CAPÍTULO 3

Crecimiento pro-poor: Un análisis basado en la dominancia estocástica con inferencia estadística.

1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se ha realizado un análisis sobre el efecto que tienen las variaciones en la distribución del ingreso y la renta media sobre el nivel de pobreza. El enfoque utilizado tiene una doble perspectiva: por un lado, se observó el efecto del crecimiento sobre la pobreza a lo largo del tiempo, teniendo en cuenta las variaciones en la distribución del ingreso y, por ende, su impacto en el nivel de pobreza. Por otra parte, se ha desarrollado una metodología para realizar comparaciones inter-territoriales de lo que se ha denominado *efecto desigualdad* sobre la pobreza, es decir, de la influencia de la desigualdad sobre la diferencia en las tasas de pobreza en las distintas regiones españolas.

Una de las cuestiones que se ha destacado es que los resultados están condicionados por los diferentes índices de pobreza utilizados. Este hecho implica que, dependiendo del índice utilizado, los resultados pueden ser diferentes y por consiguiente las conclusiones de la investigación tienden a ser ambiguas. El propósito de este capítulo es elaborar una herramienta que proporcione resultados unívocos sobre la naturaleza *pro-poor* del crecimiento económico.

Para ello se desarrolla una metodología basada en las técnicas de dominancia estocástica e inferencia estadística, con el objetivo de tratar de mejorar el conocimiento del efecto del crecimiento económico sobre la pobreza, teniendo en cuenta que dicho crecimiento afecta, también, a la distribución del ingreso y que tal efecto ha de ser considerado a la hora de evaluar los niveles de pobreza. Con esta herramienta se pretende lograr un doble objetivo[1]:

1. Utilizando la técnica de la dominancia estocástica se puede comparar el bienestar asociado a las distintas distribuciones de renta con un alto poder de ordenación, a partir de pocos juicios de valor y sin caer en el problema de la multiplicidad de índices (Bishop y Formby, 1994). Por otro, su interpretación económica es directa y muy intuitiva. (Bishop et. al., 1989, 1991)
2. En segundo lugar, se utiliza la inferencia estadística, lo cual es muy interesante teniendo en cuenta que los datos utilizados en este tipo de análisis son generalmente datos muestrales (en este caso procedentes de la Encuesta de Condiciones de Vida). Estos datos están sujetos a errores muestrales, que han de ser tenidos en cuenta para llevar a cabo un análisis más riguroso. A partir de los trabajos pioneros de Beach y Davidson (1983), se puede obtener la distribución asintótica de las ordenadas de la *curva de Lorenz generalizada*, lo que, como se verá más adelante, permitirá llevar a cabo contrastes de hipótesis para analizar con más exactitud si el crecimiento ha sido o no *pro-poor*.

[1] Este capítulo se apoya en desarrollos teóricos de distintos autores, los ya comentados y otros de Foster y Shorrocks (1988), o Son (2003, 2004), además de los ya vistos en el capítulo 2.

2. MARCO TEÓRICO

El esquema teórico que se presenta se estructura en tres puntos: descomposición de la variación de la pobreza en *efecto renta media* y *efecto desigualdad*; relación entre dominancia estocástica y pobreza y, por último, inferencia estadística aplicada a la dominancia estocástica.

2.1 Crecimiento *pro-poor* y dominancia estocástica.

Con el fin de profundizar en la utilización de las técnicas de dominancia estocástica para analizar el trinomio crecimiento-desigualdad-pobreza, se definen a continuación algunas relaciones entre dichas variables. A tal fin, se toma como referencia el trabajo de Son (2004).

Para ello, se parte de la *curva de Lorenz*, cuya expresión se recoge en [1]:

$$L(p) = \frac{1}{m}\int_0^y xf(x)dx \qquad [1]$$

donde:

$$p = \int_0^y f(x)dx \qquad [2]$$

siendo *x* el ingreso de un individuo de la sociedad, cuya función de densidad es *f(y)* y la media de dicho ingreso en la sociedad, m [2].

Como ya se ha visto, el crecimiento será *pro-poor* en el sentido de Kakwani y Pernía (2000) si la desigualdad decrece con el crecimiento de forma que los más pobres

[2] Las propiedades de la curva de Lorenz son bien conocidas, por lo que no se repasan aquí. Véase Kakwani (1980).

se beneficien más de dicho aumento de renta. Así pues, el crecimiento será *pro-poor* si la curva de Lorenz se desplaza hacia arriba, esto es, si $\Delta L(p) \geq p, \forall p$.

En esta línea de análisis, y recordando que la curva de Lorenz generalizada se define como $mL(p)$, se puede decir que la distribución del ingreso en t+1 domina en segundo orden a la distribución en t si la curva de Lorenz generalizada asociada a la distribución del ingreso de t+1 se sitúa por encima de la curva asociada a la distribución del ingreso de *t* (Bishop et.al., 1989). En este contexto, Atkinson (1987) prueba una interesante relación entre dominancia estocástica de segundo orden y pobreza. Así, sea una medida de pobreza definida como[3]:

$$q = \int_0^z P(z,x) f(x) dx \qquad [3]$$

que cumple las siguientes propiedades:

$$\frac{\partial P(z,x)}{\partial x} < 0, \qquad [4]$$

$$\frac{\partial^2 P(z,x)}{\partial x^2} > 0 \qquad [5]$$

Se puede demostrar (Atkinson, 1987) que si $\Delta(mL(p)) \geq 0, \forall p$, entonces $\Delta q \leq 0$ para todas la medidas de la pobreza definidas por [3] (y que cumplen las propiedades que se acaban de ver). Es decir, si existe dominancia estocástica de segundo orden, la pobreza habrá descendido.

A partir de la definición de la curva de Lorenz, se puede escribir:

$$L(p) = \frac{m_p p}{m} \qquad [6]$$

[3] Nótese que la expresión en [3] contiene la familia de medida de Foster-Greer y Thorbecke (1984).

siendo *L(p)* la proporción de ingreso percibida por el *p%* más pobre de la población y m_p el ingreso medio de dicho *p%* de la población.

Si se toman logaritmos en la ecuación [6] se obtiene:

$$Ln(m_p) = Ln(mLp)) - Ln(p) \qquad [7]$$

Y tomando primeras diferencias en [7] se llega a:

$$g(p) = \Delta Ln(mL(p)), \qquad [8]$$

donde $g(p) = \Delta Ln(m_p)$ es la tasa de crecimiento del ingreso medio de los individuos situados en el *p%* más pobre de la población. Es evidente, a partir del teorema de Atkinson (1987), que si $g(p) > 0, \forall p$, la pobreza ha caído entre los dos períodos analizados.

Nótese que la ecuación [8] también se puede escribir como:

$$g(p) = g + \Delta Ln(L(p)) \qquad [9]$$

donde $g = \Delta Ln(m)$ es el aumento de la renta media del conjunto de la sociedad.

La ecuación [9] es sumamente intuitiva en el contexto en el que se desarrolla este trabajo. El crecimiento será *pro-poor* si $g(p) > g, \forall p$, es decir, si la renta media de los más pobres aumenta en mayor medida que la renta media del conjunto de la sociedad, lo que implica que $\Delta Ln(L(p)) > 0, \forall p$, esto es, que la desigualdad ha disminuido (Son, 2004).

Por último, es importante destacar las diferencias entre el enfoque que se acaba de analizar y el propuesto por Ravallion y Chen (2003) al que se hizo referencia en el primer capítulo. En aquel caso, la *Curva de Incidencia del Crecimiento* representaba dominancia estocástica de primer orden, mientras que en el desarrollo que se acaba de ver, lo que se obtiene es dominancia estocástica de segundo orden. Esto implica dos diferencias básicas: por un lado, la dominancia de segundo orden implica dominancia de primer orden, aunque el recíproco no es cierto, por lo que con este enfoque se pueden ordenar más casos (Bishop y Formby, 1994). Por otro lado, la dominancia de segundo orden tiene en cuenta aspectos distributivos (en concreto a través del *principio de transferencias de Dalton-Pigou*) mientras que la dominancia de primer orden se basa sólo en criterios de eficiencia.

En cualquier caso, y para profundizar más en la relación entre la dominancia estocástica y el crecimiento *pro-poor*, es necesario antes analizar de una manera más formal la relación entre la dominancia estocástica y la pobreza.

2.2 Dominancia estocástica y pobreza.

A tal fin, se introducirán en el análisis aspectos de bienestar social y funciones de utilidad agregadas, algo que resulta importante para dejar claro en el ámbito el que se desarrolla el estudio en términos de juicios de valor. Para ello, se toman como referencia los trabajos de Foster y Shorrocks (1988a, 1988b).

A efectos de notación, supóngase que existen distintas distribuciones de renta, que se pueden representar a través de vectores:

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n), \qquad [10]$$

donde $x_i \in \Re_{++} := (0, \infty)$ es el ingreso que recibe el individuo *i-ésimo*[4].

Sea $X := \{x | x \in \Re^n_{++}, n < \infty\}$ el conjunto de distribuciones que se considera. Por otro lado, se denotará por $\hat{x}$ la versión ordenada de x, obtenida empleando una matriz de permutación Π, tal que $\hat{x}_1 \leq \hat{x}_2 \leq ...\hat{x}_{n(x)}$, donde *n(x)* es el tamaño del vector *x*.

[4] Nótese que el análisis sería análogo en caso de emplear gasto per cápita.

Se dirá que *x* se obtiene a partir de *y* mediante una permutación si $\hat{x} = \hat{y}$, y mediante una ***m-replicación*** si $x = (y, y, ..., y)$ y *n(x)=mn(y)* para algún *m* positivo.

En este contexto, un índice de pobreza cualquiera se puede representar como una función: $P : X \times \Re_{++} \rightarrow \Re$ cuya imagen *P(x;z)* indica el grado de pobreza asociado a una determinada distribución del ingreso.

Por otro lado, es evidente que si para cualquier línea de pobreza *z* un índice de pobreza *P* lleva a una ordenación inequívoca de dos distribuciones de renta en cuanto al nivel de pobreza, es decir, si:

$$P(x, z) \leq P(y, z), \forall z \in [0, \infty) \qquad [11]$$

se puede concluir que la pobreza es menor (medida a través del índice *P*) en la distribución *x* que en la distribución *y*. Sin embargo, en ocasiones la ordenación no es inequívoca y el resultado de la misma será diferente en función de la línea de pobreza escogida, por lo que se puede concluir, siguiendo la notación de Sen (1973), que *P* no es una ordenación completa.

En este caso, Foster y Shorrocks (1988a) definen *P* como una ordenación parcial estricta si se cumple:

xPy si y sólo si $P(x, z) \leq P(y; z), \forall z \in \Re_{++}$ y $P(x; z) < P(y; z)$ para algún $z \in \Re_{++}$.

Esto implica que *x* tiene inequívocamente menos pobreza que *y* con respecto al índice de pobreza *P*. A partir de aquí, se puede establecer una caracterización de la pobreza de la siguiente forma.

Sea $P_1(x, z) = \dfrac{q(x, z)}{n(x)}$ el índice de pobreza empleado para medir tal fenómeno. En este caso, para cualquier $n \geq 1$ y cualesquiera $x, y \in \Re^n_{++}$, se cumple que:

$xP_1 y \Leftrightarrow x_i \geq y_i \forall i = 1,...,n$, siendo $>$ para algún *i*. [12]

En otras palabras, si todas las rentas son superiores en la distribución *x* que en la distribución *y*, la pobreza medida a través del índice *proporción de pobres* es menor en la distribución *x*.

Por otro lado, sea W_1 una clase de funciones de bienestar: $W_1 : X \to \Re$ simétricas, invariantes ante replicaciones y crecientes en el ingreso. En tal caso, se tiene que:

$xP_1 y \Leftrightarrow W_1(x) > W_1(y)$ [13]

Es decir, el bienestar económico asociado a la distribución *x* es superior al asociado a la distribución *y* [5].

Si se define una clase de funciones de utilidad aditivamente separables de la forma:

$$u_1 := \left\{ U : X \to \Re \middle| U(x) = \frac{1}{n(x)} \sum_{i=1}^{n(x)} u(x_i), u'(s) > 0, \forall s > 0 \right\}$$, y: [14]

$xU_1 y$ si y sólo si $f\, U(x) > U(y) \forall U \in u_1$ [15]

Se tiene entonces el siguiente teorema (Foster y Shorrocks, 1988b):

Teorema 1: *Para cualesquiera x, y* $\in X$ *:* $xP_1 y \Leftrightarrow W_1(x) > W_1(y) \Leftrightarrow xU_1 y$

El teorema 1 puede interpretarse de la siguiente forma: si hay menos pobreza en la distribución *x*, el bienestar asociado a dicha distribución es superior que el asociado a

[5] Hasta ahora no se ha dicho nada del tamaño de las poblaciones, si bien es sencillo demostrar que estos resultados se mantienen cuando dichos tamaños son diferentes.

la distribución *y*, así como la utilidad asociada a dicha distribución, siempre y cuando utilidad y bienestar se midan a través funciones que cumplan los requisitos señalados. Nótese que lo que se ha analizado hasta aquí es la dominancia estocástica de primer orden, estableciendo la relación de la misma con la pobreza.

