ESTADISTICA ESPAÑOLA
núm. 102, 1984, págs. 69 a 88

ESTIMACION DE FRONTERAS DE PRODUCCION: SINOPSIS Y COMENTARIOS

por JUAN DE DIOS MURO ROMERO
Instituto de Economía Aplicada y
Universidad de Alcalá de Henares

RESUMEN

Se presenta una síntesis crítica de los procedimientos utilizados en la estimación de funciones frontera con especial atención a la estimación maximoverosímil de estos modelos. Adicionalmente, se facilitan sugerencias para seleccionar la especificación apropiada y el método de estimación más conveniente en el trabajo aplicado. Asimismo, se apuntan objetivos para investigaciones futuras.

Palabras clave: Fronteras de producción; fronteras estocásticas; fronteras estrictas; estimación por mínimos cuadrados corregidos; estimación maximoverosímil.

1. INTRODUCCION

Desde el trabajo pionero de Farrell (1957), parece evidente que el procedimiento adecuado para analizar y cuantificar la eficiencia de un grupo de empresas dentro de un sector económico, o diferencias de eficiencia interindustriales, consiste en especificar y estimar una frontera de producción. Frontera que representa el concepto microeconómico de función de producción, como expresión del máximo producto alcanzable a partir de una combinación de inputs, en el estado actual del conocimiento técnico.

Dada la relatividad del concepto de eficiencia y su entidad esencialmente cuantitativa, tanto la especificación de la frontera y las técnicas utilizadas en su estimación, como la propia definición de las medidas de eficiencia modifican, en gran manera, el contenido empírico de dicha magnitud económica.

En este contexto, el trabajo econométrico adquiere una especial relevancia para el análisis de la eficiencia productiva. Como prueba, podemos constatar que ha sido el ritmo de la investigación econométrica el que ha marcado, en estos últimos veinticinco años, la pauta del desarrollo de los estudios en este terreno.

Los modelos de frontera se caracterizan por la asimetría que presenta el término de error de la relación. Es en este rasgo estadístico donde puede encontrarse la explicación de la notable supervivencia de las funciones «medias» o «ajustadas» de producción, a pesar de su evidente contradicción con los criterios teóricos. El impulso recibido por los trabajos sobre funciones frontera, a partir de los progresos realizados en el tratamiento econométrico de relaciones especificadas con términos de error no normales, parece confirmar dicho supuesto.

Esta asimetría de la distribución sugiere que se podrán obtener notables ganancias de eficiencia si se utilizan métodos maximoverosímiles (MV) en lugar de minimocuadráticos en la estimación de las fronteras de producción. Junto a esto, conviene advertir la ausencia de un enfoque unificado en la especificación de fronteras: frente a las ventajas estadísticas de las fronteras estocásticas, introducidas por Aigner-Lovell-Schmidt (1977) y Meeusen-Van den Broeck (1977), aunque los elementos básicos se encuentren ya en Aigner-Amemiya, Poirier (1976), las fronteras estrictas, Aigner-Chu (1968), Afriat (1972), presentan su fidelidad microeconómica. El debate entre ambas alternativas continúa en la actualidad.

El presente artículo tiene como primera finalidad realizar una síntesis crítica de los diferentes procedimientos empleados en la estimación de funciones frontera. Parece redundante el añadir nuevas razones que justifiquen el mayor esfuerzo dedicado a los métodos MV. Adicionalmente, se incorporan algunas sugerencias, como materiales a utilizar, en el trabajo aplicado, en la selección de la especificación apropiada y del método de estimación oportuno. Asimismo, se apuntan posibles vías para investigaciones futuras.

El esquema del mismo es como sigue: en el apartado 2 se lleva a cabo una brevísima incursión en el conjunto de posibles especificaciones de funciones frontera, con especial hincapié en las fronteras paramétricas con modelo estadístico esplícito; a continuación, se describe en 3 la estimación por mínimos cuadrados corregidos (COLS), mientras que los métodos MV se analizan en profundidad en el apartado 4; el apartado 5 se destina a las conclusiones alcanzadas.

2. ESPECIFICACION DE MODELOS DE FRONTERA

En este apartado se realiza un rápido recorrido por las distintas formas de modelizar una frontera de producción. En él se explican brevemente las características de estos modelos, así como sus ventajas e inconvenientes; esta descripción servirá de base para el análisis en los apartados siguientes de los procedimientos de estimación empleados en este tipo de modelos, estudio que constituye el objetivo prioritario de este trabajo.

Las diversas especificaciones de fronteras de producción que se encuentran en la literatura pueden sistematizarse en dos grandes bloques: en primer lugar, la aportación de Farrell y sus «discípulos», grupo en el que englobamos aquellos autores que han empleado fronteras deterministas sin una especificación paramétrica de la frontera de producción; en segundo lugar, las contribuciones de la pléyade de economistas que, situados en el espíritu de Farrell, han construido fronteras cuyas características han sido especificadas en forma de función paramétrica.

Los intentos de establecer una tipología de los modelos paramétricos son abundantes en la literatura y, entre ellos, merecen destacarse los trabajos de Førsund-Lovell-Schmidt (1980) y Kopp (1981). El cuadro 1 recoge una sistematización de las posibles especificaciones realizada conforme a los siguientes criterios:

i) adaptación al concepto microeconómico de función de producción;

ii) especificación de un modelo estadístico explícito;

iii) especificación del componente sistemático de la frontera;

iv) especificación del componente aleatorio de la frontera.

Una mera observación del cuadro 1 nos muestra que los modelos paramétricos pueden clasificarse, según que su adaptación sea o no completa al concepto microeconómico de función de producción, en dos categorías diferentes: fronteras estrictas y fronteras estocásticas [1].

Las fronteras estrictas se caracterizan por ser modelos causales edificados sobre la hipótesis de que el proceso de producción en la empresa es de naturaleza determinista. Son modelos deterministas en el sentido de que todas las empresas de la muestra observada comparten una familia común de fronteras de producción, coste y beneficio, y, en consecuencia, todas las variaciones observadas en el resultado de una empresa se atribuyen

[1] Dado que hemos centrado nuestra atención en el problema de la estimación, no consideraremos en esta breve revisión ni los modelos de Farrell y sus «discípulos», ni los modelos paramétricos sin un modelo estadístico explícito, ya que éstos no pueden ser «estimados» en un sentido estricto del término. Un estudio en profundidad de estos modelos puede verse en Muro (1980).

a ineficiencia con respecto a la familia común de fronteras. Las fronteras estrictas representan fielmente el contenido teórico de una función microeconómica de producción. La imposibilidad de que las observaciones superen el máximo representado por la frontera de producción queda reflejado en estos modelos en la forma de la distribución del término de error. Este se especifica como una perturbación aleatoria de una sola cola.

