Universidad de Alcalá

3... 2... 1... ¡RODANDO!

USO DE ESCENAS CINEMATOGRÁFICAS COMO RECURSO DIDÁCTICO EN MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Máster Universitario en Formación del Profesorado

Presentado por:
Jaime Cejudo Razola

Dirigido por:
Evangelina Herranz Prada

Alcalá de Henares, a 25 de junio de 2022

Índice de contenidos

Resumen

En el presente Trabajo Fin de Máster se han tratado de unir dos disciplinas: el cine y las matemáticas. A través del uso de diferentes escenas cinematográficas, contenidas dentro de ciertos largometrajes escogidos, se ha buscado la creación de materiales didácticos con los que poder complementar la enseñanza de la materia de matemáticas en centros de educación secundaria.

De este modo, se han creado diferentes materiales que pueden ser utilizados por los docentes de esta asignatura con el fin de facilitar su trabajo y ofrecer una metodología diferente que pueda incentivar el interés del alumnado hacia esta materia, de forma que los contenidos tratados en ella sean afianzados con mayor eficacia y sencillez por el alumnado diverso.

Con ello, estos materiales son presentados de modo organizado en este trabajo, comprendiendo diferentes bloques de contenido a lo largo de los diferentes cursos de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Todos ellos son basados en diferentes escenas cinematográficas extraídas de distintos largometrajes.

Abstract

In this Master's Thesis, two disciplines have been linked: cinema and mathematics. Through the use of different cinematographic scenes, contained within several selected films, the creation of various didactic materials has been sought, with which to supplement teaching math's subject in secondary schools.

Following this basis, different materials have been created, that can be used by any teacher imparting this subject, in order to facilitate their work and offer a different methodology, which can encourage students' interest towards mathematics, so that the contents learned are strengthened with greater efficiency and simplicity by the diverse students.

Thus, these materials are presented in an organized way in this document, comprising different sets of content throughout the different levels of *Educación Secundaria Obligatoria* (ESO). All of them are based on different cinematographic scenes taken from various selected films.

Introducción

Las matemáticas son un importante objeto de estudio dentro de nuestra sociedad actual. Mientras que una gran parte de las propias personas que la componen pueden considerarlas inútiles o, cuanto menos, complejas debido a su abstracción dentro de un contexto más general, lo cierto es que la inmensa mayoría de los avances que se han alcanzado a lo largo de los siglos han sido debidos a las matemáticas o facilitados por ellas.

Es por ello por lo que, constituyendo los pilares sobre los que se fundamenta el estudio de las diferentes ciencias, es innegable su importancia dentro del desarrollo de nuestras vidas, y no deben ser consideradas un asunto baladí.

Sin embargo, a la hora de comparar esta gran relevancia junto a la popularidad que esta materia suele alcanzar dentro de las aulas de educación, tanto primaria como secundaria, puede observarse un hecho inapelable: las matemáticas no son un objeto de estudio atractivo para el alumnado o, al menos, para una gran parte.

Las razones por las que se presentan estas observaciones son varias: si se le preguntase a un alumno o alumna cualquiera sobre su implicación con la asignatura, la respuesta generalmente se pudiese clasificar dentro de las dos opciones más comunes: "nunca se me han dado bien" o "no me gustan las matemáticas".

Cualquiera de estas respuestas más populares tiene un significado oculto, implicando que este alumno no va a cambiar su percepción sobre esta ciencia -ya sea debido a que cree que nunca se le van a dar bien o porque no le va a encontrar nada interesante-, llevando así a la ya mencionada falta de interés general.

Si bien estos últimos alumnos y alumnas son más propensos a rechazar cualquier otro tipo de conocimiento académico (y no únicamente las matemáticas), el problema reside en aquellos otros, los que excusan su analfabetismo numérico en su falta de comprensión, y así se escudan frente a cualquier contenido matemático -expresado de cualquier modo o cualquier forma- que pueda afectarles en cierto momento de sus vidas.

Este fenómeno tiene una triste popularidad dentro de aquellas personas que ya han finalizado sus estudios obligatorios y postobligatorios. El solo hecho de aceptar que uno no es capaz de comprender el más mínimo concepto matemático es ampliamente considerado algo normal, algo totalmente impensable si, en contraparte, una persona exclamase ser totalmente analfabeta sin ningún pudor.

Una de las principales causas que pueden atajar este problema es la motivación del alumnado frente a la materia. Al hablar de motivación, el concepto puede ser tratado mediante infinidad de perspectivas, cada una de ellas adaptada al docente en cuestión; pero lo que está claro y no tiene interpretación posible es su significado: promover el interés del alumno por la materia en cuestión -en este caso, matemáticas-.

Mientras que, como ya se ha mencionado, existe una gran cantidad de metodologías que tienen como objetivo la motivación del estudiante, desde las más tradicionales de ellas, sin abandonar el concepto de "clase magistral", hasta aquellas que buscan una mayor innovación, saliéndose de lo establecido, en este trabajo se tratará una aproximación a la materia de matemáticas a través del cine. Es por ello por lo que no se discutirán otras metodologías, ni su validez, sino que se tratará de plantear el uso del cine como herramienta para fomentar el aprendizaje de esta asignatura.

