de simulación obtenidos para el problema anterior a diferentes frecuencias, empleando un ordenador personal con procesador Pentium 4 a una frecuencia de reloj de 1.8 GHz y 1 Gbyte de memoria RAM. Obsérvese cómo la dependencia del tiempo de cálculo con el tamaño eléctrico del problema es claramente mayor en el caso de la utilización de la integración numérica de las corrientes de PO.

### 7.2.2 Dobles Efectos sobre Superficies Paramétricas

Para la validación del método cuando se considera un problema de radiación con dobles efectos se ha utilizado el esquema mostrado en la figura 7.3, en el que un dipolo vertical corto radia en las proximidades de dos sectores cilíndricos de un tamaño similar al de

Frecuencia	Integración numérica	Aproximación cuasianalítica
1GHz	16s	5s
2 GHz	78s	9s
4 GHz	323s	16s
7 GHz	1032s	31s

Tabla 7.1: Comparación de tiempos para la simulación con simples efectos, geometría curva

la geometría empleada en la validación de efectos simples. Estos tamaños garantizan problemas eléctricamente grandes para las frecuencias consideradas en el análisis. El resultado mostrado en la gráfica 7.4 se corresponde con el valor de la componente  $y$  de campo magnético en un segmento de 200 puntos de observación entre  $(10, 0, 3)$  y  $(10, 0, 23)$ . Dicho campo es el dispersado por la superficie  $S_2$  tras una primera reflexión en el parche  $S_1$ , a una frecuencia de 2 GHz. Se han excluido el resto de efectos (es decir, los efectos simples y el doble efecto  $S_2 \rightarrow S_1$ ) para poder analizar la precisión de forma aislada en la contribución que se ha mencionado. La comparación de tiempos de cálculo a diferentes frecuencias se muestra en la tabla 7.2.

Todos los resultados han sido obtenidos con un ordenador PC Pentium 4 con una frecuencia de reloj de 1.8 GHz y 1 Gbyte de memoria RAM. Los resultados se comparan con los obtenidos mediante una aproximación simple de PO que emplea la integración por "fuerza bruta" para realizar la integración de la corriente mediante 10 muestras por cada longitud de onda.

A la vista de los resultados obtenidos, se puede concluir que para los casos simulados la introducción de las expresiones analíticas para evaluar la integral de PO supone una buena reducción del coste computacional sin perjudicar la precisión obtenida en los resultados.

### 7.2.3 Estudio Paramétrico de la Eficiencia Computacional

Los siguientes resultados han sido obtenidos con el fin de determinar la evolución en la reducción del tiempo de cálculo al variar tanto el tamaño eléctrico de las superficies

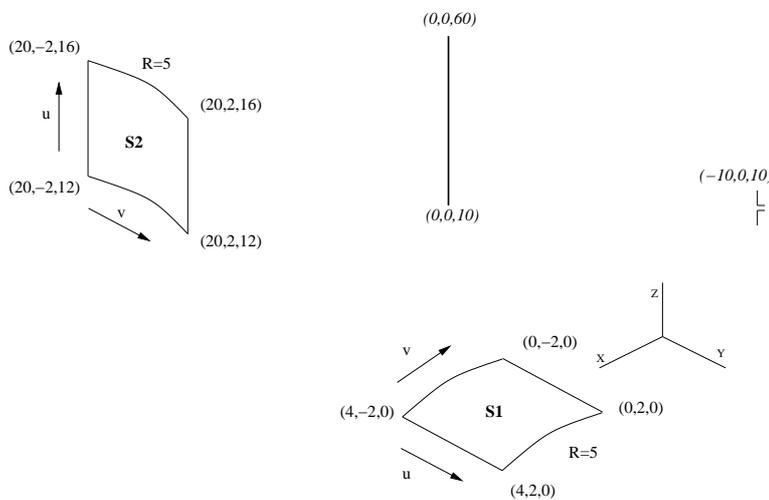


Figura 7.3: Geometría curva empleada en la simulación

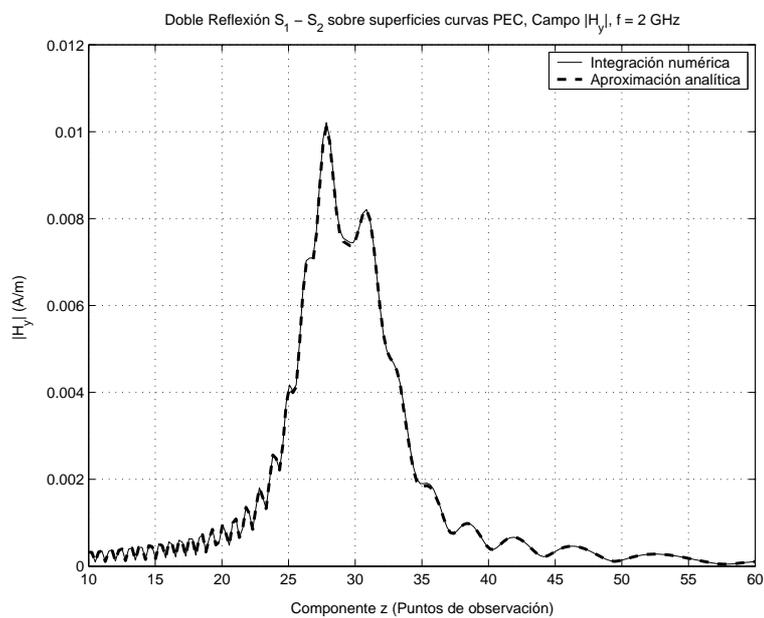


Figura 7.4: Campo obtenido

Frecuencia	Integración numérica	Aproximación cuasianalítica
500 MHz	25	6
1 GHz	413	11
2 GHz	9973	23
5 GHz	<sup>a</sup>	72

Tabla 7.2: Comparación de tiempos para simulaciones con dobles efectos, geometría curva

<sup>a</sup>La simulación no ha sido posible debido a la memoria y tiempo de cálculo requeridos para la resolución de la integral.

como la separación entre ellas (es decir, la distancia entre la superficie radiante y los puntos de observación). La geometría empleada con este fin se muestra en la figura 7.5. Se ha estudiado el comportamiento del método de integración al asignar diferentes valores a los parámetros  $S$  (separación entre parches) y  $L$  (tamaño del lado de las placas), considerando el cálculo de la sección radar monoestática de las dos superficies, incluyendo simples y dobles efectos.

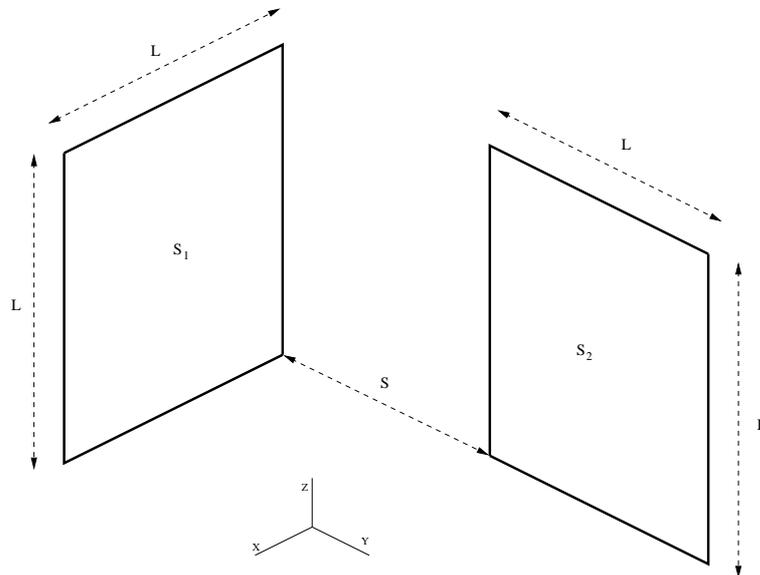


Figura 7.5: Geometría empleada para el estudio de la eficiencia, considerando los parámetros variables  $S$  (separación entre los parches) y  $L$  (tamaño del lado de las placas).

Se han realizado diferentes simulaciones considerando valores para el parámetro  $L$  de 2, 4, 6, 8 y 10 longitudes de onda, y de 0, 2, 6 y 12 longitudes de onda para el parámetro  $S$ . En todos los casos se ha calculado un barrido para  $\theta = 90^\circ$ ,  $\Phi = 0^\circ \dots 90^\circ$

en pasos de un grado, obteniendo una buena precisión en los resultados. Como ejemplo, las figuras 7.6 y 7.7 muestran una comparación entre los valores obtenidos mediante el método de alta frecuencia presentado en la tesis y el Método de los Momentos para las polarizaciones  $\theta - \theta$  y  $\phi - \phi$ , considerando una separación nula entre parches ( $S = 0\lambda$ ) y  $L = 10\lambda$  para cada placa. Para realizar la simulación de forma rigurosa, debido al tamaño del problema (40500 incógnitas) se ha optado por emplear el Método Rápido de los Multipolos en su versión multinivel (MLFMM) con 5 niveles diferentes, con lo que la simulación ha empleado 82 horas, 15 minutos y 23 segundos en un procesador Opteron (64 bits) con 12 Gbytes de memoria RAM. Todos los resultados de tiempo de cálculo con la aproximación de alta frecuencia (integración numérica o cuasianalítica) se han realizado en un ordenador PC Pentium 4 a 1.8 GHz y 1 GByte de memoria RAM.

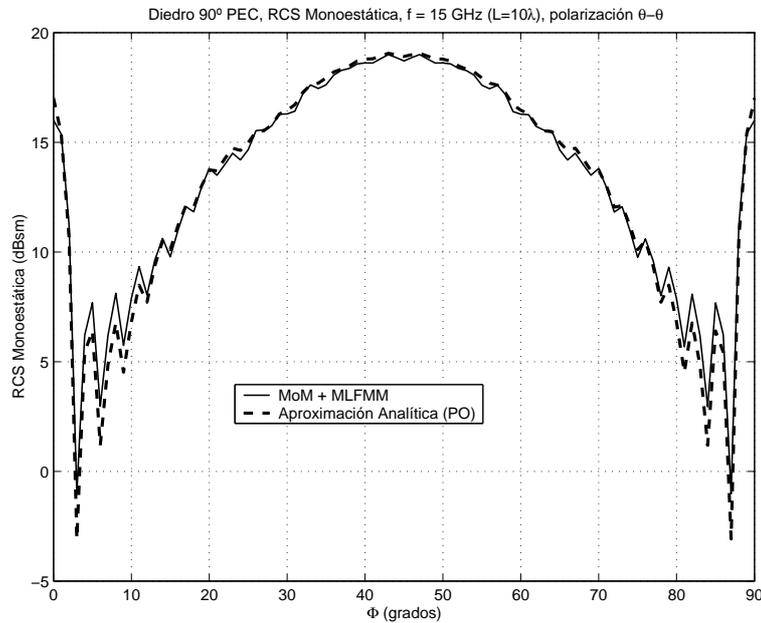


Figura 7.6: RCS monoestática a 15 GHz ( $L = 20\text{cm}$ ,  $S = 0\text{cm}$ ). Comparación del método iterativo y el Método de los Momentos combinado con el Método Rápido de los Multipolos en su versión multinivel (MLFMM). Polarización  $\theta - \theta$ .

En la tabla 7.3 se muestran los tiempos de cálculo obtenidos al realizar una integración numérica de las corrientes de PO con una tasa espacial de 10 muestras por longitud de onda al considerar distintos tamaños para las placas. Se debe destacar que en este caso los tiempos de cálculo son independientes de la separación entre las superficies.

La tabla 7.4 muestra los tiempos de cálculo al utilizar las aproximaciones incluidas

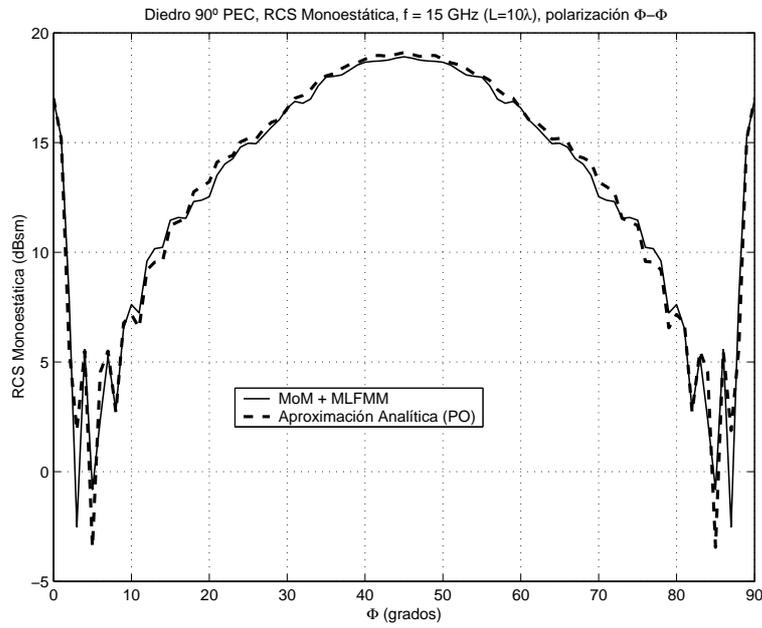


Figura 7.7: RCS monoestática a 15 GHz ( $L = 20\text{cm}$ ,  $S = 0\text{cm}$ ). Comparación del método iterativo y el Método de los Momentos combinado con el Método Rápido de los Multipolos en su versión multinivel (MLFMM). Polarización  $\Phi - \Phi$ .

$L = 2\lambda$	$L = 4\lambda$	$L = 6\lambda$	$L = 8\lambda$	$L = 10\lambda$
27s	388s	1774s	5369s	13165s

Tabla 7.3: Tiempos de cálculo requeridos por la integración numérica tomando 10 muestras por longitud de onda.

	$L = 2\lambda$	$L = 4\lambda$	$L = 6\lambda$	$L = 8\lambda$	$L = 10\lambda$
$S = 0$	55s	193s	474s	892s	1760s
$S = 2\lambda$	31s	96s	169s	283s	490s
$S = 6\lambda$	6s	35s	71s	124s	222s
$S = 12\lambda$	3s	23s	56s	102s	186s

Tabla 7.4: *Tiempos de cálculo requeridos por el método de integración cuasianalítica, en función de los parámetros  $L$  y  $S$ .*

en la tesis para el cálculo del campo dispersado. Se puede observar cómo al aumentar la distancia entre parches mejora la eficiencia computacional debido a que la variación del término de fase de los modos de corriente inducidos se ve suavizada.

## 7.3 Validación del Método Iterativo en Problemas de Alta Frecuencia

### 7.3.1 Cavity Cuadrada con Pestaña

Para la validación del método iterativo para el cálculo de efectos de orden arbitrario se ha considerado la geometría mostrada en la figura 7.8, consistente en una cavidad cuadrada con una pestaña situada en el plano  $XY$ . Todas las placas tienen un tamaño de 1 metro de lado. El análisis realizado consiste en el cálculo de la RCS monoestática en un barrido con  $\Phi = 0^\circ$ ,  $\theta = 0^\circ \dots 90^\circ$  en pasos de un grado.

La figura 7.9 muestra el resultado para la polarización  $\theta - \theta$  a una frecuencia de 300 MHz, y considerando 8 efectos. El resultado obtenido se compara en la figura con el devuelto por el Método de los Momentos con el MLFMM, bajo las mismas condiciones que en la sección 7.2.3 y empleando la misma máquina. El tiempo de cálculo requerido para el análisis riguroso ha sido de 28 horas, 58 minutos y 44 segundos, mientras que el método iterativo ha empleado 14 minutos y 47 segundos en un ordenador PC Pentium 4 a 1.8 GHz y con una memoria RAM de 1 Gbyte.