La relación entre la dominancia estocástica de primer orden y la de segundo orden es directa. En efecto, se puede partir del índice de pobreza de la familia de Foster, Greer y Thorbecke, con índice de aversión a la desigualdad 1, es decir, de: $P_2(z,x)=\int_0^z\left(\frac{z-x}{z}\right)dx$, que tiene la siguiente relación con el índice *proporción de pobres*:

$$zP_2(x,z)=\int_0^z P_1(x,s)ds \qquad [16]$$

pues $P_1(x,z)$ es la derivada de $zP_2(x,z)$ con respecto a *z*.

Es evidente, a partir de la expresión [16], que si se cumple una relación del tipo P_1 (que ya se ha visto que se puede denominar como dominancia estocástica de primer orden), también se da una relación de ordenación del tipo P_2, que, cómo se verá, se corresponde con la dominancia estocástica de segundo orden. Sin embargo, la recíproca no es cierta. P_2 puede caracterizarse de la siguiente forma:

$$xP_2y \Leftrightarrow X_k := \sum_{i=1}^{K} x_i \geq Y_k := \sum_{i=1}^{K} y_i \forall i=1,...,n \text{, siendo } > \text{ para algún } k. \qquad [17]$$

Nótese que la expresión [17] implica que la pobreza, medida a través del índice P_2, será menor en la distribución *x* que en la distribución *y* si la primera distribución se puede obtener a partir de incrementos y/o transferencias progresivas en la segunda. Dicho de otro modo, en este caso se tienen en cuenta tanto criterios de eficiencia (principio de Pareto con anonimidad) como de equidad (principio de transferencias de Pigou-Dalton)[6].

Esta última expresión tiene una clara concomitancia con la dominancia de Lorenz generalizada, es decir, con la dominancia de segundo orden (Shorrocks, 1983). De hecho, una condición análoga para poblaciones de distinto tamaño (Foster y Shorrocks, 1988a) se puede obtener a partir del empleo de la curva de Lorenz generalizada:

$$GL\left\{x;\frac{k+a}{n(x)}\right\}:=\frac{(1-a)X_k}{n(x)}+\frac{aX_{k+1}}{n(x)} \qquad \text{para } k=0,1,\ldots,n \text{ y } a\in[0,1] \qquad [18]$$

Es decir, la curva de Lorenz generalizada se construye dibujando los puntos $(k/n(x), X_k/n(x))$. Para dos distribuciones $x,y\in X$, la dominancia de Lorenz generalizada (GL) o dominancia estocástica de segundo orden se define como:

$$\begin{aligned}&xGLy \text{ si y sólo si } GL(x,p)\geq GL(y,p),\ \ \forall p\in[0,1]\\ &y\quad GL(x,p)>GL(y,p)\ \ \textit{para algún}\ \ p\in[0,1]\end{aligned} \qquad [19]$$

Teniendo en cuenta que tanto xP_2y como $xGLy$ son invariantes ante replicaciones y permutaciones, se puede decir que ambas expresiones son equivalentes.

Sea ahora W_2 una clase de funciones de bienestar: $W_2: X\rightarrow\Re$ simétricas, invariantes ante replicaciones, que muestran preferencia por la igualdad, en el sentido de que $W_2(x)>W_2(y)$ cuando x se obtiene a partir de la distribución y mediante transferencias progresivas, y crecientes en el ingreso[7]. En tal caso, se tiene que:

$$xP_2y\Leftrightarrow W_2(x)>W_2(y) \qquad [20]$$

Nótese que W_2 es un subconjunto de W_1, por lo que si se cumple [13], también se da [20], tal y como ya se había apuntado.

---

[6] Para la prueba de ésta afirmación, ver Foster y Shorrocks (1988b), pgs. 186-187.

[7] Esto es, W_2 es S-cóncava.

Por otro lado, se puede definir una clase de funciones de utilidad aditivamente separables cuya forma responde a las expresiones [21] y [22]:

$$u_2 := \left\{ U : X \to \Re \middle| U(x) = \frac{1}{n(x)} \sum_{i=1}^{n(x)} u(x_i), u'(s) > 0, u'' < 0, \forall s > 0 \right\} \ , \qquad [21]$$

$$xU_2 y \text{ si y sólo si } U(x) > U(y) \forall U \in u_2 \qquad [22]$$

Entonces, siguiendo a Foster y Shorrocks (1988b) se puede llegar al siguiente teorema:

Teorema 2: *Para cualesquiera* $x, y \in X : \ xP_2 y \Leftrightarrow W_2(x) > W_2(y) \Leftrightarrow xU_2 y$

El teorema 2 tiene interesantes implicaciones desde el punto de vista de la economía del bienestar. En efecto, si se aceptan funciones de bienestar social con los supuestos que se acaban de establecer, y se da dominancia de Lorenz generalizada, se puede llegar a una ordenación inequívoca del bienestar asociado a dos distribuciones de renta distintas[8].

Hasta ahora se han analizado las implicaciones sobre el bienestar de los diferentes órdenes de las medidas de pobreza analizadas (P_1, P_2) sin establecer una determinada línea (o rango de líneas) de pobreza. Sin embargo, es evidente que en el trabajo empírico un elemento crucial es la determinación de una línea de pobreza. Por ello, es importante estudiar cómo varían los resultados cuando se tiene en consideración un determinado rango de líneas de pobreza. En este caso, se puede aplicar la ordenación en pobreza de la siguiente forma:

$$xP(Z)y \text{ cuando } P(y,z) \geq P(x,z), \forall z \in Z \text{ , siendo > para algún } z \in Z \qquad [23]$$

[8] Si las curvas de Lorenz generalizadas se cortan no se podrá hacer ningún tipo de afirmación en lo que a bienestar se refiere. Como se verá más adelante, la inferencia estadística proporciona una importante herramienta para ordenar distribuciones que en principio eran incomparables.

Es inmediato que, en este caso, la capacidad de ordenación será mayor, pues habrá distribuciones que no se puedan ordenar para todas las líneas de pobreza, pero sí para el rango de las mismas que se defina.

En este caso, se puede establecer un rango de líneas de pobreza como $Z^* = (0, z^*)$, siendo la ordenación asociada: $P^* := P(Z^*)$. Habida cuenta de que los ingresos por encima de z^* no son relevantes en este contexto, se puede definir la distribución truncada definida por:

$x_i^* = \min\{x_i, z^*\}$, para todo *i=1,2,…,n(x)* [24]

Así, se puede definir una ordenación de bienestar truncada, que viene dada por el siguiente teorema (Foster y Shorrocks, 1988a):

Teorema 3: $xP_1^* y \Leftrightarrow xW_1^* y$ y $xP_2^* y \Leftrightarrow xW_2^* y$

siendo $xW_a^* y \Leftrightarrow x(z^*)W_a\, y(z^*)$.

Es decir, si para una distribución truncada x^* hasta una determinada z^*, el índice proporción de pobres es menor que para otra distribución y^*, el bienestar asociado a la primera de las distribuciones, medido a través de la clase de funciones W_1^*, es superior que el asociado a la segunda. A la misma conclusión se llega si se emplea el índice P_2 y se utiliza una función de bienestar social del tipo W_2^*[9].

Desde el punto de vista empírico, para analizar si existe dominancia de segundo orden (o de Lorenz generalizada) truncada se puede analizar si la curva de Lorenz generalizada de una de las distribuciones está por encima de la otra en el rango de ingresos $\{0, z^*\}$.

[9] Nótese que se puede llegar a un resultado similar empleando funciones de utilidad aditivamente separables tal y como se hacía más arriba.

2.3 *Efecto desigualdad* y *efecto crecimiento*: Un enfoque basado en la dominancia estocástica

Hasta ahora se han revisado las relaciones entre crecimiento económico y pobreza empleando dominancia estocástica, y entre pobreza y dominancia estocástica. Sin embargo, resultaría de gran interés poder analizar si el crecimiento ha sido *pro-poor* desde el punto de vista de la dominancia estocástica, descomponiendo el *efecto desigualdad* y el *efecto crecimiento*. Esto permitiría aprovechar las ventajas que ofrece este enfoque. Por otro lado, el enfoque de Son (2004) complementa notablemente el efecto conjunto del crecimiento sobre la pobreza, teniendo en cuenta la distribución del ingreso al emplear dominancia estocástica de segundo orden, pero sin descomponer dicho efecto conjunto.

Con el fin de llevar a cabo dicha descomposición entre los dos efectos, se parte de la definición de la curva de Lorenz generalizada, $GL = mL(p)$. La variación de dicha curva entre dos períodos vendrá dada por la expresión [25]:

$$\Delta GL(p) = GL_2(p) - GL_1(p) = m_2 L_2(p) - m_1 L_1(p) \qquad [25]$$

según la cual la variación total de la curva de Lorenz generalizada se debe en parte a la variación de la renta media y en parte a la variación de la desigualdad, medida a través de la curva de Lorenz. El objetivo es, por tanto, descomponer el efecto total en *efecto crecimiento* y *efecto desigualdad*, lo que permitirá identificar qué parte del desplazamiento de *GL* es debido al cambio en la renta media y qué parte al cambio en la desigualdad. Siguiendo el enfoque axiomático de Kakwani (2000), esta descomposición se puede hacer de la siguiente forma:

$$\Delta GL_I = \frac{1}{2}\left\{m_1 L_2(p) - m_1 L_1(p) + m_2 L_2(p) - m_2 L_1(p)\right\} \qquad [26]$$

$$\Delta GL_g = \frac{1}{2}\left\{m_2 L_1(p) - m_1 L_1(p) + m_2 L_2(p) - m_1 L_2(p)\right\} \qquad [27]$$

siendo la suma de [26] y [27] igual al efecto total:

$$\Delta GL_I + \Delta GL_g = \Delta GL(p) \qquad [28]$$

El *efecto desigualdad*, GL_I, recoge la variación de la desigualdad, medida a través de la curva de Lorenz, utilizando a tal efecto tanto la renta del período inicial como la del período final. El razonamiento es similar para el caso del *efecto crecimiento*, GL_g.

Por otra parte, hasta ahora se ha definido una curva de Lorenz generalizada en el momento inicial, y otra en el momento final, si bien es necesario conocer cuál sería la curva de Lorenz generalizada teniendo sólo en cuenta el *efecto desigualdad* (esto es, la curva de Lorenz generalizada en el paso intermedio). Como es bien sabido, la curva de Lorenz generalizada se construye a partir de los pares de coordenadas $\{p; mL(p)\}$. La interpretación es inmediata: a cada proporción *p%* de población le corresponde la proporción de renta de la que disfruta escalada por la renta media.

Así, las ordenadas para la curva de Lorenz generalizada teniendo en cuenta el cambio que viene dado por el *efecto desigualdad*, vendrán dadas por:

$$GL_I(p) = GL_1(p) + \frac{1}{2}\{m_1L_2(p) - m_1L_1(p) + m_2L_2(p) - m_2L_1(p)\} \qquad [29]$$

Nótese que, si a la expresión [29] se le suma el *efecto crecimiento* se tiene la curva de Lorenz generalizada final:

$$GL_I(p) + \Delta GL_g = GL_1(p) + \frac{1}{2}\{m_1L_2(p) - m_1L_1(p) + m_2L_2(p) - m_2L_1(p)\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\{m_2L_1(p) - m_1L_1(p) + m_2L_2(p) - m_1L_2(p)\} = GL_1(p) + GL_2(p) - GL_1(p) = GL_2(p), \qquad [30]$$
$$\forall p$$

A partir de estas expresiones se pueden extraer algunas conclusiones importantes. Por un lado, se puede conocer, empleando la dominancia estocástica, cuál es el ***efecto desigualdad*** al pasar de una distribución a otra. Si la curva de Lorenz generalizada definida por la expresión [29] está por encima de la curva de Lorenz generalizada del momento inicial, GL_1, el ***efecto desigualdad*** se habrá traducido en una reducción de la pobreza, medida a través de los índices de la forma q ya definidos[10]. Las implicaciones sobre el bienestar son inmediatas, ya que ***el efecto desigualdad*** se habrá reflejado en un incremento el bienestar, medido a través de la clase de funciones de bienestar W_2.