Aunque en este trabajo se defienda el uso de este recurso didáctico, no se pretende sustituir las metodologías de enseñanza de las matemáticas que la cimientan. Dentro de la educación secundaria (el marco en el que se fundamenta este trabajo), es muy importante el mantener una constante práctica de los conocimientos adquiridos mediante el planteamiento de problemas y ejercicios, herramientas que llevan al alumnado a afianzar y perfeccionar los conceptos matemáticos.

De esta forma, este trabajo académico se presenta con la siguiente estructura. Se ha comenzado en este mismo apartado con una introducción al mismo, para más tarde dar paso a la motivación que lleva a la propia creación del trabajo, así como los objetivos buscados en este. A continuación, se presentará una fundamentación teórica sobre la aplicabilidad del proyecto, un análisis del contexto en el que se llevaría a cabo y el desarrollo del mismo. Para finalizar, se incluye un plan de acción, que incluye los contenidos que se trabajan, y unas conclusiones finales al proyecto, así como las implicaciones de este. Complementariamente a todo esto, se adjuntan unos anexos finales, -posteriores a la inclusión de la bibliografía y webgrafía- en los cuales se incluyen aquellos materiales disponibles para los alumnos y el docente, junto a las instrucciones necesarias para aplicar esta actividad.

Motivación

Mientras que el aprendizaje de otros contenidos, tanto estrictamente científicos como no, está íntimamente relacionado con la realidad tal y como la conocemos, esta relación no es tan evidente dentro de las matemáticas. Esto se muestra claramente en las más que comunes preguntas que se suelen realizar en las aulas de matemáticas: "¿Y esto para qué sirve?".

Si bien esta pregunta puede encontrarse en el contexto de cualquier otra materia académica, la respuesta suele mostrarse mucho más clara. En ciencias sociales pueden establecerse aplicaciones inmediatas de los objetos de estudio dentro de la sociedad. Las humanidades también muestran este paralelismo entre el estudio académico y su aplicabilidad en otros contextos. Este fenómeno también se da en el estudio de otras ciencias, como la medicina o las ingenierías como las más evidentes, pero también presente en otras como la Física y la Biología.

Sin embargo, esta comparación entre lo sucedido entre lo puramente académico y la realidad en sí es más complicada de llevar a cabo en ciertos contextos matemáticos, como pueden ser, por ejemplo, las derivadas o las integrales. Esta peculiaridad de los conceptos matemáticos, que los aleja de lo mundano y tangible, puede ser una de las principales causas del rechazo a la materia. Alumnos y alumnas que poseen una menor capacidad de abstracción pueden ver cómo esta asignatura se les presenta como un mayor desafío de lo que debería.

En la actualidad, numerosas metodologías han surgido para tratar de paliar este problema. Diferentes formas de enseñanza de las matemáticas buscan facilitar este entendimiento de los conceptos abstractos que inherentemente poseen. Todas ellas buscan acercar el propio concepto a un contexto más real, así *suavizando* la aproximación del alumno. Una vez se ha familiarizado con el objeto de estudio, puede comprenderlo con propiedad.

Dentro del tema que nos concierne, el cine, estos conceptos matemáticos son utilizados en numerosos contextos a lo largo de una gran retahíla de largometrajes. Mediante el uso de diferentes películas (o segmentos de películas) dentro de la propia aula, se puede acercar ciertos conceptos matemáticos al alumnado, de este modo facilitando el aprendizaje, y creando un interés creciente dentro del mismo.

A la hora de utilizar el cine como un recurso educativo, caben dos posibilidades dentro del mismo:

- La primera de ellas busca el uso de películas (o documentales) de índole didáctica, creadas con un propósito claro dentro de la propia educación, y por ello no son largometrajes que puedan encontrarse dentro del entretenimiento y cultura popular.
- Por otro lado, se encuentran aquellas denominadas “películas comerciales”, creadas con un claro fin de entretenimiento para el público en general. En estas últimas es donde se encuentran las más interesantes para el uso dentro de las aulas, debido a su mayor interés como un producto de ficción, teniendo en cuenta el tipo de público hacia las que se busca orientarlas.

La idea para la realización de este trabajo surge de la propia experiencia dentro de la cultura cinematográfica. La existencia de numerosas películas que abarcan diferentes conceptos científicos es indiscutible, e incluso muchas de ellas han logrado captar la atención del público, así como de la crítica especializada. Sin embargo, aunque para el ojo no especializado, estos largometrajes reflejen de forma correcta y utilicen estas ciencias como hilo conductor, o como recurso importante dentro de su trama, lo cierto es que, en su mayor parte, estas películas cometen errores claros, en algún momento u otro, por el bien del argumento o por puro desconocimiento.

Si bien esta es una cuestión ampliamente discutible y de la cual se podría realizar un trabajo muy completo, ese mismo trabajo llevaría a cabo un objetivo muy diferente al planteado actualmente, siendo de un carácter mucho más divulgativo y pudiendo seguir una estructura más adecuada a un libro, en contraposición a un trabajo académico, que es lo que se busca realizar.

Es por ello por lo que se ha decidido tomar las riendas del trabajo en esta dirección. Mientras que el uso de recursos cinematográficos como medio para enseñar conocimientos científicos puede resultar un proyecto mucho más ambicioso y completo, aquello que nos concierne es el estudio de las matemáticas en sí mismo, centrándonos así en esta materia únicamente. Es de este modo por el que el rumbo que ha tomado este trabajo es el del desarrollo de diferentes materiales didácticos para el uso en aulas de secundaria a través de diferentes escenas cinematográficas que puedan contener contenidos matemáticos.

