Sexta parte

OPERACIONES CON TITULOS VALORES: OPERACIONES DE BOLSA

VI.—OPERACIONES CON TITULOS VALORES: OPERACIONES DE BOLSA

1.—Títulos valores: Valores mobiliarios.
2.—Conceptos específicos sobre títulos valores.
3.—Mercado de valores.
4.—Rentabilidad de los títulos valores. Paridad de cotizaciones.
5.—Valoración de los títulos valores.
6.—Valoración de los títulos de renta fija.
  6.1.—Compra por suscripción y mantenimiento del título hasta su amortización.
  6.2.—Compra por suscripción y venta del título en el mercado.
  6.3.—Compra en el mercado y mantenimiento del título hasta su amortización.
  6.4.—Compra en el mercado y venta en el mercado.
7.—Valoración de las acciones.
  7.1.—Valoración en función de los dividendos.
    7.1.1.—Dividendos constantes.
    7.1.2.—Dividendos crecientes a una tasa moderada.
    7.1.3.—Dividendos crecientes a una tasa acentuada.
  7.2.—Valoración en función de los beneficios.
    7.2.1.—Beneficios constantes.
    7.2.2.—Beneficios crecientes a una tasa moderada.
  7.3.—Valoración en función de algunos modelos concretos.
8.—Valoración de letras financieras.
  8.1.—Adquisición inicial de la letra y mantenimiento del título hasta su vencimieto.
  8.2.—Adquisición inicial de la letra y venta en el mercado secundario.
  8.3.—Adquisición de la letra en el mercado secundario.
  8.4.—Tanto efectivo real de la operación.
9.—Valoración de Pagarés.
  9.1.—Pagarés del Tesoro.
  9.2.—Pagarés de empresa.
10.—Operaciones con valores.
11.—Operaciones de bolsa al contado.
12.—Operaciones de bolsa al contado con crédito.
  12.1.—Operación con crédito al comprador.
  12.2.—Operación con crédito al vendedor.

1.—TITULOS VALORES: VALORES MOBILIARIOS

Los **títulos de crédito** o títulos-valores son documentos que incorporan una promesa unilateral de realizar una determinada prestación a favor de quien resulte legítimo tenedor del documento. Cumplen principalmente la función de servir mejor a la circulación de los bienes económicos.

La era de los títulos de crédito comienza cuando los contratos de cambio se hicieron insuficientes para proporcionar la rapidez, facilidad, certeza y seguridad de la circulación de los derechos y de las cosas y cuando se hizo necesario movilizar el crédito al ritmo de crecimiento de la actividad empresarial.

La incorporación del derecho al título hace necesario poseer el documento para ejercitar el derecho. Se consigue, pues, la objetivación del crédito y la posibilidad de movilizar el documento, por lo que éste puede ser objeto de negocios jurídicos y de derechos reales.

Nace un **mercado de títulos de crédito** cuya vertiente económica es la aparición del denominado **mercado financiero**.

Entre los distintos contenidos de los títulos de crédito interesa resaltar los que constituyen derechos de crédito pecuniarios (títulos de pago), confieren al tenedor el derecho a obtener del deudor una suma de dinero, y los que confieren derechos de socio (títulos de participación social).

En el **mercado de capitales** se negocian operaciones de financiación y se obtienen recursos financieros a cambio de títulos de crédito.

En el **mercado de valores** se negocian las operaciones de capital cuyo objeto es financiar inversiones y se obtienen medios de financiación contra la entrega de títulos valores. Las contrataciones más frecuentes son las que se realizan sobre valores mobiliarios; si bien en los últimos años se han desarrollado un amplio mercado para la contratación de letras financieras, pagarés del tesoro y pagarés de empresa.

Los **valores mobiliarios** son títulos valores emitidos en masa con identidad de derechos a los cuales va unida una fácil y eficaz transmisibilidad. Es común clasificar a los valores mobiliarios en acciones, obligaciones privadas y obligaciones públicas o fondos públicos.

Las **acciones** son títulos valores que representan partes alícuotas del capital social e incorporan derechos de socio.

La condición de accionista proporciona como derechos económicos fundamentales: Participar en los beneficios sociales, participar en el patrimonio resultante en la liquidación, derecho preferente de suscripción de nuevas acciones.

Cabe distinguir entre acciones nominativas y al portador; acciones de goce o de disfrute; acciones ordinarias y privilegiadas.

Las **obligaciones** son títulos o documentos que representan partes alícuotas de créditos contra las sociedades emisoras, confieren derechos de prestamista o acreedor y nacen para ser amortizadas. A estos títulos también se les suele designar en ocasiones con los nombres de cédulas hipotecarias, bonos, bonos bancarios, etc. Sus derechos económicos se sintetizan: devolución de principal y obtención de rendimientos, que se concretan normalmente en intereses o cupones, primas lotes u otras posibles ventajas con repercusión económica.

Cabe efectuar entre otras, las siguientes clasificaciones: a) Obligaciones nominativas y al portador; b) Obligaciones con características comerciales o sin ellas (puras); c) Obligaciones ordinarias o con garantía; d) Obligaciones a interés fijo o interés variable.

Los **fondos públicos o deuda pública** son obligaciones emitidas, normalmente a un interés prefijado, por una Corporación de Derecho Público, Estado, Provincia, Municipio, etc.

Cabe clasificar a la deuda pública en: Consolidada y flotante; amortizable y perpetua; nominativa y al portador; interior y exterior; general y específica; pignorable y no pignorable; con y sin impuestos.

Las **letras financieras**, negociadas en el mercado de valores, son letras de cambio libradas por Bancos o Cajas de Ahorro con objeto de obtener recursos para sus clientes.

Los **pagarés del Tesoro** son deuda pública a corto plazo cuya finalidad fundamental es la de conseguir financiación para los déficits presupuestarios.

Los **pagarés de empresa** son valores que se emiten para obtener financiación mediante endeudamiento a corto plazo.

Los títulos valores también pueden clasificarse según otros criterios: a) Valores de renta fija (en su cuantía o en su forma de obtenerla) y valores de renta variable. Los primeros hacen referencia a las obligaciones, la deuda pública, a las letras financieras y a los pagarés con rentabilidad conocida desde el origen de la emisión y los segundos a las acciones cuyos rendimientos no son prefijables con certeza; b) Valores públicos y valores privados. Esta clasificación nace al hacer distinción del carácter público o privado de la Entidad emisora; c) En base al criterio de nacionalidad se distingue entre valores nacionales y extranjeros.

2.—CONCEPTOS ESPECIFICOS SOBRE TITULOS VALORES

En el análisis de los valores mobiliarios se utilizan un conjunto de conceptos cuya denominación y significado conviene precisar. En las líneas siguientes se hace referencia a las más notables.

a) **Valor nominal.**

Se denomina valor nominal de un título valor a aquel importe que lleva impreso en el título y responde a:

- En las **acciones** a la parte alícuota de capital social correspondiente a cada título.
- En las **obligaciones**, a la parte alícuota de los créditos puestos en circulación contra el emisor.

— En la **deuda pública** tiene el mismo significado que el anterior, pero siendo el ente emisor o deudor el Estado o Corporación pública.
— En la **letra** y en el **pagaré** corresponde al valor que se tiene que recibir el día de su vencimiento.

b) **Valor efectivo.**

Se entiende por **valor efectivo** de un título valor el coste real que supone para el suscriptor o comprador, la adquisición del título.

Este valor en el momento de ser emitido coincide con el precio de emisión que puede ser igual, inferior o superior al nominal. En el primer caso se dice que se emite a la par, en el segundo por debajo de la par o con prima de emisión negativa y en el tercero por encima o sobre la par o con prima de emisión positiva.

La diferencia entre el valor o precio de emisión y el valor nominal es la prima de emisión positiva (negativa) si aquél es superior (inferior) al segundo.

En las letras y pagarés el valor efectivo siempre es inferior al nominal ya que esta diferencia es el rendimiento del título.

c) **Valor de cotización.**

Con el nombre de **valor de cotización**, de **curso** o de **cambio**, se designa el precio que el mercado fija para el título. Este viene dado por los intereses opuestos de oferta y demanda.

Si los títulos se cotizan en Bolsa su valor se conocerá a partir de las cotizaciones oficiales, en caso contrario habrá que atenerse a cada caso particular.

El valor de cotización estará a la par, sobre la par o bajo par, según que sea igual, superior o inferior al valor nominal del título.

El verdadero determinante implícito del valor de cotización es el tipo de interés o rentabilidad monetaria que se pretende conseguir con la adquisición del título.

d) **Valor de reembolso o de amortización.**

Con el nombre de **valor de reembolso de una obligación o de un título de deuda pública,** se denomina al precio que el emisor paga por el título en el momento de la amortización. Este precio puede coincidir o no con el valor nominal y está previsto desde el origen de la emisión.

Cuando el valor de reembolso no coincide con el nominal es debido a la existencia de premios, generalmente positivos, ciertos o aleatorios, que pueden venir recogidos en forma de primas, lotes u otro tipo de ventajas.

Otra forma de amortización o de reembolso consiste en la compra en Bolsa hecha por el emisor, no siendo en este caso previsible su precio de amortización.

Además, es necesario tener en cuenta que algunos empréstitos carecen de reembolso (deuda pública perpetua), es decir, el deudor sólo contrae la obligación de pagar los intereses y no de reembolsar el capital. Estos empréstitos, de duración indefinida, sólo pueden ser emitidos por los Estados porque son las únicas entidades que están en condiciones de comprometerse perpetuamente al pago de los intereses.

El valor de amortización o de reembolso de una letra o de un pagaré coincide con el nominal.

e) **Intereses.**

Las **obligaciones** producen un interés que, además, se habrá determinado antes de la emisión así como el modo que tenga que hacerse efectivo.

Reciben el nombre de **cupones** los intereses que periódicamente perciben (anual, semestral, etc.), en concepto de rendimiento, los poseedores de los títulos de un empréstito. Para hacer efectivos estos intereses los títulos van provistos de unos cajetines pequeños o cupones situados al margen o en la parte inferior de los mismos, y corresponde cada uno a un vencimiento de intereses, expresándose con ellos el vencimiento, el título a que pertenece y la cantidad a cobrar en cada vencimiento. Cuando se perciben los intereses, los cupones son separados o estampillados.

En las **letras** y **pagarés** el rendimiento viene dado por la diferencia entre los valores de adquisición o coste y amortización o venta, en su caso.

2.6.—DIVIDENDOS

Se llaman dividendos a las cuantías que tiene que entregar el suscriptor de una acción para pagarla o liberarla. También se designan de la misma manera, a las partes que corresponden a cada sección en la distribución de los beneficios obtenidos por la sociedad.

Por tanto, los dividendos son de dos clases diametralmente opuestas. La primera constituye una salida de dinero para el poseedor de la acción y por ello se denomina **dividendo pasivo**. La segunda representa una entrada de dinero y se llama **dividendo activo** o simplemente dividendo.

Los dividendos activos representan para las acciones idéntico papel que los intereses en las obligaciones, con la salvedad que éstos suelen ser conocidos y aquéllos no.

También las acciones llevan unos cupones que juegan de la misma manera que en el caso de las obligaciones.

3.—MERCADO DE VALORES

Como es sabido, las empresas para efectuar sus inversiones necesitan captar recursos financieros que destinarán posteriormente a la adquisición de los bienes de su capital.

El **capital propio** fundacional junto con la **financiación interna** o autofinanciación no suelen ser suficientes para satisfacer las necesidades financieras de la empresa a largo plazo. Esta necesita acudir a la **financiación externa** y recabar recursos en el **mercado financiero**.

Con el nombre de **mercado de capitales** se conoce el mercado financiero a largo plazo y se llama **mecado de dinero** al mercado financiero a corto plazo.

En el **mercado de capitales o mercado de valores** se negocian las operaciones de capital cuyo objeto fundamental es financiar inversiones.

Es corriente clasificar el mercado de capitales en **mercado primario** o de emisión y **mercado secundario de negociación o bolsa de valores.**

En el **mercado de emisión o primario** es donde la empresa obtiene directamente la financiación externa mediante las misiones de títulos valores. Sin embargo, su existencia necesita del **mercado secundario** para facilitar la liquidez de los valores mobiliarios y completar las cualidades exigidas a todo activo financiero (rentabilidad, seguridad y liquidez).

Los mercados secundarios facilitan, además, información básica para el adecuado funcionamiento del mercado primario. Así, el cálculo de coste del capital clave en las decisiones de inversión depende del valor de mercado de las acciones, la evolución de las cotizaciones de los valores mobiliarios constituye el mejor indicador para determinar el momento adecuado de lanzamiento de nuevas emisiones.

Por tánto, el mercado de valores trata de canalizar los recursos financieros de ahorradores a inversiones. A cambio de proporcionar medios de pago (financiación) los ahorradores reciben títulos que encierran una promesa de rendimiento predeterminable y la devolución de principal (obligaciones, letras, pagarés u otras formas de endeudamiento), o una promesa de rendimiento aleatorio y derechos sobre el patrimonio (acciones).

En el mercado secundario se realizan diariamente multitud de operaciones y en cada momento existen ahorradores que desean invertir unos ahorros en títulos valores (de renta fija o de renta variable), alterar la composición de sus carteras o bien desprenderse de ellas total o parcialmente para, en definitiva, maximizar sus beneficios dependiendo fundamentalmente del rendimiento, el riesgo y el volumen del patrimonio del ahorrador considerado.

Por lo que respecta al rendimiento, en los títulos valores el tanto de rendimiento resulta de la comparación del precio de coste con la corriente de ingresos que puedan proporcionar.

La función primordial del mercado secundario en la asignación de recursos consiste en establecer el precio aproximado de las emisiones de nuevos valores.

En general, el mercado de valores se caracteriza porque concurren a él un gran número de ahorradores y las compras de cada uno de ellos son pequeñas en relación con el volumen total de las transacciones, están formados por productos homogéneos y no hay ventajas o desventajas entre los compradores y vendedores los cuales poseen información acerca del precio y características del título de posible transacción. Asimismo, la entrada o salida del mercado es libre.

Conviene resaltar que aunque los inversores posean informaciones análogas suelen interpretarla de distinto modo. Esta diversidad de interpretación conduce a que, al mismo tiempo, haya ahorradores que deseen adquirir valores y otros que pretendan desprenderse de ellos, es decir, en el mercado secundario de títulos valores oferta y demanda reflejan estados de opinión contrarios que se reflejan en el volumen de contratación.

En síntesis, el mercado de valores desempeña importantes funciones tales como:

1) Permite que el pequeño ahorrador colabore en el proceso de financiación de las inversiones directamente en las nuevas emisiones e indirectamente a través de las transacciones del mercado secundario.

2) Facilitar la transmisión de título al poner en comunicación a compradores y vendedores.

3) Hace posible la formación de precios justos.

4. RENTABILIDAD DE LOS TITULOS VALORES. PARIDAD DE COTIZACIONES

La rentabilidad de un título mide la relación entre los rendimientos que se obtienen en un período y la inversión realizada en él. Este rendimiento que devengan los valores puede revestir la forma de intereses, si se trata de obligaciones u otros títulos que reconozcan deuda, o de dividendos cuando los títulos son acciones y es usual tomar como medida la renta (cierta o aleatoria) producida en un período anual.

Cabe distinguir las siguientes medidas de rentabilidad:

a) **Rentabilidad bruta:** Es la que se obtiene cuando se toma como referencia la denominada renta bruta, es decir, cuando no se tienen en cuenta los impuestos, corretajes y comisiones que soportan el poseedor del título.

b) **Rentabilidad neta:** Surge cuando se toma como referencia la renta que resulta al deducir los impuestos y gastos; se trata de la renta neta que recibe el inversor.

c) **Rentabilidad nominal:** Es la que resulta en relación con el valor nominal del título.

d) **Rentabilidad efectiva:** Se obtiene al comparar el rendimiento con el valor de adquisición o de cotización actual, en su caso.

Se designará por:

* C el valor nominal del título.
* V al valor efectivo de adquisición, o de su cotización actual.
* R_b a la renta bruta o rendimiento del período y que representa a los intereses o cupones en las obligaciones; a los dividendos y otros posibles derechos, si los hay, en las acciones; a la diferencia entre el valor de adquisición y el nominal en las letras y pagarés.
* $c = V/C$ al tipo de cambio o coeficiente de cotización, que en ocasiones puede venir expresado en forma porcentual y representará el valor $100V/C$. Cada centésima parte del valor nominal se llama entero y la cotización se mide por enteros cuando se expresa en forma porcentual.
* g a las comisiones y gastos que, en su caso, graviten sobre la renta del título expresados en tanto por uno. Es usual que se giren sobre el nominal del título ascendiendo globalmente a C.g.
* α al tipo impositivo que grava la renta del título y que por motivos de simplificación se considera que vence cuando se percibe R_b.
* R_n a la renta neta del período, es decir, del valor $R_n = R_b - \alpha R_b - gC = R_b(1-\alpha) - Cg$.

Como consecuencia de las posibles combinaciones de e) y d) con a) y b) se tiene:

$$\text{Rentabilidad nominal bruta:} \quad i'_n = \frac{R_b}{C} \tag{1}$$

$$\text{Rentabilidad nominal neta:} \quad i_n = \frac{R_n}{C} \tag{2}$$

$$\text{Rentabilidad efectiva bruta:} \quad i'_e = \frac{R_b}{V} \tag{3}$$

$$\text{Rentabilidad efectiva neta:} \quad i_e = \frac{R_n}{V} \tag{4}$$

Ejemplo 1.—Un título de 1.000 pts. nominales, que cotiza al 110%, produce una renta del 15% sobre el nominal. Determinar sus rentabilidades nominales y efectivas (brutas y netas) si los impuestos son el 18% y la comisión bancaria por custodia de títulos asciende al 3‰ del nominal del título.

Aplicando las relaciones anteriores resulta:

$$C=1.000 \quad ; \quad V=\frac{110}{100}\,1.000=1.100 \quad ; \quad R_b=1.000\times 0{,}15=150 \quad ; \quad R_n=150\times 0{,}82-3=120$$

$$i'_n=\frac{150}{1.000}=0{,}15 \quad ; \quad i_n=\frac{120}{1.000}=0{,}12 \quad ; \quad i'_e=\frac{150}{1.100}=0{,}1363 \quad ; \quad i_e=\frac{120}{1.100}=0{,}1090$$

Al inversor la rentabilidad que le suele interesar conocer es la efectiva neta o tanto efectivo de rendimiento y las magnitudes que la definen, renta neta y valor de cotización o efectivo, las cuales satisfacen las relaciones

$$i_e=\frac{R_n}{V} \qquad R_n=i_e V \qquad V=\frac{R_n}{i_e}$$

Puede ocurrir que estas variables no se conozcan directamente por lo que interesa establecer las relaciones que permitan su cálculo con el auxilio de aquéllas de más fácil acceso y que sirven para definir las fórmulas (1), (2) y (3). Se tiene:

1) **Cálculo de i_e en función de i'_n; i_n, i'_e**

$$i_e=\frac{R_n}{V}=\frac{R_b(1-\alpha)-Cg}{V}=i'_e(1-\alpha)-\frac{100}{c}\,g \tag{5}$$

$$i_e=\frac{R_n}{V}=\frac{R_b(1-\alpha)-Cg}{C\,\dfrac{c}{100}}=\frac{100}{c}\,[i'_n(1-\alpha)-g] \tag{6}$$

$$i_e=\frac{R_n}{V}=\frac{R_n}{C\,\dfrac{c}{100}}=\frac{100}{c}\,i_n \tag{7}$$

$$i_e=\frac{100}{c}\,i_n=\frac{100}{c}\,[i'_n(1-\alpha)-g]=i'_e(1-\alpha)-\frac{100}{c}g \tag{8}$$

Ejemplo 2.—En el ejemplo 1 y partiendo del conocimiento de la rentabilidad nominal bruta $i'_n=0{,}15$ determinar, i_e, i_n e i'_e.

De las relaciones (6) y (8) se sigue:

$$i_e=\frac{100}{c}\,[i'_n(1-\alpha)-g]=\frac{100}{110}\,[0{,}15(1-0{,}18)-0{,}003]=0{,}1090$$

$$i_n=i'_n(1-\alpha)-g=0{,}15(1-0{,}18)-0{,}003=0{,}12$$

$$i'_e = i'_n \frac{100}{c} = 0{,}15 \frac{100}{110} = 0{,}1363$$

2) **Cálculo de R en función de R_b, i'_n, c**

$$R_n = R_b(1-\alpha) - Cg \tag{9}$$

$$R_n = i_n C = [i'_n(1-\alpha) - g]C \tag{10}$$

$$R_n = i_e V = i_e \frac{c}{100} C \tag{11}$$

Ejemplo 3.—Calcular la renta neta del ejemplo 1 aplicando las relaciones (9), (10), (11).

$$R_n = R_b(1-\alpha) - Cg = 150(1-0{,}18) - 1.000 \times 0{,}003 = 120$$

$$R_n = [i'_n(1-\alpha) - g]C = [0{,}15(1-0{,}18) - 0{,}003]1.000 = 120$$

$$R_n = i_e \frac{c}{100} C = \frac{120}{1.100} \cdot \frac{110}{100} 1.000 = 120$$

3) **Cálculo de V en función de i'_n, i_n, $i_e C$ y R_b**

$$V = \frac{R_n}{i_e} = \frac{i_n}{i_e} C \tag{12}$$

$$V = \frac{R_n}{i_e} = \frac{R_b(1-\alpha) - Cg}{i_e} \tag{13}$$

$$V = \frac{R_n}{i_e} = \frac{i'_n(1-\alpha) - g}{i_e} C \tag{14}$$

Ejemplo 4.—¿Qué efectivo se tendrá que pagar por un título de 5.000 pts. nominales, que produce una renta del 18% sobre el nominal, si los impuestos son el 20% de la renta, las comisiones de custodia son el 2‰ y se pretende obtener una rentabilidad efectiva neta del 14%?, ¿cuál es la relación de cambio?

Haciendo uso de la fórmula (13) se tiene:

$$V = \frac{5.000 \times 0{,}18(1-0{,}20) - 5.000 \times 0{,}002}{0{,}14} = 5.071{,}43$$

Relación de cambio: $c = 100 \frac{5.071{,}43}{5.000} = 101{,}43\%$.

El tanto efectivo i_e es una medida utilizada como criterio de comparación entre títulos y se dirá que: **dos valores tienen cursos equivalentes o cotizan en paridad cuando el tanto efectivo de rendimiento que proporcionan es el mismo.**

Designando por V_1 y V_2 a los valores se escribirá:

$$V_1 \sim V_2 \Leftrightarrow i_{e1} = \frac{R_{n1}}{V_1} = \frac{R_{n2}}{V_2} = i_{e2}$$

Los datos que usualmente proporciona el mercado suelen ser la rentabilidad nominal neta o tipo de interés neto y la cotización o curso. Designando respectivamente a éstos por i_{n1}, i_{n2}, c_1 y c_2 se tiene:

$$\left.\begin{aligned} V_1: \quad i_{e1} &= \frac{R_{n1}}{V_1} = \frac{i_{n1}C}{\frac{c_1}{100}C} = \frac{i_{n1}}{c_1} \\ V_2: \quad i_{e2} &= \frac{R_{n2}}{V_2} = \frac{i_{n2}C}{\frac{c_2}{100}C} = \frac{i_{n2}}{c_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{i_{n1}}{c_1} = \frac{i_{n2}}{c_2} \Leftrightarrow \frac{i_{n1}}{i_{n2}} = \frac{c_1}{c_2} \tag{15}$$

De acuerdo con el criterio enunciado se podrá escribir

$$V_1 \text{ es } \left\{\begin{matrix} \text{preferible} \\ \text{indiferente} \\ \text{no preferible} \end{matrix}\right\} \text{ a } V_2 \quad \text{si} \quad i_{e1} \gtreqless i_{e2} \Leftrightarrow \frac{i_{n1}}{c_1} = \frac{i_{n2}}{c_2} \tag{16}$$

Ejemplo 5.—Si la cotización de un valor que proporciona una rentabilidad nominal neta o líquida del 14% es el 120% ¿a qué cambio deberán cotizarse unos valores que dan una rentabilidad líquida del 12% si están en paridad de cotizaciones?

Aplicando la 15 se tiene:

$$\frac{0,14}{120} = \frac{0,12}{c_2} \Rightarrow c_2 = \frac{12}{14}\,120 = 102,86$$

Si c_2 cotiza por encima de 102,86 enteros su rentabilidad efectiva será inferior y será mejor inversión el primer valor; pero si la cotización es inferior a 102,86 la situación será la opuesta.

El tanto efectivo i_e calculado en (4), es función del tipo impositivo α y mide la rentabilidad efectiva neta de un título cuando la legislación fiscal obliga a tributar por rentas de capital al tipo α; pero si la tributación es sobre la renta de las personas, con una retención a cuenta α', el tanto efectivo i_e dependerá del tipo α que corresponde a cada inversor aislado y del tiempo θ que media entre el vencimiento de la renta del título y la liquidación $R_b(\alpha-\alpha')$ que se practicará posteriormente.

En el caso de imposición sobre la renta el tanto efectivo i_e se calculará en:

$$i_e = \frac{R_b(1-\alpha') - Cg - R_b(\alpha-\alpha')(1+i_e)^{-\theta}}{V} \Leftrightarrow i_eV + R_b(\alpha-\alpha')(1+i_e)^{-\theta} = R_b(1-\alpha') - Cg$$

La casuística tratada en la fiscalidad de los empréstitos es trasladable al análisis de valores, por lo que no se insistirá, ahora en este epígrafe, para no ser repetitivos.

Si se toma $\theta=0$ se obtiene un valor aproximado por defecto de i_e, ya que el importe que se obtiene en (17) es superior al de (4). En lo sucesivo se tomará $\theta=0$.

Ejemplo 6.—Un título de nominal 5.000 pts., que cotiza al 80%, proporciona una renta bruta anual de 600 pts.

Determinar la rentabilidad efectiva que proporciona en los supuestos: a) Tributación al tipo del 30% en el momento de percepción de la renta; b) Retención a cuenta del 18% al cobro de la renta y liquidación medio año después por el impuesto de las personas al tipo del 30%. En ambos casos hay gastos de custodia de títulos del 1,5‰ sobre el nominal.

La aplicación de las fórmulas (4) y (17) de los siguientes valores:

a) $$i_e=\frac{600(1-0{,}30)-7{,}5}{5.000\,\dfrac{80}{100}}=\frac{412{,}5}{4.000}=0{,}103125.$$

b) $$4.000i_e+600(0{,}30-0{,}18)(1+i_e)^{-1/2}=600(1-0{,}18)-7{,}5 \Rightarrow 4.000i_e+72(1+i_e)^{-1/2}=$$
$$=484{,}5 \Rightarrow i_e=0{,}103995$$

Cuando el inversor mantiene los títulos durante un cierto intervalo de tiempo y luego los vende la rentabilidad r del intervalo se obtendrá por:

$$V_0(1+r)=R_n+V_n \Rightarrow r=\frac{R_n+V_n-V_a}{V_0} \tag{18}$$

siendo V_0 y V_n los precios de compra y venta del título respectivamente. Debe observarse que r es el rédito efectivo asociado al intervalo de tiempo que el inversor ha mantenido los títulos.

Cuando se trata de acciones, R_n puede comprender, además de los dividendos, posibles derechos de suscripción vendidos, si ha existido alguna ampliación de capital y el inversor ha optado por la venta de los citados derechos. En el supuesto de que el inversor en acciones haya acudido a la ampliación de capital habrá que restar a la renta la parte desembolsada por cada acción vieja para suscribir una nueva y sumar a V_n la parte proporcional que le corresponde de la acción nueva suscrita. Así, si se realiza una ampliación de sus acciones nuevas por cada n viejas que se posean, emitiéndose las nuevas al cambio c, la rentabilidad será:

$$r=\frac{R_n-\dfrac{m}{n}\,\dfrac{c}{100}\,C+V_n\left(1+\dfrac{m}{n}\right)-V_0}{V_0} \tag{19}$$

Si el inversor mantiene los títulos durante un intervalo largo de tiempo antes de venderlos o de resultar amortizados, la obtención de la rentabilidad ha de formularse en términos de largo plazo a través del planteamiento de la ecuación de equivalencia financiera entre la prestación real desembolsada y la contraprestación real recibida utilizando la capitalización compuesta, como ley de valoración, y el tanto efectivo i_e como incógnita a resolver. En los próximos epígrafes se abordará esta cuestión.

5.—VALORACION DE LOS TITULOS VALORES

a) **Valor de cotización o de mercado de un título.**

Como en todo tipo de mercado, el precio de un título de renta variable viene dado por el acuerdo de compradores (demanda) y vendedores (oferta).

Una vez alcanzado un acuerdo (equilibrio) en ese instante no es posible formular ofertas ni demandas de títulos a precios distintos de los establecidos en el momento.

En la oferta y demanda influyen factores de índole varia entre los que se resaltan: Historia de las cotizaciones, política de dividendos, expectativas futuras de la empresa y de su sector, nivel de actividad del país, el ahorro del período anterior obtenido por el comprador, el tipo de interés habitual del mercado, el coste del capital, el rendimiento esperado por el inversor, motivos especulativos, necesidades de liquidez, motivos sicológicos, etc.

La experiencia enseña qué valores de renta fija (obligaciones) son reemplazados por los de renta variable en las fases de expansión económica y al revés en las contracciones.

b) **Valor teórico de un título.**

La valoración o cálculo del precio teórico de un título tiene por objeto establecer una estimación razonable de su valor y dar una opinión sobre el nivel de cotización del título. Es la última etapa del análisis financiero, la que viene después del estudio de la situación y actividad de la empresa en el pasado, después del estudio de sus cuentas, después de la elaboración de previsiones sobre resultados.

Cuando el estudio económico y financiero de la empresa y el examen del comportamiento de un título presentan rasgos favorables puede concluirse que es interesante comprar el título. Precisamente la evaluación tiene por objeto principal determinar un valor que pueda parecer razonable, lógico.

No es necesario que la evaluación llegue hasta el límite de fijar un valor concreto, simplemente emitir una opinión sobre el nivel de cotización, si la cotización práctica es interesante para la compra o si por el contrario debe considerarse como excesivamente elevada, sin precisar, por tanto, cuál debe ser el precio verdadero del título.

Por consiguiente, la evaluación puede no llegar hasta el cálculo exacto de lo que puede admitirse como cotización razonable de una acción, sino consistir simplemente en dar una opinión sobre si tal cotización es o no demasiado alta.

c) **Comparación del precio teórico con el de mercado.**

Representando por P al precio de cotización en el mercado financiero de un título y por V al valor teórico del mismo puede ocurrir que ambos coincidan (tengan valores aproximados) o que sean distintos (discrepen de manera clara).

Lo normal es que sea $P \neq V$ y ello se justifica porque los posibles compradores o vendedores del título valoran con tantos distintos, porque no coinciden las expectativas materializadas normalmente en la corriente de rendimientos esperados o porque expectativas y tantos discrepan.

El inversor económico se encontrará ante las alternativas siguientes:

a) $V > P$: Ante esta situación tratará de adquirir títulos si cuenta con recursos para ello.

b) $V < P$: El inversor venderá sus títulos, pues se paga por ellos un precio superior al que él evalúa.

c) $V = P$: Se presentará una situación de indiferencia por coincidir para el inversor considerado los precios de mercado y el suyo teórico.

Situados en la perspectiva del inversor aislado éste se encuentra con el precio P de mercado dado debiendo calcular su propio precio teórico V de acuerdo con los criterios que considere más racionales. En los epígrafes sucesivos se hace referencia a las formas más usuales de actuación para determinar V tanto si se trata de obligaciones, acciones, letras financieras o pagarés.

6.—VALORACION DE LOS TITULOS DE RENTA FIJA

En la parte IV, epígrafes 17-27 de este manual se ha analizado la problemática que tiene el inversor en obligaciones cuando suscribe los títulos y también se han dado formulaciones para determinar los valores teóricos de los títulos durante la vida del empréstito a través de procedimientos directos y mediante la utilización de promedios de vida esperada. Asimismo, en los epígrafes 28-31 se introducía la fiscalidad de las obligaciones y se determinaban las rentabilidades esperadas teniendo en cuenta los impuestos. Para complementar lo expuesto en la citada parte IV se hará referencia en este epígrafe a las pautas de comportamiento del inversor ante el mercado de obligaciones o valores de renta fija.

La nomenclatura a utilizar es la siguiente:

V_s = valor o precio que la obligación tiene en el mercado al principio del año $s+1$.

$\mathscr{V}_s$ = valor o precio teórico estimado para la obligación al principio del año $s+1$.

C = valor nominal de una obligación.

c = relación de cambio $= V_s/C$.

i = tipo de interés de referencia para determinar los intereses periódicos (cupones) o los acumulados en su caso.

C_s = valor de amortización o de reembolso del título, en el año s.

i_a = tanto de rentabilidad que se espera de la obligación si se suscribe.

I_s = renta periódica (cupones) neta de impuestos que se percibe por el título. Por simplificar se supondrá constante.

t = tanto de interés de valoración del inversor.

i_R = tanto de rendimiento de un título según el momento de su amortización o venta.

6.1.—COMPRA POR SUSCRIPCION Y MANTENIMIENTO DEL TITULO HASTA SU AMORTIZACION

El inversor suscribe un título en función de la rentabilidad que espera le proporcione, es decir, en función de su tanto efectivo i_a; pero al ser aleatoria la duración el rendimiento que efectivamente se alcance i_R sólo podrá ser conocido cuando el título se amortice.

La decisión inicial de compra se adoptará si $i_a \geqslant t$, ya que t expresa la mínima rentabilidad que exige el inversor.

Si el título se amortiza en el año r, y hay pago periódico de intereses, el esquema de la inversión efectuada es:

V	I	I	I+C_r	
0	1	2	r	n

y proporciona el rendimiento i_R tal que:

$$V = I\, a_{\overline{r|}i_R} + C_r(1+i_R)^{-r} \tag{20}$$

Cuando no hay intereses periódicos, pues se acumulan en el valor de amortización o reembolso, se tiene:

$$V = C_r(1+i_R)^{-r} \;\Rightarrow\; i_R = \sqrt[r]{\frac{C_r}{V}} - 1 \tag{21}$$

Ejemplo 1.—Se emite a la par un empréstito formado por títulos de nominal 10.000 pts. para ser amortizado en 5 años con anualidades constantes, abonando intereses anuales de 1.250 pts. Si los títulos se amortizan a 10.500 pts. determinar: a) ¿Interesa la inversión a un ahorrador que pretende obtener una rentabilidad media del 13,25%?; b) ¿Cuál es la rentabilidad que proporciona el empréstito? c) ¿Cuál es el tanto de rendimiento de un título que se amortiza en el año s (s=1, 2, 3, 4, 5)?

Un inversor que desee obtener un mínimo del 13,25% estará dispuesto a pagar un efectivo máximo V tal que:

$$V = (C+P)\,\frac{a_{\overline{n|}t}}{a_{\overline{n|}i'}} = 10.500\,\frac{a_{\overline{5|}0,1325}}{a_{\overline{5|}0,11905}} = 10.158,80$$

y al superar el precio de emisión C=10.000 se deduce que le interesa la inversión.

El tanto efectivo medio esperado i_a se obtiene en la relación

$$a_{\overline{n|}i_a} = \frac{C}{C+P}\,a_{\overline{n|}i'} \;\Rightarrow\; a_{\overline{5|}i_a} = \frac{10.000}{10.500}\,a_{\overline{5|}0,11905} = 3,4412356$$

que tiene por solución $i_a = 13,901\% > t = 13,25\%$.

Para calcular el tanto de rendimiento se plantea la ecuación:

$$10.000 = 1.250\, \mathbf{a}_{\overline{r}|i_R} + 10.500(1+i_R)^{-r} \Rightarrow \begin{cases} i_R = 17{,}50\,\% & \text{si} \quad r=1 \\ i_R = 14{,}83\,\% & \text{si} \quad r=2 \\ i_R = 13{,}96\,\% & \text{si} \quad r=3 \\ i_R = 13{,}48\,\% & \text{si} \quad r=4 \\ i_R = 13{,}27\,\% & \text{si} \quad r=5 \end{cases}$$

Ejemplo 2.—Determinar según el período de amortización la rentabilidad de un título de 5.000 pts. nominales emitido a la par, sin abono de intereses periódicos y amortizándose los títulos con la ley $C_r = 5.000(1+0{,}13)^r + 500$, con $r = 3$, 4, 5. ¿Cuál sería un promedio de rentabilidad si se amortizan en el tercero y cuarto año el 30 % de los títulos en cada uno y los restantes el quinto año?

La ecuación del tanto de rendimiento y su solución son:

$$5.000 = [5.000(1+0{,}13)^r + 500](1+i_R)^{-r} \Rightarrow (1+i_R)^{-r} = (1+0{,}13)^r + 0{,}10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_R = \sqrt[r]{(1+0{,}13)^r + 0{,}10} - 1 \Rightarrow \begin{cases} i_R = 15{,}55\,\% & \text{si} \quad r=3 \\ i_R = 14{,}69\,\% & \text{si} \quad r=4 \\ i_R = 14{,}20\,\% & \text{si} \quad r=5 \end{cases}$$

un promedio de rentabilidad sería tomando la esperanza de los i_R que es:

$$\bar{i}_a = E(i_R) = 0{,}1555 \frac{30}{100} + 0{,}1469 \frac{30}{100} + 0{,}1420 \frac{40}{100} = 0{,}14752$$

6.2.—COMPRA POR SUSCRIPCION Y VENTA DEL TITULO EN EL MERCADO

Cuando un suscriptor vende la obligación en el mercado, al principio del año 4+1, al precio V ha efectuado la inversión descrita por:

V	I	I	$I+V_s$	
0	1	2	s	n

por lo que el rendimiento obtenido es el valor t_e solución de la ecuación:

$$V = I\, \mathbf{a}_{\overline{s}|t_e} + V_s(1+t_e)^{-s} \tag{22}$$

si se trata de obligaciones con intereses periódicos y cuando los intereses son acumulados se tendrá:

$$V = V_s(1+t_e)^{-s} \Rightarrow t_e = \sqrt[s]{\frac{V_s}{V}} - 1 \tag{23}$$

Conviene precisar que si el inversor ha decidido vender será porque el precio V_s de cotización en el mercado supera a su valor teórico $\mathscr{V}_s$ calculado al tanto t.

Ejemplo 3.—Si al principio del cuarto año los títulos del ejemplo 1 tienen una cotización del 107,5% determinar si interesa la venta para el poseedor de un título que evalúa al tanto t = 13,25%. ¿Cuál sería la rentabilidad obtenida por el vendedor si adquirió su título por suscripción?

El valor teórico del título al principio del cuarto año es:

$$\mathscr{V}_3 = 10.500\,\frac{a_{\overline{2}|0,1325}}{a_{\overline{2}|0,11905}} = 10.317,15$$

que es inferior a su cotización de 10.750 pts. y para el poseedor de la obligación interesa la venta.

La ecuación para determinar el rendimiento y su solución son:

$$10.000 = 1.250\, a_{\overline{3}|t_e} + 10.750(1+t_e)^{-3} \Rightarrow t_e = 14,63\,\%$$

6.3.—COMPRA EN EL MERCADO Y MANTENIMIENTO DEL TITULO HASTA SU AMORTIZACION

En el caso de obligaciones con intereses periódicos, la inversión queda descrita por:

	V_s	I	I	$I+C_r$	
0	s	s+1	r−1	r	n

si la obligación se amortiza r − s años después de su adquisición. La ecuación del tanto de rendimiento es

$$V = I\, a_{\overline{r-s}|i_R} + C_r(1+i_R)^{-(r-s)} \qquad (24)$$

y en el caso de intereses acumulados queda así:

$$V_s = C_r(1+i_R)^{-(r-s)} \Rightarrow i_R = \sqrt[r-s]{\frac{C_r}{V_s}} - 1 \qquad (25)$$

Obsérvese que una decisión de compra al precio V_s nacerá porque el valor teórico $\mathscr{V}_s$, al tanto t, es superior al valor de cotización.

Ejemplo 4.—Hace tres años fue emitido un empréstito formado por títulos de 25.000 pts. nominales para ser amortizados a voluntad del suscriptor en el año octavo o en el décimo.

La amortización se efectúa con los intereses acumulados siguiendo la ley $C_r = C(1+0,12)^r$, pero en el décimo año hay además una prima de amortización de 2.000 pts.

Si la cotización actual de la obligación es al 142%, ¿cuál será la rentabilidad que puede obtener un comprador según el período de amortización que decida? ¿A qué precio se debería comprar para obtener la misma rentabilidad con independencia del período de amortización?

Los valores de amortización de las obligaciones son:

$$C_8 = 25.000(1+0,12)^8 = 61.899 \text{ pts y el } 247,60\,\%$$

$$C_{10} = 25.000(1+0,12)^{10} + 2.000 = 79.646,2 \text{ pts. y el } 318,58\,\%$$

La compra al 142% ofrece la rentabilidad i_R siguiente:

— Títulos que se amortizan en el octavo año

$$142=247{,}60(1+i_R)^{-5} \Rightarrow i_R=\sqrt[5]{\frac{247{,}6}{142}}-1=0{,}1176$$

— Títulos que se amortizan en el décimo año

$$142=318{,}58(1+i_R)^{-7} \Rightarrow i_R=\sqrt[7]{\frac{318{,}58}{142}}-1+0{,}1224$$

Para obtener la misma rentabilidad, si se amortiza en el octavo o en el décimo año, deberá darse la condición:

$$247{,}60(1+i_R)^{-5}=318{,}58(1+i_R)^{-7} \Rightarrow i_R=\sqrt{\frac{318{,}58}{247{,}60}}=0{,}1343$$

y deberá pagarse el precio

$$\mathscr{V}_3=247{,}60(1+0{,}1343)^{-5}=131{,}88 \text{ enteros o } 32.970 \text{ pts.}$$

6.4.—COMPRA EN EL MERCADO Y VENTA EN EL MERCADO

En este caso las ecuaciones serán análogas a las de 6.3 sustituyendo C_r por V_r. El tanto solución será el valor t_e tal que:

$$V_s=I\ \mathbf{a}_{\overline{r-s|}t_e}+V_r(1+t_e)^{-(r-s)} \qquad (26)$$

si los intereses son periódicos y

$$V_s=V_r(1+t_e)^{-(r-s)} \Rightarrow t_e=\sqrt[r-s]{\frac{V_r}{V_s}}-1 \qquad (27)$$

en el caso de intereses acumulados.

7.—VALORACION DE LAS ACCIONES

Los métodos de evaluación de las acciones comúnmente utilizados son los que se describen a continuación:

a) **Valoración a partir del activo neto.**

Consiste en calcular el valor de la acción mediante la relación

$$\frac{\text{Activo neto total de la empresa}}{\text{Número de acciones en circulación}}$$

En general, el activo contable que da el balance oficial de la sociedad no refleja el verdadero valor del negocio, el valor real del activo de la empresa suele ser mayor por figurar en él un gran número de elementos contabilizados por valores inferiores a los reales (precio muy antiguo, haberse amortizado totalmente, etc.). Es necesario proceder a la revaluación de los activos que dará lugar a la aparición de reservas suplementarias y que sumadas a las reservas del balance conducen a un total denominado **activo neto intrínseco.**

Es, por tanto, un activo neto revalorizado que debe tener en cuenta el verdadero valor de los elementos del activo. El activo neto intrínseco dividido por el número de acciones da el activo neto intrínseco por acción.

Esta evaluación está más próxima al valor que se puede atribuir a los títulos. No obstante, pocos son los casos en que la cotización en Bolsa es igual al activo neto intrínseco, incluso después de obtenidas las revaluaciones indicadas. Normalmente, las cotizaciones son superiores o inferiores al activo neto y por ello deben intervenir otros criterios de valoración que no estén contenidos en la noción de activo neto o activo neto por acción. En la Bolsa, los compradores tienen en cuenta otro factor importante, que es la capacidad de obtener beneficios de la sociedad, capacidad que se manifiesta principalmente por los dividendos repartidos a los accionistas.

b) **Valoración en función de los dividendos.**

Los ingresos monetarios generados por una acción son de dos tipos: dividendos y precio de venta en el momento que ésta se realice.

Fundamentalmente los trabajos realizados en torno a esta cuestión tratan la estimación en un contexto de incertidumbre, riesgo e inflación de los beneficios de la empresa (sobre la base de una información generalmente insuficiente) para, dada una política de reparto de éstos, poder obtener una predicción de la cuantía del dividendo y asimismo la del precio de venta.

Los dividendos raramente coinciden con los beneficios y ello repercute en la cotización de la acción. Prever los beneficios futuros de una empresa y los niveles de dividendos exige el conocimiento de la gestión interna y de los cambios del medio externo en que opera. Predecir los niveles de cotización require esta misma información y, además, las reacciones (incluso psicológicas) de los inversores.

Cabe considerar, entre otros, y a efectos operativos, los distintos casos particulares: Dividendos constantes, dividendos crecientes a una tasa moderada y dividendos crecientes a una tasa acentuada. A ellos se hará referencia posteriormente.

c) **Valoración en función de los beneficios.**

Un nuevo criterio de evaluación de las acciones es en función de los beneficios, una parte de los beneficios es distribuida en forma de dividendos mientras el resto se retiene en forma de reserva. La parte de beneficio retenida pertenece al accionista y teóricamente repercutirá favorablemente en la cotización bursátil del título.

El valor de mercado de la acción es la suma de los valores actuales de los beneficios bursátiles totales futuros. Estos comprenden los dividendos y los aumentos (o disminuciones) de las cotizaciones del título.

Es evidente que el tipo de interés de evaluación debe ser más alto que en el caso de los dividendos (para que sean equivalentes debería sumársele la tasa de crecimiento de cotizaciones esperadas).

Los modelos de evaluación utilizados son análogos a los expuestos en los dividendos sin más que tener que sustituir el dividendo por los beneficios repartidos.

d) **Valoración a través de modelos de regresión.**

Recientes investigaciones han conducido a la evaluación de una acción a partir de una fórmula de regresión, es decir, de un modelo que exprese la correlación entre el valor de la acción o una función de este valor, y un cierto número de magnitudes que caracterizan a la sociedad y la acción.

Por su interés operativo y sencillez de aplicación se estudian a continuación la valoración mediante dividendos y mediante beneficios para los casos más frecuentes.

7.1.—VALORACION EN FUNCION DE LOS DIVIDENDOS

Para estudiar la valoración de las acciones se introduce la nomenclatura:

A_s = valor o precio que la acción tiene en el mercado al principio del año $s+1$;

$\bar{A}_s$ = valor o precio teórico estimado para la acción al principio del año $s+1$;

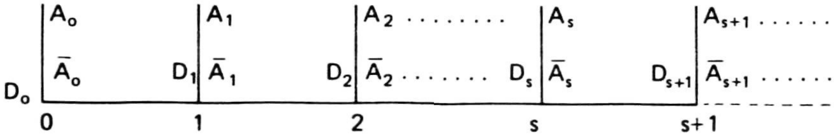
C = valor nominal de una acción (si la cotización es porcentual será $C=100$);

D_s = dividendo que se espera percibir por la acción al final del año s (mientras no se indique lo contrario se supondrá que representa la renta líquida o neta de impuestos y otros gastos);

i = tanto o tipo de interés para la valoración;

i_a = tanto de rentabilidad que la acción proporciona de acuerdo con su cotización o precio de mercado. También se denomina tanto efectivo, tanto interno de rendimiento de la acción, o coste del capital.

La evolución en el tiempo de las variables descritas es la siguiente:



siendo D_0 el dividendo recientemente repartido.

El **valor teórico de la acción**, o valor actualizado de los dividendos esperados al tanto i, es:

$$\bar{A}_0 = \sum_{s=1}^{\infty} D_s(1+i)^{-s} \tag{28}$$

Si el inversor tiene la posibilidad de comprar o vender indistintamente compara el precio teórico $\bar{A}_0$ con el valor de mercado A_0, optando por:

a) Comprar si $\bar{A}_0 > A_0 \Leftrightarrow \bar{A}_0 - A_0 > 0$ se espera obtener plusvalías.

b) Vender si $\bar{A}_0 < A_0 \Leftrightarrow \bar{A}_0 - A_0 < 0$ su no venta proporcionará minusvalías.

c) Indiferencia si $\bar{A}_0 = A_0 \Leftrightarrow \bar{A}_0 - A_0 = 0$.

Obsérvese que $\bar{A}_0 - A_0$ representa el valor actualizado neto de la inversión en la acción, al tanto i.

Para calcular el **tanto de rentabilidad** i_a se plantea la ecuación:

$$A_0 = \sum_{s=1}^{\infty} D_s (1 + i_a)^{-s} \tag{29}$$

y la decisión, una vez calculado i_a, será:

a) Comprar si $i < i_a$.

b) Vender si $i > i_a$.

c) Indiferencia si $i = i_a$.

Por tanto, se tiene:

$$\bar{A}_0 \lesseqgtr A_0 \Leftrightarrow \bar{A}_0 - A_0 \lesseqgtr 0 \Leftrightarrow i \lesseqgtr i_a \Rightarrow \begin{cases} \text{comprar} \\ \text{indiferencia} \\ \text{vender} \end{cases}$$

A continuación estudian los casos particulares notables.

7.1.1.—Dividendos constantes

Caracterizado por ser $D_1 = D_2 = \ldots = D_n = \ldots$ se tiene como **valor teórico de cotización.**

$$\bar{A}_0 = D\, \mathbf{a}_{\overline{\infty}|i} = D \frac{1}{i} \tag{30}$$

La ecuación del **tanto de rendimiento** y su solución son:

$$A_0 = D\, \mathbf{a}_{\overline{\infty}|i_a} = D \frac{1}{i_a} \Rightarrow i_a = \frac{D}{A_0} \tag{31}$$

Si se divide A_0 por D se obtiene la relación cotización dividendo o número de unidades que hay que invertir para obtener una unidad de dividendo. Esta relación denominada por las siglas **PER = p** (price carning ratio) es:

$$PER = p = \frac{A_0}{D} = \frac{1}{i_a} \tag{32}$$

y es una forma de medir la rentabilidad de los títulos, ya que es el número de años que han de transcurrir hasta recuperar el precio A_0 invertido en el título con los rendimientos obtenidos. Es decir, el PER es el plazo que se tarda en recuperar la inversión por lo que en general, cuando los dividendos no son constantes se puede escribir que el PER es el valor p tal que

$$A_0 = \sum_{r=1}^{p} D_r \tag{33}$$

Ejemplo 1.—Una acción de 500 pts. nominales cotiza en bolsa a 80,5 enteros. Si los dividendos que se perciben por ella son 55 pts. anuales, determinar: 1) El valor teórico de la acción si se toma como tanto de valoración i = 12%, i = 13%, i = 14%, i = 15%. 2) ¿Cuál es el tanto de rendimiento esperado de acuerdo con su cotización? 3) Valor del PER.

Se puede proceder a resolver el problema homogeneizando previamente en enteros (cotización porcentual) o en pesetas. Si se elige el primer camino se tiene como nominal C = 100, $A_0 = 80{,}5$ y $D = \frac{55}{5} = 11$ y aplicando las fórmulas obtenidas resulta la solución en enteros y multiplicando cada entero por 5 pts. se calcula solución en pesetas

$$\bar{A}_0 = 11\ \frac{1}{i} = \begin{cases} 91{,}67 & \text{si} \quad i = 0{,}12 \quad \text{ó} \quad 91{,}67 \times 5 = 458{,}35 \text{ pts.} \\ 84{,}62 & \text{si} \quad i = 0{,}13 \quad \text{ó} \quad 84{,}62 \times 5 = 423{,}10 \text{ pts.} \\ 78{,}57 & \text{si} \quad i = 0{,}14 \quad \text{ó} \quad 78{,}57 \times 5 = 392{,}85 \text{ pts.} \\ 73{,}33 & \text{si} \quad i = 0{,}15 \quad \text{ó} \quad 73{,}33 \times 5 = 366{,}65 \text{ pts.} \end{cases}$$

El tanto de rendimiento es

$$i_a = \frac{11}{80{,}5} = 0{,}1366 \quad \text{ó} \quad \text{el } 13{,}66\%$$

De acuerdo con las soluciones obtenidas serán posibles vendedores aquellos inversores que pretendan conseguir rentabilidades superiores al 13,66% y serán posibles compradores los que se conformen con rentabilidades inferiores. El inversor con tanto i = 14% valora como máximo el título en 78,57 enteros y el de i = 15% en 73,33 por lo que de acuerdo con sus perspectivas venderán si tienen títulos o se abstendrán de comprar si ése era su deseo inicial. En cuanto a los inversores con i = 0,12 e i = 0,13, que valoran respectivamente hasta 91,67 enteros y hasta 84,62 enteros, procederán a comprar.

El valor del PER será:

$$PER = p = \frac{80{,}5}{11} = 7{,}32$$

7.1.2.—Dividendos crecientes a una tasa moderada

Designando por q a la tasa de crecimiento de los dividendos, crecimiento moderado e inferior al tanto i, se tiene como **valor teórico de cotización.**

$$\bar{A}_0 = A_{(D_1;\,1+q)\,\overline{\infty}|\,i} = D_1 \frac{1}{i-q} = D_0(1+q)\frac{1}{i-q} \tag{34}$$

De la ecuación del **tanto de rendimiento**

$$A_0 = A_{(D_1;\,1+q)\,\overline{\infty}|\,i_a} = D_1 \frac{1}{i_a-q} = D_0(1+q)\frac{1}{i_a-q} \tag{35}$$

se sigue:

$$i_a = \frac{D_0}{A_0}(1+q)+q = \frac{D_0}{A_0} + \left(\frac{D_0}{A_0}+1\right)q \tag{36}$$

Para calcular el **PER** se sigue el siguiente camino:

$$A_0 = \sum_{r=1}^{p} D_r = \sum_{r=1}^{p} D_1(1+q)^{r-1} = D_1 \frac{(1+q)^p-1}{q} \tag{37}$$

y despejando

$$PER = p = \frac{\log_e\left(\dfrac{A_0 q}{D_1}+1\right)}{\log_e(1+q)}$$

Ejemplo 2.—Suponiendo unos dividendos crecientes a una tasa del 2% ¿cuál sería la solución del ejemplo 1?

El tanto de rendimiento es:

$$i_a = \frac{11}{80{,}5}(1+0{,}02)+0{,}02 = 0{,}15938 \simeq 15{,}94\%$$

por lo que todos los inversores serían compradores y el más exigente, que es el del $i=15\%$ estaría dispuesto a pagar teóricamente por el título

$$\bar{A}_0 = 11(1+0{,}02)\frac{1}{0{,}15-0{,}02} = 86{,}31 \text{ enteros ó } 431{,}55 \text{ pts.}$$

El valor del PER es:

$$PER = p = \frac{\log_e\left(\dfrac{80{,}5\times 0{,}02}{11{,}22}\right)+1}{\log_e(1+0{,}02)} = 6{,}77$$

7.1.3.—Dividendos crecientes a una tasa acentuada

Suponiendo una tasa de crecimiento medio q, con $q<i$, se tendría como valor teórico una expresión idéntica a la de 7.1.2, ya que si $q \geqslant i$ entonces es $A_0 = +\infty$ lo cual es un absurdo financiero. Además, suponer que los dividendos pueden crecer a una tasa alta indefinidamente no es posible ya que habrá un momento en que el crecimiento tenderá amortiguarse, o incluso anularse, ya sea por el efecto de la competencia o por saturación del mercado.

Por tanto, sólo tiene sentido suponer un crecimiento acentuado $q' \geqslant i$ durante n años y después una tasa de crecimiento atenuada $q<i$. El **valor teórico de cotización** es:

$$\bar{A}_0 = A_{(D_1;\,1+q')\,\overline{n}|\,i} + {}^{n}/A_{(D_{n+1};\,1+q)\,\overline{\infty}|\,i} =$$

$$= D_1(1+i)^{-n}\,\frac{(1+q')^n-(1+i)^n}{q'-1} + D_{n+1}(1+i)^{-n}\,\frac{1}{i-q} =$$

$$= D_0(1+q')(1+i)^{-n}\left[\frac{(1+q')^n-(1+i)^n}{q'-i} + \frac{(1+q')^{n-1}(1+q)}{i-q}\right] \tag{39}$$

ya que $D_1 = D_0(1+q')$ y $D_{n+1} = D_1(1+q')^{n-1}\cdot(1+q)$.

La ecuación del **tanto de rendimiento** será:

$$A_0 = A_{(D_1;\,1+q')\,\overline{n}|\,i_a} + n/A_{(D_{n+1};\,1+q)\,\overline{\infty}|\,i_a} =$$

$$= D_0(1+q')(1+i_a)^{-n}\left[\frac{(1+q')^n-(1+i_a)^n}{q'-i_a} + \frac{(1+q')^{n-1}(1+q)}{i_a-q}\right] \tag{40}$$

teniéndose que calcular i_a por tanteos sucesivos.

Si después de n años el crecimiento se anula basta hacer $q=0$ en las expresiones anteriores.

Ejemplo 3.—Calcular el valor teórico de cotización de un título de nominal 1.000 pts. que cotiza al 125% si ha repartido en el último ejercicio un dividendo de 120 pts., se espera crezcan a una tasa del 15% durante los tres próximos años, a una tasa del 5% durante los cinco siguientes y posteriormente permanezcan constantes en el nivel máximo alcanzado. Tómese como tipo de interés de valoración: a) $i=12\%$; b) $i=15\%$; c) $i=17\%$; d) $i=20\%$.

El valor teórico de cotización en pesetas para el tanto i es:

$$\bar{A}_0 = A_{(D_1;\,1+q')\,\overline{3}|\,i} + {}^{3}/A_{(D_4;\,1+q)\,\overline{5}|\,i} + D_9\,{}^{8}/\mathbf{a}_{\overline{\infty}|\,i}$$

y por ser

$q'=0{,}15$; $q=0{,}05$; $D_1 = 120\times 1{,}15 = 138$; $D_4 = 120\times 1{,}15^3\times 1{,}05 = 191{,}63$

y $D_9 = D_4 \times 1{,}05^4 = 232{,}93$ se tiene:

$$A_0 = 138\ \frac{1-(1+i)^{-3}(1+0{,}15)^3}{i-0{,}15} + 191{,}63(1+i)^{-3}\ \frac{1-(1+i)^{-5}(1+0{,}05)^5}{i-0{,}05} +$$

$$+232{,}93(1+i)^{-8}\ \frac{1}{i} = \begin{cases} 1.701{,}02 \text{ pts.} & \text{si} \quad i = 12\% \\ 1.328{,}11 \text{ pts.} & \text{si} \quad i = 15\% \\ 1.146{,}12 \text{ pts.} & \text{si} \quad i = 17\% \\ 961{,}77 \text{ pts.} & \text{si} \quad i = 20\% \end{cases}$$

Para calcular el caso $i = 15\%$ se ha utilizado como valor del primer término $D_1 n(1+i)^{-1}$ que es el que corresponde cuando $1+i = 1+q$.

Las cotizaciones en enteros serían respectivamente:

170,10 ; 132,81 ; 114,61 ; 96,18

Ejemplo 4.—Calcular el tanto de rendimiento esperado de la acción del ejemplo 3 de acuerdo con su cotización de mercado del 125%.

Para calcular i_a se plantea la ecuación:

$$1.250 = 138\ \frac{1-(1+i_a)^{-3}(1+0{,}15)^3}{i_a-0{,}15} + 191{,}63(1+i_a)^{-3}\ \frac{1-(1+i_a)^{-5}(1+0{,}05)^5}{i_a-0{,}05} +$$

$$+232{,}93(1+i_a)^{-8}\ \frac{1}{i_a}$$

siendo su solución $i_a = 15{,}90\%$.

Ejemplo 5.—Calcular, para el tanto $i = 16\%$, los valores teóricos de cotización del título del ejemplo 3 para los principios de los años 1, 2, 3,... y el valor del PER.

Los valores teóricos de cotización pedidos y los dividendos son:

	138	158,7	182,51	191,63	201,21	211,27	221,84	232,93	232,93
$\bar{A}_0$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_4$	$\bar{A}_5$	$\bar{A}_6$	$\bar{A}_7$	$\bar{A}_8$	$\bar{A}_9$
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Determinación de los valores teóricos

$$\bar{A}_0 = 138\ \frac{1-(1+0{,}16)^{-3}(1+0{,}15)^3}{0{,}16-0{,}15} + {}^3/A_{(191{,}63;\,1{,}05)\,\overline{5}|0{,}16} + 232{,}93\ {}^8/\mathbf{a}_{\overline{\infty}|0{,}16} =$$

$= 1.235{,}78$ pts. ó 123,58 enteros

$$\bar{A}_1 = 158{,}7\ \frac{1-(1+0{,}16)^{-2}(1+0{,}15)^{-2}}{0{,}16-0{,}15} + {}^2/A_{(191{,}63;\,1{,}05)\,\overline{5}|0{,}16} + 232{,}93\ {}^7/\mathbf{a}_{\overline{\infty}|0{,}16} =$$

$= 1.295{,}51$ pts. ó 129,55 enteros

$$\bar{A}_2 = 182{,}51(1+0{,}16)^{-1} + {}^{1}/A_{(191{,}63;\,1{,}05)\,\overline{5|}\,0{,}16} + 232{,}93\ {}^{6}/\mathbf{a}_{\overline{\infty|}\,0{,}16} =$$

$= 1.344{,}10$ pts. ó $134{,}41$ enteros

$$\bar{A}_3 = 191{,}63\ \frac{1-(1+0{,}16)^{-5}(1+0{,}05)^{5}}{0{,}16-0{,}15} + 232{,}93\ {}^{5}/\mathbf{a}_{\overline{\infty|}\,0{,}16} =$$

$= 1.376{,}68$ pts. ó $137{,}66$ enteros

$$\bar{A}_4 = 201{,}21\ \frac{1-(1+0{,}16)^{-4}(1+0{,}05)^{4}}{0{,}16-0{,}15} + 232{,}93\ {}^{4}/\mathbf{a}_{\overline{\infty|}\,0{,}16} =$$

$= 1.405{,}26$ pts. ó $140{,}53$ enteros

$$\bar{A}_5 = 211{,}27\ \frac{1-(1+0{,}16)^{-3}(1+0{,}05)^{3}}{0{,}16-0{,}15} + 232{,}93\ {}^{3}/\mathbf{a}_{\overline{\infty|}\,0{,}16} =$$

$= 1.428{,}90$ pts. ó $142{,}89$ enteros

$$\bar{A}_6 = 221{,}84(1+0{,}16)^{-1} + 232{,}93(1+0{,}16)^{-2} + 232{,}93\ {}^{2}/\mathbf{a}_{\overline{\infty|}\,0{,}16} =$$

$= 1.446{,}26$ pts. ó $144{,}63$ enteros

$$\bar{A}_7 = 232{,}93(1+0{,}16)^{-1} + 232{,}93\ {}^{1}/\mathbf{a}_{\overline{\infty|}\,0{,}16} = 232{,}93\ \mathbf{a}_{\overline{\infty|}\,0{,}16} =$$

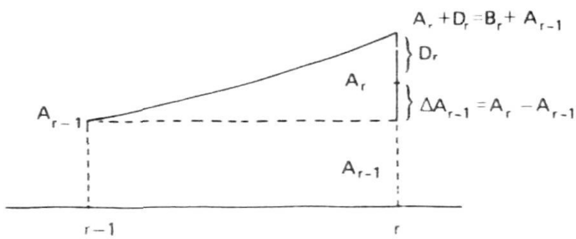
$= 1.455{,}81$ pts. ó $145{,}58$ enteros

Los valores sucesivos $\bar{A}_8$, $\bar{A}_9$, etc. coincidirán con $\bar{A}_7$.