CUADRO I

ESPECIFICACION DE LA FRONTERA DE PRODUCCION (modelos paramétricos)

Adaptación teoría económica	Especificación modelo estadístico	Especificación componente sistemático		Especificación componente aleatorio
		Dualidad	Flexibilidad	
Fronteras estrictas	No existe modelo estadístico explícito			
	Existe modelo estadístico explícito	Función de producción Función de coste	Sí No Sí No	Seminormal, exponencial, gamma
Fronteras estocásticas	Existe modelo estadístico explícito	Función de producción Función de coste	Sí No Sí No	Normal + seminormal, exponencial gamma

Las fronteras estocásticas no sostienen la naturaleza estrictamente determinista del proceso productivo. La existencia de un conjunto de factores que escapan al control de la empresa justifica el rechazo de una postura determinista a ultranza. Entre los factores que no se valoran como constitutivos de ineficiencia se encuentran:

i) aquellos situados completamente al margen del control de la empresa: restricciones en el suministro de factores, elementos meteorológicos, etc.;

ii) el llamado ruido estadístico: errores de medida (que se supone ocurren en la variable dependiente), errores de especificación en la relación formulada (aunque las variables afectadas sean individualmente irrelevantes).

En estos modelos, la frontera puede variar aleatoriamente para las empresas incluidas en la muestra, que, por consiguiente, no tienen por qué compartir necesariamente una familia común de fronteras. Una empresa será o no eficiente en relación con su propia frontera y no con respecto a una común que represente la norma de la muestra. Los supuestos establecidos se plasman en la especificación del componente aleatorio de la frontera como suma de dos perturbaciones aleatorias independientes; la primera de ellas, de carácter simétrico, recoge los elementos no constitutivos de ineficiencia; la segunda, de una sola cola, recoge los efectos de la ineficiencia.

Tanto las fronteras estrictas como las estocásticas presentan indudables ventajas junto a importantes inconvenientes. Esta situación favorece la existencia de una polémica que, iniciada con los artículos de Aigner-Lovell-Schmidt (1977) y Meeusen-Van den Broeck (1977), continúa en nuestros días [2].

Las fronteras estrictas, por una parte, representan fielmente el concepto teórico de función de producción, ya que no admiten que ninguna observación pueda superar la frontera. Asimismo, permiten la cuantificación de medidas de eficiencia individuales para todas las empresas de la muestra. Por el contrario, estas fronteras dan muestras de debilidad, tanto desde el punto de vista conceptual —debate sobre la causalidad o no de la frontera de producción (factores incontrolables)—, como desde el punto de vista estadístico —inexistencia de errores de observación, diseño del término de error del modelo por conveniencias exclusivamente estadísticas.

Por otra parte, las fronteras estocásticas matizan las restricciones teóricas de la microeconomía a través del reconocimiento de causas que no constituyen ineficiencia. Así, algunas observaciones pueden superar la frontera de producción. Estas fronteras presentan un indudable atractivo econométrico por su buen comportamiento estadístico; atractivo que se ve empañado, en cierta manera, por el problema de la descomposición de los residuos individuales en sus dos componentes: ineficiencia y ruido estadístico, lo que lleva a la estimación de una cierta «eficiencia media» de la muestra, en lugar de eficiencias individuales [3].

En general, los modelos paramétricos forman un ejemplo excelente de especificación y estimación de modelos estadísticos en los que los errores se distribuyen con distribuciones distintas de la normal. La especificación del componente aleatorio de estos modelos, la obtención de estimadores y la deducción de sus propiedades son los objetivos en los que se centra la investigación econométrica en este campo, y a su análisis se dedican los apartados siguientes.

---

[2] La definición de las medidas de eficiencia apropiadas y la especificación del componente sistemático de la frontera (utilización de la dualidad y de formas funcionales flexibles) son también, como ya hemos señalado, elementos de dicha polémica que, sin embargo, quedan fuera del objetivo del presente artículo.

[3] En un artículo reciente, Jondrow y otros (1982) han sugerido un procedimiento para separar ambos componentes basado en el cálculo de la distribución del término de error asimétrico, condicional a los valores tomados por los residuos individuales totales. El método presenta ciertos inconvenientes: inconcreción (moda, esperanza) de la medida de ineficiencia, difícil interpretación económica de los resultados, extraña coincidencia entre el ranking de los residuos individuales y las medidas de ineficiencia.

3. ESTIMACION POR MINIMOS CUADRADOS CORREGIDOS (COLS)

La posibilidad de estimar las fronteras de producción por el método de mínimos cuadrados corregidos (COLS) fue apuntada, en primer lugar, por Richmond (1974) en el contexto de un modelo de frontera estricta. Aigner-Lovell-Schmidt (1977), Schmidt-Lovell (1979) han aplicado, entre otros, este procedimiento a las fronteras estocásticas, mientras que Greene (1980a) ha hecho lo propio para el supuesto de fronteras estrictas.

El método COLS se fundamenta en la estimación minimocuadrática de los parámetros de la frontera de producción, a excepción del término independiente, y en la corrección de dicho término independiente a partir de la manipulación de los momentos de los residuos minimocuadráticos. Las estimaciones obtenidas son consistentes.

Un modelo de frontera de producción puede formularse como

$$y_t = \beta' X_t + \eta_t \qquad t = 1, 2, \ldots, T \qquad [1]$$

donde y_t representa el producto o coste total de la observación t; X_t es el vector $(k \times 1)$ de datos de las variables explicativas: factores de producción o precios, respectivamente, de dicha observación; β, el vector $(k \times 1)$ de parámetros de la frontera; η_t, la correspondiente perturbación aleatoria, y T, el tamaño de la muestra.

La parte sistemática (o exacta) del modelo facilita el valor máximo de y_t para un vector dado X_t. La esperanza matemática del término de error del modelo es distinta de cero, ya que éste recoge tanto los efectos de los factores que escapan del control de la empresa, que pueden considerarse de media nula, como la ineficiencia productiva [4]. Las perturbaciones representativas de la ineficiencia serán siempre del mismo signo, positivas, en el caso de funciones de coste; negativas, en el caso de funciones de producción (en lo que sigue, nos referiremos exclusivamente a funciones de coste, por lo que los términos de error representativos de ineficiencia serán considerados positivos. En el supuesto de que la estructura productiva fuera modelizada por medio de funciones de producción, los razonamientos serían idénticos, pero con perturbaciones negativas).