De esta forma, cualquier profesor que pueda acceder a este proyecto, y se sienta atraído por la metodología planteada, puede ser capaz de aplicarla en sus propias aulas de un modo sencillo y efectivo, al disponer de todos los materiales necesarios para ello de una forma organizada y completa.

Objetivos

La disciplina matemática es cada vez más útil según avanza la sociedad contemporánea, necesitando de un dominio mayor de destrezas por parte de los individuos en cada vez más distintos contextos profesionales. Es por ello por lo que esta sociedad debe preparar a los ciudadanos dentro de esta materia, así desarrollando diferentes aptitudes y métodos matemáticos.

Dentro de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato, se establece el aprendizaje de las matemáticas como una competencia básica para el desarrollo de la persona. A lo largo de las diferentes formas de enseñar la materia, es habitual encontrar un acercamiento de esta a la vida cotidiana del alumno o alumna. Utilizando ejemplos que el alumnado puede aplicar en su día a día y relacionando el mundo que rodea al individuo con la materia, se genera un interés creciente en él, mejorando las capacidades de aprendizaje y facilitando el alcanzar los objetivos generales del currículum.

El cine, en cuanto al tema que nos concierne, constituye una herramienta poderosa y accesible, así como familiar al alumnado. Mediante la gran pantalla o sus sucedáneos (televisión, ordenador, tablet, etc.) se puede acceder al interés del individuo y transmitir conocimientos de un modo muy sencillo a la vez que eficaz.

Con ello, este trabajo pretende unificar estas dos disciplinas -matemáticas y cine- y de este modo poder crear una serie de actividades que las relacionan, siempre con el propósito de fomentar el interés por la disciplina matemática. Estas actividades pueden ser realizadas tanto dentro como fuera del aula y pueden también resultar un ejercicio de divulgación muy potente.

De este modo, se trabajará con diferentes escenas pertenecientes a varios largometrajes dentro de la gran cantidad de ellos que pueden ser tratados. La elección de estas películas es algo subjetivo, y jamás podría abarcar la totalidad de aquellas que contienen cierto contenido matemático con el que poder trabajar, debido a la extensión de estas.

De forma general, se plantearán diferentes materiales de trabajo que docentes o alumnos y alumnas pueden utilizar, comprendiendo una determinada cantidad de largometrajes. Se ha decidido no optar por el uso de películas completas dentro de las sesiones de clase para dar paso a una metodología basada en diferentes escenas independientes de las propias películas. De este modo pueden mostrarse estas escenas (generalmente de poca duración) en las propias clases y así dar un contexto a los ejercicios a realizar (incluidos en los materiales didácticos).

Se ha de recalcar que los objetivos buscados en la realización de este trabajo no son más que la creación de estos materiales didácticos para el alumnado y el profesorado, de este modo facilitando la labor y así proporcionando con lo necesario para poder aplicar esta metodología. Es importante tener en cuenta que, como cualquier metodología aplicada en las aulas, su propósito es el de facilitar el aprendizaje y afianzamiento de los contenidos relativos a la materia y no el entretener al alumnado con las escenas de las películas que se utilicen. Cualquier material utilizado en el aula ha de estar directamente relacionado con la materia objeto de estudio.

Aunque el uso de estas escenas pueda llevar a la curiosidad de los alumnos y alumnas por estos largometrajes, este factor ya no es tenido en cuenta en este trabajo, ya que únicamente se utilizarán escenas de las propias películas en las clases y no ellas en su totalidad. Esto en parte es así porque puede ser posible que la escena en cuestión sí que tenga una relación directa con la materia, mientras que el resto del largometraje no sea del mismo modo. Cualquier alumno o alumna que se encuentre interesado en ver la película al completo puede hacerlo en su tiempo libre, siendo esto algo no relacionado con esta metodología.

Metodología seguida

En este apartado del Trabajo Fin de Máster se presenta el estudio previo realizado anterior a la creación y el desarrollo del material, así como las bases en las que se fundamenta, el propio contexto que pretende abarcar o cómo se ha creado este material, entre otras cosas.

Fundamentación Teórica

Para comenzar con el desarrollo de este trabajo, se ha llevado a cabo una organización previa, así de esta forma planteando los objetivos que se quieren cumplir, las preguntas que se quieren responder, y de este modo fundamentando la validez (o la no-validez) del propio trabajo.

Con ello, una breve labor de investigación se ha llevado a cabo, recopilando diferentes ejemplos de largometrajes que pudieran ser utilizados dentro del aula, y en específico en la propia materia de matemáticas. De este modo, se observa que, si bien el uso de las matemáticas como elemento guía dentro de la trama de las diferentes películas no es algo muy común, el lenguaje matemático, así como ciertas referencias a esta materia puede ser encontrado en multitud de ellas.

Es por esto por lo que este propio trabajo no se encuentra construido sobre meras anécdotas ni coincidencias, sino que es capaz de ser creado a través de una amplia base de material, y por ello puede ser ampliado, incorporando nuevas adiciones al mismo de un modo sencillo y eficaz.

Siguiendo este planteamiento, varios estudios se han llevado a cabo previamente relacionados con este mismo tema -el uso en el aula de matemáticas de herramientas derivadas del cine- (Beltrán Pellicer, 2015), ya sea utilizando largometrajes, fragmentos de ellos, o incluso utilizando series de televisión.