El valor del PER, obtenido por la expresión $\sum_{r=1}^{p} D_r = 1.250$, es $p = 6{,}75$.

7.2.—VALORACION EN FUNCION DE LOS BENEFICIOS

Designando por B_r a los beneficios proporcionados por la acción en el año r, que estarán formados por los dividendos más las variaciones de cotización del título, se podrá representar el esquema esperado para el año r, así:



El **valor teórico de la acción**, en función de los beneficios esperados, evaluado al tanto i^* es:

$$\bar{A}_0 = \sum_{r=1}^{\infty} B_r(1+i^*)^{-r} = \sum_{r=1}^{\infty} D_r(1+i^*)^{-r} + \sum_{r=1}^{\infty} \Delta A_r(1+i_r^*)^{-r} \tag{41}$$

el cual debe coincidir con el obtenido en 7.1 en función de los dividendos. Por ello, y salvo el caso $\Delta A_r = 0$, debe ser $i^* \neq i$ pues en caso contrario se mostrarían desigualdades no justificadas incumpliéndose la relación que siempre debe darse:

$$\bar{A}_0 = \sum_{r=1}^{\infty} B_r(1+i^*)^{-r} = \sum_{r=1}^{\infty} D_r(1+i)^{-r} = \sum_{r=1}^{\infty} (B_r - \Delta A_r)(1+i)^{-r}$$

El **tanto de rendimiento** i_a^* se determinará en:

$$A_0 = \sum_{r=1}^{\infty} B_r(1+i_a^*)^{-r} \tag{42}$$

Los modelos de evaluación utilizados son análogos a los expuestos en los dividendos, sin más que sustituir el dividendo por los beneficios. Por ello sólo se exponen los casos de beneficios constantes y beneficios crecientes a una tasa moderada.

7.2.1.—Beneficios constantes

El **valor teórico de la acción** es:

$$\bar{A}_0 = B\, a_{\overline{\infty}|i^*} = B\, \frac{1}{i^*} \tag{43}$$

y del valor obtenido en 7.1.1, se sigue:

$$\bar{A}_0 = \frac{B}{i^*} = \frac{D}{i} \Rightarrow i^* = \frac{D+\Delta A}{\bar{A}_0} = i + \frac{\Delta A}{\bar{A}_0} \tag{44}$$

El **tanto de rendimiento** i_a^* se calcula en:

$$A_0 = B\, a_{\overline{\infty}|i_a^*} = B\, \frac{1}{i_a^*} \tag{45}$$

verificándose que:

$$A_0 = \frac{B}{i_a^*} = \frac{D}{i_a} \Rightarrow i_a^* = \frac{D+\Delta A}{A_0} = i_a + \frac{\Delta A}{A_0} \tag{46}$$

Si los valores teóricos y de cotización son próximos, como lógicamente debe ocurrir, la relación $\frac{\Delta A}{A_0} = \frac{\Delta A}{\bar{A}_0} = q^*$ recogerá la tasa de crecimiento (o decrecimiento) de la cotización, dándose:

$$i^* = i + q^* \quad ; \quad i_a^* = i_a + q^* \tag{47}$$

El valor del PER es:

$$\text{PER } p^* = \frac{A_0}{B} = \frac{1}{i_a^*} \tag{48}$$

verificándose las siguientes relaciones:

$$\frac{p^*}{p} = \frac{i_a}{i_a^*} \quad ; \quad p^* = p\ \frac{i_a}{i_a + q^*} \quad ; \quad p = p^*\ \frac{i_a + q^*}{i_a} \tag{49}$$

Ejemplo 6.—De un título que cotiza al 125% del nominal, se sabe que proporciona unos beneficios constantes del 20% de su valor nominal y se reparte, en concepto de dividendos, el 75% de los beneficios. Determinar su rentabilidad efectiva según sus beneficios y sus relaciones con la derivada de los dividendos.

Tanto de rendimiento i_a^*:

$$125 = 20\ \frac{1}{i_a^*} \Rightarrow i_a^* = \frac{20}{125} = 0{,}16$$

Tanto de rendimiento i_a:

$$125 = 20 \times 0{,}75\ \frac{1}{i_a} \Rightarrow i_a = \frac{15}{125} = 0{,}12$$

Crecimiento esperado del título y cotización dentro de un año:

$$q = i_a^* - i_a = 0{,}04 \quad ; \quad A_1 = A_0(1 + 0{,}04) = 130$$

PER según beneficios y según dividendos:

$$p^* = \frac{125}{20} = 6{,}25 \quad ; \quad p = 6{,}25\ \frac{0{,}16}{0{,}12} = 8{,}33$$

7.2.2.—Beneficios crecientes a una tasa moderada

Suponiendo que los beneficios crecen a una tasa moderada $q < i^*$ el **valor teórico de cotización** de la acción es:

$$\bar{A}_0 = A_{(B_1;\,1+q)\,\overline{\infty}|\,i^*} = B_1\ \frac{1}{i^* - q} = B_0(1 + q)\ \frac{1}{i^* - q} \tag{50}$$

siendo B_0 los beneficios obtenidos en el último ejercicio económico.

En el supuesto que los dividendos crezcan a la misma tasa q, la cotización al principio de un año cualquiera tendrá que satisfacer la siguiente relación:

$$\bar{A}_r = D_{r+1} \frac{1}{i-q} = B_{r+1} \frac{1}{i^*-q} \tag{51}$$

y se sigue:

$$\frac{i^*-q}{i-q} = \frac{B_{r+1}}{D_{r+1}} = \frac{B_0(1+q)^{r+1}}{D_0(1+q)^{r+1}} = \frac{B_0}{D_0}$$

siendo q^* el incremento de cotización del último año. Efectuando operaciones:

$$i^* = i + q^* + qq^* \quad ; \quad i = i^* - q^* - qq^* \tag{52}$$

La ecuación del **tanto de rendimiento** i_a^* y su solución son:

$$A_0 = B_1 \frac{1}{i_a^*-q} \Rightarrow i_a^* = \frac{B_1}{A_0} + q = \frac{B_0(1+q)}{A_0} + q \tag{53}$$

y la relación que guardan i_a^* con i_a es la misma que se ha obtenido entre i^* e i, por lo que:

$$\frac{i_a^*-q}{i_a-q} = 1 + q^* \quad ; \quad i_a^* = i_a + i_a q^* - qq^*$$

Para calcular el **PER** $= p^*$ se seguirá análogo camino que en 7.1.2, es decir:

$$A_0 = \sum_{r=1}^{p^*} B_r = \sum_{r=1}^{p^*} B_1(1+q)^{r-1} = B \frac{(1+q)^{p^*}-1}{q} = B_0(1+q) \frac{(1+q)^{p^*}-1}{q}$$

y tomando logaritmos:

$$PER = p^* = \frac{\log_e\left(\dfrac{A_0 q}{B_0(1+q)} + 1\right)}{\log_e(1+q)} \tag{55}$$

Los valores p^* y p están relacionados por la expresión:

$$\bar{A}_0 = B_0(1+q) \frac{(1+q)^{p^*}-1}{q} = D_0(1+q) \frac{(1+q)^{p}-1}{q} \tag{56}$$

de la que se sigue:

$$\frac{(1+q)^{p^*}-1}{(1+q)^{p}-1} = \frac{D_0}{B_0} = \frac{i-q}{i-q+q^*+qq^*} \tag{57}$$

y efectuando operaciones:

$$(1+q)^{p^*}=[(1+q)^{p}-1]\,\frac{D_0}{B_0}+1 \quad ; \quad (1+q)^{p}=[(1+q)^{p^*}-1]\,\frac{B_0}{D_0}+1 \qquad (58)$$

7.3.—VALORACION EN FUNCION DE ALGUNOS MODELOS CONCRETOS

En los puntos 7.1 y 7.2 se ha visto la posibilidad de evaluar, tomando valores constantes o crecientes, con crecimiento moderado y con crecimiento acentuado. En la práctica los modelos empíricos tienden a concretar las posibilidades de crecimiento (en dividendos o en beneficios) por lo que ahora procede enumerar algunos casos notables y efectuar sus representaciones gráficas. Cabe citar:

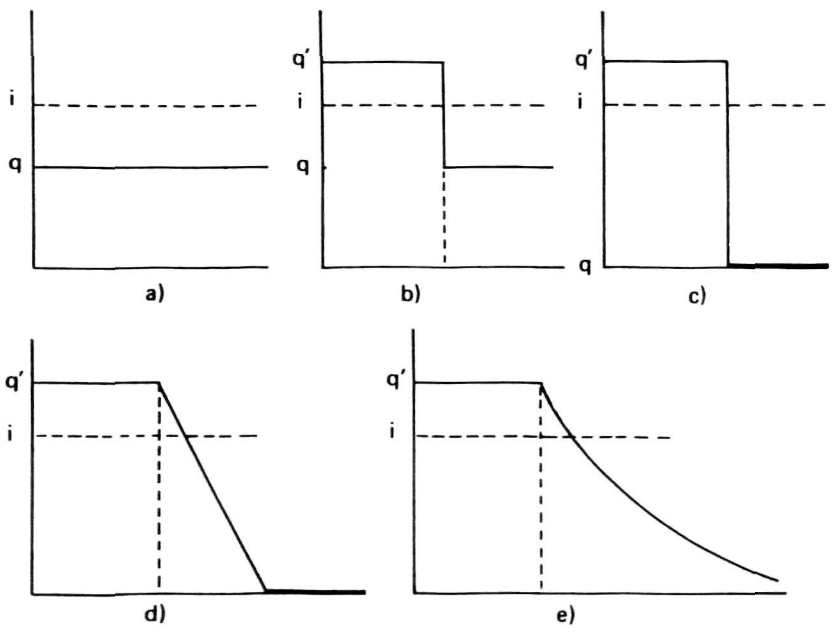
a) Modelo de **Gordon-Shafiro:** Toma un crecimiento q constante moderado.

b) Modelo **general:** El crecimiento q en los primeros años es alto para pasar después a un crecimiento q moderado.

c) Modelo **Odier:** Toma solamente un intervalo temporal (máximo 8-10 años) de crecimiento alto y después pasa a crecimiento cero.

d) Modelo de **Molodowsky:** Se diferencia del anterior en que considera un decrecimiento no brusco, hasta alcanzar el crecimiento cero.

e) Modelo de **Burr Williams:** Considera, como Molodowsky, un decrecimiento pero de tipo asintótico.



8.—VALORACION DE LETRAS FINANCIERAS

En época reciente se ha puesto en marcha un nuevo título valor consistente en letras de cambio libradas por Bancos o Cajas de Ahorro y negociadas en las Bolsas de Valores o de Comercio, con objeto de obtener recursos para sus clientes, a la vez que se ofrece a los inversores una alternativa más a la hora de colocar sus capitales.

La entidad financiera que desea operar en este mercado debe solicitarlo a la Junta Sindical de la Bolsa correspondiente. Una vez admitida la entidad, y firmado el contrato de compromisos que adquiere, puede iniciarse la emisión de letras entregándolas a dicha Junta Sindical.

La contratación de estas letras se efectúa en un corro específico los días fijados por la referida Junta. Previamente se anuncian todas las letras que se ofrecen agrupadas por entidades que las libran y ordenadas según sus cuantías nominales y vencimientos. La contratación se materializa por el sistema de subasta en la que se puja al alza el tanto de descuento comercial al que están dispuestos los compradores a quedarse con cada efecto. La oferta se inicia a un tanto de descuento que anuncia el Agente vendedor y en el caso de que no haya demanda a ese tanto se va incrementando de un octavo en un octavo por ciento hasta su adjudicación, pudiendo quedar sin contratar si alcanzado un tipo límite no ha habido demanda.

Es de destacar la buena acogida que este activo ha tenido en el mercado debido a sus atractivos de rentabilidad, seguridad y liquidez. Por lo que respecta a la rentabilidad los tipos de descuento, que habitualmente opera, proporciona tipos de interés equivalentes que suelen sobrepasar a los ofrecidos en las emisiones normales de títulos de renta fija. La seguridad de estos efectos radica en la solvencia de los emisores y en las garantías que ofrece la intervención de los Agentes de Cambio y Bolsa y en las cautelas jurídicas que se establecen. La liquidez resulta de la existencia de un fluido mercado secundario.

Desde el punto de vista fiscal, las letras tributan en el momento de su creación por el impuesto de Actos Jurídicos Documentados. Además el adquiriente de la letra debe tributar según la actual legislación española por la cuantía descontada según el concepto de rendimientos del capital mobiliario dentro del Impuesto sobre la Renta, no estando sujeto a retención; sin embargo, desde un planteamiento teórico, se señala por algunos autores que sería técnicamente más correcta la tributación por el concepto de incrementos o disminuciones patrimoniales.

Para razonar las distintas alternativas se introducen las siguientes notaciones:

V_0 = valor inicial o precio efectivo que la letra alcanza en el momento de su puesta en circulación o contratación inicial.

C = valor nominal del efecto o precio del título el día de su vencimiento.

n = duración del título o número de días que median entre la contratación inicial y el vencimiento del efecto.

V_s = valor o precio de cotización s días despueıs de su contratación inicial.

d = tanto de descuento fijado para determinar el precio de adquisición.

i = tanto de interés o de capitalización equivalente al tanto de descuento d.

i_v = tanto de interés del vendedor del título en s.

i_c = tanto de interés del comprador del título en s.

8.1.—ADQUISICION INICIAL DE LA LETRA Y MANTENIMIENTO DEL TITULO HASTA SU VENCIMIENTO

El inversor adquiere una letra en función de la rentabilidad que pueda proporcionarle, es decir, en función de su tanto de interés i_a.

Si el tanto de descuento del mercado es d, por el título de C pesetas nominales que vence dentro de n días hay que abonar un precio efectivo V_0, tal que

$$V_0 = C\left(1 - d\,\frac{n}{365}\right) \tag{59}$$

El tanto de capitalización equivalente que resulta es el valor i deducido a continuación:

$$V_0\left(1 + i\,\frac{n}{365}\right) = C\left(1 - d\,\frac{n}{365}\right)\left(1 + i\,\frac{n}{365}\right) = C \tag{60}$$

luego

$$i = \frac{d}{1 - d\,\dfrac{n}{365}} \tag{61}$$

expresa el valor de i, dado el tanto de descuento. La expresión

$$d = \frac{i}{1 + i\,\dfrac{n}{365}} \tag{62}$$

permitirá obtener d a partir del tanto de interés.

El inversor tiene un parámetro de decisión, que es i_a en capitalización, o su equivalente d_a en descuento. Estos están relacionados por:

$$\left(1 + i_a\,\frac{n}{365}\right)\left(1 - d_a\,\frac{n}{365}\right) = 1 \Rightarrow d_a = \frac{i_a}{1 + i_a\,\dfrac{n}{365}} \quad ; \quad i_a = \frac{d_a}{1 - d_a\,\dfrac{n}{365}} \tag{63}$$

La decisión inicial de compra se tomará siempre que

$$i_a \leqslant i \Leftrightarrow d_a \leqslant d$$

Ejemplo 1.—Determinar el precio efectivo que un inversor está dispuesto a pagar por una letra de 1.000.000 de pts. que se emite a 180 días si pretende obtener como mínimo una rentabilidad del 15% anual.

Haciendo uso de la (63) se tiene:

$$d_a = \frac{i_a}{1 + i_a\,\dfrac{n}{365}} = \frac{0{,}15}{1 + 0{,}15\,\dfrac{180}{365}} = 0{,}139668 \cong 13{,}97\,\%$$

y sustituyendo en (59) con el valor obtenido

$$V_0 = 1.000.000\left(1 - 0{,}1397\ \frac{180}{365}\right) = 931.156{,}16$$

valor máximo que está dispuesto a pagar para garantizarse el tanto del 15%.

8.2.—ADQUISICION INICIAL DE LA LETRA Y VENTA EN EL MERCADO SECUNDARIO

En el mercado secundario, si ya han transcurrido s días desde su contratación inicial, y el tanto de descuento de las letras es hoy d′, el efectivo que se obtiene es el valor V_s, tal que:

$$V_s = C\left(1 - d'\ \frac{n-s}{365}\right) \tag{64}$$

obteniendo el vendedor, a resultas de su operación, una rentabilidad i_v que verifica:

$$V_0\left(1 + i_v\ \frac{s}{365}\right) = V_s \Rightarrow i_v = \frac{V_s - V_0}{V_0}\ \frac{365}{s} \tag{65}$$

Obsérvese que si el inversor ha decidido vender será porque el tanto de descuento d′ es menor que d_a.

Ejemplo 2.—Si transcurridos 45 días el título del ejemplo anterior cotiza a 950.000 pts. ¿Cuál será el tanto de descuento que se está practicando en el mercado y la rentabilidad que obtendría por letra el contratante inicial si decide vender al precio de cotización?

Despejando d′ de (64) se tiene el tanto de descuento pedido, que es:

$$d' = \frac{C - V_s}{C}\ \frac{365}{n-s} = \frac{1.000.000 - 950.000}{1.000.000}\ \frac{365}{135} = 0{,}1352$$

La rentabilidad i_v se calcula por:

$$i_v = \frac{V_s - V_0}{V_0}\ \frac{365}{s} = \frac{950.000 - 931.156{,}16}{931.156{,}16} = \frac{365}{45} = 0{,}1641$$

8.3.—ADQUISICION DE LA LETRA EN EL MERCADO SECUNDARIO

El comprador en el mercado secundario al precio V_s, cuando han transcurrido s días puede obtener, si espera a su vencimiento, la rentabilidad i_c calculada por:

$$V_s\left(1 + i_c\ \frac{n-s}{365}\right) = C \Rightarrow i_c = \frac{C - V_s}{V_s}\ \frac{365}{n-s} \tag{66}$$

o sustituyendo V_s por el valor de (64):

$$C\left(1-d'\ \frac{n-s}{365}\right)\left(1+i_c\ \frac{n-s}{365}\right)=C\ \Rightarrow\ i_c=\frac{d'}{1-d'\ \dfrac{n-s}{365}} \tag{67}$$

Si el comprador del título en s decide venderlo k días después al precio V_{s+k}, obtendrá una rentabilidad i_v tal que:

$$V_s\left(1+i_v\ \frac{k}{365}\right)=V_{s+k}\ \Rightarrow\ i_v=\frac{V_{s+n}-V_s}{V}\ \frac{365}{k} \tag{68}$$

Ejemplo 3.—Una letra de 500.000 pts. nominales, emitida a un año, fue adquirida en el mercado secundario a los 150 días de su puesta en circulación a un tanto de descuento del 14%. Transcurridos 100 días fue vendida en el mercado a un tanto de descuento d′. ¿Cuál será su precio de venta y tanto efectivo obtenido por el inversor si d′ es el 13%, el 14 o el 15%?

El esquema que recoge la evolución del título es:

V_0	V_s	V_{s+k}	C = 500.000
0	s = 150	s + k = 250	n = 365

y los precios de adquisición y venta son:

$$V_s=C\left(1-d\ \frac{n-s}{365}\right)=500.000\left(1-0{,}14\ \frac{215}{365}\right)=458.767{,}12$$

$$V_{s+k}=C\left(1-d'\ \frac{n-s-k}{365}\right)=500.000\left(1-d'\ \frac{115}{365}\right)=\begin{cases}479.520{,}55 & \text{si}\quad d'=13\%\\ 477.945{,}20 & \text{si}\quad d'=14\%\\ 476.369{,}86 & \text{si}\quad d'=15\%\end{cases}$$

El tanto efectivo es el valor i_v que se obtiene en:

$$V_s\left(1+i_v\ \frac{k}{365}\right)=V_{s+k}\ \Rightarrow\ i_v=\frac{V_{s+k}-V_s}{V_s}\ \frac{365}{k}$$

y sustituyendo valores:

$$i_v=\frac{V_{s+k}-458.767{,}12}{458.767{,}12}\ \frac{365}{100}=\begin{cases}16{,}51\% & \text{si}\quad V_{s+k}=479.520{,}55\\ 15{,}26\% & \text{si}\quad V_{s+k}=477.945{,}20\\ 14{,}00\% & \text{si}\quad V_{s+k}=476.369{,}86\end{cases}$$

8.4.—TANTO EFECTIVO REAL DE LA OPERACION

Lo analizado ha sido considerando la operación pura, pero en ella inciden costes adicionales que es preciso tener en cuenta al analizar los tantos efectivos. Así, por ejemplo, el emisor de la letra ha de presentarla correctamente timbrada, lo que le ocasiona unos gastos iniciales a tener en cuenta; por otra parte, los Agentes mediadores perciben un corretaje tanto del vendedor como del comprador de la letra. Además, el comprador ha de pagar los gastos de custodia si, como es práctica generalizada en esta modalidad de operación, el título queda depositado en la Junta Sindical (lo cual permite la rápida y fácil transmisión en el mercado secundario si el comprador quiere recuperar liquidez), estos gastos suelen ser función de un determinado tanto por uno del nominal por cada mes o fracción.

Designando por:

T = Timbre de la letra según escala
β = Corretaje en tanto por uno que se gira sobre el nominal
g = Comisión de custodia mensual en tanto por uno
α = Tipo impositivo que grava el rendimiento del título
h = Número de meses que el título permanece en custodia (si $k/30$ es un número fraccionario h representa el entero por exceso).

Se tiene:

a) **Emisor de la letra**

Recibe neto un efectivo $E_p = V_0 - \beta C - T$ y entrega el nominal C a su vencimiento, luego su tanto efectivo pasivo i_p será la solución de la ecuación:

$$E_p\left(1 + i_p \frac{n}{365}\right) = C \Rightarrow i_p = \frac{C - E_p}{E_p} \frac{365}{n} \tag{69}$$

b) **Inversor en la letra**

Un ahorrador que adquiere una letra en s para venderla k días después tiene que efectuar un desembolso efectivo $E_a = V_s + \beta C$ y recibirá a cambio la cuantía neta $E_{a,s+k} = V_{s+k} - \beta C - hg - [(V_{s+k} - \beta C - hg) - E_{a,s}]\alpha$. Su tanto efectivo i_a verifica:

$$E_{a,s}\left(1 + i_a \frac{k}{365}\right) = E_{a,s+k} \Rightarrow i_a = \frac{E_{a,s+k} - E_{a,s}}{E_{a,s}} \frac{365}{k} \tag{70}$$

Ejemplo 4.—Estudiar los tantos efectivos de una letra de nominal 750.000 pts. emitida a 270 días si su tanto de descuento es el 12%, el timbre 3.000 ptas., el corretaje del agente el 2‰ del nominal, la comisión de custodia mensual el 3 por 100.000 del nominal por cada mes o fracción y el tipo impositivo sobre el rendimiento el 25%. ¿Cuál será el tanto efectivo que obtiene el contratante inicial si vende el efecto a los 130 días a un tanto de descuento del 10%?

El precio V_0 de la letra al emitir es:

$$V_0 = 750.000\left(1 - 0{,}12 \frac{270}{365}\right) = 683.424{,}66$$

y se tiene:

a) Emisor de la letra

$$E_p = 683.424{,}66 - 0{,}002 \times 750.000 - 3.000 = 678.924{,}66$$

$$i_p = \frac{750.000 - 678.924{,}66}{678.924{,}66} \frac{365}{270} = 0{,}1415$$

b) Inversor en la letra

$$E_a = V_0 + \beta C = 683.424{,}66 + 0{,}002 \times 750.000 = 684.924{,}66$$

$$V_s = 750.000\left(1 - 0{,}10\ \frac{270-130}{365}\right) = 721.232{,}88$$

Si el inversor mantiene la letra hasta su vencimiento obtiene un efectivo:

$$E_{a,n} = C - hg - [(C - hg) - E_a]\alpha = 750.000 - 9 \times 3\ \frac{750.000}{100.000} -$$

$$- [(750.000 - 202{,}5) - 684.924{,}66]0{,}20 = 736.822{,}93$$

y su tanto es:

$$i_a = \frac{736.822{,}93 - 684.924{,}66}{684.924{,}66}\ \frac{365}{270} = 0{,}1024$$

Si el inversor vende la letra a los 130 días recibe:

$$E_{a,s} = V_s - \beta C - hg - [(V_s - \beta C - hg) - E_a]\alpha = 721.232{,}88 - 1.500 -$$

$$-4 \times 3\ \frac{750.000}{100.000} - [(721.232{,}88 - 1.500 - 90) - 684.924{,}66]0{,}20 = 712.700{,}04$$

resultando

$$i_a = \frac{712.700{,}04 - 684.924{,}66}{684.924{,}66}\ \frac{365}{130} = 0{,}1139$$

9.—VALORACION DE PAGARES

9.1.—PAGARES DEL TESORO

Son títulos de Deuda Pública a corto plazo cuya misión básica es financiar déficits presupuestarios. La emisión se realiza por el Banco de España y la adjudicación se efectúa por el sistema de subasta competitiva aplicando el descuento comercial y variando el tanto de un dieciseisavo en un dieciseosavo de punto. Cualquier persona física o jurídica puede presentar peticiones a la subasta o bien puede hacerlo a través de las Entidades Delegadas del Tesoro, entre las cuales están la Sociedad Rectora de la Bolsa, los Mediadores de Bolsa y las Sociedades Mediadoras en el Mercado de Dinero (SMMD).

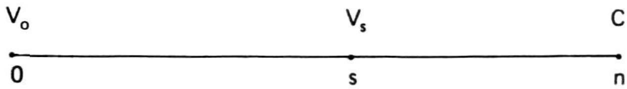
El mercado secundario se desglosa en dos submercados, uno para la modalidad de «anotaciones en cuenta en el Banco de España» en el que sólo participan los intermediarios financieros, y otro para las modalidades de «títulos fungibles» y de «títulos físicos» al que puede concurrir cualquier persona física o jurídica (*).

(*) La Bolsa de Madrid tiene organizado un corro diario en el cual, y en forma de subasta abierta, se efectúan las transacciones de las que surge el tipo de descuento a aplicar.

La liquidación se efectúa aplicando al nominal del Pagaré el descuento comercial por los días que faltan hasta su vencimiento; por lo tanto, la técnica operativa no ofrece dificultad y es similar a la descrita para las letras financieras. El corretaje, si interviene Agente, es un tanto por mil anual sobre el nominal contratado; así pues, se aplica en función del número de días que faltan hasta su vencimiento.

La modalidad de **Pagarés del Tesoro con compromiso de recompra** trata de captar los fondos de tesorería que puedan tener ociosos, en algunos momentos, las empresas o los particulares. El vendedor de los Pagarés (SMMD o Instituciones financieras) asume, en este caso, el compromiso público e irrevocable de volver a comprar los pagarés en el plazo acordado.

La operación se concierta mediante el acuerdo en el tipo de descuento a aplicar y en el plazo de la operación. Si se designa por d al tipo de descuento, por s al número de días que han de transcurrir para efectuar la recompra, por C al nominal, por V_0 la cuantía a entregar por el comprador y por V_s la cuantía a recibir s días después se tiene:



siendo n el número de días que faltan para el vencimiento.

Los valores V_0 y V_s verifican:

$$V_0 = C\left(1 - d\ \frac{n}{365}\right) \quad ; \quad V_0 = V_s\left(1 - d\ \frac{s}{365}\right) \tag{71}$$

de donde se sigue:

$$V_s = V_0\ \frac{1}{1 - d\ \dfrac{s}{365}} = C\ \frac{1 - d\ \dfrac{n}{365}}{1 - d\ \dfrac{s}{365}} \tag{72}$$

La rentabilidad medida en capitalización simple es el valor i tal que:

$$V_0 = \left(1 + i\ \frac{s}{365}\right) = V_s \Rightarrow i = \frac{V_s - V_0}{V_0}\ \frac{365}{s} \tag{73}$$

Ejemplo.—Un pagaré del Tesoro emitido a un año, es adquirido en el momento de su emisión a un tanto de descuento del 13% con garantía de recompra dentro de 4 meses. Determinar los precios de adquisición y recompra y la rentabilidad proporcionada si el nominal del pagaré es 1.000.000 de pts.

$$V_0 = 1.000.000(1 - 0{,}13) = 870.000$$

$$V_s = \frac{870.000}{\left(1 - 0{,}13\ \dfrac{4}{12}\right)} = 909.407{,}67$$

$$i = \frac{909.407{,}67 - 870.000}{870.000}\ \frac{12}{4} = 0{,}1359$$

9.2.—PAGARES DE EMPRESA

A mediados de octubre de 1982 se inició en las Bolsas de Madrid y Barcelona la utilización de este nuevo activo financiero de pagarés a la orden de características similares al «commercial paper», de gran difusión en Estados Unidos.

Estos pagarés los emiten las propias empresas y se negocian en Bolsa a través de un banco agente que actúa de colocador, si bien el riesgo corre por cuenta de la empresa emisora ya que se emiten sin garantía bancaria. Para reducir el riesgo de impago que pudiera haber, la empresa que emite estos pagarés a la orden ha de suscribir con el banco o grupo de bancos agentes una línea de crédito de cuantía igual, al menos, al volumen de pagarés que pueda tener en circulación y por un plazo mínimo de cinco años, con lo cual la empresa puede financiarse a largo plazo mediante la emisión de estos pagarés a corto (de duraciones inicialmente entre seis meses y un año). Debe tenerse en cuenta que esta línea de crédito garantiza la liquidez de los pagarés a su vencimiento pero no garantiza el riesgo de posible insolvencia futura del emisor de los pagarés.

La operativa es similar a la de las letras bursátiles y el tanto de descuento resultante depende de las condiciones del mercado en cada momento; lógicamente deben situarse algo por encima del correspondiente a las Letras y a los Pagarés del Tesoro. Para hallar el coste efectivo han de tenerse en cuenta el corretaje que percibe el Agente y la comisión bancaria por actuar como agente colocador, así como la correspondiente a la comisión por no disponibilidad del crédito concedido. Las operaciones en el mercado primario se realizan dos días a la semana; y en el mercado secundario a diario. También puede contratarse con cláusula de recompra.

Este mercado de pagarés a la orden es de gran atractivo para las empresas ya que les permite diversificar un poco más sus fuentes de financiación, además de que debe actuar como elemento estabilizador de los tipos de interés y descuento. Al ser a corto plazo y tener la cobertura de la línea de crédito, les permite emitir en cada momento justamente lo que se necesite, con lo cual el coste total final debe disminuir. Por otro lado si el coste de la colocación de pagarés supera al coste del crédito en el mercado se acudirá a este último, actuando de mecanismo estabilizador de los respectivos tantos de coste.

Los bancos agentes obtienen los beneficios correspondientes a las comisiones que perciben por la colaboración de los pagarés y por la no disponibilidad, o, en su caso por los intereses del crédito dispuesto.

10.—OPERACIONES CON VALORES

Los valores mobiliarios pueden ser objeto de intercambios, como todo bien económico, pero sus especiales características hacen que sobre ellos graviten operaciones que revisten peculiaridades propias.

Es común clasificar a las operaciones con valores mobiliarios en dos grupos: a) Operaciones de Bolsa y b) Operaciones que tienen por base los resultados obtenidos en las Operaciones de Bolsa.

Con el nombre de **operaciones de bolsa** se designa al conjunto de operaciones que pueden realizarse en las Bolsas de Comercio y que vienen descritas en su Reglamento. Este establece, en su artículo 56, que serán objeto de contratación bursátil: a) los efectos públicos y asimilados; b) los valores industriales y mercantiles y los certificados de participación en los fondos de inversión mobiliaria; c) las letras de cambio, libranzas, pagarés y cualesquiera otros valores mercantiles; d) los metales preciosos, divisas o moneda extranjera; e) los seguros y efectos comerciales contra riesgos terrestres o marítimos; g) los fletes, transportes, conocimientos y cartas de porte; h) la hipoteca naval; i) cualesquiera otros títulos u operaciones análogas a las expresadas en los apartados anteriores, que sean lícitos conforme a las leyes.

Las contrataciones frecuentes son las que se realizan sobre valores mobiliarios si bien los últimos tiempos se ha desarrollado un amplio mercado para la contratación de letras financieras, pagarés del tesoro y pagarés de empresa.

Este grupo de operaciones de bolsa comprende negociaciones de valores que admiten múltiples combinaciones entre las que cabe citar: operaciones **al contado**, operaciones **a plazos**, y operaciones **de dobles**.

El segundo grupo de operaciones u **operaciones basadas en los resultados de las operaciones bursátiles**, lo constituyen las emisiones en el mercado primario (suscripción y colocación de títulos), descuentos de cupones, pignoraciones, permutas y conversiones, etc. Las más importantes son las que hacen referencia a la suscripción y colocación de nuevas emisiones de obligaciones, ampliaciones de capital, puesta en circulación de letras y pagarés.

Todas las operaciones enumeradas, así como el volumen de ellas, dependen del **precio o cotización** que en cada sesión alcanza cada especie de títulos negociados. La cotización es el justo precio del momento y su transcendencia se extiende, no sólo para las negociaciones de la Bolsa, sino para las de fuera de ella.

Es la cotización la que fija el orden económico, la dirección y límite de la inversión de capitales, el límite de la especulación, así como el precio para la liquidación.

La cotización adopta distintas formas según que se tomen como referencia los cupones (intereses o dividendos) o los títulos.

Respecto de los cupones cabe distinguir dos sistemas de expresiones de cotización: Cotización tal cual y cotización seca.

La **cotización tal cual** consiste en expresar el valor del título comprendiendo en la cotización todos los derechos que tiene el poseedor. Esta cotización también recibe los nombres de **cotización ordinaria**, de **curso corriente** y **a cupón comprendido**.

El cedente, al transmitir el título incluye en el precio de la transmisión la parte de intereses que puedan haber correspondido desde el último vencimiento hasta la fecha de cesión. Si el título que se transmite es una acción, a la que ha sido pagada un dividendo, a cuenta de los beneficios del año, en el precio se entiende que no va incluido el valor de ese dividendo a cuenta si ya ha sido hecho efectivo, y si el título no ha ejercido todavía el derecho de cobro, será necesario comprender el valor de ese cupón.

La **cotización seca** no incluye en el precio el valor de los intereses que corresponden desde la fecha en que venció el último cupón y la de negociación. Suele denominársela indistintamente **cotización seca**, a **curso seco**, a **cupón cortado** o **ex-cupón**.

Cuando se toman como referencia los títulos también cabe distinguir dos formas de cotización: **Cotización porcentual y cotización por título**. En la primera el curso viene referido mediante una expresión porcentual en la que el valor nominal se identifica con 100 unidades porcentuales (o enteros). Si la cotización es por título se indica el precio completo en unidades monetarias corrientes.

También, en ocasiones, al referirse a las operaciones unas veces se hace alusión al valor nominal y otras a los rendimientos periódicos que produce el nominal correspondiente.

Conviene resaltar que, en cada sesión bursátil en la que se efectúan operaciones, y para cada título se distinguen los cursos, precios o cotizaciones de **apertura, cierre, máximo, mínimo** y **medio**. Para fijar los cursos y la contratación se forman grupos homogéneos de títulos, llamados **corros**.

Además, los títulos se clasifican por clases y para cada clase de títulos se dan cursos **al contado, a fin corriente, a fin próximo** y **con prima** (salvo el primero los restantes son propios de operaciones a plazo).

Las operaciones de bolsa se llevan a cabo por medio de **Mediadores de Bolsa** cuya misión es relacionar al comprador y vendedor hasta que lleguen a un acuerdo, así como contratar, en nombre de sus comitentes, tanto para compra, como para venta, o para cualquier clase de operaciones sobre valores. Estos intermediarios dan carácter oficial a las operaciones intervenidas, como fedatarios públicos, e inscriben el contrato que sella la operación en su libro-registro, así como en el Registro general de operaciones de la Bolsa.

Además de los documentos citados existen otros específicos. El comprador recibe de su Agente intermediario los títulos, en unión de una **póliza** para acreditar la propiedad en favor de su tenedor o titular. El vendedor, al entregar los títulos a su Agente, facilita a éste otro documento llamado **vendí**.

Aunque en los epígrafes siguientes se procede a estudiar las operaciones enunciadas anteriormente, se pasa en el presente a efectuar una somera descripción de las fundamentales.

Las **operaciones de bolsa al contado** consisten en un intercambio de dinero por títulos al precio pactado en el momento. Con la entrega de los títulos por el vendedor y el dinero por parte del comprador se consuma el contrato de compra-venta.

Las **operaciones a plazo o término** son aquellas en las que el acuerdo de la compraventa de los títulos no coincide con la liquidación de ella que se deja para un momento posterior en el que deberán entregarse mutuamente los contratantes dinero y títulos.

Las **operaciones de dobles** consisten en la compra al contado o a plazos de valores y en la reventa simultánea a plazo y a precio determinado a la misma persona de títulos de la misma especie.

La **pignoración de valores** es una forma de obtener créditos con garantía real cuando se exigen en prenda valores mobiliarios.

Las **emisiones de títulos** en mercado primario son operaciones que tienen por objeto obtener medios de financiación que usualmente se utilizan para efectuar inversiones reales.

11.—OPERACIONES DE BOLSA AL CONTADO

Estas operaciones consisten en intercambios simultáneos de dinero por títulos al precio pactado en el momento. El vendedor hace entrega de los títulos al Agente mientras que el comprador aporta el dinero, procediéndose de inmediato a la consumación del contrato de compraventa entregando el Agente simultáneamente los títulos al comprador y el dinero al vendedor.

En esquema, la operación de bolsa al contado puede recogerse por:

$$\boxed{\text{COMPRADOR}} \quad \underset{\text{Títulos}}{\overset{\text{Dinero}}{\rightleftarrows}} \quad \boxed{\text{MEDIADOR}} \quad \underset{\text{Dinero}}{\overset{\text{Títulos}}{\leftrightarrows}} \quad \boxed{\text{VENDEDOR}}$$

La **finalidad fundamental** para el vendedor es la de **proporcionar liquidez** y para el comprador es adquirir los derechos a unos rendimientos futuros (fijos o variables) mediante la **colocación de sus fondos**.

También tienen estas operaciones un **fin secundario**: proporcionar posibilidades limitadas de **especulación**. Los **alcistas** esperan que suba la cotización de los títulos y compra hoy para vender posteriormente a cotizaciones más elevadas. Los **bajistas** creen en una próxima bajada de las cotizaciones por lo que venden para recomprar en períodos posteriores a precios más bajos.

Las operaciones al contado deben consumarse en el día o a lo sumo al día siguiente. Ahora bien, como hay posibilidades de cursar órdenes de compra-venta entre plazas distintas, el perfeccionamiento del acuerdo es usual que se difiera unos días. Para estos supuestos de pequeño diferimiento en la liquidación se suelen regular las denominadas **operaciones a días**; sus características son expuestas públicamente y el plazo de liquidación no suele superar los siete u ocho días desde su concierto.

Este retraso, regulado por los propios Reglamentos y organización interior de las bolsas, puede ser aprovechado para realizar operaciones en **descubierto** buscando beneficiarse de la diferencia de cambios existentes entre el acuerdo y la liquidación del contrato. El procedimiento consiste en vender títulos que no se tienen en la actualidad con la esperanza de adquirirlos a un cambio inferior antes de la liquidación. El Reglamento de la Bolsa prohíbe estas operaciones de descubierto, pues exige la previa propiedad de los títulos.

La contratación bursátil se establece entre el Mediador que tiene orden de compra y el Agente que tiene orden de venta.

En el caso de que en un mismo Mediador recaigan las órdenes de compra y de venta de un mismo título aparece la figura denominada aplicación de títulos.

En las operaciones al contado, el problema que se plantea es el de determinar el importe de la compra y el producto de la venta, siendo necesario para su determinación los siguientes elementos:

C: valor nominal del título.
V: valor efectivo.
N: número de títulos comprados o vendidos.
c: tipo de cambio, curso o cotización a que se efectúa la transacción.
c_c: tipo de cambio efectivo a que resulta la operación al comprador.

c_v: tipo de cambio efectivo de la operación para el vendedor.
g_c: corretaje en tanto por uno que cobra el Mediador por su intervención.
g_b: comisión bancaria en tanto por uno que percibe el banco si se efectúa con su mediación.
F: gastos fijos o no proporcionales, como la póliza, Vendi, etc.
α: tipo impositivo del impuesto indirecto (II) si lo hay.

El efectivo a desembolsar (o ingresar) para comprar (vender) N títulos es:

a) En unidades monetarias

$$E = N \cdot V = NC \frac{c}{100} \tag{74}$$

b) En enteros o cotización porcentual

$$E = N \times 100 \frac{c}{100} = Nc \tag{75}$$

pero al existir gastos para ambas partes, el efectivo para el comprador o para el vendedor discrepará del expuesto. Así se tiene:

1) **Efectivo a desembolsar por el comprador**

La compra de N títulos obliga a pagar

$$\begin{aligned} E_c &= NC \frac{c}{100} [1 + g_c + g_b(1+\alpha)] + F = \\ &= NV[1 + g_c + g_b(1+\alpha)] + F \end{aligned} \tag{76}$$

resultando un cambio efectivo para el comprador c_c tal que:

$$E_c = NC \frac{c_c}{100} \Rightarrow c_c = 100 \frac{E_c}{NC} \tag{77}$$

2) **Efectivo a recibir por el vendedor**

El neto que se percibe por la venta es:

$$\begin{aligned} E_v &= NC \frac{c}{100} [1 - g_c - g_b(1+\alpha)] - F = \\ &= NV[1 - g_c - g_b(1+\alpha)] - F \end{aligned} \tag{78}$$

que equivale al cambio efectivo c_v que satisface:

$$E_v = NC \frac{c_v}{100} \Rightarrow c_v = 100 \frac{E_v}{NC} \tag{79}$$

Ejemplo 1.—Determinar el importe de la compra de 1.000 acciones de 500 pts. nominales cada una, si cotizan al cambio del 115%, teniendo en cuenta que el corretaje es el 2,5‰, la comisión bancaria el 1,5‰, el impuesto indirecto el 5% sobre la comisión bancaria y la póliza 1.000 pts. ¿Cuál será el cambio efectivo?

Aplicando la fórmula (76) se tiene:

$$E_c = 1.000 \times 500 \, \frac{115}{100} \, [1 + 0{,}0025 + 0{,}0015(1 + 0{,}05)] + 1.000 = 578.343{,}1$$

y la liquidación a presentar al comprador es:

500.000 pts. nominales al 115%	= 575.000 pts.
Corretaje 2,5‰ s/575.000	= 1.437,5
Comisión bancaria 1,5‰ s/575.000	= 862,5
II 5% s/862,5	= 43,1
Póliza	= 1.000
Total	= 578.343,1

El cambio efectivo se obtiene por aplicación de la (77) es:

$$c_c = 100 \, \frac{E_c}{NC} = 100 \, \frac{578.343{,}1}{500.000} = 115{,}67\%$$

Ejemplo 2.—Calcular el importe que recibirá el vendedor de los títulos del ejemplo anterior si los corretajes y comisiones son los mismos y el importe del Vendí asciende a 800 pts. ¿Cuál es el cambio efectivo?

Sustituyendo en la (78) resulta:

$$E_v = 1.000 \times 500 \, \frac{115}{100} \, [1 - 0{,}0025 - 0{,}0015(1 + 0{,}05)] - 800 = 571.856{,}9$$

recibiendo el vendedor la siguiente liquidación:

500.000 pts. nominales al 115%	= 575.000
Corretaje 2,5‰ s/575.000	= 1.437,5
Comisión bancaria 1,5‰ s/575.000	= 862,5
II 5% s/862,5	= 43,1
Vendí	= 800
Total	= 571.856,9

El cambio efectivo asciende a:

$$c_v = 100 \, \frac{E_v}{NC} = 100 \, \frac{571.856{,}9}{500.000} = 114{,}37\%$$

Ejemplo 3.—Obtener el número de títulos que se pueden adquirir con 300.000 pts., sabiendo que el nominal de cada título es 1.000 pts., su cotización el 80% del nominal, el corretaje el 3‰ y los gastos de póliza 700 pts.

La fórmula (76) cuando no hay intervención bancaria queda así:

$$E_c = NC \frac{c}{100} (1 + g_c) + F$$

y despejando:

$$N = \frac{E_c - F}{C \frac{c}{100} (1 + g_c)} = \frac{300.000 - 700}{1.000 \frac{80}{100} (1 + 0{,}003)} = 373{,}01$$

pudiendo adquirirse 373 títulos.

El efectivo invertido es:

373.000 nominales al 80%	298.400,0
Corretaje 3‰ s/298.400	895,2
Póliza	700,0
Total	299.995,2

y quedaría un resto de 300.000 − 299.995,2 = 4,8 pts.

12.—OPERACIONES DE BOLSA AL CONTADO CON CREDITO

Con esta denominación se recogen las operaciones al contado en las que la Sociedad Rectora de Bolsa (SRB), a demanda del interesado, concede a través del Mediador un crédito en dinero al comprador o en títulos al vendedor.

Desde la perspectiva de la contratación la operatoria es similar a la de las operaciones al contado descritas en el epígrafe anterior. Los títulos sobre los que se puede operar son los que determina la SRB, generalmente múltiplos de 100.

El plazo de crédito concedido a la operación se fija hasta final de mes en las operaciones realizadas en la primera quincena y al final del mes siguiente en las realizadas en la segunda quincena. Además, cabe concederse hasta dos prórrogas de un mes cada una que deben solicitarse dos días antes de finalizar el plazo.

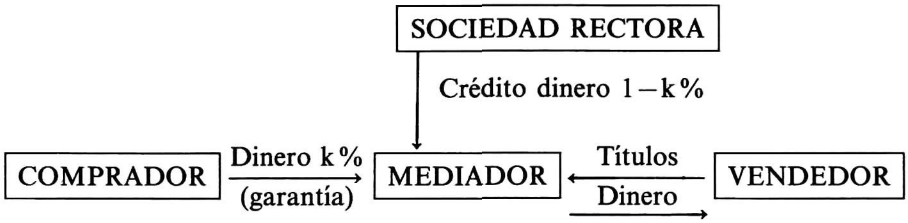
El dinero que se concede como crédito al comprador suele proceder del mercado interbancario y el tipo de interés al que se presta es fijado semanalmente por la SRB en función de los que se aplican en el citado mercado interbancario. Respecto a la cesión de títulos en las operaciones de venta con crédito, está previsto establecer una comisión.

El crédito que se facilita a través del Mediador es del 1 − k% como máximo en caso de compra de títulos y el total de títulos en caso de venta. En ambos casos ha de entregarse como mínimo un k% del importe de la operación como garantía inicial. Esta garantía habrá de complementarse si los títulos bajan más de un 10 % en el caso de compra o si suben más de un 10% en el caso de venta.

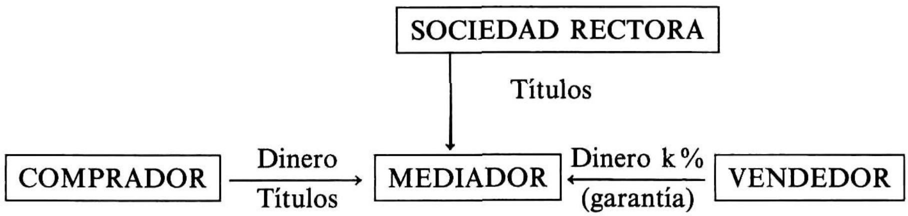
Los derechos económicos de los títulos cedidos en las ventas con crédito corresponden al vendedor, y en las compras con crédito corresponden al comprador. El Mediador mediador realiza la oportuna liquidación con el ordenante al cancelarse la operación.

La operación al contado con crédito puede representarse así:

a) Operación de compra con crédito



b) Operación de venta con crédito



Además, el comprador con crédito debe firmar una orden irrevocable de venta de los títulos al Mediador y el vendedor con crédito firma una orden irrevocable de compra a su Mediador. En la liquidación de la operación (voluntaria o forzosa) el Mediador ejecuta esas órdenes irrevocables, salvo que el ordenante aporte el dinero o los títulos que le fueron entregados a crédito.

El interés de estas modalidades de operaciones con crédito radica fundamentalmente en la posibilidad de multiplicar los resultados (positivos o negativos) por quien hace uso del crédito. Obsérvese que al exigirse una cobertura del k % en la operación, el comprador o vendedor a crédito puede efectuar una operación por un importe varias veces superior a los medios propios que dispone. Este efecto es conocido como **apalancamiento** y no es otra cosa que la posibilidad de incrementar la especulación por parte del inversor bursátil (comprador o vendedor a crédito). El límite teórico de especulación o apalancamiento máximo es el valor $m = 1/1 - k$, siendo k el tanto por uno de la garantía.

El comprador de crédito es un **alcista**, pues espera que las cotizaciones aumenten y lucrarse por la diferencia existente entre el precio de compra y el precio de venta en el momento de liquidar la operación. Por su parte, el vendedor de crédito adopta una posición **bajista** por operar al contrario.

La **operatoria** con crédito al mercado es la siguiente:

12.1.—OPERACION CON CREDITO AL COMPRADOR

El comprador con crédito suele operar en descubierto parcial utilizando el apalancamiento. Al cancelarse la operación puede quedarse con los títulos devolviendo el préstamo al Mediador, o bien, le comunica que ejecute la orden irrevocable de venta de los títulos comprados con crédito. La liquidación que presente el Mediador comprenderá los gastos (corretaje, póliza, etc.) y los intereses por el crédito utilizado, así como la devolución de la cobertura y la diferencia entre el importe inicial de la compra de acciones y el resultado de su venta final. Esta liquidación es, pues, normalmente por diferencias y la ganancia (pérdida) está unida a la subida (bajada) de la cotización.

Para una operación de n días de duración, siendo V_n la cotización esperada, se tiene:

$$NC\,\frac{c_0}{100}=NV_0=\begin{cases} kNV_0 \\ \quad + \\ (1-k)NV_0 \end{cases} \qquad\qquad NV_n=NC\,\frac{c_n}{100}$$

$$\overline{0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n}$$

con k coeficiente de cobertura exigido al comprador, y c_0 y c_n los cambios del título en el origen y final de operación respectivamente.

Llegados al final de la operación el comprador puede optar entre pagar el importe del préstamo o que se ejecute la orden de venta firmada en el origen. Resulta:

a) **Pago del préstamo**

El comprador, por poseer un valor en títulos NV_n desembolsa las siguientes cuantías:

Cobertura o aportación inicial $=kNV_0$

Corretaje del agente $=g_cNV_0$

Póliza $=F$

Préstamo:

— Devolución del principal $=(1-k)NV_0$

— Comisión de apertura $=g_a(1-k)NV_0$

— Intereses e impuestos II $=(1-k)NV_0 i\,\frac{n}{365}\,(1+\alpha)$

cuya suma total es:

$$\begin{aligned} E_c &= NV_0\left[1+g_c+(1-k)\left(g_a+i\,\frac{n}{365}\,(1+\alpha)\right)\right]+F= \\ &= NC\,\frac{c_0}{100}\left[1+g_c+(1-k)\left(g_a+i\,\frac{n}{365}\,(1+\alpha)\right)\right]+F \end{aligned} \tag{80}$$

Esta forma de compra resulta al cambio efectivo c_c tal que:

$$E_c=NC\,\frac{c_c}{100} \Rightarrow c_c=100\,\frac{E_c}{NC}>c_0$$

El beneficio o pérdida teóricos viene dado por la diferencia $B_T = NV_n - E_c$; pero el real sería el que resulta de comparar el líquido $E_v = NV_n(1 - g_c) - F$, obtenido con la posible venta, con E_c.

El cambio efectivo de venta c_v se calcula así:

$$E_v = NC \frac{c_v}{100} \Rightarrow c_v = 100 \frac{E_v}{NC} < c_n$$

El beneficio o pérdida real viene medido por:

$$B_r = E_v - E_c \lesseqgtr 0 \Leftrightarrow \frac{E_v}{E_c} = \frac{c_v}{c_c} \lesseqgtr 1 \tag{81}$$

Ejemplo 1.—Obtener el coste efectivo de la compra con crédito de unos títulos si las características de la operación son:

— **Mercado de valores: $N = 1.000$; $C = 500$; $c_0 = 45\%$; $F = 1.500$; $g_c = 2{,}5‰$.**

— **Préstamo: $g_a = 1{,}5\%$; $1 - k = 0{,}75$; $n = 40$; $i = 18\%$; $\alpha = 5\%$.**

Teniendo en cuenta que $NV_0 = 1.000 \times 500 \dfrac{45}{100} = 225.000$ y aplicando (80) se tiene como coste efectivo:

$$E_c = 225.000\left[1 + 0{,}0025 + 0{,}75\left(0{,}0015 + 0{,}18 \frac{40}{365} (1 + 0{,}05)\right)\right] + 1.500 =$$
$$= 225.000 + 4.310{,}83 + 1.500 = 230.810{,}83$$

El cambio de compra efectivo es:

$$c_c = 100 \frac{E_c}{NC} = 100 \frac{230.810{,}83}{500.000} = 46{,}16\%$$

Ejemplo 2.—Calcular los beneficios teórico y real de la operación del ejemplo anterior si la cotización o cambio final de la operación es: a) el 50%; b) el 40%. Tómese como corretaje del Mediador en la venta el 2,5‰y vendía por valor de 1.500 pts.

Beneficio o pérdida teóricos:

$$B_T = NV_n - E_c = NC \frac{c_n}{100} - E_c$$

Beneficio o pérdida reales:

$$B_r = E_v - E_c = \left[NC \frac{c_n}{100} (1 - g_c) - F\right] - E_c$$

a) Cotización al 50%

$$B_T = 1.000 \times 500 \frac{50}{100} - 230.810{,}83 = 19.189{,}17$$

$$B_r = \left[1.000 \times 500 \frac{50}{100} (1 - 0{,}0025) - 1.500\right] - 230.810{,}83 = 17.064{,}17$$

b) Cotización al 40%

$$B_T = 1.000 \times 50 \ \frac{40}{100} - 230.810{,}83 = 30.810{,}83$$

$$B_r = \left[1.000 \times 500 \ \frac{40}{100} \ (1 - 0{,}0025) - 1.500 \right] - 230.810{,}83 = -32.810{,}83$$

Ejemplo 3.—Determinar el tipo de cambio para que el beneficio sea nulo en la operación del ejemplo 1.

Igualando a cero B_T o B_r se tiene:

$$\text{si} \quad B_T = 0 \Rightarrow c_n = 100 \ \frac{E_c}{NC} = 100 \ \frac{230.810{,}73}{500.000} = 46{,}16\%$$

$$\text{si} \quad B_r = 0 \Rightarrow c_n = 100 \ \frac{E_c + F}{(1 - g_c)NC} = 100 \ \frac{232.310{,}83}{498.750} = 46{,}58\%$$

b) Ejecución de orden de venta

El Mediador, llegado al final de la operación, ejecuta la orden irrevocable de venta que tenía firmada desde el origen y obtiene un efectivo por la venta:

$$E_v = NV_n(1 - g_c) - F = NC \ \frac{c_n}{100} \ (1 - g_c) - F \tag{82}$$

quedando como beneficio o pérdida de la operación la diferencia entre (82) y (80), es decir, $E_v - E_c = B_r$.

Después de practicar el prestamista su correspondiente liquidación (principal, intereses y comisión) y abonar impuestos, el neto o líquido que resulta para el inversor en la operación, es:

$$(E_v - E_c) + kNV_0 \tag{83}$$

cuyo beneficio es idéntico al conseguido en (81).

Ejemplo 4.—Determinar el beneficio o pérdida especulativos que puede obtener un inversor que dispone de 300.000 pts. si compra a crédito títulos de 250 pts. nominales cuya cotización actual es el 120% y las características que inciden en la operación son:

Préstamo del 75% del valor invertido.

Duración de la operación 85 días.

Tipo de interés del préstamo el 20%.

II sobre intereses del préstamo el 5%.

Comisión de apertura del préstamo el 3,5‰.

Comisiones del Mediador en la compra y en la venta del 3‰ sobre el valor de cotización.

Póliza y Vendí de 2.000 pts. en cada caso.

Cotización esperada en la venta: a) el 110%; b) el 135%.

Precio del título: $V_0 = C \dfrac{c_0}{100} = 250 \dfrac{120}{100} = 300.$

Número de títulos a adquirir: $N = \dfrac{300.000}{0{,}25 V_0} = 4.000.$

Importe del crédito que se concede: $0{,}75 N V_0 = 900.000.$

Coste total de la operación de compra (según fórmula 80):

$$E_c = 1.200.000 \left[1 + 0{,}003 + 0{,}75 \left(0{,}0035 + 0{,}20 \frac{85}{365} (1 + 0{,}05) \right) \right] + 2.000 =$$

$$= 1.200.000 + 50.763{,}70 + 2.000 = 1.252.763{,}70$$

Efectivo obtenido en la venta (según fórmula 82):

$$E_v = 1.000.000 \frac{c_n}{100} (1 - 0{,}003) - 2.000 = \begin{cases} 1.096.700, & \text{si} \quad c_n = 110\% \\ 1.345.950, & \text{si} \quad c_n = 135\% \end{cases}$$

Beneficio o pérdida de la operación:

$$B_r = E_v - E_c = \begin{cases} -103.300, & \text{si} \quad c_n = 110\% \\ 145.950, & \text{si} \quad c_n = 135\% \end{cases}$$

Líquido obtenido por el inversor:

$$(E_v - E_c) + 0{,}25 N V_0 = \begin{cases} 196.700, & \text{si} \quad c_n = 110\% \\ 445.950, & \text{si} \quad c_n = 135\% \end{cases}$$

Rendimiento o pérdida unitarios de la operación:

$$\frac{E_v - E_c}{0{,}25 N V_0} = \begin{cases} -0{,}443 \ = -34{,}43\%, & \text{si} \quad c_n = 110\% \\ 0{,}4865 = 48{,}65\%, & \text{si} \quad c_n = 1{,}35\% \end{cases}$$

12.2.—OPERACION CON CREDITO AL VENDEDOR

El vendedor con crédito es usual que actúe en descubierto parcial y utilice el apalancamiento. Cuando la operación debe cancelarse puede aportar títulos de su propia cartera con lo que desaparecería la cesión inicial; pero lo habitual es la liquidación por diferencias. En este caso, el Mediador hace uso de la orden irrevocable de compra de títulos utilizando el dinero que retiene por la venta primitiva con crédito. Devuelve así los títulos al prestamista, liquida los corretajes y comisiones de la cesión y la diferencia entre la venta inicial y la compra final al inversor ordenante de la venta con crédito. Esta liquidación por diferencias proporciona una ganancia (pérdida) que está vinculada a la baja (subida) de las cotizaciones, ya que el vendedor a crédito es bajista.

En una operación de n días de duración, en la que se ceden N títulos que cotizan a un valor V_0 y que se espera coticen al valor V_n al final de ella, se tiene:

$$NV_0 = NC\,\frac{c_0}{100} \qquad\qquad NV_n = NC\,\frac{c_n}{100}$$

$$E_v = NV_0(1-g_c) - F \qquad\qquad E_c = NV_n(1+g_c) + F$$

0 n

siendo E_v y E_c los efectivos de venta y compra. El valor de los títulos cedidos es NV_0 y el depósito que se exige como garantía al vendedor, kNV_0, siendo k el coeficiente de cobertura.

Al final de la operación el vendedor puede optar por aportar títulos o por que se ejecute la orden irrevocable de compra en poder del Mediador. Los resultados de cada una de estas decisiones son:

a) **Aportación de títulos por el vendedor**

El vendedor entrega al Mediador los N títulos y recibe de éste como liquidación el efectivo E_v obtenido por la venta y el depósito inicial, menos las comisiones de cesión. Si éstas se designan por g_p en tanto por uno, se tiene:

$$E_v + kNV_0 - g_pNV_0 \tag{84}$$

Nótese que estas comisiones actúan como un alquiler *sui géneris* de títulos.

Como el vendedor habrá desembolsado E_c al adquirir los títulos (en estos momentos o anteriormente), el beneficio obtenido por la operación será:

$$B_r = (E_v + kNV_0 - g_pNV_0) - (E_c + kNV_0) = E_v - E_c - g_pNV_0 \tag{85}$$

Para calcular el beneficio unitario es necesario conocer el momento de la compra de títulos, si éste ha sido en el instante de la entrega, el tipo unitario de beneficio será B_r/kNV_0.

b) **Ejecución de la orden de compra**

Si el Mediador ejecuta la orden irrevocable de compra, del dinero que tiene en su poder tiene que dedicar E_c para adquirir los títulos, que entregará a la SRB junto con la comisión de cesión, y presentará como liquidación al vendedor:

$$kNV_0 + E_v - E_c - g_pNV_0 \tag{86}$$

El beneficio especulativo del vendedor coincidirá con el del caso anterior si la compra se efectúa al mismo precio V_n.

Ejemplo 5.—Estudiar la operación de venta de títulos con crédito al vendedor si sus características son:

$$N = 2.000 \quad ; \quad C = 1.000 \quad ; \quad c_0 = 75\% \quad ; \quad g_c = 0{,}0025$$

$$g_p = 0{,}015 \quad ; \quad F = 2.000 \quad ; \quad k = 0{,}25 \quad ; \quad n = 80$$

y se ejecuta la orden de compra por el Mediador en los supuestos:

a) $c_n = 80\%$ **;** **c)** $c_n = 65\%$.

Valor de los títulos cedidos: $NC \frac{c_0}{100} = 1.500.000.$

Garantía inicial: $kNC \frac{c_0}{100} = 375.000.$

Efectivo venta: $E_v = 1.500.000(1 - 0{,}0025) - 2.000 = 1.494.250.$

Efectivo compra:

$$E_c = 2.000 \times 1.000 \frac{c_n}{100} (1 + 0{,}0025) + 2.000 = \begin{cases} 1.606.000, & \text{si} \quad c_n = 80\% \\ 1.305.250, & \text{si} \quad c_n = 65\% \end{cases}$$

Liquidación a vendedor (según fórmula 86):

$$375.000 + 1.494.250 - E_c - 22.500 = \begin{cases} 240.750, & \text{si} \quad c_n = 80\% \\ 541.500, & \text{si} \quad c_n = 65\% \end{cases}$$

Beneficio o pérdida de la operación:

$$B_r = E_v - E_c - g_p NV_0 = \begin{cases} -134.250, & \text{si} \quad c_n = 80\% \\ 166.500, & \text{si} \quad c_n = 65\% \end{cases}$$

Rendimiento o pérdida unitarios de la operación:

$$\frac{B_r}{kNV_0} = \begin{cases} -0{,}3680 = -35{,}80\%, & \text{si} \quad c_n = 80\% \\ 0{,}4440 = 44{,}40\%, & \text{si} \quad c_n = 65\% \end{cases}$$

13.—OPERACIONES DE BOLSA A PLAZO (*)

Las operaciones a plazo o término son aquellas en las que **las obligaciones recíprocas de las partes deben quedar satisfechas al cumplimiento de un plazo** previamente establecido. El acuerdo de la compraventa, o momento de la contratación, no coincide con la liquidación de ella que se deja para un momento posterior en el que deberán entregarse mutuamente los contratantes dinero y títulos. El **plazo** de la operación es el tiempo que media entre el acuerdo y la liquidación. La cotización que sirve de base para realizar el intercambio se fija inicialmente al contratar.