Si suponemos que las η_t se distribuyen idéntica e independientemente para todo t y, adicionalmente, la independencia entre η_t, X_t (admitiendo, por ejemplo, los supuestos

[4] En esta formulación del modelo de frontera están incluidas las fronteras estrictas y las estocásticas. La diferencia radicará en la especificación del término de error η_t.

Para las fronteras estrictas, $\eta_t = u_t$, $u_t \geq 0$, donde u_t se especificaría como una distribución de una sola cola.

Para las fronteras estocásticas $\eta_t = u_t + v_t$, $u_t \geqq 0$, donde η_t es la suma de dos términos aleatorios, uno, análogo al anterior, con distribución de una cola y, el otro, simétrico con media nula.

de Zellner-Kmenta-Dreze, 1966), el modelo especificado en [1] cumple todas las hipótesis del modelo de regresión lineal clásico, excepto en lo que concierne a la esperanza de las perturbaciones aleatorias que no es nula (llamaremos μ a esta esperanza). Ya que el modelo contiene un término independiente es fácil demostrar que la estimación minimocuadrática del mismo proporciona un estimador insesgado y consistente del conjunto de parámetros de β, a excepción del término independiente. El error estándar de estas estimaciones puede calcularse por los procedimientos convencionales y, asimismo, puede mantenerse la normalidad asintótica de los estimadores.

El único parámetro de [1] que no puede ser consistentemente estimado por mínimos cuadrados es el término independiente. Una transformación apropiada de [1],

$$y_t = \beta_0 + \mu + \beta^{*\prime} X_t^* + (\eta_t - \mu) \qquad t = 1, 2, \ldots, T \qquad [2]$$

nos indica que, sin embargo, podríamos obtener una estimación consistente del nuevo término independiente $\beta_0 + \mu$.

El método COLS ofrece una solución a este problema (otra posibilidad sería no tomar en consideración el término independiente, debido a su poca importancia en el análisis econométrico). Podemos obtener una estimación consistente de μ y «corregir» con ella la estimación minimocuadrática del término independiente. Esta estimación consistente de μ se obtiene a partir de los momentos de los residuos minimocuadráticos.

La elección de los momentos de los residuos minimocuadráticos que resultan convenientes para la estimación consistente de μ depende, en el caso general, de la distribución del término de error de la frontera. Este hecho, como señalan Førsund-Lovell-Schmidt (1980), supone uno de los inconvenientes del método COLS. Especificaciones distintas del componente aleatorio producirán correcciones distintas en el término independiente de [2] [5]. Podemos esperar que en el caso de que la función de densidad de la perturbación aleatoria sea función de un parámetro, la corrección pueda realizarse a partir de una transformación de s^2; si la distribución contiene más de un parámetro, la corrección se podrá efectuar calculando los momentos centrales de orden conveniente de dicha distribución [6].

---

[5] Los orígenes del método, como antes hemos señalado, se encuentran en Richmond (1974). Este examina un modelo en el que la media y la variancia del término de error son iguales a μ. De ahí, la variancia residual minimocuadrática s^2, que es consistente para σ^2 en el caso general, es consistente para μ. Por consiguiente, $\beta_0 - s^2$ es una estimación consistente de β_0.

[6] Para fronteras estocásticas y bajo el supuesto de distribución de la ineficiencia como una normal truncada, Olson-Schmidt-Waldman (1980) han detectado algunas dificultades en la aplicación del método COLS. Lo que ellos denominan fallos del tipo 1 y 2, que se presentan cuando las variancias de los dos componentes de η_t son negativas, lo que puede suceder en ciertas ocasiones.

Otra de las dificultades que plantea la estimación COLS de fronteras de producción es la presencia de algunos residuos con signo erróneo (negativo para funciones de coste, positivo para funciones de producción), aun en modelos de frontera estricta. Este resultado no es incompatible con la especificación de η_i como perturbación aleatoria de una sola cola, ya que cada residuo es función de todas las perturbaciones aleatorias y de todos los datos. Esta dificultad es relevante, debido a que el cálculo de medidas de eficiencia descansa en la uniformidad de los signos de los residuos.

Greene (1980a) ha demostrado que un procedimiento para eliminar esta contrariedad puede ser el estimar la frontera por mínimos cuadrados y «corregir» el término independiente resultante mediante su desplazamiento hasta que todos los residuos resulten ser del mismo signo, y al menos uno de ellos sea nulo. Este método de corrección produce estimaciones consistentes de β_0 y, además, no se ve alterado por el problema de las distintas correcciones motivadas por las diversas especificaciones del término de error de la frontera.

En síntesis, el método COLS produce estimaciones consistentes del conjunto de los parámetros de la frontera de producción, estas estimaciones no son asintóticamente eficientes. La corrección de la estimación minimocuadrática del término independiente puede llevarse a cabo por dos procedimientos. El primero de ellos incorpora la información contenida en la forma de la distribución de la ineficiencia, por lo que ocasiona estimaciones diferentes, según las hipótesis establecidas por la estructura de dicha ineficiencia. El segundo no introduce ninguna información adicional a la suministrada por la muestra y, aunque disminuye las dificultades de estimación, desaprovecha estadísticamente la asimetría del término de error, característica esencial de estos modelos de frontera. Olson-Schmidt-Waldman (1980) han estudiado las propiedades exactas de estos estimadores, utilizando métodos de Monte Carlo.

4. ESTIMACION MAXIMOVEROSIMIL DE FUNCIONES FRONTERA

Como hemos indicado anteriormente, los modelos paramétricos de funciones frontera resultan ser un ejemplo característico de especificación y estimación de modelos econométricos cuyos términos de error se distribuyen asimétricamente. Es esta asimetría de la distribución de las perturbaciones aleatorias lo que hace suponer que las ganancias de eficiencia que pudieran derivarse, en general, de una estimación MV sean notables en este tipo de modelos. La magnitud de los beneficios conseguidos estará en razón directa de la asimetría de la distribución.

El método MV parece ser, por tanto, el más apropiado para la estimación de funciones frontera, y a él dedicaremos un estudio detallado. Comenzaremos por un análisis de la estimación MV de las fronteras estocásticas para continuar con un estudio análogo de las fronteras estrictas.