Por otro lado, diferentes libros han sido publicados con relación a este objeto de estudio, ya sea analizando las películas desde un punto de vista matemático (Población Sáez, 2006), o incluyendo propuestas de aplicación en el aula, de primaria y secundaria

(Sorando Muzás J. M., *100 escenas de cine y televisión para la clase de matemáticas*, 2014) (Raga, Requena, & Muedra, 2010).

A la hora de realizar este trabajo, estos materiales han sido consultados, así como diferentes páginas web (Sulem, 2022) (Persico, 2020) (Hendrix, 2022) (Sorando Muzás J. M., Centro de Comunicación y Pedagogía, 2022) (MacGuffin007, 2018) (González, 2015) (Educación 3.0, 2021) que recopilan información sobre aquellas películas más susceptibles de ser utilizadas en este contexto o incluso otras que ya incluyen diferentes problemas relacionados con los propios largometrajes (Sorando Muzás J. M., *Matemáticas en tu mundo*, 2022) (Pastor, 2022).

De este modo se ha partido de estos diferentes estudios de mayor o menor desarrollo que ya habían tratado este tema desde varias perspectivas y se han creado estos materiales que pueden ser utilizados como un recurso didáctico de apoyo en el desarrollo de las clases de matemáticas en los centros de educación secundaria.

Contexto utilizado

Este trabajo está fundamentado dentro del contexto de la Educación Secundaria Obligatoria, para alumnos y alumnas de edades comprendidas entre los 12 y los 16 años. De este modo, las propuestas de uso didáctica que se relacionarán con cada una de las películas tratadas buscarán adaptarse a ello y de esta forma estimular el aprendizaje del alumnado dentro del instituto.

Debido a las edades comprendidas por los alumnos y alumnas, se dispone de una mayor selección de obras a elegir, ya que edades más tempranas (como la educación primaria) podrían restringir esta muestra al poder no resultar adecuadas, tanto por el nivel como por el argumento propio de cada uno de los largometrajes, que puede llevar a mayores restricciones de edad.

Los alumnos y alumnas a los que van dirigidas estas actividades creadas son, por su propia naturaleza, diversos. Es por ello por lo que se tratan diferentes cuestiones de varios grados de dificultad para cada actividad, así adaptando estas a los posibles niveles dentro del curso al que cada una de ellas vaya orientada, ya sea para aquel alumnado más aventajado o aquel con mayores dificultades para la consecución de los objetivos.

No obstante, se ha de tener en cuenta a la hora de aplicar esta metodología dentro del aula que su uso es fundamentalmente didáctico. Si bien es cierto que el propio carácter del medio favorece la aproximación al mismo, los alumnos y alumnas no han de tomarse esta actividad como un periodo de descanso de la clase normal. Al igual que se realiza en el resto de las horas lectivas, aquellas dedicadas a estas actividades deben ser horas de trabajo, con el material audiovisual y las cuestiones pertinentes que elija el propio docente.

Naturalmente, para la consecución de las diferentes actividades y cuestiones propuestas, hace falta un conocimiento mínimo de los contenidos de la materia que se tratan. Estas metodologías buscan ser una ayuda al currículo del que se parte y se ha de cumplir, aprovechando ciertos elementos de estos largometrajes escogidos para poder ejemplificar, dinamizar y facilitar el desarrollo de las clases.

Dentro de las aulas, y especialmente en aquellas relativas a este periodo educativo, como ya se ha desarrollado previamente, existe una acusada falta de interés sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje. De este modo, proponiendo actividades con un carácter más alejado de lo didáctico, al menos en lo que la forma se refiere, se pretende renovar el espíritu de los alumnos y alumnas, todo ello en pos de la búsqueda de este aprendizaje.

Al desarrollar estas actividades dentro del propio desarrollo del curso académico, se pretende que los alumnos y alumnas resuelvan problemas y cuestiones relacionadas con las diferentes obras propuestas, de este modo extrayendo los diferentes problemas de este contexto ficticio y aplicando los conceptos matemáticos apropiados en cada caso, dentro de las diferentes posibilidades que se proponen.

Esta etapa educativa permite el desarrollo, no sólo del cálculo mental, sino de la comprensión del lenguaje matemático, permitiendo el uso apropiado y razonable de los diferentes conceptos aprendidos, además del sentido del juicio, a la hora de interpretar los diferentes resultados.

Comúnmente se encuentran errores entre el alumnado que se mantienen a lo largo de los años en cuanto al análisis de resultados se refiere tras la realización de un problema. Velocidades más altas que la de la luz, personas divididas en diferentes trozos, o incluso probabilidades negativas son sólo ejemplos de por qué el entrenamiento en este juicio es vital para un desarrollo pleno de la conciencia matemática.

Por otro lado, otra de las razones por las que se ha utilizado este contexto (y este sujeto de estudio) dentro de este trabajo, es la gran popularidad de los elementos de ficción entre los adolescentes en la sociedad actual. Gran parte del entretenimiento que tiene lugar dentro de su tiempo libre toma la forma de estas obras de ficción -tanto en la gran como en la pequeña pantalla-.

Las otras formas de entretenimiento más populares dentro del alumnado comprendiendo las edades que se tratan en este trabajo son la música y los videojuegos, en todas sus formas. Diferentes trabajos académicos del mismo carácter a este se podrían realizar utilizando estos dos elementos como hilo conductor, ambos relacionados con la materia de matemáticas en el aula.