Estas operaciones no deben ser confundidas con las de contado con crédito, pues en las primeras la entrega de títulos y del dinero se efectúa en la fecha de liquidación y en las

(*) La actual legislación española no autoriza las operaciones a plazo que se desarrollan en el epígrafe.

segundas la operación es de contado y tan sólo uno de los contratantes se apoya en un crédito que tiene un determinado plazo.

Las posiciones de comprador y vendedor son semejantes a las que adoptan en la operación con crédito, el comprador es **alcista** y el vendedor **bajista**. Está estipulado un sistema de coberturas lo que puede dar lugar al apalancamiento y es habitual que los contratantes actúen en descubierto.

Cabe clasificar las operaciones a plazo entre operaciones en firme y operaciones condicionales.

13.1.—OPERACIONES EN FIRME

Son aquellas operaciones en las que el comprador y vendedor quedan definitivamente obligados con las condiciones y plazo de la operación. En el acuerdo se especifican el precio de los títulos, el número y clase de los que se venden y el momento de la liquidación. Llegados a la fecha convenida como vencimiento, el vendedor tiene la obligación de entregar los títulos y recibir su importe al precio que se concertó en el origen. Es normal que el vencimiento sea a fin del mes corriente o a fin del mes próximo.

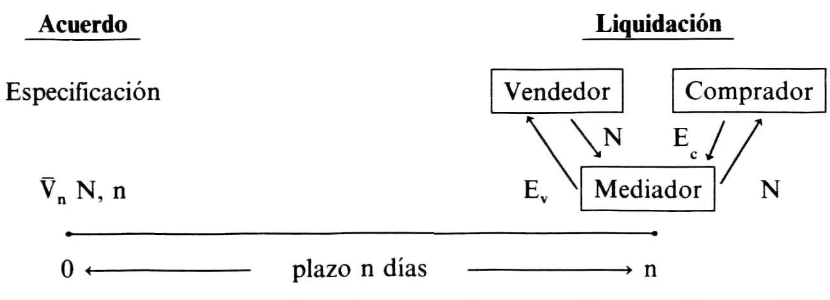
La operatoria de la liquidación es semejante a la de la operación de contado, con el precio $\bar{V}_n$ pactado por las partes en lugar del precio de mercado. El efectivo a entregar por el comprador es

$$E_c = N\bar{V}_n(1+g_c)+F \tag{87}$$

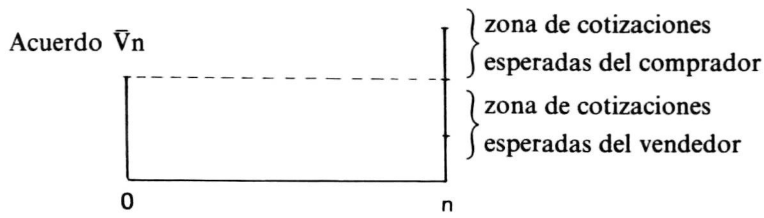
y el que recibirá el vendedor

$$E_v = N\bar{V}_n(1-g_c)-F \tag{88}$$

En esquema se tiene:



La característica fundamental de las operaciones a plazo en firme radica en sus posibilidades especulativas. El comprador espera un alza en las cotizaciones mientras que el vendedor confía en una baja. El primero corre el riesgo de tener que hacerse cargo, a su vencimiento, de unos títulos cuyo valor sea inferior a lo que se comprometió a pagar por ellos. El vendedor asume el riesgo de entregar, en la fecha convenida, unos títulos que tengan una cotización superior a la que se obligó a cederlos. Ambas partes esperan lo recogido en el gráfico.



y llegados a la fecha de liquidación, como su cotización será V_n, se tendrá:

$$\bar{V}_n \lesseqgtr V_n \Leftrightarrow \bar{V}_n - V_n \lesseqgtr 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{alza} \Rightarrow \begin{cases} \text{ganancia comprador} \\ \text{pérdida vendedor} \end{cases} \\ \text{—} \\ \text{baja} \Rightarrow \begin{cases} \text{pérdida comprador} \\ \text{ganancia vendedor} \end{cases} \end{cases}$$

Puede suceder que el vendedor venda títulos que no posee y que el comprador no cuente con el dinero necesario en la operación. Esta actuación en **descubierto**, para la parte que no posee lo que se compromete a entregar al vencimiento, es normal y, para evitarlo, es usual exigir una fianza o depósito que cubra los posibles quebrantos que se deriven del incumplimiento del contrato.

La actuación en **descubierto del vendedor** puede ser debida a que espere una bajada de cotizaciones por debajo del precio acordado. La compra al contado a precio inferior, antes del vencimiento, permite cerrar la operación con un beneficio.

Cuando el **descubierto** es **del comprador** es porque espera un alza de cotizaciones respecto a la pactada por lo que obteniendo el dinero comprometido un instante antes de su entrega, para vender seguidamente a curso de contado a precio superior, obtendrá como beneficio la diferencia entre el precio de cotización y el que se pactó.

Es usual que el comprador se reserva la **facultad de descuento**, que consiste en exigir liquidar anticipadamente la operación. Esta posibilidad se utiliza con el fin de frenar las cotizaciones en caso de baja, ya que si el vendedor no posee los títulos se ve forzado a adquirirlos anticipadamente, o si cuenta con ellos impedirle la posibilidad de vender para recomprar a precio inferior.

Una modalidad de las operaciones en firme lo constituyen las **operaciones diferenciales** que son operaciones concertadas sin el propósito de entrega del dinero por el comprador, ni de los títulos por parte del vendedor, pues su finalidad es liquidar las diferencias que se produzcan entre la cotización acordada y la realizada.

El **comprador alcista** tendrá derecho a recibir la diferencia entre el curso real del cambio V_n y el pactado $\bar{V}_n$, si aquél es superior a éste, en caso contrario deberá pagar. O sea:

$$\text{Si} \quad V_n > \bar{V}_n \Rightarrow \text{Cobra comprador} \quad V_n - \bar{V}_n \text{ por título}$$

$$\text{Si} \quad V_n < \bar{V}_n \Rightarrow \text{Paga comprador} \quad \bar{V}_n - V_n \text{ por título}$$

El **vendedor bajista** recibirá la diferencia entre el precio pactado y el de cotización si éste es inferior al primero y entregará el correspondiente importe cuando ocurra el efecto contrario, es decir:

$$\text{Si} \quad V_n > \bar{V}_n \;\Rightarrow\; \text{Paga vendedor} \quad V_n - \bar{V}_n \text{ por título}$$

$$\text{Si} \quad V_n < \bar{V}_n \;\Rightarrow\; \text{Cobra vendedor} \quad \bar{V}_n - V_n \text{ por título}$$

Designando por D al depósito exigido a cada una de las partes, los efectivos a recibir por comprador y vendedor (prescindiendo de gastos e impuestos) son:

$$\text{Si} \quad V_n > \bar{V}_n \;\Rightarrow\; E_c = D + N(V_n - \bar{V}_n) \quad \text{y} \quad E_v = D - N(V_n - \bar{V}_n) \tag{89}$$

$$\text{Si} \quad V_n < \bar{V}_n \;\Rightarrow\; E_c = D - N(\bar{V}_n - V_n) \quad \text{y} \quad E_v = D + N(\bar{V}_n - V_n) \tag{90}$$

13.2.—OPERACIONES CONDICIONALES

Las operaciones condicionales surgen cuando una de las partes se reserva el derecho de modificar alguna de sus condiciones mediante el pago de una compensación. En el Reglamento se contemplan las operaciones con opción, con prima y a voluntad.

a) **Operaciones condicionales con opción**

Se caracterizan porque el comprador o el vendedor a plazo en firme se reservan, además, una opción de recibir o entregar una cantidad de valores de la misma clase, igual o múltiplo, de los que sirven de base en la operación inicial.

Si el precio de la operación a plazo en firme es $\bar{V}_n$ y la diferencia de cambio acordado es d, el vendedor, si ejercita la opción, puede exigir al comprador la adquisición de N títulos o un múltiplo de N, al precio $\bar{V}_n - d$. Cuando el **comprador** hace uso de la opción puede obligar al vendedor a que le proporcione N títulos o un múltiplo de N al cambio $\bar{V}_n + d$.

Con la opción, el vendedor se está asegurando una venta al precio $\bar{V}_n - d$ que, en caso de caída de cotizaciones a un nivel $V_n < \bar{V}_n - d$, le proporcionará por cada N títulos un beneficio $[(\bar{V}_n - d) - V_n]N$.

El comprador con opción se asegura una compra, al cambio $\bar{V}_n + d$, que ejercitará en el caso de subida de cotizaciones al precio $V_n > \bar{V}_n + d$ obtenido como beneficio, por cada N títulos $[V_n - (\bar{V}_n + d)]N$.

En algunos países se distingue entre la **opción stellage**, que es la facultad de cambiar de ser comprador a vendedor, y la **opción noch**, que es la facultad de modificar la cantidad de títulos comprados.

b) **Operaciones condicionales con prima**

Son aquellas en las que se admite la posibilidad de revocar la operación, en cualquiera de las sesiones de Bolsa, mediante el pago de una compensación por título pactado, llamada prima.

Cabe distinguir entre prima a favor del comprador y prima a favor del vendedor.

Se tiene la **prima a favor del comprador** cuando éste entrega una prima P_c, y en la fecha de contestación (dos o tres días antes de la liquidación de la operación) puede optar por renunciar a la prima depositada y abandonar la operación, o llevarla a cabo. Si se retira de la operación el vendedor recibirá P_c en compensación por el posible perjuicio causado; pero si la operación se efectúa, entregará por cada título la cantidad pendiente $\bar{V}_n - P_c$.

El comprador con prima, en caso de bajada de cotizaciones por debajo de $\bar{V}_n$, limita su pérdida a un máximo igual a la prima por el número de títulos. Abandonará la operación cuando la cotización V_n verifique que $\bar{V}_n - V_n \geqslant P_c$ y perderá $P_c N$.

En caso de **prima a favor del vendedor**, éste entrega la señal P_v por título y en la fecha de contestación optará por dejar la operación o por finalizarla. Cuando la cotización es $V_n \leqslant \bar{V}_n + P_v$ optará por perfeccionar la operación, recibirá $\bar{V}_n$ del comprador y recuperará la prima P_v. En caso de subida de cotizaciones por encima de $\bar{V}_n + P_v$ abandonará la operación renunciando a P_v por título y limita su pérdida a NP_v.

c) **Operaciones condicionales a voluntad**

En ellas, comprador y vendedor quedan definitivamente obligados con el contrato, si bien cualquiera de las partes puede provocar adelantar la liquidación, bastando con un preaviso de 24 horas.

14.—OPERACIONES DOBLES

Las operaciones dobles consisten en la **compra al contado o a plazo de valores al portador y en la reventa simultánea a plazo y a precio determinado a la misma persona**. El comprador recibe realmente los títulos y se compromete a devolverlos lo que hace que no sea posible operar en descubierto.

En el Reglamento de Bolsas de Comercio se recogen las siguientes operaciones dobles:

a) Compra al contado y venta a plazos de fin de mes o fin del próximo.
b) Compra a fin de mes corriente y venta a fin del próximo.
c) Compra al contado y venta a un plazo que no exceda de 30 días.

La primera y la tercera son combinaciones de una operación al contado con una operación a plazo y la segunda comprende dos operaciones a plazo de sentido contrario. En los tres casos, la segunda operación es a plazo mientras que la primera es al contado o a plazo.

Las operaciones de dobles tienen su origen en el mercado de operaciones a plazo y en las necesidades de financiación de alguna de las partes. En este sentido conviene destacar dos tipos de operaciones dobles conocidas por **report** y **deport**.

En la **operación de report** el vendedor vende al contado y concierta la recompra a plazo de los mismos valores a un precio superior.

Se trata de una forma indirecta de obtener crédito el vendedor, que necesita dinero y no quiere desprenderse de los títulos de forma definitiva. La diferencia $\bar{V}_n - V_0$ entre el precio de contado V_0, y el precio a plazo $\bar{V}_n$ mide el interés del préstamo del dinero recibido en esta operación sui-géneris de garantía prendaria.

La **operación de deport** consiste en una venta al contado con recompra a plazo a un precio inferior, es decir, es $V_0 > \bar{V}_n$. Esta actuación se justifica en la necesidad que puede tener el comprador para algún fin concreto (depósito de garantía, contrato, etc.) y, una vez desaparecida la causa, no tiene interés en conservar los títulos. Se trata, de hecho, de un alquiler de títulos cuyo precio es $V_0 - \bar{V}_n$.

Ninguna de las modalidades de operaciones dobles descritas está permitida por la legislación española. Sin embargo, en un mercado muy específico como es el de los **Pagarés del Tesoro**, sí que están autorizadas las operaciones dobles en circunstancias que no coinciden con las reguladas expresamente en el Reglamento, pues las operaciones suelen superar con mucho los 30 días.

La finalidad de la operación es rentabilizar excedentes de tesorería en colocaciones a corto plazo por parte de algunas instituciones del sistema financiero.

Su funcionamiento está íntimamente relacionado con el Mercado del Dinero, de manera que se pueden **vender Pagarés del Tesoro con compromiso de recompra**, o bien, **comprar Pagarés del Tesoro con compromiso de reventa**.

15.—MODIFICACIONES DE CAPITAL: REDUCCIONES Y AMPLIACIONES

La modificación es toda alteración del capital social de la empresa. Cabe distinguir: reducciones de capital y ampliaciones de capital.

Las **reducciones de capital** suelen tener lugar cuando las cotizaciones de los títulos de la empresa han caído por debajo de límites que se consideran tolerables. Por razones de prestigio u otras causas, se plantea la reducción de capital como un intento de reconducción de las cotizaciones a niveles que se prefijan como deseables.

Los problemas que suelen plantear son dos: a) Determinar el nuevo número de títulos que deben quedar en circulación si se fijan las cotizaciones esperadas y b) Calcular las cotizaciones esperadas después de la reducción de capital si se da como dato el nuevo número de títulos.

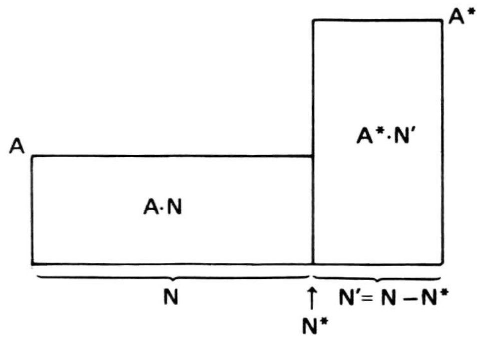
La nomenclatura a utilizar es:

- N: Número de títulos en circulación.
- C: Valor nominal de cada título. Su valor será $C = 100$, en caso de cotización porcentual, que es a la que se hará referencia, salvo excepciones que deberán explicitarse.
- A: Valor de cotización de cada título en el mercado que vendrá dado usualmente en cotización porcentual, es decir, expresará la relación de cambio.
- N*: Número de títulos que se reducen.
- A*: Cotización teórica del título un instante después de la reducción.

El valor bursátil o de mercado de la sociedad antes de la reducción es $A \cdot N$ y un instante después de la reducción es $A^*(N - N^*) = A^* N'$.

Estos están representados en la figura adjunta. Como la reducción que se plantea no supone alteración de los medios financieros disponibles, pues es sólo una sustitución de títulos, los valores de cotización (áreas de los dos rectángulos) deben coincidir, es decir, verificar la ecuación del equilibrio:

$$A \cdot N = A^* N' = A^*(N - N^*) \tag{91}$$



Si N* se prefija, el valor de la cotización teórica esperada es:

$$A^* = A \frac{N}{N - N^*} = A \frac{1}{1 - \frac{N^*}{N}} = A \frac{1}{1 - \alpha} \tag{92}$$

en donde α representa la proporción entre el número de títulos que se anulan y los existentes.

Cuando se pretende fijar las cotizaciones esperadas el número de títulos a anular es:

$$N^* = \left(1 - \frac{A}{A^*}\right) N = \frac{A^* - A}{A^*} N \tag{93}$$

y quedan $N' = N \dfrac{A}{A^*}$.

Ejemplo.—Una sociedad tiene representado su capital en 100.000 títulos, de 500 pts. nominales, y su cotización es 40 enteros. Se pretende reducir su capital con el fin de provocar una subida de cotizaciones y se desea saber: a) Cotización esperada si el número de títulos se reduce un 40%; b) Número de títulos a reducir si el objetivo es obtener una cotización en torno de la par, es decir, 100 enteros.

El apartado a) se resuelve sin más que tener en cuenta que es $\alpha = 0{,}40$ y resulta:

$$A^* = A \frac{1}{1 - \alpha} = 40 \frac{1}{1 - 0{,}040} = 66{,}67 \text{ enteros}$$

En cuanto al apartado b) se tiene:

$$N^* = \frac{A^* - A}{A^*} N = \frac{100 - 40}{100} 100.000 = 60.000$$

En el primer caso el nuevo número de títulos es 60.000 y en el segundo 40.000.

Las modificaciones de capital más importantes son las **ampliaciones de capital** que se materializan a través de emisiones de nuevos títulos.

Las emisiones de acciones, como medio de materialización de las ampliaciones de capital, tienen como finalidad preferente el obtener medios de financiación en el mercado financiero. También en muchas ocasiones se persigue tratar de que la cotización del título no se encarezca excesivamente y limite la cualidad de liquidez al restringir el mercado a inversores financieros con cierto potencial económico.

Es normal, para que tenga alicientes la suscripción, efectuar la oferta de la ampliación a un precio inferior al de cotización.

Las formas frecuentes de emisión de nuevas acciones son:

a) Emisión de acciones **a la par**: El precio de emisión será igual al valor nominal.

El accionista desembolsa dicho valor nominal más los gastos de suscripción.

b) Emisión de acciones **con prima**: El precio de emisión será distinto del valor nominal.

El accionista desembolsa un valor $E \neq$ nominal, más los gastos de suscripción.

La prima puede ser positiva o negativa. Designando por P a la prima y C al valor nominal pueden darse estas dos situaciones:

$$E = C + P > C$$
$$E = C - P < C$$

c) Emisión de acciones **con cargo a reservas**: No suponen al accionista desembolso alguno por ser gratis (salvo los gastos de suscripción).

En este caso no existe una auténtica financiación para la empresa ya que es un simple trasvase a capital.

Solamente es posible obtener medios de financiación mediante emisiones a la par y emisiones con prima. La empresa estudiará en cada caso la forma de emisión que considere más atractiva para el inversor, en este tipo de títulos y de esta forma conseguir el fin propuesto.

En ocasiones puede considerarse conveniente plantear más de una emisión en el mismo momento, o en momentos distintos, del tiempo. Incluso puede considerarse conveniente incluirse, en las emisiones múltiples, las con cargo a reservas ya que es posible faciliten la recaudación al entregar por una cuantía determinada un mayor número de títulos.

En las aplicaciones de capital se puede distinguir:

a) Atendiendo al momento de realización entre emisiones **inmediatas** y diferidas.

Las inmediatas son aquellas que se llevan a cabo al tomar la decisión o en un breve intervalo de tiempo.

Las diferidas son las que su realización se prevé en el futuro.

b) Atendiendo al número de ampliaciones previstas se tienen las emisiones **únicas** o **múltiples**.

Las primeras son las que está previsto realizar una sola ampliación en el instante de tiempo considerado y cuando está previsto realizar varias ampliaciones, bien en forma simultánea o sucesiva, en el tiempo, se tienen las emisiones múltiples.

Siempre que se efectúa una ampliación de capital suelen plantearse dos problemas:

1) Cálculo del valor teórico de cotización del título un instante después de efectuada la inscripción.

2) Cálculo del valor del derecho de opción, es decir, del valor de la renuncia a los derechos de suscripción que, con preferencia, suele tener el accionista.

Es usual que la oferta de nuevos títulos se efectúe a un precio inferior al de la cotización de los que están en circulación, por lo que en el momento de la suscripción se producirá una caída en las cotizaciones.

Si el titular de una acción renuncia a los derechos preferentes de suscripción (si los tiene) se encontrará con una pérdida medida por la diferencia de cotizaciones entre el precio antiguo y el nuevo. Como suele existir un mercado de derechos su valor será, por definición, la pérdida que se va a producir.

En los epígrafes que siguen se estudian los siguientes supuestos:

— Ampliaciones únicas inmediatas.
— Ampliaciones múltiples inmediatas.
— Ampliaciones diferidas únicas.
— Ampliaciones diferidas múltiples.

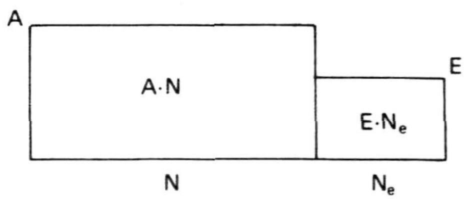
16.—AMPLIACIONES UNICAS INMEDIATAS

Designando por **N** al número de títulos en circulación, por **C** al valor nominal de cada acción (se hará referencia normalmente a su valor porcentual o en enteros, es decir, $C = 100$), por **p** al precio o valor del entero y por **A** a la cotización del título en el mercado (salvo indicación en contra representará la cotización porcentual o en enteros), los capitales social y bursátil o de cotización de la firma son:

$$\overline{CS} = NCp \quad ; \quad \overline{CB} = NAp$$

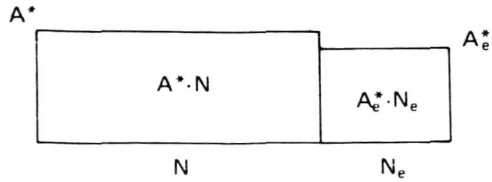
Si se efectúa una ampliación de capital formada por N_e títulos a un precio **E** (en enteros), el valor que teóricamente debe tener la empresa en el mercado estará formado por el anterior más las nuevas aportaciones, es decir:

$$AN + EN_c$$



Después de la ampliación de capital puede ocurrir que todos los títulos, antiguos y nuevos, tengan iguales derechos lo que llevará a que sus cotizaciones sean iguales; pero en ocasiones ocurre que, durante un período de tiempo, los nuevos títulos sufren alguna minoración en los posibles derechos (lo usual es que no tengan derecho a percepción de todo o parte de los cupones con próximos vencimientos). En este segundo caso coexistirán cotizaciones distintas, para las dos clases de títulos, hasta que los nuevos tengan derechos plenos. Si se representan por A^* y A_e^* a las cotizaciones de los títulos antiguos y nuevos después de la ampliación respectivamente, el valor teórico del mercado será:

$$A^*N + A_e^*N_e$$



y si R_e representa al valor de las minoraciones de derechos de las nuevas acciones respecto de las antiguas, se escribirá:

$$A^*N + A_e^*N_e = A^*N + (A^* - R_e)N_e = A^*(N + N_e) - R_eN_e$$

El valor de la empresa en el mercado debe satisfacer la igualdad:

$$AN + EN_e = A^*N + A_e^*N_e = A^*(N + N_e) - R_eN_e \tag{94}$$

de la que se sigue:

$$A^* = \frac{AN + (E + R_e)N_e}{N + N_e} = \frac{A + (E + R_e)\dfrac{N_e}{N}}{1 + \dfrac{N_e}{N}} = \frac{A + (E + R_e)\alpha}{1 + \alpha} \tag{95}$$

siendo α la proporción entre el número de títulos que se amplían y los en circulación, es decir, entre acciones nuevas y antiguas. Obsérvese que R_e juega el mismo papel que una prima de emisión.

Es usual determinar el **coeficiente de ajuste** o número que permite obtener la nueva cotización conocida la antigua. El coeficiente, por definición, es:

$$k = \frac{A^*}{A} = \frac{A + (E + R_e)\alpha}{A(1 + \alpha)} = \frac{1}{1 + \alpha} + \frac{E + R_e}{A}\,\frac{\alpha}{1 + \alpha} \tag{96}$$

y de él se sigue $A^* = kA$.

El valor del derecho de opción será la diferencia entre el precio antiguo y el nuevo, o sea:

$$D_e = A - A^* = A - \frac{A + (E + R_e)\alpha}{1 + \alpha} = [A - (E + R_e)]\,\frac{\alpha}{1 + \alpha} \tag{97}$$

Si las acciones nuevas tienen iguales derechos que las antiguas, será $R_e = 0$ y las expresiones (94), (95), (96) y (97) toman la forma:

$$AN = EN_e = A^*(N + N_e) \tag{94'}$$

$$A^* = \frac{A + E\,\dfrac{N_e}{N}}{1 + \dfrac{N_e}{N}} = \frac{A + E\alpha}{1+\alpha} \tag{95'}$$

$$k = \frac{1}{1+\alpha} + \frac{E}{A}\,\frac{\alpha}{1+\alpha} \tag{96'}$$

$$D_e = A - A^* = (A - E)\,\frac{\alpha}{1+\alpha} \tag{97'}$$

Ejemplo 1.—Las acciones de la sociedad X tienen un nominal de 500 pts. y cotizan en bolsa a 150 enteros. Si se efectúa una emisión de un título nuevo por cada cinco antiguos, al 120%, determinar los valores teóricos de cotización después de la ampliación, el coeficiente de ajuste y el valor del derecho de opción en los supuestos:

a) Igualdad de derechos de todos los títulos después de la ampliación.

b) No participación de las nuevas en un dividendo del 5% del nominal a repartir dentro de seis meses.

a) Por aplicación de (95'), (96') y (97'), se tiene:

$$A^* = \frac{A + E\alpha}{1+\alpha} = \frac{150 + 120 \times 0{,}20}{1 + 0{,}20} = 145$$

$$k = \frac{1}{1+\alpha} + \frac{E}{A}\,\frac{\alpha}{1+\alpha} = \frac{1}{1+0{,}20} + \frac{120}{150}\,\frac{0{,}20}{1{,}20} = 0{,}9667$$

$$D_e = (A - E)\,\frac{\alpha}{1+\alpha} = (150 - 120)\,\frac{0{,}20}{1+0{,}20} = 5$$

La cotización de los títulos suele venir dada en bolsa en enteros, y la de los derechos en unidades monetarias, por lo que el valor de éstos se obtiene multiplicando por el importe **p** de un entero, y se tiene: $D_e \cdot p = 5 \times 5 = 25$ pts.

b) El importe del dividendo es $500 \times 0{,}05 = 25$ pts. ó 5 enteros que es el valor de R_e, luego haciendo uso de (95), (96) y (97) resulta:

$$A^* = \frac{A + (E + R_e)\alpha}{1+\alpha} = \frac{150 + 125 \times 0{,}20}{1 + 0{,}20} = 145{,}83 \quad ; \quad A^* = A^* - R_e = 140{,}83$$

$$k = \frac{1}{1+0{,}20} + \frac{125}{150}\,\frac{0{,}20}{1+0{,}20} = 0{,}9722 \quad ; \quad D_e = A - A^* = 4{,}17 \quad ó \quad 20{,}83 \text{ pts.}$$

El valor de **E** puede ser cualquiera; pero normalmente es inferior al precio de cotización. Entre los posibles merecen resaltarse dos: el primero es cuando el precio de emisión coincide con el nominal y el segundo cuando se emiten gratuitamente. De ambos se hace referencia a continuación:

16.1.—AMPLIACION A LA PAR

Esta denominación corresponde al caso $E=C$ y para calcular sus expresiones basta sustituir el valor de **E** por la par (100), y se tiene:

— Caso de no igualdad de derechos:

$$A^* = \frac{A+(C+R_c)\alpha}{1+\alpha} \quad ; \quad k = \frac{1}{1+\alpha} + \frac{C+R_c}{A}\,\frac{\alpha}{1+\alpha} \quad ; \quad D_c = A - A^* = [A-(C+R_c)]\,\frac{\alpha}{1+\alpha}$$

— Caso de igualdad de derechos:

$$A^* = \frac{A+C\alpha}{1+\alpha} \quad ; \quad k = \frac{1}{1+\alpha} + \frac{C}{A}\,\frac{\alpha}{1+\alpha} \quad ; \quad D_c = (A-C)\,\frac{\alpha}{1+\alpha}$$

Ejemplo 2.—Resolver el ejemplo 1 para el caso de ampliación por el nominal o la par.

— Caso de no igualdad de derechos:

$$A^* = \frac{150+(100+5)0{,}20}{1+0{,}20} = 142{,}50 \quad ; \quad k = \frac{1}{1+0{,}20} + \frac{100+5}{150}\,\frac{0{,}20}{1+0{,}20} = 0{,}95$$

$D_c = A - A^* = 150 - 142{,}5 = 7{,}5$ enteros ó 37,5 pts.

— Caso de igualdad de derechos:

$$A^* = \frac{150+100\times 0{,}20}{1+0{,}20} = 141{,}67 \quad ; \quad k = \frac{1}{1+0{,}20} + \frac{100}{150}\,\frac{0{,}20}{1+0{,}20} = 0{,}9444$$

$D_c = 150 - 141{,}67 = 8{,}33$ enteros ó 41,6 pts.

16.2.—AMPLIACION CON CARGO A RESERVAS

Es el caso particular de reparto de acciones sin desembolso ninguno por parte del accionista, es decir, son los títulos gratis, o sea $E=0$. Sustituyendo este valor en las expresiones (95)—(97), resulta:

— Caso de no igualdad de derechos:

$$A^* = \frac{A+R_r\alpha}{1+\alpha} \quad ; \quad k = \frac{1}{1+\alpha} + \frac{R_r}{A}\,\frac{\alpha}{1+\alpha} \quad ; \quad D_r = A - A^* = (A-R_r)\,\frac{\alpha}{1+\alpha}$$

— Caso de igualdad de derechos:

$$A^* = \frac{A}{1+\alpha} \quad ; \quad k = \frac{1}{1+\alpha} \quad ; \quad D_r = A\,\frac{\alpha}{1+\alpha} = A\alpha k$$

Ejemplo 3.—La sociedad X está representada por títulos de 1.000 pts. nominales y su cotización es 140 enteros; si se efectúa una ampliación gratis de un título nuevo por cada diez antiguos, determinar la cotización después de la ampliación y el valor del derecho si todos los títulos, nuevos y viejos, participarán de la totalidad de beneficios sociales.

En este caso se tiene:

$$k=\frac{1}{1+0{,}10}=0{,}9091 \quad ; \quad A^*=Ak=127{,}27 \quad ; \quad D_r=A-A^*=12{,}73 \quad \text{ó} \quad 127{,}3 \text{ pts.}$$

17.—AMPLIACIONES MULTIPLES INMEDIATAS

17.1.—AMPLIACION TRIPLE

Se plantea el caso de una emisión simultánea, de tres clases de títulos, en las siguientes condiciones: N_e acciones al precio E; N_c acciones a la par; N_r acciones con cargo a reservas.

Designando por A^*, A^*_e, A^*_c, A^*_r a las nuevas cotizaciones, después de las ampliaciones, y por R_e, R_c, R_r a los valores de las minoraciones de derechos se tendrán:

$$A^*_e=A^*-R_e \quad ; \quad A^*_c=A^*-R_c \quad ; \quad A^*_r=A^*-R_r$$

La ecuación del valor de la empresa en el mercado es:

$$\begin{aligned} AN+EN_e+CN_c &= A^*N+A^*_eN_e+A^*_cN_c+A^*_rN^*_r= \\ &=A^*(N+N_e+N_c+N_r)-(R_eN_e+R_cN_c+R_rN_r) \end{aligned} \qquad (98)$$

de donde:

$$A^*=\frac{AN+(E+R_e)N_e+(C+R_c)N_c+R_rN_r}{N+N_e+N_c+N_r}=\frac{A+(E+R_e)\alpha_e+(C+R_c)\alpha_c+R_r\alpha_r}{1+\alpha_e+\alpha_c+\alpha_r} \qquad (99)$$

siendo α la proporción o coeficiente unitario de cada ampliación de capital.

Cuando no existen minoraciones de derechos se tiene:

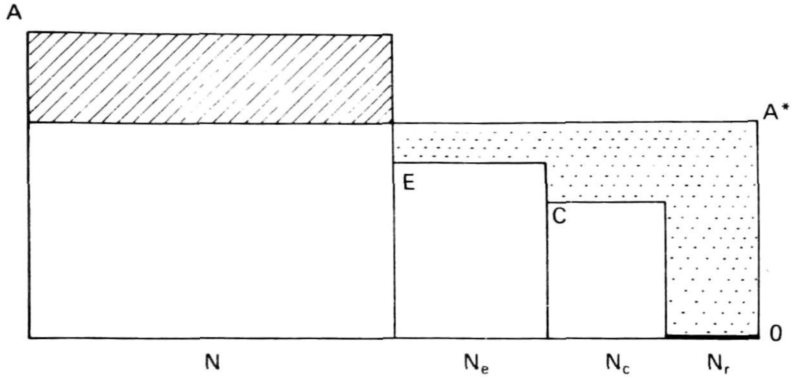
$$A^*=\frac{AN+EN_e+CN_c}{N+N_e+N_c+N_r}=\frac{A+E\alpha_e+C\alpha_c}{1+\alpha_e+\alpha_c+\alpha_r}=A^*_e=A^*_c=A^*_r \qquad (100)$$

El coeficiente de ajuste resulta:

$$\begin{aligned} k=\frac{A^*}{A}=\frac{1}{1+\alpha_e+\alpha_c+\alpha_r}+\frac{E+R_e}{A}\,\frac{\alpha_e}{1+\alpha_e+\alpha_c+\alpha_r}+ \\ +\frac{C+R_c}{A}\,\frac{\alpha_c}{1+\alpha_e+\alpha_c+\alpha_r}+\frac{R_r}{A}\,\frac{\alpha_r}{1+\alpha_e+\alpha_c+\alpha_\alpha} \end{aligned} \qquad (101)$$

expresión que en este caso va perdiendo interés su cálculo, pues es más complejo que el de A^*.

El siguiente gráfico:



recoge la igualdad (98), con $R=0$, entre la suma de las cuatro áreas de rectángulos y el área del nuevo rectángulo grande. La zona rayada representa el valor de los derechos de opción o pérdida de patrimonio de los títulos antiguos y la zona de puntos representa las ganancias que, sobre los precios de emisión, consiguen los títulos nuevos. Ambas zonas son iguales.

Los valores de los derechos de opción, en el caso de desigualdades de derechos futuros, son:

a) Renuncia total

$$D = A - A^* \tag{102}$$

b) Renuncia a la suscripción de las acciones con prima

$$D_e = A + C\alpha_c - (A^* + A_c^*\alpha_c + A_r^*\alpha_r) \tag{103}$$

c) Renuncia a la suscripción de las acciones a la par

$$D_c = A + E\alpha_e - (A^* + A_e^*\alpha_e + A_r^*\alpha_r) \tag{104}$$

d) Renuncia a la suscripción de las acciones con cargo a reservas

$$D_r = A + E\alpha_e + C\alpha_c - (A^* + A^*\alpha_e + A^*\alpha_c) \tag{105}$$

Cuando los derechos futuros son iguales se tiene:

$$D = A - A^* \tag{102'}$$

$$D_e = A + C\alpha_c - A^*(1 + \alpha_c + a_r) \tag{103'}$$

$$D_c = A + E\alpha_e - A^*(1 + \alpha_e + \alpha_r) \tag{104'}$$

$$D_r = A + E\alpha_e + C\alpha_c - A^*(1 + \alpha_e + \alpha_c) \tag{105'}$$

Es fácil comprobar que $D = D_e + D_c + D_r$.

Ejemplo.—Los títulos de cierta sociedad cotizan a 200 enteros, tienen un nominal de 500 pts. y en los próximos ejercicios se espera recibir dividendos del 10% sobre el valor nominal. Se efectúa la emisión triple:

a) Una acción nueva por cada cinco antiguas al 140%.

b) Una acción nueva por cada diez antiguas a la par.

c) Una acción nueva por cada veinte antiguas con cargo a reservas.

Determinar el valor de las nuevas cotizaciones, el coeficiente de ajuste, y los derechos de opción si las nuevas acciones a la par pierden la mitad del próximo dividendo y las nuevas acciones gratis pierden el próximo dividendo completo.

Por ser $R_e = 0$; $R_c = 5$; $R_r = 10$ se sigue:

$$A_e^* = A^* \quad ; \quad A_c^* = A^* - 5 \quad ; \quad A_r^* = A^* - 10$$

Aplicando la (99) se tiene:

$$A^* = \frac{200 + 140 \times 0{,}20 + (100 + 5)0{,}10 + 10 \times 0{,}05}{1 + 0{,}20 + 0{,}10 + 0{,}05} = 177{,}04 = A_e^*$$

y en consecuencia $A_c^* = 172{,}04$; $A_r^* = 162{,}04$.

El coeficiente de ajuste es:

$$k = \frac{1}{1{,}35} + \frac{140}{200}\,\frac{0{,}20}{1{,}35} + \frac{105}{200}\,\frac{0{,}10}{1{,}35} + \frac{10}{200}\,\frac{0{,}05}{1{,}35} = 0{,}8852$$

y coincide, lógicamente, con el coeficiente $\frac{A^*}{A} = \frac{177{,}04}{200} = 0{,}8852$.

Los valores de los derechos son:

$D = 200 - 177{,}04 = 22{,}96$ ó 114,81 pts.

$D_e = 200 + 100 \times 0{,}10 - (177{,}04 + 172{,}04 \times 0{,}10 + 162{,}04 \times 0{,}05) = 7{,}16$ ó 35,80 pts.

$D_c = 200 + 140 \times 0{,}20 - (177{,}04 + 177{,}04 \times 0{,}20 + 162{,}04 \times 0{,}05) = 7{,}45$ ó 37,25 pts.

$D_r = 200 + 140 \times 0{,}20 + 100 \times 0{,}10 - (177{,}04 + 177{,}04 \times 0{,}20 + 172{,}04 \times 0{,}10) = 8{,}35$ ó 41,75 pts.

Conviene tener presente que la finalidad básica de toda ampliación de capital es proporcionar medios de financiación, que en este caso son:

$$F = EpN_e + CpN_c$$

buscando aquella solución que se considere en cada momento más aconsejable. Por ello, problemas a plantear pueden ser:

1) Obtener una determinada financiación $F = X\%$ del capital social mediante la actuación en E, N_e; N_c y N_r.

2) Compaginar un coste del capital soportable para la sociedad con una oferta de rentabilidad atractiva para el suscriptor.

3) Si se pretende que A^* quede en un determinado entorno cabe:

— Actuar sobre E y C y calcular α y F.

— Dados unos niveles de α o de F calcular E.

17.2.—CASO GENERAL

Si el número de ampliaciones simultáneas es n y sus características las siguientes:

N.º ampliación	N.º acciones nuevas	Precio de emisión	Valor de los menores derechos
1	N_1	E_1	E_1
2	N_2	E_2	R_2
...	...	...	...
n	N_n	E_n	R_n

la ecuación de equivalencia será:

$$AN + \sum_{s=1}^{n} E_s N_s = A^* N + \sum_{s=1}^{n} A_s^* N_s =$$

$$= A^* \left(N + \sum_{s=1}^{n} N_s \right) - \sum_{s=1}^{n} R_s N_s \tag{106}$$

con $A_s^* = A^* - R_s$.

El valor de A^* es:

$$A^* = \frac{AN + \sum_{s=1}^{n} (E_s + R_s) N_s}{N + \sum_{s=1}^{n} N_s} =$$

$$= \frac{A + \sum_{s=1}^{n} (E_s + R_s)\alpha_s}{1 + \sum_{s=1}^{n} \alpha_s} \tag{107}$$

En caso de tener iguales derechos las nuevas acciones que las antiguas queda:

$$A^* = \frac{AN + \sum_{s=1}^{n} E_s N_s}{N + \sum_{s=1}^{n} N_s} = \frac{A + \sum_{s=1}^{n} E_s \alpha_s}{1 + \sum_{s=1}^{n} \alpha_s} \tag{108}$$

Como coeficiente de ajuste se tiene:

$$k = \frac{A^*}{A} - \frac{1}{1 + \sum_{s=1}^{n} \alpha_s} + \sum_{s=1}^{n} \frac{E_s + R_s}{A} \frac{\alpha_s}{1 + \sum_{s=1}^{n} \alpha_s} \tag{109}$$

18.—AMPLIACION UNICA DIFERIDA

Situados en un determinado momento (inicial o cero) se plantea el proyecto de efectuar una ampliación de capital dentro de s años.

Se designará por:

— N_0 al número actual de títulos en circulación.

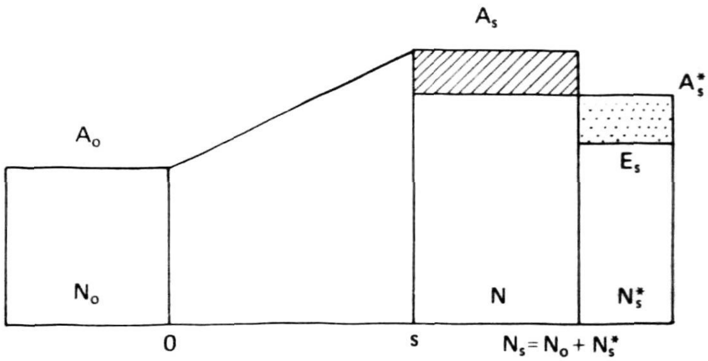
— A_0 a la cotización actual de los títulos en circulación.

— $\bar{q}$ a la tasa de crecimiento medio anual de las cotizaciones (en general sería tasa de variación pudiendo tomar valores positivos y negativos).

— E_s al precio de emisión futuro.

— N_s^* al número de títulos de la ampliación.

La evolución esperada es:



En este caso, y situados en el año s, los problemas a plantear son idénticos a los analizados anteriormente no quedando más que relacionar A_s con A_0, obteniéndose las ecuaciones:

$$A_s N_0 + E_s N_s^* = A_s^*(N_0 + N^*) \tag{110}$$

$$A_s = A_0(1+\bar{q})^s \tag{111}$$

de las que se sigue:

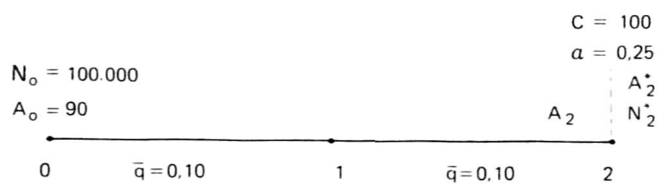
$$A_s^* = \frac{A_0(1-\bar{q})^s N_0 + E_s N_s^*}{N_0 + N_s^*} = \frac{A_0(1+\bar{q})^s + E_s \alpha_s}{1+\alpha_s} \tag{112}$$

La financiación que se obtiene es:

$$F_s = E_s\, p N_s^*$$

Ejemplo 1.—Cierta sociedad anónima tiene represenado su capital en 100.000 títulos, de 1.000 pts. nominales cada uno, que cotizan al 90% de su valor. En los próximos dos años se espera un crecimiento medio de los títulos del 10% anual acumulativo, al final de los cuales, se efectuará una ampliación de capital. Si la ampliación es en la proporción de un título nuevo por cada cuatro antiguos y su emisión a la par ¿cuál será la cotización esperada después de la ampliación y el valor del derecho de opción?

El esquema de las previsiones efectuadas es:



debiendo calcularse A_2^* mediante la (112), que aplicada a los datos del enunciado, es:

$$A_2^* = \frac{A_0(1+\bar{q})^2 + C\alpha_2}{1+\alpha_2} = \frac{90(1+0{,}10)^2 + 100 \times 0{,}25}{1+0{,}25} = 107{,}12$$

Como valor del derecho de opción, se tiene:

$$D_2 = A_2 - A_2^* = 90(1+0{,}10)^2 - 107{,}12 = 1{,}78 \text{ enteros} \quad \text{ó} \quad 17{,}8 \text{ pts.}$$

Ejemplo 2.—Con los datos del ejercicio anterior ¿cuál es la financiación que la sociedad puede conseguir si la emisión se efectúa al 70% y se pretende después de ella que los títulos coticen aproximadamente a la par, teniendo en cuenta que la ampliación debe ser múltiplo de 1.000?

Si en la (112) se despeja el valor de N_s^* se tiene

$$N_s^* = N_0 \frac{A_0(1+\bar{q})^s - A_s^*}{A_s^* - E_s}$$

y sustituyendo valores:

$$N = 100.000 \frac{90(1+0,10)^2 - 100}{100-70} = 29.666,66$$

El número a ampliar será 29.000 ó 30.000 títulos y se se toma éste, por ser el redondeado más próximo al múltiplo de mil, la financiación a obtener será:

$$F_2 = EpN_2^* = 70 \times 10 \times 30.000 = 21.000.000$$

Ejemplo 3.—Si en el ejercicio n.º 1 se pretende que la cotización después de la ampliación sea como la actual ¿cuál debe ser el precio de emisión en los supuestos de ser la ampliación de una nueva por dos antiguas y tres nuevas por cada diez antiguas?

La expresión de E_s que resulta al operar en (112), es:

$$E_s = \frac{A_s^*(1+\alpha_s) - A_0(1+\bar{q})^s}{\alpha_s} = A_0 \frac{(1+\alpha_s)-(1+\bar{q})^s}{\alpha_s}$$

ya que $A_s^* = A_0$.

Cuando $\alpha_s = 1/2 = 0,50$ se tiene:

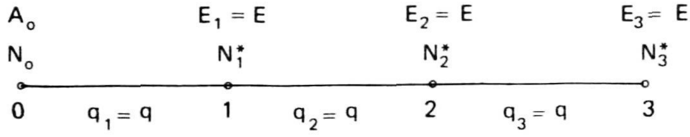
$$E_2 = 90 \frac{1+0,50-(1+0,12)^2}{0,50} = 52,2$$

y en el supuesto $\alpha_s = 3/10 = 0,30$ resulta:

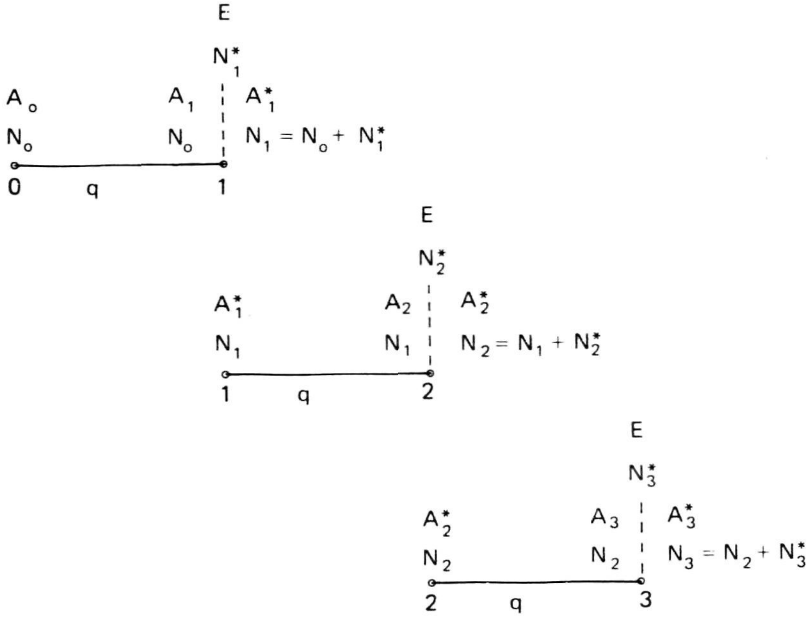
$$E_2 = 90 \frac{1+0,30-(1+0,10)^2}{0,30} = 27$$

19.—AMPLIACIONES MULTIPLES DIFERIDAS

En ocasiones se plantea la posibilidad de efectuar ampliaciones en sucesivos períodos del tiempo para ir captando, dentro de un plan global, los medios de financiación en los momentos en que son necesarios. Surgen las denominadas emisiones múltiples diferidas en el tiempo y, aunque el problema puede plantearse con toda generalidad, a efectos operativos no tiene mucho sentido plantear casos superiores a tres o cuatro ampliaciones; por ello, solamente se estudiará el caso caracterizado por:



La descripción de todos los elementos que intervienen, y las variaciones que experimentan en el intervalo, quedan descritas en el siguiente gráfico:



Se trata de expresar A_1^*, A_2^* y A_3^*, en función de A_0, es decir, las cotizaciones futuras después de las ampliaciones de acuerdo con las expectativas recogidas en las tasas de variación de la cotización, y del plan de ampliaciones proyectado.

A partir de las relaciones básicas:

$$A_1 = A_0(1+q) \quad ; \quad A_1^* = \frac{A_1 + E\alpha_1}{1+\alpha_1} \quad ; \quad \alpha_1 = \frac{N_1^*}{N_0}$$

$$A_2 = A_1^*(1+q) \quad ; \quad A_2^* = \frac{A_2 + E\alpha_2}{1+\alpha_2} \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{N_2^*}{N_1}$$

$$A_3 = A_2^*(1+q) \quad ; \quad A_3^* = \frac{A_3 + E\alpha_3}{1+\alpha_3} \quad ; \quad \alpha_3 = \frac{N_3^*}{N_2}$$

se obtiene:

$$A_1^* = \frac{A_0(1+q)+E\alpha_1}{1+\alpha_1} = A_0 \frac{1+q}{1+\alpha_1} + E \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1}$$

$$A_2^* = \frac{A_1^*(1+q)+E\alpha_2}{1+\alpha_2} = A_0 \frac{(1+q)^2}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)} +$$

$$+E \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1} \frac{1+q}{1+\alpha_2} + E \frac{\alpha_2}{1+\alpha_2}$$

$$A_3^* = \frac{A_2^*(1+q)+E\alpha_3}{1+\alpha_3} = A_0 \frac{(1+q)^3}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)} +$$

$$+E \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1} \frac{(1+q)^2}{(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)} +$$

$$+E \frac{\alpha_2}{1+\alpha_2} \frac{1+q}{1+\alpha_3} + E \frac{\alpha_3}{1+\alpha_3}$$

Cuando se impone la condición $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$, resulta:

$$A_1^* = A_0 \frac{1+q}{1+\alpha} + E \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

$$A_2^* = A_0 \left(\frac{1+q}{1+\alpha}\right)^2 + E \frac{\alpha}{1+\alpha} \left(\frac{1+q}{1+\alpha} + 1\right)$$

$$A_3^* = A_0 \left(\frac{1+q}{1+\alpha}\right)^3 + E \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{\left(\frac{1+q}{1+\alpha}\right)^3 - 1}{\frac{1+q}{1+\alpha} - 1} =$$

$$= A_0 \left(\frac{1+q}{1+\alpha}\right)^3 + E \frac{\alpha}{q-\alpha} \left[\left(\frac{1+q}{1+\alpha}\right)^3 - 1\right]$$

En general, se dará:

$$A_n^* = A_0 \left(\frac{1+q}{1+\alpha}\right)^n + E \frac{\alpha}{q-\alpha} \left[\left(\frac{1+q}{1+\alpha}\right)^n - 1\right] \qquad (113)$$

expresión de A_n^* que depende de A_0, E, α, n y q. Sobre estos parámetros puede actuar el emisor en la forma que le sea más favorable, excepto en **q** que, al depender también de circunstancias externas, deberá ser estimado.

Interesa resaltar algunos casos particulares de la (113), tales como:

1) $\underline{q=\alpha}$

La (113) se puede escribir así:

$$A_n^* = A_0 + E \frac{\alpha}{1+\alpha} n \tag{114}$$

2) $\underline{A_n^* = A_0}$

En este supuesto se tiene:

$$A_0 = A_0 \left(\frac{1+q}{1+\alpha}\right)^n + E \frac{\alpha}{q-\alpha} \left[\left(\frac{1+q}{1+\alpha}\right)^n - 1\right]$$

y operando se deduce

$$A_0(q-\alpha) + E\alpha = 0 \tag{115}$$

Elegido un valor de **E**, la solución de α es:

$$\alpha = q \frac{A_0}{A_0 - E} \tag{116}$$

y cuando se fija α el precio de emisión asciende a:

$$E = A_0 \frac{\alpha - q}{\alpha} \tag{117}$$

debiendo ser $\alpha > q$, para que sea $E > 0$.

20.—PIGNORACION DE VALORES

Una forma de captar medios financieros un tenedor de valores, que no desea desprenderse de los mismos, consiste en obtener créditos a corto plazo mediante el depósito en poder de quien lo concede (es usual que sea una entidad financiera) de valores mobiliarios. Esta operación de préstamo o crédito con garantía de valores se conoce con el nombre de **pignoración**.

El contrato de pignoración se realiza mediante **póliza** intervenida por un fedatario público y en ella se concretan las condiciones de la pignoración. Los requisitos fundamentales que contiene la póliza son: la cuantía del préstamo o límite del crédito concedido, el vencimiento, el interés y la comisión; la numeración e identificación de los títulos que forman la garantía, prenda o cobertura, y las normas para su ejecución.

Al vencimiento del préstamo, y en caso de no ser reintegrado el acreedor del principal e intereses, puede proceder éste a la enajenación de las garantías o valores dados en prenda, teniendo sobre el producto obtenido derecho preferente frente a todo acreedor del prestatario. Asimismo, al prestamista le asisten otros dos derechos: la irrevindicabilidad de los valores en garantía, mientras no sea reembolsado con la contraprestación, y el derecho de retención, no pudiendo otros acreedores del deudor exigir los títulos en prenda a no ser que paguen éstos al prestamista el importe del crédito.

La **cuantía del préstamo o del crédito** se calcula, en base al valor efectivo o de cotización de los títulos pignorados, aplicando un coeficiente de reducción según el tipo de valores que se pignoren. Esta reducción sobre el valor efectivo se establece con el fin de mejor garantizar al préstamo. El coeficiente de reducción o cambio de pignoración suele oscilar entre un 40% y un 90%, el más bajo cuando son títulos de empresas que no reparten dividendos y son poco solventes, y el más alto para títulos de Deuda Pública. En ocasiones, si el valor efectivo del título es sobre la par, se suele tomar el nominal como valor de referencia para calcular el importe del préstamo.

Además del importe del crédito o del préstamo, del interés y comisión bancarios, es necesario calcular los gastos que ocasiona la intervención de fedatario público (corretaje y timbres), así como determinar el llamado cambio de reposición.

El **cambio de reposición** es el límite al cual puede bajar la cotización de los valores en garantía, para que se considere en vigor el contrato de pignoración. A partir de dicho límite se exige el aumento de la garantía o bien la reducción del préstamo en la cantidad suficiente para que esté comprendida en el margen de la proporción de valor que se anticipa en toda pignoración. Generalmente, en el contrato se estipula como límite un descenso de la cotización de un 10%, sobre la tomada como base en el cálculo del préstamo. Por tanto, si el cambio tomado al concertar el préstamo fue c el cambio de reposición es $c-0,10c=0,90c$.

La pignoración da origen a diversos cálculos, que se abordan a continuación.

20.1.—CALCULO DEL IMPORTE DEL PRESTAMO

Designado por:

- N: número de títulos pignorados
- C: valor nominal de cada título
- c: cambio de cotización porcentual
- c_p: cambio de pignoración o coeficiente de reducción
- g_b: comisiones bancarias en tanto por uno
- g_c: corretajes del Fedatario en tanto por uno
- F: deducciones fijas por gastos (pólizas, timbres, etc.)
- n: número de días de duración del préstamo
- D: divisor fijo.

Se tiene:

a) **Valor efectivo de los títulos pignorados por razón de cambio**

$$E_c = CN \frac{c}{100} \tag{118}$$

Si $c > 100$ y se ha impuesto como límite la par, se tomará $c = 100$ quedando $E_c = CN$.

b) **Efectivo máximo de pignoración o límite que se puede obtener en préstamo**

$$E_p = E_c \frac{c_p}{100} = CN \frac{c}{100} \frac{c_p}{100} \tag{119}$$

Este valor E_p también se denomina cambio de garantía.

c) **Efectivo líquido percibido por el prestatario del préstamo**

El valor recibido siempre será inferior a la cuantía del crédito o del préstamo concedido, pues hay que deducir los gastos ocasionados y, además, los intereses de la operación, ya que suelen cobrarse por anticipado.

Si la cuantía otorgada es E_p, el efectivo líquido ascenderá a:

$$E_l = E_p\left[1 - \left(\frac{n}{D} + g_b + g_c\right)\right] - F = CN \frac{c}{100} \frac{c_p}{100}\left[1 - \left(\frac{n}{D} + g_b + g_c\right)\right] - F \tag{120}$$

y de esta ecuación se sigue:

$$N = \frac{E_l + F}{C\left[1 - \left(\frac{n}{D} + g_b + g_c\right)\right]} \frac{100}{c} \frac{100}{c_p} \tag{121}$$

$$\frac{c_p}{100} = \frac{E_l + F}{CN\left[1 - \left(\frac{n}{D} + g_b + g_c\right)\right]} \frac{100}{c} \tag{122}$$

$$\frac{c}{100} = \frac{E + F}{CN\left[1 - \left(\frac{n}{D} + g_b + g_c\right)\right]} \frac{100}{c_p} \tag{123}$$

Si $g_b = 0$; $g_c = 0$ y $F = 0$ resulta:

$$E_l = CN \frac{c}{100} \frac{c_p}{100}\left(1 - \frac{n}{D}\right) \quad ; \quad N = \frac{E_l + F}{C\left(1 - \frac{n}{D}\right)} \frac{100}{c} \frac{100}{c} \quad ; \quad \frac{c_p}{100} = \frac{E_l + F}{CN\left(1 - \frac{n}{D}\right)} \frac{100}{c}$$

Ejemplo 1.—Se pignoran 1.000 títulos de Deuda Pública de 10.000 pts. nominales cada uno. La cotización es al 95%, se admiten a pignoración al 90%, la póliza y timbres ascienden a 12.000 pts. y el corretaje es el 2‰. Si el préstamo es concedido a 160 días, al 12% de interés, la comisión bancaria es el 0,40% y el año comercial ¿cuál será el préstamo concedido y el líquido obtenido?

El préstamo concedido asciende a:

$$E = 10.000 \times 1.000 \, \frac{95}{100} \, \frac{90}{100} = 8.550.000$$

y como $D = \dfrac{360}{0{,}12} = 3.000$, resulta el líquido:

$$E_1 = 8.550.000 \left[1 - \left(\frac{160}{3.000} + 0{,}004 + 0{,}002 \right) \right] - 12.000 = 8.030.700$$

La liquidación a presentar al prestatario es:

Principal del préstamo: $10.000.000 \, \dfrac{95}{100} \, \dfrac{90}{100} = 8.550.000$

A deducir:

Corretaje: 2‰ s/8.550.000	= 17.100	
Póliza y timbres	= 12.000	
Intereses s/8.550.000 al 12% por 160 días	= 456.000	
Comisión bancaria: 0,4% s/8.550.000	= 34.200	519.300
Líquido		= 8.030.700

20.2.—CALCULO DE LA MEJORA DE GARANTIA

Cuando el cambio desciende hasta el cambio de resposición se debe proceder a la mejora de garantía o a la reducción del préstamo. La mejora de garantía se determina a continuación.

Para obtener el préstamo de cuantía E_p han sido necesarios N títulos de nominal C, pues $E_p = CN \, \dfrac{c}{100} \, \dfrac{c_p}{100}$; luego si se pretende mantener la misma cuantía E_p cuando la cotización ha descendido hasta el cambio de reposición 0,90c, será necesario el número de títulos N′ que cumpla la relación:

$$E_p = CN' \, \frac{0{,}90c}{100} \, \frac{c_p}{100}$$

La igualación de ambas expresiones

$$CN \, \frac{c}{100} \, \frac{c_p}{100} = CN' \, \frac{0{,}90c}{100} \, \frac{c_p}{100}$$

conduce a:

$$N' = N \frac{1}{0{,}90} = N \frac{10}{9} \tag{124}$$

y la mejora de garantía a efectuar, o títulos a aportar adicionalmente es:

$$\Delta N = N' - N = N \frac{1}{9} \tag{125}$$

Ejemplo 2.—Mediante la pignoración de 1.000 acciones del Banco H. A. de 500 pts. nominales, cuya cotización es del 229% se obtiene el máximo préstamo que permite el cambio de pignoración del 80%. La operación se concierta por seis meses y el Banco prestamista percibe por anticipado los intereses a razón de un 15% anual más una comisión a tanto alzado del 0,50%. Si la póliza y timbre ascienden a 3.000 pts. y el corretaje es del 3‰, determinar: 1) El préstamo concedido; 2) El líquido obtenido y 3) Número de títulos a aportar a los dos meses de concertada la operación si el cambio desciende hasta el cambio de reposición.

Préstamo concedido:

$$E_p = 500 \times 1.000 \frac{229}{100} \frac{80}{100} = 916.000 \text{ pts.}$$

Efectivo líquido obtenido:

$$E_l = 916.000 \left[1 - \left(0{,}15 \frac{6}{12} + 0{,}005 + 0{,}003 \right) \right] - 3.000 = 836.972 \text{ pts.}$$

Cuando la cotización cae hasta $0{,}90 \times 229 = 206{,}1$ es necesario ampliar la garantía con un número de títulos

$$\Delta N = N \frac{1}{9} = 1.000 \frac{1}{9} = 111{,}11$$

20.3.—CALCULO DE LA REDUCCION DEL PRESTAMO

Cuando el cambio desciende hasta el cambio de reposición y no se mejora la garantía se procede a reducir el préstamo.

Por N títulos se obtiene el préstamo de cuantía $E_p = CN \frac{c}{100} \frac{c_p}{100}$; pero si la cotización desciende hasta 0,90c, para el mismo número de títulos solamente se puede conseguir:

$$E'_p = CN \frac{0{,}90c}{100} \frac{c_p}{100} = 0{,}90 E_p = \frac{9}{10} E_p \tag{126}$$

reduciéndose el préstamo por el importe:

$$\Delta E_p = -E'_p + E_p = \frac{1}{10} E_p \tag{127}$$

En los ejemplos anteriores, si el cambio cae hasta el de reposición y no se mejora la garantía se tiene:

Ejemplo 1.—$E'_p = 7.695.000$; $\Delta E_p = 855.000$.

Ejemplo 2.—$E'_p = 824.000$; $\Delta E_p = 91.600$.