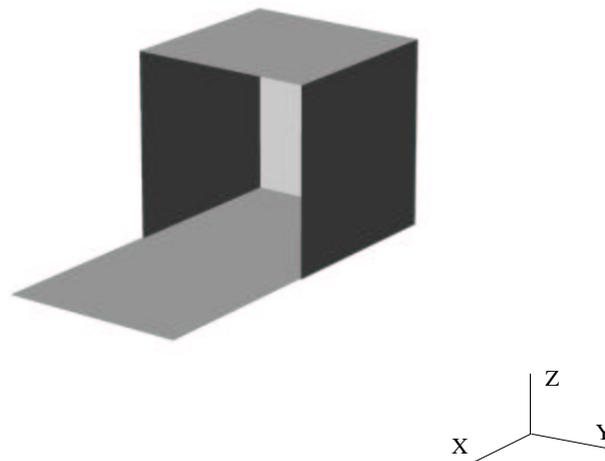


Figura 7.8: Esquema geométrico de la cavidad cuadrada con pestaña

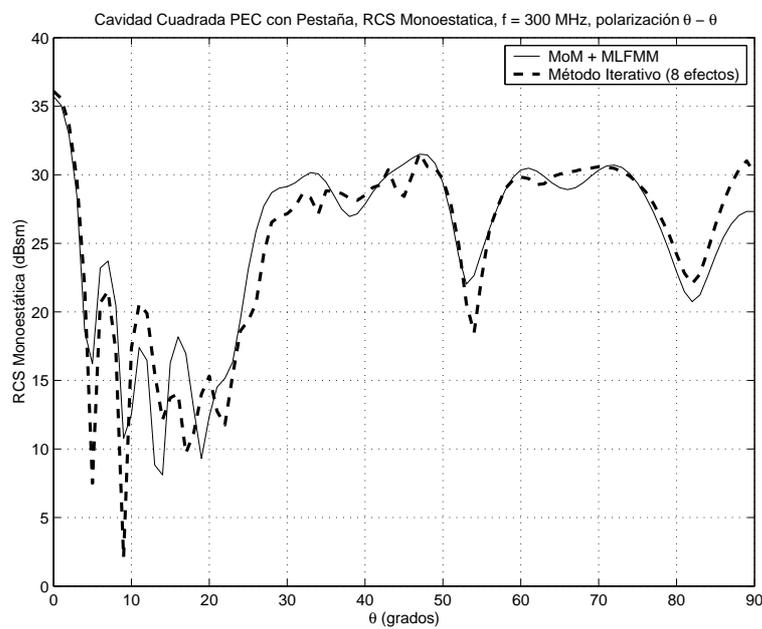


Figura 7.9: RCS monoestática a 300 MHz. Comparación del método iterativo y el Método de los Momentos combinado con el Método Rápido de los Multipolos en su versión multinivel (MLFMM).

La figura 7.10 muestra el resultado obtenido al aumentar la frecuencia a 600 MHz. En este caso se han considerado 10 efectos diferentes en el método iterativo. El tiempo de cálculo empleado por el método riguroso es de 95 horas, 7 minutos y 39 segundos, mientras que el método iterativo ha necesitado 1 hora, 48 minutos y 59 segundos.

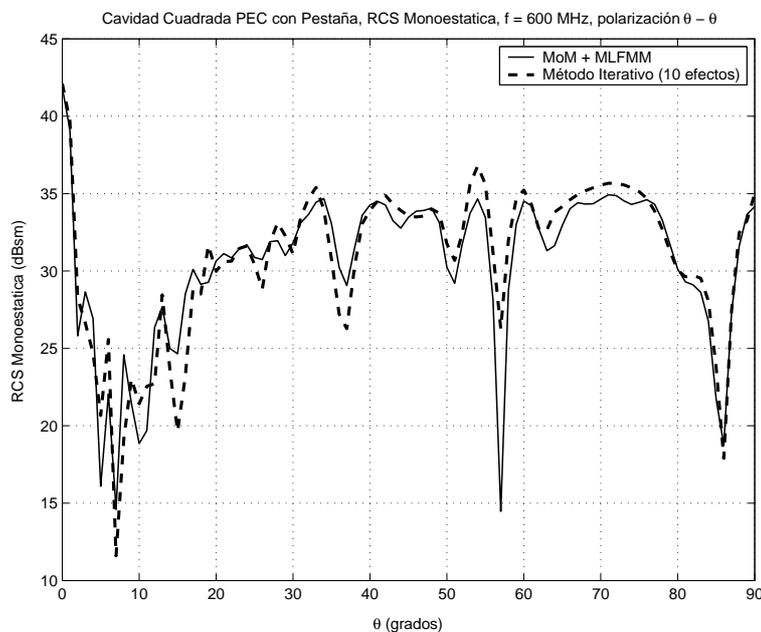


Figura 7.10: RCS monoestática a 600 MHz. Comparación del método iterativo y el Método de los Momentos combinado con el Método Rápido de los Multipolos en su versión multinivel (MLFMM).

### 7.3.2 Análisis del Misil SCUD

Como ejemplo de análisis de una geometría realista se ha considerado el misil SCUD mostrado en la figura 7.11, cuyo eje se encuentra orientado según la dirección  $\hat{y}$ , compuesto por 30 superficies NURBS. La frecuencia de análisis es de 1 GHz (lo que supone una longitud de unas 37 longitudes de onda), y se ha calculado la RCS monoestática en el barrido angular definido por  $\phi = 0^\circ$ ,  $\theta = 0^\circ \dots 90^\circ$  en pasos de un grado, para la polarización  $\theta - \theta$ .

En la figura 7.12 se muestra la RCS monoestática comparando el resultado obtenido con el método propuesto en la tesis (Ejecutado en un PC Pentium 4 con 1 GByte de memoria RAM) y el devuelto por el Método de los Momentos acelerado con el Método

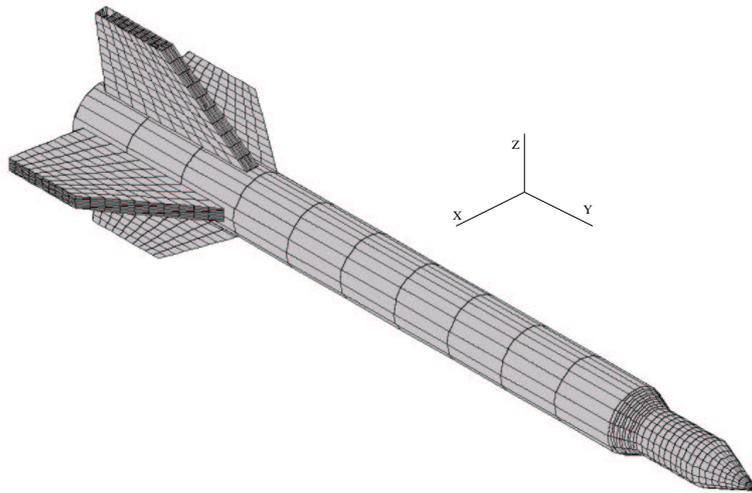


Figura 7.11: *Modelo geométrico del misil SCUD.*

Rápido de los Multipolos Multinivel, ejecutado con los mismos parámetros y en la misma plataforma que en las secciones anteriores. En este último caso el número total de incógnitas ha sido de 152987, con lo que el tiempo de cálculo ha sido de 168 horas, 45 minutos y 32 segundos, mientras que la aproximación de alta frecuencia ha empleado 23 minutos y 14 segundos.

### 7.3.3 Análisis del Avión CN235

En este ejemplo se realiza un análisis de un modelo del avión *CN235* (figura 7.13), consistente en 58 superficies NURBS. Se ha considerado la frecuencia de trabajo de 1 GHz, para la que el objeto tiene una dimensión máxima aproximada de  $35\lambda$ . El análisis comprende un barrido angular para  $\theta = 45^\circ$  y  $\Phi = 0^\circ \dots 113^\circ$  en pasos de un grado.

Se han obtenido valores correspondientes a la polarización  $\theta - \theta$ , comparando el método iterativo con la integración numérica rigurosa de las corrientes de PO. En el primer caso se ha empleado un tiempo total de 9 minutos y 20 segundos, mientras que la integración numérica ha requerido 13 horas, 22 minutos y 5 segundos. Ambas simulaciones han sido realizadas con un ordenador PC con procesador Pentium 4 y 1 GByte de memoria RAM.

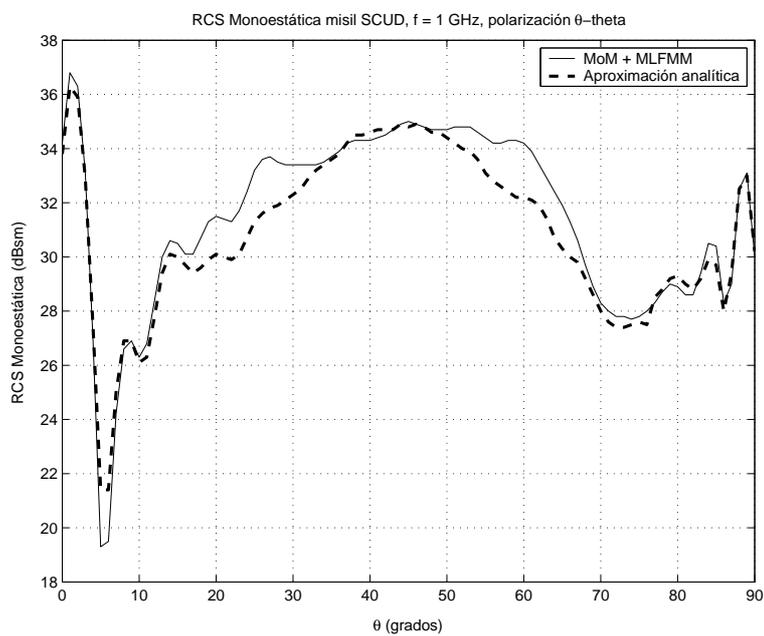


Figura 7.12: RCS monoestática a 1 GHz. Comparación del método iterativo y el Método de los Momentos combinado con el Método Rápido de los Multipolos en su versión multinivel (MLFMM).

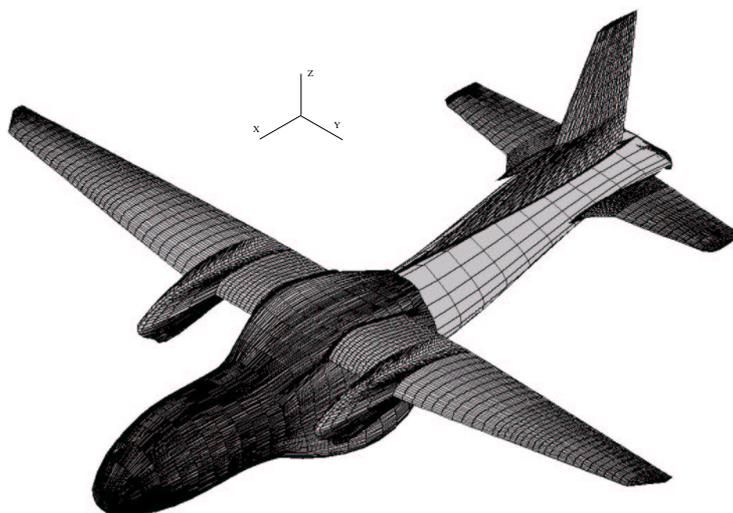


Figura 7.13: Modelo geométrico del avión CN235.

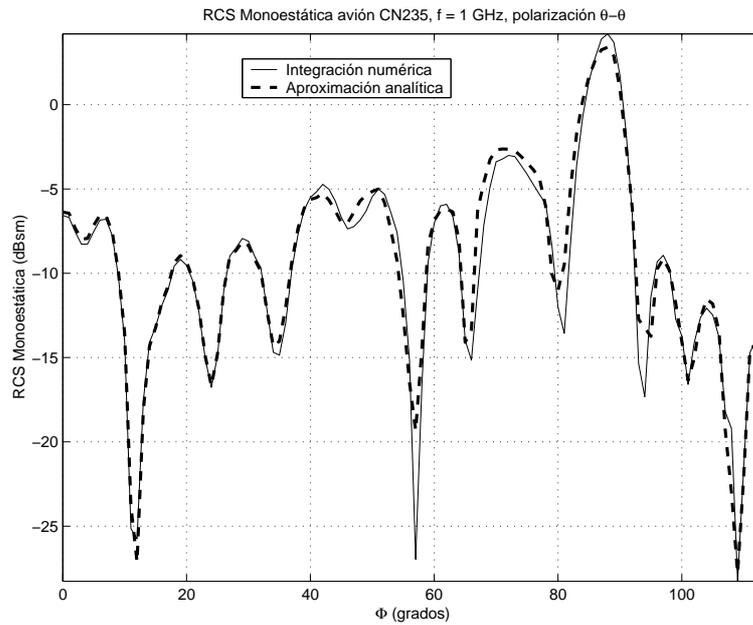


Figura 7.14: RCS monoestática a 1 GHz. Comparación entre el método iterativo y el método de Óptica Física con integración numérica. Polarización  $\theta - \theta$ .

### 7.3.4 Análisis del Avión Alphajet

El modelo geométrico de este avión se muestra en la figura 7.15. Está compuesto por 124 superficies NURBS. Se ha calculado la RCS monoestática en un barrido de direcciones dado por  $\phi = 90^\circ$ ,  $\theta = 45^\circ \dots 135^\circ$  a una frecuencia de 850 MHz, para la que la dimensión máxima del modelo es de  $29,3\lambda$ , aproximadamente.

En la figura 7.16 se muestra la sección radar monoestática, considerando la polarización  $\theta - \theta$  y comparando el método iterativo con la integración numérica rigurosa de las corrientes de PO. Al igual que en casos anteriores, se ha empleado un PC con procesador Pentium 4 y 1 GByte de memoria RAM. El tiempo de cálculo requerido por la simulación en la que se ha considerado la integración numérica de las corrientes ha sido de 14 horas, 19 minutos y 3 segundos, mientras que el método iterativo con aproximaciones cuasianalíticas para la integración ha requerido 24 minutos y 25 segundos.

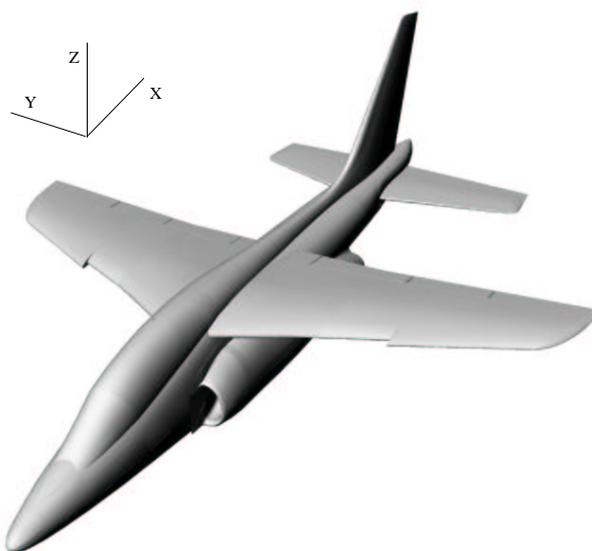


Figura 7.15: *Modelo geométrico del avión Alphajet.*

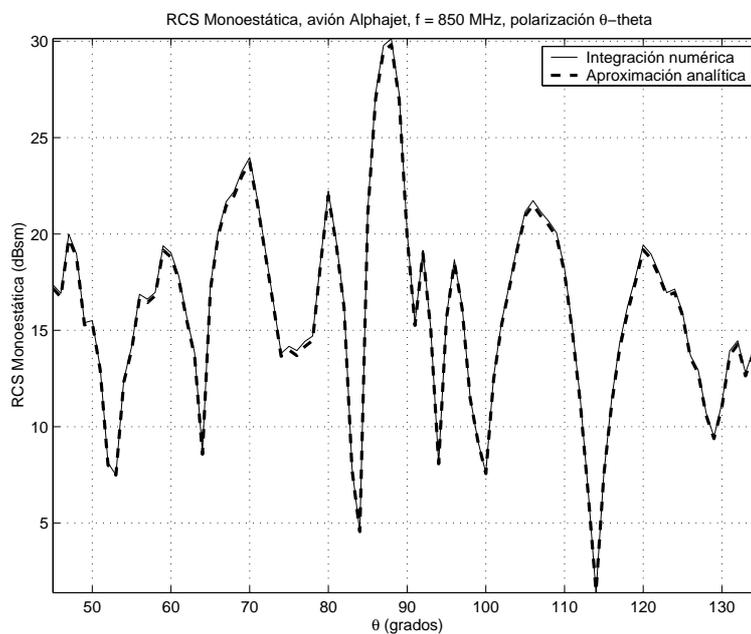


Figura 7.16: *RCS monoestática a 850 MHz. Comparación entre el método iterativo y el método de Óptica Física con integración numérica. Polarización  $\theta - \theta$ .*

## 7.4 Validación del Método de las Funciones Base Características Aplicado a Superficies Paramétricas Arbitrarias

En esta sección se analiza un problema modelado por una superficie NURBS simple curva, con un radio de 5 metros y los vértices mostrados en la figura 7.17. Se ha empleado el Método de las Funciones Base Características utilizando rooftops como funciones de subdominio de bajo nivel y funciones cuchilla como funciones de test, según el procedimiento descrito en la tesis. La geometría se ha dividido en bloques de un tamaño eléctrico de  $2\lambda$ , y en el análisis se ha utilizado un ordenador PC Pentium 4 a 1.8 GHz y con 1 GByte de memoria RAM.