4.1. Estimación MV de fronteras estocásticas

La estimación MV de modelos de frontera estocástica depende, como en todos los casos, de la forma particular de la distribución del componente aleatorio de la frontera. Una vez especificado dicho componente, el cumplimiento de las condiciones de regularidad usuales garantiza que los estimadores maximoverosímiles (MVE) obtenidos presentan las propiedades asintóticas conocidas.

Un modelo de frontera estocástica puede formularse a partir de [1] si especificamos η_t como

$$\eta_t = u_t + v_t \qquad t = 1, 2, \ldots, T \qquad [3]$$

la suma de dos perturbaciones aleatorias; la primera de ellas, u_t, representa los errores de medida y los factores situados al margen del control de la empresa y tiene una distribución simétrica; la segunda, v_t, representa la ineficiencia de las empresas y tiene una distribución de una sola cola. Ambas perturbaciones se distribuyen idéntica e independientemente (iid) para todo t.

La frontera estocástica $\beta' X_t + u_t$, puede variar entre las empresas del sector considerado o, para una misma empresa, a lo largo del tiempo; la condición de que v_t tenga una distribución de una sola cola garantiza que las observaciones se coloquen a un solo lado de la frontera estocástica.

Utilizaremos dos especificaciones alternativas de η_t, Stevenson (1980); en primer lugar supondremos que se distribuye como la suma de una variable aleatoria normal y una normal truncada (de moda μ) y, a continuación, especificaremos el término de error como la suma de una variable normal y otra con función de densidad de probabilidad gamma.

i) *Especificación normal-normal truncada*

En este caso, en [1], η_t es $\eta_t = u_t + v_t$ donde

$$u_t \sim N(0, \sigma_u^2) \qquad v_t = |v_t^*| \qquad v_t^* \sim N(\mu, \sigma_v^2)$$

μ puede tomar cualquier valor positivo, negativo o nulo. El modelo difiere del modelo de regresión lineal clásico en la asimetría del término de error. Para $\mu = 0$, la especificación es la propuesta por Aigner-Lovell-Schmidt (1977).

La función de densidad de probabilidad de η_t es

$$f(\eta_t) = 1/\sigma f^*\left(\frac{\eta_t - \mu}{\sigma}\right)[1 - F^*(-\mu/\sigma_v)]^{-1}\left[1 - F^*\left(-\frac{\mu}{\sigma\lambda} - \frac{\eta_t\lambda}{\sigma}\right)\right], \quad [4]$$

donde $\sigma^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2$, $\lambda = \sigma_v/\sigma_u$; $f^*(.)$, $F^*(.)$ representan, respectivamente, la función de densidad de probabilidad y la de distribución de la variable aleatoria normal estándar. El parámetro λ puede interpretarse como un índice de la importancia relativa de las dos fuentes de error en el modelo, causas exógenas e ineficiencia. Cuando λ^2 tiende a cero, el error simétrico (elementos que escapan del control empresarial) domina el comportamiento de η_t; cuando λ^2 se hace muy grande, el error de una sola cola (ineficiencia) es el elemento decisivo en el error total (para mayores detalles, ver el apéndice A.1). El parámetro μ representa, en cierta manera, la forma de la estructura de ineficiencia de la muestra.

Para una muestra de T observaciones, los MVE se obtendrán resolviendo las llamadas ecuaciones de verosimilitud. Unas fáciles, aunque complejas, operaciones nos llevan a una exprexión del MVE de la variancia como

$$\hat{\sigma}^2 = \left[\sum_t (\eta_t - \hat{\mu})^2 + \frac{\hat{\mu}(\hat{\lambda}^2 + 2)}{\hat{\lambda}^2 + 1}\sum_t(\eta_t - \hat{\mu})\right]\left[T + \frac{\hat{\lambda}\hat{\mu}}{\hat{\sigma}(\hat{\lambda}^2 + 1)}\sum_t \frac{f_{2t}^*}{(1 - F_{2t}^*)}\right]^{-1} \quad [5]$$

conde

$$\eta_t = y_t - \beta' X_t$$

$$f_{2t}^* = f^*[1/\sigma(-\mu/\lambda - \eta_t\lambda)]$$

$$F_{2t}^* = F^*[1/\sigma(-\mu/\lambda - \eta_t\lambda)]$$

Si llamamos X a la matriz de datos usual, de dimensión $T \times k$, Y al vector cuyos elementos son iguales a $y_t - \mu$, Γ al vector $T \times 1$ con elementos

$$\gamma_t = \frac{f_{2t}^*}{1 - F_{2t}^*}$$

δ al factor $f_1^*/(1 - F_1^*)$, donde

$$f_1^* = f^*[-\mu/\sigma(\lambda^{-2} + 1)^{1/2}]$$

$$F_1^* = F^*[-\mu/\sigma(\lambda^{-2} + 1)^{1/2}]$$

las ecuaciones de verosimilitud pueden expresarse como

$$1/\sigma^2(X'Y - X'X\beta) - \lambda/\sigma X'\Gamma = 0 \quad [6]$$

$$1/\sigma\eta'\Gamma - 1/\sigma\mu/\lambda^2 i'\Gamma + T\mu/\sigma\lambda^3(\lambda^{-2} + 1)^{-1/2}\delta = 0 \qquad [7]$$

$$-T/2\sigma^2 + 1/2\sigma^4\eta'\eta + 1/2\sigma^3(-\lambda\eta'\Gamma - \mu/\lambda i'\Gamma) + T\mu/2\sigma^3(\lambda^{-2} + 1)^{1/2}\delta = 0 \qquad [8]$$

$$1/\sigma^2 i'(Y - X\beta) + 1/\lambda\sigma i'\Gamma - T/\sigma(\lambda^{-2} + 1)^{1/2}\delta = 0 \qquad [9]$$

donde η es el vector de las η_t e i un vector con todos sus elementos iguales a la unidad.