Sin embargo, este resultado no es el único que se busca en este trabajo, pues en el mismo interesa, además, el análisis de la pobreza. Los resultados sobre dominancia estocástica y bienestar son extensibles al caso de distribuciones truncadas. Por lo tanto, se puede truncar las distribuciones estudiadas hasta un punto z^*. Así, si la curva de Lorenz generalizada $GL_I(p)$ domina a la curva de Lorenz generalizada $GL_1(p)$ para las distribuciones truncadas hasta z^*, se tiene que la pobreza será menor en la primera de ellas, mientras el bienestar medido por la clase de funciones W_2^* será mayor. Este resultado se puede sintetizar en el siguiente teorema:

Teorema 4: Si $GL_I(p) \geq GL_1(p)$, $\forall x < z^*$, con al menos una desigualdad estricta, entonces: xP_2^*y y xW_2^*y, representando y la distribución inicial y x la distribución que se obtiene a partir de la inicial teniendo en cuenta sólo el *efecto desigualdad*.

La demostración es inmediata a partir del teorema de Atkinson (1987) y del *teorema 3*.

2.4 Inferencia Estadística Aplicada a la Dominancia Estocástica

En la mayor parte de los casos, el análisis empírico con datos muestrales está sujeto a errores de muestreo que pueden llevar a conclusiones erróneas, ya que en ocasiones se pueden encontrar curvas de Lorenz generalizadas que se cortan, impidiendo, por tanto, la ordenación de las distribuciones comparadas, cuando en

[10] Este resultado es inmediato empleando el teorema de Atkinson (1987) del que ya se ha hablado.

realidad dichos cortes vienen provocados por errores muestrales. Por ello, es interesante introducir técnicas de inferencia estadística que permitan desarrollar contrastes estadísticos para precisar más el análisis.

En este contexto, trabajos como los realizados por Beach y Davidson (1983) o Beach y Kaliski (1986) ofrecen herramientas que permiten introducir notables mejoras en el análisis de la dominancia estocástica.

Sea J el espacio univariante de todas las probabilidades tal que $0 \leq J \leq 1$ e $Y \subseteq R^{+}$, donde R^{+} es el conjunto de números reales positivos, e Y el vector de ingresos positivos[11]. Sea $F(y)$ la proporción de población con ingresos iguales o menores a *y*, donde $y \in Y$ y $F \in J$ (es inmediato que $F(y)$ es la función de distribución acumulada).

Beach y Davidson (1983) derivan la matriz de varianzas y covarianzas para las ordenadas de la curva de Lorenz, presentando su procedimiento una importante ventaja: al estar la distribución basada en un método de libre-distribución, permitirá la deducción de la matriz de varianzas y covarianzas (Π) sin necesidad de conocer la distribución estadística de la variable ingreso. Los test inferenciales se podrán llevar a cabo de la siguiente forma.

Divídase la población en grupos de cuantiles (por ejemplo, deciles), con las correspondientes $K+1$ proporciones. Se tiene, entonces, un conjunto de K abcisas $p_1 < p_2 < ... < p_k$, un conjunto de K cuantiles de ingreso poblacionales $x_{p1} < x_{p2} < ... < x_{pK}$ y un conjunto de K ordenadas de la curva de Lorenz poblacional, $L_1 < L_2 < ... < L_K$.

La media y varianza condicional de los ingresos menores o iguales a x_{pi} vienen dadas respectivamente por:

$$g_i \equiv E(Y / Y \leq x_{pi}) \qquad [31]$$

[11] Y también puede representar un vector de gastos.

$$l_i^2 \equiv E\left[(Y - g_i)^2 / Y \le x_{pi}\right] \qquad [32]$$

La media y varianza poblacional son, por tanto, $g_{K+1} \equiv m$ y $l_{K+1}^2 \equiv s^2$. Supóngase, además, que *F* es estrictamente creciente y continua en x_{pi} [12] .Se puede definir el vector de ordenadas de la curva de Lorenz generalizada poblacional como:

$$GL = \left(p_1 g_1, p_2 g_2, ..., p_K g_K, m\right)' \qquad [33]$$

El objetivo es encontrar las expresiones para la distribución asíntotica de las ordenadas de la curva de Lorenz generalizada. Se supone que los datos provienen de poblaciones independientes, representadas por funciones de distribución monótonas y dos veces diferenciables, con media y varianzas finitas. De estas poblaciones, se seleccionan dos muestras de tamaño *N*. Las observaciones pueden ser ordenadas por tamaño en sentido ascendente de menor ($Y_{(1)}$) a mayor ($Y_{(N)}$), tal que $Y_{(1)} \le Y_{(2)} \le ... \le Y_{(N)}$. $Y_{(J)}$ será, en consecuencia, la ***j-ésima*** observación con ponderación w_j.

Por otra parte, sea el cuantil muestral $\hat{x}_{pi}$ definido como el *r*-ésimo estadístico de orden $Y_{(r_i)}$ tal que $\hat{x}_{pi} = Y_{(r_i)}$, con el r_i-ésimo estadístico de orden ponderado, donde $r_i = \left\{p_i \sum_{j=1}^{N} w_j\right\}$ muestra el mayor número entero menor o igual que $p_i \sum_{j=1}^{N} w_j$ [13]. Si *F* es estrictamente monótona y diferenciable para cualquier conjunto finito $\{p_i / i = 1,2,...,k\}$, Wilks (1962) demuestra que los $\hat{x}_{pi}$ se distribuyen asintóticamente como una normal multivariante, incluyendo $\hat{\gamma}_i$ y $GL(p_i)$.

Teniendo en cuenta todo lo que se acaba de exponer, se pueden calcular las ordenadas de la curva de Lorenz generalizada como:

---

[12] Por lo tanto, existe sólo un x_{pi} correspondiente a cada p_i.

[13] Se puede decir por tanto que el $100p_i$ % de la muestra ponderada es menor o igual que x_{pi}.

$$\hat{G}L_i = p_i \hat{g}_i = \frac{\sum_{i=1}^{r_i} w_j Y_{(j)}}{\sum_{i=1}^{N} w_j} \qquad [34]$$

Sabiendo que, por definición, la media y varianza acumuladas ponderadas son para cada ***i***, respectivamente:

$$\hat{g}_i = \frac{\sum_{j=1}^{r_i} w_j Y_{(j)}}{r_i} \qquad [35]$$

$$\hat{l}_i^2 = \frac{\left[\sum_{j=1}^{r_i} w_j \left(Y_{(j)} - \hat{g}_i\right)^2\right]}{r_i} \qquad [36]$$

y la estimación de la media total poblacional, $\hat{m}$, es:

$$\frac{\sum_{j=1}^{N} w_j Y_{(J)}}{\sum_{j=1}^{N} w_j} \qquad [37]$$

Beach y Davidson (1983) demuestran que el vector de estimaciones de las ordenadas de la curva de Lorenz generalizada, $\hat{G}L = \left(\hat{G}L_1, \hat{G}L_2, ..., m\right)'$, es asintóticamente normal en el sentido que $\sqrt{N}(\hat{G}L - GL)$ tiene como límite una distribución *K*+1-normal. Esta distribución *K*+1-normal tiene como media cero y matriz de varianzas y covarianzas $\Pi = \lfloor v_{ij} \rfloor$, donde para $i \leq j = 1,2,..,K+1$:

$$v_{ij} = p_i \left[l_i^2 + (1 - p_j)(x_{pi} - g_i)(x_{pj} - g_j) + (x_{pi} - g_i)(g_j - g_i) \right] \qquad [38]$$

Y para *i=j*:

$$v_{ij} = p_i \left[l_i^2 + (1 - p_j)(x_{pi} - g_i)^2 \right] \quad [39]$$

Las desviaciones típicas asintóticas de las ordenadas de la curva de Lorenz generalizada vendrán dadas por las expresiones $\left(N^{-1}\hat{v}_{ij}\right)^{1/2}$, donde N es el número de observaciones no ponderado[14].

Una vez que la matriz de varianzas y covarianzas ha sido definida, se necesita desarrollar un test estadístico para comparar las diferentes hipótesis. Siguiendo el trabajo de Bishop, Formby y Thistle (1989), se puede emplear un contraste de hipótesis para comparar cada par de ordenadas de la curva de Lorenz generalizada, i=1,2,…,$K+1$, donde las hipótesis nula y alternativa serán:

$$H_{0,i} : GL_i^X = GL_i^Y \quad \text{y} \quad H_{A,i} : GL_i^X \neq GL_i^Y \quad [40]$$

siendo GL_i^X and GL_i^Y las ordenadas de la curva de Lorenz generalizada para cada i para las distribuciones X e Y.

El test estadístico para analizar la igualdad de los i elementos de los vectores GL^X y GL^Y será:

$$T_{GLi} = \frac{\hat{G}L_i^X - \hat{G}L_i^Y}{\left[\left(\frac{\hat{v}_{ii}^X}{N_X}\right) + \left(\frac{\hat{v}_{ii}^Y}{N_Y}\right)\right]^{1/2}} \text{ para } i=1,2,\ldots,K. \quad [41]$$

que es asintóticamente normal bajo la hipótesis nula.

[14] Para el conjunto de la población, el estimador consistente para la media será $\hat{m}$ y para la varianza $N^{-1}\hat{s}^2$.

Es importante destacar que la hipótesis alternativa se puede contemplar como dos diferentes alternativas:

$$H_{Ai}^{+}: GL_i^X > GL_i^Y \quad [42]$$

$$H_{Ai}^{-}: GL_i^X < GL_i^Y \quad [43]$$

El valor crítico para este test viene determinado por la distribución del *Módulo Máximo Studentizado*[15], que tiene en cuenta la correlación entre variables. Si la hipótesis nula no es rechazada, no se pueden ordenar las distribuciones. Sin embargo, si se rechaza, hay tres posibles resultados:

- Dominancia de Lorenz Generalizada débil: Si para algunos cuantiles $GL_i^X > GL_i^Y$ y por otros $GL_i^X = GL_i^Y$.
- Dominancia de Lorenz Generalizada fuerte: Si para todo *i* $GL_i^X > GL_i^Y$.
- La curva de Lorenz generalizada se cortará con la otra curva cuando para algunos cuantiles ocurra $GL_i^X > GL_i^Y$, mientras que para otros el sentido de la desigualdad sea el contrario $GL_i^X < GL_i^Y$. En este caso, las técnicas de dominancia estocástica de segundo orden no permiten comparar el bienestar asociado a las distribuciones *X* e *Y*.

2.5 Inferencia Estadística Aplicada al Crecimiento *Pro-poor*

En el apartado 2.3 se ha desarrollado una descomposición del *efecto crecimiento* y el *efecto desigualdad* basada en la dominancia estocástica, mientras que en el cuarto epígrafe de este punto se han presentado y revisado los test inferenciales en el contexto de la dominancia estocástica. A continuación se intenta unificar ambos desarrollos.

Lo que se quiere es conocer si el *efecto desigualdad* ha sido favorable a la población con niveles de renta inferiores al umbral de pobreza, es decir, si el crecimiento ha sido *pro-poor* en el sentido de que ha alterado la distribución de forma favorable a los

[15] Obtenido en Stoline y Ury (1979).

individuos con menores ingresos. En definitiva, se trata de analizar si la curva de Lorenz generalizada que tiene en cuenta sólo el *efecto desigualdad,* GL_I, está por encima de la curva de Lorenz generalizada del momento *1,* GL_1.

A tal fin, el contraste que debe realizarse será, para los ***i*** elementos de las dos curvas de Lorenz generalizadas:

$$H_{0,i} : GL_1 = GL_I \quad \text{y} \quad H_{A,i} : GL_1 \neq GL_I \qquad [44]$$

Si se acepta la hipótesis nula se podrá concluir que el *efecto desigualdad* ha sido inocuo desde el punto de vista de la reducción de la pobreza, pues tal resultado indicaría que la curva de Lorenz generalizada del momento inicial y la curva de Lorenz generalizada que tiene en cuenta sólo el *efecto desigualdad* son estadísticamente equivalentes. Por otro lado, si se rechaza dicha hipótesis nula, los posibles resultados pueden sintetizarse de la siguiente forma:

- Dominancia de Lorenz Generalizada débil: Si para algunos cuantiles ocurre $GL_I > GL_1$ mientras que para otros ocurre $GL_I = GL_1$. En este caso se puede concluir que la pobreza es menor en el segundo período teniendo sólo en cuenta el *efecto desigualdad*. Es decir, dicho efecto ha reducido la pobreza y el crecimiento ha sido *pro-poor*. Sin embargo, hay que destacar que ésto no se da para todos los cuantiles, pues en algunos hay igualdad.
- Dominancia de Lorenz Generalizada fuerte: Si para todo ***i*** $GL_I > GL_1$.
- La curva de Lorenz generalizada se corta: para algunos cuantiles, $GL_I > GL_1$, y para otros $GL_I < GL_1$. En este caso, para deducir si el crecimiento ha sido ***pro-poor*** habrá que analizar lo que haya pasado en los primeros deciles.
- Si $GL_I \leq GL_1$ para todo ***i*** el crecimiento habrá sido ***anti-poor***, en sentido estricto o débil dependiendo de si la desigualdad es estricta para todos los cuantiles o no.