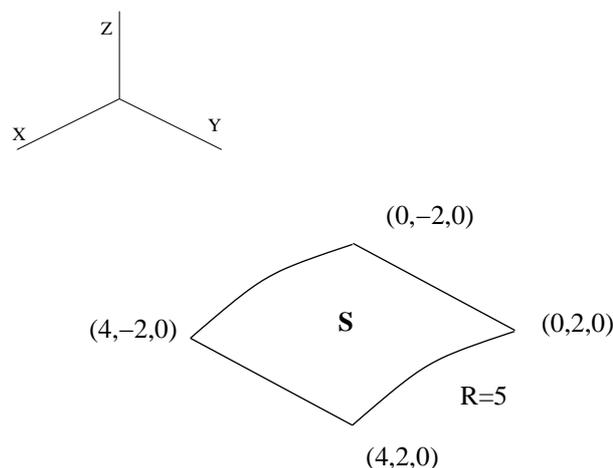


Figura 7.17: Geometría compuesta por un parche NURBS simple curva.

Tras realizar la ortogonalización de las corrientes inducidas por un conjunto de ondas planas por medio de la SVD, se obtienen 43 funciones base características en cada uno de los bloques. De esta forma, el número de incógnitas generadas por el Método de los Momentos convencional se ve reducido de 7400 a 387. En la figura 7.18 se muestra la RCS monoestática calculada en un barrido para  $\Phi = 90^\circ$ ,  $\theta = 0^\circ \dots 70^\circ$ , donde se observa la buena concordancia obtenida entre el Método de los Momentos (línea continua) y el Método de las Funciones Base Características (línea punteada). El tiempo de cálculo requerido por el método directo (Método de los Momentos) ha sido de 1 hora, 28 minutos y 12 segundos, mientras que en la aplicación del CBFM se han necesitado 23 minutos y 7 segundos. Cabe destacar que, por la naturaleza del Método de las Funciones Base Características, la mejora se hace más notable según se

incrementa el tamaño eléctrico del problema.

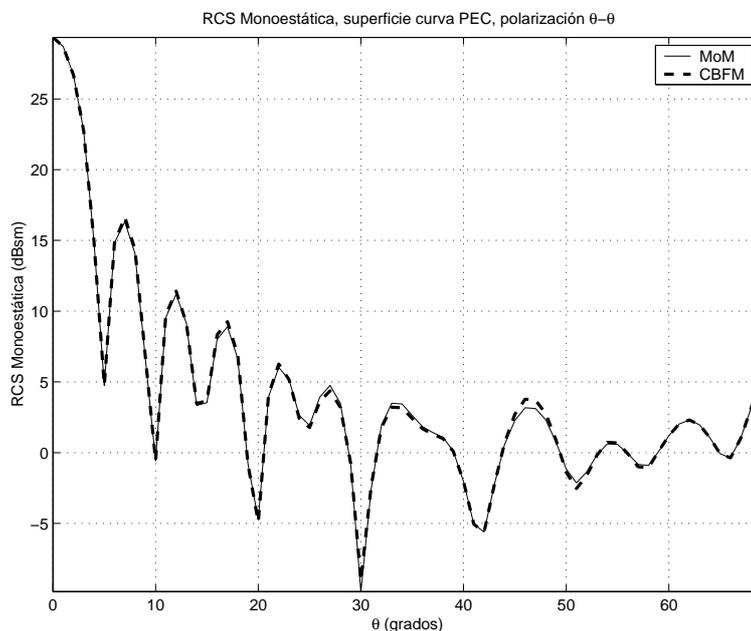


Figura 7.18: RCS monoestática correspondiente a la superficie curva mostrada en la figura 7.17. Polarización  $\theta - \theta$ .

## 7.5 Estudio de Técnicas Eficientes en el Método de las Funciones Base Características

En esta sección se considera el caso de la aplicación de las técnicas numéricas para la aceleración del cálculo de los elementos de la matriz reducida donde intervengan los acoplos en campo lejano. En la figura 7.19 se muestra el esquema geométrico empleado para realizar un estudio de la precisión obtenida al aplicar estas técnicas al Método de las Funciones Base Características. Cada placa ha sido considerada como un bloque independiente, y se ha estudiado el efecto de la variación de los parámetros  $L$  (tamaño de las placas),  $S$  (separación entre las mismas) y  $\alpha$  (ángulo que forman). Todos los resultados obtenidos se basan en el análisis de la RCS monoestática para  $\Phi = 0^\circ$  y  $\theta = 0^\circ \dots 90^\circ$  para la polarización  $\theta - \theta$ .

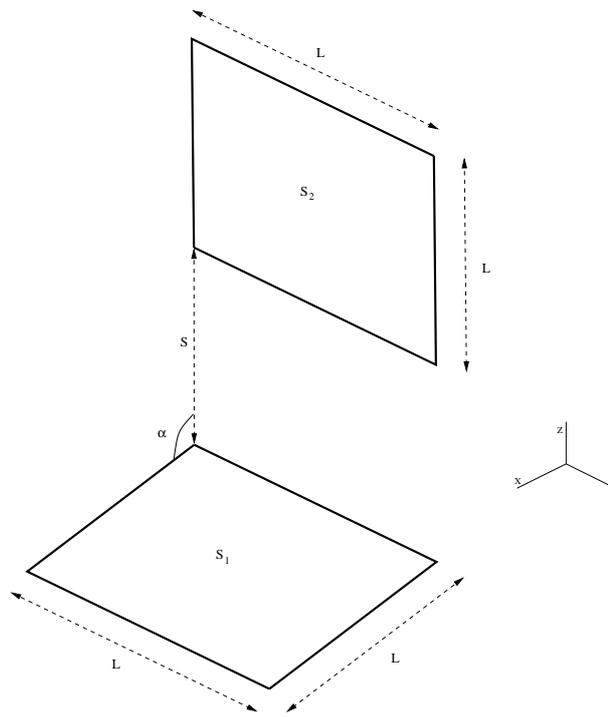


Figura 7.19: Modelo geométrico para el estudio de la eficiencia en función de los parámetros  $S$ ,  $L$  y  $\alpha$ .

### 7.5.1 Aplicación del Método Rápido de los Multipolos para el Cálculo de Bloques No Diagonales

En todos los casos considerados al aplicar el Método de los Multipolos conjuntamente con el CBFM se ha comparado con el Método de los Momentos convencional, mostrando una buena concordancia entre los resultados obtenidos. En la figura 7.20 se muestra a modo de ejemplo el resultado para  $L = S = 2\lambda$  y  $\alpha = 90^\circ$ .

La tabla 7.5 ofrece una idea de la precisión obtenida. Se muestra el error relativo cometido para 9 combinaciones de los parámetros  $S$  y  $\alpha$ , definido como el cociente entre el error cometido en el cálculo de los términos no diagonales entre la magnitud del término diagonal dominante. Se aprecia cómo este error disminuye cuando lo hace el acoplo entre las superficies.

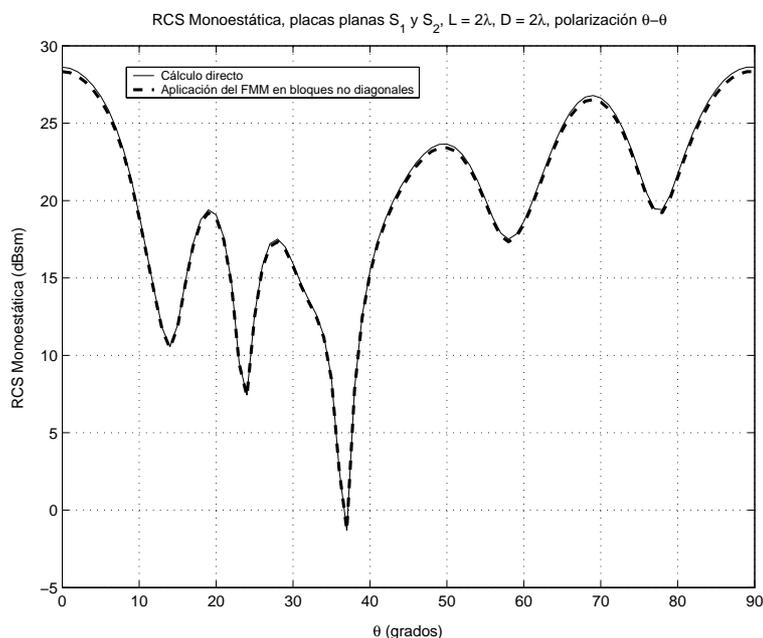


Figura 7.20: RCS monoestática correspondiente al esquema geométrico mostrado en la figura 7.19 con los parámetros  $L = 2\lambda$ ,  $S = 2\lambda$ ,  $\alpha = 90^\circ$ . Comparación entre el método directo (MoM convencional) y el método CBFM con la aplicación del FMM en los bloques no diagonales. Polarización  $\theta - \theta$ .

	$S = 1\lambda$	$S = 3\lambda$	$S = 6\lambda$
$\alpha = 0^\circ$	$1,74 \cdot 10^{-4}$	$1,03 \cdot 10^{-4}$	$8,82 \cdot 10^{-5}$
$\alpha = 45^\circ$	$2,28 \cdot 10^{-4}$	$1,24 \cdot 10^{-4}$	$8,76 \cdot 10^{-5}$
$\alpha = 90^\circ$	$3,77 \cdot 10^{-4}$	$1,32 \cdot 10^{-4}$	$9,02 \cdot 10^{-5}$

Tabla 7.5: Error relativo cometido con respecto a los términos diagonales. El parámetro  $L$  ha sido fijado a  $3\lambda$ .

### 7.5.2 Aplicación del Método Dual-MGS para el Cálculo de Bloques No Diagonales

En el análisis del método Dual-MGS para la reducción eficiente del rango de los bloques no diagonales se considera también el esquema geométrico de la figura 7.19, si bien es necesario puntualizar que existen restricciones a la hora de fijar el tamaño de los bloques. Se ha comprobado que la utilización de este método ofrece buenos resultados para tamaños de bloque de hasta unas  $2,5\lambda$ . A partir de dicho tamaño se encuentran casos para los que se producen paradas prematuras del algoritmo, redundando en resultados que adolecen de una precisión pobre, o bien para los que el rango efectivo devuelto es igual al del bloque original. Esto es debido a la naturaleza aproximativa del algoritmo Dual-MGS, y con el fin de evitar los casos de mal funcionamiento anteriormente mencionados se debe mantener el tamaño de los bloques entre  $2\lambda$  y  $2,5\lambda$  para asegurar su buen comportamiento.

En la figura 7.21 se muestra como ejemplo el cálculo de la RCS monoestática, según la polarización  $\theta - \theta$ , fijando los parámetros  $L$  y  $S$  a  $2,26\lambda$  y el parámetro  $\alpha$  a  $45^\circ$ . Se puede observar una buena correspondencia entre los valores predichos por el Método de los Momentos y el método CBFM junto al algoritmo Dual-MGS.

En la figura 7.22 se representa el caso  $L = S = 2,26\lambda$ ,  $\alpha = 90^\circ$ , donde se han utilizado tres valores diferentes para el umbral de parada  $\epsilon$  del método Dual-MGS. El valor  $\epsilon = 0$  indica que no se realiza ninguna reducción del rango del bloque, tomándolo completo para los cálculos posteriores. Se observa que, si bien al utilizar el valor  $\epsilon = 10^{-2}$  se obtienen resultados aceptables, con  $\epsilon = 10^{-1}$  éstos son demasiado pobres, debido a que el rango del bloque se ve excesivamente recortado.

En la tabla 7.6 se muestra la reducción de uno de los bloques diagonales y la precisión obtenida. Para ello, se ha fijado el tamaño del bloque a  $L = 2\lambda$ , y se ha variado el ángulo y la separación entre placas. En la tabla se muestra el rango devuelto por el algoritmo Dual-MGS (*rango efectivo*), así como el error cometido al realizar el producto matriz-vector con las matrices resultantes de la factorización.

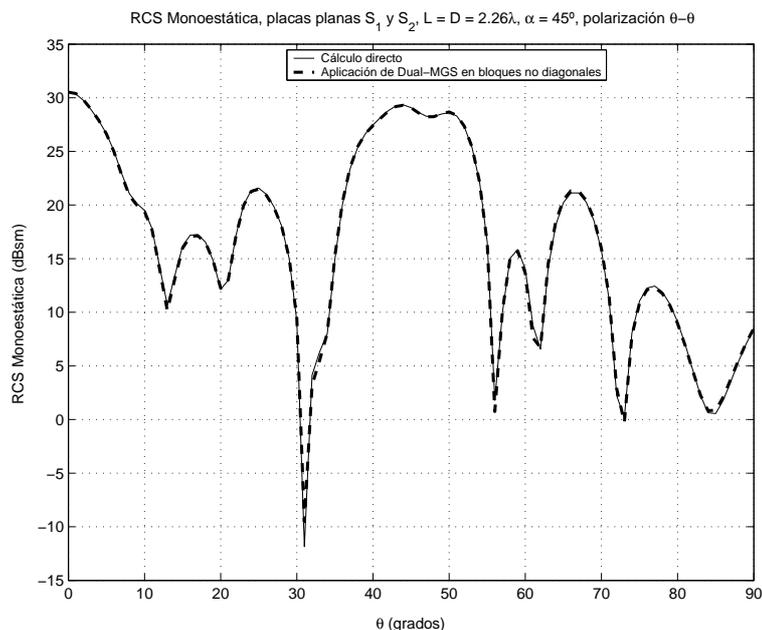


Figura 7.21: RCS monoestática correspondiente al esquema geométrico mostrado en la figura 7.19 con los parámetros  $L = S = 2,26\lambda$ ,  $\alpha = 45^\circ$ . Comparación entre el método directo (MoM convencional) y el método CBFM con la aplicación de la descomposición Dual-MGS en los bloques no diagonales. Polarización  $\theta - \theta$ .