Si premultiplicamos [6] por $\sigma^2(X'X)^{-1}$ queda

$$\hat{\beta} = b - \hat{\lambda}\hat{\sigma}(X'X)^{-1}X'\Gamma \qquad [10]$$

donde $b = (X'X)^{-1}X'Y$ es el estimador por mínimos cuadrados corregidos. Es conveniente recalcar que Γ no es independiente de β. El estimador maximoverosímil puede expresarse, por tanto, como la corrección del de mínimos cuadrados corregidos por la regresión de $\lambda\sigma\Gamma$ sobre X. Asimismo, podemos comprobar que la estimación de β no es independiente de la λ, σ.

ii) *Especificación normal-gamma*

En este caso en [1] η_t es $\eta_t = u_t + v_t$, donde $u_t \sim N(0, \sigma_u^2)$, $v_t \sim G(n, \lambda)$, se distribuyen como una variable aleatoria normal y una gamma.

La función de densidad de probabilidad de η_t es

$$f(\eta_t) = [\sigma_u^{n-1}\lambda^n/\Gamma(n)(2\pi)^{1/2}] \exp(1/2\lambda^2\sigma_u^2 - \lambda\eta_t)$$

$$\int_\omega^\infty (t - \omega)^{n-1} \exp(-1/2t^2)dt \qquad [11]$$

donde, $t = 1/\sigma_u(v_t - \eta_t + \lambda\sigma_u^2)$; $\omega = \lambda\sigma_u - \eta_t/\sigma_u$; $\lambda > 0$; $n > 0$. Para $n = 1$, la función gamma degenera en una función exponencial y la variable aleatoria η_t se distribuye como la suma de una normal y una exponencial. Esta última especificación coincide con la presentada por Aigner-Lovell-Schmidt (1977) y Meeusen-Van den Broeck (1977).

La especificàción normal-gamma del término de error del modelo presenta la dificultad adicional de proporcionar funciones de verosimilitud diferentes para los diversos valores de n. Nos centraremos en el análisis detallado del supuesto $n = 1$, aunque razonamientos análogos nos conducirían a los MVE para hipótesis alternativas.

Para $n = 1$ [11] se hace

$$f(\eta_t) = \lambda \exp(1/2\lambda^2\sigma_u^2 - \lambda\eta_t)[1 - F^*(\lambda\sigma_u - \eta_t/\sigma_u)] \qquad [12]$$

donde recordamos que $F^*(.)$ es la función de distribución de una variable normal estándar.

Para una muestra de T observaciones [12] nos permite obtener el logaritmo neperiano de la función de verosimilitud y las ecuaciones de verosimilitud. Para el cálculo necesario resulta conveniente hacer un cambio de parámetros en [12], llamando $\theta = \lambda\sigma_u$. El sentido económico de este nuevo parámetro es relevante en nuestro análisis, ya que significa la relación existente entre la variancia de la perturbación aleatoria normal y la de la exponencial. En efecto

$$\theta^2 = \lambda^2\sigma_u^2 = \operatorname{var}(u)/\operatorname{var}(v)$$

el nuevo parámetro permite valorar, por tanto, la influencia relativa de los factores que escapan al control de la empresa respecto a la ineficiencia. Como señalan Meeusen-Van den Broeck (1977) la relación entre las causas puramente aleatorias y los errores humanos.

Con el mencionado cambio de parámetros, las ecuaciones de verosimilitud se expresan en forma matricial, como

$$\begin{aligned} \Gamma' X &= \theta i' X \\ T(\theta^2 + 1/\theta^2) &= i'\Gamma + 1/\sigma_u(i'Y - i'X\beta) \\ T\sigma_u &= \theta(i'Y - i'X\beta) - \Gamma'(Y - X\beta) \end{aligned} \qquad [13]$$

donde, Γ es el vector $T \times 1$ con elementos $\gamma_t = f_{3t}^*/(1 - F_{3t}^*)$, $f_{3t}^* = f^*(\theta - \eta_t/\sigma_u)$, $F_{3t} = F^*(\theta - \eta_t/\sigma_u)$, funciones de densidad y de distribución, respectivamente, de una variable normal estándar, como previamente hemos señalado; X, Y, las matrices usuales de datos, i' el vector fila con todos sus elementos iguales a uno, β el vector de parámetros y T el tamaño de la muestra.

Las ecuaciones segunda y tercera en [13] permiten obtener

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= [T\sigma_u + \Gamma'(Y - X\beta)]/(i'Y - i'X\beta) \\ \hat{\sigma}_u &= (i'Y - i'X\beta)/[T(\theta^2 + 1/\theta) - i'\Gamma] \end{aligned} \qquad [14]$$

Para el cálculo de los valores del vector de parámetros de la frontera de producción que maximizan la función de verosimilitud disponemos en la actualidad de un conjunto de algoritmos de optimización no lineal, que pueden ser utilizados con un coste relativamente reducido en términos de tiempo de ordenador. Una revisión de estos métodos puede verse en Maddala (1977) o Harvey (1981) [7].

[7] La descripción de los diversos procedimientos de optimización escapa del objetivo de este artículo, y, por ello, remitimos al lector a los manuales citados. Aquí sólo me detendré en una

El procedimiento de Davidon-Fletcher-Powell, en alguna de sus variantes, es el empleado con mayor asiduidad en los trabajos aplicados. Es utilizado, entre otros, en Aigner-Lovell-Schmidt (1977); Schmidt-Lovell (1979, 1980); Kopp-Smith (1980); Olson-Schmidt-Waldman (1980) y Stevenson (1980). La alternativa al anterior es el método de Newton-Raphson, Lee-Tyler (1978), que requiere un mayor tiempo de cálculo y, por ello, no suele utilizarse. El método de Berndt-Hall-Hall-Hausman (1974) es comparable, como señala Greene (1982), en términos de tiempo de cálculo, al de Newton-Raphson.

Greene (1982) ha sugerido la aplicación en fronteras estocásticas de un procedimiento desarrollo por Fair (1977) para la estimación del modelo de Tobit [8]. Al margen de la reducción del tiempo de cálculo que supone la utilización del método de Fair en la estimación MV de funciones frontera, la sugerencia tiene la virtud de replantear una idea ya recogida en Aigner-Lovell-Schmidt (1977): la equivalencia entre las ecuaciones de verosimilitud derivadas del modelo Tobit y las deducidas de las fronteras estocásticas, en el supuesto de que el término de error de una cola sea especificado como una variable normal truncada. Las semejanzas entre ambos problemas, relaciones econométricas con variables dependientes limitadas y funciones frontera, no deben, sin embargo, llevarse demasiado lejos. En este sentido, parece razonable la interpretación de un modelo de funciones frontera como un modelo de elección cualitativa, en el que la alternativa binaria se produce entre empresas eficientes (índice de eficiencia igual a uno) y empresas ineficientes (índice de eficiencia igual a cero). Temas a considerar en este contexto serían: a) el desconocimiento del número de empresas eficientes; b) el desconocimiento incluso de la probabilidad de que una empresa sea o no eficiente. Ambos aspectos son manifestaciones de una cuestión básica en este tipo de relaciones: la carencia de información sobre la estructura de eficiencia del sector y la imposibilidad de utilizar la información muestral para estimarla, sin la introducción previa de supuestos exógenos. Sobre este tema volveremos más adelante.