- Por último, si $GL_I = GL_1$ para todo ***i*** no se podrá concluir de manera efectiva la naturaleza *pro-poor* del crecimiento[16].

El test que debe aplicarse se puede escribir como:

$$T_{GLi} = \frac{\hat{G}L_I - \hat{G}L_1}{\left[\left(\frac{\hat{v}_{ii}^{I}}{N_I}\right) + \left(\frac{\hat{v}_{ii}^{1}}{N_1}\right)\right]^{1/2}} \text{ para } i=1,2,\ldots,K. \qquad [45]$$

Hasta aquí se ha realizado una adaptación de la notación del análisis recogido en el epígrafe 2.4, teniendo en cuenta las necesidades del estudio que se está realizando en esta tesis doctoral. Sin embargo, esta adaptación plantea un nuevo problema, pues si bien la distribución de $\hat{G}L_1$ es conocida, no sucede lo mismo con la de la curva de Lorenz generalizada que sólo tiene en cuenta el *efecto desigualdad*, $\hat{G}L_I$. La expresión de la misma era:

$$GL_I(p) = GL_1(p) + \frac{1}{2}\left\{m_1 L_2(p) - m_1 L_1(p) + m_2 L_2(p) - m_2 L_1(p)\right\} \qquad [29]'$$

que se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} GL_I(p) &= GL_1(p) + \frac{1}{2}\left\{GL_{1,2}(p) - GL_1(p) + GL_2(p) - GL_{2,1}(p)\right\} = \\ &= \frac{1}{2}\left\{GL_{1,2}(p) + GL_1(p) + GL_2(p) - GL_{2,1}(p)\right\} \end{aligned} \qquad [46]$$

donde:

$$GL_{1,2}(p) = m_1 L_2(p) \qquad [47]$$

[16] Es inmediato que se está adoptando la clasificación de Duclos y Wodon (2004) sobre la naturaleza *pro-poor* del crecimiento.

Es decir, $GL_{1,2}(p)$ es la curva de Lorenz generalizada que se construye a partir de la distribución del ingreso del período 2, escalada por la renta media que se da en el período 1.

Por simetría:

$$GL_{2,1}(p) = m_2 L_1(p) \qquad [48]$$

representa la curva de Lorenz generalizada que se construye a partir de la distribución del ingreso del período 1 escalada por la renta media que se da en el período 2.

Ahora bien, el siguiente paso es calcular la varianza de $GL_I(p)$, algo que no resulta inmediato. Antes de pasar a hacerlo, recuérdese que lo que se está calculando es la varianza de las ordenadas de la curva de Lorenz generalizada calculada a partir de diferentes curvas de Lorenz generalizadas que se obtienen con diferentes distribuciones. Así pues, la varianza de $GL_I(p)$ vendrá dada por la expresión:

$$Var(GL_I) = \frac{1}{4}\left\{\begin{array}{l} Var(GL_{1,2}(p)) + Var(GL_1(p)) + Var(GL_2(p)) + Var(GL_{2,1}(p)) + \\ 2Cov\left[GL_{1,2}(p); GL_1(p)\right] + 2Cov\left[GL_{1,2}(p); GL_2(p)\right] - \\ 2Cov\left[GL_{1,2}(p); GL_{2,1}(p)\right] + 2Cov\left[GL_1(p); GL_2(p)\right] - \\ 2Cov\left[GL_1(p); GL_{2,1}(p)\right] - 2Cov\left[GL_2(p); GL_{2,1}(p)\right] \end{array}\right\} \qquad [49]$$

Varios términos de esta expresión toman valor igual a cero, ya que las distribuciones inicial y final se han supuesto independientes:

$$Cov\left[GL_1(p); GL_2(p)\right] = 0 \qquad [50]$$

$Cov\left[GL_{1,2}(p); GL_1(p)\right] = Cov\left[m_1 L_2(p); m_1 L_1(p)\right] = 0$, pues se trata de la covarianza entre las distribuciones de la renta inicial y final escaladas por una misma cantidad (la renta media del primer período). Por el mismo motivo se tiene:

$$Cov\left[GL_{1,2}(p);GL_{2,1}(p)\right]=Cov\left[m_1L_2(p);m_2L_1(p)\right]=0 \qquad [51]$$

$$Cov\left[GL_{2}(p);GL_{2,1}(p)\right]=Cov\left[m_2L_2(p);m_2L_1(p)\right]=0 \qquad [52]$$

Sin embargo, hay aún dos términos desconocidos que se deben calcular. El primero de ellos es:

$$Cov\left[GL_{1,2}(p);GL_{2}(p)\right]=Cov\left[m_1L_2(p);m_2L_2(p)\right] \qquad [53]$$

A partir de una bien conocida propiedad de la varianza se tiene que:

$$\begin{aligned}&Var\left[m_1L_2(p)+m_2L_2(p)\right]=Var\left[(m_1+m_2)L_2(p)\right]=\\&=Var(m_1L_2(p))+Var(m_2L_2(p))+2Cov\left[m_1L_2(p);m_2L_2(p)\right]\end{aligned} \qquad [54]$$

De donde:

$$2Cov\left[m_1L_2(p);m_2L_2(p)\right]=Var(m_1L_2(p))+Var(m_2L_2(p))-Var\left[(m_1+m_2)L_2(p)\right] \qquad [55]$$

Razonando de un modo análogo, se tiene que:

$$2Cov\left[m_1L_1(p);m_2L_1(p)\right]=Var(m_1L_1(p))+Var(m_2L_1(p))-Var\left[(m_1+m_2)L_1(p)\right] \qquad [56]$$

Sustituyendo estos resultados en [45] se llega a:

$$Var(GL_I)=\frac{1}{4}\left\{\begin{aligned}&Var(GL_{1,2}(p))+Var(GL_1(p))+Var(GL_2(p))+Var(GL_{2,1}(p))+\\&+2Cov\left[GL_{1,2}(p);GL_2(p)\right]-2Cov\left[GL_2(p);GL_{2,1}(p)\right]\end{aligned}\right\} \qquad [57]$$

Por otro lado, teniendo en cuenta los resultados de [53] y [54], se puede reescribir:

$$Var(GL_I)=\frac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}Var(m_1L_2(p))+Var(m_1L_1(p))+Var(m_2L_2(p))+Var(m_2L_1(p))+\\+Var(m_1L_2(p))+Var(m_2L_2(p))-Var[(m_1+m_2)L_2(p)]-\\-Var(m_1L_1(p))-Var(m_2L_1(p))+Var[(m_1+m_2)L_1(p)]\end{array}\right\} \quad [58]$$

Y simplificando [58] se llega a:

$$Var(GL_I)=\frac{1}{4}\{2Var(m_2L_2(p))+2Var(m_1L_2(p))-Var[(m_1+m_2)L_2(p)]+Var[(m_1+m_2)L_1(p)]\} \quad [59]$$

Es importante destacar que la varianza de la curva de Lorenz generalizada construida teniendo sólo en cuenta el *efecto desigualdad* se calcula a partir de las varianzas de cuatro distribuciones:

1. La primera de estas distribuciones es la distribución del período final.
2. La segunda se construye escalando la curva de Lorenz de la distribución del período final por la media del período inicial.
3. Las distribuciones tercera y cuarta se construyen escalando las curvas de Lorenz de las distribuciones inicial y final por la suma de la renta media de ambos períodos.

Por lo tanto, ya se puede calcular la expresión final que se utilizará en el cálculo de las varianzas de GL_1 y de GL_I. Recuérdese, en este sentido, que la varianza de la curva de Lorenz generalizada para cada cuantil viene dada por: $v_{ij}=p_i\left[l_i^2+(1-p_j)(x_{pi}-g_i)^2\right]$ para *i*=*j*.

En el caso de GL_1 el cálculo es inmediato. Para GL_I, la varianza vendrá dada, para *i*=*j*, por[17]:

$$Var(GL_I)=v_{ii}^{I}=\frac{1}{4}\left\{2v_{ij}^{2,2}+2v_{ij}^{1,2}-v_{ij}^{1,2^*}+v_{ij}^{1^*,2}\right\} \quad [60]$$

[17] En el apéndice se calculan las varianzas necesarias para calcular la varianza de las ordenadas de la curva de Lorenz generalizada que recoge el *efecto desigualdad*.

donde $v_{ij}^{a,a}$ es la varianza de de las ordenadas de la curva de Lorenz generalizada de las distribuciones construidas como se ha indicado más arriba. A partir de lo deducido en el apéndice, se puede escribir la varianza como:

$$Var(GL_I) = v_{ii}^{I} = \frac{1}{4}\left\{\begin{array}{l} 2\left(p_i\left[l_{i,2}^2 + (1-p_j)(x_{pi,2} - g_{i,2})^2\right]\right) + \\ 2\left(p_i\left[\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 l_{i,2}^2 + (1-p_j)\left(\frac{m_1}{m_2}x_{pi,2} - \frac{m_1}{m_2}g_{i,2}\right)^2\right]\right) \\ -\left(p_i\left[\left(\frac{m_1+m_2}{m_2}\right)^2 l_{i,2}^2 + (1-p_j)\left(\frac{m_1+m_2}{m_2}x_{pi,2} - \frac{m_1+m_2}{m_2}g_{i,2}\right)^2\right]\right) \\ +\left(p_i\left[\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)^2 l_{i,1}^2 + (1-p_j)\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}x_{pi,1} - \frac{m_1+m_2}{m_1}g_{i,1}\right)^2\right]\right) \end{array}\right\} \qquad [61]$$

Por lo tanto, la expresión del estadístico de prueba para contrastar si las ordenadas de la curva de Lorenz generalizada son iguales tomará la forma:

$$T_{GLi} = \frac{\hat{G}L_I - \hat{G}L_1}{\left[\left(\frac{1}{4}\left\{\begin{array}{l} 2\left(p_i\left[l_{i,2}^2 + (1-p_j)(x_{pi,2} - g_{i,2})^2\right]\right)/N_2 + \\ 2\left(p_i\left[\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 l_{i,2}^2 + (1-p_j)\left(\frac{m_1}{m_2}x_{pi,2} - \frac{m_1}{m_2}g_{i,2}\right)^2\right]\right)/N_2 \\ -\left(p_i\left[\left(\frac{m_1+m_2}{m_2}\right)^2 l_{i,2}^2 + (1-p_j)\left(\frac{m_1+m_2}{m_2}x_{pi,2} - \frac{m_1+m_2}{m_2}g_{i,2}\right)^2\right]\right)/N_2 \\ +\left(p_i\left[\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)^2 l_{i,1}^2 + (1-p_j)\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}x_{pi,1} - \frac{m_1+m_2}{m_1}g_{i,1}\right)^2\right]\right)/N_1 \end{array}\right\}\right) + \left(\frac{\hat{v}_{ii}^{1}}{N_1}\right)\right]^{1/2}}$$

para i=1,2,…,K. [62]

expresión esta última donde todos los miembros bien son conocidos, bien se pueden calcular[18].

[18] Los valores críticos para este test se deducen también de las tablas de Stoline y Ury (1979).

3. RESULTADO EMPÍRICOS

Este apartado analiza, por regiones, el trienio 2003-2005. En el anexo 5.A se recoge, además, información complementaria relativa a los resultados obtenidos para los bienios 2003-2004 y 2004-2005, cuya información puede contrastarse con la ofrecida por la *tasa de crecimiento equivalente en reducción de la pobreza* ofrecida en el capítulo anterior, de forma que será posible evaluar la consistencia de las conclusiones alcanzadas. Sin embargo, antes de pasar a ver los resultados regionales, se analiza la evolución de España de una forma más detallada.

3.1 España

Tabla 1
España. Período 2003-2004

Decil	$\hat{G}L_1$	$\hat{G}L_2$	T_{GLi}	Sig.	$\hat{G}L_I$	T_{GLi}	Sig.
1	313,37	302,75	2,30		300,56	2,88	**
2	868,00	847,91	2,68	*	841,88	3,61	***
3	1567,50	1535,97	2,96	**	1524,95	4,14	***
4	2405,21	2353,61	3,68	***	2336,80	5,03	***
5	3381,64	3306,92	4,22	***	3283,33	5,72	***
6	4499,67	4415,28	3,88	***	4383,62	5,50	***
7	5776,71	5694,12	3,16	**	5654,16	4,83	***
8	7255,82	7196,14	1,92		7145,15	3,66	***
9	9016,94	9011,37	0,15		8947,93	1,91	
10	11707,43	11790,34	-1,58		11707,43	0,00	

La Tabla 1 recoge los resultados obtenidos en el período 2003-2004 para el conjunto de España. La segunda y tercera columnas muestran el valor de la ordenada de la curva de Lorenz generalizada en los años 2003 y 2004 (el subíndice 1 se refiere al año 2003 y el 2 al año 2004), mientras que en la cuarta se recoge el valor que toma el estadístico de prueba. Nótese que este último se obtiene a partir de restar la columna tercera a la segunda (además se divide por la correspondiente varianza), de forma tal que si el estadístico es positivo significa que el valor de la ordenada de la curva de Lorenz generalizada del año 1 (en este caso 2003) es superior al de la ordenada en el año 2 (2004).