20.4.—PIGNORACION DE DIVERSAS CLASES DE VALORES

Sean n clases de valores con las siguientes características:

Números de títulos	N_1	N_2	N_s	N_n
Nominales	C_1	C_2	C_s	C_n
Cambios o cursos	c_1	c_2	c_s	c_n
Cambios de pignoración	c_{p1}	c_{p2}	c_{ps}	c_{pn}

Un poseedor de estos títulos, si pretende pignorarlos, se encontrará ante una de las siguientes situaciones: a) Obtener el efectivo total máximo en concepto de préstamo; b) Demandar un efectivo en préstamo por debajo del máximo pero necesitando la pignoración de las n clases de títulos. Ambos supuestos se plantean a continuación.

a) **Obtención del efectivo máximo**

Procediendo, para cada clase de títulos, como en los puntos anteriores resulta:

Valor efectivo E_{cs}	Cambio de garantía E_{ps}	Cambio de reposición $0{,}90c_s$	Nueva garantía N'_s	Mejora de garantía $N'_s - N_s$	Reducción del préstamo $E_{ps}/10$
$C_1N_1 \frac{c_1}{100}$	$C_1N_1 \frac{c_1}{100} \frac{c_{p1}}{100}$	$0{,}90c_1$	$\frac{10}{9} N_1$	$\frac{1}{9} N_1$	$E_{p1} \frac{1}{10}$
$C_2N_2 \frac{c_2}{100}$	$C_2N_2 \frac{c_2}{100} \frac{c_{p2}}{100}$	$0{,}90c_2$	$\frac{10}{9} N_2$	$\frac{1}{9} N_2$	$E_{p2} \frac{1}{10}$
....	....	....	....	....	....
$C_sN_s \frac{c_s}{100}$	$C_sN_s \frac{c_s}{100} \frac{c_{ps}}{100}$	$0{,}90c_s$	$\frac{10}{9} N_s$	$\frac{1}{9} N_s$	$E_{ps} \frac{1}{10}$
....	....	....	....	....	....
$C_nN_n \frac{c_n}{100}$	$C_nN_n \frac{c_n}{100} \frac{c_{pn}}{100}$	$0{,}90c_n$	$\frac{10}{9} N_n$	$\frac{1}{9} N_n$	$E_{pn} \frac{1}{10}$

En el contrato de pignoración de las n clases de títulos se concretarán una de estas dos condiciones: 1) Cada clase s es garante de su préstamo E_{ps} con independencia de las otras clases; 2) Las n clases de títulos garantizan conjuntamente el préstamo total. Las actuaciones ante estas posibilidades son:

1) La consideración del préstamo total $E_p = \sum_{s=1}^{n} E_{ps}$, integrado por n préstamos E_{ps} independientes conduce a que, ante una caída de las cotizaciones de una o varias clases de valores al cambio de reposición $0{,}90c_s$, se tengan que mejorar exclusivamente las garantías de las clases afectadas por el importe $N_s/9$ o reducirse el préstamo en $E_{ps}/10$.

2) Cuando la totalidad de valores $N = \sum_{s=1}^{n} N_s$ garantizan al préstamo $E_p = \sum_{s=1}^{n} E_{ps}$, ante alteraciones de cambios se razonará en los resultados globales, careciendo de significado las causas individuales generadoras de la situación.

Para obtener el préstamo E_p es necesario depositar N títulos cuyo valor efectivo es:

$$E_c = \sum_{s=1}^{n} E_{cs} = \sum_{s=1}^{n} C_s N_s \frac{c_s}{100} \tag{128}$$

a los que corresponde el cambio medio c tal que:

$$E_c = \frac{c}{100} \sum_{s=1}^{n} C_s N_s \Rightarrow C = \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s N_s c_s}{\sum_{s=1}^{n} C_s N_s} \tag{129}$$

El préstamo máximo E_p resulta de aplicar los cambios de garantía a cada clase de valores, es decir:

$$E_p = \sum_{s=1}^{n} E_{ps} = \sum_{s=1}^{n} E_{cs} \frac{c_{ps}}{100} = \sum_{s=1}^{n} C_s N_s \frac{c_s}{100} \frac{c_{ps}}{100} \tag{130}$$

lo que equivale al cambio medio de garantía c_p, dado por:

$$E_p = \sum_{s=1}^{n} E_{cs} \frac{c_p}{100} = \frac{c_p}{100} E_c \Rightarrow c_p = 100 \frac{E_p}{E_c} \tag{131}$$

El cambio de reposición es:

$$0{,}90c = \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s N_s c'_s}{\sum_{s=1}^{n} C_s N_s} = c' \tag{132}$$

lo cual implica una reducción del valor efectivo de los títulos hasta $0{,}90\,E_c$. Si para prestar E_p es necesaria la condición (131), cuando se desciende al cambio de reposición son necesarios los títulos N'_s que cumplan:

$$E_p = \frac{c_p}{100}\,\frac{0{,}90c}{100}\sum_{s=1}^{n} C_s N'_s$$

e igualando con la (130) se sigue:

$$0{,}90\sum_{s=1}^{n} C_s N'_s = \sum_{s=1}^{n} C_s N_s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{s=1}^{n} C_s N'_s = \frac{10}{9}\sum_{s=1}^{n} C_s N_s \tag{133}$$

es decir, el **nuevo nominal** debe ser igual a 10/9 del anterior; pero esta igualdad puede conseguirse actuando sobre una sola clase de títulos, sobre varias o en todas, existiendo, por tanto, diversas soluciones para restablecer el equilibrio de garantías exigidas.

La **mejora de garantías** consistirá en aportar un noveno del antiguo nominal, es decir, $\sum_{s=1}^{n} C_s N_s/9$.

Si se opta por la solución de adaptar el préstamo hasta

$$E'_p = \frac{c_p}{100}\,\frac{0{,}90c}{100}\sum_{s=1}^{n} C_s N_s = 0{,}90\,E_p$$

se producirá la **reducción** $E_p - E'_p = E_p/10$.

Ejemplo 3.—Se solicita del Banco E. C. un préstamo entregando en garantía valores cuyas características son:

	C_s	N_s	c_s	c_{ps}
1) Deuda Pública	**10.000**	**150**	**104**	**90**
2) Bonos Banco	**20.000**	**100**	**100**	**80**
3) Acciones HE	**500**	**2.500**	**51**	**60**

Determinar el efectivo máximo del préstamo, los cambios de reposición, mejora de garantía y reducción del préstamo si cada clase de títulos es garante de su parte de préstamo inicial.

De acuerdo con lo desarrollado en el cuadro anterior resulta:

E_{cs}	E_{ps}	$0{,}90c_s$	N'_s	$N'_s - N_s$	$E_{ps}/10$
$E_{c1} = 1.560.000$	$E_{p1} = 1.404.000$	93,6	166,67	16,67	140.000
$E_{c2} = 2.000.000$	$E_{p2} = 1.600.000$	90,0	111,11	11,11	160.000
$E_{c3} = 625.000$	$E_{p3} = 375.000$	45,9	2.777,78	277,78	37.500
$E_c = 4.185.000$	$E_p = 3.379.000$				

Ejemplo 4.—Obtener la solución del ejemplo 3 si la garantía de los títulos es conjunta en el préstamo total.

Procediendo en el orden indicado en las fórmulas (128) y siguientes resulta:

Nominal total: $1.500.000 + 2.000.000 + 1.250.000 = 4.750.000$.

Valor efectivo de los títulos: $E_c = 4.185.000$.

Préstamo máximo: $E_p = 3.379.000$.

Cambio medio: $c = \dfrac{4.185.000}{4.750.000}\,100 = 88{,}11$.

Cambio medio de pignoración: $c_p = 100\,\dfrac{3.379.000}{4.185.000} = 80{,}74$.

Cambio medio de reposición: $0{,}90c = 72{,}67$.

Nuevo nominal de garantía: $\sum\limits_{s=1}^{3} C_s N'_s = 4.750.000\,\dfrac{10}{9} = 5.277.777{,}78$.

Mejora de garantía: $\sum\limits_{s=1}^{3} C_s(N'_s - N_s) = \sum\limits_{s=1}^{3} C_s \Delta N_s = \dfrac{4.750.000}{9} = 527.777{,}78 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ 10.000\Delta N_1 + 20.000\Delta N_2 + 500\Delta N_3 = 527.777{,}78$.

Las soluciones de la terna $(\Delta N_1,\ \Delta N_2,\ \Delta N_3)$ son múltiples, encontrándose entre ellas la posibilidad de mejorar garantías con una sola clase de títulos. Esta es:

- Mejora con clase 1: $\Delta N_2 = \Delta N_3 = 0 \Rightarrow \Delta N_1 = 52{,}78$ títulos.
- Mejora con clase 2: $\Delta N_1 = \Delta N_3 = 0 \Rightarrow \Delta N_2 = 26{,}39$ títulos.
- Mejora con clase 3: $\Delta N_1 = \Delta N_2 = 0 \Rightarrow \Delta N_3 = 1.055{,}56$ títulos.

Reducción del préstamo: $E_p/10 = 337.900$.

b) Obtención de un préstamo inferior al máximo

Cuando el préstamo que se solicita es $E'_p < E_p$, y se necesitan pignorar las n clases de valores, se procede a obtener los efectivos máximos de cada clase $E_1, E_2, \ldots, E_n$, cuya suma es E_p, y seguidamente se efectúa un reparto proporcional de la cuantía que se desea E'_p entre las n clases de valores, obteniéndose:

$$E'_{p1} = \frac{E'_p}{E_p} E_{p1} \quad ; \quad E'_{p2} = \frac{E'_p}{E_p} E_{p2} \quad ; \quad \dots \quad ; \quad E'_{pn} = \frac{E'_p}{E_p} E_{pn}$$

De esta manera, los valores de cada clase s garantizan unos importes E'_{ps} inferiores a su máximo, lo que equivale a considerar unos cambios artificiales inferiores, y en consecuencia, cambios de garantía y reposición inferiores.

Los resultados de la clase s, para $s=1, 2, \dots, n$, son:

Cambio o curso artificial: $c'_s = c_s E'_p/E_p$

Efectivo del préstamo: $E'_{ps} = E_{ps} E'_p/E_p$

Cambio de pignoración o garantía: $c'_{ps} = c_{ps} E'_p/E_p$

Cambio de reposición: $0{,}90c'_s$

Mejora de garantía: $N_s/9$

Reducción del préstamo: $E'_{ps}/10$

Asimismo, cabe considerar la posibilidad de que cada clase sea garante de su préstamo, o que la garantía sea sobre el préstamo total conjuntamente. En cada una de ellas, se procederá de igual forma que en el caso de obtención del préstamo máximo ya analizado.

Ejemplo 4.—Determinar el efectivo del préstamo, los cambios de reposición, mejora de garantía y reducción del préstamo si se solicita un préstamo de 2.500.000 pts. entregando a pignoración los títulos del ejemplo 3. Considérese el caso de garantía independiente.

Siguiendo el método indicado, al ser $\frac{E'_p}{E_p} = \frac{2.500.000}{3.379.000} = 0{,}739864$.

Se tiene:

c'_s	$E'_{cs} = E_{cs} c'_s$	E'_{ps}	$0{,}90c'_s$	N'_s	$N_s/9$	$E'_{ps}/10$
76,95	1.154.188	1.038.769	69,25	166,67	16,67	115.419
73,99	1.479.728	1.183.782	66,59	111,11	11,11	147.973
37,73	462.415	277.449	35,96	2.778,78	277,88	46.241
	3.096.331	2.500.000				

20.5.—PIGNORACIONES GRADUALES: LIMITE TEORICO DE PIGNORACION

Una pignoración se llama gradual cuando con el préstamo obtenido en una operación de esta clase se hace una nueva inversión en valores idénticos, que son pignorados simultaneamente y se repite la compra de títulos y su pignoración cuantas veces sea posible.

Sea un inversor que posee N títulos de C pts. nominales que cotizan a un cambio c. Prescindiendo de gastos e intereses, si el cambio de pignoración es c_p, por el valor efectivo $E_c = CN \dfrac{c}{100}$ se obtiene un préstamo $E_{p1} = E_{c1} \dfrac{c_p}{100}$, el cual produce una nueva compra efectiva $E_{c2} = E_{p1}$ y una nueva pignoración $E_{p2} = E_{c2} \dfrac{c_p}{100}$ y así sucesivamente. Si la operación se repite n veces, se tiene:

Número de pignoración	Efectivo disponible	Préstamo que se obtiene
1	$E_{c1} = CN \dfrac{c}{100}$	$E_{p1} = E_{c1} \dfrac{c_p}{100}$
2	$E_{c2} = E_{p1}$	$E_{p2} = E_{c2} \dfrac{c_p}{100} = E_{c1} \left(\dfrac{c_p}{100}\right)^2$
3	$E_{c3} = E_{p2}$	$E_{p3} = E_{c3} \dfrac{c_p}{100} = E_{c1} \left(\dfrac{c_p}{100}\right)^3$
. . .	. . . .	. . . .
n	$E_{cn} = E_{p(n-1)}$	$E_{pn} = E_{p(n-1)} \dfrac{c_p}{100} = E_{c1} \left(\dfrac{c_p}{100}\right)^n$

Actuando de esta manera, con el efectivo inicial E_{c1}, es posible conseguir un préstamo total de:

$$C_0 = E_{c1} \frac{c_p}{100} \left[1 + \frac{c_p}{100} + \left(\frac{c_p}{100}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{c_p}{100}\right)^{n-1} \right] = E_{c1} \frac{c_p}{100} \frac{1 - \left(\dfrac{c_p}{100}\right)^n}{1 - \dfrac{c_p}{100}} = E_{c1} K_n \qquad (134)$$

que al ser colocado en títulos de las mismas características y especie se dispondrá al final del proceso la inversión efectiva:

$$I_n^T = E_{c1} + E_{c1} K_n = E_{c1}(1 + K_n) = CN \frac{c}{100} (1 + K_n) \qquad (135)$$

con un número de títulos

$$N_n^T = N + NK_n = N(1 + K_n) \qquad (136)$$

Este proceso es esencialmente especulativo y producirá el apalancamiento en las ganancias (pérdidas), del inversor si las cotizaciones suben (bajan).

En caso de variación de cotizaciones, el inversor con sus disponibilidades iniciales, obtiene un beneficio (o pérdida).

$$B = CN\ \frac{c \pm \Delta c}{100} - CN\ \frac{c}{100} = \pm CN\ \frac{\Delta c}{100} \tag{137}$$

pero utilizando la pignoración gradual alcanza el valor

$$B_p = I_n(c \pm \Delta c) - I_n(c) = CN\ \frac{c \pm \Delta c}{100}\ (1+K_n) - CN\ \frac{c}{100}\ (1+K_n) =$$

$$= \pm CN\ \frac{\Delta c}{100}\ (1+K_n) = B(1+K_n) \tag{138}$$

que supone el incremento de los resultados

$$\Delta B = B_p - B = \pm CN\ \frac{\Delta c}{100}\ K_n = \pm BK_n \tag{139}$$

Conviene tener presente que el beneficio líquido es inferior al reflejado en (138) ya que hay que deducir los intereses y gastos de las operaciones de pignoración; en caso de pérdidas aumentarían éstas con los pagos de los citados intereses y gastos.

El caso **límite de pignoración** (con validez sólo teórica) se tiene cuando el número de operaciones tiende a infinito, entonces el multiplicador de resultados K_n se transforma en:

$$K = \lim_{n \to \infty} K_n = \lim_{n \to \infty} \frac{c_p}{100}\ \frac{1 - \left(\dfrac{c_p}{100}\right)^n}{1 - \dfrac{c_p}{100}} = \frac{c_p}{100 - c_p} \tag{140}$$

y las fórmulas (134)—(139) se convierten en:

$$C_0 = E_{c1} K = CN\ \frac{c}{100}\ \frac{c_p}{100 - c_p} \tag{134'}$$

$$I^T = CN\ \frac{c}{100}\ (1+K) = CN\ \frac{c}{100}\left(1 + \frac{c_p}{100 - c_p}\right) \tag{135'}$$

$$N^T = N(1+K) = N\left(1 + \frac{c_p}{100 - c_p}\right) \tag{136'}$$

$$B_p = \pm CN\ \frac{\Delta c}{100}\ (1+K_n) = \pm CN\ \frac{\Delta c}{100}\left(1 + \frac{c_p}{100 - c_p}\right) \tag{138'}$$

$$\Delta B = \pm CN\ \frac{\Delta c}{100}\ K_n = \pm CN\ \frac{\Delta c}{100}\ \frac{c_p}{100 - c_p} \tag{139'}$$

Ejemplo 5.—Determinar los resultados especulativos de un inversor que dispone 1.000 títulos de 500 pts. nominales, con cotización al 90%, si procede a efectuar un proceso de pignoraciones graduales en las siguientes condiciones:

- **Cambio de pignoración: 70%.**
- **Número de pignoraciones: 4,6 u 8.**
- **Variación de cotizaciones: 10%.**

Los valores de K_n y $(1+K_n)$, con $n=4,6$ ú 8, son:

$$K_n = \frac{c_p}{100} - \frac{1-\left(\frac{c_p}{100}\right)^n}{1-\frac{c_p}{100}} = 70\ \frac{1-\left(\frac{70}{100}\right)^n}{30} \Rightarrow$$

n	K	1+K
4	1,7731	2,7731
6	2,0588	3,0588
8	2,1988	3,1988

que aplicados a las fórmulas (135)–(139) dan los siguientes resultados:

$$I_4 = 500 \times 1.000(1+K_4) = \begin{cases} 1.247.895{,}0, & \text{si} \quad n=4 \\ 1.376.468{,}5, & \text{si} \quad n=6 \\ 1.439.469{,}6, & \text{si} \quad n=8 \end{cases}$$

$$N_4 = 1.000(1+K_4) = \begin{cases} 2.773{,}1, & \text{si} \quad n=4 \\ 3.058{,}8, & \text{si} \quad n=6 \\ 3.198{,}8, & \text{si} \quad n=8 \end{cases}$$

$$B = \pm 500 \times 1.000\ \frac{0{,}10 \times 90}{100} = \pm 45.000$$

$$\left.\begin{array}{l} B_p = \pm 45.000(1+K_4) \\ \Delta B = \pm 45.000 K_4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

n	B_p		ΔB	
	$+\Delta c$	$-\Delta c$	$+\Delta c$	$-\Delta c$
4	124.789,5	−124.789,5	79.789,5	−79.789,5
6	137.646,9	−137.646,9	92.646,9	−92.646,9
8	143.947,0	−143.947,0	98.947,0	−98.947,0

Ejemplo 6.—Calcular los beneficios líquidos y las pérdidas efectivas del ejemplo anterior, teniendo en cuenta intereses y gastos, si:

- **La duración del préstamo es 90 días.**
- **El tipo de interés anual el 15%.**
- **La comisión bancaria el 0,40%.**
- **El corretaje el 2,5%.**
- **Póliza y timbres 1.000 pts. por operación.**

Las cuantías prestadas, intereses y gastos son:

$$C_0 = E_{c1} K_n = 500 \times 1.000 \frac{90}{100} K_n = 450.000 K_n = \begin{cases} 797.895{,}0, & \text{si} \quad n=4 \\ 926.468{,}5, & \text{si} \quad n=6 \\ 989.469{,}6, & \text{si} \quad n=8 \end{cases}$$

$$I = 0{,}15 \frac{90}{360} C_0 = 0{,}0375 C_0 = \begin{cases} 29.921{,}1, & \text{si} \quad n=4 \\ 34.742{,}6, & \text{si} \quad n=6 \\ 37.105{,}1, & \text{si} \quad n=8 \end{cases}$$

$$G = C_0(g_b + g_c) + F_n = 0{,}0065 C_0 + 1.000n = \begin{cases} 9.186{,}3, & \text{si} \quad n=4 \\ 12.022{,}0, & \text{si} \quad n=6 \\ 14.431{,}6, & \text{si} \quad n=8 \end{cases}$$

resultando los beneficios líquidos o pérdidas efectivas que se recojen en el cuadro siguiente:

n	Beneficio líquido $B_p(+\Delta c)-(I+G)$	Pérdida efectiva $B_p(-\Delta c)+(I+G)$
4	85.682,1	163.896,8
6	90.849,3	184.444,5
8	92.410,3	195.483,7

Ejemplo 7.—Determinar el límite teórico de resultados, cuando el número de pignoraciones tiende a infinito, del ejemplo 5.

Los valores que se obtienen son:

$$C_0 = E_{c1} K = 450.000 \frac{70}{100-70} = 450.000 \times 2{,}33 = 1.050.000$$

$$I^r = E_{c1}(1+K) = 1.500.000$$

$$B_p = \pm 500.000 \frac{9}{100} (1+K) = 150.000$$

$$\Delta B = \pm 500.000 \frac{9}{10} K = 105.000$$

21.—OPERACIONES DE SUSCRIPCION Y COLOCACION

La suscripción tiene por objeto formalizar las inversiones de dinero en títulos valores ya sean representativos del capital social (acciones) o de endeudamiento de la sociedad (Obligaciones, Deuda Pública, Pagarés, etc.).

Las características de los títulos ya han sido estudiadas por lo que ahora basta hacer una breve referencia a la mecánica de la suscripción y adjudicación de los valores.

En las emisiones de Deuda Pública, anunciadas las condiciones del empréstito se señala un plazo límite de días para la admisión de las ofertas de dinero y si las peticiones de los suscriptores exceden de la cuantía de los títulos emitidos se procede a prorratear el número de los que han de adjudicarse para que proporcionalmente quede cubierta la emisión anunciada. En ocasiones se suelen respetar íntegramente las solicitudes que no exceden de una determinada cantidad, generalmente moderada, procediéndose al prorrateo entre las ofertas de dinero más importantes.

Cuando se ponen en circulación acciones y obligaciones emitidas por las empresas privadas, se suele reservar a los tenedores de acciones el derecho a suscribir la nueva emisión. Este derecho preferente es fundamental en el caso de las emisiones de acciones y da origen a un conjunto de operaciones estudiadas con cierta extensión en los epígrafes 15-19. Cuando se efectúa una ampliación el accionista tiene que desembolsar el precio de emisión más los gastos, haciendo uso de un determinado cupón de los que aparecen en el título; pero si el interesado no desea efectuar ese desembolso enajena en Bolsa el derecho suyo a la suscripción, obteniendo un producto de la realización o venta del cupón que se exige por la entidad emisora para acreditar el privilegio de suscripción de los títulos.

La puesta en circulación de todos los títulos está sujeta a la intervención de Agente que expide la correspondiente póliza de propiedad y cobra los derechos de corretaje correspondientes.

Anunciada la emisión de títulos para la libre suscripción entre los solicitantes, el desembolso a efectuar por cada adjudicatario en concepto de precio de emisión y gastos se determina de igual manera que la descrita en la compraventa en Bolsa al contado. En ocasiones, sobre todo en el caso de obligaciones, los gastos de suscripción son a cargo del emisor abonando el inversor suscriptor solamente el precio de emisión.

Si la suscripción queda reservada a los poseedores de acciones viejas, en el caso de ampliaciones de capital con precio de emisión inferior al de cotización, todo inversor que no posea títulos deberá adquirir previamente los correspondientes derechos abonando por cada uno de ellos su precio de cotización en el mercado; ahora bien, el inversor siempre tiene la opción de adquirir títulos antiguos o suscribir títulos nuevos eligiendo aquella posición que considere más favorable.

Designando por **N** al número de títulos en circulación, por **C** al valor nominal de cada acción (en cotización porcentual será $C=100$), por **p** al precio del entero, por **A** a la cotización del título en el mercado; si se efectúa una ampliación de **N** títulos al precio **E** (en enteros), es decir, en la proporción $\alpha = N_e/N$, el valor teórico del derecho de opción será, según (97):

$$D_e = [A-(E+R_e)]\,\frac{\alpha}{1+\alpha} \quad \text{o} \quad D_e = (A-E)\,\frac{\alpha}{1+\alpha}$$

pero su valor de mercado ascenderá a D'_e, con $D'_e \lesseqgtr D_e$.

Un inversor que pretenda suscribir **m** títulos nuevos deberá adquirir $m\ 1/\alpha = mN/N_e$ derechos, para tener la opción de suscripción, abonando el precio D'_e. Además, tendrá que pagar el precio E por cada título. En conjunto, el desembolso efectivo es:

$$E_s = Em + m\,\frac{1}{\alpha}\,D'_e = m\left(E + \frac{D'_e}{\alpha}\right) \tag{141}$$

expresión que viene dada en enteros y su correspondiente en pesetas es pE_s.

Recurrir a la suscripción para adquirir los **m** títulos puede ser adecuado siempre que $D'_e \leqslant D_e$ y así conseguir un título a un precio $E+D'_e/\alpha$, inferior al de su cotización esperada después de la ampliación

$$A^* = \frac{A+E\alpha}{1+\alpha} = E + \frac{D_e}{\alpha}$$

lo que llevará a unos beneficios potenciales $\dfrac{D_e - D'_e}{\alpha}$.

Cuando la cotización del derecho D'_e supera a su valor teórico D_e calculado según el valor de A, será preferible adquirir los **m** títulos antes de la ampliación abonando el efectivo

$$E_c = mA = m\left(E + \frac{D_e}{\alpha}\right) \tag{142}$$

Esta decisión supone adquirir los títulos a precio inferior que en la suscripción, siendo la diferencia $\dfrac{D'_e - D_e}{\alpha}$. Ante la ampliación, el inversor puede optar por:

a) Suscribir los $m\alpha$ títulos a que tiene derecho pagando el precio E.

El desembolso total asciende a $m\left(E + \dfrac{D_e}{\alpha}\right) + m\alpha E$, el número de títulos que dispone es $m + m\alpha = m(1+\alpha)$ y el coste medio de adquisición de cada uno es:

$$\frac{m\left(E + \dfrac{D_e}{\alpha}\right) + m\alpha E}{m(1+\alpha)} = E + \frac{D_e}{\alpha(1+\alpha)} \tag{143}$$

b) Vender los m derechos de sus títulos al precio D'_e.

Con ello se tiene un desembolso real $E_c - mD'_e$ y **m** títulos a un coste medio

$$\frac{E_c - mD'_e}{m} = E + \frac{D_e}{m} - D'_e$$

que es inferior al de (143) ya que la diferencia entre la decisión a) y ésta es $D'_e - \dfrac{D_e}{\alpha} > 0$ por ser $D'_e > D_e$.

Ejemplo 1.—La C.T.N.E. tiene su capital representado en acciones de 500 pts. nominales que cotizan al 86%. Se procede a una ampliación de capital en la proporción de una nueva por cada cinco antiguas ofertando a los accionistas dichos títulos al 70% de su valor nominal. Analizar la decisión que debe tomar un inversor que desea adquirir 2.000 títulos, si el derecho de opción cotiza a 6 pts.

El valor teórico del derecho es:

$$D_e = (A - E) \frac{\alpha}{1+\alpha} = (86\text{-}70) \frac{0{,}20}{1+0{,}20} = 2{,}66 \text{ enteros} \quad \text{ó} \quad 13{,}33 \text{ pts.}$$

Como $D_e = 13{,}33 > D'_e = 6$ interesa suscribir los títulos comprando $\frac{m}{\alpha} = \frac{2.000}{0{,}20} = 10.000$ derechos y teniendo que desembolsar:

$$10.000 \times 6 + 500 \frac{70}{100} 2.000 = 760.000 \text{ pts.}$$

El coste medio por título es:

$$\frac{760.000}{2.000} = 380 \text{ pts.} \quad \text{ó} \quad 76 \text{ enteros}$$

y la ganancia potencial por título

$$\frac{D_e - D'_e}{\alpha} = \frac{13{,}33 - 6}{0{,}20} = 36{,}66 \text{ pts.} \quad \text{ó} \quad 7{,}33 \text{ enteros}$$

que coincide con la diferencia entre el valor teórico de cotización después de la ampliación

$$A^* = \frac{A + E\alpha}{1+\alpha} = \frac{86 + 70 \times 0{,}20}{1+0{,}20} = 83{,}33$$

y el coste medio de adquisición.

Ejemplo 2.—Estudiar la decisión a tomar en el ejemplo 1 si el derecho de opción cotiza a 16 pts.

Como $D'_e = 16 > D_e = 13{,}33$ debe optarse por la compra directa en el mercado pagando

$$E_c = 86 \times 2.000 = 172.000 \text{ enteros} \quad \text{ó} \quad 860.000 \text{ pts.}$$

Si el inversor suscribe los $2.000\alpha = 400$ títulos a que tiene derecho pagando el 70%, ó 350 pts., el desembolso total por los 2.400 títulos asciende a:

$$860.000 + 350 \times 400 = 1.000.000$$

y como coste medio del título se tiene:

$$\frac{1.000.000}{2.400} = 416{,}67 \text{ pts.} \quad \text{ó} \quad 83{,}33 \text{ enteros}$$

que coincide con A^*.

Si el inversor decide vender los 2.000 derechos a 16 pts. ingresa por este concepto 32.000 pts. que minoran su desembolso inicial. El coste medio de los 2.000 títulos es:

$$\frac{860.000 - 32.000}{2.000} = 414 \text{ pts.} \quad \text{ó} \quad 82{,}8 \text{ enteros}$$

que es inferior al anterior.

22.—CONVERSIONES DE VALORES

La conversión es la facultad por la cual unos títulos pueden transformarse en otros de igual o de diferente naturaleza, pero con características distintas.

Las modalidades que pueden darse son:

a) Transformación de títulos en otros de igual naturaleza: Conversión de obligaciones por obligaciones; conversión de acciones por acciones.

b) Transformación de títulos en otros de distinta naturaleza: Conversión de obligaciones por acciones o la recíproca.

En el presente epígrafe solamente se hará alusión a la conversión entre títulos de igual naturaleza. Las distintas hipótesis que pueden darse en la práctica consisten en alterar alguna o algunas de las condiciones de los títulos que se hallan en circulación. Así, si se hace referencia a los fondos públicos cabe hablar de transformación de Deuda a corto plazo o medio plazo en Deuda a largo plazo o en Deuda perpetua; también cabe la recogida de Deuda en circulación para variar el tipo de interés, etc. En valores industriales y comerciales, la conversión puede perseguir finalidades tales como la transformación de acciones nominativas en el portador, o viceversa; agrupación o desdoble de nominales; supresión de preferencia y privilegios en favor de determinadas acciones; alteración de los plazos de amortización o variaciones de los tipos de interés en las obligaciones, etc.

Aunque no es posible establecer unas condiciones válidas con generalidad, para la transformación de valores en las operaciones de conversión, sí cabe decir que suelen efectuarse en base a equivalencias o a proporcionalidad del valor efectivo de cotización, del valor nominal, o de las rentas del que se transforma y de aquél en que queda convertido. A continuación se pasa a analizar los casos de especial relieve.

22.1.—CONVERSION EN BASE AL VALOR EFECTIVO

Esta forma suele utilizarse para transformar obligaciones o Deuda pública. Para hacer la conversión se toman como referencia los valores de cotización del que se transforma (desaparece) y del que queda en la conversión, debiendo establecerse la igualdad de los valores efectivos entre los títulos sustituidos y los sustitutos.

Representando por N al número de títulos a transformar, por C al valor nominal de cada uno, por c al cambio y por V al precio o valor efectivos y si N^*, C^*, c^*, V^* simbolizan los mismos conceptos en los títulos sustitutos (o transformados) se tiene:

$$E = VN = V^*N^* = E^* \tag{145}$$

o su equivalente

$$C \frac{c}{100} N = C^* \frac{c^*}{100} N^* \tag{146}$$

El número N* de títulos que se entregan a cambio de los N es:

$$N^* = \frac{C}{C^*} \frac{c}{c^*} N \qquad (147)$$

Cuando los nominales son iguales esta expresión se reduce a $N^* = \frac{c}{c^*} N$.

En caso de efectuar una emisión nueva para canjear por los antiguos títulos, V* representará al precio de emisión. Si éste es el nominal ($c^* = 100$) la (147) quedará así:

$$N^* = \frac{C}{C^*} \frac{c}{100} N \quad \text{ó} \quad N^* = \frac{c}{100} N$$

si $C = C^*$.

Ejemplo 1.—Determinar el número de títulos de 10.000 pts. nominales, que cotizan al 105% que se recibirán a cambio de 5.000 obligaciones de 1.000 pts. nominales si su cotización es el 95% del nominal.

Haciendo uso de la (147) se tiene:

$$N^* = \frac{C}{C^*} \frac{c}{c^*} N = \frac{1.000}{10.000} \frac{95}{105} 5.000 = 452,38$$

pero la solución real sería la entrega de 452 títulos y 4.000 pts. que es la diferencia entre:

$$5.000 \frac{95}{100} 1.000 - 452 \frac{105}{100} 10.000 = 4.750.000 - 4.746.000 = 4.000$$

22.2.—CONVERSION EN BASE AL VALOR NOMINAL

Esta clase de conversión se suele utilizar para el caso de cambios de capital. El problema que usualmente se plantea es el de obtener el número de acciones nuevas que se entregarán por las antiguas.

De la equivalencia de nominales

$$CN = C^* N^* \qquad (148)$$

se sigue:

$$N^* = \frac{C}{C^*} N \qquad (149)$$

Ejemplo 2.—Una sociedad convierte sus acciones de 500 pts. nominales en acciones al portador de 1.000 pts. entregando dos acciones viejas por cada una nueva. ¿Cuál será el número de acciones nuevas que recibirá un accionista que posee 1.036 acciones viejas?

Aplicando la fórmula anterior resulta:

$$N^* = \frac{C}{C^*} N = \frac{500}{1.000} 1.036 = 518$$

22.3.—CONVERSION EN BASE A LA RENTA EFECTIVA PERIODICA

Esta clase de conversión suele tener su aplicación cuando se desea prorrogar el reembolso de una deuda, o cuando habiendo diferentes clases de empréstitos de los que es deudora la entidad se desea obtener la unificación de todos ellos. Esto se consigue estableciendo condiciones de conversión que permitan a los poseedores de los valores a convertir seguir disfrutando de la misma renta efectiva neta con el nuevo nominal que se les entregará después de la operación.

El problema a resolver es el de determinar la proporcionalidad de los nominales que han de entrar en la transformación de acuerdo con las cotizaciones de cada clase de obligaciones en el momento de la conversión.

Conviene tener presente que el rendimiento de estos títulos viene determinado por los cupones periódicos netos de impuestos que se perciben.

Designando, en los títulos a sustituir o transformarse, por i_e a la rentabilidad neta efectiva unitaria, por i al tipo de interés que determina los cupones, por α a tipo impositivo sobre los cupones y con los mismos significados, en los títulos sustitutos o transformados, a i_e^*, E^*, i^*, α^*, se tiene:

$$i_e = \frac{Ci(1-\alpha)}{C\,\frac{c}{100}} = \frac{i(1-\alpha)}{\frac{c}{100}} \quad ; \quad i_e^* = \frac{C^* i^*(1-\alpha^*)}{C^*\,\frac{c^*}{100}} = \frac{i^*(1-\alpha^*)}{\frac{c^*}{100}}$$

La renta efectiva de cada empréstito vendrá dada por:

$$R = VNi_e \quad ; \quad R^* = V^* N^* i_e^*$$

debiendo verificarse:

$$R = R^* \Rightarrow \frac{VNi(1-\alpha)}{\frac{c}{100}} = \frac{V^* N^* i^*(1-\alpha^*)}{\frac{c^*}{100}} \tag{150}$$

lo cual implica

$$CNi(1-\alpha) = C^* N^* i^*(1-\alpha^*) \tag{151}$$

obteniéndose de esta igualdad:

$$N^* = N\,\frac{C}{C^*}\,\frac{i(1-\alpha)}{i^*(1-\alpha^*)} \quad ; \quad N = N^*\,\frac{C^*}{C}\,\frac{i^*(1-\alpha^*)}{i(1-\alpha)} \tag{152}$$

En caso de igualdad de nominales y tipos impositivos resulta:

$$N^* = N\,\frac{i}{i^*} \quad ; \quad N = N^*\,\frac{i^*}{i} \tag{153}$$

Ejemplo 3.—Una empresa que tiene en circulación obligaciones con abono de interés del 10% sobre el nominal desea convertirlas en títulos que renten el 12,5% sobre el nominal. Determinar el número de títulos de 10.000 pts. nominales que se deben emitir para convertir los 50.000 títulos viejos de 1.000 pts. nominales si el tipo impositivo no varía. ¿Cuál sería el número de títulos si los nominales de los nuevos también fuesen de 1.000 pts?

Haciendo uso de la fórmula (152), para $\alpha = \alpha^*$, se tiene:

$$N^* = N \frac{C}{C^*} \frac{i}{i^*} = 50.000 \frac{1.000}{10.000} \frac{0{,}10}{0{,}125} = 4.000$$

y en caso de igualdad de nominales es:

$$N^* = N \frac{i}{i^*} = 50.000 \frac{0{,}10}{0{,}125} = 40.000$$

Ejemplo 4.—¿Cuáles serían los resultados del ejemplo anterior si $\alpha = 24\%$ y $\alpha^* = 20\%$?

a) Caso de nominales desiguales

$$N^* = N \frac{C}{C^*} \frac{i(1-\alpha)}{i^*(1-\alpha^*)} = 50.000 \frac{1.000}{10.000} \frac{0{,}10(1-0{,}24)}{0{,}125(1-0{,}20)} = 3.800$$

b) Caso de nominales iguales

$$N^* = N \frac{i(1-\alpha)}{i^*(1-\alpha^*)} = 50.000 \frac{0{,}10(1-0{,}24)}{0{,}125(1-0{,}20)} = 38.000$$

22.4.—CONVERSION EN BASE AL TANTO t DEL MERCADO

Se trata del caso más general de conversión de empréstitos en el cual se plantea la transformación en base a la equivalencia financiera, al tanto t de valoración de mercado, de las anualidades que reciben los obligacionistas y las que se les ofertan en el futuro.

Situado al principio del año s + 1 de la vida de un empréstito cuyas características son:

VN	a_{s+1}	a_{s+2}	....	a_r	....	a_n
s	s+1	s+2	....	r	....	n

si el mercado evalúa al tanto t, el valor del empréstito vivo es:

$$E = VN = \sum_{r=s+1}^{n} a_r (1+t)^{-(r-s)}$$

Si se pretende entregar a cambio otro empréstito definido por:

$$\begin{array}{cccccc}
V^*N^* & a^*_{k+1} & a^*_{k+2} \dots\dots\dots & a^*_r & \dots\dots\dots & a^*_m \\
\hline
k & k+1 & k+2 \dots\dots\dots & r & \dots\dots\dots & m
\end{array}$$

cuyo valor de mercado asciende a:

$$E^* = V^*N^* = \sum_{r=k+1}^{m} a^*_r (1+t)^{-(r-k)}$$

ello sólo será posible si los valores actualizados de ambos son los mismos, es decir, si:

$$E = E^* \Rightarrow VN = V^*N^* \qquad (154)$$

lo cual resalta la coincidencia con el caso 22.1 obteniéndose por tanto:

$$C \frac{c}{100} N = C^* \frac{c^*}{100} N^*$$

Séptima parte

OPERACIONES ESPECIALES

VII.—OPERACIONES ESPECIALES

VII.1.—LAS OPERACIONES FINANCIERAS Y LA DEPRECIACION MONETARIA

1.—Planteamiento matemático.
2.—Operación financiera simple.
3.—Operación de constitución.
4.—Operación de amortización.
5.—Operación de amortización americana.
6.—Aplicaciones.

VII.2.—PLANES DE AHORRO Y PREVISION

7.—Introducción.
8.—Variaciones del plan de constitución.
9.—Análisis del plan de ahorro. Planteamiento o diseño del plan inicial.
10.—Análisis de sensibilidad.
   10.1.—Variación de la tasa de inflación.
   10.2.—Variación del tipo de interés.
   10.3.—Variación de la tasa de crecimiento salarial.
11.—Variaciones del Plan de Ahorro.
   11.1.—Tipo de interés.
   11.2.—Capital a constituir.
   11.3.—Cuantía de las aportaciones.
   11.4.—Edad de jubilación.
12.—Aplicaciones.
13.—Conclusiones.

VII.3.—LAS OPERACIONES DE INVERSION

14.—Introducción: Noción de inversión; Clasificaciones.
   14.1.—Noción de inversión.
   14.2.—Clasificaciones.
15.—El modelo matemático de la inversión: Valor financiero de una inversión en un punto α.
16.—Criterios de valoración y elección de un proyecto de inversión.

VII.1.—LAS OPERACIONES FINANCIERAS Y LA DEPRECIACION MONETARIA

La inflación se manifiesta como un proceso persistente de alza de precios y una continua depreciación del valor del dinero.

Los sujetos económicos, ante un proceso inflacionista, se encuentran en posiciones desiguales, por lo que la depreciación monetaria o pérdida del poder adquisitivo del dinero produce en dichos sujetos distintos tipos de efectos.

Los capitales prestados pierden parte de su valor hasta el momento de su reembolso, y esta pérdida afecta igualmente a los rendimiento que generan.

El fenómeno de la depreciación afecta en forma sustancial a los capitales que se intercambian en toda operación financiera. En éstas intervienen un prestamista o acreedor y un prestatario o deudor.

Los prestatarios son deudores de sumas monetarias fijas, por lo que al tener que devolver dinero deteriorado aparecen como beneficiarios en el proceso inflacionista. Como contrapartida, los prestamistas o acreedores de cuantías monetarias prefijadas se perjudican al recibir en su momento dinero depreciado.

Por los motivos expuestos y porque la inflación viene manifestándose como un fenómeno no excepcional, sino usual, creemos que está justificado plantear una metodología del análisis de las operaciones financieras que recoja al fenómeno de la depreciación monetaria.

1.—PLANTEAMIENTO MATEMATICO

Sea una operación financiera de prestación (C_0, t_0), contraprestación (C_1, t_1), con $t_0 < t_1$ y ley de valoración $L(t; p)$. Podemos escribir:

$$C_0 L(t_0; p) = C_1 L(t_1; p) \Leftrightarrow C_1 = C_0 u(t_0, t_1; p) = C_0(1+i) \tag{1}$$

Siendo $i = u(t_0, t_1; p) - 1$ el rédito de la operación o número que expresa el rendimiento unitario en el período (t_0, t_1).

Designaremos por:

— p_0 al nivel de precios en t_0.
— p_1 al nivel de precios en t_1.
— q_0 a la cantidad de bien que puede adquirirse en t_0 con la prestación de cuantía C_0.
— q_1 a la cantidad de bien que puede adquirirse en t_1 con la contraprestación de cuantía C_1.

siendo inmediatas las siguientes relaciones:

$$C_0 = p_0 q_0 \quad ; \quad C_1 = p_1 q_1 \tag{2}$$

Los coeficientes de variación de los precios y de las cuantías son los cocientes:

$$\frac{p_1}{p_0} = 1 + \alpha \quad ; \quad \frac{q_1}{q_0} = 1 + r \tag{3}$$

en donde α y r representan las correspondientes variaciones unitarias. Los valores que pueden tomar α y r pueden ser positivos o negativos, pero el de i es siempre positivo.

La interpretación financiera de los parámetros i, α y r, definidos en el período (t_0, t_1), es:

i: Rédito monetario unitario.
α: Tasa de inflación.
r: Rédito real unitario.

El problema financiero que debe resolverse es el de obtener el valor de r en función de i y de α, ya que i viene fijado por las características del contrato o en todo caso por C_0 y C_1 y α será conocido, por procedimientos estadísticos en t_1.

De (1) y (2) se sigue:

$$p_1 q_1 = (1+i) p_0 q_0 \Rightarrow 1 + i = \frac{p_1}{p_0} \cdot \frac{q_1}{q_0}$$

y por (3) resulta:

$$1 + i = (1+\alpha)(1+r) \tag{4}$$

de donde:

$$r = \frac{i-\alpha}{1+\alpha} \gtrless 0 \quad \text{si} \quad i \gtrless \alpha \tag{5}$$

Con estabilidad monetaria i expresa la rentabilidad unitaria del período, ya que si $\alpha=0$ es $r=i$; pero en etapas de inflación la rentabilidad depende además de $\alpha>0$ y se verifica:

— Si $i > \alpha > 0 \Rightarrow r > 0$.
— Si $i < \alpha \Rightarrow r < 0$.

La relación $1+i=(1+\alpha)(1+r)$ indica que el factor de capitalización del intervalo (t_0, t_1) se escinde en el producto de los factores de variación de los precios y real. A su vez, despejando i se tiene:

$$i=\alpha+(1+\alpha)r=\alpha+r+\alpha r \tag{6}$$

y esta descomposición del rédito monetario muestra su finalidad, que es:

a) Compensar la depreciación monetaria mediante α.
b) Remunerar a la prestación de dinero, en unidades monetarias del origen, mediante el precio r.
c) El tercer sumando αr tiene como misión asegurar que el precio r, pactado en unidades de t_0, quede garantizado.

Por tanto, si por prestar un capital (C_0, t_0) se pretende obtener una rentabilidad real unitaria $r=i>0$, es necesario exigir, en unidades monetarias de t_1, la contraprestación (C_1^*, t_1), tal que:

$$C_1^*=C_0(1+\alpha)(1+i)=C_1(1+\alpha) \tag{7}$$

y esta cuantía C_1^* es la única que garantiza el objetivo $i>0$. En efecto, el rendimiento unitario real es el valor r que verifica la igualdad.

$$C_0(1+r)=C_1^*(1+\alpha)^{-1}=C_0(1+i) \tag{8}$$

en unidades monetarias de t_0, y de ella se sigue

$$r=i$$

Es evidente que el parámetro z con:

$$z=\alpha+i+i\alpha \tag{9}$$

asegura el mismo resultado, pero jamás se debe confundir este parámetro con el rédito real de la operación.

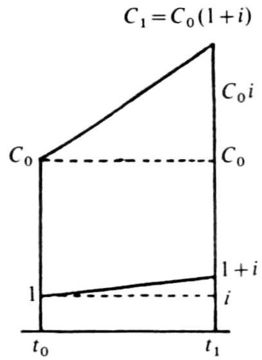


Fig. 1

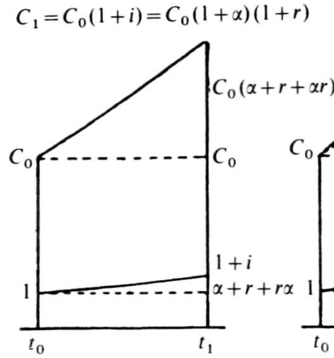


Fig. 2

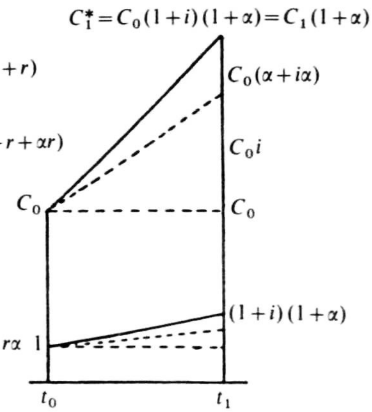


Fig. 3

El gráfico anterior recoge en la figura 1 la operación clásica, en la figura 2, los efectos de la depreciación, y en la figura 3, la operación pactada con previsión de la depreción.

Ejemplo.—Si se pacta una operación de un año de duración con $C_0 = 100.000$, $i = 0{,}12$, se percibe al final de él:

$$C_1 = C_0(1+i) = 100.000(1+0{,}12) = 112.000$$

pero si la tasa de inflación del período es $\alpha = 0{,}09$, la rentabilidad real unitaria es:

$$r = \frac{i-\alpha}{1+\alpha} = \frac{0{,}12-0{,}09}{1+0{,}09} = 0{,}027523$$

El incremento por prestar C_0, que es:

$$\Delta = 112.000 - 100.000 = 12.000$$

se descompone en:

$$C_0\alpha = 9.000 \quad ; \quad C_0 r = 2.752{,}3 \quad ; \quad C_0 r\alpha = 247{,}7$$

La contraprestación que debería exigirse para obtener una rentabilidad real del 12 % es:

$$C_1^* = 100.000(1+0{,}09)\,(1+0{,}12) = 122.080$$

y equivale a pactar la operación en términos monetarios con un rédito

$$z = 0{,}09 + 0{,}12 + 0{,}09 \times 0{,}12 = 0{,}2208$$

El planteamiento expuesto debe ser aplicado a analizar operaciones más generales. Se estudiarán seguidamente la operación de préstamo simple de n períodos de duración y las operaciones financieras compuestas de constitución y de amortización. En los tres casos la metodología a seguir consiste en:

1.º) Efectuar el análisis de la operación en su forma clásica.
2.º) Introducir el fenómeno de la depreciación para estudiar sus efectos.
3.º) Plantear la operación de forma que permita obtener unos resultados prefijados en términos reales.

Para completar el estudio, en la última parte del trabajo se analizan aplicaciones a supuestos concretos.

2.—OPERACION FINANCIERA SIMPLE

En la operación de préstamo simple o elemental, definida por las características siguientes:

— Cuantía de capital prestado: C_0.
— Duración de la operación: n períodos.
— Rédito periodal constante: i.

se tiene:

1) *Planteamiento clásico*

La cuantía de la contraprestación a percibir al final de la operación es:

$$C_n = C_0(1+i)^n \tag{10}$$

y el incremento total percibido por prestar C_0 queda recogido en

$$\Delta = C_n - C_0 = C_0[(1+i)^n - 1] \tag{11}$$

De la ecuación de la reserva del final del período s, para s = 1, 2, ..., n,

$$C_s = C_{s-1}(1+i) = C_0(1+i)^s \tag{12}$$

se deduce la variación del saldo en el referido período

$$\Delta_s = C_s - C_{s-1} = C_{s-1}\,i \tag{13}$$

y se verifica que $\Delta = \sum_{r=1}^{n} \Delta_r$.

2) *Efectos de la depreciación monetaria*

Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son las tasas de inflación respectivas de los períodos 1, 2, ..., n, la cuantía de la contraprestación (10), en unidades monetarias del origen de la operación es:

$$C'_n = C_n \prod_{h=1}^{n} (1+\alpha_h)^{-1} = C_n(1+\alpha_m)^{-n} = C_0(1+i)^n\,(1+\alpha_m)^{-n} \tag{14}$$

representando $\alpha_m = \sqrt[n]{\prod_{h=1}^{n} (1+\alpha_h)} - 1$ la tasa media de inflación.

El rendimiento medio real unitario medido por el rédito r_m es el valor que verifica la ecuación, en unidades monetarias homogeneizadas:

$$C_0(1+r_m)^n = C_n(1+\alpha_m)^{-n} \tag{15}$$

De (14) y (15) se sigue:

$$1+i = (1+\alpha_m)\,(1+r_m)$$

y, en consecuencia, resulta:

$$i=\alpha_m+r_m+\alpha_m r_m \quad ; \quad r_m=\frac{i-\alpha_m}{1+\alpha_m} \tag{16}$$

recogiendo r_m los efectos de la depreciación monetaria en los períodos de vigencia de la operación.

Además del valor medio r_m, interesa obtener la rentabilidad real unitaria período a período valorada por el rédito r_s, para $s=1, 2, \ldots, n$, así como la correspondiente descomposición periodal del rédito monetario i.

De la ecuación de la reserva:

$$C_s=C_{s-1}(1+\alpha_s)(1+r_s)=C_{s-1}(1+i) \tag{17}$$

se sigue:

$$i=\alpha_s+r_s+\alpha_s r_s \quad ; \quad r_s=\frac{1-\alpha_s}{1+\alpha_s} \tag{18}$$

La variación de la reserva en el período s medida en unidades monetarias del final de él queda recogida en la expresión:

$$\Delta'_s=C_s-C_{s-1}(1+\alpha_s)=C_{s-1}(1+\alpha_s)r_s=C_{s-1}(i-\alpha_s)=\Delta_s-C_{s-1}\alpha_s \tag{19}$$

y la variación en unidades monetarias del principio del período es:

$$\Delta''_s=C_s(1+\alpha_s)^{-1}-C_{s-1}=(\Delta_s-C_{s-1}\alpha_s)(1+\alpha_s)^{-1}=\Delta'_s(1+\alpha_s)^{-1} \tag{20}$$

El incremento total que se percibe por prestar C_0, medido en unidades monetarias del final de la operación, es:

$$\Delta'=C_n-C_0\prod_{h=1}^{n}(1+\alpha_h)=\sum_{r=1}^{n-1}\Delta'_r\prod_{h=r+1}^{n}(1+\alpha_h)+\Delta'_n \tag{21}$$

y este incremento medido en unidades monetarias del origen de la operación se expresa por:

$$\Delta''=C_n\prod_{h=1}^{n}(1+\alpha_h)^{-1}-C_0=\sum_{r=1}^{n}\Delta'_r\prod_{h=1}^{r}(1+\alpha_h)^{-1} \tag{22}$$

Ambos incrementos se relacionan por:

$$\Delta'=\Delta''\prod_{h=1}^{n}(1+\alpha_h)$$

3) *Previsión de la depreciación*

Si se pretende obtener una rentabilidad real positiva medida por el parámetro i, y al ser las tasas de inflación $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, por prestar la cuantía C_0, se exigirá al final de los n períodos la contraprestación que tiene por cuantía:

$$C_n^* = C_0(1+i)^n \prod_{h=1}^{n} (1+\alpha_n) = C_n \prod_{h=1}^{n} (1+\alpha_h) = C_n(1+\alpha_m)^n \tag{23}$$

ya que ésta es la única que garantiza que i sea el rédito periodal real. En efecto, basta observar que el rédito medio real es el valor r tal que:

$$C_0(1+r_m)^n = C_n^* \prod_{h=1}^{n} (1+\alpha_h)^{-1} = C_n = C_0(1+i)^n$$

luego $r_m = i$.

Al mismo resultado C_n^* se llega con el rédito monetario constante $z_m = i + \alpha_m + \alpha_m \cdot i$, ó con los periodales $z_s = i + \alpha_s + \alpha_s \cdot i$, con $s = 1, 2, \ldots, n$.

La cuantía de la reserva o saldo al final del período s es:

$$C_s^* \equiv C_{s-1}^*(1+i)(1+\alpha_s) = C_0(1+i)^s \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h) = C_s \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h) \tag{24}$$

y la variación de reservas del período

$$\Delta_s^* = C_s^* - (1+\alpha_s) = C_{s-1}^* i(1+\alpha_s) = \Delta_s \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h) \tag{25}$$

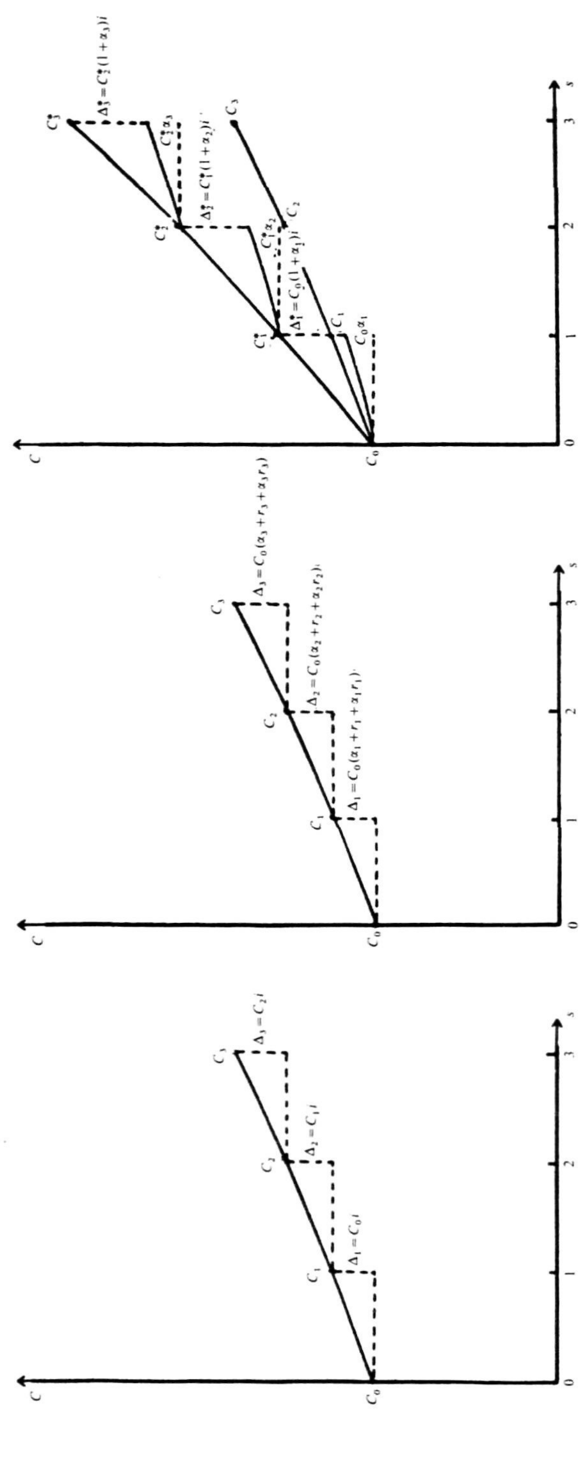
Además resulta:

$$C_s^*(1+\alpha_s)^{-1} - C_{s-1}^* = C_{s-1}^* i = \Delta_s^*(1+\alpha_s)^{-1}$$
$$C_s^* - C_{s-1}^* = C_{s-1}^*(1+\alpha_s+\alpha_s \cdot i) = C_{s-1}^* z_s$$

El incremento total monetario o diferencia entre prestación y contraprestación queda recogido en la expresión:

$$\Delta^* = C_n^* - C_0 = \sum_{r=1}^{n-1} \Delta_r^* \prod_{h=r+1}^{n} (1+\alpha_h) + \Delta_n^* \tag{26}$$

Lo descrito, para una operación con tres períodos, se recoge en el siguiente gráfico:



Planteamiento clásico

Efectos de la depreciación

Previsión de la depreciación

3.—OPERACION DE CONSTITUCION

Sea la operación de constitución con las siguientes características:

— n períodos de duración.
— Prestación formada por términos constitutivos pospagables cuyas cuantías son: a_1, a_2, ..., a_n.
— Cuantía de la contraprestación: C_n.
— Rédito periodal constante.

En ella se tiene:

1) *Planteamiento clásico*

La cuantía de la contraprestación que vence al final de los n períodos de la operación es:

$$C_n = \sum_{s=1}^{n} a_s(1+i)^{n-s} \tag{27}$$

El capital constituido al principio del período s + 1 tiene por cuantía:

$$C_s = \sum_{h=1}^{s} a_n(1+i)^{s-h} = C_{s-1}(1+i) + a_s \tag{28}$$

y la cuota de constitución o variación del saldo del período s.

$$\Delta_s = C_s - C_{s-1} = C_{s-1}\,i + a_s \tag{29}$$

2) *Efectos de la depreciación monetaria*

Suponiendo que las tasas de inflación de los períodos 1, 2, ..., n son respectivamente α_1, α_2, ..., α_n las cuantías de los términos constitutivos en unidades monetarias del final de la operación son:

$$a'_1 = a_1 \prod_{h=2}^{n} (1+\alpha_h) \quad ; \quad a'_2 = a_2 \prod_{h=3}^{n} (1+\alpha_h) \quad ; \quad \ldots a'_{n-1} = a_{n-1}(1+\alpha_n) \quad ; \quad a'_n = a_n$$

el rendimiento unitario medio real por período medido por r_m es el valor que se deduce de la ecuación

$$C_n = \prod_{s=1}^{n} a'_s(1+r_m)^{n-s} = \sum_{s=1}^{n-1} a_s(1+r_m)^{n-s} \prod_{h=s+1}^{n} (1+\alpha_h) + a_n \tag{30}$$

La rentabilidad unitaria del período s, con $s=1, 2, \ldots, n$, queda reflejada en el rédito r_s. Su valor, así como la descomposición que resulta del rédito monetario i, se obtienen de la ecuación:

$$C_s = C_{s-1}(1+i) + a_s = C_{s-1}(1+\alpha_s)(1+r_s) + a_s \tag{31}$$

y resulta:

$$i = \alpha_s + r_s + \alpha_s r_s \quad ; \quad r_s = \frac{i-\alpha_s}{1+\alpha_s} \tag{32}$$

El incremento de reservas del período s, valorado en unidades monetarias de fin de período, es:

$$\Delta'_s = C_s - C_{s-1}(1+\alpha_s) = C_{s-1}(1+\alpha_s)r_s + a_s = \Delta_s - C_{s-1}\alpha_s \tag{33}$$

3) *Previsión de la depreciación*

Para obtener una rentabilidad unitaria real por período medida por el rédito $i>0$, el valor de la contraprestación a exigir debe ser:

$$C_n^* = \sum_{s=1}^{n} a'_s(1+i)^{n-s} = \sum_{s=1}^{n-1} a_s(1+i)^{n-s} \prod_{h=s+1}^{n} (1+\alpha_h) + a_n \tag{34}$$

si la tasa de inflación del período s es α_s.

La reserva del principio del período $s+1$ queda expresada por:

$$C_s^* = \sum_{m=1}^{s-1} a_m(1+i)^{s-m} \prod_{h=m+1}^{s} (1+\alpha_h) + a_s = C_{s-1}^*(1+i)(1+\alpha_s) + a_s \tag{35}$$

y, en consecuencia, resulta el siguiente incremento del saldo:

$$\Delta_s^* = C_s^* - C_{s-1}^*(1+\alpha_s) = C_{s-1}^*(1+\alpha_s)i + a_s \tag{36}$$

Las (34), (35) y (36) pueden ser escritas de la forma:

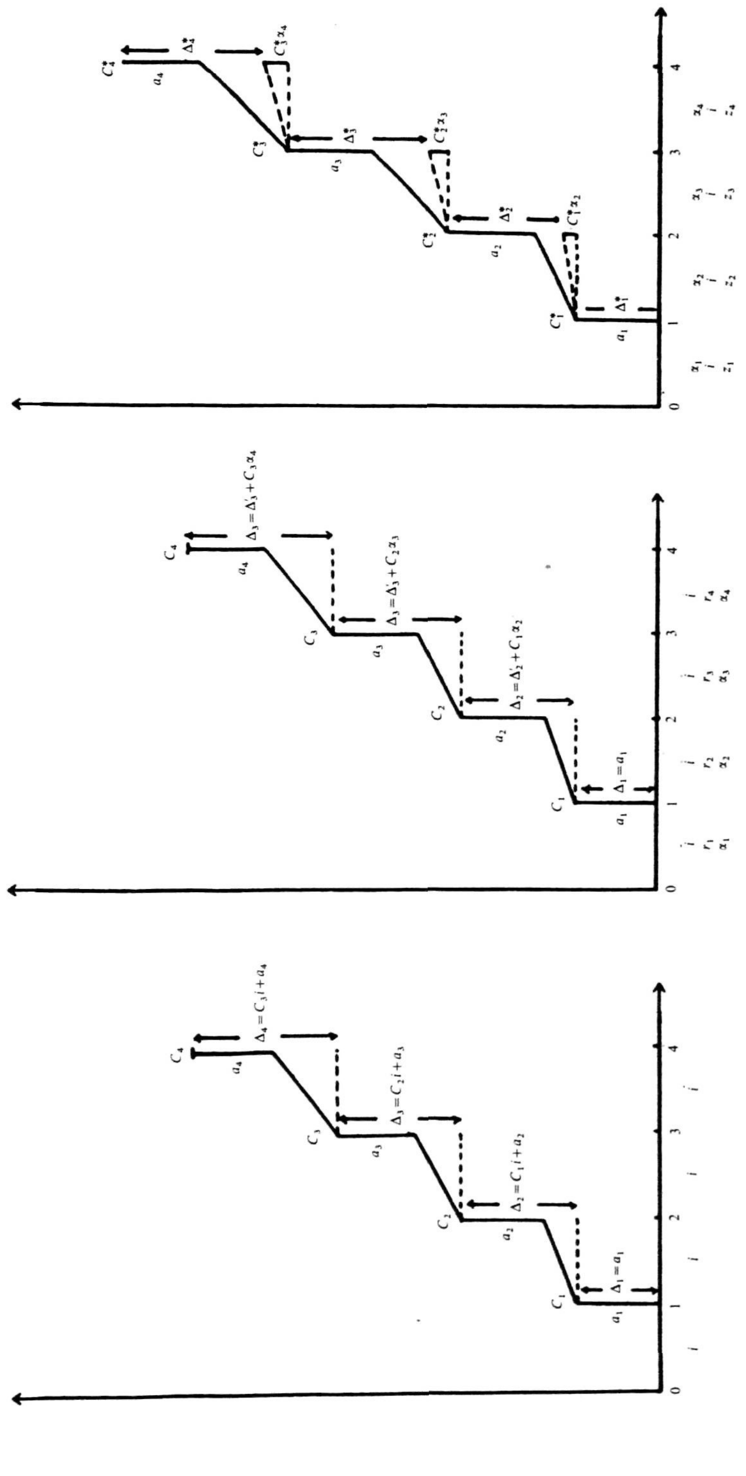
$$C_n^* = \sum_{s=1}^{n-1} a_s \prod_{h=s+1}^{n} (1+z_h) + a_n \tag{34'}$$

$$C_s^* = C_{s-1}^*(1+z_s) + a_s \tag{35'}$$

$$\Delta_s^* = C_{s-1}^*(z_s - \alpha_s) + a_s \tag{36'}$$

siendo el parámetro $z_s = i + \alpha_s + i\alpha_s$, y se interpreta como rédito monetario asociado al intervalo $(s-1, s)$.