4.2. ESTIMACIÓN MV DE FRONTERAS ESTRICTAS

Como se ha establecido anteriormente, la especificación de fronteras estrictas persigue como objetivo fundamental la armonía de la relación econométrica a estimar con las restricciones derivadas de la teoría económica. La evaluación de los estimadores en este tipo de relaciones se lleva a cabo, no sólo mediante los criterios estadísticos empleados tradicionalmente en econometría para la selección de estimadores, sino que también se utiliza su conformidad con la teoría económica subyacente. Como señala

reseña de los métodos aplicados con mayor frecuencia en los trabajos empíricos, con una referencia a su publicación.

[8] Para un análisis del modelo de Tobit puede verse Amemiya (1973).

Chu (1978), este criterio, que no suele ser aplicado con la frecuencia que sería de desear, resulta de gran importancia en el análisis cuantitativo de relaciones económicas.

Un modelo de frontera estricta puede formularse a partir de [1] si especificamos η_t como

$$\eta_t = u_t \qquad u_t \geq 0 \tag{15}$$

donde la especificación concreta del término de error del modelo admite numerosas posibilidades, con la única restricción de no admitir valores negativos.

El establecimiento de un supuesto particular sobre la distribución de u_t permite la estimación MV de la frontera estricta. Los estimadores obtenidos presentarían «en principio» las buenas propiedades asintóticas conocidas. La asimetría de la distribución de u_t hace pensar que se obtendrán fuertes ganancias de eficiencia en relación con la estimación minimocuadrática.

La aplicación de este método de estimación a las fronteras estrictas plantea, sin embargo, mayores dificultades de las previstas. Las condiciones de regularidad exigidas para la demostración de las propiedades de consistencia y eficiencia asintótica de los MVE, no se cumplen en su totalidad en este tipo de modelos, hecho que fue observado, en primer lugar, por Schmidt (1976). En concreto, el rango de la variable dependiente es función de los parámetros a estimar, como puede verse fácilmente el recorrido de y_t es $(\beta' \mathbf{x}_t, \infty)$.

La observación anterior no deja de ser incómoda, ya que, en otro orden de cosas, los estimadores hallados bajo hipótesis plausibles sobre la distribución de u_t, como pueden ser la normal truncada o la exponencial, presentan un comportamiento funcional adecuado. El problema planteado consiste, por tanto, en la disponibilidad de unos estimadores maximoverosímiles aparentemente apropiados, mientras que desconocemos sus propiedades asintóticas.

Para Schmidt (1976), la cuestión tiene su origen en la propia naturaleza del problema analizado; en otras palabras, las dificultades encontradas en la estimación MV no nacen de la selección de una distribución particular para la especificación de u_t, como pueden ser la seminormal o la exponencial implícitas en Aigner-Chu (1968), sino que son intrínsecas a la especificación del modelo como frontera estricta. Estas afirmaciones deben ser entendidas, sin embargo, en sus justos términos; si nos movemos en el contexto de la demostración tradicional de las propiedades asintóticas de los MVE, el mantenimiento de las condiciones de regularidad exigidas en dicha prueba imposibilita la demostración de las propiedades asintóticas de los MVE en el caso que nos ocupa. Un enfoque superador de estas dificultades entrañaba, pues, la revisión de las condiciones de regularidad tradicionales. Greene (1980a), ha realizado esta tarea. Las nuevas condiciones de regularidad establecidas en su trabajo permiten obtener MVE que poseen buenas propiedades asintóticas, aún bajo el supuesto de dependencia del rango de y_t respecto a los parámetros a estimar. A continuación, describiremos brevemente su procedimiento.

Para la modificación de las condiciones de regularidad tradicionales [9], Greene (1980a) parte de un análisis de la influencia de la condición de rango en la demostración de las propiedades asintóticas. Esta independencia se incluye para garantizar el intercambio entre las operaciones de integración y diferenciación, que conduce a la prueba de la anulación de la esperanza de las derivadas parciales de primer orden de la función de verosimilitud (vector de scores eficientes) y a la obtención de la matriz de información de los MVE. Si llamamos $L = L(\theta; y_t)$ a la función de verosimilitud, donde θ es el vector de parámetros, estos últimos resultados pueden expresarse como

$$E\left[\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right] = 0$$

$$\operatorname{Cov}\left[\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right] = -E\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta \partial \theta'}\right]$$

Si suponemos que la función de densidad de probabilidad de y_t es positiva, continua y tres veces continuamente diferenciable respecto al vector de parámetros en todo el rango de y_t, y para todos los valores del parámetro, en un intervalo A que contiene el verdadero valor del parámetro [Greene (1980a), condición 2 de regularidad], puede demostrarse que la condición de rango es suficiente, pero no necesaria. En este caso, dicha condición puede ser sustituida por dos nuevas condiciones de regularidad, que pueden ser satisfechas por ciertas distribuciones, aunque éstas no cumplan la condición de rango. Las nuevas condiciones de regularidad son:

i) que la función de densidad de probabilidad se anule en sus puntos extremos;

ii) que las derivadas del primer orden de dicha función se anulen asimismo en los puntos extremos.

De la extensión de los resultados anteriores a la estimación MV de [15] se derivan dos restricciones que deben ser satisfechas por la distribución del

[9] Estas condiciones de regularidad pueden formularse de distintas maneras, formalmente diferentes, pero equivalentes en el fondo, que pueden verse, en otros, entre Wald (1949), Schmidt (1976). Para mayores detalles en lo que sigue ver Greene (1980a).

término de error de la frontera estricta, a fin de que los MVE presenten buenas propiedades asintóticas [10]. Estas condiciones de regularidad se concretan en

iii) la anulación de la función de densidad de probabilidad en el punto

$$u_t = 0 \quad , \quad f(0) = 0 \cdot \qquad [16]$$

iv) La anulación de la primera derivada de dicha función en el mismo punto

$$f'(0) = 0 \cdot \qquad [17]$$

La distribución gamma es, entre otras, una de las que cumple las condiciones de regularidad anteriores [11]. Adicionalmente, presenta unas propiedades que la hacen especialmente atractiva para la especificación de fronteras estrictas. Así, junto a proporcionar MVE con buenas propiedades asintóticas, permite utilizar la información muestral para estimar la mayor o menor asimetría de la distribución del término de error del modelo, lo que significa, en cierta manera, hacer endógena la forma de la estructura de eficiencia analizada.