Si se quisiese relacionar a la industria musical con las matemáticas, otro tipo de estudio debiera llevarse a cabo que, aunque esta relación pudiera parecer anecdótica a primera vista, estas dos disciplinas muestran una fuerte unión (Lemnismath, 2018).

Por otro lado, un estudio de los videojuegos como industria de entretenimiento puede dar lugar a un análisis más extenso, también relacionándolo con la materia que nos concierne, debido a su inmensa extensión y capacidad de crear diferentes escenarios.

De cualquier modo, en este trabajo únicamente se tratarán ciertas situaciones aplicables al cine, al ser también un factor muy correlacionado con los intereses del público al cual se busca transmitir los conocimientos matemáticos como último fin.

Desarrollo y creación del material

Dentro de la propia organización de este trabajo, el mismo se compone de varios ejemplos de diferentes películas relacionadas de un modo u otro con la materia de matemáticas. Estas películas son brevemente presentadas y, con ellas, se presenta una serie de cuestiones o reflexiones que acompañará a su visionado. De esta forma, se crean una serie de materiales de trabajo que pueden ser utilizados dentro del aula de matemáticas.

Mientras que en la propia aula no es el lugar apropiado para proyectar la totalidad de estas películas, debido a los diferentes factores asociados (dudosa legalidad, falta de tiempo, etc.), se propone la introducción de ciertos fragmentos o escenas de aquella con la que se quiera trabajar, de este modo introduciendo el trabajo que pueden realizar los alumnos y alumnas de modo individual o en grupos.

A la hora de plantear el uso de estas películas con las que trabajar, si bien es cierto que se plantean en este mismo trabajo numerosos ejemplos de ellas, con su correspondiente evaluación, en el caso de que se quisiese utilizar otras obras diferentes, se ha de conocer perfectamente su contenido, han de estar en relación directa con los temas que se van a tratar y se ha de haber diseñado una serie de problemas con los que trabajar, ya sea antes o después del visionado.

Se han tratado de estudiar de este modo diferentes fuentes audiovisuales, basándose en mayor parte en largometrajes. Sin embargo, este estudio podría ampliarse sin perjuicio alguno con el uso de cortometrajes o series de televisión, las cuales no están exentas de este contenido matemático en ciertos casos (por ejemplo: Futurama (Groening, 1999), Numb3rs (Heuton & Falacci, 2005), etc.)

Por ello, se ha llevado a cabo un estudio y selección de cada una de las mismas, visionado, y selección de las ciertas partes susceptibles al estudio y relación con las matemáticas, para así posteriormente poder desarrollar estos materiales para el alumnado y el profesorado, incluyendo diferentes problemas y ejercicios en relación con la escena tratada.

Debido a la gran variedad de escenas presentes dentro de las seleccionadas, cada una de ellas dispondrá de contenidos relativos a una parte del currículum de secundaria o a otra. Es decir, ciertas escenas y secuencias se encontrarán preparadas para ser utilizadas en ciertos cursos, y por ello pueden resultar de apoyo a estos contenidos que se encuentren tratando en ese momento.

Aun así, como muchas metodologías, esta se encuentra sujeta a una abierta flexibilidad, pudiendo aplicarse en otro contexto diferente al planteado a criterio del docente. Si bien cada una de las secuencias planteadas se encuentra dedicada a una parte específica de los contenidos tratados de la materia de matemáticas, indicando con precisión aquellas recomendaciones, esto es algo puramente orientativo.

Cada profesor debe estudiar el contexto específico del centro y del grupo con el que se quiere trabajar y aplicar la metodología y por ello puede considerarse adecuado seguir estas indicaciones, o no. Tan erróneo puede ser el ignorar por completo estas recomendaciones como el seguirlas al pie de la letra, ignorando la situación propia en el que se quieren utilizar, pudiendo no ser este el adecuado.

Las diferentes películas utilizadas en el proyecto se pueden encontrar clasificadas en el apartado “plan de acción”, en el cual se organizarán todas las escenas estudiadas dentro de los diferentes cursos en los que se pueden tratar, en base a los contenidos que son incluidos en cada una de ellas. Estas escenas se encontrarán agrupadas dentro de la película a la que corresponden, ya que una sola película puede dar lugar a múltiples escenas utilizables dentro del aula.

Dentro de los anexos de este mismo trabajo es donde se pueden encontrar estos materiales para el alumno y el profesor, incluyendo diferentes indicaciones para su puesta en práctica, así como una posible solución de los problemas y ejercicios planteados.

Individualmente, cada una de las películas tratadas cuenta con su propia ficha técnica y artística, así como una pequeña sinopsis de la obra, descrita con el objetivo de poder dotar de cierto contexto a ella, además de información de relevancia sobre la misma en forma de enlaces (como, por ejemplo, la plataforma a través de la que acceder a la película).

A continuación, se enumerarán cada una de las escenas que puede proporcionar esta película y qué contenidos tratan cada una de ellas. Estas escenas también incluirán su propia sinopsis, así como un enlace en el que poder visualizar la escena por completo, y el cual puede ser utilizado en las propias clases.

Los contenidos a los que están unidas cada una de las escenas utilizadas se adecúan al Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. De cualquier modo, en caso de utilizar estas actividades creadas, cualquier profesor tiene disponible la flexibilidad de poder adaptarlas a su situación particular, así como a sus preferencias. Aun así, es importante recordar que el objetivo final es la didáctica de las matemáticas, y no el entretenimiento de los alumnos en las horas de clase.