En la siguiente representación gráfica se resalta la evolución analizada.



Planteamiento clásico

Efectos de la depreciación

Previsión de la depreciación

4.—OPERACION DE AMORTIZACION

Consideramos la operación de amortización con las siguientes condiciones:

— Cuantía del capital prestado: C_0,
— n períodos de duración.
— Rédito periodal constante.
— Contraprestación formada por términos amortizativos cuyas cuantías son: a_1, a_2, ..., a_n.

Siguiendo el mismo orden que en los anteriores epígrafes se tiene:

1) *Planteamiento clásico*

Sus relaciones notables son:

— Equivalencia financiera entre prestación y contraprestación:

$$C_0 = \sum_{s=1}^{n} a_s(1+i)^{-s} \tag{37}$$

— Cuantía de la reserva o saldo al principio del período s+1:

$$C_s = \sum_{r=s+1}^{n} a_r(1+i)^{-(r-s)} = C_{s-1}(1+i) - a_s \tag{38}$$

— Variación de la reserva o cuota de amortización y descomposición del término amortizativo del período s.

$$A_s = C_{s-1} - C_s = a_s - C_{s-1}i \tag{39}$$

$$a_s = C_{s-1}i + A_s = I_s + A_s \tag{40}$$

2) *Efectos de la depreciación monetaria*

Por ser α_s la tasa de inflación del período s, con s=Z, 2, ..., n, la cuantía del término amortizativo en unidades monetarias del origen de la operación es

$$a'_s = a_s \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h)^{-1} \tag{41}$$

El rédito medio real de la operación, representado por r_m, verifica la relación de equivalencia:

$$C_0 = \sum_{s=1}^{n} a'_s(1+r_m)^{-s} = \sum_{s=1}^{n} a_s(1+r_m)^{-s} \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h)^{-1} \tag{42}$$

De la ecuación de la reserva

$$C_s = C_{s-1}(1+\alpha_s)(1+r_s) - a_s = C_{s-1}(1+i) - a_s \tag{43}$$

se sigue:

$$i = \alpha_s + r_s + \alpha_s r_s \quad ; \quad r_s = \frac{i-\alpha_s}{1+\alpha_s} \tag{44}$$

que expresan, en el período s, la descomposición del rédito monetario i y el valor del rédito real r_s.

La variación de reservas en unidades monetarias de fin del período s es:

$$A'_s = C_{s-1}(1+\alpha_s) - C_s = A_s + C_{s-1}\alpha_s \tag{45}$$

Despejando a_s de (43), se obtiene su descomposición, que es:

$$a_s = C_{s-1}\alpha_s r_s + C_{s-1} r_s + C_{s-1}(1+\alpha_s) - C_s = C_{s-1}(1+\alpha_s) r_s + A'_s = I'_s + A'_s \tag{46}$$

3) *Previsión de la depreciación*

En este supuesto, a cambio de la prestación inicial de la cuantía C_0, se debe exigir, en unidades corrientes, la contraprestación que asegure la rentabilidad real unitaria $r_m = i > 0$.

Las cuantía $a^*_s = a_s \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h)$, para $s = 1, 2, \ldots, n$, garantiza que i sea el rédito de la operación, ya que:

$$C_0 = \sum_{s=1}^{n} \left[a^*_s \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h)^{-1} \right] (1+r_m)^{-s} = \sum_{s=1}^{n} a_s (1+r_m)^{-s} = \sum_{s=1}^{n} a_s (1+i)^{-s} \tag{47}$$

es decir, es $r_m = i$.

La reserva o saldo al principio del período $s+1$ tiene por cuantía:

$$\begin{aligned} C^*_s &= \sum_{r=s+1}^{n} \left[a^*_r \prod_{h=s+1}^{r} (1+\alpha_h)^{-1} \right] (1+i)^{-(r-s)} = \\ &= \left[\prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h) \right] \sum_{r=s+1}^{n} a_r (1+i)^{-(r-s)} = C_s \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h) \end{aligned} \tag{48}$$

y equivale a C_s unidades monetarias del oriden de la operación.

Por el método recurrente, la relación entre los saldos es:

$$C^*_s = C^*_{s-1}(1+\alpha_s)(1+i) - a^*_s \tag{49}$$

de donde se sigue:

$$a_s^* = [C_{s-1}^* \alpha_s i + C_{s-1}^* i] + [C_{s-1}^*(1+\alpha_s) - C_s^*] = I_s^* + A_s^* \tag{50}$$

De (48) y (49) se deduce:

$$C_s \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h) = C_{s-1} \left[\prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h) \right] (1+i) - a_s \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h)$$

o sea, la evolución de saldos en unidades corrientes es equivalente a:

$$C_s = C_{s-1}(1+i) - a_s$$

expresada en unidades monetarias del origen.

Las cuotas I_s^* y A_s^* pueden escribirse de la siguiente forma:

$$I_s^* = C_{s-1}^*(1+\alpha_s) i = C_{s-1} i \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h) = I_s \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h) \tag{51}$$

$$A_s^* = C_{s-1}^*(1+\alpha_s) - C_s^* = (C_{s-1} - C_s) \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h) = A_s \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h) \tag{52}$$

Además es evidente que se cumplen las relaciones:

$$C_0 = \sum_{s=1}^{n} A_s^* \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h)^{-1} \tag{53}$$

$$C_s^* = C_{s-1}^*(1+\alpha_s) - A_s^* \tag{54}$$

$$M_s^* = M_{s-1}^*(1+\alpha_s) + A_s^* \tag{55}$$

$$M_n^* = C_0 \prod_{h=1}^{n} (1+\alpha_h) = \sum_{s=1}^{n} A_s^* \prod_{h=s+1}^{n} (1+\alpha_h) + A_n^* \tag{56}$$

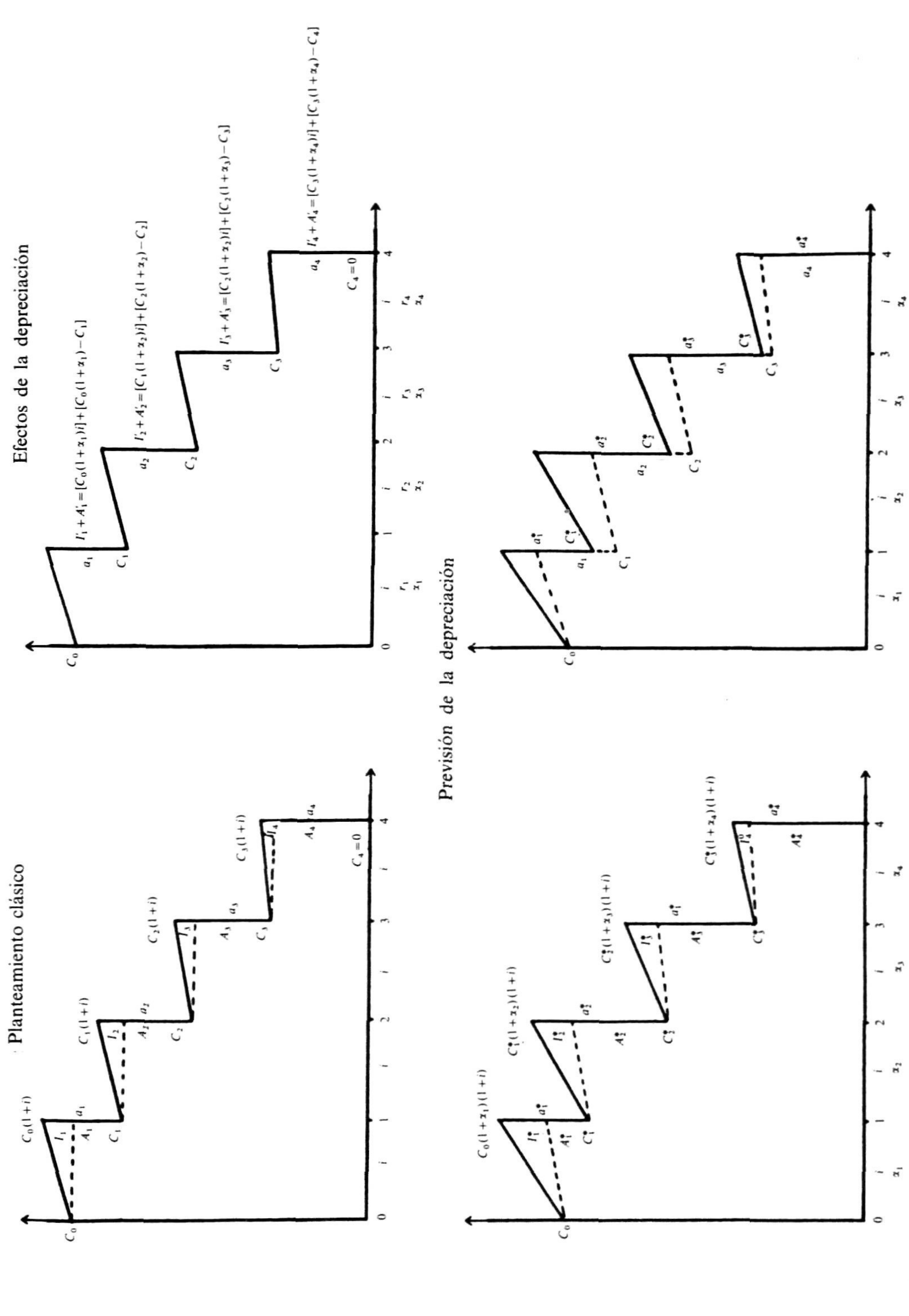
Las ecuaciones (47), (48) y (50) pueden expresarse en función del parámetro $z_s = i + \alpha_s + i\alpha_s$, rédito monetario asociado al intervalo $(s-1, s)$, así:

$$C_0^* = \sum_{s=1}^{n} a_s^* \prod_{h=1}^{s} (1+z_h)^{-1} \tag{47'}$$

$$C_s^* = \sum_{r=s+1}^{n} a_r^* \prod_{h=s+1}^{r} (1+z_h)^{-1} \tag{48'}$$

$$C_s^* = C_{s-1}^*(1+z_s) - a_s^* \tag{49'}$$

$$a_s^* = C_{s-1}^* z_s + (C_{s-1}^* - C_s^*) = C_{s-1}^*(z_s - \alpha_s) + A_s^* \tag{50'}$$



Planteamiento clásico
Efectos de la depreciación
$I_1' + A_1' = [C_0(1+x_1)i] + [C_0(1+x_1) - C_1]$
$I_2' + A_2' = [C_1(1+x_2)i] + [C_1(1+x_2) - C_2]$
$I_3' + A_3' = [C_2(1+x_3)i] + [C_2(1+x_3) - C_3]$
$I_4' + A_4' = [C_3(1+x_4)i] + [C_3(1+x_4) - C_4]$
$C_4 = 0$
Previsión de la depreciación
$C_0(1+x_1)(1+i)$
$C_1^*(1+x_2)(1+i)$
$C_2^*(1+x_3)(1+i)$
$C_3^*(1+x_4)(1+i)$

5.—OPERACION DE AMORTIZACION AMERICANA

De los diversos métodos particulares de amortización merece especial interés estudiar este caso particular, ya que los conceptos y desarrollos a utilizar en él tienen plena aplicación en las operaciones de emisiones de empréstitos con pago periódico de intereses.

Sea la operación de amortización americana descrita en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccccccc} C_0 & C_0\,i & C_0\,i \cdots & & C_0\,i & & & & C_0\,i + C_0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \ldots & s-1 & s \ldots\ldots & n-1 & & & n \\ & & & i & & & i & & \end{array}$$

y como en los epígrafes anteriores α_1, α_2, ..., a_n representarán las tasas de inflación de los correspondientes períodos. Resulta:

1) *Planteamiento clásico*

Su ecuación de equivalencia es:

$$C_0 = C_0 i\, a_{\overline{n}|i} + C_0(1+i)^{-n} \tag{57}$$

Para $s = 1, 2, \ldots, n-1$ es:

$$C_s = C_0 \quad ; \quad a_s = I_s = C_0 i \quad ; \quad A_s = C_{s-1} - C_s = 0$$

y para $s = n$ se tiene:

$$A_n = C_0 \quad ; \quad a_n = C_0 i + C_0 \quad ; \quad C_n = 0$$

2) *Efectos de la depreciación monetaria*

La inclusión de la tasas de inflación supone que a cambio del capital $(C_0, 0)$ se percibirán, en unidades monetarias homogeneizadas, los términos amortizativos siguientes:

a) n pagos de cuantía $I'_s = C_0 i \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h)^{-1}$, con $s = 1, 2, \ldots, n$, en concepto de intereses, y

b) como devolución de principal $A'_n = C_0 \prod_{h=1}^{n} (1+\alpha_h)^{-1}$.

El rendimiento medio real unitario por período r_m satisface la ecuación:

$$C_0 = \sum_{s=1}^{n} I'_s(1+r_m)^{-s} + A'_n(1+r_m)^{-n} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} C_0 i(1+r_m)^{-s} \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h)^{-1} + C_0(1+r_m)^{-n} \prod_{h=1}^{n} (1+\alpha_h)^{-1} \qquad (58)$$

De la ecuación del saldo:

$$C_0 = C_0(1+\alpha_s)(1+r_s) - C_0 i \qquad (59)$$

se sigue:

$$i = \alpha_s + r_s + \alpha_s r_s \quad ; \quad r_s = \frac{i-\alpha_s}{1+\alpha_s}$$

para $s = 1, 2, \ldots\, n$.

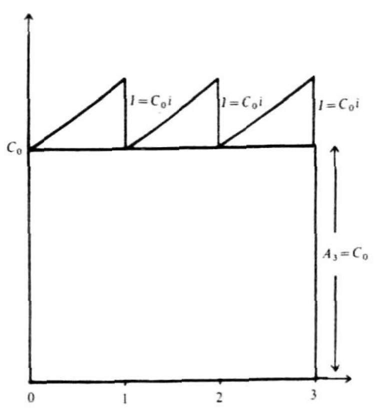
Al comparar las reservas C_{s-1} y C_s se tiene:

$$A'_s = C_0(1+\alpha_s) - C_0 = C_0\alpha_s \qquad (60)$$

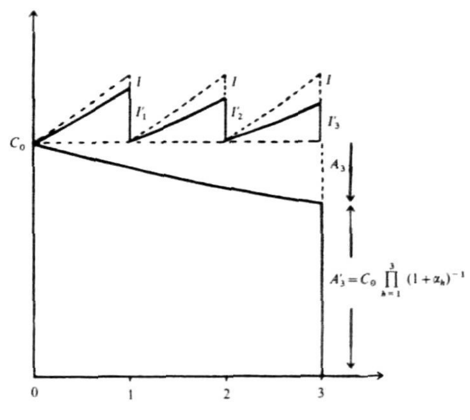
y por (59), se deduce:

$$I_s = C_0 i = [C_0 r_s + C_0 \alpha_s r_s] + C_0 \alpha_s \qquad (61)$$

La interpretación gráfica es:



Planteamiento clásico



Efectos de la depreciación

3) *Previsión de la depreciación*

A cambio de la prestación $(C_0, 0)$ se percibirá la contraprestación de $n+1$ términos siguiente:

$$(I_1^*, 1), (I_2^*, 2), \ldots, (I_n^*, n), (A_n^*, n)$$

Si sus cuantías son:

$$I_s^* = C_0 i \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h), \qquad s=1, 2, \ldots, n \tag{62}$$

$$A_n^* = C_0 \prod_{h=1}^{n} (1+\alpha_h) \tag{63}$$

será $r_m = i > 0$. En efecto, basta observar que:

$$\sum_{s=1}^{n} I_s^*(1+i)^{-s} \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h)^{-1} + A_n^*(1+i)^{-n} \prod_{h=1}^{n} (1+\alpha_h)^{-1} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} C_0 i(1+i)^{-s} + C_0(1+i)^{-n} = C_0 i \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + C_0(1+i)^n = C_0$$

Otros supuestos que interesa resaltar por proporcionar igualmente la rentabilidad real $r_m = i$, son:

3.1) *Contraprestaciones con cuantías:*

$$I_s^* = C_0 i \tag{64}$$

$$A_n^* = C_0(1+i)^n \prod_{h=1}^{n} (1+\alpha_h) - \left[\sum_{s-1}^{n-1} C_0 i(1+i)^{n-s} \prod_{h=s+1}^{n} (1+\alpha_h) + C_0 i\right] \tag{65}$$

ya que:

$$\sum_{s=1}^{n} I_s^*(1+i)^{-s} \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h)^{-1} + A_n^*(1+i)^{-n} \prod_{h=1}^{n} (1+\alpha_h)^{-1} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} C_0 i(1+i)^{-s} \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h)^{-1} + C_0 -$$

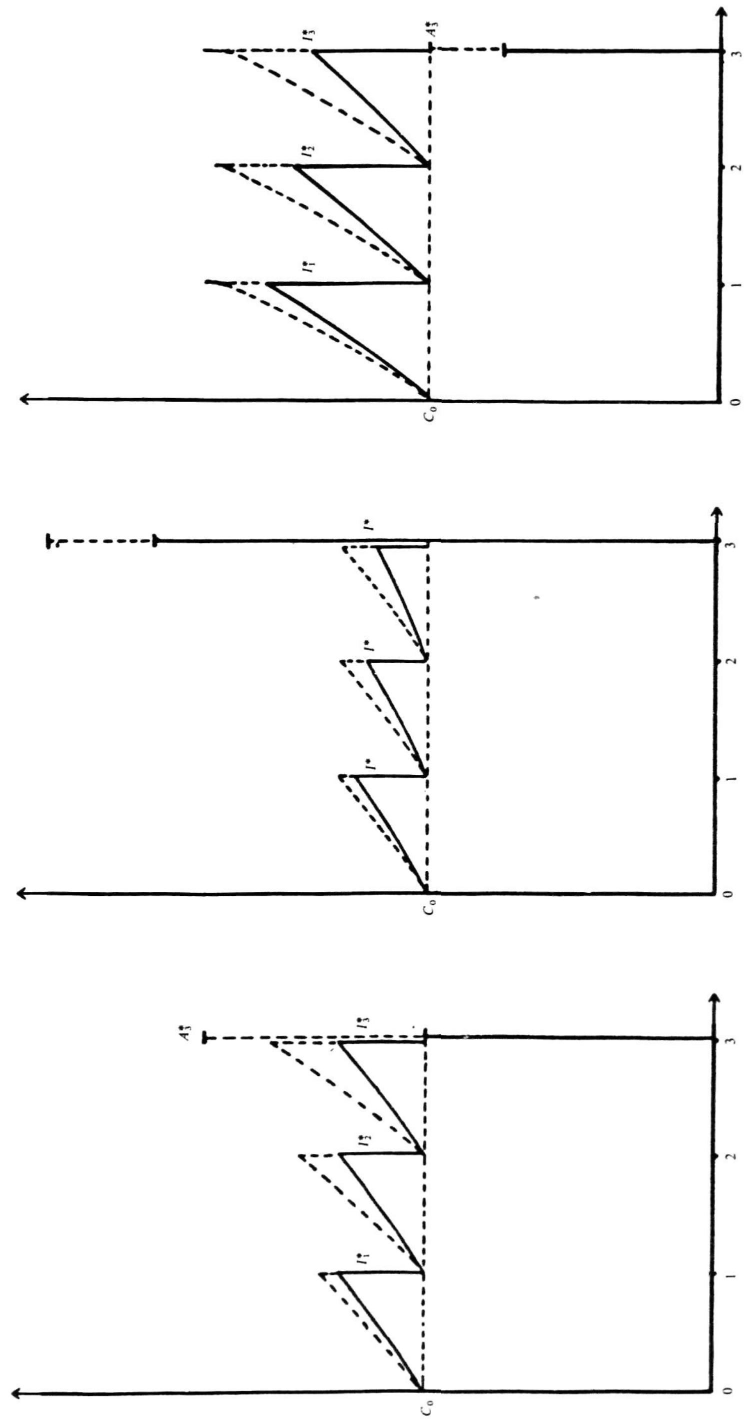
$$- \left[\sum_{s=1}^{n-1} C_0 i(1+i)^{-s} \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h)^{-1} + C_0 i(1+i)^{-n} \prod_{h=1}^{n} (1+\alpha_h)^{-1}\right] = C_0$$

3.2) *Contraprestación formada por*

$$I_s^* = C_0(1+\alpha_s)(1+i) - C_0 = C_0[(1+\alpha_s)(1+i) - 1] \tag{66}$$

$$A_n^* = C_0 \tag{67}$$

PREVISION DE LA DEPRECIACION



Supuesto 3

Supuesto 3.1

Supuesto 3.2.

Evolución real ———

Evolución monetaria ------

En efecto:

$$\sum_{s=1}^{n} I_s^*(1+i)^{-s} \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h)^{-1} + A_n^*(1+i)^{-n} \prod_{h=1}^{n} (1+\alpha_h)^{-1} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} C_0(1+\alpha_s)(1+i)^{-(s-1)} \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h)^{-1} -$$

$$- \sum_{s=1}^{n} C_0(1+i)^{-s} \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h) + C_0(1+i)^{-n} \prod_{h=1}^{n} (1+\alpha_h)^{-1} =$$

$$= C_0 + \sum_{s=2}^{n} C_0(1+i)^{-(s-1)} \prod_{h=1}^{s-1} (1+\alpha_h)^{-1} -$$

$$- \sum_{s=1}^{n-1} C_0(1+i)^{-s} \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h) = C_0$$

Este supuesto es equivalente a la operación clásica planteada con el rédito variable $z_s = \alpha_s + i + \alpha_s i$.

En el gráfico de la página anterior se representan las tres opciones descritas.

6.—APLICACIONES

Ejemplo 1.—Estudiar la operación financiera simple definida por las características:

- **Cuantía del capital prestado: $C_0 = 1.000.000$ de pesetas.**
- **Duración: $n = 4$ años.**
- **Tipo de interés anual: $i = 0,13$.**
- **Tasas de inflación de los correspondientes años: $\alpha_1 = 0,15$, $\alpha_2 = 0,10$, $\alpha_3 = 0,11$ y $\alpha_4 = 0,09$.**

1) *Planteamiento clásico*

La aplicación de las fórmulas (10) a (13) proporciona los siguientes resultados:

s	$C_s = C_{s-1}(1+0,13)$	$\Delta_s = C_s - C_{s-1}$
Origen	$C_0 = 1.000.000,00$	—
1	$C_1 = 1.130.000,00$	$\Delta_1 = 130.000,00$
2	$C_2 = 1.276.900,00$	$\Delta_2 = 146.900,00$
3	$C_3 = 1.442.897,00$	$\Delta_3 = 165.997,00$
4	$C_4 = 1.630.473,61$	$\Delta_4 = 187.576,61$

2) *Efectos de la depreciación*

Las expresiones (14) a (22) del epígrafe 2.2 dan los resultados, que se expresan:

a) Valores medios:

$$\alpha_m = \sqrt[4]{\prod_{h=1}^{4} (1+\alpha_h)} - 1 = 0{,}112269$$

$$r_m = \frac{0{,}13-\alpha_m}{1+\alpha_m} = 0{,}015941$$

b) Valores periodales:

Períodos		Reservas deflactadas	Variación de reservas en unidades monetarias de			Reservas en unidades de
			$\overline{s}$	$\overline{n}$		$\overline{n}$
s	α_s	$C_s \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h)^{-1}$	$\Delta'_s = C_s - C_{s-1}(1+\alpha_s)$	$\Delta'_s \prod_{h=s+1}^{n} (1+\alpha_h)$	$r_s = \frac{0{,}13-\alpha_s}{1+\alpha_s}$	$C_s \prod_{h=s+1}^{n} (1+\alpha_h)$
Origen	—	1.000.000,00	—	—	—	1.530.523,50
1	0,15	982.608,70	20.000,00	26.617,80	−0,017391	1.503.905,70
2	0,10	1.009,407,11	33.900,00	41.015,61	0,027273	1.544.921,30
3	0,11	1.027.594,63	25.538,00	27.836,42	0,018018	1,572.757,70
4	0,09	1.065.304,52	57.715,87	57.715,87	0,036697	1.630.473,60

3) *Previsión de la depreciación*

Haciendo uso de las fórmulas (23) a (26) se obtienen los valores de la tabla:

s	$C^*_s = C_0(1+i)^s \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h)$	$\Delta^*_s = C^*_s - C^*_{s-1}(1+\alpha_s)$	$z_s = i + \alpha_s + i\alpha_s$
Origen	1.000.000,00	—	—
1	1.299.500,00	149.500,00	0,2995
2	1.615.278,50	185.828,50	0,2430
3	2.026.043,82	233.084,68	0,2543
4	2.495.478,17	287.090,41	0,2317

Ejemplo 2.—Analizar la operación de constitución caracterizada por:

— **Términos constitutivos postpagables de cuantía constante.**
— **Cuantía del capital a constituir: 1.000.000 pts.**
— **Duración de la operación: 5 años.**
— **Rédito anual constante concertado: $i = 0{,}11$.**
— **Tasa de inflación: $\alpha_1 = 0{,}15$, $\alpha_2 = 0{,}24$, $\alpha_3 = 0{,}17$, $\alpha_4 = 0{,}12$ y $\alpha_5 = 0{,}10$.**

1) *Planteamiento clásico*

La cuantía de la imposición que vence al final de cada año asciende a:

$$a = \frac{1.000.000}{s_{\overline{5|}0,11}} = 160.570,31$$

La evolución de la reserva y su variación periodal son:

s	$C_s = C_{s-1}(1+0,11)+a$	$\Delta_s = C_s - C_{s-1}$
1	160.570,31	160.570,31
2	338.803,35	178.233,04
3	536.642,03	197.838,68
4	756.242,96	219.600,93
5	1.000.000,00	243.757,04

2) *Efectos de la depreciación*

Las fórmulas (30), (31) y (32) proporcionan los siguientes resultados:

s	α_s	$r_s = \frac{0,11-\alpha_s}{1+\alpha_s}$	$a'_s = a \prod_{h=s+1}^{5} (1+\alpha_h)$	$\Delta'_s = C_s - C_{s-1}(1+\alpha_s)$
1	0,15	−0,034783	287.001,06	160.570,31
2	0,24	−0,104839	231.452,47	139.696,17
3	0,17	−0,051282	197.822,62	140.242,11
4	0,12	−0,008929	176.627,34	155.203,89
5	0,10	0,009091	160.570,31	168.132,74

Por ser $\sum_{s=1}^{5} a'_s = 1.053.473,80 > C_5$, se deduce que el tanto medio real es negativo. La ecuación

$$1.000.000 = \sum_{s=1}^{5} a'_s(1+r_m)^{5-s}$$

tiene como solución

$$r_m = -0,0227$$

3) *Previsión de la depreciación*

La contraprestación necesaria es:

$$C_5^* = \sum_{s=1}^{5} a'_s (1+0{,}11)^{5-s} = 1.352.593{,}30$$

y es equivalente a una operación clásica al rédito anual z_m que verifica la ecuación:

$$1.352.593{,}30 = 160.570{,}31 \; S_{\overline{5}|z_m}$$

y se tiene

$$z_m = 0{,}2634$$

Las magnitudes correspondientes a cada período son:

s	α_s	z_s	$C_s^* = C_{s-1}^*(1+\alpha_s)(1+i)+a = C_{s-1}^*(1+z_s)+a$	$\Delta_s^* = C_s^* - C_{s-1}^*(1+\alpha_s)$
1	0,15	0,2765	160.570,31	160.570,31
2	0,24	0,3764	381.579,28	182.472,10
3	0,17	0,2987	656.127,33	209.679,56
4	0,12	0,2432	976.267,80	241.405,20
5	0,10	0,2210	1.352.593,30	278.698,72

Ejemplo 3.—Estudiar la operación de préstamo con las siguientes condiciones:

- **Cuantía del capital prestado: $C_0 = 2.000.000$ de pesetas.**
- **Duración de la operación: $n = 6$ años.**
- **Rédito anual constante: $i = 0{,}15$.**
- **Términos amortizativos anuales constantes.**
- **Tasas de inflación: $\alpha_1 = 0{,}15$, $\alpha_2 = 0{,}17$, $\alpha_3 = 0{,}20$, $\alpha_4 = 0{,}14$, $\alpha_5 = 0{,}14$ y $\alpha_6 = 0{,}11$.**

Procederemos a determinar los cuadros de amortización correspondientes, por recoger éstos período a período la evolución de todas las magnitudes que invervienen en la operación.

1) *Planteamiento clásico*

Las fórmulas (37), (39) y (40), junto con las relaciones:

$$C_s = \sum_{h=s+1}^{n} A_h = C_{s-1} - A_s \quad ; \quad \mathcal{M}_s = \sum_{h=1}^{s} A_h = \mathcal{M}_{s-1} + A_s$$

nos proporcionan los siguientes resultados:

s	a_s	I_s	A_s	$\mathcal{M}_s$	C_s
Origen	—	—	—	—	2.000.000,0
1	528.473,8	300.000,0	228.473,8	228.473,8	1.771.526,2
2	528.473,8	265.728,9	262.744,9	491.218,7	1.508.781,3
3	528.473,8	226.317,2	302.156,6	793.375,3	1.206.624,7
4	528.473,8	190.993,7	347.480,1	1.140.855,4	859.144,6
5	528.473,8	128.871,7	399.602,1	1.540.457,5	459.542,5
6	528.473,8	68.931,3	459.542,5	2.000.000,0	0

2) *Efectos de la depreciación*

Por (43) y (44) se tiene:

s	α_s	r_s	$C_{s-1} r_s$	$C_{s-1} \alpha r_s$	$C_{s-1} \alpha_s$
1	0,15	0	0	0	300.000,0
2	0,17	−0,017094	−30.282,5	−5.148,1	301.159,5
3	0,20	−0,041667	−62.865,9	−12.573,2	301.756,3
4	0,14	0,008772	10.584,4	1.481,8	168.927,5
5	0,14	0,008772	7.536,4	1.055,1	120.280,2
6	0,11	0,036036	16.560,1	1.821,5	50.549,7

De las relaciones (41), (45) y (46) se sigue:

s	a'_s	I'_s	$A'_s = A_s + C_{s-1}\alpha_s$
1	459.542,43	0	528.473,8
2	392.771,31	−35.430,6	563.904,4
3	327.309,43	−75.439,1	603.912,9
4	287.113,53	12.066,2	516.407,6
5	251.853,98	8.591,5	519.882,3
6	226.895,47	18.381,6	510.092,2

La ecuación:

$$2.000.000 = \sum_{s=1}^{6} a'_s(1+r_m)^{-s}$$

da la solución:

$$r_m = -0,0089$$

3) *Previsión de la depreciación*

Las cuantías de la contraprestación, su descomposición y la evolución periodal en unidades corrientes se obtiene mediante las fórmulas (50) y (56). Sus resultados son:

s	a_s^*	I_s^*	A_s^*	$\mathcal{M}_s^*$	C_s^*
Origen	—	—	—	—	2.000.000,0
1	607.744,9	345.000,0	262.744,9	262.744,9	2.037.255,1
2	711.061,5	357.538,2	353.523,3	660.934,8	2.030.065,2
3	853.273,8	365.411,8	487.862,0	1.280.983,8	1.948.216,2
4	972.732,1	333.144,9	639.587,2	2.099.908,7	1.581.379,3
5	1.108.914,6	270.415,9	838.498,7	3.232.394,6	964.273,7
6	1.230.895,2	160.551,4	1.070.343,8	4.658.301,8	0

Ejemplo 4.—Estudiar la operación de amortización americana descrita por:

- **Cuantía del capital prestado: $C_0 = 1.750.000$ de pesetas.**
- **Duración: $n=5$ años.**
- **Rédito anual constante: $i=0,12$.**
- **Tasas de inflación: $\alpha_1=0,08$, $\alpha_2=0,09$, $\alpha_3=0,12$ y $\alpha_4=0,11$.**

1) *Planteamiento clásico*

La contraprestación es:

$$a_1 = a_2 = a_3 = I = C_0 i = 210.000$$
$$a_4 = I + C_0 = 210.000 + 1.750.000 = 1.960.000$$

2) *Efectos de la depreciación monetaria.*

Quedan recogidos en la siguiente tabla:

s	α_s	r_s	I'_s	A'_n
1	0,08	0,037037	194.0444,4	—
2	0,09	0,027523	178.389,4	—
3	0,13	−0,008850	157.866,7	—
4	0,11	0,009009	142.222,3	1.185.185,6

Su tanto medio r_m dado por la ecuación:

$$1.750.000 = \sum_{s=1}^{4} I'_s(1+r_m)^{-s} + 1.185.185,6(1+r_m)^{-4}$$

es:

$$r_m = 0,013711$$

3) *Previsión de la depreciación*

La contraprestación que se obtiene aplicando las fórmulas (62) y (63) garantiza obtener la rentabilidad real $r_m = i = 0,12$. Sus cuantías son:

s	$I_s^* = 2.100,00 \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h)$	$A_4^* = 1.750,000 \prod_{h=1}^{4} (1+\alpha_h)$
1	226.800,0	—
2	247.212,0	—
3	279.349,6	—
4	310.078,0	2.583.983

Como se demuestra en el epígrafe 5, puntos 3.1 y 3.2, también existen dos casos de contraprestación que exactamente garantizan $r_m = 0,12$. En el supuesto que consideramos y mediante la aplicación de las fórmulas (64)-(65) y (66)-(67) se obtienen los resultados que se exponen seguidamente:

a) $I_s^* = C_0 i = 210.000$ para $s = 1, 2, 3, 4.$

$$A_4^* = 1.750.000(1+0,12)^4 \prod_{h=1}^{4} (1+\alpha_h) -$$

$$-210.000 \sum_{s=1}^{3} (1+0,12)^{4-s} \prod_{h=s+1}^{4} (1+\alpha_h) + 1 =$$

$$= 4.065.948,1 - 1.204.852,6 = 2.861.095,5$$

Esta contraprestación en unidades monetarias corrientes equivale a la, en unidades del origen, dada por:

$$I_s^* \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h)^{-1} = \begin{cases} s=1: 194.444,4 \\ s=2: 178.389,4 \\ s=3: 157.866,7 \\ s=4: 142.222,3 \end{cases}$$

$$A_4^* \prod_{h=1}^{4} (1+\alpha_h)^{-1} = 1.937.673,8$$

b) $A_4^* = C_0 = 1.750.000.$

$$I_s^* = 1.750.000[(1+0,12)\,(1+\alpha_s)-1] = \begin{cases} 366.800 & \text{si} \quad s=1 \\ 386.400 & \text{si} \quad s=2 \\ 464.800 & \text{si} \quad s=3 \\ 425.600 & \text{si} \quad s=4 \end{cases}$$

Su valor en unidades del origen es:

$$A_4^* \prod_{h=1}^{4} (1+\alpha_h)^{-1} = 1.185.185,6$$

$$I_s^* \prod_{h=1}^{4} (1+\alpha_h)^{-1} = \begin{cases} s=1: 339.629,6 \\ s=2: 328.236,5 \\ s=3: 349.411,7 \\ s=4: 288.237,1 \end{cases}$$

VII.2.—PLANES DE AHORRO Y PREVISION

7.—INTRODUCCION

Como se vio en la parte IV de este manual, con la denominación de operación de constitución o de formación de capital se designa a toda operación financiera en la que un sujeto, llamado prestamista, acreedor o ahorrador, se compromete a entregar a otro sujeto, prestatario, una serie de capitales en un intervalo para que, al final del mismo, éste le reembolse un único capital equivalente a los anteriores, que incluye lo recibido y los intereses generados.

Las variables que intervienen en una operación de constitución son las siguientes:

— Términos constitutivos: a_1, a_2. ..., a_n.
— Duración de la operación: n períodos, que generalmente coinciden con años.
— Tipo de interés, que determina la rentabilidad o intereses que generan las aportaciones.
— Capital a constituir: C_n.

Atendiendo a las características de los distintos elementos que intervienen en su definición, podemos efectuar, entre otras, las siguientes clasificaciones:

1. Teniendo en cuenta los capitales que componen la prestación o, lo que es lo mismo, el método de efectuar la constitución del capital, podemos hablar de:

a) *Constitución de una sola vez.* El sujeto invierte un capital tal que su montante, al llegar al vencimiento preestablecido sea el capital constituido.
b) *Constitución progresiva.* El sujeto destina varios capitales que hace efectivos en distintos momentos, con el fin de que al final de la operación le sea entregado el capital constituido.

2. Desde el punto de vista de la duración de la operación, encontramos básicamente:

a) *Constitución a corto plazo.*
b) *Constitución a largo plazo.*

La diferencia entre estas dos operaciones radica en la ley financiera que se utiliza para su valoración, que en el caso de operaciones a corto plazo suele ser la ley de capitalización simple, y en las operaciones a largo, la ley de capitalización compuesta.

c) *Constitución mixta.* Es una operación híbrida entre las constituciones a corto y a largo plazo, ya que para períodos anuales utiliza para la valoración la ley de capitalización simples, y esta operación anual enlaza con otra operación a largo plazo donde la aportación es la cantidad constituida en cada año.

3. Atendiendo al número de aportaciones realizadas a lo largo de cada año, o periodicidad de las mismas, podemos diferenciar entre:

a) *Constitución mediante términos anuales.* Cuando tiene lugar una única aportación en cada año.
b) *Constitución fraccionada.* Aquella operación en que la constitución se realiza con términos desembolsados en cada fracción del año, con la peculiaridad que el valor de todos los términos que vencen en cada uno de los años se mantienen constantes.

4. Observando el vencimiento de las cuantías que componen la prestación, tenemos dos posibilidades:

a) *Constitución con aportaciones prepagables.* Es decir, el ahorrador realiza los desembolsos al principio de cada uno de los períodos considerados.
b) *Constitución con aportaciones pospagables.* Esto es, el vencimiento de los términos se produce al final de los correspondientes períodos.

En la práctica, las operaciones de constitución son un compendio de las anteriores, y como aplicaciones notables cabe resaltar:

A) *Renovación de equipos.* Recibe esta denominación por su finalidad, que es disponer, en el momento que sea necesario, del capital suficiente para efectuar la sustitución de determinados equipos. La descripción de esta operación la vincula a sociedades más que a personas individuales, e implica por parte de aquéllas un compromiso para detraer de sus beneficios la cantidad necesaria para alcanzar el objetivo perseguido.

Suele ser una operación de constitución progresiva, con aportaciones pospagables y a largo plazo.

B) *Plan de ahorro y previsión.* Es aquella operación con la que el ahorrador pretende disponer de un determinado capital transcurridos una serie de períodos. Las características de esta operación la relacionan con ahorradores individuales, que están dispuestos a renunciar, durante una serie de años, a una parte de sus ingresos porque prevén unas necesidades futuras que desean cubrir.

Generalmente esta operación de constitución es progresiva, con aportaciones pospagables, fraccionada y a largo plazo.

El estudio de esta operación concreta es lo que va a centrar nuestra atención en el desarrollo de los siguientes apartados.

La descripción de la operación de formación de capital permite afirmar que ésta se lleva a cabo por iniciativa del ahorrador, el cual diseña o se acoge a una operación que se adapta, por una parte, a sus disponibilidades actuales, y por otra, a sus necesidades futuras. Así, el prestamista se plantea habitualmente la operación bajo dos aspectos bien diferenciados.

La primera opción parte de la estimación que el ahorrador realiza sobre sus necesidades futuras, y su objetivo es cubrirlas cuando llegue el momento, para ello estará dispuesto a renunciar, durante un tiempo, a una parte de sus ingresos. Las cuantías necesarias para alcanzar su objetivo dependerán de la ley de variación que establezca a las mismas, así como de los rendimientos que se les asigne.

La segunda alternativa parte del conocimiento que el prestamista tiene sobre sus disponibilidades monetarias actuales y de la estimación que efectúe sobre las futuras, que le permite prever la parte de las mismas que puede prescindir y dedicar a crear un capital. El importe de éste dependerá del nivel del ahorro alcanzado por el ahorrador en el transcurso de la operación.

La renovación de equipos encaja perfectamente en la primera de las opciones mencionadas, ya que la sociedad conoce el valor de los equipos a reponer, y conseguirá disponer del importe requerido realizando una serie de aportaciones.

Por el contrario, el plan de ahorro y previsión es susceptible de analizarse bajo la perspectiva de cualquiera de las dos alternativas citadas. El sujeto puede partir bien del conocimiento del grado de ahorro que está dispuesto a efectuar, bien de la cuantía que necesitará en el futuro.

En un sentido general hemos venido hablando de planes de ahorro y previsión, no obstante, es posible efectuar una distinción entre ellos. En este sentido, los planes de ahorro están condicionados exclusivamente por una componente financiera, mientras que los planes de previsión contienen una componente aleatoria y una componente financiera, hacen referencia pues a los planes actuariales de previsión.

Por la mayor identificación de estos planes de previsión con las coberturas más usuales —pensiones— se les suele denominar en lenguaje coloquial planes de pensiones. La componente aleatoria que incorporan los vincula a las edades de los ahorradores y, en consecuencia, a sus probabilidades de supervivencia y de mortalidad.

8.—VARIACIONES DEL PLAN DE CONSTITUCION

Hasta ahora la operación que nos ocupa se ha venido analizando manteniendo su carácter cierto, en el sentido que el sujeto considera que la operación concluirá con la recepción del capital constituido, de acuerdo con la planificación efectuada.

Es posible, sin embargo, que se plantee en un momento dado la interrupción de la operación. Lo normal es que esta posibilidad aparezca en el contrato suscrito por las partes, en cuyo caso generalmente vendrán recogidos también los requisitos que se exigen para que esa cancelación anticipada pueda llevar a efecto. Estos hacen referencia a las causas y a las condiciones necesarias, las cuales suelen suponer una penalización en contra de quien toma la decisión de rescindir, y este gravamen habitualmente se registra como un porcentaje del capital constituido o de los intereses generados hasta ese momento.

En el caso que la posibilidad de cancelación anticipada no haya sido prevista por las partes, el sujeto interesado tendría que negociar con el contrario la cantidad necesaria para que éste admita tal eventualidad.

Las razones aludidas se relacionan con el carácter de inversión financiera que tiene la operación de constitución para el ahorrador, en el sentido de la incertidumbre de la rentabilidad que lleva aparejada, y que puede tener como consecuencia bien la mencionada cancelación anticipada, bien una revisión del plan inicial siempre que las previsiones efectuadas sean imperfectas y no reflejen lo que en realidad va sucediendo. Estas revisiones tienen la misión de reconducir el plan a la obtención de los objetivos propuestos. Asimismo puede ocurrir que el prestamista modifique sus decisiones iniciales por considerar que deben ser revisados sus propios objetivos o las condiciones iniciales.

Si se admite la posibilidad de llevar a cabo variaciones sobre el plan original, sólo a posteriori se tendrá la certeza del plan u operación que definitivamente ha resultado, y que será consecuencia de distintas fases: el plan inicialmente diseñado y de todos los planes intermedios, fruto éstos de las sucesivas revisiones propuestas.

La concreción del plan inicial exige fijar todas las variables que intervienen en la operación, éstas son la duración y la cuantía del capital a constituir; la elección de la modalidad de imposición y la determinación de sus rendimientos permitirán estimar las aportaciones que se juzgan necesarias.

En la medida que las previsiones y realizaciones se encuentran próximas, será válido el plan original, pues con él se conseguirán los objetivos. Pero si previsiones y realidad presentan desviaciones, será necesario examinarlas, y en su caso revisar el plan de partida. En ocasiones, aunque no existan grandes desfases, es conveniente analizar el desarrollo del plan porque su objetivo no se ajusta a los deseos del ahorrador o porque sus expectativas se ven alteradas.

Como síntesis, podemos distinguir entre:

— *Variaciones del plan de tipo objetivo o debidas a acontecimientos ajenos al ahorrador.* Entre ellas cabe mencionar la consideración de la inflación o una modificación en los tipos de interés.

— *Variaciones del plan de tipo subjetivo o debido a actitudes personales del propio ahorrador.* Son variaciones por causas inherentes al mismo, como puede ser una alteración en sus objetivos, una variación de sus disponibilidades actuales, etc.

En este segundo grupo podemos encuadrar varios tipos de modificaciones, en función de cuál de las variables se proponga el prestamista alterar respecto de las que determinaban la operación emprendida en su día.

En primer lugar, si se produce una variación en el volumen del capital a constituir, el nuevo objetivo se logrará alterando las cuantías aportadas o la duración de la operación, de modo que si se incrementa el nivel del capital a percibir, será necesario bien aumentar el esfuerzo económico periódico, bien mantener éste y retrasar el momento de percepción del capital formado, y viceversa en caso de una reducción en el objetivo inicial.

En segundo lugar, si se produce una modificación de la capacidad de ahorro del prestamista, ésta tendrá como consecuencia una variación en el capital constituido o, en caso de desear mantener el importe de éste, se vería alterado su vencimiento. En este sentido, si las disponibilidades aumentaran, el importe recibido como contraprestación crecería o se adelantaría el momento de recepción del mismo; variables éstas que se moverían en sentido contrario en caso de que el nivel de ahorro disminuyera.

Por último, el prestamista puede desear alterar la duración de la operación, para lo cual se vería impulsado a cambiar el capital constituido o, en caso de pretender mantener el objetivo original, la aportación a que se había comprometido en el origen.

Como conclusión, podemos establecer una relación directa entre al menos dos de las variables que intervienen en la operación de constitución y que dependen directamente de la voluntad de las partes, y más concretamente del ahorrador. Esquemáticamente, éstas son:

$$C_n \rightarrow C'_n \Rightarrow \begin{cases} a_s \rightarrow a'_s \\ \text{o} \\ n \rightarrow n' \end{cases}$$

$$a_s \rightarrow a'_s \Rightarrow \begin{cases} C_n \rightarrow C'_n \\ \text{o} \\ n \rightarrow n' \end{cases}$$

$$n \rightarrow n' \Rightarrow \begin{cases} a_s \rightarrow a'_s \\ \text{o} \\ C_n \rightarrow C'_n \end{cases}$$

La conexión considera constante el valor de la tercera de las variables inherentes al prestamista, así como el tipo de interés, que no depende de la voluntad de las partes. No obstante, en la práctica es factible el cambio simultáneo de todas las referencias consideradas, aunque no es corriente.

9.—ANALISIS DEL PLAN DE AHORRO. PLANTEAMIENTO O DISEÑO DEL PLAN INICIAL

Consideraremos un ahorrador cuyo esfuerzo depende de sus rentas salariales y, en consecuencia, está justificado introducir la terminología que corresponde a lo que en la actualidad sería un plan de pensiones individual y de aportación definida —donde formalmente aparece la cuantía de la aportación, aunque implícitamente existe un intento de alcanzar un determinado nivel de ahorro—, cuyo objeto es bien formar un capital al cumplimiento de una edad, que puede ser la de jubilación o situación equivalente, bien percibir una renta a partir de ese momento, cuyo valor financiero-actuarial coincidiría con el capital.

El propósito de la actual exposición es analizar el plan de ahorro o la fase de ahorro puro, por lo que sólo haremos referencia a la etapa de formación del capital.

Analizaremos el plan desde la perspectiva genérica de un sujeto que inició la operación de constitución a la edad x_e, ha transcurrido un tiempo y su edad actual es x, pero su objetivo es disponer de un capital al final de su vida laboral, que en principio, y si no se producen acontecimientos imprevistos, será a la edad de jubilación x_j. Sean pues:

x_e = Edad de entrada o inicio del plan de ahorro.
x = Edad alcanzada o edad actual.
x_j = Edad de jubilación o final de la operación.
$x_j - x_e$ = Duración prevista.
$x - x_e$ = Intervalo transcurrido.
$x_j - x$ = Intervalo pendiente de vencer.
S_{x_e} = Salario a la edad de entrada.
S_x = Salario a la edad alcanzada.
S_{x_j} = Salario a la edad de jubilación.
C_{x_j} = Capital constituido al finalizar el plan de ahorro.
δ = Tasa de ahorro que, aplicada al salario, determina la aportación al plan.
β = Tasa de variación esperada de los salarios.
α = Tasa de inflación esperada.
i = Tipo de interés.

Las características del plan de ahorro hacen necesaria la estimación, por una parte, del grado de ahorro que el sujeto está dispuesto a afrontar —se supone que quiere mantener el esfuerzo real realizado en cada ejercicio—; y por otra parte, de la evolución de los salarios —se considera que la variación de los mismos va a ser constante—, de modo que se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$S_x = S_{x_e}(1+\beta)^{x-x_e}$$
$$S_{x_j} = S_{x_e}(1+\beta)^{-x_j-x}$$

Tomar tasas constantes en lugar de las variables que realmente tendrán lugar se justifica porque el objetivo esencial del trabajo es desarrollar una metodología de análisis; la cual, en los casos de aplicación concreta, se tendría que adaptar al contexto que realmente se produzca.

El ahorrador se plantea la operación bajo dos perspectivas distintas, que hacen referencia a sus objetivos de partida: la parte de sus ingresos a que está dispuesto a renunciar, lo cual implica que hace una previsión acerca de las aportaciones que va a realizar o, por el contrario, estima el capital que va a necesitar en el futuro, y diseña el plan de desembolsos regulares que le lleve a conseguir disponer del mismo.

Sentadas las bases del plan de ahorro, es posible establecer la equivalencia financiera entre aportaciones periódicas y capital recibido, en base a las condiciones de mercado del momento en que se inicia la operación, las cuales tienen su reflejo en el tipo de interés.

La solución de esta ecuación permite, dependiendo de los objetivos perseguidos, determinar la variable. Esta es la cuantía del capital a constituir, si se parte de unas aportaciones comprometidas o el importe de éstas, si la finalidad es la formación de una cuantía concreta.

La ecuación de equivalencia es:

$$\begin{aligned} C_{x_j} &= S^{(m)}_{(\delta S_{x_e};\ 1+\beta)\overline{x_j - x_e}|i} = \\ &= \delta S_{x_e} \frac{i}{j(m)} \frac{(1+i)^{x_j-x_e} - (1+\beta)^{x_j-x_e}}{i-\beta} \end{aligned} \tag{68}$$

Deduciéndose:

$$\delta = \frac{C_{x_j}}{S_{x_e}} \frac{j(m)}{i} \frac{i-\beta}{(1+i)^{x_j-x_e} - (1+\beta)^{x_j-x_e}} \tag{69}$$

El capital constituido hasta estos momentos, en función del salario actual S_x, es:

$$\begin{aligned} C_x &= S^{(m)}_{(\delta S_{x_e};\ 1+\beta)\overline{x - x_e}|i} = \\ &= \delta S_x \frac{i}{j(m)} \frac{\left(\dfrac{1+i}{1+\beta}\right)^{x-x_e} - 1}{i-\beta} \end{aligned} \tag{70}$$

10.—ANALISIS DE SENSIBILIDAD

El planteamiento de la operación se efectúa en base a las condiciones de mercado, plasmadas esencialmente en un tipo de interés y en una evolución de los salarios y de la inflación. Estas variables son incontrolables por el ahorrador, si bien suelen estar vinculadas.

La existencia de las variables mencionadas aconseja al ahorrador, además de enfrentarse a la previsión de desembolsos futuros fruto del diseño del plan, intentar anticiparse a las desviaciones que puedan sobrevivir al mismo. El análisis de sensibilidad de las variales relevantes permitirá disponer de un abanico de situaciones factibles, que proporciona información acerca de las reacciones que producen en el plan las alteraciones de las variables consideradas. No obstante, el análisis presenta un claro inconveniente por la fuerte interrelación que suele existir entre la tasa de inflación, el tipo de interés y la tasa de variación salarial, lo que sugiere tomar las combinaciones más coherentes, que le permita disponer de los escenarios más plausibles.

Vamos a tratar de examinar en primer lugar la incidencia que tiene una modificación individual en cada una de las variables citadas, para pasar posteriormente a un análisis conjunto de las combinaciones probables.

10.1.—VARIACION DE LA TASA DE INFLACION

El esquema inicial parte del objetivo monetario de formar C_{x_j}, supuesta una tasa de inflación α, lo cual equivale al objetivo real de $C_{x_i}(1+\alpha)^{-(x_j-x_e)}$; pero si la inflación es $\alpha' = \alpha$, el objetivo real será: $C_{x_j}(1+\alpha')^{-(x_j-x_e)}$.

La variación experimentada por el objetivo, como consecuencia de una modificación de la tasa de inflación, es pues:

- Incremento en términos absolutos del objetivo:

$$\Delta C_{x_j} = C_{x_j}[(1+\alpha')^{-(x_j-x_e)} - (1+\alpha)^{-(x_j-x_e)}] \tag{71}$$

- Incremento en términos relativos:

$$\frac{\Delta C_{x_j}}{C_{x_j}} = \left(\frac{1+\alpha'}{1+\alpha}\right)^{-(x_j-x_e)} - 1 \tag{71'}$$

En caso que la inflación fuera superior a la prevista, el capital constituido no conseguiría mantener el poder adquisitivo que se pretendía con el desarrollo de la operación, ya que el objetivo decrecería en términos reales. Por el contrario, si la inflación fuera inferior a la estimada, el capital constituido superaría los deseos iniciales del ahorrador en términos reales.

10.2.—VARIACION DEL TIPO DE INTERES

Supuesto un tipo de interés $i' \neq i$, el valor del capital constituido pasaría a ser:

$$C'_{x_j} = S^{(m)}_{(\delta S_{x_e};\ 1+\beta)\overline{x_j - x_e}|\, i'} \tag{72}$$

El incremento absoluto sería:

$$\Delta C_{x_j} = \delta S_{x_e} \left[\frac{i'}{j'(m)} \frac{(1+i')^{x_j - x_e} - (1+\beta)^{x_j - x_e}}{i' - \beta} - \frac{i}{j(m)} \frac{(1+i)^{x_j - x_e} - (1+\beta)^{x_j - x_e}}{i - \beta} \right] \quad (73)$$

y el relativo:

$$\frac{\Delta C_{x_j}}{C_{x_j}} = \frac{i'}{j'(m)} \frac{j(m)}{i} \frac{(i-\beta)}{(i'-\beta)} \frac{(1+i')^{x_j - x_e} - (1+\beta)^{x_j - x_e}}{(1+i)^{x_j - x_e} - (1+\beta)^{x_j - x_e}} - 1 \quad (74)$$

En caso que el tipo de interés superara al previsto inicialmente, se pruduciría una elevación de la cuantía del capital formado, mientras que el efecto sería el contrario en caso de disminuir este ratio.

10.3. VARIACION DE LA TASA DE CRECIMIENTO SALARIAL

Considerando una variación salarial $\beta' = \beta$, el capital que se formaría sería:

$$C'_{x_j} = S^{(m)}_{(\delta S_{x_e};\, 1+\beta')\overline{x_j - x_e}|i} \quad (75)$$

El incremento absoluto:

$$\Delta C_{x_j} = dS_{x_e} \frac{i}{j(m)} \left(\frac{(1+i)^{x_j - x_e} - (1+\beta')^{x_j - x_e}}{i - \beta'} - \frac{(1+i)^{x_j - x_e} - (1+\beta)^{x_j - x_e}}{i - \beta} \right) \quad (76)$$

Y el relativo:

$$\frac{\Delta C_{x_j}}{C_{x_j}} = \frac{(i-\beta)}{(i-\beta')} \frac{(1+i)^{x_j - x_e} - (1+\beta')^{x_j - x_e}}{(1+i)^{x_j - x_e} - (1+\beta)^{x_j - x_e}} - 1 \quad (77)$$

Una elevación de los salarios mayor que la estimada tendría como consecuencia un aumento en el capital formado, superándose así los objetivos de partida del ahorrador. Resultado opuesto tendría una variación salarial en sentido contrario.

Cuando indicábamos la utilidad que para el ahorrador tiene realizar un análisis de sensibilidad de las variables más relevantes, también mencionábamos la conveniencia de efectuar el mismo no sobre una única variable, sino sobre una combinación lógica de ellas. Así, si tomamos conjuntamente el tipo de interés, la tasa de variación salarial —cuyo estudio individual nos ha confirmado que la variación en el mismo sentido de cada una de ellas tiene idénticas consecuencias en lo que se refiere al capital constituido— y la inflación llegamos a establecer en términos relativos el siguiente incremento en el objetivo:

$$\frac{\Delta C_{x_j}}{C_{x_j}} = \frac{i'}{j'(m)} \frac{j(m)}{i} \frac{(i-\beta)}{(i'-\beta')} \frac{(1+i')^{x_j - x_e} - (1+\beta')^{x_j - x_e}}{(1+i)^{x_j - x_e} - (1+\beta)^{x_j - x_e}} - 1 \quad (78)$$

Lo normal es que se produzca una modificación en el mismo sentido de las tres variables consideradas, así, una elevación en todas respecto de los datos de partida, tendría como consecuencia un crecimiento en términos reales del objetivo capital a constituir, que se alcanzaría, en mayor o menor grado, por el incremento en la cota de intereses generados por las aportaciones, por una parte, y por otra, por la superior cuantía de éstas. Por contra, si las variables no alcanzaran los niveles previstos, el objetivo se modificaría a la baja, y en idéntica dirección variarían la cuantía de las aportaciones y los intereses por ellas originados.

El diseño del plan de ahorro, así como el análisis de sensibilidad de las variables que intervienen, son cuestiones que el ahorrador se plantea antes de concertar la operación concreta que mejor se adapte a sus recursos económicos y a sus necesidades futuras.

11.—VARIACIONES DEL PLAN DE AHORRO

Una vez comenzada la operación de constitución, es aconsejable efectuar un seguimiento de la misma, con el fin de rectificar en caso de haber variado el sujeto sus decisiones iniciales, o sus propios objetivos, o incluso en caso que las condiciones de mercado en base a las cuales la operación fue suscrita no se mantengan.

Las modificaciones del plan hacen referencia a los términos que vamos a analizar a continuación, y se las plantea el ahorrador en el momento actual, transcurridos unos años desde el inicio del plan.