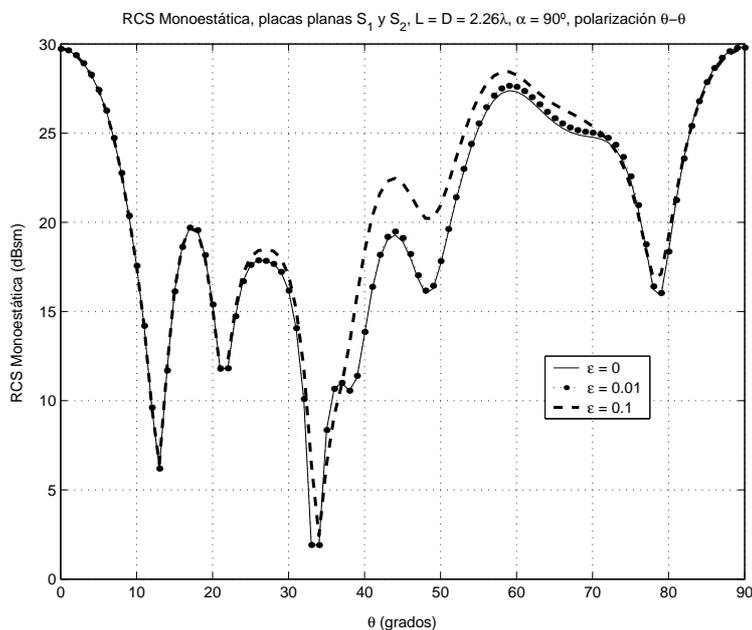


Figura 7.22: RCS monoestática correspondiente al esquema geométrico mostrado en la figura 7.19 con los parámetros  $L = S = 2,26\lambda$ ,  $\alpha = 90^\circ$ . Comparación entre los resultados obtenidos empleando distintos valores para el parámetro  $\epsilon$  en la descomposición Dual-MGS en los bloques no diagonales. Polarización  $\theta - \theta$ .

$\alpha$	$S$	Rango efectivo	Error relativo medio
$0^\circ$	$2\lambda$	28	$6,93 \cdot 10^{-2}$
$0^\circ$	$4\lambda$	21	$6,81 \cdot 10^{-2}$
$45^\circ$	$2\lambda$	42	$2,76 \cdot 10^{-2}$
$45^\circ$	$4\lambda$	23	$3,84 \cdot 10^{-2}$
$90^\circ$	$2\lambda$	44 <sup>a</sup>	$2,76 \cdot 10^{-2}$
$90^\circ$	$4\lambda$	27 <sup>a</sup>	$6,79 \cdot 10^{-2}$

Tabla 7.6: *Estudio del rango efectivo de los bloques no diagonales y el error medio relativo cometido en el producto matriz-vector. El parámetro  $L$  ha sido fijado a  $2\lambda$ .*

<sup>a</sup>Estos resultados han sido obtenidos fijando el umbral  $\epsilon$  a  $10^{-2}$  e incluyendo iteraciones adicionales para evitar el caso de parada prematura del algoritmo, ya que es lo que ocurre si se emplean umbrales superiores.

# Capítulo 8

## Conclusiones y Futuras Líneas de Trabajo

### 8.1 Conclusiones

En esta tesis se han desarrollado varias técnicas eficientes para el análisis de problemas electromagnéticos, siguiendo líneas de investigación relacionadas tanto con métodos de alta frecuencia como con métodos rigurosos.

En primer lugar se ha utilizado la expresión de las distribuciones de corriente sobre superficies arbitrarias como descomposición en modos de corriente para el desarrollo de técnicas cuasianalíticas de integración, que conllevan un aumento drástico de la eficiencia computacional y mantienen la precisión y robustez de la integración superficial de la corriente. A partir de funciones de fase expresadas analíticamente por medio de aproximaciones polinomiales se han investigado dos aproximaciones para la obtención eficiente de los campos radiados, que utilizan una división de la superficie original en regiones generadas por un algoritmo adaptativo desarrollado en la tesis. La primera de estas aproximaciones se aplica cuando la fase dentro de cada región de integración es predominantemente lineal, aunque permitiendo de forma controlada una cierta componente no lineal. En el segundo caso se considera una variación de la fase según patrones cuadráticos y una cierta variación adicional de orden superior. Estos dos esquemas, que

emplean una descripción de la corriente mediante un conjunto reducido de puntos de muestreo, pueden ser combinados para ofrecer una técnica muy robusta, eficiente y que ofrece resultados similares a los devueltos por un algoritmo de integración numérica con un muestreo denso de las corrientes.

En combinación con las técnicas anteriormente mencionadas para la obtención de los campos se ha desarrollado un método iterativo para el cálculo de efectos de orden arbitrario entre superficies paramétricas utilizando métodos de alta frecuencia. Las corrientes obtenidas son descritas mediante una combinación de modos de corriente en zonas suaves y eléctricamente grandes y un muestreo denso en zonas pequeñas, con gran curvatura o con irregularidades. La división de la geometría en regiones se lleva a cabo de manera automática mediante un algoritmo adaptativo. Es importante reseñar también la necesidad de incluir una serie de algoritmos eficientes para la detección de zonas ocultas e iluminadas en las superficies donde, en cada iteración de este método, se debe calcular la corriente inducida, ya sea debido a fuentes externas (ondas planas o fuentes puntuales cercanas) o a otra superficie radiante que actúa como parche activo.

El resultado de la investigación realizada en relación a las técnicas anteriormente expuestas se ha visto plasmado en un código electromagnético, escrito en lenguaje Fortran, en el que se emplea el método iterativo junto con las técnicas eficientes para la integración de la corriente, en combinación con la Óptica Física y un modelado geométrico mediante superficies NURBS. Este código ha sido empleado para el cálculo de la sección radar de múltiples geometrías realistas eléctricamente grandes con resultados satisfactorios, abriendo un buen número de líneas de investigación para el aprovechamiento de la eficiencia que ha demostrado tener.

Además del desarrollo del código de alta frecuencia, se ha investigado en relación a un método riguroso que en los últimos años ha demostrado tener un gran potencial para el análisis de objetos eléctricamente grandes. El Método de las Funciones Base Características utiliza un conjunto reducido de funciones de base y de prueba de alto nivel que permiten establecer un sistema de ecuaciones lineales, que puede ser resuelto mediante la aplicación de métodos directos. Existe una relación directa con las técnicas anteriormente mencionadas en el cálculo de estas funciones de base, ya que se emplean las corrientes de PO de diversas ondas incidentes sobre la geometría. Este método ha sido combinado de forma novedosa con un modelado mediante superficies NURBS sobre las que se utilizan funciones de tipo tejado y cuchilla como funciones de base y

prueba de bajo nivel, respectivamente. También se han investigado técnicas eficientes para la generación de los bloques no diagonales en la matriz reducida, sentando la base para la obtención de un método capaz de resolver problemas electromagnéticos grandes y con superficies arbitrarias de forma rigurosa.

## 8.2 Futuras líneas de trabajo

Como se ha comentado en la sección anterior, la continuación natural del trabajo desarrollado en esta tesis implica la consideración de un conjunto de líneas de investigación por las que aprovechar y mejorar el comportamiento de estos métodos.

En relación al desarrollo de técnicas eficientes basadas en la descomposición de modos de corriente, se pueden destacar principalmente las siguientes líneas de trabajo:

- Inclusión de la posibilidad de analizar superficies de material dieléctrico en el método iterativo. Esta opción resulta muy atractiva, tanto por el interés que suscita el poder analizar problemas lo más realistas que sea posible como por la relativa simplicidad con que puede ser introducida, considerando las corrientes magnéticas además de las eléctricas sobre las superficies y obteniendo unos coeficientes de reflexión sobre los parches recubiertos de material dieléctrico.
- Utilización de corrientes equivalentes alternativas a las de PO. Actualmente ya se está trabajando en esta línea con resultados esperanzadores. En geometrías muy complicadas el procesado de ocultación puede ser realmente tedioso, llegando a suponer una carga computacional considerable y resultando crítico para la obtención de resultados correctos. Resulta interesante, por tanto, evaluar el comportamiento de otro tipo de corrientes para las que, sin necesidad de considerar zonas ocultas, los campos resultantes se anulen de forma natural en las zonas de sombra y se refuercen en las luminadas.
- Inclusión de nuevas técnicas de aceleración por medio de descarte rápido de superficies. Los progresos en las técnicas basadas en el Z-Buffer angular se producen de forma continuada, por lo que resulta interesante incorporarlas al método iterativo.

- ❑ Análisis de *métodos heurísticos* en la selección de aquellas superficies y efectos para los que se estima una mayor contribución al resultado final, rechazando el cálculo de contribuciones computacionalmente costosas y con una aportación despreciable.
- ❑ Hibridación de las técnicas basadas en modos de corriente con métodos rigurosos para el cálculo del campo en interacciones lejanas, mejorando la eficiencia de técnicas ampliamente empleadas como el Método Rápido de los Multipolos.

En relación a la aplicación del Método de las Funciones Base Características, pueden destacarse las siguientes líneas de trabajo:

- ❑ Estudio de nuevos métodos de reducción y ortogonalización del número de funciones base características. Uno de los casos contemplados consiste en el análisis del comportamiento de *armónicos de Fourier* como funciones de base cuasi-ortogonales.
- ❑ Validación del método en su aplicación a estructuras grandes y complejas. En la presente tesis se ha utilizado el mismo para el análisis de estructuras sencillas, por lo que resta realizar un estudio de geometrías de complejidad creciente hasta alcanzar los mismos casos analizados mediante métodos de alta frecuencia.
- ❑ Combinación de funciones base características calculadas mediante el Método de los Momentos convencional para superficies irregulares con otras resultantes de la aplicación de la Óptica Física en superficies grandes y suaves, de forma que una vez calculadas se combinen de forma transparente.
- ❑ Inclusión de la posibilidad de analizar superficies no metálicas o cubiertas de materiales dieléctricos.

# Apéndice A

## Modelado Geométrico mediante Superficies B-Spline Racionales no Uniformes (NURBS)

### A.1 Introducción

A lo largo del desarrollo de la presente tesis se ha empleado continuamente el concepto de superficies paramétricas [132, 133] como expresiones a utilizar en la aproximación de la geometría y, en general, de cualquier función de variación suave que pueda ser adecuadamente trasladada a un dominio paramétrico bidimensional, como es el caso de las funciones que definen a un modo de corriente. En este apartado se caracterizan estas superficies, además de estudiar la forma en que obtener parámetros geométricos sobre las mismas (vectores normales y tangentes, derivadas paramétricas de orden arbitrario).

Las superficies *B-Spline Racionales no Uniformes* [47, 134, 135], conocidas ampliamente como NURBS por las siglas de su nombre anglosajón, son una extensión del caso unidimensional, las curvas NURBS. A su vez, dichas curvas pueden ser vistas como la conexión de diferentes *curvas de Bezier* [136–138] de grado bajo, imponiendo ciertas condiciones de continuidad entre los diferentes tramos [139]. Debido a esto, en el apartado A.2 se estudia la definición y propiedades de las curvas y superficies de Bezier.

Las curvas y superficies B-Spline se analizan en el apartado A.3, haciendo énfasis en la relación que guardan con las curvas y superficies de Bezier [140,141]. En la sección A.4 se analiza la obtención de diversos parámetros geométricos en puntos de la superficie.

## A.2 Curvas y Superficies Racionales de Bezier

Una curva de Bezier  $\vec{c}(t)$  puede ser expresada por medio de una combinación de las bases de Bernstein [142–144], de la siguiente forma:

$$\vec{c}(t) = \sum_{i=0}^n \vec{b}_i B_i^n(t) \quad (\text{A.1})$$

donde  $t$  es la variable paramétrica, situada dentro del segmento  $[0, 1]$ ,  $n$  es el grado de la curva, y los puntos  $\vec{b}_i$ , con  $i = 0, \dots, n-1$ , denominados *puntos de control*, son los vértices del *polígono de control* de la curva. Los polinomios que constituyen las bases de Bernstein vienen dados por:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad (\text{A.2})$$

donde:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (\text{A.3})$$

Existe una fórmula recursiva para el cálculo de los polinomios de Bernstein, utilizando los polinomios de grado inferior:

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) \quad (\text{A.4})$$

con:

$$B_0^0(t) \equiv 1, \quad B_i^n(t) \equiv 0 \text{ para } j \notin \{0, \dots, n\} \quad (\text{A.5})$$

Las bases de Bernstein, así definidas, cumplen además la siguiente propiedad [47]:

$$\sum_{j=0}^n B_j^n(t) \equiv 1 \quad (\text{A.6})$$

La curva se encuentra contenida en la envolvente convexa del polígono de control [106], por lo que éste ofrece una aproximación intuitiva de la forma de la misma. La curva tiende a acercarse a los puntos de control más próximos, pasando necesariamente por el primero y el último de ellos. Además, en ambos puntos el vector tangente a la curva es el resultado de la unión de cada uno de ellos con el punto de control más cercano dentro del segmento paramétrico. El número de puntos de control (que equivale al grado más uno) se conoce como *orden* de la curva. Este tipo de curvas es invariante frente a transformaciones afines (rotaciones, traslaciones, escalado, etc.). En la figura A.1 se muestra gráficamente un ejemplo donde se reflejan las propiedades anteriormente expuestas.

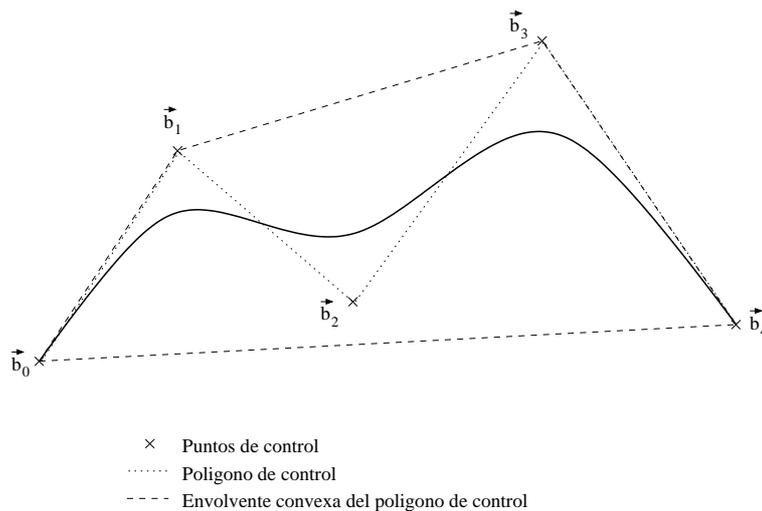


Figura A.1: Curva de Bezier, puntos de control y envolvente convexa del polígono de control.

Modificando la expresión (A.1) se llega a la definición de *curva racional de Bezier*

[47], dada por:

$$\vec{c}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \vec{b}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)} \quad (\text{A.7})$$

donde se ha asociado un coeficiente o *peso*  $w_i$  a cada punto de control de la curva, lo que supone la inclusión de un nuevo grado de libertad para el diseño de la misma, haciendo que la curva se aproxime en mayor o menor medida a cada punto de control dependiendo del peso asociado. Resulta evidente que la expresión no racional (A.1) constituye una particularización de (A.7) haciendo todos los pesos iguales a la unidad. En tal caso, por la propiedad (A.6) se puede eliminar el denominador de (A.7). La inclusión de este tipo de curvas permite la representación de curvas cónicas (circunferencias, elipses, hipérbolas y parábolas), no modelables mediante expresiones no racionales.