Para u_t especificado como una gamma, la construcción de la función de verosimilitud correspondiente, lleva a las siguientes ecuaciones de verosimilitud

$$\frac{T(P+1)}{\gamma} - \sum_t u_t = 0 \qquad [18]$$

$$T \ \ln\gamma - \left[\frac{\Gamma'(P+1)}{\Gamma(P+1)}\right] + \sum_t \ln u_t = 0 \qquad [19]$$

$$T\gamma X - P \sum_t \frac{1}{u_t} X_t = 0 \qquad [20]$$

donde $u_t = y_t - \beta' X_t$, $\Gamma'(m) = \dfrac{d\Gamma(m)}{dm}$, $\bar{X} = 1/T \sum_t X_t$; $\gamma > 0$, $P > 1$, los parámetros de la distribución gamma; la ecuación [20] es una ecuación vectorial.

Como se sabe, en estas condiciones los MVE, que maximizan [18], [19] y [20], son consistentes, con distribución asintótica normal y asintóticamente eficientes.

---

[10] Como se sabe, la demostración de las propiedades asintóticas de los MVE en los modelos de regresión se basan en la extensión de los resultados obtenidos para muestras aleatorias, por ejemplo, Cramer. Esta extensión se ha realizado por diversos procedimientos, entre ellos Theil (1971), Barnett (1976), Amemiya (1973).

[11] Otra distribución que cumple (iii) y (iv) y que puede ofrecer cierto interés es la logarítimico-normal.

La asimetría de la distribución gamma y la posibilidad de estimar el grado de deformación de dicha distribución a partir de la información muestral (a través de la estimación de P) incorpora a los modelos de frontera estricta la posibilidad de medir las ganancias de eficiencia conseguidas con la estimación MV y, asimismo, de añadir nueva luz al antiguo problema de la comparación entre funciones medias o «ajustadas» y funciones frontera. En efecto, valores de P grandes (que implicarán que γ sea, aproximadamente, la media de la distribución) implicarán una gran simetría de la distribución del término de error del modelo, pequeñas ganancias de eficiencia de la estimación MV, y que la forma de la frontera sea semejante a la de la función media, pudiéndose obtener a partir de ésta última mediante un mero desplazamiento (que afectaría al término independiente de la frontera). Por el contrario, valores de P cercanos al límite ($P = 1$) implicarán una gran asimetría del término de error del modelo, funciones fronteras ampliamente diferentes en forma y situación de las funciones medias, y grandes aumentos de eficiencia al emplear estimadores maximoverosímiles.

El análisis estadístico anterior se plasma en algunas conclusiones relevantes desde el punto de vista económico. Las posibilidades que abre la especificación gamma de una frontera estricta oscilan entre una gran concentración de empresas cercanas a la frontera de eficiencia y, por consiguiente, con procesos de producción próximos al óptimo en las circunstancias tecnológicas actuales, y una situación en que el grueso de las empresas mantienen un notable desfase en relación con las tecnologías punta del sector considerado, necesitando un replanteamiento global de su estrategia productiva en aras de una mejora de su eficiencia.

Los métodos numéricos disponibles para la estimación MV de las fronteras estrictas coinciden con los ya expuestos en 4.1. El conocimiento de los valores esperados de las derivadas parciales de segundo orden de la función de verosimilitud justifica la utilización, en Greene (1980a, 1980b), del método de scoring. En este contexto debe señalarse que los trabajos aplicados que utilizan fronteras estrictas son escasos; la causa de este hecho se encuentra en el problema estadístico antes analizado, que no ha encontrado solución hasta 1980.

Algunos programas de ordenador facilitan la matriz de variancias y covariancias asintótica junto a las estimaciones MV del problema planteado. Cuando esto no sea posible, resulta necesario el cálculo de las derivadas parciales de segundo orden de la función de verosimilitud como base para el cálculo de los errores estándar asintóticos de los MVE. Estas derivadas parciales se incluyen en diversos apéndices de ciertos artículos, para especificaciones particulares del tipo de error; así, en Aigner-Lovell-Schmidt (1977) y Schmidt-Lovell (1979), se incluyen para la especificación normal-normal truncada, y en Greene (1980b), para la especificación gamma de una frontera estricta.

5. CONCLUSIONES

De la revisión crítica efectuada merecen destacarse ciertos aspectos relevantes en relación con la especificación y estimación de funciones frontera que se exponen a continuación.

No parecen existir argumentos contundentes, al margen de su mayor o menor fidelidad a los criterios emanados de la teoría económica, que permitan zanjar la polémica entre fronteras estrictas y estocásticas. De ambas especificaciones se derivan resultados estadísticos y, en consecuencia, restricciones en el mapa de eficiencias, que resultan difíciles de interpretar desde el punto de vista económico.

Las dificultades surgidas: anulación de la función de densidad y de su primera derivada en la frontera, en las fronteras estrictas; indefinición de medidas, monotonía entre los errores globales y la ineficiencia, en las estocásticas, por poner algunos ejemplos, son manifestaciones del problema básico de la carencia de información sobre la estructura de eficiencia del sector y de la práctica imposibilidad de utilizar la información muestral para estimarla.

La introducción de especificaciones gamma y normal truncada de moda distinta de cero representan, en este terreno, un intento de incorporar la información muestral a la estimación de la asimetría del término de error. En este sentido, una vía de avance consistiría en la introducción de una especificación flexible del término de error asimétrico de la frontera. Esta flexibilidad podría concretarse en la asimetría del término y en la probabilidad asignada en las cercanías de la frontera. La parametrización de ambas características permitiría utilizar la información muestral en su estimación.

La elección entre los métodos alternativos de estimación, MV y COLS, puede realizarse en base a criterios estadísticos o utilizando razones de mera conveniencia práctica. Las ganancias de eficiencia que pueden derivarse de una estimación MV están en función de la asimetría de la distribución del término de error de la frontera. Por el contrario, la estimación COLS es más fácil de ejecutar, y el examen de los residuos obtenidos nos dará una mayor información sobre la que llevar a cabo aproximaciones ulteriores. Las complejidades de cálculo, sin embargo, no merecen ser consideradas, en la actualidad, argumentos suficientes para desechar una estimación MV.