11.1.—TIPO DE INTERES

Ante un cambio en el tipo de interés de mercado (i'), las posibles reacciones del ahorrador son:

a) *Modificar el capital a constituir*

$$C'_{x_j} = C_x(1+i')^{x_j-x} + S^{(m)}_{(\delta S_{x_e};\, 1+\beta)\overline{x_j-x}|i'} =$$

$$= \delta S_x \left[\frac{i}{j(m)} (1+i')^{x_j-x} \frac{\left(\dfrac{1+i}{1+\beta}\right)^{x-x_e} - 1}{i-\beta} + \frac{i'}{j'(m)} \frac{(1+i')^{x_j-x} - (1+\beta)^{x_j-x}}{i'-\beta} \right] \qquad (79)$$

Si el tipo de interés se incrementa, la variación del capital constituido será también al alza, y viceversa. Esto es, existe una relación directa entre tipo de interés y capital a constituir:

$$i' \gtrless i \Rightarrow C'_{x_j} \gtrless C_{x_j}$$

b) *Modificar el grado de ahorro*

$$C_{x_j} = C_x(1+i')^{x_j - x} + S^{(m)}_{(\delta' S_x;\ 1+\beta)\overline{x_j - x}|i'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta' = \frac{\dfrac{C_{x_j}}{S_x} - \delta \dfrac{i}{j(m)} \dfrac{\left(\dfrac{1+i}{1+\beta}\right)^{x - x_e} - 1}{i - \beta}(1+i')^{x_e - x}}{\dfrac{i'}{j'(m)} \dfrac{(1+i')^{x_j - x} - (1+\beta)^{x_j - x}}{i' - \beta}} \qquad (80)$$

Un cambio positivo en el tipo de interés provoca una caída en las aportaciones necesarias para conseguir el capital previsto; el efecto contrario tiene una reducción del tipo de interés. Existe por tanto una relación inversa entre estas dos variables:

$$i' \gtrless i \Rightarrow \delta' \lessgtr \delta$$

c) *Alterar la edad de jubilación o el final de la operación*

Un incremento positivo del tipo de interés produce un adelantamiento en la percepción del capital constituido si la aspiración del ahorrador es mantener la cuantía del mismo mediante el depósito de los capitales comprometidos. Por el contrario, deberá retrasarse el momento de entrega del capital constituido si el tipo de interés disminuye; esto es:

$$i' \gtrless i \Rightarrow x'_j \lessgtr x_j$$

11.2.—CAPITAL A CONSTITUIR

Si el ahorrador revisa su objetivo inicial y pretende disponer de un capital de cuantía C'_{x_j} al término de la operación, tiene dos alternativas:

a) *Alterar su grado de ahorro*

En caso de elegir este procedimiento, el capital constituido sería:

$$C'_{x_j} = C_x(1+i)^{x_j - x} + S^{(m)}_{(\delta' S_x;\ 1+\beta)\overline{x_j - x}|i} \qquad (81)$$

Siendo el valor de la aportación necesaria, respecto de la inicial:

$$\delta' = \frac{\dfrac{j(m)}{i} \dfrac{C'_{x_j}}{S_x}(i-\beta) - \delta(1+i)^{x_j - x}\left[\left(\dfrac{1+i}{1+\beta}\right)^{x - x_e} - 1\right]}{(1+i)^{x_j - x} - (1+\beta)^{x_j - x}} \qquad (82)$$

Ante un incremento del capital a constituir, será necesario elevar el grado de ahorro, y viceversa:

$$C'_{x_j} \gtrless C_{x_j} \Rightarrow \delta' \gtrless \delta$$

b) *Cambio edad de jubilación*

El nuevo capital constituido pasaría a ser:

$$C'_{x'_j} = C_x (1+i)^{x'_j - x} + S^{(m)}_{(\delta S_x;\ 1+\beta)\overline{x'_j - x}|i} \tag{83}$$

De forma que si se incrementa el objetivo capital a formar, manteniendo el nivel de aportaciones, se retrasa el momento en que aquél estará disponible; y si se reduce el objetivo, se produce un adelantamiento en la edad de jubilación:

$$C'_{x_j} \gtrless C_{x_j} \Rightarrow x'_j \gtrless x_j$$

11.3. CUANTIA DE LAS APORTACIONES

En el supuesto que el sujeto se plantee una variación del grado de ahorro que ha venido efectuando desde que se inició la operación (δ'), las posibilidades que se le ofrecen son:

a) *Modificación del capital a constituir*

Las consecuencias que tiene su decisión, si selecciona esta alternativa, son la formación de:

$$C'_{x_j} = S_x \frac{i}{j(m)} \left[\delta \frac{\left(\frac{1+i}{1+\beta}\right)^{x-x_e} - 1}{i-\beta} (1+i')^{x_j - x} + \delta' \frac{(1+i)^{x_j - x} - (1+\beta)^{x_j - x}}{i-\beta} \right] \tag{84}$$

La relación que existe entre las dos variables consideradas es:

$$\delta' \gtrless \delta \Rightarrow C'_{x_j} \gtrless C_{x_j}$$

b) *Alteración y duración de la operación*

La edad de jubilación que haría posible el capital previsto sería la que se dedujera de la siguiente ecuación:

$$C_{x'_j} = C_x (1+i)^{x'_j - x} + S^{(m)}_{(\delta' S_x;\ 1+\beta)\overline{x'_j - x}|i} \tag{85}$$

Si se produce un incremento en el nivel de ahorro, esto hará posible percibir antes el capital constituido, siempre que la cuantía del mismo permanezca invariable, y viceversa. Existe una alteración sentido opuesto de las dos variables, esto es:

$$\delta' \gtrless \delta \Rightarrow x'_j \lesseqgtr x_j$$

11.4. EDAD DE JUBILACION

Por último, cabe la posibilidad de que el sujeto pretenda alterar al momento previsto para la recepción del capital constituido (x'_j), lo que da lugar a dos posibilidades:

a) *Modificación del capital constituido*

La demora de la edad de jubilación aumenta el volumen de capital a percibir, y la anticipación de aquélla lo reduce respecto del previsto al iniciar el plan de ahorro.

$$x'_j \gtrless x_j \Rightarrow C'_{x_j} \gtrless C_{x_j}$$

b) *Alteración aportaciones*

Un retraso en la edad de jubilación implica una disminución en el nivel de las aportaciones para alcanzar el objetivo inicial, y el efecto que un adelantamiento en aquélla tiene es la necesidad de incrementar el grado de ahorro. Esto es, las variables se modifican en sentido inverso:

$$x'_j \gtrless x_j \Rightarrow \delta' \lesseqgtr \delta$$

12.—APLICACIONES

Analizaremos a continuación el caso de un ahorrador que concertó un plan de ahorro cuando tenía 40 años, tiene en estos momentos 55 y tiene previsto jubilarse a la edad de 65 años. Las condiciones iniciales en base a las cuales se pactó la operación vienen reflejadas en los siguientes datos:

$x_e = 40$

$x = 55$

$x_j = 65$

$x_j - x_e = 25$

$x - x_e = 15$

$x_j - x = 10$

$S_{x_e} = 2$ millones de pts.

$S_x = 2.000.000(1+0{,}06)^{15} = 4.793.116$ pts.

$S_{x_j} = 2.000.000(1+0{,}06)^{25} = 4.793.116(1+0{,}06)^{10} = 8.583.741$ pts.

$C_{x_j} = 30$ millones de pts.

$\beta = 6\,\%$

$\delta = 5\,\%$

$i = 10\,\%$

En base a estas condiciones de partida, se plantearía en su día el estudio de la operación, tanto en lo que se refiere a la parte de sus ingresos a que se vería obligado a renunciar como a la consecuencia que tendría una posible modificación de las variables que le eran exógenas.

Así pues, el grado de ahorro necesario para conseguir disponer cuando llegue el momento de pasar a situación de pasivo de los 30 millones que pretende es un 8,78 % de sus ingresos periódicos.

El análisis de sensibilidad de la inflación, el tipo de interés y la tasa de variación salarial le permite disponer, a priori, de un abanico de situaciones posibles, que resumimos en el siguiente cuadro:

Tasa de inflación (α)	Tipo de interés (i)	Tasa de variación salarial (β)	Capital constituido (C_{x_j})
5 %	10 %	6 %	30.000.000 pts.
6 %	10 %	6 %	38.022.040 pts.
4 %	10 %	6 %	23.616.866 pts.
5 %	11 %	6 %	34.234.403 pts.
5 %	9 %	6 %	26.366.691 pts.
5 %	10 %	7 %	33.057.677 pts.
5 %	10 %	5 %	27.321.554 pts.
5 %	11 %	7 %	37.564.229 pts.
5 %	9 %	5 %	23.909.334 pts.

En el momento actual, transcurridos 15 años desde el inicio de la operación, tiene constituido un capital de 8.164.763 pts. El ahorrador puede plantearse la revisión de la operación en los siguientes términos:

a) *Cambio de tipo de interés*

$$\text{Paso de } i = 10\,\% \text{ a } i' = 11\,\% \Rightarrow \begin{cases} C'_{x_j} = 32.440.106 \text{ pts.} \\ \text{o} \\ \delta' = 6{,}46\,\% \\ \text{o} \\ x'_j \simeq 64 \text{ años} \end{cases}$$

$$\text{Paso de } i = 10\,\% \text{ a } i' = \ \ 9\,\% \Rightarrow \begin{cases} C'_{x_j} = 27.739.926 \text{ pts.} \\ \text{o} \\ \delta' = 11{,}13\,\% \\ \text{o} \\ x'_j \simeq 66 \text{ años} \end{cases}$$

b) *Cambio de objetivo*

$$\text{Paso de } C_{x_j} = 30 \cdot 10^6 \text{ pts. a } C'_{x_j} = 35 \cdot 10^6 \text{ pts.} \Rightarrow \begin{cases} \delta' = 13{,}75\ \% \\ \text{o} \\ x'_j \simeq 66 \text{ años} \end{cases}$$

$$\text{Paso de } C_{x_j} = 30 \cdot 10^6 \text{ pts. a } C'_{x_j} = 25 \cdot 10^6 \text{ pts.} \Rightarrow \begin{cases} \delta' = 3{,}80\ \% \\ \text{o} \\ x'_j \simeq 64 \text{ años} \end{cases}$$

c) *Modificación de las aportaciones*

$$\text{Paso de } \delta = 8{,}78\ \% \text{ a } \delta' = 15{,}00\ \% \Rightarrow \begin{cases} C'_{x_j} = 36.258.730 \text{ pts.} \\ \text{o} \\ x'_j \simeq 63{,}5 \text{ años} \end{cases}$$

$$\text{Paso de } \delta = 8{,}78\ \% \text{ a } \delta' = \ \ 6{,}00\ \% \Rightarrow \begin{cases} C'_{x_j} = 27.209.868 \text{ pts.} \\ \text{o} \\ x'_j \simeq 66 \text{ años} \end{cases}$$

d) *Variación de la edad de jubilación*

$$\text{Paso de } x_j = 65 \text{ a } x'_j = 66 \Rightarrow \begin{cases} C'_{x_j} = 33.787.158 \text{ pts.} \\ \text{o} \\ \delta' = 5{,}61\ \% \end{cases}$$

$$\text{Paso de } x_j = 65 \text{ a } x'_j = 64 \Rightarrow \begin{cases} C'_{x_j} = 26.597.635 \text{ pts.} \\ \text{o} \\ \delta' = 12{,}84\ \% \end{cases}$$

13.—CONCLUSIONES

La decisión de llevar a cabo un plan de ahorro, al igual que cualquier otro tipo de inversión, exige por parte del sujeto la realización de un análisis de la operación en lo que se refiere al flujo de capitales que la misma le va a ocasionar, en base a sus objetivos de partida y a la estimación de las variables que intervienen. Se llega así al diseño del plan de ahorro que mejor se adapta a su capacidad de ahorro y a sus necesidades económicas futuras.

También es conveniente que el ahorrador disponga, a priori, de información acerca de la variabilidad del plan de ahorro, en cuanto capital a constituir, ante la modificación de alguna de las magnitudes que definen las operación. El análisis de sensibilidad de dichas magnitudes, le permitirá disponer de los datos necesarios para conocer el efecto que tendría la variación de cada una de las variables analizadas sobre el plan de ahorro inicial.

Asimismo, es aconsejable que mientras la operación se va desarrollando, se realice un seguimiento de la misma que permita ver si se producen desviaciones respecto de los objetivos de partida, en cuyo caso sería necesaria la intervención del ahorrador con el fin de reconducir el plan al logro de los objetivos iniciales.

Cada una de las intervenciones del sujeto ocasiona una revisión del plan anterior, por lo que la operación definitiva sólo será conocida a su vencimiento, y será consecuencia del plan inicial y de la totalidad de las sucesivas revisiones efectuadas a lo largo de la operación.

VII.3.—LAS OPERACIONES DE INVERSION

14.—INTRODUCCION: NOCION DE INVERSION; CLASIFICACIONES

14.1.—NOCION DE INVERSION

El concepto de inversión es genérico e inconcreto, y debido a esta relatividad resulta dificultoso intentar dar una definición de inversión. Ello lleva a considerar la noción de inversión para unos autores en un sentido amplio, mientras que para otros es más estricta (por lo común se fijan sólo en el aspecto productivo).

En un *sentido amplio*, la inversión supone la colocación de un flujo monetario o cambio de un bien económico. Una *noción más estricta* es la que considera como inversión a los desembolsos para adquirir bienes de capital. En ambos casos el resultado es una materialización del dinero en el bien y ello ocasiona una pérdida de liquidez.

Entre las distintas concepciones, amplias o estrictas, hay un denominador común, y en base a él se puede dar una *noción formal de la inversión* como operación caracterizada por una corriente de desembolsos y una corriente de ingresos. En un sentido estricto se exigirá que los desembolsos precedan a los ingresos y en un aspecto más amplio, si hay algún desembolso posterior a algún ingreso que el vencimiento medio de los desembolsos sea anterior al vencimiento medio de los ingresos.

14.2.—CLASIFICACIONES

Las inversiones pueden clasificarse desde diferentes puntos de vista; pero sólo se hará alusión a aquellas que consideramos de mayor interés, dado el carácter introductorio que se persigue en este manual, así se tiene:

1) Atendiendo al número de capitales que intervienen en las corrientes de desembolsos e ingresos puedan clasificarse las inversiones de cuatro grupos:

a) Unica entrada - única salida.
b) Varias entradas - única salida.
c) Unica entrada - varias salidas.
d) Varias entradas - varias salidas.

Esta clasificación recuerda a la que se efectúa entre las operaciones financieras.

Conviene resaltar que lo que para el inversor es un desembolso, para la inversión es un ingreso, y recíprocamente.

2) Por su duración, las inversiones pueden ser: *a corto plazo; a medio plazo* y *a largo plazo.*

3) La clasificación que para los fines del libro reviste quizá mayor relevancia es la debida a E. Schneider, que distingue entre *inversiones reales* e *inversiones financieras.*

Las *inversiones reales* son aquellas en las que el objeto de la inversión es incorporado a algún proceso productivo.

Las *inversiones financieras* tienen como objeto títulos, es decir, se efectúan los desembolsos para recibir títulos valores que encierran promesas de ingresos futuros.

Los temas tratados en el manual se encuentran en el contexto de las inversiones financieras, pues tanto las operaciones financieras de préstamo o de ahorro, como las operaciones con valores de renta fija o de renta variable son inversiones de tipo financiero.

4) Por el carácter más o menos cierto de las corrientes de desembolsos e ingresos se puede distinguir entre *inversiones ciertas* e *inversiones no ciertas.*

Esta distinción es relativa al no existir nunca la certeza absoluta, ya que toda inversión va acompañada de un cierto grado de incertidumbre, entendiendo por incertidumbre la posibilidad de que varíen las bases de los cálculos realizados al estimar las corrientes de ingresos y pagos.

Dentro de la categoría de inversiones no ciertas es común denominador con el nombre de *inversiones en ambiente de riesgos* a aquellas cuyas previsiones de desembolsos e ingresos son conocidas en términos de probabilidad. Cuando ni siquiera se conocen las referidas probabilidades se dice que la *inversión es en ambiente de incertidumbre.*

Las operaciones financieras pertenecen, en general, al grupo de inversiones ciertas, mientras que las operaciones con valores mobiliarios suelen ser no ciertas.

15.—EL MODELO MATEMATICO DE LA INVERSION: VALOR FINANCIERO DE UNA INVERSION EN UN PUNTO α

La descripción en términos matemáticos de una inversión o de un proyecto de inversión, pues de ambas formas se suele denominar, exige considerar los elementos siguientes:

a) *Horizonte económico o duración de la inversión.* Es el intervalo del tiempo en el cual tiene lugar la inversión y puede tener una duración temporal o indefinida.

b) *Corriente de desembolsos.* Es el conjunto de capitales que se desembolsan en el horizonte económico.

c) *Corriente de ingresos.* Es el conjunto de capitales ingresados cuyos vencimientos se producen en el horizonte económico.

Las distribuciones de capitales pueden ser discretas o continuas, siendo lo usual lo primero y por ello sólo se hará referencia al campo discreto.

Suponiendo que el horizonte temporal de una inversión es n años y que los vencimientos de los capitales son anuales, las distribuciones de desembolsos e ingresos son:

— Distribución de los desembolsos:

$$\begin{array}{ccccccc} C_0 & C_1 & C_2 \cdots & & C_s \cdots & & C_n \\ \hline 0 & 1 & 2 \cdots & s-1 & s \cdots & n-1 & n \end{array}$$

— Distribución de los ingresos:

$$\begin{array}{ccccccc} & I_1 & I_2 \cdots & & I_s \cdots & & I_n \\ \hline 0 & 1 & 2 \cdots & s-1 & s \cdots & n-1 & n \end{array}$$

representando con C_0 al primer desembolso. Su cuantía suele ser muy superior a las restantes, y por ello se le conoce como tamaño de la inversión, cuantía de la inversión o desembolso inicial.

Los dos esquemas anteriores, en este supuesto de vencimientos anuales, pueden sintetizarse en la siguiente distribución de ingresos netos, también denominados flujos netos de caja:

$$\begin{array}{ccccccc} -C_0 & R_1 & R_2 \cdots & & R_s \cdots & & R_n \\ \hline 0 & 1 & 2 \cdots & s-1 & s \cdots & n-1 & n \end{array}$$

siendo $R_s = I_s - C_s$. Si existe el valor residual se suele explicitar, con lo cual se expresa su valor S_n en n, junto con R_n.

Cuando todos los R_s son positivos se dice que la inversión.es simple, y si existe algún valor de R_s menor que cero la inversión se dirá no simple.

En síntesis, el proyecto de inversión queda concretado con el conocimiento de las distribuciones de los desembolsos, ingresos y duración.

La ley financiera para la valoración de las inversiones, comúnmente utilizada, es la capitalización compuesta.

El valor financiero de una inversión en un punto $\alpha \in [0, n]$ será:

$$V(\alpha) = \sum_{s=1}^{n} I_s(1+i)^{\alpha-s} - \sum_{s=0}^{n} C_s(1+i)^{\alpha-s} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} R_s(1+i)^{\alpha-s} - C_0(1+i)^{\alpha}$$

Con frecuencia se presentan simultáneamente varios proyectos de inversión para seleccionar el más adecuado o, en su caso, el subconjunto óptimo. El problema de la elección entre varias inversiones exige para su solución poder compararlos y establecer un orden.

Se dirá que *dos inversiones son homogéneas o comparables si exigen el mismo desembolso inicial o cuantía de la inversión y tienen la misma duración.* Por tanto, para poder realizar comparaciones se deberán introducir criterios de homogeneización.

Como *criterios de homogeneización* cabe citar:

a) *Inversiones de igual cuantía C_0 y diferente duración*

Si los proyectos de inversión P_1 y P_2 tienen como duraciones n_1 y n_2, se supone que se renuevan en las mismas condiciones para el intervalo mínimo común múltiplo, es decir, para $n = \text{m.c.m.}(n_1; n_2)$.

b) *Inversiones de diferente cuantía y misma duración.*

Ante ello se puede optar por:

— Invertir la cuantía diferencia en las mismas condiciones de la menor o

— Invertir en la de mayor cuantía la misma que en la menor y la diferencia cubrirla con medios externos (financiación). Ello conduce a la denominada operación integral inversión-financiación.

c) *Caso general: Inversiones de distinta cuantía y distintas duraciones*

Se procede a homogeneizar tomando como inversión de referencia una de:

— Cuantía $C_0 = \text{m.n.m.}\ (C_{01}; C_{02})$.

— Duración $n = \text{m.n.m.}\ (n_1; n_2)$.

siendo C_{01} y C_{02} las cuantías exigidas por los proyectos P_1 y P_2.

Ello supone reinversiones en la duración total n.

La elección de inversiones plantea los siguientes *tipos de decisión*:

1) *Alternativa total.* Cuando se considera una inversión aisladamente, la decisión es: se hace o no se hace; es decir, se acepta o se rechaza.

2) *Varias alternativas.* Ante dos o más inversiones la ordenación conduce a la selección de la más conveniente.

16.—CRITERIOS DE VALORACION Y ELECCION DE UN PROYECTO DE INVERSION

La valoración de un proyecto de inversión se efectúa a partir de la información disponible respecto al mismo, la cual debe permitir concretar las características financieras esenciales, es decir: el desembolso inicial, tamaño o coste de la inversión; los ingresos netos esperados (o ingresos y desembolsos); la duración económica del proyecto y la especificación del tipo de interés en la ley financiera de valoración.

La información reseñada se debe sintetizar en una sola magnitud para facilitar la toma de decisiones.

Se estudiarán los criterios clásicos de valoración de inversiones conocidos por:

a) Valor actualizado neto (VAN) o beneficio total actualizado (BTA).

b) Tanto interno de rendimiento (TIR) o tanto de rendimiento interno (TRI) o tanto efectivo de una inversión.

c) Plazo de recuperación o «payback».

El carácter introductorio del análisis metodológico que se efectúa obliga que se tomen las siguientes hipótesis:

a) El decisor actúa dentro de un contexto de certeza, es decir, las corrientes de desembolsos e ingresos comprende capitales financieros ciertos.

b) Las inversiones son simples, es decir, todos los ingresos netos son positivos o cero.

c) El mercado de capitales es perfecto, por lo que existe un tipo de interés de mercado con el cual es posible invertir o financiarse sin limitación alguna.

d) Los proyectos de inversión son independientes.

e) Los vencimientos de los ingresos y desembolsos se supondran, por comodidad, a fin de año, y el horizonte económico de la inversión será de n años.

f) En la primera etapa se considera una situación económica de estabilidad de precios y posteriormente se dará entrada a la inflación.

16.1.—CRITERIO DEL PLAZO DE RECUPERACION O PAYBACK

Dado un proyecto de inversión representado por:

$$\begin{array}{cccccccc} -C_0 & R_1 & R_2 \cdots & & R_s \cdots & & R_n \\ \hline 0 & 1 & 2 & \cdots s-1 & s & \cdots n-1 & n \end{array}$$

se define el *plazo de recuperación de una inversión* como el tiempo que a de transcurrir para recuperar el coste C_0 de la inversión.

Designado por p al plazo, se debe satisfacer:

$$C = \sum_{s=1}^{p} R_s$$

Si los ingresos netos son constantes, se tiene:

$$p = \frac{C_0}{R}$$

El criterio exige, para la toma de decisiones, tomar como referencia algún valor de plazo considerado como máximo p_m. Si $p < p_m$, la inversión será aceptable o factible, y si $p > p_m$, se rechazará.

Su mayor *ventaja* radica en la facilidad de su cálculo y entre sus *inconvenientes* se encuentran:

a) El método se basa en criterios de liquidez y no de rentabilidad.

b) Desprecia, para la toma de decisiones, los ingresos posteriores a R_p.

c) Da el mismo valor a todos los ingresos netos cualquiera que sea el momento de su disponibilidad.

No tener presente el principio económico de la subestimación de los capitales futuros supone el mayor de sus inconvenientes, por lo que es conveniente incluir criterios de valoración financiera de los rendimientos futuros. Para un tipo de interés i de valoración, el *plazo de recuperación actualizado* es el valor p que satisface la ecuación:

$$C_0 = \sum_{s=1}^{p} R_s(1+i)^{-s} \qquad (87')$$

Si $R_s = R$, entonces es:

$$C_0 = R\, \mathbf{a}_{\overline{p}|i}$$

16.2. CRITERIO DEL VALOR ACTUALIZADO NETO (VAN) O BENEFICIO TOTAL ACTUALIZADO (BTA)

Sea un proyecto de inversión cuyas corrientes de desembolsos e ingresos son:

$$\begin{array}{ccccccccc} C_0 & C_1 & C_2 \cdots & & C_s \cdots & & C_n \\ \hline 0 & 1 & 2 \;\cdots & s-1 & s \;\cdots & n-1 & n \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & I_1 & I_2 \cdots & & I_s \cdots & & I_n \\ \hline 0 & 1 & 2 \;\cdots & s-1 & s \;\cdots & n-1 & n \end{array}$$

y su equivalente de ingresos netos:

$$\begin{array}{ccccccccc} -C_0 & R_1 & R_2 \cdots & & R_s \cdots & & R_n \\ \hline 0 & 1 & 2 \;\cdots & s-1 & s \;\cdots & n-1 & n \end{array}$$

Para la ley de valoración, la capitalización compuesta, a tanto i, se define el valor actualizado neto o beneficio total actualizado, del proyecto de inversión descrito, como el capital con valor en el origen cuya cuantía es:

$$VAN\,(i) = BTA\,(i) = \sum_{s=1}^{n} (I_s - C_s)(1+i)^{-s} - C_0 = \sum_{s=1}^{n} R_s(1+i)^{-s} - C_0$$

En el caso particular $R_s = R$ se tiene:

$$VAN\,(i) = BTA\,(i) = R\,\mathbf{a}_{\overline{n}|i} - C_0$$

y si $n \to \infty$, es decir, la inversión tiene una duración ilimitada, resulta:

$$VAN\,(i) = BTA\,(i) = R\,\mathbf{a}_{\overline{\infty}|i} - C_0 = \frac{R}{i} - C_0$$

La regla de decisión para aceptar o rechazar un proyecto de inversión, evaluado al tanto i, según este criterio es:

$$\begin{aligned} VAN\,(i) = BTA\,(i) > 0 &\Rightarrow \text{Aceptación} \\ VAN\,(i) = BTA\,(i) = 0 &\Rightarrow \text{Indiferencia} \\ VAN\,(i) = BTA\,(i) < 0 &\Rightarrow \text{Rechazo} \end{aligned}$$

Obtener un $VAN\,(i) > 0$ significa que la inversión permite recuperar lo invertido con una rentabilidad media por i y además obtener un valor añadido que es el valor $VAN > 0$. Este mide en realidad un beneficio actualizado adicional o superbeneficio por la totalidad de la inversión. Aunque el términos «Valor actualizado neto» está más generalizado, creemos que representa más adecuadamente a la medida financiera efectuada el término «Beneficio total actualizado». En lo sucesivo se hará uso indistinto de ambos nombres, así como de sus siglas $VAN\,(i) = BTA\,(i)$.

La medida del VAN (i) es relativa, pues es una función que depende de i. En efecto, basta observar que:

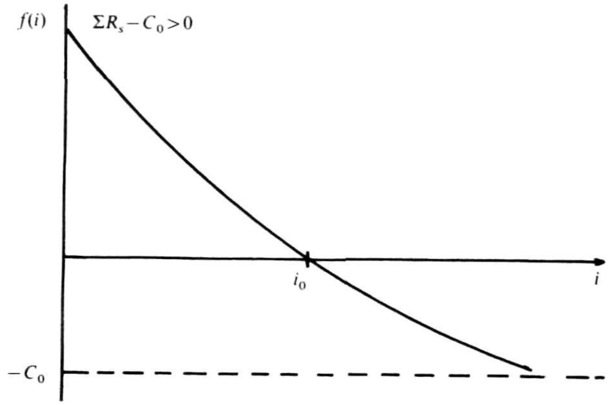
$$f(i) = \sum_{s=1}^{n} R_s(1+i)^{-s} - C_0$$

$$f'(i) = \sum_{s=1}^{n} (-s)R_s(1+i)^{-(s+1)} < 0$$

$$f''(i) = \sum_{s=1}^{n} s(s+1)R_s(1+i)^{-(s+2)} > 0$$

$$f(0) = \sum_{s=1}^{n} R_s - C_0 \quad ; \quad f(i) \xrightarrow[i \to +\infty]{} -C_0$$

de donde:



y en consecuencia:

$$\begin{array}{lll} \text{Si } i \in (0; i_0) & \Rightarrow \text{VAN} > 0 & \text{Aceptación} \\ \text{Si } i = i_0 & \Rightarrow \text{VAN} = 0 & \text{Indiferencia} \\ \text{Si } i > i_0 & \Rightarrow \text{VAN} < 0 & \text{Rechazo} \end{array}$$

Por tanto, la viabilidad del proyecto queda condicionada al tipo de interés seleccionado para la evaluación.

El método expuesto presenta como principal ventaja su sencillez de cálculo. Entre sus inconvenientes cabe resaltar la dificultad de la elección adecuada del tipo de interés i; da una medida total actualizada que es consecuencia del volumen de la inversión C_0 y de la duración total cuando lo más usual es tener medidas financieras referidas a unidades monetarias y a unidades de tiempo. Lo expuesto en segundo lugar hace que no sea factible comparar proyectos no homogéneos sin su previa homogeneización.

16.3. CRITERIO DEL TANTO INTERNO DE RENDIMIENTO (TIR $= i_e$)

Se define el tanto interno de rendimiento de la inversión, expuesta en 16.1, y se representa por i_e como el valor que hace cero el valor actualizado neto o beneficio total actualizado. Es decir, es el i_e tal que:

$$\text{VAN}\ (i_e) = \text{BTA}\ (i_e) = \sum_{s=1}^{n} (I_s - C_s)(1+i_e)^{-s} - C_0 = \sum_{s=1}^{n} R_s(1+i_e)^{-s} - C_0 = 0 \qquad (89)$$

lo cual equivale a:

$$C_0 = \sum_{s=1}^{n} (I_s - C_s)(1+i_e)^{-s} = \sum_{s=1}^{n} R_s(1+i)^{-s} \qquad (90)$$

En el caso particular $R_s = R$, resulta:

$$\text{VAN}\ (i_e) = \text{BTA}\ (i_e) = R\ \mathbf{a}_{\overline{n}|i_e} - C_0 = 0 \Rightarrow C_0 = R\ \mathbf{a}_{\overline{n}|i_e}$$

y si $n \to \infty$, entonces es:

$$C_0 = R\ \mathbf{a}_{\overline{\infty}|i_e} = R\ \frac{1}{i_e} \Rightarrow i_e = \frac{R}{C_0}$$

El valor i_e proporciona una medida de la rentabilidad anual por unidad monetaria invertida en el proyecto de inversión. Para aceptar o rechazar un proyecto de inversión es necesario comparar i_e con un tipo de interés i, tomando como referencia.

La *regla de decisión*, para aceptar un proyecto de inversión con el criterio TIR, es:

Si $i_e > i \Rightarrow$ Aceptación
Si $i_e = i \Rightarrow$ Indiferencia
Si $i_e < i \Rightarrow$ Rechazo

El cálculo de i_e puede resultar en ocasiones complicado, pues la ecuación

$$\sum_{s=1}^{n} R_s(1+i)^{-s} - C_0 = 0$$

es de grado n, y en teoría podrían existir n soluciones. Dentro del esquema restrictivo en que nos desenvolvemos (inversiones simples) la ecuación tiene una única solución real positiva y coincide con la señalada por i_0 en el gráfico de 16.1.

16.4.—COMPARACION DE LOS CRITERIOS VAN Y TIR PARA UNA INVERSION AISLADA

En el epígrafe anterior se han definido los criterios de decisión del VAN o BTA y del TIR y, como se indicó, ambos criterios proporcionan medidas financieras distintas. Además, para la toma de decisiones, los dos criterios necesitan de la elección de un tipo de interés subjetivo que actúa como referencial.

Si la inversión es simple, ambos criterios son consistentes y permiten dar la misma opinión. En efecto, de las ecuaciones:

$$\text{VAN}\ (i) = \sum_{s=1}^{n} R_s(1+i)^{-s} - C_0$$

$$\text{TIR:}\ \sum_{s=1}^{n} R_s(1+i)^{-s} - C_0 = 0$$

se sigue:

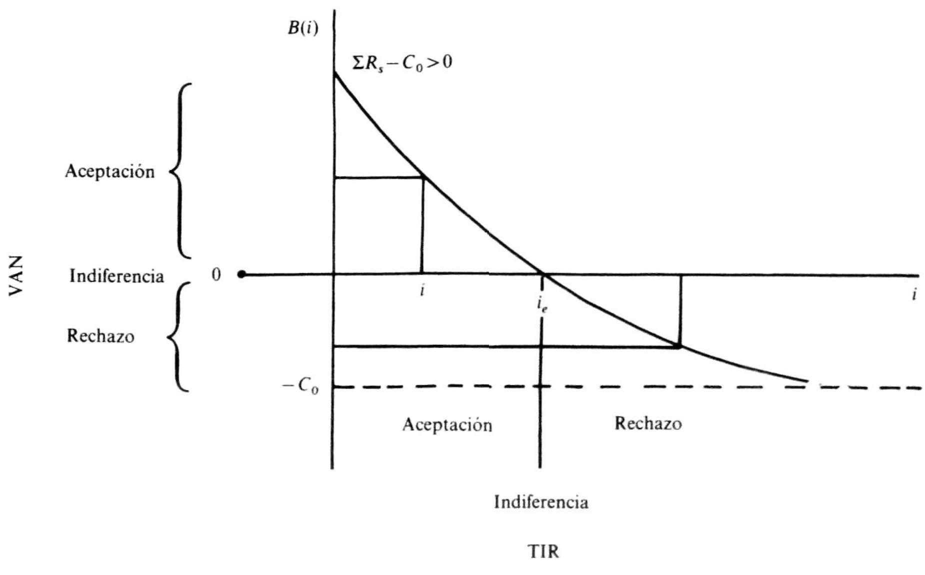
$$\text{VAN (i)} = \sum_{s=1}^{n} R_s(1+i)^{-s} - \sum_{s=1}^{n} R_s(1+i_e)^{-s} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} R_s[(1+i)^{-s} - (1+i_e)^{-s}]$$

Según los distintos valores de i se tienen las siguientes decisiones:

Criterio TIR		Valor de $(1+i)^{-s}-(1+i_e)^{-s}$	Criterio VAN	
Valor de i	Decisión		Valor VAN	Decisión
$i<i_e$	Aceptación	>0	$VAN>0$	Aceptación
$i=i_e$	Indiferencia	$=0$	$VAN=0$	Indiferencia
$i>i_e$	Rechazo	<0	$VAN<0$	Rechazo

Los dos criterios conducen a la misma decisión al existir una correspondencia biyectiva entre las dos zonas de aceptación y también entre las dos zonas de rechazo, como se resalta en el gráfico:



Como se ha dicho anteriormente, ambos métodos tienen la dificultad de la elección subjetiva del tanto de interés i. El mercado financiero es uno de los mercados más imperfectos que existen y se descompone en mercados parciales según la naturaleza y modalidad de cada forma de endeudamiento y de inversión. A nivel de empresa la diversificación de criterios es también amplia y, en muchos casos, la especificación del tanto de interés dependerá de la intuición y buen criterio del decisor. En líneas generales la elección subjetiva podría recaer, por ejemplo, en:

a) El tipo de interés que como coste de financiación se tendría si C_0 se financiase con endeudamiento (préstamo o empréstito).

b) El coste medio del capital de la empresa.

c) El coste medio marginal del capital de la empresa.

d) Combinaciones entre los anteriores.

A pesar de los inconvenientes expuestos, los dos criterios son muy valiosos, se complementan perfectamente y en toda inversión es conveniente calcular ambos. Esta conveniencia se apoya en las distintas mediciones que proporcionan. El valor actualizado neto mide la rentabilidad global de la inversión y el tanto interno de rendimiento proporciona la rentabilidad unitaria de cada unidad monetaria invertida en cada unidad de tiempo.

Los dos criterios analizados implícitamente suponen que los ingresos netos se reinvierten al tipo de interés de la evaluación. El VAN supone la reinversión al tanto i y el TIR lo hace con el valor i_e. En realidad, la reinversión de los flujos netos de caja se efectuará en cada momento de acuerdo con las oportunidades que se tengan, y es muy probable que cada R_s se coloque a un tipo de interés distinto. Además, la problemática es doble, ya que la colocación de los flujos puede ser externa a la empresa o interna. No obstante, conviene hacer las correspondientes previsiones con el fin de afinar la evaluación del proyecto de inversión.

Si se supone que todos los flujos de caja serán invertidos en el mercado financiero, desde su vencimiento hasta el final de la inversión, y el tipo de interés de colocación de los fondos es i_r, el montante disponible después de todas las reinversiones es:

$$M_n = \sum_{s=1}^{n} R_s(1+i_r)^{n-s}$$

En términos efectivos o reales el proyecto inicial ha sido sustituido por un nuevo proyecto con un único desembolso y un único ingreso, tal como se expresa:

$$\begin{array}{ccccc} -C_0 & & & & M_n \\ \hline 0 & 1 & 2\cdots & n-1 & n \end{array}$$

obteniéndose como valores del BTA y del TIR los siguientes:

$$\text{VAN}\ (i;\ i_r) = M_n(1+i)^{-n} - C_0 = \sum_{s=1}^{n} R_s(1+i_r)^{n-s}(1+i)^{-n} - C_0 \qquad (91)$$

$$\text{TIR: } C_0 = M_n(1+i'_e)^{-n} = \sum_{s=1}^{n} R_s(1+i_r)^{n-s}(1+i'_e)^{-n} \tag{92}$$

siendo éstos los que condicionarían la decisión del proyecto de inversión.

17.—ORDENACION DE UN CONJUNTO DE PROYECTOS DE INVERSIONES SIMPLES

Cuando se está en presencia de un conjunto de proyectos de inversión se plantea la necesaria ordenación entre ellos para seleccionar el más idóneo.

La comparación de proyectos de inversión exige que sean homogéneos o comparables, es decir, que exijan iguales desembolsos iniciales y tengan la misma duración.

Como criterios de ordenación pueden utilizarse los vistos en la elección de una inversión, es decir, el BTA y el TIR.

Dado un conjunto de *proyectos de inversión homogéneos*

$$P = (P_1;\ P_2;\ \ldots;\ P_m)$$

de acuerdo con el criterio VAN o BTA el proyecto P_s es efectuable o factible, dado un tipo de interés i si:

$$\text{VAN } (P_s;\ i) = B_s > 0$$

y se dirá que este proyecto es el mejor, entre los h factibles, si:

$$B_s = \text{máx. } (B_1;\ B_2;\ \ldots;\ B_h)$$

Cuando el criterio de ordenación y selección es el TIR, el proyecto P_s es efectuable si:

$$\text{VAN } (P_s;\ i_s) = 0 \Rightarrow i_s > i$$

y se seleccionará el proyecto P_s, entre los h factibles, cuando sea:

$$i_s = \text{máx. } (i_1;\ i_2;\ \ldots,\ i_h)$$

En el caso de una inversión aislada, se ha visto que ambos criterios proporcionan una misma decisión, coincidiendo plenamente en la aceptación o en el rechazo. Pero esta unanimidad de decisiones puede no cumplirse cuando se comparan dos inversiones (homogéneas).

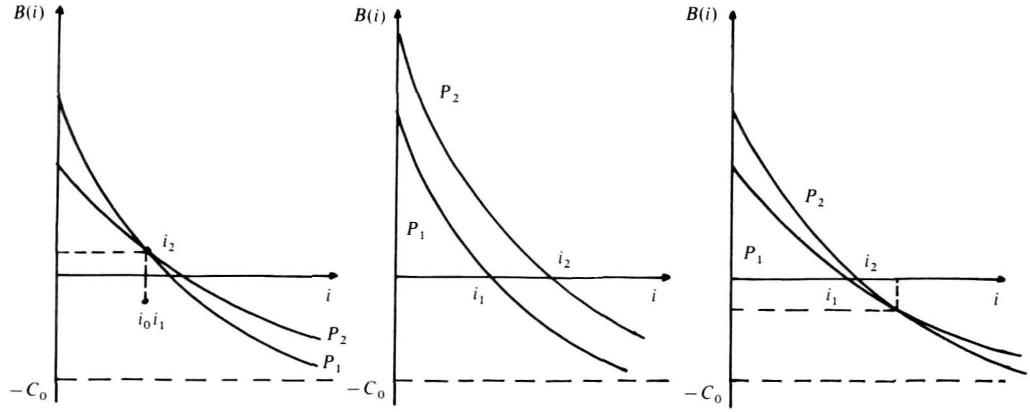
Así, sean dos proyectos P_1 y P_2 cuyas características son:

P_1	$-C_0$	R_{11}	$R_{12}\cdots$	R_{1n}
	0	1	$2\ \cdots n-1$	n

P_2	$-C_0$	R_{21}	$R_{22}\cdots$	R_{2n}
	0	1	$2\ \cdots n-1$	n

siendo sus beneficios totales actualizados B_1 y B_2 y tantos internos de rendimiento i_1 e i_2, respectivamente.

La representación de P_1 y P_2 conduce a alguna de las tres situaciones (A, B, C) que se exponen:



La selección del proyecto adecuado según los distintos valores de i es:

SELECCION DEL PROYECTO IDONEO

Valores de i	Caso A		Caso B		Caso C	
	VAN	TIR	VAN	TIR	VAN	TIR
$0<i<i_0$	P_1	P_2	P_2	P_2	P_2	P_2
$i=i_0$	$P_1=P_2$	P_2	P_2	P_2	P_2	P_2
$i_0<i\leqslant i_1$	P_2	P_2	P_2	P_2	P_2	P_2
$i_1<i<i_2$	P_2	P_2	P_2	P_2	P_2	P_2
$i\geqslant i_2$	—	—	—	—	—	—

La ordenación de P_1 y P_2 en los casos B y C siempre es la misma; pero en el caso A el diagnóstico entre el VAN y el TIR no coincide cuando $0<i\leqslant i_0$ y para $i>i_0$ la coincidencia es total. El valor i_0, que presenta el corte de los gráficos (frontera de las discrepancias), se denomina tasa de Fisher y sólo existe cuando coinciden las tres siguientes circunstancias:

1.ª Si $\sum_{s=1}^{n} R_{1s} > \sum_{s=1}^{n} R_{2s} \Rightarrow B_1(i=0) > B_2(1=0)$.

2.ª $B_1(i_0) = B_2(i_0) > 0$.

3.ª $i \in (0; i_0)$.

Cuando los *proyectos de inversión no son homogéneos*, bien porque coinciden las cuantías de los desembolsos iniciales, las duraciones o ambas, se deberá plantear la correspondiente homogeneización, lo cual exige definir las siguientes operaciones entre inversiones:

1) *Suma de inversiones*

Dadas las inversiones

$$P_1 = (C_{01};\ R_{1s};\ n_1) \quad ; \quad P_2 = (C_{02};\ R_{2s};\ n_2)$$

se define la suma de inversiones como una inversión P tal que

$$P = P_1 + P_2 = [C_0 = C_{01} + C_{02};\ R_s = R_{1s} + R_{2s};\ n = \text{máx. } (n_1;\ n_2)]$$

2) *Producto de una inversión por un número real positivo*

Dados $P_1 = (C_{01};\ R_{1s};\ n_1)$ y el número real $k < 0$, se define la inversión producto por:

$$P = kP_1 = (C_0 = kC_{01};\ R_s = kR_{1s};\ n = n_1)$$

3) *Combinación lineal de inversiones*

Dados P_1 y P_1 y los números reales k_1 y k_2 se define la inversión combinación lineal como:

$$P = k_1 P_1 + K_2 P_2 = [C_0 = k_1 C_{01} + k_2 C_{02};\ R_s = k_1 R_{1s} + k_2 R_{2s};\ n = \text{max. } (n_1;\ n_2)]$$

Las operaciones definidas hacen factible establecer homogeneizaciones y, en consecuencia, poder comparar inversiones cuando inicialmente no era posible.

El *criterio del tanto interno de rendimiento (TIR)* satisface las siguientes propiedades:

1) Si dos inversiones P_1 y P_2 tienen el mismo TIR, el de la inversión suma será el mismo.

$$B(P_1;\ i_e) = B(P_2;\ i_e) \Rightarrow B(P = P_1 + P_2;\ i_e) = 0$$

2) El TIR de $P=kP_1$ es el mismo que el de P_1.
Si $B(P_1;\ i_e)=0 \Rightarrow B(kP_1;\ i_e)=0$.

3) Si $B(P_1;\ i_e)=B(P_2;\ i_e)=0 \Rightarrow B(P=k_1P_1+k_2P_2;\ i_e)=0$.

Estas propiedades permiten afirmar que para comparar inversiones con el criterio TIR no es necesario plantear la homogeneización porque el resultado es invariante. Por tanto, dado un conjunto de proyectos de inversión, homogéneos o no homogéneos, la ordenación entre los tantos internos será la que determinará la ordenación entre los proyectos y la selección del óptimo.

El *criterio del valor actualizado neto (VAN) o beneficio total actualizado (BTA) satisface las siguientes propiedades:*

1) $B(P=P_1+P_2;\ i)=B(P_1;\ i)+B(P_2;\ i)$.
2) $B(P=kP_1;\ i)=kB(P_1;\ k)$.
3) $B(P=k_1P_1+k_2P_2;\ i)=k_1B(P_1;\ i)+k_2B(P_2;\ i)$.

Este criterio exige la homogeneización porque, como resaltan las propiedades, el beneficio depende del volumen o tamaño de la inversión.

18.—ELECCION Y SELECCION DE INVERSIONES EN PRESENCIA DE INFLACION

En la sección I de esta parte, epígrafes 1 al 6 se desarrolla el análisis metodológico del tratamiento de la inflación en las operaciones financieras, el cual es trasladable, con las correspondientes adaptaciones, al caso de las operaciones de inversión.

El tratamiento comprenderá desde las inversiones elementales hasta las inversiones compuestas o generales y además de estudiar la incidencia de la inflación se considerarán dos casos: *a*) Ingresos y desembolsos insensibles a la inflación, y *b*) Ingresos y desembolsos reaccionan con la inflación. El primero de ellos es equivalente al estudio de los efectos de la depreciación monetaria en las operaciones financieras y el segundo guarda paralelismo al caso de la previsión de la depreciación.

18.1. INVERSION ELEMENTAL DE UN SOLO PERIODO

En proyecto de inversión elemental comprende un único desembolso en el origen y un único ingreso al final. Además, la duración considerada es un año. El esquema de la inversión es:

$$\begin{array}{ccc} C_0 & & I_1 \\ \vdash & \text{———————} & \dashv \\ 0 & & 1 \end{array}$$

En ausencia de inflación, elegido un tipo de interés i, se decía que:

$$VAN(i)=I_1(1+i)^{-1}-C_0 \gtrless 0 \Rightarrow \text{Aceptación o rechazo}$$

$$TIR: I_1(1+i_e)^{-1}-C_0=0 \Rightarrow i_e=\frac{I_1-C_0}{C_0} \gtrless i \Rightarrow \text{Aceptación o rechazo}$$

en donde i es tipo de interés monetario, el valor i_e del TIR es un tanto efectivo monetario y las unidades monetarias C_0 e I_1 representan poderes adquisitivos distintos.

Si la tasa de inflación del período es α, el único ingreso I_1 equivale, en unidades del origen, al valor deflactado $I'_1=I_1(1+\alpha)^{-1}$, por lo que seleccionado un tipo de interés real r los valores del VAN y TIR en un contexto con inflación son:

$$VAN\ (\alpha;\ r)=BTA\ (\alpha;\ r)=I'_1(1+r)^{-1}-C_0=I_1(1+\alpha)^{-1}(1+r)^{-1}-C_0 \tag{93}$$

$$TIR: VAN\ (\alpha;\ r_e)=I'_1(1+r_e)^{-1}-C_0=I_1(1+\alpha)^{-1}(1+r_e)^{-1}-C_0=0 \tag{94}$$

El criterio de decisión será:

VAN (α; r) = BTA (α; r)		TIR: r_e	
VAN > 0	Aceptación	$r_e > r$	Aceptación
VAN < 0	Rechazo	$r_e < r$	Rechazo

Si en la expresión de TIR se despeja convenientemente se obtiene:

$$r_e=\frac{I'_1}{C_0}-1=\frac{1+i_e}{1+\alpha}-1=\frac{i_e-\alpha}{1+\alpha} \tag{95}$$

y así mismo resulta:

$$i_e=\alpha+r_e+r_e\alpha \tag{96}$$

es decir, los valores del TIR, real (r_e) y monetario (i_e), dada la tasa de inflación α, son equivalentes. De igual forma, si en un contexto monetario se toma el tipo de interés subjetivo i, el valor equivalente en un contexto real será el valor r que satisface:

$$r=\frac{i-\alpha}{1+\alpha} \Leftrightarrow i=\alpha+r+r\alpha$$

Si los ingresos reaccionan con la inflación a una tasa β, el ingreso monetario esperado será:

$$I_1^*=I_1(1+\beta)$$

el cual equivale al real

$$I'_1 = I_1^*(1+\alpha)^{-1} = I_1 \frac{1+\beta}{1+\alpha}$$

de donde los valores del VAN y TIR serán:

$$\text{VAN } (\alpha;\ \beta;\ r) = I_1^*(1+\alpha)^{-1}(1+r) - C_0 = I_1 \frac{1+\beta}{1+\alpha}(1+r)^{-1} - C_0 \qquad (97)$$

$$\text{TIR: } I_1^*(1+\alpha)^{-1}(1+r_e) - C_0 = I_1 \frac{1+\beta}{1+\alpha}(1+r_e)^{-1} - C_0 = 0 \qquad (98)$$

y, operando en esta última ecuación, resulta:

$$1+r_e = \frac{I_1}{C_0}\frac{1+\beta}{1+\alpha} = (1+i_e)\frac{1+\beta}{1+\alpha}$$

$$1+i_e = (1+r_e)\frac{1+\alpha}{1+\beta}$$

$$r_e = (1+i_e)\frac{1+\beta}{1+\alpha} - 1 \gtrless i_e \quad \text{si} \quad \beta \gtrless \alpha \qquad (99)$$

El planteamiento expuesto se continúa en proyectos más generales. Se estudian los proyectos de inversión de duración n años siguientes:

a) Unico desembolso - único ingreso.
b) Varios desembolsos - varios ingresos.

En ambos supuestos la metodología a seguir será idéntica a la vista en el caso elemental y consistirá, por tanto, en:

1.º Analizar el proyecto en su forma clásica o monetaria.

2.º Introducir la inflación y suponer que los ingresos y desembolsos no reaccionan con ella.

3.º Introducir la inflación y suponer que los ingresos y desembolsos reaccionan con ella.

Asimismo, conviene precisar que todos los conceptos vistos anteriormente para tomar decisiones de inversión en el caso de alternativa total (única inversión) como en el de ordenación y selección de proyectos (varias alternativas), son trasladables al actual análisis.

18.2.—INVERSION ELEMENTAL DE n PERIODOS

Esta inversión queda descrita por:

$$\begin{array}{ccccc} -C_0 & & & & I_n \\ \hline 0 & 1 & 2\cdots n-1 & & n \end{array}$$

1) *Planteamiento clásico o monetario*

Su valores son:

$$\text{VAN (i)} = \text{BTA (i)} = \mathrm{I_n}(1+\mathrm{i})^{-n} - \mathrm{C_0}$$

$$\text{TIR: } \mathrm{I_n}(1+\mathrm{i_e})^{-n} - \mathrm{C_0} = 0 \Rightarrow \mathrm{i_e} = \left(\frac{\mathrm{I_n}}{\mathrm{C_0}}\right)^{1/n} - 1$$

2) *Introducción de inflación: Ingresos no reaccionan con la inflación*

Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son tasas de inflación respectivas de los períodos 1, 2, ..., n, el ingreso $\mathrm{I_n}$ en unidades monetarias de origen es:

$$\mathrm{I'_n} = \mathrm{I_n} \prod_{h=1}^{n} (1+\alpha_h)^{-1} = \mathrm{I_n}(1+\alpha_m)^{-n}$$

siendo α^m la tasa media de inflación de los n períodos.

Los valores de VAN y TIR son:

$$\text{VAN } (\alpha_s; \mathrm{r}) = \text{BTA } (\alpha_s; \mathrm{r}) = \mathrm{I'_n}(1+\mathrm{r})^{-n} - \mathrm{C_0} = \mathrm{I_n}(1+\alpha_m)^{-n}(1+\mathrm{r})^{-n} - \mathrm{C_0} \tag{100}$$

$$\text{TIR: } \mathrm{I'_n}(1+\mathrm{r_e})^{-n} - \mathrm{C_0} = \mathrm{I_n}(1+\alpha_m)^{-n}(1+\mathrm{r_e})^{-n} - \mathrm{C_0} = 0$$

El valor del TIR real es:

$$\mathrm{r_e} = \left(\frac{\mathrm{I'_n}}{\mathrm{C_0}}\right)^{1/n} - 1 = \frac{1+\mathrm{i_e}}{1+\alpha_m} - 1 = \frac{\mathrm{i_e} - \alpha_m}{1+\alpha_m} \tag{101}$$

Si la inflación es constante, las expresiones anteriores son:

$$\text{VAN } (\alpha; \mathrm{r}) = \text{BTA } (\alpha; \mathrm{r}) = \mathrm{I_n}(1+\alpha)^{-n}(1+\mathrm{r})^{-n} - \mathrm{C_0} \tag{100'}$$

$$\text{TIR: } \mathrm{r_e} = \frac{\mathrm{i_e} - \alpha}{1+\alpha} \tag{101'}$$

3) *Introducción de inflación: Ingresos reaccionan con la inflación*

Si las tasas de reacción ante la inflación son $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ el ingreso monetario esperado es:

$$I_n^* = I_n \prod_{h=1}^{n} (1+\beta_h) = I_n(1+\beta_m)^n$$

siendo β_m la tasa de reacción media anual.

Los valores del VAN y TIR son:

$$\text{VAN } (\alpha_s;\ \beta_s;\ r) = I_n^*(1+\alpha_m)^{-n}(1+r)^{-n} - C_0 = I_n\left(\frac{1+\beta_m}{1+\alpha_m}\right)^n (1+r)^{-n} - C_0 \tag{102}$$

$$\text{TIR: } I_n\left(\frac{1+\beta_m}{1+\alpha_m}\right)^n (1+r_e)^{-n} - C_0 = 0 \Rightarrow r_e = (1+i_e)\frac{1+\beta_m}{1+\alpha_m} - 1 \gtrless i_e \quad \text{si} \quad \beta_m \gtrless \alpha_m \tag{103}$$

Si las tasas de inflación y reacción de ingresos son constantes, es decir, es $\alpha_s = \alpha$ y $\beta_s = \beta$, resulta:

$$\text{VAN } (\alpha;\ \beta;\ r) = I_n\left(\frac{1+\beta}{1+\alpha}\right)^n (1+r)^{-n} - C_0 \tag{102'}$$

$$\text{TIR: } r_e = (1+i_e)\frac{1+\beta}{1+\alpha} - 1 \gtrless i_e \quad \text{si} \quad \beta \gtrless \alpha \tag{103'}$$

18.3.—INVERSION GENERAL

Sea el proyecto de inversión cuyos desembolsos e ingresos son:

$$\begin{array}{cccccccc} C_0 & C_1 & C_2 \cdots & & C_s \cdots & & C_n \\ \hline 0 & 1 & 2 \cdots & s-1 & s \cdots & n-1 & n \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & I_1 & I_2 \cdots & & I_s \cdots & & I_n \\ \hline 0 & 1 & 2 \cdots & s-1 & s \cdots & n-1 & n \end{array}$$

y su equivalente de ingresos netos

$$\begin{array}{cccccccc} -C_0 & R_1 & R_2 \cdots & & R_s \cdots & & R_n \\ \hline 0 & 1 & 2 \cdots & s-1 & s \cdots & n-1 & n \end{array}$$

con $R_s = I_s - C_s$.

1) *Planteamiento clásico o monetario*

Sus valores son:

$$VAN\ (i) = BTA\ (i) = \sum_{s=1}^{n} R_s(1+i)^{-s} - C_0$$

$$TIR\colon \sum_{s=1}^{n} R_s(1+i_e)^{-s} - C_o = 0 \Rightarrow i_e$$

2) *Introducción de la inflación: Ingresos y desembolsos no reaccionan con la inflación*

Los ingresos monetarios del período s son los mismos $R_s = I_s - C_s$ del supuesto anterior los cuales equivalen, en términos reales, a:

$$R'_s = R_s \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h)^{-1}$$

y resulta:

$$VAN\ (\alpha_s;\ r) = \sum_{s=1}^{n} R'_s(1+r)^{-s} - C_0 = \sum_{s=1}^{n} R_s(1+r)^{-s} \prod_{h=1}^{s} (1+i_h)^{-1} - C_0 \qquad (104)$$

$$TIR\colon \sum_{s=1}^{n} R'_s(1+r_e)^{-s} - C_0 = 0 \Rightarrow i_e = f(R_s;\ \alpha_s;\ n) \qquad (105)$$

En el caso particular de ser constantes los ingresos netos y las tasas de inflación, es decir, $R_s = R$ y $\alpha_s = \alpha$, las expresiones que se tienen son:

$$V(\alpha;\ r) = BTA\ (\alpha;\ r) = \sum_{s=1}^{n} R(1+\alpha)^{-s}(1+r)^{-s} - C_0 = R\ \mathbf{a}_{\overline{n|}z} - C_0 \qquad (104')$$

$$TIR\colon \sum_{s=1}^{n} R(1+\alpha)^{-s}(1+r_e)^{-s} - C_0 = 0 \Rightarrow C_0 = R\ \mathbf{a}_{\overline{n|}z_e} \qquad (105')$$

con $(1+z) = (1+\alpha)(1+r)$ y $(1+z_e) = (1+\alpha)(1+r_e)$

3) *Introducción de la inflación: Ingresos y desembolsos reaccionan con la inflación*

Si las tasas de reacción de los ingresos ante la inflación son $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ y las de los desembolsos $\gamma, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ (iguales o distintas que las anteriores) se tiene:

$$I_s^* = I_s \prod_{h=1}^{s} (1+\beta_h) \quad ; \quad C_s^* = C_s \prod_{h=1}^{s} (1+\beta_h) \quad ; \quad R_s^* = I_s^* - C_s^*$$

de donde:

$$\text{VAN } (\alpha_s;\ \beta_s;\ \gamma_s;\ r) = \sum_{s=1}^{n} R_s^*(1+r)^{-s} \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h)^{-1} - C_0 =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \left[I_s \prod_{h=1}^{s} \frac{1+\beta_h}{1+\alpha_h} - C_s \prod_{h=1}^{s} \frac{1+\gamma_h}{1+\alpha_h} \right] (1+r)^{-s} - C_0 \tag{106}$$

$$\text{TIR: } \sum_{s=1}^{n} R_s^*(1+r_e)^{-s} \prod_{h=1}^{s} (1+\alpha_h)^{-1} - C_0 = 0 \Rightarrow i_e \tag{107}$$

En el caso particular de ser constantes $\beta_s = \beta$; $\gamma_s = \gamma$; $\alpha_s = \alpha$, las expresiones anteriores toman la siguiente forma:

$$\text{VAN } (\alpha;\ \beta;\ \gamma;\ r) = \sum_{s=1}^{n} R_s^*(1+\alpha)^{-s}(1+r)^{-s} - C_0 =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \left[I_s \left(\frac{1+\beta}{1+\alpha}\right)^s - C_s \left(\frac{1+\gamma}{1+\alpha}\right)^s \right] (1+r)^{-s} - C_0 \tag{106'}$$

$$\text{TIR: } \sum_{s=1}^{n} \left[I_s \left(\frac{1+\beta}{1+\alpha}\right)^s - C_s \left(\frac{1+\gamma}{1+\alpha}\right)^s \right] (1+r_e)^{-s} - C_0 = 0 \tag{107'}$$

y si además es $I_s = I$ y $C_s = C$, entonces queda:

$$\text{VAN } (\alpha;\ \beta;\ \gamma;\ r) = \sum_{s=1}^{n} I \left[\frac{(1+\alpha)(1+r)}{1+\beta} \right]^{-s} - \sum_{s=1}^{n} C \left[\frac{(1+\alpha)(1+r)}{1+\gamma} \right]^{-s} - C_0 =$$

$$= I\, \mathbf{a}_{\overline{n}|x} - C\, \mathbf{a}_{\overline{n}|y} - C_0 = \tag{108}$$

$$= A_{[I(1+\beta);\ 1+\beta]\overline{n}|z} - A_{[C(1+\gamma);\ 1+\gamma]\overline{n}|z} - C_0$$

con

$$1+x = \frac{(1+\alpha)(1+r)}{1+\beta} \quad ; \quad 1+y = \frac{(1+\alpha)(1+r)}{1+\gamma} \quad ; \quad 1+z = (1+\alpha)(1+r)$$

La expresión del cálculo del TIR queda así:

$$C_0 = A_{[I(1+\beta);\ 1+\beta]\overline{n}|z_e} - A_{[C(1+\gamma);\ 1+\gamma]\overline{n}|z_e} \tag{109}$$

siendo:

$$1+z_e=(1+\alpha)(1+r_e) \Rightarrow r_e=\frac{z_e-\alpha}{1+\alpha}$$

19.—APLICACIONES

Supuesto número 1

Dados los proyectos de inversión A, B, C y D, cuyas características financieras son:

Proyecto	Desembolso inicial	Duración en años	Ingresos netos anuales
A	2.000	4	720
B	3.000	6	810
C	4.000	8	900
D	6.000	6	1.600

Y para un tipo de interés i = 14 %, 15 %, 15,5 %, 16 %, 16,5 %, determinar si los proyectos son aceptables de acuerdo con:

1.° Plazo de recuperación.

2.° Beneficio total actualizado.

3.° Tanto interno de rendimiento.

4.° Si los ingresos netos anuales se colocan en el mercado financiero a una tasa del i = 13 %, 16 %, 18 %, hasta el final de la inversión, ¿cuál sería la solución de los apartados 1.° y 2.° para los tipos de interés i = 15 %, 16 %?

Solución

1.° *Plazo de recuperación*

Para determinar el número de períodos necesarios para recuperar el desembolso inicial conviene saber si los ingresos netos anuales se cobran al final del año o vencen de manera uniforme a través de él. En este segundo caso el plazo sería el valor que teóricamente resulta de aplicar

$$p=\frac{C_0}{R}$$

y se tiene:

$$p_a = \frac{2.000}{720} = 2{,}78 \quad ; \quad p_b = \frac{3.000}{810} = 3{,}70$$

$$p_c = \frac{4.000}{900} = 4{,}44 \quad ; \quad p_d = \frac{6.000}{1.600} = 3{,}75$$

Si los vencimientos de los ingresos son a fin de año, será necesario redondear por exceso los resultados, ya que es preciso esperar al vencimiento próximo. Entonces resulta:

$$p_a = 3 \quad ; \quad p_b = 4 \quad ; \quad p_c = 5 \quad ; \quad p_d = 4$$

2.º *Beneficio total actualizado*

El beneficio total actualizado al tanto i de cada inversión es:

$$B_a = 720\ \mathbf{a}_{\overline{4}|i} - 2.000 \quad ; \quad B_c = 900\ \mathbf{a}_{\overline{8}|i} - 4.000$$

$$B_b = 810\ \mathbf{a}_{\overline{6}|i} - 3.000 \quad ; \quad B_d = 1.600\ \mathbf{a}_{\overline{6}|i} - 6.000$$

y al dar valores a i resulta:

TIPO DE INTERES					
BTA (i)	i = 14 %	i = 15 %	i = 15,5 %	i = 16 %	i = 16,5 %
B	97,9	55,6	35,0	14,7	−5,2
B	149,8	65,4	24,6	−15,4	−54,5
B	175,0	38,6	−26,9	−90,8	−152,9
B	221,9	55,2	−25,5	−104,4	−181,7

Obsérvese lo relativo que es la aceptación o rechazo de las inversiones, pues depende del valor de i. Para i = 14 % ó 15 % todas son aceptables; para i = 16,5 % todas son rechazables; para i = 15,5 % son aceptables A y B y rechazables C y D y para i = 15 % sólo es aceptable A.

3.º *Tanto interno de rendimiento*

Las ecuaciones de los TIR y sus soluciones son:

$$2.000 = \quad 720\ \mathbf{a}_{\overline{4}|i_a} \Rightarrow i_a = 16{,}33\ \%$$

$$3.000 = \quad 810\ \mathbf{a}_{\overline{6}|i_b} \Rightarrow i_b = 15{,}81\ \%$$

$$4.000 = \quad 900\ \mathbf{a}_{\overline{8}|i_a} \Rightarrow i_c = 15{,}29\ \%$$

$$6.000 = 1.600\ \mathbf{a}_{\overline{6}|i_d} \Rightarrow i_d = 15{,}34\ \%$$

Es inmediato comprobar que la aceptación o el rechazo es idéntica al BTA.

4.º *Inclusión de tasas de reinversión*

Los montantes disponibles al final de cada una de las inversiones son:

Proyecto	MONTANTE		
	M_1 $i=13\ \%$	M_2 $i=16\ \%$	M_3 $i=18\ \%$
A	3.491,9	3.647,9	3.755,0
B	6.741,4	7.271,8	7.648,0
C	11.481,5	12.816,1	13.794,3
D	13.316,3	14.364,0	15.107,1

Para calcular los BTA y los TIR estos montantes sustituyen a las rentas de ingresos netos anteriores, por lo que las ecuaciones del BTA y del TIR son:

$$BTA = M_n(1+i)^{-n} - C_0 \quad ; \quad C_0(1+i_e)^n = M_n \Rightarrow i_e = \left(\frac{M_n}{C}\right)^{1/n} - 1$$

y su aplicación para las combinaciones de $i_r = 13$, 16, 18 %, con $i = 15$, 16 % da los valores:

Proyectos	BTA (15 %)			BTA (16 %)			TIR (%)		
	M_1	M_2	M_3	M_1	M_2	M_3	M_1	M_2	M_3
A	−3,5	85,7	146,9	−71,5	14,7	73,9	14,95	16,21	17,16
B	−85,5	143,8	306,4	−233,0	−15,3	139,1	14,45	15,90	16,88
C	−246,7	189,6	509,4	−491,9	−91,8	207,6	14,09	15,67	16,74
D	−243,0	209,9	531,2	−534,4	−104,4	200,6	14,21	15,66	16,64

Obsérvese que con tasas de reinversión del 13 % ningún proyecto es aceptable, mientras que con tasas de reinversión del 18 % todos los proyectos son realizables.