Después de analizar las expresiones por las que se definen las curvas racionales de Bezier, así como sus características generales, se puede generalizar el estudio al caso de superficies paramétricas, incluyendo los elementos necesarios para considerar una nueva dimensión. De esta forma, a partir de (A.7) se obtiene la expresión general de una *superficie de Bezier*  $\vec{r}(u, v)$ :

$$\vec{r}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{ij} \vec{b}_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v)} \quad (\text{A.8})$$

donde se han incluido las dos variables paramétricas  $u$  y  $v$ , utilizadas profusamente durante el desarrollo de esta tesis y limitadas al dominio  $[0, 1]$ ,  $m$  y  $n$  son los grados de la superficie para cada una de las coordenadas paramétricas  $u$  y  $v$ , respectivamente, y los puntos de control  $\vec{b}_{ij}$  por extensión al caso bidimensional forman la *malla* o *red* de control de la superficie. Análogamente al caso unidimensional, la superficie se encuentra encerrada por la envolvente convexa de la malla de control (también denominada *casco convexo* o *convex hull* en terminología anglosajona), asegurando la no existencia de oscilaciones fuera de la misma. De la misma manera se mantiene la invarianza de la superficie frente a transformaciones afines. Puede destacarse también que en los cuatro vértices de la superficie los puntos de control coinciden con los vértices de la propia

superficie, y que en dichos puntos las componentes en  $u$  y en  $v$  de los vectores tangentes a la superficie vienen determinados por la unión de cada vértice con los puntos de control más cercanos en las propias variables  $u$  y  $v$ . En la figura A.2 se muestra el esquema geométrico correspondiente a una superficie racional de Bezier.

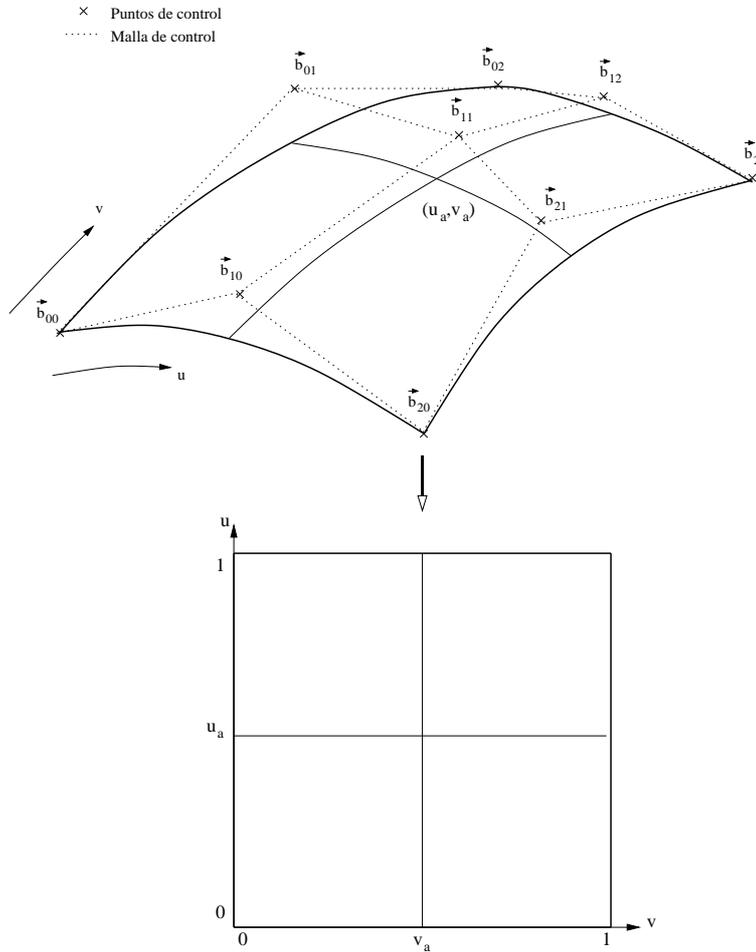


Figura A.2: Superficie de Bezier, malla de control y equivalencia entre el dominio real y el dominio paramétrico.

### A.3 Curvas y Superficies B-Spline

Una curva B-Spline [47, 134, 145–148] es una función paramétrica que, al igual que en el caso de las curvas de Bezier, puede expresarse por medio de una expansión con una serie de funciones denominadas *bases B-Spline* de la siguiente forma:

$$\vec{c}(t) = \sum_{i=0}^n \vec{d}_i N_i^k(t), \quad 2 \leq k \leq n + 1 \quad (\text{A.9})$$

donde el polígono de control está dado por los puntos  $\vec{d}_i$  y posee las mismas características que su homólogo en las superficies de Bezier,  $k$  es el *grado* de la curva, que como se verá más adelante está ligado a otros parámetros de la misma, y  $N_i^k(t)$  son las bases B-Spline, expresadas de forma recursiva según la siguiente fórmula:

$$N_i^k(t) = \frac{(t - t_i)N_i^{k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(t_{i+k} - t)N_{i-1}^{k-1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}} \quad (\text{A.10})$$

cuando en el proceso recursivo aparece el valor del índice  $k$  igual a uno, se hace:

$$N_i^1(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

los valores  $t_i$  que aparecen en A.10 conforman un conjunto de puntos conocido como *vector de nudos*. Dicho vector es una sucesión creciente de números reales dentro del segmento paramétrico (generalmente  $[0, 1]$ ). La *multiplicidad de un nudo* es el número de veces que aparece repetido en el vector de nudos. La distribución del vector de nudos determina las relaciones de continuidad a lo largo de la curva, de forma que la multiplicidad de un determinado nudo tiene influencia sobre el tipo de continuidad de la curva en el punto que se corresponde con el valor paramétrico del nudo. Si para un nudo dado su multiplicidad es  $m$  y el orden de la curva es  $x$ , entonces se puede asegurar que en el punto al que está referido el nudo la curva tiene continuidad  $C^{x-m}$ . Entre dos valores del vector de nudos la curva es continua en todas sus derivadas.

Cuando los nudos forman una sucesión de valores equiespaciados se dice que el vector de nudos es *uniforme*. En el caso de que en los extremos del dominio paramétrico la multiplicidad de los nudos sea igual al orden de la curva se dice que el vector de nudos es *abierto*. De esta manera, el vector de nudos de una curva abierta y no uniforme (como es el caso de las curvas NURBS), de orden  $k + 1$  y con  $n + 1$  puntos de control, en un caso general debe tener la siguiente forma:

$$[0 = t_1 = t_2 = \dots t_k = t_{k+1} < t_{k+2} \leq t_{k+3} \dots \leq t_{n+1} < t_{n+2} = \dots = t_{n+k+2} = 1] \quad (\text{A.12})$$

Las bases B-Spline poseen además las siguientes propiedades:

$$\sum_{i=0}^n N_i^k(t) = 1 \quad (\text{A.13})$$

$$N_i^k(t) \geq 0 \quad (\text{A.14})$$

En una curva B-Spline se mantiene la invarianza ante transformaciones afines. Además, en una curva B-Spline se debe cumplir la siguiente relación entre el grado  $k$  de la curva, el número de puntos de control  $n + 1$  y el número de nudos  $l$ :

$$l = (n + 1) + (k + 1) \quad (\text{A.15})$$

Una propiedad muy importante de estas curvas que no es compartida por las curvas de Bezier es que la modificación de uno de los puntos de control afecta únicamente a la zona que se encuentra en la cercanía del mismo, sin extenderse al resto de la curva. En una curva de Bezier la modificación de dicho punto altera las características de toda la curva, lo cual puede suponer un grave inconveniente.

Es posible introducir el concepto de *curvas B-Spline racionales* [149] incluyendo un conjunto de pesos asociados a los puntos de control, de una manera idéntica a la expuesta en el caso de las curvas de Bezier. Todas las características ya expuestas previamente se siguen manteniendo para este tipo de curvas. La expresión general de una curva racional B-Spline viene dada como:

$$\vec{c}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \vec{d}_i N_i^k(t)}{\sum_{i=0}^n w_i N_i^k(t)}, \quad 2 \leq k \leq n + 1 \quad (\text{A.16})$$

De igual forma es inmediato introducir el concepto de *superficie racional B-Spline*, considerando que, al añadir una nueva dimensión espacial, cada punto de la curva B-Spline original se mueve a través de otra curva. La expresión matemática de la superficie puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\vec{r}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{ij} \vec{d}_{ij} N_i^k(u) N_j^l(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{ij} N_i^k(u) N_j^l(v)}, \quad 2 \leq k \leq m+1, \quad 2 \leq l \leq n+1 \quad (\text{A.17})$$

donde  $k$  y  $l$  son los grados de la superficie para cada una de las coordenadas paramétricas, y  $N_i^k(u)$  y  $N_j^l(v)$  son las bases vistas en (A.10) y (A.11). La superficie está contenida en la envolvente convexa de la malla de control, y los cuatro vértices de la misma coinciden con los puntos de control de los extremos en ambas coordenadas paramétricas. En el caso de superficies se define un vector de nudos en cada coordenada paramétrica. Las superficies NURBS son aquellas con los vectores de nudos abiertos y no uniformes, de la siguiente forma:

$$[0 = u_1 = u_2 = \dots u_k = u_{k+1} < u_{k+2} \leq u_{k+3} \dots \leq u_{m+1} < u_{m+2} = \dots = u_{m+k+2} = 1] \quad (\text{A.18})$$

$$[0 = v_1 = v_2 = \dots v_l = v_{l+1} < v_{l+2} \leq v_{l+3} \dots \leq v_{n+1} < v_{n+2} = \dots = v_{n+l+2} = 1] \quad (\text{A.19})$$

### A.3.1 Curvas y Superficies B-Spline como Conexión de Curvas y Superficies de Bezier

La descripción geométrica de modelos de objetos reales dentro del mundo industrial y académico se lleva a cabo mediante estándares que contemplan la manipulación de superficies NURBS. Se ha comentado previamente la ventaja de poseer una zona limitada de influencia de cada punto de control respecto a los parches de Bezier, a la que hay que añadir el hecho de que para la representación de curvas o superficies complejas

el grado necesario de una curva o superficie de Bezier para su descripción resulta ser excesivamente alto, complicando su tratamiento posterior en aplicaciones prácticas. La utilización de curvas o superficies NURBS a tal efecto mitiga dicho problema, ya que se puede identificar como la unión de curvas o superficies de Bezier de grados inferiores.

Pese a las ventajas enunciadas en el párrafo anterior, los parches NURBS adolecen de presentar inestabilidades numéricas al ser interrogados para extraer parámetros geométricos. Por este motivo, un procedimiento común consiste en realizar una descomposición de la superficie NURBS en parches racionales de Bezier y trabajar con ellos, aprovechando que las bases de Bernstein son más estables y sencillas de evaluar que las bases B-Spline, y facilitando de esta forma el cálculo de puntos y derivadas paramétricas.

Carl De Boor propuso en 1972 un algoritmo que permite la inserción de nudos para la evaluación de puntos en superficies B-Spline [150]. El procedimiento consiste en la inclusión de un nuevo elemento en el vector de nudos (o en el aumento de la multiplicidad de uno ya existente), sin que la curva o superficie se vea alterada por ello. Tomando como ejemplo una curva, al realizar la operación  $k - 1$  puntos de control son reemplazados por  $k$  nuevos puntos, siendo  $k$  el orden de la curva. Si se repite este procedimiento se sumarán tantos puntos de control como nudos insertados. Para realizar la evaluación de un punto sobre la curva basta con insertar repetidamente un nudo cuyo valor sea igual al de la coordenada paramétrica donde se desea calcular el punto, hasta que su multiplicidad sea igual al grado de la curva. En la nueva situación, el último punto de control obtenido es un punto situado sobre la curva, cuya coordenada paramétrica es la del nudo insertado.

A partir de estos resultados, Boehm desarrolló en 1981 un algoritmo, conocido como *algoritmo de Cox-de Boor*, que describe a una curva B-Spline como un conjunto de curvas de Bezier [151–153]. Para ello se emplea el hecho de que si la multiplicidad de un nudo sobre la curva B-Spline es igual al grado de la misma, sus puntos de control coinciden con los de un conjunto de curvas de Bezier cuya unión forma la curva original. El grado de las curvas de Bezier coincide con el de la curva B-Spline, y cada una de ellas está asociada a un intervalo en el vector de nudos. Por tanto, para obtener la descripción de una curva B-Spline en términos de curvas de Bezier, basta con insertar nudos sobre los originales de forma que sus multiplicidades sean iguales al grado de la curva. La ampliación de este algoritmo al caso de superficies es inmediata, insertando

nudos en los vectores de una u otra coordenada paramétrica hasta que todos tengan multiplicidad igual al grado. De esta forma se van generando nuevas filas o columnas en la matriz de puntos de control. En la figura A.3 se muestra un ejemplo en el que se aplica el algoritmo de inserción de nudos a la superficie NURBS original de la figura A.3(a), de orden 3 en ambas coordenadas paramétricas. En la figura A.3(b) se muestra el esquema tras haber realizado el algoritmo de inserción de nudos en el vector de nudos de la coordenada  $u$ , de manera que la multiplicidad en el punto intermedio del segmento es igual al grado (2). Como resultado de ello, el número de puntos de control aumenta de forma que, sumado al orden de la curva en  $u$ , el resultado sea igual al número de nudos. Una vez hecho esto se obtienen los dos parches de Bezier resultantes, como se indica en la figura A.3(c).

## A.4 Tratamiento Geométrico

Son muy numerosas las aplicaciones de cálculo en las que, además de una representación precisa de los objetos bajo análisis, se requiere la posibilidad de obtener los vectores tangentes y normales a las superficies en diversos puntos, así como las derivadas paramétricas de diverso orden. En electromagnetismo computacional son muchos los trabajos que han empleado las superficies NURBS con este propósito [7, 43, 45, 117, 118, 154] obteniendo resultados satisfactorios.

Se ha mencionado en la sección A.3.1 la conveniencia de la utilización de una descomposición de la superficie en parches de Bezier para su manipulación. Por tanto, el problema del cálculo de derivadas paramétricas en la superficie B-Spline se reduce al cálculo de las mismas sobre parches de Bezier y a la identificación de puntos entre estos parches y el original.