Finalmente, dada la necesidad de incorporar en los modelos de frontera información relativa a la estructura de eficiencia del conjunto de empresas analizado, no parece descabellada la sugerencia de utilizar un enfoque bayesiano para la estimación de funciones frontera; investigación que pudiera aportar, probablemente, una nueva luz para el tratamiento de estos problemas.

REFERENCIAS

AFRIAT, S. S.: «Efficiency Estimation of Production Functions». *International Economic Review*, 13, pp. 568-598, octubre 1972.

AIGNER, D. J., y CHU, S. F.: «On Estimating the Industry Production Function». *American Economic Review*, 58, pp. 826-839, septiembre 1968.

AIGNER, D. J.; AMEMIYA, T., y POIRIER, D. J.: «On the Estimation of Production Frontiers: Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of a Discontinuous Density Function». *International Economic Review*, 17, pp. 377-396, junio 1976.

AIGNER, D. J.; LOVELL, C. A. K., y SCHMIDT, P.: «Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Function Models». *Journal of Econometrics*, 6, pp. 21-37, julio 1977.

AMEMIYA, T.: «Regression Analysis when the Dependent Variable is Truncated Normal». *Econometrica*, 41, pp. 997-1016, noviembre 1973.

BARNETT, W. A.: «Maximum Likelihood and Iterated Aitken Estimation of Nonlinear Systems of Equations». *Journal American Statistical Association*, 71, pp. 354-360, junio 1976.

BERNDT, E. R., y otros: «Estimation and Inference in Non-linear Structural Models». *Annals of Economic and Social Measurement*», 3/4, pp. 653-665, 1974.

CHU, S. F.: «On the Statistical Estimation of Parametric Frontier Production Functions: A Reply and Further Comments». *Review of Economics and Statistics*, 60, pp. 479-481, agosto 1978.

FAIR, R.: «A Note on the Estimation of the Tobit Model». *Econometrica*, 45, pp. 1723-1726, octubre 1977.

FARRELL, M. J.: «The Measurement of Productive Efficiency». *Journal Royal Statistical Society*, 120, serie A parte 3, pp. 253-290, 1957.

FORSUND, F. R.; LOVELL, C. A. K., y SCHMIDT, P.: «A Survey of Frontier Production Functions and of their Relationship to Efficiency Measurement». *Journal of Econometrics*, 13, pp. 5-25, 1980.

GREENE, W. H.: «Maximum Likelihood Estimation of Econometric Frontier Funcions». *Journal of Econometrics*, 13, pp. 27-56, 1980a.

----: «On the Estimation of a Flexible Frontier Production Model». *Journal of Econometrics*, 13, pp. 101-115, 1980b.

----: «Maximum Likelihood Estimation of Stochastic Frontier Production Models». *Journal of Econometrics*, 18, pp. 285-289, febrero 1982.

HARVEY, A. C.: *The Econometric Analysis of Time Series*. Philip Allan, Londres, 1981.

JONDROW, J., y otros: «On the Estimation of Technical Inefficiency in the Stochastic Frontier Production Function Model». *Journal of Econometrics*, 19, pp. 233-238, agosto 1982.

KOPP, R. J.: «The Measurement of Productive Efficiency: A Reconsideration». *Quarterly Journal of Economics*, 96, pp. 477-503, agosto 1981.

KOPP, R. J., y SMITH, V. K.: «Frontier Production Function Estimates for Steam Electric Generation: A Comparative Analysis». *Southern Economic Journal*, 46, pp. 1049-1059, abril 1980.

LEE, L., y TYLER, W. G.: «The Stochastic Frontier Production Function and Average Efficiency: An Empirical Analysis». *Journal of Econometrics*, 7, pp. 385-389, junio 1978.

MEEUSEN, W., y BROECK, J. VAN DEN: «Technical Efficiency and Dimension of the Firm: Some Results on the Use of Frontier Production Functions». *Empirical Economics*, 2, pp. 109-122, 1977.

MURO, J.: *El cambio técnico como motor de la producción: Una aplicación a la agricultura española*. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid, 1980.

OLSON, J. A.; SCHMIDT, P., y WALDMAN, D. M.: «A Monte Carlo Study of Estimators of Stochastic Frontier Production Functions». *Journal of Econometrics*, 13, pp. 67-82, 1980.

RICHMOND, J.: «Estimating the Efficiency of Production». *International Economic Review*, 15, pp. 515-521, junio 1974.

SCHMIDT, P.: *Econometrics*. Marcel Dekker. Nueva York, 1976a.

----: «On the Statistical Estimation of Parametric Frontier Production Functions». *Review of Economics and Statistics*, 58, pp. 238-239, 1976b.

SCHMIDT, P., y LOVELL, C. A. K.: «Estimating Technical and Allocative Inefficiency Relative to Stochastic Production and Cost Frontiers». *Journal of Econometrics*, 9, pp. 343-366, febrero 1979.

----: «Estimating Stochastic Production and Cost Frontiers when Technical and Allocative Inefficiency are Correlated». *Journal of Econometrics*, 13, pp. 83-100, 1980.

STEVENSON, R. E.: «Likelihood Functions for Generalized Stochastic Frontier Estimation». *Journal of Econometrics*, 13, pp. 57-66, 1980.

THEIL, H.: *Principles of Econometrics*. Wiley. Nueva York, 1971.

WALD, A: «Note on the Consistency of the Maximum Likelihood Estimator». *Annals of Mathematical Statistics*, 20, pp. 595-601, 1949.

ZELLNER, A.; KMENTA, J., y DREZE, J.: «Specification and Estimation of Cobb-Douglas Production Functions». *Econometrica*, 34, pp. 784-795, octubre 1966.

SUMMARY

ESTIMATING PRODUCTION FRONTIERS: SURVEY AND COMMENTS

A critical survey of the estimating procedures used in production frontiers estimation with special emphasis in maximum-likelihood methods. Additionally, some suggestions are provided so as to improve the model specification and the selection of the estimation method in applied work. Finally, some new ways of advance in this topic are outlined.

Key words: Production frontiers; stochastic frontiers; full frontiers; corrected ordinary least squares estimation (COLS); maximum-likelihood estimation.

AMS 1980. Subject classification: 90A11.