Supuesto número 2

Clasificar los proyectos del supuesto número 1 según los criterios del BTA y del TIR si el tipo de interés elegido es i = 15,50 %.

Solución

1.º Para el tipo de interés del 15,50 % se tiene:

Proyecto	TIR	Ordenación
A	$16{,}33 > 15{,}50 \Rightarrow$ Aceptación	1.º
B	$15{,}81 > 15{,}50 \Rightarrow$ Aceptación	2.º
C	$15{,}29 < 15{,}50 \Rightarrow$ Rechazo	—
D	$15{,}34 < 15{,}50 \Rightarrow$ Rechazo	—

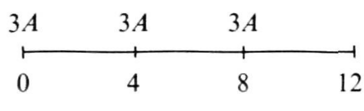
2.º Para el BTA con i = 15,50 % se tiene:

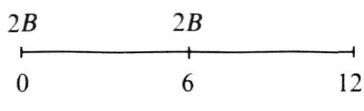
Proyecto	BTA (15,50 %)		
A	35,0	>0	Aceptación
B	24,6	>0	Aceptación
C	$-26{,}9$	<0	Rechazo
D	$-25{,}5$	<0	Rechazo

Los proyectos aceptados no son homogéneos, por lo que hay que proceder a su homogeneización considerando una inversión total de cuantía C_0 y duración n tal que:

$$C_0 = \text{m.c.m. } (2.000;\ 3.000) = 6.000$$
$$n = \text{m.c.m. } (4;\ 6) = 12 \text{ años}$$

Los proyectos a desarrollar y sus renovaciones en el intervalo total son:





El beneficio total actualizado de la cadena de proyectos tipo A es:

$$BTA_a = 3B_a[1+(1+i)^{-4}+(1+i)^{-8}] = 3B_a \frac{a_{\overline{12}|i}}{a_{\overline{4}|i}} = 3 \times 35 \frac{a_{\overline{12}|0,155}}{a_{\overline{4}|0,155}} = 197,16$$

y el de la cadena de proyectos tipo B asciende a:

$$BTA_b = 2B_b[1+(1+i)^{-6}] = 2B \frac{a_{\overline{12}|i}}{a_{\overline{6}|i}} = 2 \times 24,6 \frac{a_{\overline{12}|0,155}}{a_{\overline{6}|0,155}} = 69,92$$

y, en consecuencia, el proyecto preferible es el A.

Supuesto número 3

Dados los proyectos de inversión A, B, C, definidos por las siguientes condiciones:

Proyectos	Desembolso inicial	Ingresos netos				
		1	2	3	4	5
A	5.000	1.700	1.700	1.700	1.700	700
B	8.000	3.000	3.000	3.000	1.000	1.500
C	10.000	2.000	2.000	2.000	5.000	5.700

Si el tipo de interés de evaluación del proyecto es $i = 12\ \%$, determinar:

1.º Si los proyectos son aceptables de acuerdo con los criterios VAN y TIR.

2.º Seleccionar los proyectos de acuerdos con los criterios VAN y TIR.

Solución

1.º Aceptación o rechazo con los criterios BTA y TIR.

Los valores actualizados netos de cada uno de los tres proyectos son:

$$B_a = -5.000 + 1.700\ a_{\overline{4}|0,12} + 700(1+0,12)^{-5} = 560,7 > 0$$

$$B_b = -8.000 + 3.000\ a_{\overline{3}|0,12} + 1.000(1+0,12)^{-4} + 1.500(1+0,12)^{-5} = 692,1 > 0$$

$$B_c = -10.000 + 2.000\ a_{\overline{3}|0,12} + 5.000(1+0,12)^{-4} + 5.700(1+0,12)^{-5} = 1.215,6 > 0$$

y, en consecuencia, son factibles por ser positivos.

Las ecuaciones de los TIR y sus soluciones son:

$$5.000 = 1.700\ \mathbf{a}_{\overline{4}|i_a} + \quad 700(1+i_a)^{-5} \qquad \Rightarrow i_a = 16{,}84\ \%$$

$$8.000 = 3.000\ \mathbf{a}_{\overline{3}|i_b} + 1.000(1+i_b)^{-4} + 1.500(1+i_b)^{-5} \Rightarrow i_b = 16{,}02\ \%$$

$$10.000 = 2.000\ \mathbf{a}_{\overline{3}|i_c} + 5.000(1+i_c)^{-4} + 5.700(1+i_c)^{-5} \Rightarrow i_c = 15{,}89\ \%$$

al ser i_a, i_b, $i_c > 12\ \%$ se aceptan los tres proyectos.

2.° Selección de los proyectos con los criterios TIR y VAN.

a) *Criterio TIR*

Basta ordenar los tantos internos para efectuar la selección, pues este criterio no exige la homogeneización, ya que ésta no altera los resultados.

Como $i_a > i_b > i_c$ el mejor proyecto es el A seguido del B y por último el C.

b) *Criterio VAN*

Al ser las inversiones de la misma duración y diferente cuantía no son directamente comparables y es preciso establecer el m.c.m. de las cuantías para homogeneizarlas.

Este es:

$$\text{m.c.m. } (5.000;\ 8.000;\ 10.000) = 40.000$$

efectuándose con este importe 8, 5 y 4 proyectos respectivamente.

Los beneficios totales actualizados de la homogeneización son:

$$BTA_a = 8B_a = 4.485{,}6$$
$$BTA_b = 8B_b = 3.460{,}5$$
$$BTA_c = 4B_c = 4.862{,}4$$

y proporciona la siguiente ordenación: Mejor proyecto el C, seguido del A y, por último, el B.

Al ser esta ordenación distinta que la del TIR, existirá una tasa de Fisher y en concreto se cortarán las curvas del proyecto A con la del C y además también existirá otro cruce entre los proyectos B y C.

La tasa de Fisher entre A y C es la solución de la ecuación

$$8B_a(i_0) = 4B_c(i_0) \Rightarrow 2B_a(i_0) = B_c(i_0)$$

es decir:

$$\begin{aligned} & -10.000+3.400\ \mathbf{a}_{\overline{4}|i_0}+1.400(1+i_0)^{-5}= \\ & =-10.000+2.000\ \mathbf{a}_{\overline{3}|i_0}+5.000(1+i_0)^{-4}+5.700(1+i_0)^{-5} \end{aligned}$$

y su valor es:

$$i_0=13,10\ \%$$

La tasa de Fisher entre B y C es la solcuión de la ecuación

$$5B_b(i_0)=4B_c(i_0)$$

o sea:

$$\begin{aligned} & -40.000+15.000\ \mathbf{a}_{\overline{3}|i_0}+5.000(1+i_0)^{-4}+7.500(1+i_0)^{-5}= \\ & =-40.000+8.000\ \mathbf{a}_{\overline{3}|i_0}+20.000(1+i_0)^{-4}+22.800(1+i_0)^{-5} \end{aligned}$$

y su solución es:

$$i_0=15,61\ \%$$

Como la tasa de Fisher es la frontera del cambio de opinión y apartir de ella coinciden los diagnósticos del TIR y del VAN, el cuadro de ordenación y decisión es:

	ORDENACION					
		BTA (i)				
Proyecto	TIR	$i<13,10$	$i=13,10$	$13,10<i<15,61$	$i=15,61$	$i>15,61$
A	1.º	2.º	1.º = 2.º	1.º	1.º	1.º
B	2.º	3.º	3.º	3.º	2.º = 3.º	2.º
C	3.º	1.º	1.º = 2.º	2.º	2.º = 3.º	3.º

Supuesto número 4

Sean los proyectos de inversión cuyas características financieras son:

Proyecto	**Desembolso inicial**	**Ingresos anuales**	**Desembolsos anuales**	**Duración**
I	**2.000**	**845**	**300**	**5**
II	**3.000**	**1.480**	**500**	**4**
III	**4.000**	**1.360**	**700**	**10**

Los ingresos y desembolsos han sido previsto teniendo en cuenta una tasa de inflación del 4 % anual y el tipo de interés real de evaluación es r = 5 %.

Determinar en base al criterio del tanto interno de rendimiento real:

1.º Si las inversiones son factibles y seleccionar la mejor.

2.º Si la tasa de inflación alcanza el 6 % anual, en lugar de la prevista inicialmente, ¿cuál sería la contestación al punto anterior si:

a) No hay reacción en ingresos y desembolsos.

b) Los ingresos se incrementan un 2 % anual y los gastos lo hacen un 1,50 % anual.

Solución

1.º Seleccionar las inversiones con el TIR real r = 5 %.

Como $R_s = I_s - C_s$ es constante y también es $\alpha = 4\%$ constante, las ecuaciones para calcular el TIR monetario z_e y el TIR real r_e son:

$$C_0 = R\, \mathbf{a}_{\overline{n}|z_e} \quad ; \quad r_e = \frac{z_e - \alpha}{1 + \alpha}$$

Sustituyendo valores se tiene:

$$2.000 = 545\, \mathbf{a}_{\overline{5}|z_1} \Rightarrow z_1 = 0{,}1140 \Rightarrow r_1 = \frac{0{,}1140 - 0{,}04}{1 + 0{,}04} = 0{,}0712$$

$$3.000 = 980\, \mathbf{a}_{\overline{4}|z_2} \Rightarrow z_2 = 0{,}1163 \Rightarrow r_2 = \frac{0{,}1163 - 0{,}04}{1 + 0{,}04} = 0{,}0734$$

$$4.000 = 660\, \mathbf{a}_{\overline{10}|z_3} \Rightarrow z_3 = 0{,}1032 \Rightarrow r_3 = \frac{0{,}1032 - 0{,}04}{1 + 0{,}04} = 0{,}0608$$

Las tres inversiones son factibles, pues superan el r = 0,05 y la mejor es la segunda.

2.º Se incrementa la tasa de inflación.

a) No hay reacción en ingresos y desembosos.

Los TIR monetarios serán los mismos que en el caso anterior, pero los reales son:

$$r_1 = \frac{0{,}1140 - 0{,}06}{1{,}06} = 0{,}0509 \ ; \ r_2 = \frac{0{,}1163 - 0{,}06}{1{,}06} = 0{,}0531 \ ; \ r_3 = \frac{0{,}1032 - 0{,}06}{1{,}06} = 0{,}0408$$

Se rechaza la tercera y se aceptan la primera y la segunda, siendo ésta la mejor.

b) Los ingresos aumentan un 2 % anual y los desembolsos el 1,5 % anual.

La fórmula (109) aplicada a cada uno de los proyectos da:

$$2.000 = A_{(861,9;\ 1,02)\overline{5|}z_1} - A_{(304,5;\ 1,015)\overline{5|}z_1} \Rightarrow z_1 = 0,138116 \Rightarrow r_1 = 0,073694$$

$$3.000 = A_{(1.509,6;\ 1,02)\overline{4|}z_2} - A_{(507,5;\ 1,015)\overline{4|}z_2} \Rightarrow z_2 = 0,141380 \Rightarrow r_2 = 0,076774$$

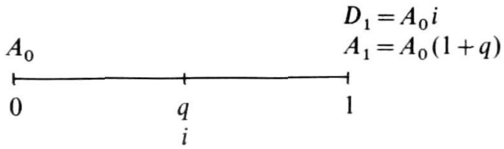
$$4.000 = A_{(1.387,2;\ 1,02)\overline{10|}z_3} - A_{(710,5;\ 1,015)\overline{10|}z_3} \Rightarrow z_3 = 0,130976 \Rightarrow r_3 = 0,066958$$

En este caso los tres proyectos son aceptables y el más adecuado es el segundo.

VII-4.—LOS VALORES MOBILIARIOS Y LA INFLACION

20.—LAS ACCIONES Y LA INFLACION

Sea una acción cuyas cotizaciones al principio de un período y a fin de él son, respectivamente, A_0 y A_1, y además se reparte un dividendo D_1. Si con q se designa a la tasa de crecimiento de la cotización y con i a la tasa de reparto de dividendos, se tiene:



La rentabilidad monetaria que se conseguirá en ese período vendrá medida por el valor i_a tal que satisfaga la ecuación:

$$A_0(1+i_a) = A_1 + D_1 = A_0(1+q+i) \tag{110}$$

de donde:

$$i_a = i + q \tag{111}$$

es decir, la rentabilidad que proporciona el título está formada por las tasas de crecimiento de la cotización y de reparto de dividendos.

En ausencia de ilusión monetaria, si la tasa de inflación del período es α, la rentabilidad real que se obtiene es el valor r_a que satisface la ecuación:

$$A_0(1+r_a)(1+\alpha) = D_1 + A_1 = A_0(1+q+i) \tag{112}$$

de donde se sigue:

$$(1+r_a)(1+\alpha) = 1+q+i \tag{113}$$

$$r_a = \frac{q+i-\alpha}{1+\alpha} = \frac{i_a-\alpha}{1+\alpha} \gtrless \tag{114}$$

Si la política económica de la empresa va encaminada a mantener al menos el valor real de las acciones y dejar subordinada en un segundo plano la política de reparto de dividendos, deberá verificarse:

$$\text{Si} \quad q+i-d \geqslant 0 \Rightarrow q \geqslant \alpha - 1$$

y ante objetivos de esta naturaleza toda política de dividendos que conduzca a situaciones límite $q \leqslant 0$ deberá ser rechazada, pues se está efectuando un reparto del activo.

Por tanto, en caso de beneficios positivos $r_a > 0$ debe guiarse la política de reparto de dividendos que permita al menos mantener el valor real de las cotizaciones y, sólo en caso de existencia de excedente, distribuir dividendos, es decir, en

$$r_a = \frac{i}{1+\alpha} + \frac{q-\alpha}{1+\alpha} > 0$$

deberá ser $\frac{q-\alpha}{1+\alpha} > 0$ siempre, y la tasa de reparto de dividendos determinarse una vez fijada la anterior expresión, o sea:

$$\frac{i}{1+\alpha} = r_a - \frac{q-\alpha}{1+\alpha} \Rightarrow i = r_a(1+\alpha) - (q-\alpha)$$

En caso de considerar un intervalo de n períodos, siendo i_r la tasa de reparto de dividendos del período r y q_r la correspondiente tasa de crecimiento, se tiene:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & & & A_n \\
A_0 & & D_1 & & D_2 \cdots & & & & D_r \cdots & & & & D_n \\
\hline
0 & & 1 & & 2 & \cdots & r-1 & & r & \cdots & n-1 & & n \\
 & q_1 & & q_2 & & \cdots & & q_r & & \cdots & & q_n & \\
 & i_1 & & i_2 & & \cdots & & i_r & & \cdots & & i_n & \\
 & \alpha_1 & & \alpha_2 & & \cdots & & \alpha_r & & \cdots & & \alpha_n &
\end{array}$$

con α_r tasa de inflación.

La ecuación de equivalencia que determina i_a es:

$$A_0 = \sum_{r=1}^{n} D_r(1+i_a)^{-r} + A_n(1+i_a)^{-n} \tag{115}$$

o un equivalente si se considera la cadena indefinida de dividendos:

$$A_0 = \sum_{r=1}^{\infty} D_r(1+i_a)^{-r} \tag{116}$$

Sustituyendo D_r y A_n por sus valores en función de i_r, q_r, resulta:

$$A_0 = \sum_{r=1}^{n} A_0 i_r(1+i_a)^{-r} + A_0(1+i_a)^{-n} \prod_{h=1}^{n} (1+q_h) \tag{117}$$

expresión que resalta la dependencia de i_a de i_r y q_r.

La inclusión de la inflación permite escribir:

$$A_0 = \sum_{r=1}^{n} D_r(1+r_a)^{-r} \prod_{h=1}^{r} (1+\alpha_h)^{-1} + A_n(1+r_a)^{-n} \prod_{h=1}^{n} (1+\alpha_h)^{-1} \tag{118}$$

y el valor r_a sólo podrá ser determinado por tanteos sucesivos.

Casos particulares:

1) *Dividendos constantes*

Su ecuación de equivalencia es:

$$\begin{aligned} A_0 &= \sum_{r=1}^{n} D(1+i_a)^{-r} + A_n(1+i_a)^{-n} = \\ &= D\, \mathbf{a}_{\overline{n}|i_a} + A_n(1+i_a)^{-n} = \\ &= A_0 i\, \mathbf{a}_{\overline{n}|i_a} + A_n(1+i_a)^{-n} \end{aligned} \tag{119}$$

luego $i_a = f(A_0, i, n, A_n)$.

Si la inflación es α_r, la rentabilidad media real r_a se obtiene en:

$$A_0 = \sum_{r=1}^{n} A_0 i(1+r_a)^{-r} \prod_{h=1}^{r} (1+\alpha_h)^{-1} + A_n(1+r_a)^{-n} \prod_{h=1}^{n} (1+\alpha_n)^{-1} \tag{120}$$

En el caso particular $q_r = q$; $\alpha_r = \alpha$, resulta:

$$A_0 = \sum_{r=1}^{n} A_0 i(1+i_a)^{-r} + A_0(1+q)^n(1+i_a)^{-n} \tag{121}$$

$$A_0 = \sum_{r=1}^{n} A_0 i(1+r_a)^{-r}(1+\alpha)^{-r} + A_0(1+q)^n(1+r_a)^{-n}(1+\alpha)^{-n} \tag{122}$$

en donde:

$$(1+r_a)\,(1+\alpha)=1+i_a \tag{123}$$

$$r_a=\frac{i_a-\alpha}{1+\alpha} \tag{124}$$

2) *Dividendos crecientes a la tasa q*

Para el caso $q_r=q$ se obtiene:

$$A_0=A_{(D_1;\ 1+q)\overline{n}|i_a}+A_n(1+i_a)^{-n}=$$

$$=A_0 i(1+q)\,\frac{1-(1+q)^n(1+i_a)^{-n}}{i_a-q}+A_0(1+q)^n\,(1+i_a)^{-n} \tag{125}$$

Cuando $\alpha_r=\alpha$ el valor del tanto medio real es:

$$r_a=\frac{i_a-\alpha}{1+\alpha} \tag{126}$$

pero en otros casos se tendría:

$$A_0=\sum_{r=1}^{n} A_0 i(1+q)^{r-1}(1+r_a)^{-r}\prod_{h=1}^{r}(1+\alpha_h)^{-1}+$$

$$+A_0(1+q)^n\,(1+r_a)^{-n}\prod_{h=1}^{n}(1+\alpha_h)^{-1} \tag{127}$$

21.—LOS EMPRESTITOS Y LA INFLACION

Sea un empréstito con las siguientes características:

Títulos emitidos: N_1.
Nominal de cada títulos: C.
Precio de emisión: V.
Duración de la emisión: n años.
Abono de un cupón anual constante: Ci.
Amortización a la par.
Anualidad constante.
Tasa de inflación anual constante α.

Con el fin de analizar la operación se plantean las ecuaciones que afectan al inversor financiero desde el punto de vista clásico y con inclusión de la depreciación.

1) *Planteamiento clásico*

— Ecuación de equivalencia inicial:

$$CN_1 = a\ \mathbf{a}_{\overline{n}|i} \tag{128}$$

— Ecuación del tanto efectivo obligacionista:

$$VN_1 = a\ \mathbf{a}_{\overline{n}|i_a} \tag{129}$$

— Precio de suscripción para obtener la rentabilidad i_a:

$$VN_1 = CN_1 \frac{\mathbf{a}_{\overline{n}|i_a}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i}} \Rightarrow V = C \frac{\mathbf{a}_{\overline{n}|i_a}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i}} \tag{130}$$

— Valor del título al principio del año $s+1$, si el tanto de valoración del inversor en el mercado es t:

$$\mathscr{V}_s = \frac{a\ \mathbf{a}_{\overline{n-s}|t}}{N_{s+1}} = C \frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|t}}{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i}} \tag{131}$$

ya que $CN_{s+1} = a$.

2) *Inclusión de la depreciación a una tasa de inflación constante*

— La rentabilidad media real r_a que consigue el inversor en obligaciones es la solución de la ecuación:

$$VN_1 = \sum_{h=1}^{n} a(1+\alpha)^{-h}(1+r_a)^{-h} = \sum_{h=1}^{n} a(1+x)^{-h} \tag{132}$$

con $(1+x) = (1+\alpha)(1+r_a) = (1+i_a)$ y, por tanto,

$$r_a = \frac{i_a - \alpha}{1+\alpha} \gtrless 0 \quad \text{si} \quad i_a \gtrless \alpha \tag{133}$$

— El precio que debe pagarse en la suscripción para obtener una rentabilidad real prefijada medida por i_a es el valor V^* tal que:

$$VN_1 = \sum_{h=1}^{n} a(1+\alpha)^{-h}(1+i_a)^{-h} = a\ \mathbf{a}_{\overline{n}|x_a} \tag{134}$$

con

$$1 + x_a = (1+\alpha)(1+i_a)$$
$$x_a = \alpha + i_a + \alpha i_a$$

De (130) y (134) se sigue:

$$V^* = V \frac{\mathbf{a}_{\overline{n}|x_a}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i_a}} < V \tag{135}$$

— Situados al principio del período $s+1$, todo inversor que compre al tanto t monetario pagando el precio $\mathscr{V}_s$ obtendrá un tanto real t_r deducido de:

$$\mathscr{V}_s = \frac{\sum_{h=s+1}^{n} a(1+\alpha)^{-(h-s)}(1+t_r)^{-(h-s)}}{N_{s+1}} = \frac{a\, \mathbf{a}_{\overline{n-s}|t}}{N_{s+1}} = C \frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|t}}{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i}} \tag{136}$$

con $(1+t) = (1+\alpha)(1+t_r)$, luego

$$t_r = \frac{t-\alpha}{1+\alpha} \tag{137}$$

— El precio que debe pagarse al principio del período $s+1$ para que se garantice un tanto real medido por t es:

$$\mathscr{V}_s^* = \frac{\sum_{h=s+1}^{n} a(1+\alpha)^{-(h-s)}(1+t)^{-(h-s)}}{N_{s+1}} = \frac{a\, \mathbf{a}_{\overline{n-s}|y}}{N_{s+1}} = C \frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|y}}{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i}} \tag{138}$$

con $y = \alpha + \alpha t + t$.

De (131) y (138) se deduce:

$$\mathscr{V}_s^* = \mathscr{V}_s \frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|y}}{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|t}} < \mathscr{V}_s \tag{139}$$

— La rentabilidad monetaria que obtiene un suscriptor inicial, que pagó en el origen el precio V y vende el título al principio del año $s+1$ por el valor $\mathscr{V}_s$, viene medida por el parámetro i_R solución de la ecuación:

$$V = Ci\ \mathbf{a}_{\overline{s}|i_R} + \mathscr{V}_s(1+i_R)^{-s} \tag{140}$$

pero la rentabilidad media real es el valor $\mathscr{V}_R$ tal que:

$$V = \sum_{h=1}^{s} Ci(1+\alpha)^{-h}(1+r_R)^{-h} + \mathscr{V}_s(1+r_R)^{-s}(1+\alpha)^{-s} \tag{141}$$

verificándose que:

$$1 + i_R = (1+\alpha)(1+\alpha)(1+r_R) \quad ; \quad r_R = \frac{i_R - \alpha}{1+\alpha}$$

Como puede observarse, todo proceso inflacionista hace que la rentabilidad esperada se vea disminuida, así como la cuantía del principal del título. Ante este tipo de situaciones es preciso evolucionar hacia nuevas fórmulas que protejan contra el riesgo de la depreciación.

22.—INADAPTACION DE LAS EMISIONES CLASICAS DE UNA ECONOMIA DINAMICA. NUEVAS FORMAS DE EMISION DE OBLIGACIONES

Los suscriptores de obligaciones con rendimiento predeterminado perseguían, con la posesión de estos títulos, obtener para sus ahorros una rentabilidad moderada aceptando un riesgo mínimo (en principio casi cierto) y una forma de valores altamente líquidos.

Los socios accionistas buscaban colocar sus ahorros en inversiones que pudiesen proporcionar una alta rentabilidad y estaban dispuestos a aceptar el margen de riesgo necesario para maximizar su riqueza.

En función de lo anterior se llega a una alteración de los activos a ofrecer para recabar medios de financiación. El título valor obligación debe ser revestido de las características comerciales adecuadas para proporcionar los nuevos fines exigidos por el ahorro-préstamo, pues de no darse se producirán desplazamientos hacia aquellos activos que los garanticen.

Como posibles medios de recuperación de la eficacia de las emisiones de empréstitos pueden utilizarse aquellos que permitan el mantenimiento de una contraprestación en saldos reales (defensa directa contra la depreciación), los que constituyan tipos intermedios entre las obligaciones y las acciones bien porque sus rendimientos se establezcan de una forma paralela o porque permitan alcanzar un cambio de situación a títulos con mayor capacidad de defensa contra la devaluación, y cualquier forma o combinación de formas que proporcione una esperanza contra el riesgo monetario.

Las nuevas emisiones de empréstitos deben ir encaminadas a una adaptación de los términos de la contraprestación a las variaciones experimentadas por ciertas magnitudes que se toman como referencia y cuyo objetivo puede o no tener relación con el de las obligaciones.

Por así decirlo, el atractivo comercial es la posibilidad de defensa del mantenimiento de una contraprestación real, lo que supone descartar aquellas empresas que no puedan garantizar un incremento de riqueza.

Dos medios se consideran como fundamentales para obtener los nuevos objetivos y son: la indización y la convertibilidad.

La indización es una forma de variación automática en función de los cambios que puedan experimentar una magnitud tomada como referencia.

Tiene por objeto hacer variar la contraprestación en función de la evolución del índice tomado como referencia.

La dependencia puede implicar una variación de los intereses, del valor de reembolso o de otros términos, si existen, de una forma individual o a todos ellos.

El grado de vinculación del índice, respecto a la parte de contraprestación que ha de relacionarse, puede ser total o limitado.

Los elementos de referencia para la obtención del índice de variación pueden tomarse dentro de las actividades del emisor o fuera de su ámbito. A su vez las actividades externas pueden ser paralelas a las de la empresa o distintas.

Como consecuencia podría hablarse de existencia de correlación total entre el índice y la empresa, de correlación parcial y de no correlación.

La *convertibilidad* es la posibilidad de intercambio del título obligación por otro bien económico. La opción concreta permite cambiar al poseedor del título de renta fija su posición de acreedor por la de socio accionista en el tiempo y forma estipulados en el contrato de emisión.

El atractivo de la emisión se encuentra en la cláusula de convertibilidad, pues ésta suele ofrecer una esperanza de cambio favorable a la obligación.

Por existir un diferimiento desde el momento de la emisión hasta el que puede ejercerse la opción de cambio, la posible adaptación a la evolución de la empresa no es inmediata, como lo son las cláusulas de indización que pueden operar automáticamente desde el origen.

Estos títulos se caracterizan por ser intermedios entre las obligaciones y las acciones, y, aunque en los epígrafes siguientes se analizan con cierta extensión, se da a continuación una visión de sus aspectos más relevantes.

a) *La indización externa*

Para obtener los principios de la conducta a seguir por los elementos base del índice será necesario realizar las observaciones adecuadas, y así llegar a especificar la forma de la relación esperada.

Las relaciones a establecer, por lo general, tienen un carácter lineal de la forma

$$y_t = \alpha + \beta_t x_t$$

donde α sería un parámetro independiente que podría recoger los pagos mínimos a realizar, x_t la parte de la contraprestación sujeta a variabilidad y β_t el índice a especificar.

La sociedad emisora tratará de obtener el valor medio de β y su desviación típica para poder prevenir la cuantía de los pagos futuros y, en principio, decidir si esta forma de emisión puede ser efectuada, es decir, si permiten sus expectativas de incrementos juzgarla como conveniente.

La indización externa podía venir dada en función de índices estadísticos cualesquiera o de monetarios. Los problemas de los índices estadísticos son tratados en muchos manuales de la materia y a ellos nos remitimos. Los de carácter monetario (como caso particular de los anteriores) por la importancia especial que tienen merecen hacer una breve referencia.

b) *La indización monetaria*

Su objetivo es presentar un tipo de emisión cuya contraprestación trate de mantener un nivel de valor con las unidades de capital prestadas.

Los números índices de precios expresan la relación que deben guardar las cuantías de capital de dos momentos distintos para que valor real sea el mismo.

Si en una emisión la cuantía de los términos amortizativos es $a_r(=1, 2, ..., n)$, la inclusión de la cláusula de revalorización supone que los términos a desembolsar sean de la forma

$$a_r^* = f(a_r; I_r)$$

siendo I_r el índice de precios del intervalo $(t_0; t_r)$.

Cuando se prevea una adaptación total a las variaciones de los precios será

$$a_r^* = a_r \cdot I_r$$

y este supuesto garantizará a los obligacionistas obtener una rentabilidad, precio del dinero, real para su inversión y un valor de reembolso del mismo tipo.

El emisor se encuentra con la necesidad de estudiar la posible tendencia que seguirá el índice de precios que junto con las expectativas de su inversión decidirán, en términos de valores esperados, si ésta le permite efectuar tal tipo de emisión.

c) *La indización interna*

La forma de relación será especificada en el origen de la operación y puede afectar a toda o parte de la contraprestación.

El problema de previsión del emisor es mucho menos importante que en los índices externos, puesto que los mayores desembolsos se efectuarán en ejercicios con resultados prósperos, pudiendo encontrarse con dificultades económicas cuando la cuantía de la contraprestación coincide con los mínimos fijados, ya que ello corresponderá a ejercicios con débiles resultados. Por otra parte, siempre podrá efectuar sus predicciones con mayor exactitud, pues fundamentalmente dependerán de la política económica de la sociedad.

Los suscriptores deberán tomar las medidas pertinentes para que la sociedad emisora no tergiverse los resultados que deben dar el grado de participación, es decir, el incremento de la contraprestación por encima del mínimo. Por supuesto, que cuando un empréstito de esta naturaleza puede ser suscrito es porque la trayectoria de la sociedad emisora observada por los posibles prestamistas ofrece una esperanza de conseguir mayores rendimientos que en las emisiones análogas del mercado a rendimiento predeterminable.

d) *La convertibilidad*

Por tratarse de una opción de cambio de títulos obligaciones por títulos acciones plantea un doble problema, para el emisor y para los suscritores.

Dos formas usuales de relación son:

— Marcar una relación de cambio α en el momento de la emisión que represente el número de obligaciones a entregar por cada acción.

— Dejar que la cotización bursátil sea la que fije el valor de la acción en el momento del canje y fijar el valor de la obligación (por el nominal u otros distinto). La expresión podría ser especificada por

$$A_t - R_r = \alpha_t C_t$$

donde A_t es la cotización de la acción, R_t recoge una posible rebaja para la conversión, α_t el número de obligaciones a entregar y C_t el valor de la obligación.

La primera hipótesis puede suponer un atractivo para el suscriptor si la cotización se espera presente ventajas sustanciales respecto al precio de la obligación como tal. Para tratar de estimar la posible cotización y su campo de variación habrá que recurrir a los índices bursátiles y a un conjunto de expectativas de carácter, primordialmente, subjetivas. La segunda hipótesis representará un mayor o menor aliciente según que R_t sea alto o no, pues $\frac{R_t}{\alpha_t}$ recogerá el valor de la prima de canje.

El emisor se decidirá por la primera hipótesis si con la información suficiente su estimación queda dentro de un campo de variabilidad que juzgue como conveniente; en caso contrario, y ante el peligro de que la cotización pudiera variar con fuerte tendencia al alza, deberá tomar la segunda hipótesis.

23—VALORES INDIZADOS

La indización de un empréstito tiene por objeto hacer variar la contraprestación en función de la evolución de un índice tomado como referencia.

Los índices pueden ser de naturaleza muy diversa y, en general, cabe hablar de:

— Indices *internos* o vinculados a la actividad directa del emisor o índices *externos* o sin ninguna vinculación a ella.

b) Indices monetarios, no monetarios o mixtos.

c) Combinaciones de los anteriores.

Los efectos de los índices pueden ser totales o parciales al incluir un coeficiente moderador o unos topes máximos o unos mínimos valores de entrada.

La gama de posibilidades a plantear es muy amplia, pero por su especial interés y porque su metodología es válida para cualquier otra situación se estudian los tres casos siguientes:

— Indices de precios (externo).
— Indice doble precios sobre cupones y cotización del mercado de valores sobre el valor de reembolso (externo).
— Indice de participación en beneficios (interno).

23.1.—EMPRESTITO REVALORIZABLE MEDIANTE UN INDICE DE PRECIOS

Si la garantía contra la depreciación es plena, un supuesto lógico a considerar es el empréstito puro o sin características comerciales, ya que la característica comercial es precisamente la indización según el índice de precios.

Para el caso de anualidad constante se tiene:

a) *Ecuaciones estáticas o en moneda constante*

$$a = CN_r i + CM_r \tag{143}$$

$$CN_1 = \sum_{r=1}^{n} a(1+i)^{-r} = a\ \mathbf{a}_{\overline{n}|i} \tag{144}$$

$$\mathscr{V}_s = \frac{a\ \mathbf{a}_{\overline{n-s}|t}}{N_{s+1}} = C\ \frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|t}}{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i}} \tag{145}$$

Nótese que $i_a = i$.

b) *Ecuaciones dinámicas o en monedas corrientes*

La vinculación total al índice de precios supuesta la tasa de inflación constante α hace que las ecuaciones (143), (144) y (145) se transformen en las siguientes:

— Anualidades en monedas corrientes.

$$a_s^* = a(1+\alpha)^s = CN_s i(1+\alpha)^s + C(1+\alpha)^s M_s = I_s(1+\alpha)^s + A_s(1+\alpha)^s \tag{146}$$

— Ecuación de equivalencia financiera y tantos efectivos real y monetario de la operación.

La operación queda definida por una prestación CN_1 y una contraprestación de términos a_s^* en unidades monetarias corrientes o de términos $a_s^*(1+\alpha)^{-s}$ en unidades monetarias constantes. Por tanto, la rentabilidad media real r_a será el valor solución de la ecuación:

$$CN_1 = \sum_{s=1}^{n} a_s^*(1+\alpha)^{-s}(1+r_a)^{-s} = \sum_{s=1}^{n} a(1+r_a)^{-s} = a\ \mathbf{a}_{\overline{n}|r_a} \tag{147}$$

y comparando con (144) se sigue $r_a = i$.

La rentabilidad monetaria es la cuantía x_a solución de la ecuación de equivalencia financiera:

$$CN_1 = \sum_{s=1}^{n} a_s^*(1+x_a)^{-s} = \sum_{s=1}^{n} a(1+\alpha)^s(1+x_a)^{-s} \tag{148}$$

y teniendo en cuenta la (144) se deduce que:

$$(1+\alpha)(1+x_a)^{-1} = (1+i)^{-1} \Rightarrow \begin{cases} 1+x_a = (1+i)(1+\alpha) \\ x_a = i+\alpha+i\alpha \end{cases} \tag{149}$$

— Valor del título en el mercado, en unidades corrientes, al principio del período s+1 a un tanto t real.

La ecuación del empréstito al principio del período s+1, representando $\mathscr{V}_s^*$ el valor de un título, es:

$$\mathscr{V}_s^* N_{s+1} = \sum_{r=s+1}^{n} a_r^*(1+\alpha)^{-(r-s)}(1+t)^{-(r-s)} =$$

$$= \sum_{r=s+1}^{n} a(1+\alpha)^r(1+\alpha)^{-(r-s)}(1+t)^{-(r-s)} =$$

$$=(1+\alpha)^s \sum_{r=s+1}^{n} a(1+t)^{-(r-s)} = (1+\alpha)^s a\, \mathbf{a}_{\overline{n-s}|t} \qquad (150)$$

sustituyendo la (145) se sigue:

$$\mathscr{V}_s^* N_{s+1} = (1+\alpha)^s \mathscr{V}_s N_{s+1} \qquad (151)$$

$$\mathscr{V}_s^* = (1+\alpha)^s \mathscr{V}_s = C(1+\alpha)^s \frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|t}}{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i}} \qquad (152)$$

El tanto t real equivale al monetario,

$$y_a = t + \alpha + t\alpha$$

y la ecuación (150) en función de éste podría plantearse así:

$$\mathscr{V}_s^* N_{s+1} = \sum_{r=s+1}^{n} a_r^*(1+y_a)^{-(r-s)} = \sum_{r=s+1}^{n} a(1+\alpha)^r(1+y_a)^{-(r-s)}$$

$$=(1+\alpha)^s \sum_{r=s+1}^{n} a(1+\alpha)^{r-s}(1+y_a)^{-(r-s)} = (1+\alpha)^s A_{[a(1+\alpha);\,1+\alpha]\overline{n-s}|y_a} \qquad (153)$$

c) *Introducción de un coeficiente moderador*

La introducción de un coeficiente moderador β, con $0<\beta<1$, en la contraprestación reduce la rentabilidad real más que proporcionamente como a continuación se prueba.

El efecto de β se traduce en una contraprestación monetaria

$$a_s^* = a(1+\beta\alpha)^s$$

por lo que la rentabilidad media monetaria que se obtiene es el valor r_a de la ecuación:

$$CN_1 = \sum_{s=1}^{n} a(1+\alpha\beta)^s(1+\alpha)^{-s}(1+r_a)^{-s} = \sum_{s=1}^{n} a\left[\frac{(1+\alpha)(1+r_a)}{1+\alpha\beta}\right]^{-s} \tag{154}$$

y recordando la (144) se deduce:

$$\frac{(1+\alpha)(1+r_a)}{1+\alpha\beta} = 1+i \tag{155}$$

operando:

$$r_a = i\,\frac{1+\alpha\beta}{1+\alpha} - \alpha\,\frac{1-\beta}{1+\alpha} \tag{156}$$

La reducción de i es doble: por una parte queda afectado proporcionalmente por el coeficiente $\frac{1+\alpha\beta}{1+\alpha} < 1$, y por otra, se minora en una cuantía $\alpha\,\frac{1-\beta}{1+\alpha}$.

Este efecto más que proporcional resalta la peligrosidad de pactar coeficientes moderadores; por lo que se plantea, para completar su análisis, el estudio de r_a como función de β.

La (156) puede ser escrita de la forma:

$$r_a = \beta\,\frac{\alpha(1+i)}{1+\alpha} + \frac{i-\alpha}{1+\alpha} = f(\beta) \tag{157}$$

que es la ecuación de una recta cuya representación gráfica depende de los valores de α, según $\alpha \gtrless i$.

Se tiene:

— Campo de validez: $0 \leqslant \beta \leqslant 1$.

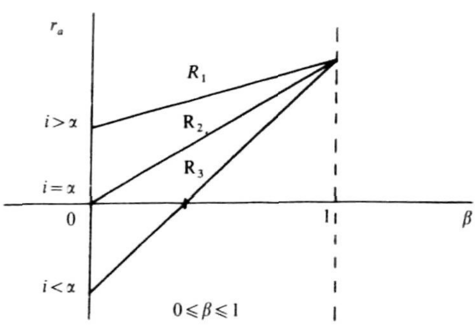
— Extremos: $\beta = 0$ (no previsión de depreciación)

$$r_a(0) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \gtrless 0 \Rightarrow i \gtrless \alpha$$

$\beta = 1$ (previsión perfecta o adaptación plena a la inflación)

$$r_a(1) = i$$

— Representación gráfica



— Valores de r_a según los valores de β que se fijen:

1) *$i>\alpha$: Recta R_1*

Para cualquier valor de β se obtienen rentabilidades positivas y su campo de variación es:

$$\frac{i-\alpha}{1+\alpha} \leqslant r_a \leqslant i$$

2) *$i=\alpha$: Recta R_2*

Siempre que β sea positiva se tienen valores positivos de r_a y sólo será $r_a=0$ cuando se tome $\beta=0$.

El campo de variación es:

$$0 \leqslant r_a \leqslant i$$

3) *$i<\alpha$: Recta R_3*

Proporciona rentabilidades positivas y negativas según los distintos valores de β.

El valor de β que proporciona $r_a=0$ es el que se deduce de

$$0=\beta\,\frac{\alpha(1+i)}{1+\alpha}+\frac{i-\alpha}{1+\alpha}$$

y operando

$$\beta=\frac{\alpha-i}{\alpha(1+i)}$$

Por tanto, se tiene:

- Para $0 \leqslant \beta < \dfrac{\alpha-i}{\alpha(1+i)}$ el valor de $r_a<0$.
- Para $\beta=\dfrac{\alpha-i}{\alpha(1+i)}$ el valor de $r_a=0$.
- Para $\dfrac{\alpha-i}{\alpha(1+i)} < \beta \leqslant 1$ el valor de $r_a>0$.

Este último tramo es el único admisible si se pretenden rentabilidades positivas en la operación.

23.2.—EMPRESTITO REVALORIZABLE MEDIANTE UN INDICE DOBLE

Se plantea la revalorización mediante la aplicación de dos índices: de precios y de cotización del mercado bursátil. El primero aplicado a los cupones y el segundo sobre el valor de reembolso.

Si las tasas son: α en los precios y μ en la cotización bursátil y el empréstito de referencia es el mismo que en el caso anterior, las ecuaciones (146) y (147) serán ahora:

$$a_s^* = CN_s i(1+\alpha)^s + C(1+\mu)^s M_3 \tag{158}$$

$$CN_1 = \sum_{s=1}^{n} a_s^*(1+r_a)^{-s}(1+\alpha)^{-s} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} [CN_s i(1+\alpha)^s + C(1+\mu)^s M_s]\,(1+\alpha)^{-s}(1+r_a)^{-s} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \left[CN_s i + C\left(\frac{1+\mu}{1+\alpha}\right)^s M_s\right](1+r_a)^{-s} \tag{159}$$

De la comparación entre (144) y (159) se sigue:

$$\frac{1+\mu}{1+\alpha} \gtreqless 1 \Leftrightarrow \mu \gtreqless \alpha \Leftrightarrow r_a \gtreqless i \tag{160}$$

La introducción de un coeficiente moderador β en μ lleva a:

$$\mu \cdot \beta \gtreqless \alpha \Rightarrow \mu \gtreqless \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow r_a \gtreqless i \tag{161}$$

23.3.—PROBLEMAS DE LA INDIZACION EXTERNA PARA EL EMISOR

Los índices externos como los vistos en los puntos 1 y 2 anteriores han sido planteados desde la órbita de los inversores obligacionistas y se resaltaban los aspectos conflictivos para éstos que son: elección del tipo de índice; índice con efecto total o con efecto parcial; introducción o no de coeficiente moderador.

El emisor busca financiación en el empréstito para canalizarla hacia sus inversiones, por lo que es conveniente aludir al problema especial de la operación integral: *análisis de la inversión y su comparación con la financiación*, que comprende dos etapas que hacen referencia a la rentabilidad y a la liquidez.

a) Determinación de la *rentabilidad del proyecto*.

La inversión proporcionará una cadena de rendimientos netos esperados R_1, R_2, ..., R_m como consecuencia de la inversión cuya dimensión es CN_1. Esta cuantía del empréstito exigirá una contraprestación que son las anualidades **a**.

Suponiendo que los ingresos en unidades corrientes varíen a una tasa ω y que las anualidades del empréstito correspondan a uno cualquiera de los anteriores con índices externos se tendrá:

— Ingresos en unidades corrientes (se tomará por comodidad $R_s = R$):

$$R_s^* = R_s(1+\omega)^s = R(1+\omega)^s \quad ; \quad (s = 1, 2, \ldots, m) \tag{162}$$

con m duración de la inversión que debe cumplir $m \geqslant n$.

— Desembolsos en unidades corrientes.

$$a_s^* = a(1+\alpha)^s \quad \text{ó} \quad a_s^* = CN_s i(1+\alpha)^s + CM_s(1+\mu)^s \tag{163}$$

Para que la inversión - financiación sea factible el valor actualizado neto de ella, al tanto r real, deberá ser positivo, o sea:

$$VAN = V(R_s^*, a_s^*, \alpha, r) = \sum_{s=1}^{m} R_s^*(1+\alpha)^{-s}(1+r)^{-s} - \sum_{s=1}^{n} a_s^*(1+\alpha)^{-s}(1+r)^{-s} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} R_s \left(\frac{1+\omega}{1+\alpha}\right)^{-s} (1+r)^{-s} - \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{s=1}^{n} a(1+r)^{-s} \\ \text{ó} \\ \sum\limits_{s=1}^{n} \left[CN_s i + C\left(\dfrac{1+\mu}{1+\alpha}\right)^s M_s \right] (1+r)^{-s} \end{array} \right\} > 0 \tag{164}$$

Si $r = r_p$ coste real del empréstito para el emisor, la (164) queda así:

$$VAN = \sum_{s=1}^{n} R_s \left(\frac{1+\omega}{1+\alpha}\right)^{-s} (1+r_p)^{-s} - CN_1 > 0 \tag{165}$$

El tanto interno de rendimiento de la inversión o tanto efectivo de ella es el valor r_e, al que corresponde un $VAN = 0$, es decir:

$$\sum_{s=1}^{m} R_s^*(1+\alpha)^{-s}(1+r_e)^{-s} - \sum_{s=1}^{n} a_s^*(1+\alpha)^{-s}(1+r_e)^{-s} = 0 \tag{166}$$

debiendo ser $r_e > r_p$ para que la inversión-financiación sea factible.

b) *Análisis de liquidez*

Si se exige la *condición de autosuficiencia* de la inversión para cualquier período deberá ser:

$$R_s^* = R(1+\omega)^s \geqslant a_s^* = 1+\alpha)^s$$

en caso de considerar el empréstito con índice de precios.

Para las distintas posibilidades se tiene:

Si $\omega = \alpha$: Debe ser $R \geqslant a$

Si $\omega < \alpha$: Debe ser $R_n^* = R(1+\omega)^n \geqslant a_n^* = a(1+\alpha)^n \Rightarrow R \geqslant a\left(\dfrac{1+\alpha}{1+\omega}\right)^n$

Si $\omega > \alpha$: Debe ser $R_1^* \geqslant a_1^* \Rightarrow \dfrac{R}{a} \geqslant \dfrac{1+\alpha}{1+\omega}$

El *análisis de desviaciones* debe tenerse presente sobre todo si algún R_s^* puede ser superado por algún a_s^*, ya que será necesario recabar financiación adicional, lo que conllevaría a distintas hipótesis nuevas sobre los costes adicionales.

23.4.—EMPRESTITO CON CLAUSULA DE PARTICIPACION EN BENEFICIOS

Antes de la emisión del empréstito la empresa cuenta con medios de financiación, propios y ajenos, que están generando beneficios. Los nuevos medios de financiación ajena que se consiguen con el empréstito contribuirán a la expansión de los beneficios.

Los nuevos beneficios deberán ser repartidos teniendo que fijarse la proporción que corresponde a los medios antiguos y a los nuevos (empréstito).

Si la tasa que corresponde a los nuevos es μ y a los antiguos es $1-\mu$ y se designa por B a los beneficios y por P a la participación, el reparto inicial será:

Medios antiguos:

$$B - P = B(1-\mu)$$

Medios nuevos:

$$P = \mu B \qquad \text{por el empréstito total}$$

$$x = \frac{P}{N_1} = \frac{\mu}{N_1} B \qquad \text{por cada títulos}$$

De acuerdo con el reparto inicial y con que la evolución futura de los beneficios y títulos pendientes de amortización no será constante, se tendrá la siguiente proyección de las participaciones futuras:

Beneficios totales		B_1	$B_2 \cdots$	$B_s \cdots$	B_n
Participación por título o individual		$x_1 = \frac{\mu}{N_1} B_1$	$x_2 = \frac{\mu}{N_1} B_2 \cdots$	$x_s = \frac{\mu}{N_1} B_s \cdots$	$x_n = \frac{\mu}{N_1} B_n$
Participación del empréstito vivo		$P_1 = x_1 N_1$	$P_2 = x_2 N_2 \cdots$	$P_s = x_s N_s \cdots$	$P_n = x_n N_n$
Año del empréstito	0	1	2 $\cdots$ s−1	s $\cdots$ n−1	n

La *operación financiera* que efectúa un inversor en un título *del empréstito indizado* consiste en:

Prestación *Contraprestación*

$$V \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Rendimientos: } \xi_1 = \begin{cases} \text{Cuantía } x_s = \dfrac{\mu}{N_1} B_s \\ \text{Probabilidad } p_s = \dfrac{N_s}{N_1} \end{cases} \\ \\ \text{Principal: } \xi_2 = \begin{cases} \text{Cuantía } C \\ \text{Probabilidad } q_s = \dfrac{M_s}{N_1} \end{cases} \end{cases}$$

es decir, que a cambio de la prestación V se reciben dos variables aleatorias. La primera *rendimientos* cuyas cuantías y vencimientos son aleatorios y la segunda *devolución del principal* con cuantía cierta y vencimiento aleatorio.

Para que el inversor en el empréstito indizado pueda tomar su decisión es necesario comparar la operación descrita con las operaciones de empréstitos que alternativamente ofrece el mercado. Si ésta tiene como características comerciales primas y lotes, entonces la *operación alternativa o emisión no indizada* está definida por:

$$
\begin{array}{ll}
\textit{Prestación} & \textit{Contraprestación} \\
V \Leftrightarrow & \left\{
\begin{array}{l}
\begin{array}{l}\text{Rendimientos: } \\ \text{(intereses,} \\ \text{primas, lotes)}\end{array} \xi'_1 = \left\{
\begin{array}{ll}
Ci_s \text{ renta} & \dfrac{N_s}{N_1} = p_s \\[2ex]
P_s & \dfrac{M_s}{N_1} = q_s \\[2ex]
l_s = \dfrac{L_s}{M_s} & \dfrac{M_s}{N_1} = q_s
\end{array}\right. \\[6ex]
\text{Principal: } \quad \xi'_2 = \left\{
\begin{array}{l}
C \\[2ex]
q_s = \dfrac{M_s}{N_1}
\end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}
$$

La decisión de inversión se tomará siguiendo los métodos tradicionales, de los criterios del valor actualizado neto VAN y tanto de rendimiento interno o tanto efectivo de la emisión para el inversor aceptándose (o rechazándose) la emisión con índice si es mejor (o peor) que su alternativa, es decir, si su VAN o tanto efectivo superan (no superan) a la sin índice.

a) Criterio del *tanto efectivo o tanto interno* de rendimiento,

— Emisión sin índice o normal: Valor i_a que satisface la ecuación

$$V = E(\xi'_1;\, i_a) + E(\xi'_2;\, i_a) =$$

$$= \left[\sum_{s=1}^{n} Ci_s \frac{N_s}{N_1}(1+i_a)^{-s} + \sum_{s=1}^{n} P_s(1+i_a)^{-s}\frac{M_s}{N_1} + \sum_{s=1}^{n} \frac{L_s}{M_s}\frac{M_s}{N_1}(1+i_a)^{-s}\right] +$$

$$+ \left[\sum_{s=1}^{n} C(1+i_a)^{-s}\frac{M_s}{N_1}\right] = \mathscr{U}_1(i_a) + \mathscr{P}_1(i_a) + \mathscr{L}_1(i_a) + \mathscr{N}_2(i_a) \tag{167}$$

— Emisión indizada: Valor i_e que satisface la ecuación

$$V = E(\xi_1;\, i_b) + E(\xi_2;\, i_b) =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} x_s p_s (1+i_b)^{-s} + \sum_{s=1}^{n} Cq_s(1+i_b)^{-s} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \frac{\mu}{N_1} B_s \frac{N_s}{N_1}(1+i_b)^{-s} + \sum_{s=1}^{n} C\frac{M_s}{N_1}(1+i_b)^{-s} \tag{168}$$

Criterio de decisión: Si $i_e > i_a$ aceptación de operación indizada.
Si $i_e = i_a$ indiferencia de operación indizada.
Si $i_e < i_a$ rechazo de operación indizada.

b) Criterio del *valor actualizado neto*

Tomando como tanto de actualización el tanto efectivo esperado de la emisión normal se tiene:

— Emisión sin índice o normal

$$VAN_n(\xi'; i_a) = -V + E(\xi'_1; i_a) + E(\xi'_2; i_a) = 0 \tag{169}$$

— Emisión indizada

$$VAN_i(\xi; i_a) = -V + E(\xi_1; i_a) + E(\xi_2; i_a) =$$

$$= -V + \sum_{s=1}^{n} x_s p_s (1+i_a)^{-s} + \sum_{s=1}^{n} Cq_s (1+i_a)^{-s} \tag{170}$$

— Criterio de decisión: $VAN_i(\xi; i_a) \gtreqless 0$ aceptación / indiferencia / rechazo

c) Criterio del *rendimiento esperado*

Como el desembolso de la inversión es V y el valor de reembolso C en ambas operaciones, para compararlas pueden tomarse los valores actualizados de los rendimientos en lugar del criterio VAN, y se tiene:

— Emisión sin índice o normal.

$$R_n(\xi'_1; i_a) = E(\xi'_1; i_a) = \mathscr{U}(i_a) + \mathscr{P}_1(i_a) + \mathscr{L}_1(i_a) \tag{171}$$

— Emisión indizada

$$R_i(\xi_1; i_a) = E(\xi_1; i_a) = \sum_{s=1}^{n} x_s p_s (1+i_a)^{-s} \tag{172}$$

— Criterio de decisión: $R_i \gtreqless R_n$ aceptación / indiferencia / rechazo

Obsérvese que todo el razonamiento ha sido basado en los resultados de μ obtenidos al fijar el grado de participación de la operación indizada. Este ha sido consecuencia del volumen del empréstito y de los medios financieros que dispone la empresa. Cualquier variación de estos medios financieros debe afectar al grado de participación μ del empréstito con índice.

Entre las operaciones que pueden alterar el valor de μ cabe citar:

1) Ampliaciones de capital que suponen nuevas aportaciones.—Deben disminuir el valor de μ.
2) Ampliaciones de capital con cargo a reservas.—No alteran el valor de μ.
3) Distribución de reservas constituidas con anterioridad a la emisión de obligaciones partícipes.—Debe aumentar el valor de μ.
4) Incremento de reservas después de la emisión indizada.—Debe disminuir el valor de μ.

24.—VALORES CONVERTIBLES

La convertibilidad es la facultad por la cual unos títulos pueden transformarse en otros de igual o diferente naturaleza; pero con características distintas. La situación a plantear ahora es la de la convertibilidad de obligaciones por acciones.

La *operación financiera* está definida por una prestación cuyo valor viene expresado por la cuantía entregada en la suscripción de las obligaciones y una contraprestación formada por una renta de cupones y unas acciones, para compensar la falta de devolución de principal si se hace uso de la facultad de convertibilidad, o del reembolso de las obligaciones en caso contrario.

Cabe resaltar las siguientes *posibilidades de convertibilidad:*

a) Obligaciones convertibles en acciones de la sociedad emisora o de otra distinta.
b) Las acciones necesarias para efectuar la conversión pueden proceder de emisiones anteriores a la de las obligaciones o de ampliaciones de capital acordadas para tal fin.

El *canje* de las obligaciones por acciones puede ser efectuado en:

a) Un solo momento prefijado.
b) En varios momentos prefijados.
c) En cualquiera de los puntos de un cierto intervalo de tiempo.

Formas usuales de intercambio son:

1) Valoración de las acciones a un precio fijo y de las obligaciones por el nominal o por un valor distinto del nominal (generalmente con prima positiva).
2) Precio de las obligaciones prefijado y el de las acciones dependiendo del valor del mercado. Este puede ser el de cotización o uno inferior.

24.1.—LA OPERACION FINANCIERA CONVERTIBLE. DECISION DE SUSCRIPCION

La operación consiste en un desembolso inicial o prestación VN_1 y una contraprestación:

— Como empréstito normal con n términos de cuantía a_r (anualidades) para abonar los rendimientos y reintegrar el principal o'.

— Alternativa como convertible con s términos, si s es el punto de conversión, de cuantía a_r; $(n-s)$ términos de cuantía a'_r para las obligaciones que no ejercen la opción de conversión y una serie indefinida de términos a''_r que son los beneficios periódicos que, a partir del momento s de la conversión, percibirán como acciones los títulos transformados.

En esquema la operación se puede representar por:

Empréstito

VN_1	a_1	$a_2 \cdots$	a_s	a_{s+1}	$a_{s+2} \cdots$	a_n
0	1	$2 \cdots s-1$	s	$s+1$	$s+2 \cdots n-1$	n

Alternativa como convertible

Empréstito

	a'_{s+1}	$a'_{s+2} \cdots$	a'_n
s	$s+1$	$s+2 \cdots n-1$	n

Acciones

	a''_{s+1}	$a''^{+2}_{s} \cdots$	$a''_n \cdots$
s	$s+1$	$s+2 \cdots n-1$	$n \cdots$

es decir, a cambio de una prestación se encuentran dos posibles contraprestaciones con distintas expectativas que deben ser evaluadas por separado.

La decisión de inversión se tomará por comparación con las emisiones del mercado de valores que se oferten sin cláusula de convertibilidad y como criterios de decisión pueden utilizarse el VAN y TIR.

Si el tanto de rendimiento interno o tanto efectivo esperado de las emisiones de empréstitos sin cláusula de convertibilidad (normales del mercado) es i_a, se tiene:

a) Criterio del *tanto de rendimiento interno.*

— Emisión como empréstito normal: Valor i_n que satisface la ecuación

$$VN_1 = \sum_{r=1}^{n} a_r(1+i_n)^{-r} \tag{173}$$

— Emisión como empréstito convertible: Valor i_c que es solución de la ecuación

$$VN_1 = \sum_{r=1}^{s} a_r(1+i_c)^{-r} + \sum_{r=s+1}^{n} a'_r(1+i_c)^{-(r-s)} + \sum_{r=s+1}^{\infty} a''_r(1+i_c)^{-(r-s)} \tag{174}$$

— Situación usual: $i_n \leqslant i_c$, pues en caso $i_n > i_c$ la característica de la opción de canje sería negativa.

— Criterio de decisión: Por comparación con i_a.

Si i_a es mayor que los dos posibles i_n o i_c se rechaza la emisión convertible, o sea:

$$i_a > \text{máx}\ (i_c;\ i_n) \Rightarrow \text{rechazo}$$

Si i_a es menor que los dos posibles i_n o i_c se acepta la emisión, es decir:

$$i_a < \text{mín}\ (i_c;\ i_n) \Rightarrow \text{aceptación}$$

La situación normal será $i_n \leqslant i_c$, pues el mayor riesgo que comporta la esperanza de dividendos debe compensarse con mayores posibilidades de rendimientos, y cuando i_a esté comprendido en el intervalo $(i_n;\ i_c)$, es decir, sea:

$$i_n < i_a < i_c$$

se producirán probables aceptaciones de las emisiones convertibles. Entre estas posibles serán preferibles aquellas que presenten las menores diferencias $i_a - i_n$, ya que ello comportará menor esperanza de menores pérdidas de rendimientos respecto a las emisiones no convertibles en las situaciones más desfavorables. En caso contrario, si $i_a - i_n$ es importante se producirán mayores peligros de desviación.

Por tanto, se tiene:

Si $i_n < i_a < i_c \Rightarrow$ probable aceptación $\Rightarrow \overset{i_n}{\vdash}\!\!\text{———}\!\!\overset{i_a}{+}\!\!\text{———}\!\!\overset{i_c}{\dashv}$

Si $i_a \in \left(i_n;\ \dfrac{i_c + i_n}{2}\right) \Rightarrow$ desviación pequeña $\Rightarrow$ poco riesgo

Si $i_a \in \left(\dfrac{i_c + i_n}{2};\ i_n\right) \Rightarrow$ desviación mayor $\Rightarrow$ aumento de riesgo

b) Criterio del *valor actualizado neto.*

— Emisión como empréstito normal.

$$\text{VAN}_n(i_a) = V_n(i_a) = -V + \sum_{r=1}^{n} a_r(1 + i_a)^{-r} \tag{175}$$

— Emisión como empréstito convertible.

$$\text{VAN}_c(i_a) = V_c(i_a) = -V + \sum_{r=1}^{s} a_r(1 + i_a)^{-r} +$$

$$+\sum_{r=s+1}^{n} a'_r(1+i_a)^{-(r-s)}+\sum_{r=s+1}^{\infty} a''_r(1+i_a)^{-(r-s)} \qquad (176)$$

— Situación usual: $V_n(i_a) \leqslant V_c(i_a)$.

— Criterio de decisión:

Si $V_n(i_a)>0$ y $V_c(i_a)>0 \Rightarrow$ aceptación.

Si $V_n(i_a)<0$ y $V_c(i_a)<0 \Rightarrow$ rechazo.

Si $V_n(i_a)<0$ y $V_c(i_a)>0 \Rightarrow 0$, como debe ser habitual, se producirán posibles aceptaciones cuya discusión será análoga a la de $i_n<i_a<i_c$.

En las ecuaciones (174) y (176) el sumatorio $\sum_{s+1}^{\infty}$ de los dividendos esperados puede sustituirse por el valor de las acciones objeto de intercambio. Este valor debe ser el que realmente se espera tengan dichos títulos en el punto de conversión según el criterio particular del inversor y no tiene por que coincidir con el ofertado por el emisor.

24.2.—VALOR DEL TITULO EN EL MERCADO

Situados al principio del período $m+1$, con $m<s$, el valor del título al tanto t es:

— Como obligación normal.

$$\mathscr{V}_m^n=\frac{\sum_{r=m+1}^{n} a_r(1+t)^{-(r-m)}}{N_{m+1}} \qquad (177)$$

— Como obligación convertible.

$$\mathscr{V}_m^c=\frac{\sum_{r=m+1}^{s} a_r(1+t)^{-(r-m)}+\sum_{r=s+1}^{n} a'_r(1+t)^{-(r-s)}+\sum_{r=s+1}^{\infty} a''_r(1+t)^{-(r-s)}}{N_{m+1}} \qquad (178)$$

— El valor que corresponde como cotización será el mayor de los dos anteriores, o sea:

$$V_m=\max\,(V_m^n;\ V_m^c) \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ s)$$

ya que en caso de caída de cotizaciones de acciones será como mínimo el que tiene como obligación. V_m^n se comporta como un colchón a la baja cuando las acciones objeto de intercambio descienden de cotización.

24.3.—DECISION DE CONVERSION

Situados en el punto s, en el cual tiene que ejercerse la opción de canje se tienen los siguientes valores:

— Como obligación normal.

$$\mathscr{V}_s^n = \frac{\sum_{r=s+1}^{n} a_r(1+t)^{-(r-s)}}{N_{s+1}} \tag{179}$$

— Como obligación convertible.

$$\mathscr{V}_s^c = \frac{\sum_{r=s+1}^{n} a'_r(1+t)^{-(r-s)} + \sum_{r=s+1}^{\infty} a''_r(1+t)^{-(r-s)}}{N_{s+1}} \tag{180}$$

La decisión será:

$$V_s^n \lesseqgtr V_s^c \Rightarrow \begin{cases} \text{conversión} \\ \text{indiferencia} \\ \text{no conversión} \end{cases}$$

25.—FINANCIACION MEDIANTE EMPRESTITOS ESPECIALES: CONCLUSIONES

Las emisiones de empréstitos son un medio fundamental para obtener las empresas fondos de financiación externa.