La forma general de la expresión para evaluar sobre un punto  $(u_n, v_n)$  la derivada de orden  $s$  con respecto a  $u$  y de orden  $t$  con respecto a  $v$  es la siguiente:

$$\vec{r}_{s,t}(u, v) = \frac{\partial^{s+t} \vec{r}(u, v)}{\partial u^s \partial v^t} \quad (\text{A.20})$$

El punto de partida es la descomposición de la superficie NURBS en parches de Bezier, según el método descrito en la sección A.3.1. Posteriormente se debe identificar el parche de Bezier en el que está situado el punto de la superficie a analizar, correspondiente a las coordenadas  $(u_n, v_n)$  de la superficie original. Para ello se debe tener en cuenta que los parches de Bezier están asociados con los intervalos en los vectores de nodos de la superficie NURBS, por lo que analizando dichos vectores se localiza el intervalo en ambos donde situar el punto. A partir de el intervalo se determina de forma inmediata el parche de Bezier sobre el que efectuar los cálculos, además de recalcular las coordenadas paramétricas del punto dentro del nuevo parche según la expresión:

$$u_b = \frac{u_n - u_i}{u_{i+1} - u_i}, \quad v_b = \frac{v_n - v_j}{v_{j+1} - v_j} \quad (\text{A.21})$$

donde  $(u_b, v_b)$  son las coordenadas del punto en el parche de Bezier correspondiente,  $(u_i, u_{i+1})$  son los límites del intervalo en el vector de nodos de la coordenada  $u$  en el que está situado el parche de Bezier, y  $(v_i, v_{i+1})$  son los límites del intervalo en el vector de nodos de  $v$ . Debido a este cambio de las variables paramétricas, para obtener el valor de la derivada sobre el parche NURBS original se debe aplicar la regla de la cadena y la derivada sobre el parche de Bezier:

$$\vec{r}_{s,t}(u, v) = \frac{\partial^{s+t} \vec{r}(u, v)}{\partial u^s \partial v^t} \Big|_{u_n, v_n} = \frac{\partial^{s+t} \vec{r}_{Bezier}(u', v')}{\partial u'^s \partial v'^t} \Big|_{u_b, v_b} \frac{1}{(u_{i+1} - u_i)^r (v_{j+1} - v_j)^t} \quad (\text{A.22})$$

donde  $u'$  y  $v'$  representan las coordenadas paramétricas sobre el parche de Bezier, primadas para diferenciarlas de las coordenadas originales sobre el parche NURBS (sin primar), y  $\vec{r}_{Bezier}(u', v')$  la función que obtiene los puntos del mismo. Para obtener el valor de las derivadas paramétricas sobre el parche de Bezier conviene separar el numerador y el denominador en la expresión racional (A.8), de la siguiente manera:

$$\vec{r}(u', v') = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{ij} \vec{b}_{ij} B_i^m(u') B_j^n(v')}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{ij} B_i^m(u') B_j^n(v')} = \frac{\vec{P}(u', v')}{W(u', v')} \quad (\text{A.23})$$

de esta manera, la derivada se calcula calculando por separado las derivadas de numerador y denominador, y aplicando la fórmula de derivación:

$$\frac{\partial \vec{r}'(u', v')}{\partial \alpha} = \vec{r}'_{\alpha}(u', v') = \frac{\frac{\partial \vec{P}(u', v')}{\partial \alpha} W(u', v') - \frac{\partial W(u', v')}{\partial \alpha} \vec{P}(u', v')}{W^2(u', v')} \quad (\text{A.24})$$

siendo  $\alpha = u'$  o  $v'$ , dependiendo del tipo de derivada a obtener. Las derivadas de las funciones  $\vec{P}(u', v')$  y  $W(u', v')$  son:

$$\frac{\partial \vec{P}(u', v')}{\partial u'} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{ij} \vec{b}_{ij} B_j^n(v') m [B_{i-1}^{m-1}(u') - B_i^{m-1}(u')] \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{\partial \vec{P}(u', v')}{\partial v'} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{ij} \vec{b}_{ij} B_i^m(u') n [B_{j-1}^{n-1}(v') - B_j^{n-1}(v')]$$

$$\frac{\partial W(u', v')}{\partial u'} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{ij} B_j^n(v') m [B_{i-1}^{m-1}(u') - B_i^{m-1}(u')] \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{\partial W(u', v')}{\partial v'} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{ij} B_i^m(u') n [B_{j-1}^{n-1}(v') - B_j^{n-1}(v')]$$

para el cálculo de derivadas de orden superior, se sigue un procedimiento similar, derivando el cociente (A.23) repetidas veces en una y otra componente paramétrica. Utilizando la fórmula así obtenida, el valor de la derivada sobre el parche de Bezier viene dado por:

$$\begin{aligned} \vec{r}'_{s,t}(u', v') = \frac{1}{W(u', v')} & \left\{ \vec{P}_{s,t}(u', v') - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \binom{s}{i} \binom{t}{j} W_{i,j}(u', v') \vec{r}'_{s-i,t-j}(u', v') + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^s \binom{s}{i} W_{i,0}(u', v') \vec{r}'_{s-i,t}(u', v') - \sum_{j=1}^t \binom{t}{j} W_{0,j}(u', v') \vec{r}'_{s,t-j}(u', v') \right\} \quad (\text{A.27}) \end{aligned}$$

donde:

$$\vec{r}_{s,t}(u', v') = \frac{\partial^{s+t} \vec{r}'(u', v')}{\partial (u')^s \partial (v')^t} \quad (\text{A.28})$$

Las derivadas de orden arbitrario del numerador y denominador en (A.23) son:

$$\vec{P}_{i,j}(u', v') = \frac{m!n!}{(m-i)!(n-j)!} \sum_{k=0}^{n-i} \sum_{l=0}^{n-j} \Delta^{i,j} \vec{p}_{k,l} B_k^{m-i}(u') B_l^{n-j}(v') \quad (\text{A.29})$$

$$W_{i,j}(u', v') = \frac{m!n!}{(m-i)!(n-j)!} \sum_{k=0}^{n-i} \sum_{l=0}^{n-j} \Delta^{i,j} w_{k,l} B_k^{m-i}(u') B_l^{n-j}(v') \quad (\text{A.30})$$

donde  $m$  y  $n$  son, respectivamente, los grados de la superficie en  $u$  y  $v$ ,  $w_{k,l}$  hace referencia al peso asociado a cada uno de ellos y  $B_i^n(t)$  hace alusión a las bases o polinomios de Bernstein, definidos por la expresión (A.2). El valor  $\vec{p}_{k,l}$  contiene al producto de cada punto de control por su peso:

$$\vec{p}_{kl} = \vec{b}_{kl} w_{kl} \quad (\text{A.31})$$

El operador  $\Delta^{i,j}$  se calcula recursivamente de la siguiente manera [155]:

$$\Delta^{i,j} \vec{p}_{k,l} = \begin{cases} \Delta^{i-1,j} \vec{p}_{k+1,l} - \Delta^{i-1,j} \vec{p}_{k,l}, & \text{si } i > 0 \\ \Delta^{i,j-1} \vec{p}_{k,l+1} - \Delta^{i,j-1} \vec{p}_{k,l}, & \text{si } j > 0 \end{cases}$$

$$\Delta^{i,j} w_{k,l} = \begin{cases} \Delta^{i-1,j} w_{k+1,l} - \Delta^{i-1,j} w_{k,l}, & \text{si } i > 0 \\ \Delta^{i,j-1} w_{k,l+1} - \Delta^{i,j-1} w_{k,l}, & \text{si } j > 0 \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

$$\Delta^{0,0} \vec{p}_{k,l} = \vec{p}_{k,l}, \quad \Delta^{0,0} w_{k,l} = w_{k,l}$$

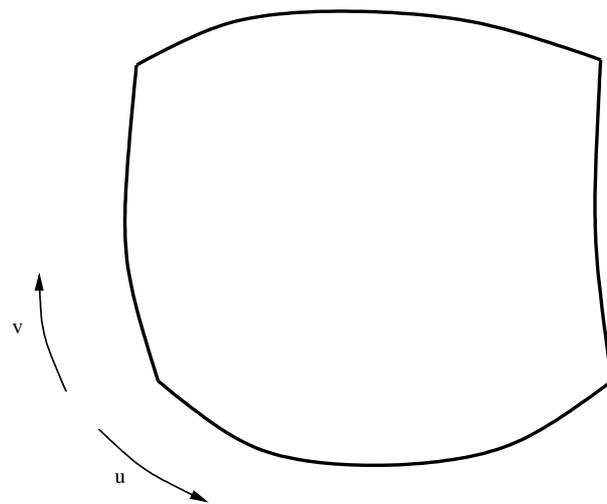
donde se han separado los subíndices mediante comas para clarificar su lectura. Por tanto, después de aplicar la expresión (A.27) al parche de Bezier en el punto reparametrizado según (A.21) y aplicar (A.22) al resultado, se dispone del valor de la derivada de orden arbitrario en  $u$  y  $v$  del parche B-Spline original. Aparte de la necesidad específica de calcular estos valores en cada aplicación numérica, dentro de la formulación empleada en muchas disciplinas diferentes de la ciencia o la ingeniería es muy común la utilización de vectores tangentes y normales a la superficie en un conjunto de puntos. Los primeros vienen dados directamente por las derivadas paramétricas de orden uno sobre cada coordenada, mientras que el vector unitario normal a la superficie en cada punto viene dado como:

$$\hat{n}(u, v) = \frac{\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)}{|\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)|} \quad (\text{A.33})$$

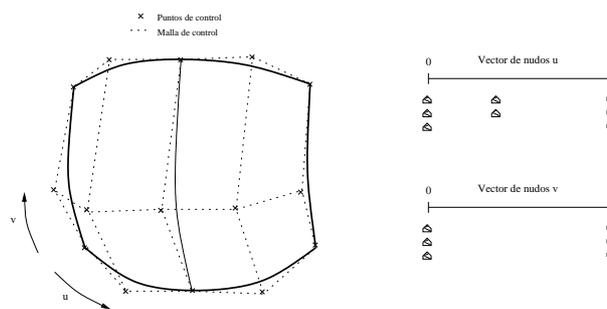
donde  $\vec{r}_u(u, v)$  y  $\vec{r}_v(u, v)$  son las derivadas primeras en ambas coordenadas paramétricas. Dentro del electromagnetismo computacional, el vector normal es ampliamente utilizado en los métodos de alta frecuencia para establecer la cara activa de cada parche y desarrollar métodos de cálculo de ocultación de superficies por iluminación o por eclipse. En las operaciones de integración numérica de funciones definidas sobre parches NURBS, ampliamente utilizadas en esta tesis, también es necesario utilizar el elemento diferencial de superficie en coordenadas paramétricas:

$$dS(u, v) = |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| \, dudv \quad (\text{A.34})$$

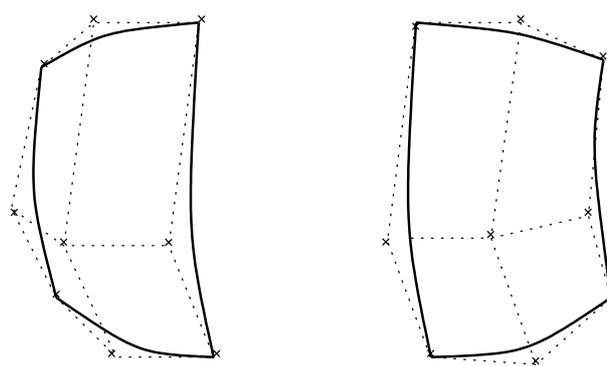
Como caso particular a tener en consideración, se puede citar a las superficies en las que las funciones  $\hat{n}(u, v)$  y  $dS(u, v)$  no están bien definidas en algunos de los puntos que limitan el dominio paramétrico, debido a que algún segmento suyo está referido a un sólo punto en el espacio real. Este caso se da cuando  $\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v) = 0$  y el parche se dice degenerado en el punto correspondiente. En tales ocasiones se suele emplear un tratamiento numérico especial, evitando trabajar en el espacio paramétrico o evaluando los parámetros geométricos a una distancia  $\delta$  del punto degenerado.



(a)



(b)



(c)

Figura A.3: Ejemplo de aplicación del algoritmo de inserción de nudos para la división de una superficie NURBS en dos parches de Bezier. (a): Geometría original; (b): Distribución de puntos de control y nudos tras haber aplicado el algoritmo de inserción; (c): Parches de Bezier resultantes.



# Apéndice B

## Métodos para la Resolución de Problemas de Mínimos Cuadrados

### B.1 Introducción

La representación de corrientes (y campos) a lo largo de este trabajo se basa siempre en la descomposición de las funciones vectoriales en forma de modos, entendidos tales como funciones exponenciales complejas con términos de amplitud y fase que varían suavemente sobre el dominio en que están definidas. Esta forma de definir dichas funciones es la que permite un almacenamiento con una cantidad reducida de información y el cálculo de campos dispersados y corrientes inducidas de forma muy eficiente.

Se ha visto ya que para operar con estas funciones se emplea una expresión polinomial de las mismas. Para la obtención de los polinomios se puede recurrir a técnicas interpolatorias o de aproximación, entendiendo que las técnicas interpolatorias hacen que las funciones polinómicas coincidan exactamente con los valores de las funciones en los puntos de muestreo, aunque no garantizan su comportamiento en el resto del dominio. Las técnicas de aproximación tratan de reducir la norma del error cometido al expresar polinómicamente las funciones.

En el presente trabajo se ha empleado una aproximación polinomial que minimiza

el error cuadrático medio entre los polinomios y la función que pretenden representar. En esta sección se abordará el método utilizado para calcular sus coeficientes, teniendo en cuenta las propiedades de las matrices involucradas.

## B.2 Planteamiento del Problema

El objetivo de un problema genérico de mínimos cuadrados consiste en la aproximación de una serie de muestras correladas entre sí mediante una función definida por una matriz de coeficientes:

$$g(x) \approx a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \cdots + a_n\phi_n \quad (\text{B.1})$$

En el caso de aproximaciones polinomiales se suele tomar  $\phi_i(x) = x^{i-1}$ ,  $1 \leq i \leq n$ . En ese caso se dice que el grado del polinomio es  $n - 1$ . El objetivo de la aproximación consiste en minimizar la norma  $\|Ax - b\|^2$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^3 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ g(x_3) \\ \vdots \\ g(x_m) \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Donde la matriz  $A$ , que contiene información acerca de los puntos en los que se muestrea la función a aproximar, se supondrá de rango máximo y los vectores columna  $x$  y  $b$  representan los coeficientes incógnita y las muestras, respectivamente.

El sistema de ecuaciones  $Ax = b$  puede tener muchas soluciones. Para minimizar la norma del error cometido en la aproximación es necesaria la resolución del sistema de ecuaciones dado por:

$$A^T Ax = A^T b \quad (\text{B.3})$$

La expresión (B.3) se conoce como *sistema de ecuaciones normales*, y su resolución ofrece los coeficientes de aproximación.

Generalmente, la matriz  $A$  suele estar mal condicionada en este tipo de problemas, por lo que existe el riesgo de que para matrices relativamente grandes existan problemas de estabilidad, por lo cual es frecuente la utilización de métodos que den robustez numérica en lugar de optar por la resolución de las ecuaciones normales [120]. Generalmente se opta por una descomposición  $QR$  de la matriz  $A$  previa al planteamiento de las ecuaciones normales.

Sin embargo, estos métodos son más lentos que una resolución directa, y en el caso de tener que aproximar repetidas veces distintas funciones, pueden suponer una carga computacional. En el ámbito en que se desarrolla este trabajo no se emplean polinomios de grado superior a 4, por lo que la matriz  $A$  tiene un tamaño de  $25 \times 25$  elementos (se debe tener en cuenta que hay que considerar polinomios bidimensionales).

### B.3 Resolución Directa de las Ecuaciones Normales

El método empleado para la aproximación de funciones en este trabajo está basado en la resolución del sistema dado por (B.3) de forma directa, dado que se manejan matrices de datos pequeñas que no originan problemas de estabilidad aunque el condicionamiento no sea bueno.

Es conveniente considerar que la matriz  $A^T A$  es una matriz simétrica y definida positiva en el caso de elementos reales (hermitiana y definida positiva para elementos complejos), y por tanto, para la resolución del sistema de ecuaciones, es conveniente realizar previamente una factorización de *Cholesky* de la misma, de forma que quede expresada por el producto de una matriz triangular por su traspuesta.

En las pruebas realizadas con este tipo de aproximación se ha comprobado que

el número de muestras no influye en la estabilidad, mientras que sí lo hace el grado utilizado para los polinomios. Se han utilizado coeficientes en doble precisión para garantizar un buen comportamiento. Asimismo, se ha comprobado que a partir de grado 7 u 8 en  $u$  y  $v$  empiezan a aparecer oscilaciones que falsean la aproximación de las funciones deseadas, por lo que es preferible una división de la superficie en regiones paramétricas más pequeñas y la utilización de polinomios de grado menor.