Plan de acción y contenidos tratados

En este apartado, se introduce una pequeña guía para que cada docente pueda utilizar los contenidos incluidos en este trabajo, y así poder aplicar esta metodología dentro de sus aulas y en sus grupos. Además, se incluye la organización de los diferentes largometrajes a través de los diferentes cursos en los que se han planteado, así como las diferentes escenas utilizadas.

En la parte final de este trabajo (apartado "anexos"), se incluyen los diferentes materiales de trabajo de estas escenas, tanto aquellos orientados al profesor como aquellos orientados al alumnado, con las que se pueden trabajar las diferentes obras de ficción relacionadas con las matemáticas. De este modo, entre la gran variedad de ellas disponibles, se han abarcado en este trabajo un total de 16 escenas.

De este modo, aquel profesor que quiera utilizar cualquiera de estas actividades ya mencionadas puede dirigirse a su apartado correspondiente y conocer así la película a la que pertenece, la escena, y sus características, así como los problemas que se proponen para tratar en la clase de matemáticas. En el caso de que se planteen ciertos problemas a resolver por los alumnos, se incluye una posible solución en los materiales orientados al profesorado, así como una explicación de los problemas planteados.

Se ha querido organizar todo el contenido tratado en este trabajo a través de los diferentes cursos de la ESO. De esta forma, se han seleccionado ciertos filmes con problemas específicamente diseñados para algunos de los bloques de contenido tratados en estos cursos, acorde al Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

A continuación, se muestra una organización de cada una de estas películas utilizadas, junto a las escenas que se tratan en ellas y los contenidos curriculares que contienen, organizadas en los diferentes cursos de la ESO. Todo esto se muestra en las tablas organizadas a continuación.

Cabe destacar que es posible que una misma película pueda tratar diferentes contenidos o incluso utilizarse en diferentes cursos. Esto es posible al haber utilizado esta metodología en la que se seleccionaban escenas individuales dentro del largometraje y no su duración al completo.

1º de la ESO (Matemáticas)

Nombre de la película	Nombre de la escena	Contenidos curriculares tratados
La habitación de Fermat 1	La conjetura de Goldbach	*Números primos y compuestos. Descomposición de un número en factores primos.*
La habitación de Fermat 2	Las hijas del profesor	*Divisibilidad de los números naturales. Criterios de divisibilidad.*
Donald y las matemáticas	Dimensiones de un campo de fútbol	*Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.*
21: Blackjack 1	Comprando en el sastre	*Cálculos con porcentajes (mental, manual, calculadora). Aumentos y disminuciones porcentuales.*

2º de la ESO (Matemáticas)

Nombre de la película	Nombre de la escena	Contenidos curriculares tratados
The Imitation Game (Descifrando Enigma) [1]	Irracionalidad	*Cuadrados perfectos. Raíces cuadradas. Estimación y obtención de raíces aproximadas.*
Marte (The Martian)	La comida en raciones	*Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos algebraicos de resolución y método gráfico. Resolución de problemas.*
Jungla de cristal 3: la venganza	El problema de las garrafas	*Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.*
Moneyball	La estadística como voz de la razón en los deportes	*Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia. Diagramas de barras, y de sectores. Polígonos de frecuencias.*

3º de la ESO (Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas)

Nombre de la película	Nombre de la escena	Contenidos curriculares tratados
La habitación de Fermat 3	¿Qué orden siguen estos números?	*Sucesiones numéricas. Sucesiones recurrentes Progresiones aritméticas y geométricas.*
La habitación de Fermat 4	¿Dónde está el padre?	*Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.*
Ágora	Entre elipses y círculos	*Geometría del plano.*
El contable	Zurdos y diestros	*Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace.* *Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.*

3º de la ESO (Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas)

Nombre de la película	Nombre de la escena	Contenidos curriculares tratados
La habitación de Fermat 3	¿Qué orden siguen estos números?	*Sucesiones numéricas. Sucesiones recurrentes Progresiones aritméticas y geométricas.*
La habitación de Fermat 4	¿Dónde está el padre?	*Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas.*
Ágora	Entre elipses y círculos	*Mediatriz, bisectriz, ángulos y sus relaciones, perímetro y área. Propiedades.*
El contable	Zurdos y diestros	-

4º de la ESO (Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas)

Nombre de la película	Nombre de la escena	Contenidos curriculares tratados
Cube	Los volúmenes del cubo y sus habitaciones	*Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.*
El indomable Will Hunting	El problema de la hamburguesa y el sofá	*Cálculo con porcentajes. Interés simple y compuesto.*
The Imitation Game (Descifrando Enigma) [2]	El binomio de Newton y los números combinatorios	*Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones.*
21 Blackjack [2]	El problema de Monty Hall	*Experiencias aleatorias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para la asignación de probabilidades.*

4º de la ESO (Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas)

Nombre de la película	Nombre de la escena	Contenidos curriculares tratados
Cube	Los volúmenes del cubo y sus habitaciones	*Resolución de problemas geométricos en el mundo físico: medida y cálculo de longitudes, áreas y volúmenes de diferentes cuerpos.*
El indomable Will Hunting	El problema de la hamburguesa y el sofá	*Los porcentajes en la economía. Aumentos y disminuciones porcentuales. Porcentajes sucesivos. Interés simple y compuesto.*
The Imitation Game (Descifrando Enigma) 2	El binomio de Newton y los números combinatorios	-
21 Blackjack 2	El problema de Monty Hall	*Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes. Diagrama en árbol.*

Películas tratadas: información básica

Se menciona a continuación un compendio de todas las películas ya mencionadas que se han estudiado, profundizando e incluyendo información básica para su uso en el aula. Esta información abarca:

- Ficha técnica y artística.
- Sinopsis de la película.
- Enlaces de interés (tráiler, reseña, dónde ver).
- Escenas utilizadas.