Permiten prestar su dinero al pequeño ahorrador al diluir la operación de préstamo en múltiples contratos simultáneos de cuantía reducida.

Son camino adecuado para diversificar riesgos los prestamistas institucionales.

Por efectuarse las transacciones en un mercado amplio y profundo, en caso de necesidad, se puede negociar con los derechos que comportan los títulos obligaciones.

En un contexto económico estático la renuncia del dinero se efectúa a cambio de un precio medido por el tanto efectivo medio obligacionista.

La sociedad emisora está dispuesta a soportar un precio de coste de la financiación, cuya cuantía viene dada por el tanto efectivo de la operación, que será inferior al de la rentabilidad esperada de la inversión en la que ha de materializar los medios obtenidos.

En consecuencia, es posible llegar a un equilibrio, en el mercado de valores, entre la oferta de dinero y la demanda de dinero para financiar inversiones.

La colocación del ahorro en títulos obligaciones proporciona una rentabilidad moderada, un alto grado de seguridad y un medio de fácil realización en el mercado.

En una economía dinámica donde exista el fenómeno de la depreciación monetaria se rompe el equilibrio estático anteriormente planteado. En estas condiciones los poseedores de obligaciones ven disminuida la rentabilidad real y el valor de reembolso de sus títulos. Las empresas emisoras obligadas al pago de unas sumas monetarias fijas aumentan sus posiciones relativas de riqueza al devolver unidades monetarias deterioradas.

Por consiguiente, los efectos que produce la depreciación son: obtención de una rentabilidad real insuficiente para la prestación de dinero y un coste o precio de financiación real bajo para quien se endeuda.

La situación a que se llega produce una huida de los ahorradores a otras inversiones que les proporcionen una nueva situación de equilibrio justo. Si las sociedades emisoras no confieren las garantías adecuadas para proporcionar una rentabilidad real suficiente no conseguirán los medios de financiación necesarios para sus inversiones.

La pérdida de poder adquisitivo del dinero se manifiesta como un tipo de riesgo nuevo y más acentuado que el de no cobro. Para tratar de paliar este peligro se amplían los atractivos de las emisiones mediante la incorporación de primas de emisión y de reembolso, de premios, de mayores cupones y se disminuye la duración de las emisiones; pero este intento de adecuación es insuficiente.

Los objetivos de los obligacionistas, para defenderse del nuevo riesgo, son: seguridad, liquidez, rentabilidad, protección contra la depreciación monetaria y posible obtención de plusvalías.

El título obligación necesita evolucionar para satisfacer las nuevas exigencias hacia unas formas mixtas entre él y las acciones, ya que éstas han demostrado cierta eficacia en mantener su valor real.

Los mecanismos de acercamiento más importantes son: la indización de empréstitos y la emisión de obligaciones convertibles en acciones.

La *indización de empréstitos* tiene por objeto hacer variar la contraprestación, de una forma automática, en función de la evolución del índice tomado como referencia.

Los índices utilizados son de tipo monetario o no monetario, internos a la actividad del emisor o externos y combinaciones de ellos.

Un índice externo de precios garantiza al obligacionista la total defensa contra la depreciación al mantener los rendimientos y el valor de reembolso en unidades reales; pero al trasladar al emisor el peligro monetario sólo podrá aceptar este compromiso aquellas sociedades cuyos productos son fácilmente adaptables a la depreciación monetaria y sus inversiones autosuficientes para liquidar los compromisos de esta forma de endeudamiento.

Los índices internos, en especial los de los beneficios, son los más convenientes para obtener medios de financiación las empresas, al vincular la cuantía de la contraprestación a los resultados de los ejercicios económicos y, en consecuencia, permiten trasladar parte del riesgo de las inversiones a los acreedores. Los obligacionistas aceptarán una inseguridad en sus rendimiento a cambio de una esperanza futura de mayores compensaciones y de una posibilidad de defensa del principal contra la depreciación, tanto mayor cuanto más eficaz sea la empresa.

A través de estas conclusiones se deduce:

1) Los índices externos son preferibles para los obligacionistas.

2) Los índices internos plantean menos riesgos al emisor.

3) Aunque hay cierto desequilibrio en los dos casos anteriores son medios interesantes para prestamistas y prestatario.

4) Un índice doble o uno mixto puede conducir a situaciones de equilibro más justas.

Las emisiones de *obligaciones convertibles en acciones* ofrecen un medio para poseer títulos con demostrada eficacia contra la depreciación y, en consecuencia, constituyen un camino válido para garantizar la forma de financiación.

La empresa tiene la posibilidad de que su emisión sea suscrita entre los demandantes de obligaciones y de acciones porque ambos encuentran, mediante la observación de la empresa entre el momento inicial y el de canje, una información que les permite tomar la decisión que más se adapte a sus conveniencias.

Es un medio para financiar, indirectamente, a sociedades de reciente creación a las que se facilitan caminos aptos para su desarrollo, y si, además, la empresa que recibe el efectivo de la emisión es la que se compromete a efectuar el canje da la oportunidad a los prestamistas de poseer un tipo de acciones que en principio quizá no hubiesen sido tomadas en consideración.

La convertibilidad proporciona una suscripción de acciones con fuertes primas y facilita la colocación de una ampliación de capital, si ésta es la forma acordada para perfeccionar la operación, con menos riesgos de caídas de las cotizaciones que los caminos normales.

Esta solución es atractiva tanto para el emisor como para los obligacionistas, ya que sus consecuencias finales son la búsqueda de unos mismos objetivos para el ahorro-préstamo y para el socio-accionista.

VII.5.—OPERACIONES DE COBERTURA DE RIESGOS DE CAMBIO Y DE TIPO DE INTERES

26.—INTRODUCCION

La evolución financiera que se viene produciendo desde la década de los años 70 ha generado continuas innovaciones en los instrumentos financieros. Algunas de estas innovaciones no son más que una adaptación de instrumentos ya existentes a las variaciones en las condiciones de mercado, mientras que otras suponen verdaderas novedades.

Uno de los ámbitos en los que ha tenido mayor incidencia el mencionado proceso de innovación ha sido el de cobertura de riesgos tanto el de tipos de cambio, comúnmente conocido como *riesgo de cambio*, como el de *tipo de interés*. Es a los instrumentos utilizados para la protección ante variaciones de las magnitudes referidas a los que se va a dedicar este epígrafe, que incluye pues los instrumentos cuya finalidad es eliminar los riesgos de tipo de interés y tipo de cambio en que pueden incurrir los agentes económicos con los diversos tipos de operaciones financieras que realizan.

El *riesgo de tipo de interés* aparece en todas las operaciones financieras cuyo diseño no incorpore una protección contra oscilaciones de los mismos, mientras que *el riesgo de tipo de cambio* se manifiesta en aquellas operaciones en las que intervienen monedas extranjeras o divisas, las cuales soportan las dos modalidades de inseguridad a las que se viene haciendo referencia.

Existen instrumentos cuya concepción y dinámica es válida para cubrir los riesgos tanto de cambio como de tipo de interés, entre éstos cabe destacar las operaciones de plazo o los denominados en términos generales futuros financieros y las opciones, mientras que hay otros específicos para proteger de variaciones inesperadas de tipos de interés, entre éstos merecen ser destacados los Forward-Forward y los Forward Rate Agreement o FRAs.

Una primera conclusión que se puede extraer es que se han concebido mayor número de herramientas financieras destinadas a eliminar los riesgos de tipos de interés que las ideadas para ofrecer una protección ante oscilaciones inesperadas de los tipos de cambio.

A continuación se ofrece una exposición de los instrumentos mencionados anteriormente, clasificándolos en función del tipo de riesgo que eliminan, que hace referencia al concepto del mismo, a su origen y a las distintas modalidades que existen respondiendo a idéntica idea, así como las características diferenciadoras de cada una de ellas.

27.—INSTRUMENTOS QUE OFRECEN PROTECCION CONTRA EL RIESGO DE CAMBIO

27.1.—COMPRA-VENTA A PLAZO DE MONEDA EXTRANJERA

Los acuerdos de compra-venta a plazo de divisas son una de las modalidades que existen en el terreno de los que pueden ser denominados genéricamente futuros financieros (que engloban acuerdos de compra y venta futura de cualquier tipo de activo o instrumento financiero), entendiéndolos en su sentido más amplio de incluir tanto las operaciones realizadas en mercados organizados como fuera de ellos, distinción en que se profundiza más adelante.

Suponen una alternativa frente a la compra-venta de contado, para cuya realización existe, a nivel internacional, un mercado organizado, dominado por la actividad bancaria, es el mercado FOREX, acrónimo de «Foreign Exchange» o Cambio Extranjero, en el cual se realizan operaciones de compra-venta de divisas al contado (el plazo de compensación suele ser entorno a dos días hábiles posteriores al cierre de la transacción) y a plazo.

La formalización de un contrato de compra-venta futura, que implica la entrega-recepción de la cantidad establecida de una moneda contra otra a un precio o tipo de cambio acordado y en una fecha predeterminada, asegura al comprador del contrato la disposición del importe necesario en la fecha precisa que la parte contraria está obligada a satisfacer.

Las dos partes que intervienen en un contrato a plazo de divisa actúan movidos por expectativas inversas en lo que se refiere a los precios futuros de la moneda propuesta. El comprador de moneda extranjera a plazo tiene expectativas de elevación futura del valor de cotización de la misma, por el contrario, al vencedor a plazo de divisa le mueve una presunción de descenso futuro del valor de la moneda objeto del contrato.

Existen, como ya se adelantó, dos posibilidades de realizar la compra-venta a plazo de divisas:

— Directamente entre las partes interesadas, regularizando lo que se entiende estrictamente por un contrato de plazo, que implica la búsqueda por el solicitante de quien pueda y tenga capacidad para cubrir sus necesidades.
— Acudiendo al mercado organizado correspondiente y efectuando lo que es propiamente un contrato de futuros [1].

Ambas alternativas pueden cubrir los requisitos del demandante y responden a un mismo fin, difiriendo entre ellas básicamente en la forma de operar y en el grado de seguridad que ofrecen a los participantes.

El *contrato de plazo* implica un acuerdo entre comprador y vendedor respecto de la compra-venta de una cierta cantidad de moneda con entrega y liquidación en fecha futura. Este tipo de operaciones vienen realizándose desde tiempo lejanos (aunque no existe información exacta sobre las mismas, dado su carácter singular) y se caracterizan básicamente porque los acuerdos se adaptan a las necesidades de quien demanda la operación, tanto en lo que se refiere a la cantidad de moneda como a la fecha de disponibilidad de la misma y al precio establecido, que se determina en base al tipo de cambio de contado [2].

Las operaciones realizadas en los mercados organizados son las denominadas *contratos de futuros*, que hacen referencia, igual que los contratos aplazados, a obligaciones de entrega-recepción de monedas y liquidación en un futuro, no obstante, se diferencian de aquéllos en la normalización a que se ven sometidos, en términos de importes y calidades de las monedas objeto de negociación, de horarios, de límites de fluctuación de las cotizaciones, de plazos de entrega y de condiciones de pago. Una característica añadida es la titularidad de los contratos concertados, que permite el traspaso a un tercero de los compromisos contraídos.

De hecho, un contrato de futuros puede ser descrito en términos generales como un acuerdo legal, transferible y estandarizado, para hacer entrega o recibir una cantidad determinada de una mercancía de cierta calidad, en un punto específico, en el futuro y a un precio determinado en el momento en que se llega al acuerdo.

---

[1] La diferencia entre contrato de plazo o aplazado y contrato de futuro puede verse con más detalle en Linde, Luis M.: *Nota sobre operaciones en futuros financieros y su regulación*, ICE, mayo 1986, pag. 140.

[2] Tipo de cambio a plazo suele expresarse en relación con el tipo de cambio al contado, sin más que añadirle el tipo «swap» (nexo entre el tipo de contado y el tipo a plazo o entre dos tipos de cambio a plazo con dos fechas distintas), cuya fórmula es:

$$\text{Tipo «swap»} = \text{Tipo contado} \cdot \frac{\text{Diferencial de tipos de interés}}{100} \cdot \frac{\text{Plazo}}{360}$$

Esta forma de operar a través de un mercado organizado ofrece un alto grado de seguridad a los participantes, ya que existe además una cámara de compensación («Clearing Corporation» o «Clearing House») encargada de asegurar el cumplimiento del contrato en las condiciones pactadas. Para ello exige, enconcepto de garantía, el depósito de una cantidad («original margin» o margen inicial, bien en efectivo, bien mediante un depósito de títulos valores propiedad del depositante y endosados a favor del agente mediador), que se determina generalmente como porcentaje sobre el valor del contrato, oscilando en la práctica entre el 2 % y el 10 %, pudiendo superar en ocasiones este porcentaje.

La presencia de la cámara de compensación implica que las obligaciones contractuales no quedan establecidas entre compradores y vendedores directamente, sino entre los anteriores y las firmas miembros de la cámara, lo que asegura la liquidez y solvencia de las operaciones.

Además de lo anterior, es característico de los mercados organizados de futuros que se vean sometidos, al término de cada sesión, a un ajuste al valor de mercado, modificando el margen inicial depositado en caso que los ajustes efectuados le hagan descender por debajo de un determinado nivel que se ven obligados a mantener, efectuando los depósitos adicionales que sean necesarios para satisfacer dichas exigencias.

Las diferencias entre las dos posibilidades de actuación que se le ofrecen al contratante de operaciones de compra-venta a plazo de moneda extranjera en aras a alcanzar su objetivo, que es en definitiva limitar o traspasar sus riesgos, radica básicamente en la mayor adaptación a las necesidades particulares, tanto en importes como moneda elegida, de los contratos de plazo, en los que para llegar a un acuerdo sólo es preciso encontrar quien asuma la parte contraria, en contra de esta ductilidad está la mayor inseguridad que presenta respecto de las operaciones realizadas en los mercados organizados, al depender su cumplimiento exclusivamente de los operadores.

Puede afirmarse que el participante que se incline por las operaciones de futuro consigue aumentar las garantías a costa de renunciar a la mayor flexibilidad que le ofrecen las operaciones de plazo.

Ya se mencionó anteriormente que no existen detalles disponibles sobre los volúmenes de negociación de las operaciones de plazo, lo que no ocurre con los contratos de futuro, cuya idea en su actual conformación se atribuye a Milton Friedman.

En lo relativo a los orígenes de este tipo de operaciones, puede decirse que, a pesar que la evidencia señala que los primeros acuerdos de plazo fueron realizados en la Edad Media para lana, es generalmente admitido que el nacimiento de estos contratos se remonta al siglo XVII en Japón, siendo las primeras materias negociadas productos agrícolas (maíz, arroz, trigo y otras). Con el tiempo van adquiriendo una mayor sofisticación, hasta mostrar los rasgos propios de un mercado moderno hacia 1730. En occidente la aparición de los contratos de futuro se produce más tardíamente, en el siglo XIX, efectuándose el primer contrato de grano en el «Chicago Board of Trade» en marzo de 1851, como resultado de la constitución de este mercado bursátil en octubre del año 1848, lo cual supuso la creación del primer mercado organizado de futuros sobre mercancías.

Cabe pensar entonces que los mercados de futuros sobre divisas se generan tomando como referencia a los que efectúan operaciones que giran sobre mercancías, que pueden considerarse los pioneros. De hecho, la formalización de los contratos de futuro sobre divisas no llega hasta el 16 de mayo de 1972 en el «Internacional Monetary Market», división internacional del «Chicago Mercantile Exchange», CME, que acogía los contratos de cambio a plazo de siete monedas extranjeras (libra esterlina, marco alemán, franco suizo, lira italiana, yen japonés, dólar canadiense y peso mexicano) respecto del dólar EE.UU., extendiéndose posteriormente a otras plazas y concentrándose en la actualidad su actividad en Londres (donde se introdujeron los contratos sobre divisas en el «London Internacional Financial Futures Exchange», LIFFE, el 30 de noviembre de 1982) y Chicago. Es generalmente el dólar EE.UU. quien juega el papel de divisa de referencia.

En la actualidad existen mercados organizados en las plazas suficientes para cubrir prácticamente las 24 horas de contratación continuada; no obstante, no todas las monedas son objeto de consideración para la realización de contratos de futuros sobre divisas, por lo que su negociación obliga a recurrir a los mercados de plazo.

Ejemplo.—Un importador compra el 1 de enero de 199X material americano por valor de un millón de dólares EE.UU. a pagar el 1 de abril. Su temor a que el dólar se fortalezca le lleva a formalizar un contrato de compra a plazo de dólares que le permita disponer del capital necesario en la fecha de entrega comprometida.

La cotización que acuerdan en el contrato es de 95,70 pts./$. Al vencimiento del contrato de compra a plazo pueden producirse dos situaciones:

a) Tipo de contado < Tipo acordado en el contrato.

Una variación en la cotización de este tipo quiere decir que las previsiones del importador no han sido correctas y que la ejecución del contrato le obliga a desembolsar la cifra comprometida (94,7 millones de pesetas), importe superior al que le hubiera supuesto acudir al mercado de contado a comprar la cantidad necesaria de dólares EE.UU.

b) Tipo de contado > Tipo acordado en el contrato.

Esta situación implica un acierto en las estimaciones del importador sobre las cotizaciones futuras de la moneda objeto del contrato, lo cual lleva a una ganancia derivada de la ejecución del contrato, que le permite obtener dólares EE.UU. en mejores condiciones que las que le ofrece el mercado de contado.

27.2.—OPCIONES SOBRE DIVISAS

Adquirir una opción sobre divisas implica comprar el derecho, que no la obligación (esto es, se adquiere la libertad de hacer uso o no del derecho que da la opción), a comprar o vender determinada cantidad de moneda extranjera a un precio establecido y en una fecha concreta o incluida dentro de un intervalo de tiempo determinado, dependiendo de que se trate de una opción europea (en la cual existe una única fecha, al vencimiento de la opción, para tomar la decisión de ejercitarla o no) o americana (que establece un intervalo y en cualquier fecha comprendida en él puede hacerse efectivo el derecho, lo que dota a esta opción de una mayor flexibilidad frente a la europea).

El derecho que se adquiere con la opción tiene un precio, denominado prima, a hacer efectivo, en el momento de formalizar el contrato, al vendedor del mismo, quien se obliga a vender o comprar respectivamente la cantidad de moneda extranjera determinada en el acuerdo en los términos establecidos. La cuantía de esta prima depende esencialmente del tiempo establecido para ejercitar el mismo, del tipo de cambio, del tipo de interés de las monedas implicadas y de la volatilidad estimada para la cotización de la moneda demandada.

Existen dos modelos clásicos de valoración de las opciones, que están basados en las investigaciones de dos equipos que parten de planteamientos distintos:

a) *Modelos en tiempo continuo. Basados en la fórmula de Black-Scholes (1973)*

Las primas o los precios de las dos categorías de opciones son, atendiendo a este modelo, respectivamente:

Valor de una opción de compra:

$$C = P_0 \cdot N(d_1) - P_e \cdot (1+i)^{-t} \cdot N(d_2) \tag{180}$$

Valor de una opción de venta:

$$V = P_e \cdot (1+i)^{-t} \cdot N(-d_2) - P_0 \cdot N(-d_1) \tag{181}$$

Siendo:

$$d_1 = \frac{\mathrm{Ln}\,\dfrac{P_0}{P_e \cdot (1+i)^{-t}}}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

Donde:

P_0: Cotización de la moneda extranjera a la fecha de formalización del contrato.

t: Tiempo que transcurre hasta la fecha de ejercicio de la opción.

i: Tipo de interés.

P_e: Precio de ejercicio de la opción.

σ^2: Volatilidad de las cotizaciones.

$N(d_1)$: Función de distribución normal y estándar. Puede interpretarse como el valor de recibir la opción si y sólo si el precio final de la misma es superior al precio de ejercicio.

$N(d_1)$: Función de distribución normal y estándar. Puede interpretarse como el valor presente del pago del precio de ejercicio si y sólo si el precio final de la misma es superior al precio de ejercicio.

b) *Modelos en tiempo discreto o modelos binomiales. Basados en el modelo de Cox-Rox-Rubinstein*

Se ha demostrado que este modelo en el límite proporciona la misma solución obtenida por el método estocástico diferencial, que es la fórmula de Black-Scholes. Es decir, son modelos convergentes en el límite.

Para que una opción se realice han de intervenir dos partes contratantes. En primer lugar ha de existir el comprador del contrato, que es la parte que adquiere el derecho incorporado en el contrato. Las motivaciones que mueven a las dos categorías que pueden existir de demandantes de una opción son opuestas, de tal modo que quien contrata una opción de compra adquiere el derecho a comprar una determinada cantidad de moneda extranjera en unas condiciones especificadas en el acuerdo suscrito; por el contrario, quien compra una opción de venta obtiene el derecho a vender cierta cantidad de moneda extranjera.

La contrapartida de los compradores de una opción es el vendedor o emisor de la misma, cuya actuación se encuentra sometida a la decisión a adoptar por el comprador, ya que asume la obligación derivada del contrato.

Las expectativas que llevan a los agentes económicos a adquirir opciones de compra y opciones de venta son de sentido inverso, así, el comprador de una opción de compra espera una elevación en el valor futuro de cotización de la moneda demandada, mientras que el comprador de una opción de venta aguarda una caída en la cotización de la moneda objeto del contrato.

La utilización de esta alternativa ha experimentado un pronunciado crecimiento en los últimos años como consecuencia de la inestabilidad de los tipos de cambio, y aunque su formalización en cuanto a contratación pública en un mercado organizado data de diciembre de 1982 en la Bolsa de Filadelfia (aunque hay autores que difieren de este origen, situándolo en noviembre de ese mismo año en la «Montreal Exchange», con una opción sobre dólares canadienses), venían siendo objeto de contratación en mercados interbancarios no institucionalizados (cuyo origen parece remontarse al mercado de opciones sobre tulipanes que existían en Holanda en el siglo XVIII), de los cuales hay indicios que continúan en la actualidad gozando de un alto volumen de negociación. A pesar de que no existe información disponible totalmente fiable al respecto, sí es posible afirmar que se han desarrollado especialmente en Londres, bajo la denominación de LICOM, «London Currency Options Market», inaugurado en julio de 1984, que se calcula absorbe las 2/3 partes del mercado extrabursátil del mundo, quedando la mayor parte del resto para Nueva York. Algunas fuentes estiman que el volumen de negociación de estas opciones alcanza el mismo nivel que las contratadas en los mercados organizados.

La diferencia en cuanto a la dinámica operativa de las dos categorías de mercados que existen es similar a la observada respecto de los contratos de futuros y contratos de plazo acordados respectivamente en los mercados organizados y en los no organizados, y de igual forma, en el mercado extrabursátil «over the counter», OTC, o «gré à gré», que es principalmente interbancario, las características de los pactos negociados son estipuladas a discreción de los participantes y pueden adaptarse exactamente a las necesidades del demandante en términos de cantidad de moneda extranjera y plazo o vencimiento al que se pretende disponer de la misma. A cambio presentan el inconveniente de no poder compensarse unas operaciones con otras (como ocurre con las realizadas en los mercados organizados, que permiten cubrir posiciones), lo que resta liquidez a este mercado y obliga en buena medida a que los contratos tengan necesariamente que llevarse a efecto. Para solventar este inconveniente se formalizan operaciones en el mercado organizado.

En realidad son dos mercados distintos y cada uno de ellos presenta ventajas e inconvenientes sin que ninguno sea cualitativamente mejor que el otro, sino más bien han de ser percibidos como dos mercados complementarios e interdependientes, de forma que cuando un banco adopta una opción en el mercado extrabursátil, cubrirá posiciones en los mercados organizados.

27.3.—OPCION SOBRE FUTUROS EN DIVISAS U OPCION SOBRE CONTRATOS A PLAZO DE DIVISAS

Esta alternativa implica una sofisticación mayor (de hecho, pueden ser incluidos en los instrumentos que se vienen denominando de segunda generación), que se alcanza con la combinación de las dos alternativas anteriores: opciones y compra a plazo.

La diferencia entre las dos opciones que dan rótulo a esta nueva alternativa se halla, como en los casos particulares de cada una de las dos posibilidades cuya agregación hace aparecer éstas nuevas, en que los acuerdos sean o no materializados en mercados organizados, diferencia que, por haber sido comentada con suficiente detalle en los epígrafes correspondientes, no va ser objeto de mayor consideración en éste.

El objeto de la opción es, en este caso, una compra-venta a plazo de determinada cantidad de moneda extranjera, lo cual implica que los contratantes toman una posición más larga a la que podía adoptar con las alternativas anteriores.

El acuerdo de la opción establece el precio al que podrá ser adquirido el contrato de plazo sobre la moneda demandada, de forma que al vencimiento de la opción ésta, lógicamente, sólo será ejercitada en caso que el precio establecido en la misma sea inferior al precio corriente de los contratos de futuro sobre la moneda que se realicen en esos momentos.

Las opciones sobre contratos de futuros de divisas comenzaron a negociarse en los mercados organizados el 24 de enero de 1984, concretamente en el Chicago Mercantil Exchange, siendo el primero de los contratos efectuados en marcos alemanes, ampliándose en los años siguientes hasta ser objeto de contratación en la actualidad las principales monedas (entre las primeras que se incoporaron pueden señalarse la libra esterlina y el franco suizo del 25 de febrero de 1985, el yen japonés el 5 de marzo de 1986 y el dólar canadiense el 18 de julio de ese mismo año.

No se dispone de detalles acerca de la contratación de las opciones sobre contratos a plazo de divisas que se realizan en los mercados interbancarios, aunque sí sabe decir que son menos usuales en la práctica que los acordados en los mercados organizados debido a la escasez de garantías que presentan en comparación con ellos, tanto en la determinación del mismo de las opciones como al grado de cumplimiento de los compromisos de las partes contratantes.

28.—INSTRUMENTOS QUE OFRECEN PROTECCION CONTRA EL RIESGO DE TIPOS DE INTERES

28.1.—CONTRATOS FORWARD-FORWARD

Este tipo de contratos consisten en la realización simultánea de dos operaciones de distinta naturaleza: un préstamo en el mercado de contado a tipo de interés fijo, cuya duración es la que resulte de sumar la duración del préstamo a realizar en el futuro que quiere protegerse y el período que transcurre desde la fecha del acuerdo forward-forward y la de inicio del préstamo futuro y un depósito o colocación de los fondos así obtenidos a un tipo de interés fijo desde la fecha de formalización del forward-forward hasta el comienzo del futuro préstamo a proteger.

El tipo resultante del préstamo futuro, derivado de la combinación del préstamo y de la colocación de los fondos, es el que se deduce de solucionar la siguiente expresión.

$$i_f = \left[\frac{(1+i_p)^{t_p}}{(1+i_c)^{t_c}}\right]^{1/t_f} - 1 \qquad (182)$$

Donde:

i_p: Tipo de interés del préstamo concertado en la fecha del acuerdo forward-forward.

t_p: Duración del préstamo inicial.

i_c: Tipo de interés de la colocación de fondos.

t_c: Duración de la colocación de fondos.

t_f: Duración de la operación de endeudamiento prevista para realizar en el futuro.

Si las operaciones realizadas son a corto plazo, o sea , tiene duraciones inferiores a un año, la fórmula que permite determinar el tipo resultante es:

$$i_f = \left[\frac{\left(1+\frac{t_p}{360}\cdot i_p\right)}{\left(1+\frac{t_c}{360}\cdot i_c\right)} - 1\right]\cdot\frac{360}{t_f} \qquad (183)$$

Ejemplo.—Una empresa prevé hoy, 1-I-199X, la necesidad de disponer de 100 millones de pesetas en enero del año próximo durante dos años, y se plantea la formalización de un contrato forward-forward, que le garantiza la cobertura de sus necesidades.

Suponiendo que el tipo de interés del mercado monetario a tres años es el 12 % y el tipo del mercado monetario a un año es del 11 %, la realización del contrato supone un coste de:

$$i_f = \left[\frac{(1+0{,}12)^3}{(1+0{,}11)}\right]^{1/2} - 1 = 0{,}125034 \approx 12{,}50\ \%$$

Cuando existe elevada volatilidad en los tipos de interés o incertidumbre sobre su evolución, puede ocurrir que la denominada curva de tipos sea inversa, esto es, que los tipos a corto plazo sean más elevados que los tipos a largo plazo. En este caso concreto puede ser ventajoso la realización de un contrato forward-forward.

Ejemplo.—La misma empresa del ejemplo anterior se plantea cubrir sus necesidades con una situación de mercado sustancialmente distinta: el tipo de interés del mercado monetario a un año es el 11 %, mientras que el tipo del mercado monetario a tres años es sólo del 10 %, la realización del contrato supone un coste inferior al del préstamo actual, concretamente:

$$i_f = \left[\frac{(1+0{,}10)^3}{(1+0{,}11)}\right]^{1/2} - 1 = 0{,}095034 \approx 9{,}50\ \%$$

El contrato forward-forward ofrece la seguridad de disponer de los fondos necesarios en la fecha prevista en unas condiciones basadas en las que se derivan de la situación existente en el momento de formalización del contrato. El éxito de la operación dependerá de la evolución de los tipos de interés, no obstante, en ocasiones puede ser muy ventajosa la utilización de este tipo de contratos.

28.2.—«FORWARD RATE AGREEMENTS», FRAs O CONTRATOS A PLAZO DE TIPO DE INTERES, COMUNMENTE DENOMINADOS CONTRATOS A PLAZO DE INTERES

Un contrato a plazo de tipo de interés es aquel en virtud del cual las dos partes contratantes acuerdan el tipo de interés a computar sobre una cantidad referencial, con un vencimiento específico y empezando en una fecha concreta, que coincide con la fecha de liquidación.

Como en todo tratado, para que pueda ser realizado un FRA es necesaria la intervención de dos contratantes, que son inducidos a participar por expectativas opuestas sobre los movimientos futuros de los tipos de interés.

El comprador de un FRA desea protegerse de incrementos futuros de los tipos de interés, de forma que desearía en el momento de la firma del contrato y como alternativa al mismo establecer idéntico tipo de interés sobre un depósito que fuera a obtener en el futuro.

Por el contrario, el vendedor de un FRA desea resguardarse de futuros descensos en los tipos de interés. La venta de un contrato a plazo sobre tipos de interés es análoga a la realización de un préstamo a desembolsar en el futuro.

El mercado de los FRAs está dominado por el dólar EE.UU., aunque existen contratos denominados en libras, francos suizos, marcos alemanes, ECUs, e incluso en pesetas. Su ámbito es fundamentalmente interbancario, negociándose más de la mitad de los contratos con intervención de «brokers».

No se trata de acuerdos estándar que se negocien en mercados organizados, sino de instrumentos simples, flexibles, sin márgenes y formulados a medida de las necesidades de los demandante, ajustándose a las características de los mismos en lo que se refiere a cuantías, plazos y demás aspectos de las operaciones.

A pesar de la generalización anterior en lo que se refiere a la realización de los FRA, existe en Londres desde 1985 lo que podría calificarse como una estandarización de la documentación, los denominados términos FRABBA, que provienen de un folleto sobre los FRAs emitido por la British Banker's Association de forma que todas las operaciones interbancarias realizadas en esta ciudad emplean dichos términos y condiciones, salvo especificación en sentido contrario.

En España la aparición reglada de este tipo de acuerdos tiene lugar en 1986, con la emisión por el Banco de España de la Circular 12/1986 de 17 de junio, dirigida a entidades delegadas. En la actualidad se están contratando FRAs sobre las normas marco establecidas por la Comisión de Estudios del Mercado Monetario (contrato tipo FRA-CEMM) el 3 de marzo de 1988, asumidas por la mayoría de los intervinientes.

El mecanismo de los contratos a plazo de tipos de interés exige conocer los siguientes datos, que han de venir reflejados en el documento suscrito por las partes contratantes:

— La fecha de contratación del FRA.

— La fecha de vencimiento del FRA, que coincidirá con el comienzo de la operación futura a cubrir.

— El vencimiento de la operación futura.

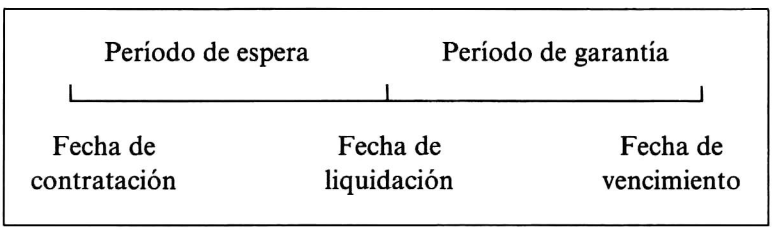
— El importe del capital nocional.

— El tipo de interés acordado en el contrato FRA o garantizado.

— El tipo de interés de referencia.

La duración del contrato de los FRAs se cita por ejemplo como «tres contra seis meses», que se interpreta como el tipo de interés de un intervalo de tres meses (la diferencia entre los dos plazos anteriores) a contar transcurridos tres meses.

El funcionamiento de un contrato FRA permite diferenciar dos intervalos distintos, que pueden denominarse período de espera, el cual está delimitado por la fecha de contratación del FRA y la de vencimiento del mismo, y el período de garantía, que, como su nombre indica, es aquel en el que está garantizado el tipo de interés y va desde la fecha de vencimiento o liquidación del FRA hasta la fecha de vencimiento de la operación futura. En un eje de tiempos, tanto las fechas referidas como los períodos mencionados pueden ser representados del siguiente modo:



La liquidación se produce al contado y la fecha en que se hará efectiva coincide con la del inicio del contrato. Ese día se calcula la diferencia entre el tipo de interés acordado en el FRA y el tipo de referencia especificado en el contrato (habitualmente el LIBOR), y esta diferencia se aplica a la cantidad establecida como principal y al período de duración del depósito. Si el tipo de referencia es superior al tipo acordado, el vendedor abonará la diferencia al comprador y viceversa.

La fórmula de cálculo de los precios de los contratos FRAs o el tipo de los mismos, que incorpora el tipo de interés de los dos períodos contratados es la siguiente:

$$T_c = \frac{(T_M \cdot ND_M) - (T_m \cdot ND_m)}{\left(1 + \dfrac{T_m \cdot ND_m}{36.000}\right) \cdot (ND_M - ND_m)} \tag{184}$$

Donde:

T_c: Tipo de interés del contrato FRA.
T_M: Tipo de interés del período mayor.
ND_M: Número de días del período mayor.
T_m: Tipos de interés del período menor.
ND_m: Número de días del período menor.

Por ejemplo, el cálculo de los precios aplicables a un FRA de «tres meses contra seis meses» requiere utilizar la información del mercado, tanto de tipo comprador como vendedor, según sea el caso. Así, si la información sobre los tipos del mercado de depósitos interbancarios es la que se refleja en el cuadro:

Período	Número de días	Tipo de interés	
		Tomador	Prestador
1 mes	30	12,8750	13,0000
2 meses	62	12,7750	12,8750
3 meses	91	12,6250	12,7500
6 meses	183	12,5000	12,6250
9 meses	275	12,5000	12,6250
1 año	366	12,3750	12,5000

los resultados obtenidos para cada una de las posibilidades son:

Tipo comprador:

$$T_c^c = \frac{(12,500 \cdot 183) - (12,750 \cdot 91)}{\left(1 + \dfrac{12,750 \cdot 91}{36.000}\right) \cdot (183 - 91)} = 11,87015$$

Tipo vendedor:

$$T_c^v = \frac{(12,625 \cdot 183) - (12,625 \cdot 91)}{\left(1 + \dfrac{12,625 \cdot 91}{36.000}\right) \cdot (183 - 91)} = 12,23456$$

La liquidación de los contratos se efectúa al comienzo del período contratado y los importes a abonar se determinan de acuerdo con la siguiente expresión:

$$C_A = \frac{(T_r - T_a) \cdot ND \cdot VN}{36.000 + (T_r \cdot ND)}$$

Donde:

C_A: Importe de los intereses compensatorios de liquidación.
T_r: Tipo de referencia establecido en la fecha de inicio del período contratado.
T_a: Tipo de interés acordado en el contrato FRA.
ND: Número de días del período cubierto por el contrato FRA.
VN: Importe nominal referencial del contrato FRA.

En caso que a la fecha de liquidación el tipo de interés acordado fuera superior al tipo de referencia, el importe de los intereses se obtiene aplicando la fórmula:

$$C_A = \frac{(T_a - T_r) \cdot ND \cdot VN}{36.000 + (T_r \cdot ND)}$$

Ejemplo.—Supongamos que el 1-I-1992 una institución contrata con un Banco venderle un contrato FRA por un valor nominal de 10 millones de pesetas 6 contra 12 meses, es decir, vencimientos 1-VII-1992 contra 1-I-1993 al cambio de 12,50 %, siendo los días entre las fechas 183.

Será necesario esperar al día 1-VII-1992 para saber el tipo de referencia (LIBOR) de 6 meses y, en consecuencia, para conocer cuál de las partes habrá de pagar a la otra.

a) LIBOR día 1-VII-1992 a 6 meses: 11,75 %.

En este caso el Banco ha de pagar a la institución la cantidad resultante de resolver la expresión:

$$C_A = \frac{(12{,}50 - 11{,}75) \cdot 183 \cdot 10^7}{36.000 + (12{,}50 \cdot 183)} = 358.472{,}09 \text{ pts.}$$

b) LIBOR dia 1-VII-1992 a 6 meses: 13,00 %.

En este caso es la institución la que ha de abonar al Banco el importe que resulte de solucionar la expresión:

$$C_A = \frac{(13{,}00 - 12{,}50) \cdot 183 \cdot 10^7}{36.000 + (13{,}00 \cdot 183)} = 238.411{,}63 \text{ pts.}$$

28.3.—FUTUROS DE TIPOS DE INTERES

Un contrato de futuros sobre tipo de interés es un compromiso de dar o tomar un montante estándar en una fecha futura, también estandarizada, de un activo monetario o financiero con duración fija, que producirá un tipo de interés determinado en el mercado a la fecha de conclusión del contrato.

Esta categoria de acuerdos encajan en los denominados genéricamente futuros financieros, que abarcan contratos que implican compromisos de entrega-recepción futura de instrumentos financieros, de más reciente aparición que los contratos de futuros sobre mercancías (aunque basados en aquéllos), que han constituido una sólida parte de la vida comercial.

En la actualidad existen futuros financieros cuyo objeto puede ser divisas (estos acuerdos han sido analizados en un epígrafe precedente), tipos de interés sobre determinados activos, índices bursátiles y recientemente se están experimentando sobre determinados valores.

La formalización y dinámica operativa de los contratos de futuros de tipos de interés es similar a la detallada para los futuros de divisas. Como todos los futuros financieros, se trata de contratos estandarizados en lo que se refiere al tipo de instrumento objeto de negociación, cantidad del mismo y fecha de entrega. Asimismo son acuerdos pactados no directamente entre los contratantes, sino que una Cámara de Compensación se interpone entre ambas partes, garantizando el cumplimiento de todos los contratos, para lo cual aplica el sistema de márgenes.

Los contratos de futuros de tipos de interés obedecen al hecho de que los activos financieros varían su precio con el fin de ajustar su rentabilidad a los tipos de mercado vigentes en cada momento.

Al moverse los precios de los activos financieros y los rendimientos que éstos proporcionan en dirección opuesta, comprar a futuro un instrumento financiero será vender su tipo, y viceversa.

En general la cotización de un instrumento en los mercados de futuros de tipos de interés es un índice en base porcentual y se obtiene restando de 100 el tipo de interés anualizado del contrato de futuros en cuestión. Cuando sube el tipo de interés baja la cotización y, por tanto, el valor del contrato de futuros.

Existe una fluctuación mínima establecida para este tipo de operaciones, a aplicar sobre el valor nominal de los contratos denominada punto básico o tick.

Las partes que intervienen en una operación de futuro de tipo de interés se ven impelidas a participar por expectativas opuestas acerca de las variaciones de los tipos en el futuro, de tal forma que el comprador de un contrato de estas características espera que el tipo de interés futuro sea inferior al actual, mientras que el vendedor de un acuerdo de futuro tiene expectativas sobre elevación en los tipos de interés venideros.

El interés principal de los contratantes de un futuro de tipo de interés es compensar su posición en el mercado de contado, de hecho, aproximadamente en el 95 % de los casos cancelan las operaciones antes del vencimiento.

Este tipo de operaciones debutaron en Chicago Board of Trade en agosto de 1977, con los contratos sobre obligaciones del Tesoro Americano, concretamente los «U.S. Teasury Bond Futures». En la actualidad los instrumentos negociados habitualmente sobre un mercado de tipo de interés son bonos del Tesoro Americano, Certificados de Depósito, Obligaciones del Estado a largo plazo y Eurodólares.

En España la apertura a este tipo de contratos tiene lugar con la Resolución de 21 de marzo de 1989 sobre operaciones a plazo, futuros y opciones sobre Deuda del Estado Anotada, de la Dirección General del Tesoro y Política Financiera. Es previsible que en el futuro el objeto de contratación se amplíe a un mayor número de instrumentos financieros.

Ejemplo.—Supóngase una institución financiera que tiene el 2. de enero de 1992 un depósito a 3 meses de 15 millones de libras esterlinas que ha de renegociar a su vencimiento, el tipo de interés actual a ese plazo es del 7,5 %.

Desea protegerse de un posible incremento en los tipos de interés, para lo cual se plantea acudir al mercado de futuros de tipo de interés. El tipo de contrato adecuado para cubrir el riesgo es: futuro de tipo de interés sobre la libra esterlina a 3 meses, de LIFFE, cuyo nominal es de 500.000 £ y el valor de la fluctuación mínima 12,5 £.

Dadas las características del contrato, necesita vender 30 contratos de tipo de interés sobre libra esterlina a 3 meses, con vencimiento en junio (primer mes de entrega posterior al momento en que se renueva el depósito), a un precio de 92,1.

Transcurridos los tres meses, la institución ha de renovar el depósito por el mismo importe y plazo ($15 \cdot 10_6$ £ a 3 meses) en el interbancario y caben dos posibles situaciones:

a) El tipo de interés del mercado interbancario: 8 %.

Esta subida del tipo de interés supone un mayor coste del nuevo depósito, de 18.750 £ —(8 %-7,5 %) $\cdot 15 \cdot 10^6 \cdot 1/4$ año—. No obstante, una elevación de los intereses ocasiona una caída del precio de los contratos de futuros, por lo que puede comprar los 30 contratos anteriores a un precio de 91,6, lo que supone una ganancia de idéntico importe a la pérdida anterior de 18.750 £-50 tick (92,1-91,6) · 12,5 £ · 30 contratos—, esta cobertura perfecta se debe a que la diferencia entre los tipos se ha mantenido constante en el intervalo.

b) El tipo de interés del mercado interbancario: 7,25 %.

Esta situación conlleva la no realización de las previsiones realizadas por la institución financiera, la cual obtendría una ganancia de la renovación del depósito de 9.375 £ —(7,5 %-7,25 %) $\cdot 15 \cdot 10^6 \cdot 1/4$ año— que compensaría la pérdida ocasionada por la operación de futuros (25 tick (92,35 − 92,1) · 12,5 £ · 30 contratos = 9.375 £).

28.4. OPCIONES SOBRE TIPOS DE INTERES

Bajo la denominación genérica de opciones sobre tipos de interés cabe incluir dos categorías distintas de operaciones, aunque presentan la característica común de preservar a sus tenedores de oscilaciones imprevistas en los tipos de interés futuros. Estas son respectivamente las opciones directas sobre deuda o sobre inversiones y las opciones sobre diferencia de tipos de interés.

Y es que los acuerdos de esta naturaleza se establecen generalmente sobre títulos financieros o sobre depósitos bancarios que generan intereses, pudiendo recaer la opción sobre los instrumentos financieros o sobre los contratos de futuros de activos financieros subyacentes.

En líneas generales, las partes que intervienen en un contrato de estas características son el comprador de la opción, ya sea de compra o de venta y el emisor de la misma. El suscriptor de una opción de compra se previene con este acto de las consecuencias negativas que puede tener una caída de los tipos de interés, mientras que el comprador de una opción de venta sobre tipos de interés pretende con esta acción eludir el riesgo que puede suponerle una elevación futura de los tipos de interés.

El comprador de una *opción de deuda* adquiere el derecho a endeudarse a un tipo fijo predeterminado y bien en una fecha futura establecida o bien durante el período de tiempo estipulado en el contrato.

Por su parte, el comprador una *opción de inversión* detenta el derecho a colocar un determinado importe a un tipo de interés previamente establecido en una fecha futura.

El poseedor de la opción solamente hará efectivo su derecho en caso que la situación de mercado en la fecha de ejercicio de la opción así lo aconseje, esto es, cuando sea desfavorable respecto de las condiciones acordadas en el contrato. De esta forma, una opción de compra será ejercitada cuando el tipo de interés de mercado es superior al de ejercicio de la misma, por el contrario, la opción de venta se hará efectiva cuando la situación sea la opuesta.

Las *opciones sobre diferencia de tipos de interés* ofrecen a su poseedor el derecho, que no la obligación (como toda clase de opción, cualquiera que sea el objeto u activo sobre el que gire), a recibir un tipo de interés base convenido (denominado strike rate) en una determinada fecha futura.

Así, el comprador de una opción de diferencia de tipos de interés obtiene el derecho no a endeudarse en unas condiciones preestablecidas, sino a que el emisor de la opción le transfiera la diferencia entre el tipo de interés concertado y el de mercado en la fecha de ejercicio de la opción, imputado sobre el importe nominal que figura en el contrato.

El importe a recibir en caso de ejercitar la opción es el que se obtiene de solucionar la siguiente expresión:

$$C_R = \frac{(i_r - i_0) \cdot ND \cdot VN}{36.000 + (i_r \cdot ND)} \tag{185}$$

Donde:

i_r: Tipo de interés de referencia a la fecha de ejercicio de la opción.
i_0: Tipo de interés de la opción.
ND: Plazo de amortización de la deuda o de mantenimiento de la inversión (en días).
VN: Valor nominal de la deuda.

En caso que el tipo de referencia sea, como es habitual, el de un empréstito público, el comprador ejercita su opción si a la fecha de ejercicio de la misma el anterior tipo es superior al tipo de interés de la opción, lo que le permite recibir la diferencia de los mismos y suscribir el empréstito en las condiciones de mercado. En caso contrario, el comprador de la opción desestima el derecho que ésta le confiere y suscribe el empréstito en las condiciones de mercado, beneficiándose de la caída del tipo de interés.

La adquisición de una opción sobre diferencia de tipos girada sobre una inversión confiere a su tenedor el derecho a que el emisor de la opción le transfiera la diferencia entre el tipo de la opción y el tipo de mercado, en la fecha de la inversión y por un período determinado.

Al vencimiento de la opción si el tipo de referencia (tipo de interés de mercado para la duración de la inversión sobre la que gira la opción) es inferior al tipo de la opción, su poseedor la ejercitará obteniendo la diferencia entre los dos tipos anteriores.

El importe que corresponde recibir en este caso al comprador de la opción es, siguiendo con la misma nomenclatura desarrollada hasta aquí, el que resulta de solucionar la expresión:

$$C_R = \frac{(i_0 - i_r) \cdot ND \cdot VN}{36.000 + (i_r \cdot ND)} \tag{186}$$

Donde ahora:

VN: Valor nominal de la inversión.

En caso contrario, esto es, si el tipo de la opción es menor que el de referencia, el comprador del derecho no hará uso del mismo y realizará la inversión en las condiciones de mercado, favoreciéndose de la subida del tipo de interés.

El precio del derecho adquirido con la suscripción de la opción tiene un precio, el cual se ve influido básicamente por la diferencia entre los tipos de interés acordado y de mercado, por la fecha de ejercicio de la opción y por la volatilidad de los tipos.

En España está permitida la realización de opciones de tipo de interés desde 1989, concretamente desde que la Resolución de 21 de marzo de ese año, ofrecida por la Dirección General del Tesoro y Política Financiera, perteneciente al Ministerio de Economía y Hacienda, permitió su implantación y ofreció el soporte reglamentario para su realización.

Ejemplo 1.—A 1 de enero de 1992 una empresa adquiere una opción sobre un empréstito a un año, de 1 de julio de 1992 a 1 de julio de 1993, sobre un importe de 500 millones de pesetas.

Suponiendo:

- **Tipo de interés de la opción: 12,75 %.**
- **Prima o precio de la opción: 0,25 % del importe del contrato.**

Existen dos posibles situaciones de mercado a la fecha de ejercicio de la opción:

a) Tipo de mercado: 12,00 %. En este caso a la empresa no le interesa hacer uso del derecho que le confiere la opción, ya que el mercado le proporciona financiación a un coste inferior. El coste de la operación ha sido la prima pagada por la misma.

b) Tipo de interés de mercado: 13,50 %. En este supuesto a la empresa le interesa ejercitar la opción, ya que puede obtener fondos del emisor de la misma al tipo comprometido, más bajo que el de mercado.

Ejemplo 2.—Una compañía compra el 1-I-1992 una opción sobre diferencia de tipos de interés, concertada sobre una inversión a 3 meses, de 1 de mayor a 1 de agosto de 1992, por un importe de 1.000 millones de pesetas.

Las condiciones del contrato son las siguientes:

t_0 = 9 %.
t_r = Tipo de interés de mercado: ½ %.
Fecha de ejercicio de la opción: 1 de mayo de 1992.

Las posibles situaciones que se pueden dar a la fecha de ejercicio de la opción son:

a) Tipo de mercado: 8 %. En este caso la empresa ejercita la opción, ya que puede obtenerse por ello:

$$C_R = \frac{(0{,}09 - 0{,}075) \times 90 \times 1.000 \cdot 10^6}{36.000 + (0{,}075 \cdot 90)} = 37.492{,}97$$

Puede efectuar la inversión al tipo de mercado para ese tipo de operaciones.

b) Tipo de mercado: 11 %. En este caso la empresa no ejercita la opción y tiene posibilidades de efectuar la inversión al tipo de mercado para ese tipo de operaciones, esto es al 10,50 %.

BIBLIOGRAFIA

ALCAUSA MARTIN, J.: *La Bolsa. Inversiones y financiación.* Málaga.

ANGULO RODRIGUEZ, L.: *La financiación de empresas mediante tipos especiales de obligaciones*, Publicaciones Real Colegio España en Bolonia. Zaragoza, 1968.

BARTOLOME LABORDA, B.: *La Bolsa en el mundo.* Ed. Deusto, Bilbao.

BELDA-TROCONIZ: *Síntesis de Matemática Financiera.* Bilbao.

BERGES, A., y MANZANO, D.: *Tipos de interés de los pagarés del Tesoro.* Ariel, Barcelona.

BIERMAN, H., y SMIDT, S.: *El presupuesto de bienes de capital.* Fondo de Cultura Económica, México.

BOLSA DE MADRID: *Curso de Introducción a Bolsa.* Instituto Español de Analista de Inversiones, Madrid.

BUENO, E., CRUZ, I., y DURAN, J.: *Economía de la empresa. Análisis de las decisiones empresariales.* Pirámide, Madrid.

CACCIA FESTA, R.: *Lezioni dí Matemática Finanziaria.* Ed. Liguori, Nápoles.

DEAN, J.: *Política de inversiones.* Labor, Barcelona.

DE FOSSE, G.: *La bourse de valeurs.* Presses Universitaires de France, París.
«Les formes nuvelles d'emprunts obligataíres», *Rev. de la Banca de France.*
Les Valeurs Mobilieres. Presses Universitaires de France, París.

DE PABLO, A., FERRUZ, L., y SANTAMARIA, R.: *Análisis práctico de las decisiones de inversión y financiación en la empresa.* Ariel, Barcelona.

DOMINGUEZ MACHUCA, J. A., DURAN OLIVA, S., y MARTIN ARMARIO, E.: *El subsistema de inversión y financiación de la empresa.* Pirámide, Madrid.

ESTRUGO, J. A.: *Matemática Financiera.* Madrid.

FERNANDEZ AMATRIAN, J.: *La Bolsa.* Ed. Deusto, Bilbao.

FERNANDEZ BLANCO, M.: «La transparencia del nuevo Mercado de Valores», *Estrategia Financiera.*
«El mercado español de deuda anotada: una perspectiva empresarial», *Cuadernos de Gestión.*

FERRER JAUME, L.: *Cálculo Financiero.* Ed. Labor, Barcelona.

FINETTI, B.: *Leçons de Mathematique Financieres.* Ed. Dunod, París.

FORNES RUBIO, F.: *Curso de Algebra Financiera.* Ed. Boch, Barcelona.

FREIXAS, X.: *Futuros financieros.* Alianza, Madrid.

GIL PELAEZ, L.: *Matemática de las Operaciones Financieras.* Ed. AC, Madrid.

GOMEZ MUR, L.: *Lecciones de Algebra Financiera.* Ed. Boch, Barcelona.

GONZALEZ CATALA, V. T.: *Enfoque práctico de las operaciones de la Matemática Financiera.* Ed. Ciencias Sociales, Madrid.
Financiación empresarial mediante empréstitos especiales. Tesis doctoral.

GONZALEZ GALE, J.: *Matemáticas Financieras (intereses y anualidades ciertas).* Ed. El Ateneo, Buenos Aires.

HOSMALIN, G.: *Inversiones, rentabilidad y progreso técnico.* Hispano Europea, Barcelona.

INSOLERA, F.: *Curso de Matemática Financiera y Actuarial.* Ed. Aguilar, Madrid.

LAMOTHE FERNANDEZ, P.: «Fuentes de financiación de la empresa (II): Financiación a corto plazo», *Actualidad Financiera.*

LAMSON, J.: «Les obligations covertibles à tout moment», *Bulletin Trimestriel de l'Institut des Actuaires Français,* 1972.

LARCIER, R. L., y VUYST, R. DE: *El análisis financiero en Europa.* ICE Ediciones, Madrid.

LEVI, E.: *Curso de Matemática Financiera y Actuarial.* Ed. Boch, Barcelona.

LOBEZ URQUIA, J.: *Matemática Financiera con nociones de Cálculo Actuarial.* Barcelona.

LOPEZ NAVARRETE, G.: *La inversión de la Banca, y de las Cajas de Ahorros.* Barcelona.

MAO, J. C.: *Análisis financiero.* El Ateneo, Buenos Aires.

MARKOWITZ, H. M.: *Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments.* John Wiley.

MARTINEZ CEREZO, A.: *Diccionario de la Banca y Bolsa.* Madrid.

MASSE, P.: *La elección de las inversiones*. Ed. Sagitario, Barcelona.

MENEU FERRER, V., y CUÑAT EDO, V.: *El mercado de renta fija*. Ed. Bolsa de Valencia.

MOORE, J. H.: *Manual de Matemáticas Financieras*. Ed. UTEHA, México DF.

NIETO DE ALBA, V.: *Matemática de las Operaciones Financieras*. Ed. ICAI, Madrid.

NUÑEZ-LAGOS, J. M.: «Seguridad y liquidez de las inversiones bursátiles», *Rev. Económica Financiera Española*, núm. 25, Madrid.

ORTEGA, R.: «La reforma del Mercado de Valores», *Papeles de Economía Española*.

PEREZ DE ARMIÑAN, G.: *Legislación bancaria española*. Ed. Banco de España, Madrid.

PEUMANS, H.: *Valoración de proyectos de inversión*. Deusto, Bilbao.

PORTEFIELD, JAMES T. S.: *Decisiones de inversión y costes de capital*. Herrero Hermanos. Sucesores, S. A., México.

PRIETO PEREZ, E.: *Análisis financiero de los empréstitos obligaciones*. Ed. ICE, Madrid.

Un análisis de las variables que influyen en el precio bursátil. Ed. Bolsa de Madrid.

Teoría de la inversión. ICE Ediciones, Madrid.

«Empréstitos totalmente indizados: Análisis y determinación del tanto efectivo», *Revista Española de Financiación y Contabilidad*. Madrid.

La diversificación de una cartera de valores. Anales del Instituto de Actuarios Españoles, Madrid.

Una análisis de las variables que influyen en el precio bursátil. Ed. Bolsa de Madrid.

PUIG, J. V., y RENAU, J. J.: *Análisis y evaluación de proyectos de inversión*. Hispano, Madrid.

ROBICHEK, A., y MYERS, S. C.: *Decisiones óptimas financieras*. Herrero Hermanos. Sucesores, S. A., México.

RODRIGUEZ SASTRE, A.: *Operaciones de Bolsa*. Ed. Revista de Derecho Privado. Madrid.

RODRIGUEZ RODRIGUEZ, A.: *Matemática de la financiación*. Ediciones de la Universidad de Barcelona.

ROSENFELD, F.: *Análisis de valores mobiliarios*. Ed. Hispano Europea, Barcelona.

Analyse Financiere et Gestión de Portefeuilles. Ed. Dunod, París.

La valoración de las acciones. Ed. Deusto. Bilbao.

Proyectos de inversión. Ed. Hispano Europea.

RUIZ TATAY, E.: *Lecciones de Matemática Financiera*. Madrid.

SCHNEIDER, E.: *Teoría de la inversión*. El Ateneo, Buenos Aires.

SERVICIO DE ESTUDIOS DEL BANCO URQUIJO: *La inversión bursátil*. Ed. Moneda y Crédito. Madrid.

SHARPE, W.: *Teoría de cartera y del mercado de capitales*. Ediciones Deusto.

SIBIRANI, F.: *Lezioni de Matemática Generale e Finanziaria*. Ed. A. Milani, Padova.

SOLE VILLALONGA, G.: *El mercado español de valores: Análisis económico*. Fundación Universidad Empresa, Madrid, 1978.

SOLOMON, E.: *Théorie de la Gestión Financière*. Dinod, París.

SUAREZ SUAREZ, A.: *Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa*. Ed. Pirámide. Madrid.

TEICHOROEW, D., ROBICHEK, A., y MONTALBANO, M.: «Mathematical Analysis of Rates of Return under certainty», *Management Science*.

TOBAR OCHOA DE ALBA, J. M.: *Banca para empresa*. Ed. Deusto, Bilbao.

VALERO, F. J.: *Opciones en instrumentos financieros*. Ariel, Barcelona.

VALLBE RIBERA, M. A.: *Lecturas sobre Bolsa*. Ed. Instituto de Estudios Fiscales. Madrid.

VAN HORNE, J. C.: *Fundamentals of Financial Management*. Engewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1964.

WESTON, J., y WONDS, D.: *Teoría de la financiación de la de la empresa»*. Ed. Gustavo Gili, Barcelona, 1970.

LIBROS PUBLICADOS DE ESTA COLECCION

Enfoque práctico de las operaciones de la matemática financiera
González Catalá, Vicente T.

OTRAS COLECCIONES DE LA EDITORIAL

COMUNICACION

Los grandes de la franquicia. El secreto de su éxito
Bolea de Anta, Adelaida

Manual para la excelencia comercial. La venta paso a paso
Molero Ayala, Víctor M.

Comunicación de las empresas. Las nuevas obligaciones
López Lita, Rafael

La cara oculta de la publicidad. Cómo triunfar y pasarlo bien
Pino, Angel del

La gestión de la comunicación. Guía profesional
Johnson Hans

Relaciones internacionales
Rafael Calduch

Lecciones de empresa informativa
Tallón, José

ECONOMIA

La transición económica de España
Martínez Cortiña, Rafael, y García Castillo, Julio

Banca y Finanzas: Competencia y tendencias
Bröker, Günther, y Martínez Cortiña, Rafael

La economía soviética. Más allá de la Perestroika
Palazuelos, Enrique

La economía USA en los 90
Entre la recesión y la recuperación de la hegemonía
Rosales, Osvaldo

Los nuevos competidores internacionales
Hacia un cambio en la estructura industrial mundial
Berzosa, Carlos

EUROPA

1992. Estrategias para el Mercado Unico
James W. Dudley

Comunidad Europea. Lo que Vd. debe saber
Roney, Alex

CONTABILIDAD Y AUDITORIA

El Plan General de Contabilidad 1990
Aspectos contables de la Reforma Mercantil
Alfonso López, José Luis, y Quesada Sánchez, Francisco Javier

Normativa y Contabilización de Riesgos. Contingencias e indemnizaciones
Quesada Sánchez, Francisco Javier

Plan General de Contabilidad. Aprobado por Real Decreto 1643/1990, de 20 de diciembre (BOE de 27 de diciembre de 1990).
Comentarios y ejemplos prácticos. Guía contable para pequeñas y medianas empresas
Gonzalo, J. A., Larriba, A., Mallo, C., y Tua, J.

Presentación y análisis de Estados Contables (adaptado al Plan General de Contabilidad 1990).
Una visión práctica
Pizarro Montero, Tomás M., y Alfonso López, J. L.

Formulación de las cuentas anuales
Elaboración práctica de las primeras cuentas a presentar
Larriba Díaz-Zorita, Alejandro

Normativa contable internacional
Quesada Sánchez, Francisco Javier, Blanco Gómez, Antonio, y González Giménez, Raimundo

DERECHO

Las Sociedades Anónimas Deportivas
Cazorla Prieto, Luis M.ª

PROTAGONISTAS

El político. Biografía de Francisco Fernández Ordóñez
Cavero, José

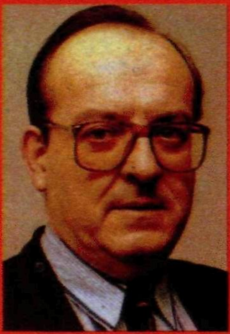
HISTORIAS DE AHORA Y AQUI

El gallo acorralado
García Castillo, Julio

El crédito «B»
García Castillo, Julio

DISEÑO DE MODA

Nueva tecnología del patronaje
Martín, Mariano, y Rodríguez, Miguel



EL AUTOR

Vicente T. González Catalá es Catedrático de Economía Financiera de la Universidad de Alcalá de Henares y de Escuela Universitaria de Estudios Empresariales. Actuario de Seguros, Censor Jurado de Cuentas y miembro del Registro Oficial de Auditores de Cuentas (ROAC). Es Asesor Actuario por oposición del Instituto Nacional de la Seguridad Social (INSS) y Analista de Inversiones.

Es un experto en los temas económico-financieros y actuariales, en la tutela de las Mutualidades y Montepíos de Previsión Social y Planes de Pensiones. Además de algunos libros en colaboración es autor de «Enfoque práctico de las operaciones de la Matemática Financiera», y Análisis de las Operaciones Financieras, Bancarias y Bursátiles».

9 788487 510342

Colección de libros de EMPRESA

El presente libro ha sido concebido como complemento de la obra anteriormente editada con el título "Análisis de las Operaciones Financieras Bancarias y Bursátiles" con el fin de facilitar el instrumento de aplicación y análisis de las operaciones citadas a través del planteamiento, estudio y resolución de los supuestos prácticos a que dan lugar dichas operaciones.

Por ello, la materia desarrollada se estructura en las mismas partes y sigue el mismo orden de exposición que la obra anteriormente editada.
Los más de cuatrocientos cincuenta ejercicios que se resuelven, constituyen una amplia muestra de las posibilidades que se pueden alcanzar.

Ediciones Ciencias Sociales