El proceso y coste computacional asociado es:

- Cálculo de  $C = A^T A$  ( $\frac{1}{2}n(n+1)(2m-1)$  flops)
- Factorización de Cholesky  $C = LL^T$  ( $\frac{1}{3}n^3$  flops)
- Cálculo de  $d = A^T b$  ( $2mn$  flops)
- Resolución de  $Lz = d$  por sustitución hacia adelante ( $n^2$  flops)
- Resolución de  $L^T x = z$  por sustitución hacia atrás ( $n^2$  flops)

## B.4 Resolución Mediante la Factorización QR

Para obtener una mayor robustez numérica, y por tanto poder manipular matrices más grandes de datos, se ha de recurrir a técnicas numéricas como la factorización  $QR$  de la matriz  $A$ , siendo  $Q$  una matriz ortogonal y  $R$  triangular superior. Reescribiendo las ecuaciones normales (B.3) tras factorizar la matriz  $A$ , y teniendo en cuenta la ortogonalidad del factor  $Q$  y que la matriz  $R$  no es singular, se tiene el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}
 A^T A &= A^T b \\
 R^T Q^T Q R x &= R^T Q^T b \\
 R^T R x &= R^T Q^T b \\
 R x &= Q^T b
 \end{aligned}
 \tag{B.4}$$

El proceso y coste computacional asociado es:

- Factorización QR de  $A$ :  $A = QR$  ( $2mn^2$  flops)

- 
- Generar el vector  $d = Q^T b$  ( $2mn$  flops)
  - Resolución de  $Rx = d$  por sustitución hacia atrás ( $n^2$  flops)



# Apéndice C

## Método del Gradiente Conjugado para la Minimización de Funciones

Existen diversos métodos aplicables al problema de minimización de funciones de varias variables, con diversas características. Algunos de ellos, como los propuestos por Brent en [156], no requieren el disponer de las expresiones de las derivadas parciales de la función a minimizar. También son ampliamente conocidos el método Quasi-Newton [157] o el Método del Gradiente Conjugado [107]. Este último ha sido el empleado en la presente tesis debido a la combinación de robustez y eficiencia que ofrece.

El objetivo, por tanto, consiste en la minimización de una función  $g$  dependiente de un vector  $n$ -dimensional  $\vec{x}$ . Para ello se utiliza la hipótesis de trabajo de que la función a minimizar puede ser aproximada por un modelo cuadrático, de la siguiente forma:

$$g(\vec{x}) \approx c - \vec{b} \cdot \vec{x} + \frac{\vec{x} \cdot A \cdot \vec{x}}{2} \quad (\text{C.1})$$

En la iteración  $i$  y con una dirección de avance  $\vec{d}_i$  se realiza una búsqueda en línea para averiguar el tamaño del paso  $\alpha_i$  y así determinar el valor de la incógnita en la iteración  $i + 1$ :

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \alpha_i \cdot \vec{d}_i \quad (\text{C.2})$$

La dirección de avance en el paso  $i + 1$  se genera a partir de su valor en la iteración anterior y del valor del gradiente de la función a minimizar, avanzando siempre en una dirección de avance  $\vec{d}$  que es la conjugada a todas las direcciones seguidas con anterioridad:

$$\vec{d}_{i+1} = -\nabla g(\vec{x}_{i+1}) + \beta_i \cdot \vec{d}_i \quad (\text{C.3})$$

Existen diferentes formas de calcular el valor de  $\beta_i$ . Dos expresiones típicamente empleadas para ello son:

$$\text{Polak-Ribiere:} \quad \beta_i = \frac{[\nabla g(\vec{x}_{i+1}) - \nabla g(\vec{x}_i)]^T \nabla g(\vec{x}_{i+1})}{\nabla g(\vec{x}_i)^T \nabla g(\vec{x}_i)} \quad (\text{C.4})$$

$$\text{Fletcher-Reeves:} \quad \beta_i = \left[ \frac{\|\nabla g(\vec{x}_{i+1})\|}{\|\nabla g(\vec{x}_i)\|} \right]^2 \quad (\text{C.5})$$

Debido a la popularidad del método, existen numerosas librerías técnicas y científicas que lo incorporan. Uno de los algoritmos numéricos más difundidos basados en el Método del Gradiente Conjugado es el denominado "frprmn" [121], utilizado en la presente tesis.

# Referencias

- [1] E. F. Knott, “A progression of high frequency rcs prediction techniques”, *Proceedings of the IEEE*, vol. 73, no. 2, pp. 252–264, February 1985.
- [2] R. Mittra, “A look at some challenging problems in computational electromagnetics”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 46, no. 5, pp. 18–32, October 2004.
- [3] M. Domingo, F. Rivas, J. Pérez, R. P. Torres, M. F. Cátedra, “Computation of the rcs of complex bodies modeled using nurbs surfaces”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 37, no. 6, pp. 36–47, December 1995.
- [4] M. F. Cátedra, J. Pérez, F. Sáez de Adana, O. Gutiérrez, “Efficient ray-tracing techniques for three-dimensional analyses of propagation in mobile communications: Application to picocell and microcell scenarios”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 40, no. 2, pp. 15–28, April 1998.
- [5] J. Pérez, F. Sáez de Adana, O. Gutierrez, I. González, M. F. Cátedra, I. Montiel, J. Guzman, “Fasant: Fast computer tool for the analysis of on-board antennas”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 49, no. 2, pp. 94–98, April 1999.
- [6] F. Sáez de Adana, O. Gutiérrez, I. González, M. F. Cátedra, “Faspro: Fast computer tool for the analysis of propagation in mobile communications”, in *IEEE International Conference on Industrial Informatics*, August 2005, pp. 257–261.
- [7] L. Valle, F. Rivas, M. F. Cátedra, “Combining the moment method with geometrical modelling by nurbs surfaces and bezier patches”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 42, no. 3, pp. 373–381, March 1994.

- [8] M. F. Cátedra, E. Gago, L. Nuño, “A numerical scheme to obtain the rcs of three-dimensional bodies of resonant size using the conjugate gradient method and the fast fourier transform”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 37, no. 5, pp. 528–537, May 1989.
- [9] M. F. Cátedra, E. Gago, “Spectral domain analysis of conducting patches of arbitrary geometry in multilayer media using the cg-fft method”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 38, no. 10, pp. 1530–1536, October 1990.
- [10] G. T. Ruck, D. E. Barrick, W. D. Stuart, C. K. Krichbaum, *Radar Cross Section Handbook, Vol 1*, Plenum Press, 1970.
- [11] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Method*, IEEE Press, 1993.
- [12] M. F. Cátedra, R. Torres, J. Basterrechea, E. Gago, *The CG-FFT Method: Application of Signal Processing Techniques to Electromagnetics*, Artech House Publishers, 1995.
- [13] J. N. Reddy, *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill, 1984.
- [14] J. M. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, John Wiley and Sons, 1993.
- [15] K. S. Kunz, R. J. Luebbers, *The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics*, CRC Press, 1993.
- [16] A. D. McNamara, C. W. I. Pistorius, J. A. G. Malherbe, *Introduction to the Uniform Geometrical Theory of Diffraction*, Artech House, 1990.
- [17] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, John Wiley & Sons, 1989.
- [18] E. F. Knott, J. F. Shaeffer, M. T. Tuley, *Radar Cross Section*, Artech House, 2nd edition, 1993.
- [19] P. Ya. Ufimtsev, “Method of edge waves in the physical theory of diffraction”, 1971, Air Force System Command, Foreign Tech. Div. Document ID No. FTD-HC-23-259-71.
- [20] G. A. Thiele, T. H. Newhouse, “A hybrid technique for combining moments methods with the geometrical theory of diffraction”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 23, no. 1, pp. 62–69, January 1975.

- [21] L. W. Henderson, G. A. Thiele, "A hybrid mm-geometrical optics technique for the treatment of wire antennas mounted on a curved surface", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 30, no. 6, pp. 1257–1261, November 1982.
- [22] P. R. Rousseau, R. J. Burkholder, "A hybrid approach for calculating the scattering from obstacles within large, open cavities", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 43, no. 10, pp. 1068–1075, October 1995.
- [23] D. B. Reuster, G. A. Thiele, "A field iterative method for computing the scattered electric fields at the apertures of large perfectly conducting cavities", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 43, no. 3, pp. 286–290, March 1995.
- [24] F. Obelleiro-Basteiro, J. L. Rodríguez, R. J. Burkholder, "An iterative physical optics approach for analyzing the electromagnetic scattering by large open-ended cavities", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 43, no. 4, pp. 356–361, April 1995.
- [25] L. N. Medgyesi-Mitschang, D. Wang, "Hybrid solutions for large-impedance coated bodies of revolution", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 34, no. 11, pp. 1319–1329, November 1986.
- [26] W. D. Burnside, C. L. Yu, R. J. Marhefka, "A technique to combine the geometrical theory of diffraction and the moment method", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 23, no. 4, pp. 551–558, July 1975.
- [27] U. Jakobus, F. M. Landstorfer, "Improved po-mm hybrid formulation for scattering from three-dimensional perfectly conducting bodies of arbitrary shape", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 43, no. 2, pp. 162–169, February 1995.
- [28] E. P. Ekelman, G. A. Thiele, "A hybrid technique for combining the moment method treatment of wire antennas with the gtd for curved surfaces", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 28, no. 6, pp. 831–839, November 1980.
- [29] S. A. Davidson, G. A. Thiele, "A hybrid method of moments-gtd technique for computing electromagnetic coupling between two monopole antennas on a large cylindrical surface", *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 26, no. 2, pp. 90–97, May 1984.

- [30] T. K. Sarkar, “The conjugate gradient method as applied to electromagnetic field problems”, *Antennas and Propagation Society Newsletter*, vol. 28, no. 4, pp. 4–14, August 1986.
- [31] C. F. Smith, A. F. Peterson, R. Mittra, “The biconjugate gradient method for electromagnetic scattering”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 38, no. 6, pp. 938–940, June 1990.
- [32] E. Topsakal, R. Kindt, K. Sertel, J. Volakis, “Evaluation of the bicgstab(l) algorithm for the finite-element/boundary-integral method”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 43, no. 6, pp. 124–131, December 2001.
- [33] W. C. Chew, J. Jin, E. Michielssen, J. Song, Ed., *Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics*, Artech House Inc., 2001.
- [34] C. Allen, “Numerical integration methods for antenna pattern calculations”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 7, no. 5, pp. 387–401, December 1959.
- [35] E. Miller, G. Burke, “Numerical integration methods”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 17, no. 5, pp. 669–672, September 1969.
- [36] H. Lessow, W. Rusch, H. Schjaer-Jacobsen, “On numerical evaluation of two-dimensional phase integrals”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 23, no. 5, pp. 714–717, September 1975.
- [37] G. R. Cowper, “Gaussian quadrature formulas for triangles”, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 7, pp. 405–408, 1973.
- [38] K. Hongo, H. Matsuura, “Simplified technique for evaluating the radiation integrals”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 34, no. 5, pp. 732–737, May 1986.
- [39] J. S. Savage, A. F. Peterson, “Quadrature rules for numerical integration over triangles and tetrahedra”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 38, no. 3, pp. 100–102, June 1996.
- [40] R. J. Burkholder, Teh-Hong Lee, “Adaptative sampling for fast physical optics numerical integration”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 53, no. 5, pp. 1843–1845, May 2005.

- [41] D. S. Jones, M. Kline, “Asymptotic expansion of multiple integrals and the method of stationary phase”, *Journal of Mathematical Physics*, vol. 37, pp. 1–28, 1958.
- [42] J. C. Cooke, “Stationary phase in two dimensions”, *IMA Journal of Applied Mathematics*, vol. 29, no. 1, pp. 25–37, 1982.
- [43] J. Pérez Arriaga, “Aplicación de la Óptica física al cálculo de la rcs de cuerpos de geometría compleja modelados mediante parches nurbs”, 1994, Tesis Doctoral. Universidad de Cantabria.
- [44] J. Pérez, M. F. Cátedra, “Rcs of electrically large targets modeled by nurbs surfaces”, *Electronics Letters*, vol. 28, no. 12, pp. 1119–1121, June 1992.
- [45] J. Pérez, M. F. Cátedra, “Application of physical optics to the rcs computation of bodies modeled with nurbs surfaces”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 42, no. 10, pp. 1404–1411, October 1994.
- [46] F. Sáez de Adana, I. González, O. Gutierrez, M. F. Cátedra, “Asymptotic method for analysis of rcs of arbitrary targets composed by dielectric and/or magnetic materials”, *IEE Proceedings on Radar, Sonar and Navigation*, vol. 150, no. 5, pp. 375–378, October 2003.
- [47] G. Farin, *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A practical Guide*, Academic Press, 1998.
- [48] M. F. Cátedra, O. M. Conde, J. Pérez, “Asymptotic evaluation of physical optics for the analysis of on-board antennas”, *Electronics Letters*, vol. 34, no. 5, pp. 418–419, March 1998.
- [49] O. M. Conde, J. Pérez, M. F. Cátedra, “Stationary phase method application for the analysis of radiation of complex 3-d conducting structures”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 49, no. 5, pp. 724–731, May 2001.
- [50] F. Sáez de Adana, I. G. Diego, O. G. Blanco, P. Lozano, M. F. Cátedra, “Method based on physical optics for the computation of the radar cross section including diffraction and double effects of metallic and absorbing bodies modeled with parametric surfaces”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 52, no. 12, pp. 3295–3303, December 2004.
- [51] F. Sáez de Adana, L. Lozano, S. Nieves, M. F. Cátedra, “Application of stationary phase method for the analysis of radiation due to double interactions between

- 3-d conducting surfaces”, in *Antennas and Propagation Society International Symposium*, June 2002, pp. 324–327.
- [52] A. C. Ludwig, “Computation of radiation patterns involving numerical double integration”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 16, no. 6, pp. 767–769, November 1968.
- [53] W. B. Gordon, “Far-field approximations to the kirchhoff-helmholtz representations of scattered fields”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 23, no. 4, pp. 590–592, July 1975.
- [54] G. D. Crabtree, “A numerical quadrature technique for physical optics scattering analysis”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 27, no. 5, pp. 4291–4294, September 1991.
- [55] M. F. Cátedra, C. Delgado, S. Luceri, F. Sáez de Adana, F. Rivas, “Efficient analysis of electromagnetic problems involving large bodies using current modes”, in *Antennas and Propagation Society International Symposium*, Columbus, Ohio, USA, June 2003.
- [56] M. F. Cátedra, C. Delgado, S. Luceri, F. Sáez de Adana, “Efficient procedure for computing fields created by current modes”, *Electronics Letters*, pp. 763–765, January 2003.
- [57] M. F. Cátedra, C. Delgado, O. Gutiérrez, F. Sáez de Adana, “Analysis of radiation and scattering from large bodies using current modes”, in *International Symposium on Electromagnetic Theory*, Pisa, Italy, May 2004.
- [58] M. F. Cátedra, C. Delgado, S. Luceri, F. Sáez de Adana, “Técnica eficiente para el análisis de los campos mediante modos de corriente”, in *XVIII Simposium Nacional de la URSI*, Barcelona, Spain, September 2004.
- [59] H. Ling, S. W. Lee, R. C. Chou, “High-frequency rcs of open cavities with rectangular and circular cross sections”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 37, no. 5, pp. 648–654, May 1989.
- [60] H. Ling, R. C. Chou, S. W. Lee, “Shooting and bouncing rays: Calculating the rcs of an arbitrarily shaped cavity”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 37, no. 2, pp. 194–205, February 1989.

- [61] J. M. Jin, J. L. Volakis, "A finite-element-boundary integral formulation for scattering by three-dimensional cavity-backed apertures", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 39, no. 1, pp. 97–104, January 1991.
- [62] J. Liu, J. M. Jin, "Scattering analysis of a large body with deep cavities", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 51, no. 6, pp. 1157–1167, June 2003.
- [63] T. M. Wang, H. Ling, "Electromagnetic scattering from three-dimensional cavities via a connection scheme", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 39, no. 10, pp. 1505–1513, October 1991.
- [64] J. M. Rius, A. Lozano, L. Jofre, A. Cardama, "Spectral iterative algorithm for rcs computation in electrically large or intermediate perfectly conducting cavities", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 42, no. 6, pp. 790–797, June 1994.
- [65] M. F. Cátedra, C. Delgado, S. Luceri, O. Gutiérrez, F. Sáez de Adana, "Physical optics analysis of multiple interactions in large scatters using current modes", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 54, no. 3, pp. 985–994, March 2006.
- [66] V. V. S. Prakash, R. Mittra, "Characteristic basis function method: A new technique for efficient solution of method of moments matrix equation", *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 36, no. 2, pp. 95–100, January 2003.
- [67] G. Tiberi, S. Rosace, A. Monorchio, G. Manara, R. Mittra, "Electromagnetic scattering from large faceted conducting bodies by using analytically derived characteristic basis functions", *Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 2, no. 1, pp. 290–293, 2003.
- [68] J. Yeo, S. Köksoy, V. V. S. Prakash, R. Mittra, "Efficient generation of method of moments matrices using the characteristic function method", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 52, no. 12, pp. 3405–3410, December 2004.
- [69] V. V. S. Prakash, Junho Yeo, R. Mittra, "An adaptive algorithm for fast frequency response computation of planar microwave structures", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 52, no. 3, pp. 920–926, March 2004.