La siguiente columna ofrece información relativa a la significatividad del estadístico de prueba. De acuerdo a los valores recogidos en Stoline y Ury (1979), tres estrellas significan, en este caso, que el estadístico es estadísticamente significativo al 1%; dos estrellas al 5%; una al 10%, mientras que si no hay ninguna estrella el estadístico de prueba no es significativo (para estos tres niveles de significación).

La sexta columna recoge el valor de la curva de Lorenz generalizada construida teniendo en cuenta sólo el *efecto desigualdad*. Para analizar dicho efecto se debe comparar este valor con el que recoge la segunda columna, tal y como se hace en la séptima columna. En dicha columna se calcula el estadístico de prueba, como la diferencia entre la columna segunda y la sexta dividida por las correspondientes varianzas. La octava columna se interpreta de forma análoga a la quinta[19].

Bajo estos parámetros, el año 2003 domina débilmente en segundo orden al año 2004, es decir, el bienestar económico asociado a la distribución de la renta fue mayor en 2003 que en 2004[20]. Por su parte, la curva de Lorenz generalizada construida teniendo en cuenta el *efecto desigualdad* es dominada por la curva de Lorenz generalizada de 2003 siendo, además, esta dominancia estadísticamente significativa al 1% para siete deciles y al 5% en otro. Es decir, los resultados muestran claramente que el *efecto desigualdad* fue negativo entre 2003 y 2004, de forma que, si se tiene en cuenta sólo *efecto desigualdad*, el bienestar económico descendió entre 2003 y 2004.

Por otro lado, para analizar si el crecimiento fue *pro-poor* se ha de fijar una línea de pobreza y analizar qué ocurrió bajo la misma. Para ello, teniendo en cuenta que la *proporción de pobres*, cuando la línea de pobreza se establece en el 60% de la renta media se sitúa en torno al 20%, analizar lo que sucede en los dos primero deciles puede ser lo más adecuado (recuérdese que la *proporción de pobres* mide la proporción de población por debajo de la línea de pobreza). En este caso, como se puede observar en la tabla 1, la curva de Lorenz generalizada para el año 2003 domina, significativamente, a la curva de Lorenz generalizada construida teniendo en cuenta sólo el *efecto desigualdad*

[19] En el anexo 5.B se recogen estas mismas tablas con los valores de las varianzas maestrales.
[20] Si se aceptan los supuestos que se vieron más arriba sobre la función de bienestar social.

para los dos primeros deciles. Es decir, el crecimiento en el período 2003-2004 fue *anti-poor*.

Tabla 2
España. Tasa de crecimiento equivalente en reducción de la pobreza. 2003-2004

	2003	2004	P_{12}	G_{12}	I_{12}	g	f	g^*
H 2003/2004 (60%)	18,70	20,45	8,93	-1,39	10,32	0,74	-6,44	-4,79
Watts 2003/2004	8,48	9,63	12,78	-1,64	14,41	0,74	-7,81	-5,82
FGT-1 2003/2004	6,18	6,49	5,01	-1,63	6,65	0,74	-3,07	-2,29
FGT-2 2003/2004	3,20	3,36	5,04	-1,39	3,57	0,74	-3,63	-2,70
H 2003/2004 (40%)	6,92	8,16	16,37	-1,31	17,68	0,74	-12,45	-9,27
Watts 2003/2004	3,51	4,38	22,15	-1,39	23,54	0,74	-15,88	-11,82
FGT-1 2003/2004	2,69	2,86	6,20	-1,34	7,55	0,74	-4,63	-3,44
FGT-2 2003/2004	1,75	1,79	2,17	-0,85	3,02	0,74	-2,55	-1,90

La Tabla 2 recoge los principales resultados que se obtuvieron en el capítulo 2 sobre la *tasa de crecimiento equivalente en reducción de la pobreza*, con el objetivo de compararlos con los aquí ofrecidos. Como se puede observar, los resultados son coherentes, pues el *índice de crecimiento pro-poor* fue negativo para todas las medidas de pobreza utilizadas y las dos líneas de pobreza empleadas. En todos los casos el componente desigualdad de la descomposición vista en el anterior capítulo es positivo, lo que implica que el crecimiento fue *anti-poor*.

En cualquier caso, es importante destacar que con la descomposición realizada en este capítulo se evita el problema de la multiplicidad de índices (Bishop y Formby, 1994).

Tabla 3
España. Período 2004-2005

Decil	$\hat{GL}_1$	$\hat{GL}_2$	T_{GLi}	**Sig.**	$\hat{GL}_I$	T_{GLi}	**Sig.**
1	302,79	314,09	-2,32		306,40	-0,77	
2	848,24	881,88	-4,19	***	860,11	-1,56	
3	1536,57	1598,09	-5,42	***	1558,59	-2,05	
4	2354,53	2452,59	-6,61	***	2391,81	-2,64	*
5	3308,20	3447,77	-7,39	***	3362,60	-3,03	**
6	4417,00	4600,97	-7,92	***	4487,15	-3,15	**
7	5696,33	5924,53	-8,13	***	5777,35	-3,01	**
8	7198,94	7455,18	-7,73	***	7269,78	-2,23	
9	9014,87	9289,32	-6,89	***	9058,68	-1,19	
10	11794,92	12092,08	-5,28	***	11790,34	0,00	

En la Tabla 3 se recogen los resultados relativos a España para el bienio 2004-2005. Como se puede apreciar, el bienestar asociado a la distribución de la renta en el período 2005 fue superior al del período 2004, pues la distribución de la renta del primer año domina en segundo orden a la de 2005. Además, dicha dominancia es estadísticamente significativa al 1% en todos los deciles.

En cuanto al *efecto desigualdad*, en todos los deciles la curva de Lorenz generalizada construida teniendo en cuenta sólo el *efecto desigualdad* está por encima de la curva de Lorenz generalizada del año 2004, por lo que dicho efecto fue positivo. La diferencia es estadísticamente significativa para los deciles 4, 5, 6 y 7. Sin embargo, la diferencia no es estadísticamente significativa para los dos primeros deciles, por lo que no se puede afirmar con rotundidad que el crecimiento fuese *pro-poor*.

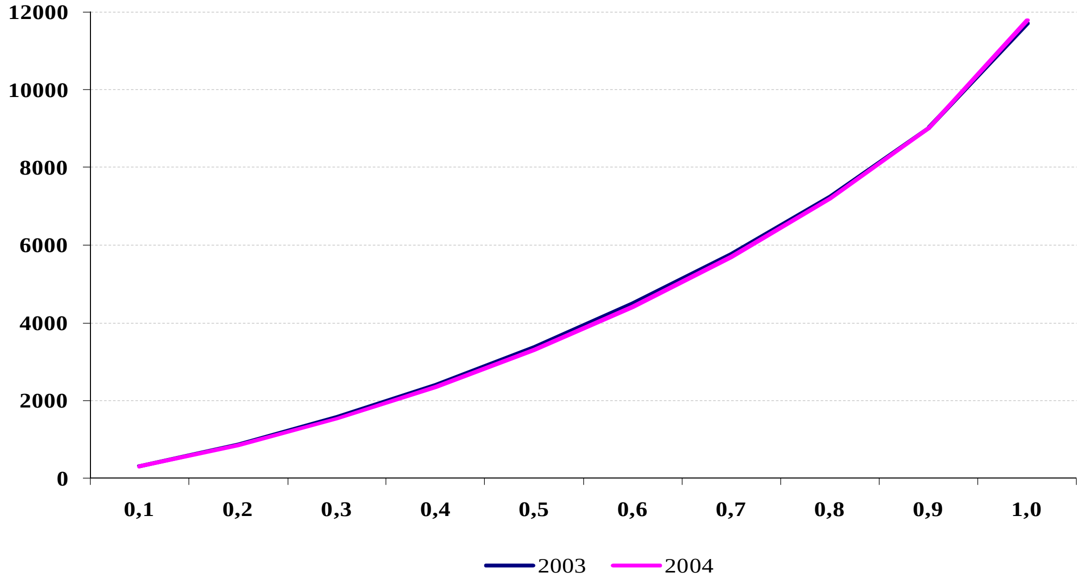
Tabla 4
España. Tasa de crecimiento equivalente en reducción de la pobreza. 2004-2005

	2004	**2005**	P_{12}	G_{12}	I_{12}	g	f	g^*
H 2004/2005 (60%)	19,64	17,91	-9,23	-4,88	-4,35	2,50	1,89	4,72
Watts 2004/2005	9,26	8,40	-9,73	-5,25	-4,48	2,50	1,85	4,63
FGT-1 2004/2005	6,23	5,73	-8,37	-5,40	-2,97	2,50	1,55	3,87
FGT-2 2004/2005	3,25	3,02	-7,06	-4,54	-2,52	2,50	1,56	3,88
H 2004/2005 (40%)	7,72	6,95	-10,60	-6,26	-4,33	2,50	1,69	4,22
Watts 2004/2005	4,23	3,87	-8,89	-4,24	-4,65	2,50	2,10	5,23
FGT-1 2004/2005	2,76	2,62	-5,20	-4,27	-0,93	2,50	1,22	3,04
FGT-2 2004/2005	1,75	1,65	-5,50	-2,91	-2,58	2,50	1,89	4,71

Por último, los resultados presentados en la Tabla 4 son coherentes con lo obtenido en el capítulo 2. En efecto, para todos los índices el *efecto desigualdad* contribuyó a reducir la pobreza, si bien en ningún caso la reducción fue muy relevante.

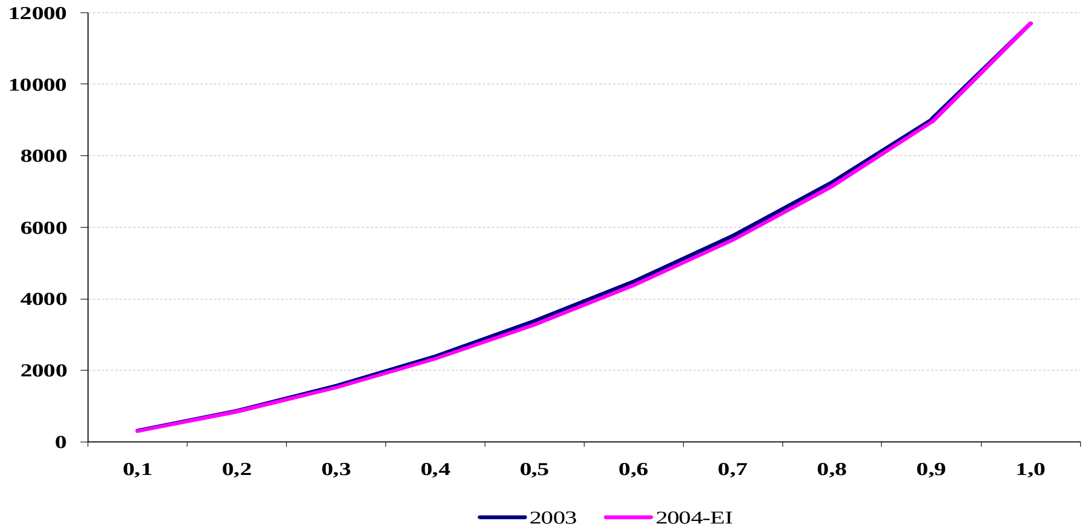
Las Figuras 1 y 2 permiten completar el análisis y la interpretación de los resultados obtenidos hasta ahora.

Figura 1: Curva de Lorenz generalizada de 2003 y 2004



La Figura 1 representa gráficamente las curvas de Lorenz generalizadas de 2003 y 2004. Como se puede ver en la misma, la curva relativa a 2003 se sitúa por encima de la de 2004 para todos los deciles excepto el último, indicando una posible dominancia del primer año sobre el segundo, tal y como confirman los valores de los estadísticos de prueba. La interpretación de la Figura 2 es similar, si bien en este caso la curva de Lorenz generalizada de 2003 se representa junto a la de 2004 que se construye teniendo en cuenta sólo el *efecto desigualdad*, a la que también parece dominar:

Figura 2: Curva de Lorenz generalizada de 2003 y 2004 teniendo en cuenta sólo el efecto desigualdad



Por lo tanto, se puede concluir que en el período 2003-2004 se dio un decrecimiento del bienestar asociado a la distribución de la renta, con un crecimiento claramente *anti-poor*. Mientras, en el bienio 2004-2005 se produjo un aumento del bienestar asociado al ingreso y, si bien el crecimiento pareció ser *pro-poor*, los resultados no son claros en este caso. Parece, pues, pertinente preguntarse qué ocurrió en el período en su conjunto, es decir, entre 2003 y 2005.