Al mencionar las escenas utilizadas dentro de la correspondiente película a la que pertenezcan, se incluye también una pequeña sinopsis de la propia escena, así como un enlace desde el que se puede visualizar esta misma escena y que puede ser mostrado en las aulas como introducción a los diferentes problemas y ejercicios propuestos en la actividad.

LA HABITACIÓN DE FERMAT

(Piedrahita & Sopeña, 2007)

Ficha técnica y artística:

La habitación de Fermat. España, 2007. 87 minutos. Dirección: Luis Piedrahita, Rodrigo Sopeña. Guión: Luis Piedrahita, Rodrigo Sopeña. Intérpretes: Alejo Sauras, Elena Ballesteros, Santi Millán, Lluís Homar, Federico Luppi. Música: Federico Jusid.

Sinopsis:

Cuatro personajes aparentemente desconocidos entre sí son invitados misteriosamente a una reunión, tras resolver un acertijo, bajo la excusa de plantearles “el mayor enigma de la historia de las matemáticas”. Sin embargo, se trata de una trampa mortal y el lugar donde se encuentran comienza a menguar si no son capaces de ir resolviendo diferentes enigmas. Mientras la situación empeora por momentos, han de descubrir un enigma aún mayor: ¿Por qué alguien quiere matarlos?

Webs de interés:

Tráiler: (YouTube)

Reseña: (Filmaffinity)

Dónde ver: (Amazon Prime Vídeo)

Lista de escenas utilizadas en esta actividad:

- La conjetura de Goldbach

  Escena: $(0:00:45 - 0:01:58)$:

  Sinopsis de la escena: Uno de los protagonistas se encuentra tratando de impresionar a dos personas con sus conocimientos matemáticos, poniendo varios ejemplos de la conjetura de Goldbach sobre los números primos. Más tarde se revela que este protagonista sostiene haberla demostrado.
- Las tres hijas del profesor

  Escena: $(0:52:20 - 0:52:45)$

  Sinopsis de la escena: Una de las pruebas que los protagonistas han de superar mientras la habitación en la que se encuentran va reduciéndose en tamaño. Un alumno le pregunta a un profesor: "¿Qué edad tienen tus tres hijas?" Este responde que el producto de sus edades es igual a 36 y que la suma es igual al número de la casa del alumno. "Me falta un dato" protesta el alumno, a lo que el profesor le responde: "Es verdad, la mayor toca el piano". ¿Qué edad tienen las tres hijas?
- ¿Qué orden siguen estos números?

  Escena: $(0:06:00 - 0:08:00)$

  Sinopsis de la escena: A cada uno de los protagonistas les llega una carta, invitándoles a asistir a una reunión secreta si son capaces de resolver un acertijo determinado en menos de 10 días. ¿Qué orden siguen estos números?
- ¿Dónde está el padre?

  Escena: $(1:04:44 - 1:05:00)$

  Sinopsis de la escena: Otro de los acertijos propuestos en la habitación, una vez los protagonistas se encuentran en proceso de averiguar el por qué están allí. El problema se enuncia del siguiente modo: hay una madre y un hijo; la madre es 21 años mayor que el hijo. En 6 años el hijo será 5 veces menor que su madre. ¿Dónde está el padre en este momento?

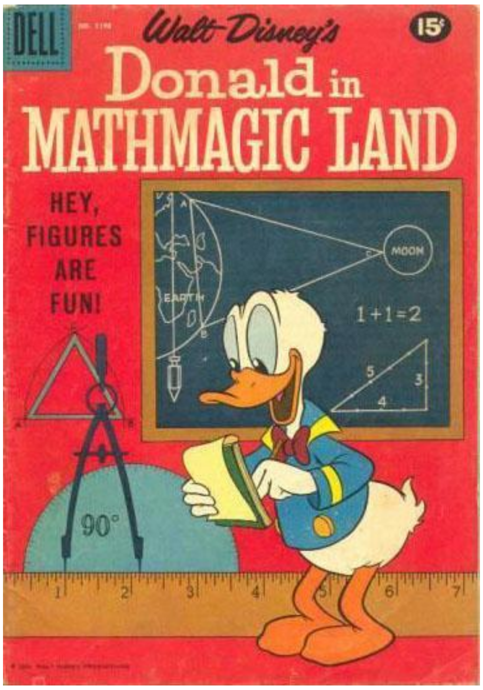
DONALD Y LAS MATEMÁTICAS

(Clark, Luske, Meador, & Reitherman, 1959)

Ficha técnica y artística:

Donald in Mathmagic Land. EEUU, 1959. 27 minutos. Dirección: Hamilton Luske. Guión: Milt Banta, Bill Berg, Heinz Haber. Intérpretes: Clarence Nash, Paul Frees. Música: Buddy Baker

Sinopsis:



En una de sus aventuras, el pato Donald es transportado al país de las matemáticas donde ostenta la figura de alguien reticente a su aprendizaje y comprensión. Guiado por un narrador, va descubriendo su presencia en diferentes contextos y situaciones, así como visitando lugares íntimamente relacionados con la propia ciencia. Entre otras cosas, viaja al pasado donde conoce a antiguos pensadores, aprende aplicaciones directas de las matemáticas, etc.