- [70] M. F. Cátedra, F. Rivas, L. Valle, “A moment method approach using frequency-independent parametric meshes”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, no. 10, pp. 1567–1568, October 1997.
- [71] A. F. Peterson, S. L. Ray, R. Mittra, *Computational Methods for Electromagnetics*, IEEE Press Series on Electromagnetic Waves, 1998.
- [72] R. F. Harrington, *Time Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, Inc., 1961.
- [73] P. Y. Ufimtsev, “Comments on comparison of three high-frequency diffraction techniques”, *Proceedings of the IEEE*, vol. 63, no. 12, pp. 1734–1737, December 1975.
- [74] J. S. Asvestas, “The physical optics method in electromagnetic scattering”, *Journal of Mathematical Physics*, vol. 21, no. 2, pp. 290–299, February 1980.
- [75] I. J. Gupta, W. D. Burnside, “A physical optics correction for backscattering from curved surfaces”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 35, no. 5, pp. 553–561, May 1975.
- [76] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill Book Company, 1941.
- [77] R. Mittra, *Computer Techniques for Electromagnetics*, Pergamon Press, 1973.
- [78] C. Tai, *Dyadic Green’s Functions in Electromagnetic Theory*, IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory, 2nd edition, 1994.
- [79] P. Pathak, “On the eigenfunction expansion of electromagnetic dyadic green’s functions”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 31, no. 6, pp. 837–846, November 1983.
- [80] A. D. Yaghjian, “Electric dyadic green’s functions in the source region”, *Proceedings of the IEEE*, vol. 68, no. 2, pp. 248–263, February 1980.
- [81] C. Tai, “On the eigenfunction expansion of dyadic green’s functions”, *Proceedings of the IEEE*, vol. 61, no. 4, pp. 480–481, April 1973.
- [82] C. Tai, P. Rozenfeld, “Different representations of dyadic green’s functions for a rectangular cavity”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 24, no. 9, pp. 597–601, September 1976.

- [83] O. Gutierrez, F. Sáez de Adana, F. Rivas, I. González, M. F. Cátedra, “Method to interpolate the induced current with a low amount of sample points by means of bezier surfaces”, *Electronics Letters*, vol. 39, no. 2, pp. 177–178, January 2003.
- [84] M. Abramowitch, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, John Wiley & Sons, 1964.
- [85] P. J. Davis, P. Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration*, Academic Press, 2nd ed. New York, 1990.
- [86] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 2nd ed. Cambridge, England, 1992.
- [87] O. M. Bucci, G. Franceschetti, “On the spatial bandwidth of scattered fields”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 35, no. 12, pp. 1445–1455, December 1987.
- [88] O. M. Bucci, C. Gennarelli, C. Savarese, “Representation of electromagnetic fields over arbitrary surfaces by a finite and nonredundant number of samples”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 46, no. 3, pp. 351–359, March 1998.
- [89] O. M. Bucci, G. D’Elia, *Review of Radio Science 1993-1995*, chapter Advanced Sampling Techniques in Electromagnetics, pp. 177–204, Oxford University Press, 1996.
- [90] C. Herley, P. W. Wong, *Modern Sampling Theory. Mathematics and Applications*, chapter Efficient Minimum Rate Sampling of Signals with Frequency Support over Non-Commesurable Sets, pp. 271–291, Birkhäuser, Boston, 2001.
- [91] K. R. Aberegg, A. F. Peterson, “Application of the integral equation phase method to two-dimensional scattering”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 43, no. 5, pp. 534–537, May 1995.
- [92] Do-Hoo Kwon, R. J. Burkholder, P. H. Pathak, “Efficient method of moments formulation for large pec scattering problems using asymptotic phasefront extraction (ape)”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 49, no. 4, pp. 583–591, April 2001.
- [93] Z. Altman, R. Mittra, “A technique for extrapolating numerically rigorous solutions of electromagnetic scattering problems to higher frequencies and their

- scaling properties”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 47, no. 4, pp. 744–751, April 1999.
- [94] Z. Altman, R. Mittra, O. Hashimoto, E. Michielssen, “Effective representation of induced currents on large scatterers using the generalized pencil of functions method”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 44, no. 1, pp. 51–57, January 1996.
- [95] C. Delgado, M. F. Cátedra, O. Gutiérrez, I. González, F. Sáez, “Application of current modes to the analysis of arbitrary shaped targets using po with multiple bounces”, in *ICEAA’05 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications and EESC’05 European Electromagnetic Structures Conference*, Torino, Italy, September 2005, pp. 1061–1064.
- [96] C. Delgado, M. F. Cátedra, J. M. Gómez, “Iterative and efficient po scheme for complex bodies”, in *Antennas and Propagation Society International Symposium*, Washington D.C, USA, July 2005, pp. 159–162.
- [97] M. F. Cátedra, J. Pérez, *Cell Planning for Wireless Communications*, Mobile Communications Series. Artech House Publishers, 1999.
- [98] F. Sáez, O. Gutierrez, I. González, J. Pérez, M. F. Cátedra, “Propagation model based on ray tracing for the design of personal communication systems in indoor environments”, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 49, no. 6, pp. 2105–2112, November 2000.
- [99] C. Delgado, “Desarrollo de algoritmos basados en el z-buffer para la aceleración del cálculo de dispersión y radiación utilizando métodos de alta frecuencia”, 2002, Proyecto Fin de Carrera. Escuela Politécnica. Universidad de Alcalá.
- [100] I. González Diego, “Contribución a la mejora de la gtd en la predicción de los sistemas radiantes sobre estructuras complejas”, 2004, Tesis Doctoral. Universidad de Alcalá.
- [101] Y. Hua, T. K. Sarkar, “Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise”, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 38, no. 5, pp. 814–824, May 1990.
- [102] T. K. Sarkar, O. Pereira, “Using the matrix pencil method to estimate the parameters of a sum of complex exponentials”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 37, no. 1, pp. 48–55, February 1995.

- [103] T. K. Sarkar, M. C. Wicks, M. Salazar-Palma, R. J. Bonneau, *Smart Antennas*, Wiley-IEEE Press, 2003.
- [104] C. W. Therrien, *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*, Prentice Hall, New York, 1992.
- [105] Y. Gómez, “Desarrollo de técnicas iterativas basadas en modos de corriente para el análisis de radiación y scattering”, 2004, Proyecto Fin de Carrera. Universidad de Alcalá.
- [106] F. P. Preparata, M. I. Shamos, *Computational Geometry: An Introduction*, Springer-Verlag, New York, NY, 1985.
- [107] O. M. Conde Portilla, “Contribución al estudio del comportamiento de antenas embarcadas empleando técnicas integrales y asintóticas”, 1999, Tesis Doctoral. Universidad de Cantabria.
- [108] M. F. Cátedra, R. Torres, F. Rivas, M. Domingo, J. Pérez, “Rcs analysis code for complex targets modeled with nurbs surfaces”, in *23<sup>rd</sup> European Microwave Conference*, Madrid, 1993.
- [109] R. P. Torres, L. Valle, M. Domingo, S. Loredo, “An efficient ray-tracing method for enclosed spaces based on image and bsp algorithm”, in *Antennas and Propagation Society International Symposium*, July 1999, pp. 416–419.
- [110] H. Radha, M. Vetterli, R. Leonardi, “Image compression using binary space partitioning trees”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 5, no. 12, pp. 1610–1624, December 1996.
- [111] C. W. Fu, Tien-Tsin Wong, Wai-Shun Tong, Chi-Keung Tang, A. J. Hanson, “Binary-space-partitioned images for resolving image-based visibility”, *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, vol. 10, no. 1, pp. 58–71, January-February 2004.
- [112] L. Lozano, M. I. Hernández, C. Romera, I. González, F. Sáez de Adana, M. F. Cátedra, “Ray-tracing acceleration techniques to compute rcs of complex targets”, in *Antennas and Propagation Society International Symposium*, June 2004, pp. 4495–4498.
- [113] E. A. Haines, D. P. Greenberg, “The light buffer: a shadow testing accelerator”, *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 6, no. 9, pp. 6–16, 1986.

- [114] H. Ling, R. C. Chou, S. W. Lee, “Shooting and bouncing rays: Calculating the rcs of an arbitrarily shaped cavity”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 37, no. 2, pp. 194–205, February 1989.
- [115] R. Bhalla, H. Ling, “Three-dimensional scattering center extraction using the shooting and bouncing ray technique”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 44, no. 11, pp. 1445–1453, November 1996.
- [116] R. J. Burkholder, Jin-Fa Lee, “Fast dual-mgs block-factorization algorithm for dense mom matrices”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 52, no. 7, pp. 1693–1699, July 2004.
- [117] L. Valle López, “Aplicación de técnicas híbridas basadas en el método de los momentos para el análisis de antenas en presencia de geometrías arbitrarias eléctricamente grandes modeladas con superficies nurbs”, 1995, Tesis Doctoral. Universidad de Cantabria.
- [118] F. Rivas Peña, “Aplicación del método de los momentos para el análisis electromagnético de cuerpos de geometría arbitraria modelados por parches nurbs”, Noviembre 1994, Tesis Doctoral. Universidad de Cantabria.
- [119] A. W. Glisson, D. R. Wilton, “Simple and efficient numerical methods for problems of electromagnetic radiation and scattering from surfaces”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 28, no. 5, pp. 593–603, September 1980.
- [120] G. H. Golub, C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, The John Hopkins University Press, 1989.
- [121] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1986.
- [122] M. Degiorgi, G. Tiberi, A. Monorchio, G. Manara, R. Mittra, “An svd-based method for analyzing electromagnetic scattering from plates and faceted bodies using physical optics bases”, in *Antennas and Propagation Society International Symposium*, July 2005, pp. 147–150.
- [123] G. Tiberi, M. Degiorgi, A. Monorchio, G. Manara, R. Mittra, “A class of physical optics-svd derived basis functions for solving electromagnetic scattering problems”, in *Antennas and Propagation Society International Symposium*, July 2005.

- [124] V. Rokhlin, “Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions”, *Journal of Computational Physics*, vol. 86, no. 2, pp. 414–439, 1990.
- [125] R. Coifman, V. Rokhlin, S. Wandzura, “The fast multipole method for the wave equation: a pedestrian prescription”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 35, no. 3, pp. 7–12, June 1993.
- [126] N. Engheta, W. D. Murphy, V. Rokhlin, M.S. Vassilou, “The fast multipole method (fmm) for electromagnetic scattering problems”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 40, no. 6, pp. 634–641, June 1992.
- [127] S. M. Seo, Jin-Fa Lee, “A single-level low rank ie-qr algorithm for pec scattering problems using efie formulation”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 52, no. 8, pp. 2141–2146, July 2004.
- [128] M. T. Heath, *Scientific Computing, An introductory Survey*, McGraw-Hill, New York, 2nd edition, 2002.
- [129] L. Giraud, J. Langou, “When modified gram-schmidt generates a well-conditioned set of vectors”, *IMA Journal of Numerical Analysis*, vol. 22, no. 4, pp. 521–528, 2002.
- [130] A. Björk, C. Paige, “Loss and recapture of orthogonality in the modified gram-schmidt algorithm”, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 13, no. 1, pp. 176–190, 1992.
- [131] F. X. Canning, K. Rogovin, “Fast direct solution of standard moment-method matrices”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 40, no. 3, pp. 15–26, June 1998.
- [132] S. Coons, “Surfaces for computer aided design”, 1964, Technical Report. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts.
- [133] W. Boehm, G. Farin, J. Kahmann, “A survey on curve and surface methods in cagd”, *Computer Aided Geometric Design*, vol. 1, no. 1, pp. 1–60, July 1984.
- [134] L. A. Piegl, W. Tiller, *The NURBS Book*, Springer, 1997.
- [135] Q. Wang, W. Hua, G. Li, H. Bao, “Generalized nurbs curves and surfaces”, in *Geometric Modeling and Processing*, 2004, pp. 365–368.

- [136] P. Bezier, *The Mathematical Basis of UNISURF CAD System*, Butterworths, London, 1986.
- [137] P. Bezier, *Numerical Control: Mathematics and Applications*, Wiley, 1972.
- [138] G. Chang, “Matrix formulation of bezier technique”, *Computer Aided Design*, vol. 14, no. 6, pp. 345–350, 1982.
- [139] W. Bohem, “Curvature continuous curves and surfaces”, *Computer Aided Geometric Design*, vol. 2, no. 4, pp. 313–323, 1985.
- [140] W. Gordon, R. F. Riesenfeld, *Computer Aided Geometric Design*, chapter B-Spline Curves and Surfaces, pp. 95–126, Academic Press, New York, 1974.
- [141] P. Bezier, *Essay de Définition Numérique des Courbes et des Surfaces Expérimentales*, PhD thesis, Universidad de París IV, Sorbonne, 1977.
- [142] G. Lorentz, *Bernstein Polynomials*, Toronto Press, Toronto, 1953.
- [143] R. T. Farouki, V. T. Rajan, “On the numerical condition of polynomials in bernstein form”, *Computer Aided Geometric Design*, vol. 4, no. 3, pp. 191–216, 1987.
- [144] R. T. Farouki, V. T. Rajan, “Algorithms for polynomials in bernstein form”, *Computer Aided Geometric Design*, vol. 5, no. 1, pp. 1–26, 1988.
- [145] C. De Boor, *A Practical Guide to Splines*, Springer, 1978.
- [146] K. L. Verspile, *Computer-Aided-Design Applications of the Rational B-Spline Approximation Form*, PhD thesis, Universidad de Syracuse, 1975.
- [147] S. Coons, *Computer Aided Geometric Design*, chapter Surface Patches and B-Spline Curves, pp. 1–16, Academic Press, 1974.
- [148] M. Cox, “The numerical evaluation of b-splines”, *Journal of the Institute for Mathematics and its Applications*, vol. 10, pp. 134–149, 1972.
- [149] W. Bohem, “Rational geometric splines”, *Computer Aided Geometric Design*, vol. 4, no. 1-2, pp. 67–77, 1987.
- [150] C. de Boor, “On calculating with b-splines”, *Journal of Approximation Theory*, vol. 6, no. 1, pp. 50–62, 1972.

- 
- [151] W. Boehm, “Inserting new knots into b-spline curves”, *Computer Aided Design*, vol. 12, no. 4, pp. 199–201, 1980.
- [152] W. Boehm, “Generating the bezier points of b-spline curves and surfaces”, *Computer Aided Design*, vol. 13, no. 6, pp. 365–366, 1981.
- [153] W. Boehm, “On de boor-like algorithms and blossoming”, *Computer Aided Geometric Design*, vol. 5, no. 1, pp. 71–80, 1988.
- [154] A. Pippi, S. Della Casa, S. Maci, “A line-integral asymptotic representation of the po radiation from nurbs surfaces”, in *Antennas and Propagation Society International Symposium*, Monterey, CA, USA, June 2004, pp. 4511–4514.
- [155] X. Chen, R. F. Riesenfeld, E. Cohen, “Rational bezier patch differentiation using the rational forward difference operator”, in *2005 Computer Graphics International Conference*, Salt Lake City, UT, June 2005, pp. 129–134.
- [156] R. P. Brent, *Algorithms for Minimization Without Derivatives*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
- [157] J. E. Dennis Jr., R. B. Schnabel, *Numerical methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.