Tabla 5
España. Período 2003-2005

Decil	$\hat{G}L_1$	$\hat{G}L_2$	T_{GLi}	**Sig.**	$\hat{G}L_I$	T_{GLi}	**Sig.**
1	313,37	314,09	-0,15		303,95	2,04	
2	868,00	881,88	-1,76		853,71	1,92	
3	1567,50	1598,09	-2,72	*	1546,94	1,94	
4	2405,21	2452,59	-3,21	**	2373,99	2,21	
5	3381,64	3447,77	-3,54	***	3337,55	2,49	
6	4499,67	4600,97	-4,46	***	4453,75	2,14	
7	5776,71	5924,53	-5,42	***	5735,53	1,61	
8	7255,82	7455,18	-6,22	***	7217,11	1,28	
9	9016,94	9289,32	-7,09	***	8994,18	0,63	
10	11707,43	12092,08	-7,08	***	11707,43	0,00	

La Tabla 5 responde a esta última pregunta. Como puede verse en la misma, el bienestar asociado al ingreso aumentó entre 2003 y 2005, siendo este aumento estadísticamente significativo (excepto en el primer decil). Sin embargo, el crecimiento en este período fue levemente ***anti-poor***, pues la curva de Lorenz generalizada construida teniendo en cuenta sólo el ***efecto desigualdad*** está por debajo de la curva de Lorenz generalizada de 2003 (si bien la diferencia no es estadísticamente significativa). La razón es que la desigualdad aumentó entre 2003 y 2005. Ya el índice de Gini apuntaba tal aumento, pues como se puede ver en las Tablas 2 y 4 del capítulo 2, dicho índice pasó de 0,30 a 0,31. Pero si se atiende a las ordenadas de la curva de Lorenz, tal impresión queda contrastada:

Tabla 6
Curva de Lorenz en España
Período 2003-2005

Decil	$L^{2003}(p)$	$L^{2005}(p)$
1	0,0267664	0,0259780
2	0,0741413	0,0729303
3	0,1338894	0,1321658
4	0,2054428	0,2028258
5	0,2888459	0,2851265
6	0,3843434	0,3804948
7	0,4934226	0,4899512
8	0,6197618	0,6165344
9	0,7701897	0,7682155
10	1,0000000	1,0000000

Como se observa en la Tabla 6, las ordenadas de la curva de Lorenz del año 2003 están por encima, para todos los deciles, de las de 2005, lo que confirma el aumento de la desigualdad. Este aumento fue el causante de que el crecimiento entre 2003 y 2005 fuese en España *anti-poor*.

En el siguiente apartado se pasa a analizar el comportamiento de las diferentes regiones españolas. Para ganar en sencillez expositiva, se analiza el período conjunto, es decir, 2003-2005. No obstante, como se ha indicado, en el anexo 5.A se recogen los resultados obtenidos para los bienios 2003-2004 y 2004-2005.

3.2 Resultados por Regiones

Las regiones en las que el *efecto desigualdad* fue positivo para los más desfavorecidos en el trienio 2003-2005 fueron: Asturias, Baleares, Cataluña, la Comunidad Valenciana, Galicia, Murcia, Navarra y La Rioja. Las tablas siguientes muestran el comportamiento en cada uno de los casos.

Tabla 7
Asturias. Período 2003-2005

Decil	$\hat{G}L_1$	$\hat{G}L_2$	T_{GLi}	**Sig.**	$\hat{G}L_I$	T_{GLi}	**Sig.**
1	380,09	443,63	-2,49		434,15	-1,97	
2	1040,33	1112,71	-1,87		1084,44	-1,13	
3	1840,12	1916,65	-1,44		1879,18	-0,70	
4	2792,19	2860,71	-0,98		2788,27	0,05	
5	3875,13	3930,74	-0,64		3829,30	0,52	
6	5107,52	5143,11	-0,35		5020,33	0,84	
7	6437,20	6494,90	-0,49		6331,14	0,91	
8	7922,49	8024,38	-0,75		7832,07	0,69	
9	9669,03	9834,18	-0,99		9596,57	0,44	
10	12440,13	12750,45	-1,19		12440,13	0,00	

Como se puede observar en la Tabla 7, el bienestar asociado a la renta entre 2003 y 2005 no varió (las curvas de Lorenz generalizadas son estadísticamente equivalentes). En cuanto al *efecto desigualdad*, éste no es estadísticamente significativo para ningún decil, e incluso cambia de signo en el cuarto. Sin embargo, los valores más altos del estadístico de contraste se obtienen para los dos primeros deciles (para el primero está cerca de la significatividad), por lo que se puede decir que el crecimiento fue, al menos levemente, *pro-poor* en Asturias.

Tabla 8
Baleares. Período 2003-2005

Decil	$\hat{G}L_1$	$\hat{G}L_2$	T_{GLi}	**Sig.**	$\hat{G}L_I$	T_{GLi}	**Sig.**
1	289,15	436,59	-5,10	***	409,62	-4,10	***
2	914,99	1127,16	-4,16	***	1051,70	-2,53	
3	1741,23	2010,97	-3,93	***	1867,84	-1,75	
4	2698,61	3007,23	-3,50	***	2797,03	-1,13	
5	3772,39	4192,41	-3,87	***	3891,93	-1,12	
6	5021,13	5530,01	-3,84	***	5134,24	-0,86	
7	6449,59	7038,50	-3,78	***	6524,84	-0,48	
8	8118,12	8786,56	-3,48	***	8152,08	-0,18	
9	10073,08	11007,61	-4,12	***	10208,57	-0,63	
10	13165,62	14196,94	-3,18	**	13165,62	0,00	

En las Islas Baleares se produjo un claro aumento del bienestar, medido con dominancia estocástica de segundo orden, ya que el estadístico de contraste es estadísticamente significativo al 1% en todos los deciles. En cuanto a la naturaleza *pro-poor* del crecimiento, se puede ver que la curva de Lorenz generalizada que se construye teniendo en cuenta únicamente el *efecto desigualdad* se sitúa sobre la curva de Lorenz generalizada de 2003 en todos los deciles siendo, además, la diferencia estadísticamente significativa al 1% en el primer decil, por lo que se puede concluir que el crecimiento en esta región fue *pro-poor*.

Tabla 9
Cataluña. Período 2003-2005

Decil	$\hat{GL}_1$	$\hat{GL}_2$	T_{GLi}	**Sig.**	$\hat{GL}_I$	T_{GLi}	**Sig.**
1	383,10	392,58	-0,52		395,60	-0,73	
2	1072,99	1088,78	-0,54		1094,82	-0,75	
3	1946,55	1957,01	-0,25		1967,43	-0,52	
4	2973,30	2994,59	-0,39		3010,16	-0,72	
5	4157,40	4207,00	-0,74		4230,28	-1,14	
6	5496,62	5553,21	-0,72		5582,14	-1,11	
7	7025,35	7066,61	-0,45		7105,26	-0,89	
8	8746,45	8769,55	-0,21		8823,04	-0,73	
9	10806,26	10836,96	-0,24		10897,07	-0,73	
10	13883,14	13809,48	0,43		13883,14	0,00	

El caso de Cataluña no es tan claro como el de Baleares. El bienestar asociado a la renta fue igual, estadísticamente hablando, en 2003 y 2005, y la curva de Lorenz generalizada construida teniendo en cuenta sólo el *efecto desigualdad* está por encima de la curva de Lorenz de 2003 en todos los deciles. No obstante, la diferencia no es estadísticamente significativa para ningún decil, por lo que se puede concluir que el crecimiento en este período fue levemente *pro-poor*. En la Comunidad Valenciana los resultados son ligeramente diferentes en este sentido, por cuanto se aprecia una mejora en el bienestar asociado a la distribución del ingreso entre 2003 y 2005, con un crecimiento que parece haber sido *pro-poor*. No obstante, la diferencia entre la curva de Lorenz generalizada que tiene en cuenta sólo el *efecto desigualdad* y la de 2003 no es significativa para ningún decil.

Tabla 10
Comunidad Valenciana. Período 2003-2005

Decil	$\hat{G}L_1$	$\hat{G}L_2$	T_{GLi}	**Sig.**	$\hat{G}L_I$	T_{GLi}	**Sig.**
1	336,63	332,32	0,24		321,46	0,91	
2	900,01	943,58	-1,57		911,83	-0,47	
3	1597,54	1697,49	-2,59	*	1642,80	-1,31	
4	2412,29	2582,39	-3,41	***	2500,67	-1,95	
5	3353,19	3588,60	-3,83	***	3474,52	-2,08	
6	4449,75	4720,89	-3,70	***	4570,95	-1,70	
7	5685,82	5973,91	-3,37	***	5781,32	-1,15	
8	7094,58	7422,93	-3,24	**	7181,68	-0,89	
9	8759,14	9134,73	-3,13	**	8838,68	-0,69	
10	11277,95	11660,91	-2,16		11277,95	0,00	

Tabla 11
Galicia. Período 2003-2005

Decil	$\hat{G}L_1$	$\hat{G}L_2$	T_{GLi}	**Sig.**	$\hat{G}L_I$	T_{GLi}	**Sig.**
1	288,06	315,85	-1,66		307,24	-1,17	
2	819,57	859,46	-1,46		835,91	-0,59	
3	1485,14	1529,98	-1,17		1486,49	-0,04	
4	2271,08	2326,28	-1,12		2261,34	0,20	
5	3174,97	3248,08	-1,19		3158,34	0,28	
6	4187,16	4290,99	-1,43		4172,35	0,21	
7	5316,32	5455,41	-1,66		5304,08	0,15	
8	6601,24	6775,36	-1,76		6588,48	0,13	
9	8127,59	8355,57	-1,89		8127,74	0,00	
10	10613,81	10917,11	-1,69		10613,81	0,00	

Como se puede apreciar en la Tabla 11, el bienestar asociado a la distribución de la renta, se mantuvo constante en Galicia entre 2003 y 2005 al igual que ocurriera en Cataluña. Por su parte, el *efecto desigualdad* no muestra un comportamiento claro, aunque la curva de Lorenz generalizada construida teniendo sólo en cuenta el *efecto desigualdad* sitúa por encima de la curva de Lorenz de 2003 para los 3 primeros deciles, y el estadístico de contraste toma el valor más alto para el primero.

Tabla 12
Murcia. Período 2003-2005

Decil	$\hat{G}L_1$	$\hat{G}L_2$	T_{GLi}	**Sig.**	$\hat{G}L_I$	T_{GLi}	**Sig.**
1	223,91	265,70	-2,00		266,28	-2,19	
2	708,19	748,78	-1,22		752,79	-1,28	
3	1334,21	1370,22	-0,75		1373,11	-0,80	
4	2073,59	2142,86	-1,09		2148,94	-1,26	
5	2920,50	3037,35	-1,52		3047,63	-1,70	
6	3886,96	4057,27	-1,84		4066,51	-2,07	
7	4974,80	5244,26	-2,42		5254,75	-2,67	*
8	6290,20	6643,65	-2,70	*	6657,90	-2,91	**
9	7840,93	8225,29	-2,55		8241,27	-2,67	*
10	10382,15	10359,58	0,10		10382,15	0,00	

La Tabla 12 muestra que en el crecimiento que se registró en Murcia entre 2003 y 2005 el *efecto desigualdad* jugó un papel positivo. Asimismo, el bienestar asociado a la distribución de la renta aumentó en dicho período. Como consecuencia, la curva de Lorenz generalizada construida teniendo en cuenta sólo el *efecto desigualdad* se sitúa por encima de la curva de Lorenz generalizada de 2003, y en el primer decil la diferencia de ambas curva está cerca de ser estadísticamente significativa al 10%, por lo que se puede decir que el crecimiento fue *pro-poor*.

Tabla 13
Navarra. Período 2003-2005

Decil	$\hat{G}L_1$	$\hat{G}L_2$	T_{GLi}	**Sig.**	$\hat{G}L_I$	T_{GLi}	**Sig.**
1	289,46	437,43	-3,70	***	392,59	-2,37	
2	966,51	1217,21	-3,68	***	1078,23	-1,63	
3	1851,61	2207,52	-4,18	***	1943,02	-1,05	
4	2909,58	3346,41	-3,97	***	2944,89	-0,32	
5	4106,60	4700,63	-4,52	***	4127,84	-0,17	
6	5443,18	6222,25	-5,86	***	5479,28	-0,26	
7	6952,41	7924,72	-5,38	***	6976,35	-0,14	
8	8649,28	9810,25	-5,71	***	8629,06	0,10	
9	10623,25	12139,61	-6,31	***	10662,33	-0,18	
10	13610,59	15498,66	-5,80	***	13610,59	0,00	

La situación en Navarra es similar a la registrada en Murcia, si bien en este caso dos diferencias resultan de especial interés. En primer lugar, la divergencia entre las curvas de Lorenz generalizadas de 2003 y 2005 son más claras aquí. En segundo lugar, la diferencia entre la curva de Lorenz generalizada construida teniendo en cuenta sólo el *efecto desigualdad* y la de 2003 no es estadísticamente significativa para ningún decil. Sin embargo, casi lo es para el primer decil al 10% (y para el segundo el valor del estadístico de prueba es también alto), por lo que se puede decir que el crecimiento entre 2003 y 2005 fue *pro-poor*.

Tabla 14
La Rioja. Período 2003-2005

Decil	$\hat{G}L_1$	$\hat{G}L_2$	T_{GLi}	**Sig.**	$\hat{G}L_I$	T_{GLi}	**Sig.**
1	344,96	394,50	-2,40		390,10	-2,03	
2	920,97	964,02	-1,17		944,70	-0,62	
3	1647,48	1694,10	-0,79		1651,88	-0,08	
4	2516,79	2564,77	-0,59		2499,96	0,21	
5	3528,09	3601,35	-0,71		3511,16	0,17	
6	4650,01	4748,44	-0,80		4628,08	0,18	
7	5916,13	6066,13	-1,02		5908,21	0,06	
8	7369,94	7577,88	-1,20		7379,43	-0,06	
9	9034,52	9378,39	-1,71		9150,92	-0,63	
10	11418,77	11716,13	-1,20		11418,77	0,00	

Por último, en La Rioja el bienestar se mantuvo constante entre 2003 y 2005, no siendo la diferencia entre las curvas de Lorenz generalizadas estadísticamente significativa para ningún decil en los dos períodos analizados. En cuanto al *efecto desigualdad*, éste no muestra un comportamiento claro. Las diferencias entre la curva de Lorenz generalizada construida teniendo en cuenta sólo tal efecto y la de 2003 no son significativas para ningún decil. Sin embargo, en el primer decil la diferencia está cerca de serlo al 10%, por lo que parece que el crecimiento fue *pro-poor* en el período estudiado.

El caso contrario a los analizados hasta ahora (*efecto desigualdad* negativo para los agentes más desfavorecidos en términos de renta) se presenta en Andalucía, Aragón, Canarias, Cantabria, las dos Castillas y Madrid, tal y como se recoge en las Tablas 15-21.

Tabla 15
Andalucía. Período 2003-2005

Decil	$\hat{G}L_1$	$\hat{G}L_2$	T_{GLi}	**Sig.**	$\hat{G}L_I$	T_{GLi}	**Sig.**
1	250,06	226,50	1,93		213,31	3,38	***
2	699,98	700,58	-0,03		662,86	2,09	
3	1261,14	1292,47	-1,18		1224,09	1,51	
4	1926,48	1995,91	-2,05		1889,52	1,16	
5	2701,90	2801,99	-2,36		2652,50	1,21	
6	3609,02	3739,19	-2,49		3541,45	1,37	
7	4637,67	4835,57	-3,15	**	4579,45	0,99	
8	5825,36	6113,07	-3,85	***	5790,11	0,51	
9	7269,76	7672,93	-4,46	***	7268,34	0,02	
10	9514,65	10044,38	-4,22	***	9514,65	0,00	

Tabla 16
Aragón. Período 2003-2005

Decil	$\hat{G}L_1$	$\hat{G}L_2$	T_{GLi}	Sig.	$\hat{G}L_I$	T_{GLi}	Sig.
1	423,56	347,63	2,71	*	341,43	3,44	***
2	1094,76	1021,34	1,75		1007,68	2,36	
3	1895,90	1837,99	1,01		1812,83	1,67	
4	2823,23	2790,50	0,45		2756,95	1,00	
5	3902,69	3908,39	-0,06		3852,84	0,58	
6	5142,95	5183,15	-0,35		5115,06	0,27	
7	6530,80	6630,70	-0,75		6554,63	-0,20	
8	8096,92	8290,78	-1,25		8183,76	-0,59	
9	10006,85	10168,06	-0,88		10045,27	-0,22	
10	12696,11	12867,56	-0,74		12696,11	0,00	

En las Tablas 15 y 16 se puede observar el comportamiento que mostraron Andalucía y Aragón entre 2003 y 2005. En el caso de Andalucía se puede concluir que el bienestar asociado a la distribución de la renta aumentó si se tiene en cuenta la significatividad estadística de las diferencias de las curvas de Lorenz generalizadas de ambos períodos. Por el contrario, en Aragón descendió. No obstante, en ambos casos, la curva de Lorenz generalizada de 2003 está por encima de la de 2005 para el primer decil, si bien tal diferencia no es estadísticamente significativa. Sí lo es, sin embargo, cuando en la comparación, en lugar de la curva de Lorenz generalizada de 2005, se utiliza la construida teniendo sólo en cuenta el *efecto desigualdad*, lo que indica que en ambas regiones el crecimiento entre 2003 y 2005 fue *anti-poor*.

Tabla 17
Canarias. Período 2003-2005

Decil	$\hat{G}L_1$	$\hat{G}L_2$	T_{GLi}	Sig.	$\hat{G}L_I$	T_{GLi}	Sig.
1	291,26	271,00	1,03		265,66	1,31	
2	802,81	748,05	1,87		737,09	2,29	
3	1440,69	1361,03	1,85		1346,61	2,27	
4	2198,90	2083,54	2,03		2060,04	2,59	*
5	3077,32	2943,17	1,86		2913,41	2,32	
6	4084,83	3901,31	2,12		3861,20	2,63	*
7	5231,96	5042,15	1,81		4989,75	2,48	
8	6553,44	6402,76	1,16		6334,40	1,82	
9	8125,60	8037,38	0,58		7953,12	1,20	
10	10522,94	10636,21	-0,52		10522,94	0,00	

Tabla 18
Cantabria. Período 2003-2005

Decil	$\hat{G}L_1$	$\hat{G}L_2$	T_{GLi}	**Sig.**	$\hat{G}L_I$	T_{GLi}	**Sig.**
1	443,85	443,96	0,00		427,16	0,63	
2	1144,01	1123,95	0,41		1083,07	1,27	
3	2017,06	1933,07	1,18		1875,22	2,14	
4	3013,29	2903,38	1,28		2794,27	2,65	*
5	4121,28	3970,08	1,45		3827,74	3,07	**
6	5298,70	5147,80	1,27		4966,71	3,06	**
7	6605,46	6488,84	0,82		6259,17	2,71	*
8	8100,08	8008,83	0,53		7738,68	2,26	
9	9820,02	9913,40	-0,44		9556,87	1,43	
10	12521,62	12974,98	-1,37		12521,62	0,00	

En las Tablas 17 y 18 se presentan los resultados obtenidos para el archipiélago canario y para Cantabria, que, como se puede observar, son muy similares. En efecto, en ambas Comunidades Autónomas las curvas de Lorenz generalizadas de 2003 y 2005 son estadísticamente equivalentes, lo que implica que el bienestar asociado a la distribución del ingreso no varió en este período. Sin embargo, si la atención se centra en el *efecto desigualdad*, se aprecia que en las dos regiones la curva de Lorenz generalizada construida teniendo sólo en cuenta tal efecto domina débilmente a la de 2003, de forma que dicho *efecto desigualdad* jugó un papel negativo en el período analizado.

Tabla 19
Castilla-La Mancha. Período 2003-2005

Decil	$\hat{G}L_1$	$\hat{G}L_2$	T_{GLi}	**Sig.**	$\hat{G}L_I$	T_{GLi}	**Sig.**
1	309,13	299,25	0,56		289,00	1,23	
2	793,28	785,80	0,28		764,78	1,17	
3	1378,51	1383,13	-0,13		1344,59	1,00	
4	2051,22	2097,05	-0,92		2041,13	0,22	
5	2863,88	2957,15	-1,41		2878,01	-0,23	
6	3809,95	3955,95	-1,70		3847,95	-0,48	
7	4898,61	5119,73	-2,10		4985,76	-0,90	
8	6171,41	6466,26	-2,41		6291,00	-1,02	
9	7713,34	8036,95	-2,24		7825,50	-0,82	
10	10153,97	10434,46	-1,38		10153,97	0,00	

Por su parte, en Castilla-La Mancha, el bienestar económico se mantuvo constante entre 2003 y 2005, como se puede inferir del hecho que la curva de Lorenz generalizada de ambos años sean estadísticamente equivalentes. La conclusión es similar cuando se analiza el *efecto desigualdad*. Como se ve en la Tabla 19 la curva de Lorenz generalizada de 2003 está por encima de la construida teniendo sólo en cuenta tal efecto para los cuatro primeros deciles, si bien tal diferencia no es estadísticamente significativa.

Tabla 20
Castilla y León. Período 2003-2005

Decil	$\hat{G}L_1$	$\hat{G}L_2$	T_{GLi}	**Sig.**	$\hat{G}L_I$	T_{GLi}	**Sig.**
1	284,56	268,60	0,88		250,32	1,95	
2	791,06	769,27	0,79		718,21	2,69	*
3	1422,83	1416,30	0,16		1324,89	2,61	*
4	2182,74	2201,51	-0,35		2063,91	2,31	
5	3070,09	3123,17	-0,78		2923,17	2,24	
6	4091,38	4159,90	-0,85		3893,79	2,50	
7	5272,07	5344,83	-0,76		5004,59	2,84	**
8	6636,81	6742,94	-0,91		6311,42	2,94	**
9	8247,27	8426,08	-1,32		7893,21	2,74	*
10	10478,86	11173,17	-3,70	***	10478,86	0,00	

Las Tablas 20 y 21 recogen los resultados obtenidos para las regiones de Castilla y León y Madrid. En Castilla y León, el bienestar asociado a la distribución del ingreso aumentó entre 2003 y 2005. No obstante, el *efecto desigualdad* fue negativo para los individuos más desfavorecidos en términos de renta. En efecto, como se puede ver en la tabla 20, la curva de Lorenz generalizada de 2003 se sitúa por encima de la curva de Lorenz generalizada construida teniendo en cuenta sólo el *efecto desigualdad*. Además, las diferencias son significativas para, entre otros, los deciles 2 y 3, por lo que se puede concluir que el crecimiento en el período analizado fue *anti-poor*.

Tabla 21
Madrid. Período 2003-2005

Decil	$\hat{G}L_1$	$\hat{G}L_2$	T_{GLi}	**Sig.**	$\hat{G}L_I$	T_{GLi}	**Sig.**
1	474,67	404,72	3,62	***	398,64	4,49	***
2	1224,98	1076,58	4,48	***	1066,03	5,37	***
3	2141,41	1902,97	5,10	***	1877,88	6,27	***
4	3199,76	2880,13	5,17	***	2846,13	6,52	***
5	4402,57	4042,53	4,47	***	3995,11	6,01	***
6	5748,16	5395,14	3,51	***	5335,41	4,93	***
7	7251,42	6928,37	2,78	*	6842,33	4,27	***
8	8922,10	8688,44	1,71		8576,39	3,02	**
9	10918,62	10861,81	0,33		10723,91	1,38	
10	14058,20	14240,24	-0,69		14058,20	0,00	

En cuanto a la Comunidad de Madrid, los resultados varían con respecto a Castilla y León, pues en este caso el bienestar asociado a la distribución del ingreso se redujo entre 2003 y 2005. Además, la Tabla 21 muestra que el crecimiento de la renta fue claramente *anti-poor* (cabe destacar que la curva de Lorenz generalizada de 2005 está sólo por encima de la de 2003 en el decil más alto de la distribución).

Tabla 22
Extremadura. Período 2003-2005

Decil	$\hat{G}L_1$	$\hat{G}L_2$	T_{GLi}	**Sig.**	$\hat{G}L_I$	T_{GLi}	**Sig.**
1	220,74	235,93	-0,83		228,40	-0,38	
2	644,79	654,38	-0,33		631,12	0,45	
3	1156,10	1166,74	-0,27		1123,68	0,83	
4	1766,56	1776,22	-0,19		1717,81	0,97	
5	2460,70	2486,38	-0,42		2398,56	1,01	
6	3243,62	3298,42	-0,74		3177,57	0,93	
7	4123,84	4245,00	-1,32		4087,38	0,42	
8	5195,34	5376,76	-1,61		5182,80	0,12	
9	6591,12	6804,28	-1,39		6561,02	0,20	
10	8743,78	9066,01	-1,57		8743,78	0,00	

Tabla 23
País Vasco. Período 2003-2005

Decil	$\hat{G}L_1$	$\hat{G}L_2$	T_{GLi}	**Sig.**	$\hat{G}L_I$	T_{GLi}	**Sig.**
1	423,01	443,57	-0,84		413,57	0,41	
2	1129,78	1188,46	-1,41		1112,41	0,45	
3	1996,59	2124,07	-2,17		1984,08	0,22	
4	3049,10	3217,32	-2,19		3006,21	0,58	
5	4234,61	4470,33	-2,52		4178,50	0,65	
6	5530,11	5880,21	-3,21	**	5496,37	0,33	
7	7011,45	7450,04	-3,46	***	6962,78	0,40	
8	8680,49	9208,86	-3,59	***	8607,19	0,53	
9	10616,59	11282,67	-3,93	***	10548,79	0,43	
10	13268,07	14190,28	-4,09	***	13268,07	0,00	

Por último, las Tablas 22 y 23 recogen los resultados obtenidos para Extremadura y el País Vasco. En la primera de las regiones el bienestar se mantuvo constante entre 2003 y 2005, mientras que el bienestar asociado a la renta aumentó entre 2003 y 2005 en el País Vasco, pues la curva de Lorenz generalizada de 2005 domina débilmente a la de 2003 en segundo orden. Por el contrario, en ambas regiones el *efecto desigualdad* no muestra un comportamiento claro.

4. CONSIDERACIONES FINALES

En este capítulo se ha desarrollado una nueva descomposición que permite analizar la naturaleza del crecimiento que tiene lugar en un determinado territorio para un intervalo de tiempo, con el fin de valorar si el crecimiento de la renta *per cápita* se ha producido de forma tal que ha podido filtrarse hacia las capas más pobres de la población. A pesar de la creciente literatura que ha aflorado en los últimos años sobre este tema, el análisis aquí desarrollado intenta aportar dos importantes novedades: la utilización de la dominancia estocástica y la introducción de la inferencia estadística en el análisis.

La primera de estas novedades permite superar alguno de los problemas que se plantearon en el capítulo 2. En efecto, prácticamente toda la literatura sobre el crecimiento *pro-poor* se basa en la utilización de un determinado índice de pobreza para descomponer la variación en el mismo en *efecto crecimiento* y *efecto desigualdad*. Ahora bien, tal y como se expone en el capítulo 1, no hay un índice de pobreza que sea objetivamente mejor que los demás, sino que la elección entre uno u otros conlleva al final un juicio de valor con el que no todos los individuos tienen porque estar de acuerdo.

Así, hay ocasiones en las que con un índice de pobreza se llega a la conclusión de que el crecimiento ha sido *pro-poor* mientras que, con otro, se llega a una conclusión opuesta. Este es un conocido problema en la teoría del bienestar que se dedica a medir desigualdad y pobreza, tal y como han puesto de manifiesto, entre otros, Bishop y Formby (1994), dándole el nombre de *problema de la multiplicidad de índices*. La dominancia estocástica evita este problema.

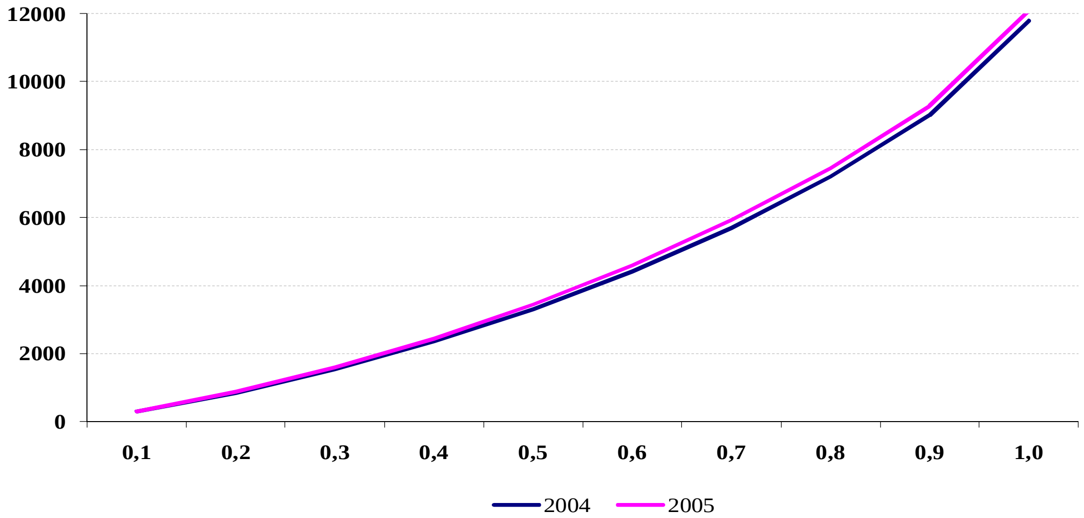
Sensu contrario, la ordenación a la que se llega con la dominancia estocástica es unívoca, de forma que si se aceptan pocos juicios de valor que se han analizado al principio de este capítulo, se puede llegar a una conclusión inequívoca sobre si el crecimiento ha sido o no *pro-poor*.

Sin embargo, la dominancia estocástica por sí sola también presenta un problema, ya que los errores de muestreo pueden llevar a conclusiones erróneas. Por este motivo, la introducción de la inferencia estadística se revela importante, por cuanto el conocimiento de la distribución estadística de los datos con los que se trabaja permite llegar a resultados más precisos. A tal fin, en este capítulo se han desarrollado las varianzas de los deciles de la curva de Lorenz generalizada construida teniendo en cuenta sólo el *efecto desigualdad*. Con estas varianzas se pueden llevar a cabo contrastes de hipótesis para analizar si las diferencias entre las curvas de Lorenz generalizadas son o no significativas.

En cuanto al análisis empírico, y centrando el mismo en los resultados obtenidos para el conjunto de España, se puede concluir que el bienestar asociado a la distribución de la renta se redujo entre 2003 y 2004, siendo en este bienio el crecimiento de la renta *anti-poor*, tal y como demuestran las Figuras 1 y 2 vistas en el apartado 3.1 (nótese que las dominancias que en ellos se aprecian se han revelado estadísticamente significativas con los contrastes de hipótesis pertinentes).

Por su parte, entre 2004 y 2005 el bienestar asociado a la renta aumentó en España, tal y como muestra la relación entre las curvas de Lorenz generalizadas que se ven en la Figura 3.

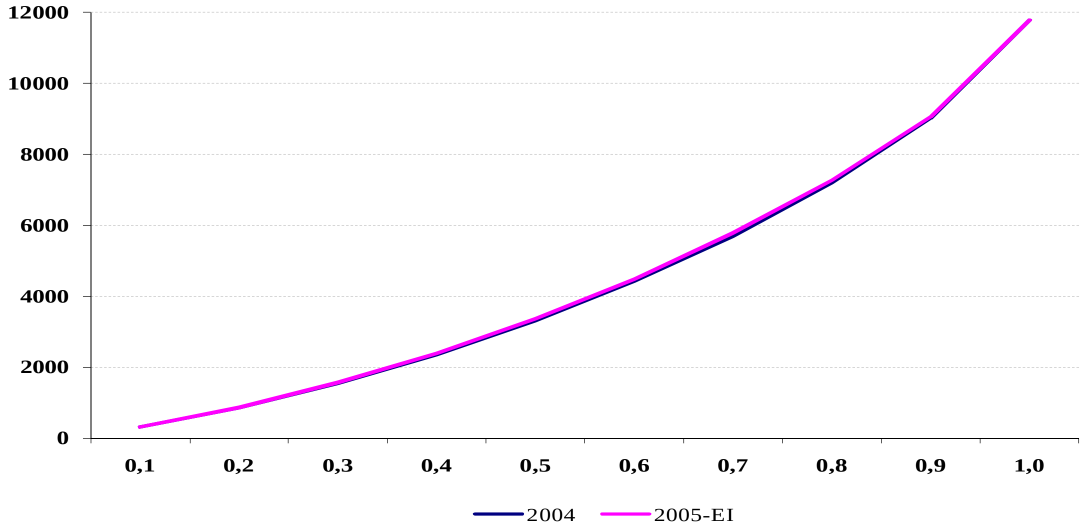
Figura 3: Curva de Lorenz generalizada de 2004 y 2005



Las diferencias que se aprecian en esta Figura son estadísticamente significativas.

En cuanto al *efecto desigualdad*, este se recoge en la Figura 4:

Figura 4: Curva de Lorenz generalizada de 2004 y 2005 teniendo en cuenta sólo el efecto desigualdad



Como se puede observar en la Figura 4, la curva de Lorenz generalizada construida teniendo en cuenta sólo el *efecto desigualdad* se sitúa por encima de la curva de Lorenz generalizada de 2004, por lo que parece que dicho *efecto* fue positivo, y contribuyó, por tanto, a reducir la pobreza. Sin embargo, los contrastes de hipótesis muestran que ambas curvas son estadísticamente equivalentes.

En conjunto, cuando se analiza el período 2003-2005, cabe destacar que el crecimiento de la renta fue *anti-poor* en el conjunto de España, es decir, el aumento de la renta media no redundó en una mejora de la pobreza tan amplia como lo habría hecho de no haber empeorado la distribución del ingreso. En cuanto a las diferentes regiones, el crecimiento fue *pro-poor* en regiones como Asturias, Baleares, Cataluña, la Comunidad Valenciana, Galicia, Murcia, Navarra y La Rioja. En el aspecto negativo se encuentran comunidades como Andalucía, Aragón, Canarias, Cantabria, las dos Castillas y, sobre todo, Madrid. En Extremadura y el País Vasco no hubo un patrón claro de comportamiento.

APÉNDICE

Como se ha visto en el segundo apartado de este capítulo, la varianza de las ordenadas de la curva de Lorenz generalizada construida teniendo en cuenta sólo el *efecto desigualdad* tiene la siguiente forma:

$$Var(GL_I) = v_{ii}^{I} = \frac{1}{4}\left\{2v_{ij}^{2,2} + 2v_{ij}^{1,2} - v_{ij}^{1,2^*} + v_{ij}^{1^*,2}\right\} = \\ = \frac{1}{4}\left\{2Var(m_2 L_2(p)) + 2Var(m_1 L_2(p)) - Var\left[(m_1 + m_2)L_2(p)\right] + Var\left[(m_1 + m_2)L_1(p)\right]\right\} \quad [A1]$$

Ahora bien, para conocer esta expresión es necesario calcular cada una de las varianzas que forman parte de la suma. Para ello, se puede partir, por ejemplo, de la expresión $Var(m_1 L_2(p))$. Nótese que esta es la varianza de la ordenada de la curva de Lorenz generalizada que se construye escalando la curva de Lorenz del período 2 por la media del período 1. Por lo tanto, para llegar a la varianza buscada se ha de partir de dicha distribución.

Por otro lado, como se ha visto, la varianza de la curva de Lorenz generalizada en un determinado período (por ejemplo, el período 2) viene dada, para cada cuantil, por la siguiente expresión:

$$v_{ij} = p_i\left[l_i^2 + (1 - p_j)(x_{pi} - g_i)^2\right] \quad [A2]$$

donde, al ser *i*=*j*, $p_i = p_j$, el cuantil que se esté considerando (como se trabaja con deciles, tomará el valor 0,1, 0,2,…); l_i^2 es la varianza condicionada del cuantil considerado y x_{pi}, g_i son el máximo y la media condicionada del cuantil en cuestión.

Para llegar a la curva de Lorenz generalizada construida multiplicando la curva de Lorenz del período 2 por la media del período 1, se puede partir de la curva de Lorenz generalizada del período 2 y multiplicar por m_1 y dividir por m_2. Al tratarse de un cambio de escala, no afectará a la desigualdad medida por la curva de Lorenz, pues ésta es una medida relativa de desigualdad. Así pues, si la expresión [A2] representa la varianza del período 2, la buscada, es decir, $Var(m_1 L_2(p))$ vendrá dada por la expresión:

$$v_{ij}^{1,2} = p_i \left[\left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2 l_{i,2}^2 + (1 - p_j) \left(\frac{m_1}{m_2} x_{pi,2} - \frac{m_1}{m_2} g_{i,2} \right)^2 \right] \qquad \text{[A3]}$$

Por último, es importante destacar que lo que se está llevando a cabo es un cambio de escala sobre la distribución del período 2, por lo que es el tamaño muestral de dicho período el que habrá de dividir la varianza en el estadístico de prueba.

Por su parte, el valor de las dos varianzas que no se han visto todavía será:

$$v_{ij}^{1,2^*} = p_i \left[\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} \right)^2 l_{i,2}^2 + (1 - p_j) \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} x_{pi,2} - \frac{m_1 + m_2}{m_2} g_{i,2} \right)^2 \right] \qquad \text{[A4]}$$

$$v_{ij}^{1^*,2} = p_i \left[\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right)^2 l_{i,1}^2 + (1 - p_j) \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} x_{pi,1} - \frac{m_1 + m_2}{m_1} g_{i,1} \right)^2 \right] \qquad \text{[A5]}$$

refiriéndose los valores de la expresión [A4] a la curva de Lorenz generalizada del período 2 y la de [A5] a la del período 1.