Webs de interés:

Tráiler: (YouTube)

Reseña: (Filmaffinity)

Dónde ver: (YouTube)

Lista de escenas utilizadas en esta actividad:

- Dimensiones de una pista de fútbol
  Escena: $(0:15:50 - 0:16:40)$
  Sinopsis de la escena: Al pato Donald, tras haber conocido diferentes conceptos matemáticos, se le muestra la relación entre las figuras geométricas y las diferentes dimensiones de algunos deportes que se enseñan (béisbol, fútbol americano, rectángulo, juego de la rayuela).

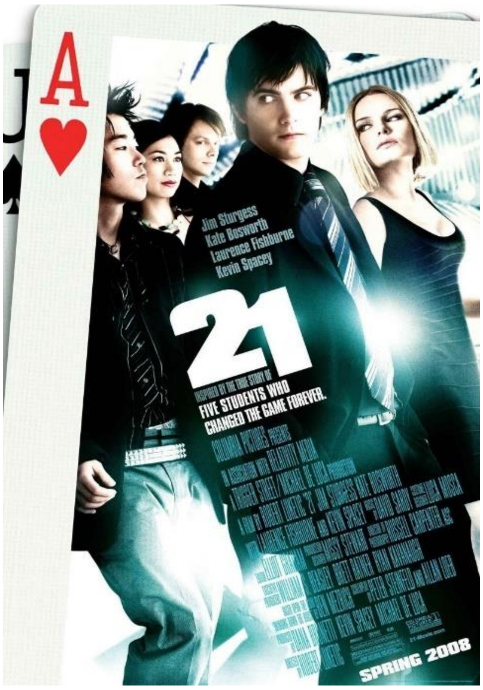
21: BLACKJACK

(Luketic, 2008)

Ficha técnica y artística:

21: Blackjack. Estados Unidos, 2008. 123 minutos. Dirección: Robert Luketic. Guión: Peter Steinfeld, Allan Loeb. Intérpretes: Jim Sturgess, Kate Bosworth, Laurence Fishburne, Kevin Spacey, Liza Lapira, Josh Gad, Aaron Yoo, Sam Golzari, Jack McGee. Música: David Sardy.

Sinopsis:



Un brillante estudiante de último año del MIT, que requiere una gran cantidad de dinero para ingresar en Harvard es reclutado por un profesor para unirse a un grupo de compañeros igual de brillantes. Entre ellos, han ideado un sistema para ganar miles de dólares jugando al black-jack todas las semanas en Las Vegas. De este modo, este grupo de alumnos aventajados comienza a vivir una doble vida, entre los estudios y las cartas.

Webs de interés:

Tráiler: (YouTube)

Reseña: (Filmaffinity)

Dónde ver: (Amazon Prime Vídeo)

Lista de escenas utilizadas en esta actividad:

- Comprando en el sastre
  Escena: $(0:21:48 - 0:22:30)$
  Sinopsis de la escena: Trabajando en una sastrería, el protagonista de la película tiene que ganar dinero para poder pagarse la matrícula en Harvard. Siendo una persona muy dotada para las matemáticas, hace la cuenta de unos clientes de cabeza totalmente, incluso tras aplicar descuentos.
- El problema de Monty Hall
  Escena: $(0:13:40 - 0:15:15)$
  Sinopsis de la escena: Dentro de una de las clases del profesor, a la que asiste el protagonista, es planteado un problema muy conocido: en un concurso de televisión se encuentran tres puertas. Tras dos de ellas no hay ningún premio, pero tras la última hay un coche. El presentador conoce dónde está el coche, y te deja elegir una puerta. Elijas la que elijas, el presentador abrirá una de las puertas sin premio (no la que hayas elegido tú) para enseñarte que no hay nada. En ese momento, el presentador te deja cambiar tu elección de puerta a la otra que hay sin abrir: ¿Qué haces?

THE IMITATION GAME (DESCIFRANDO ENIGMA)

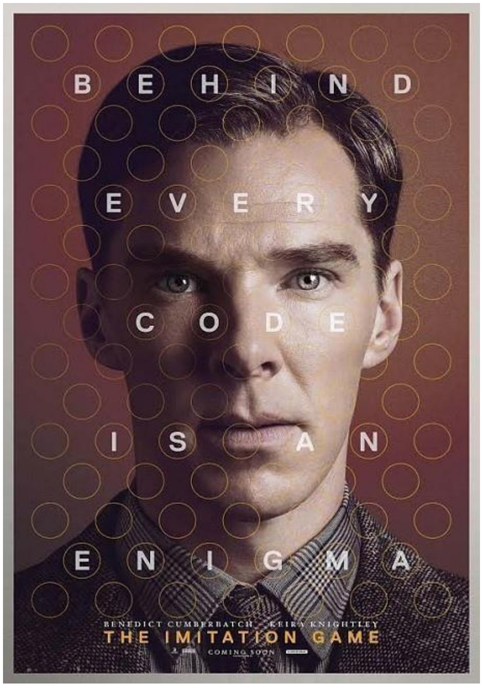
(Tyldum, 2014)

Ficha técnica y artística:

The Imitation Game. Reino Unido, 2014. 114 minutos. Dirección: Morten Tyldum. Guión: Graham Moore. Intérpretes: Benedict Cumberbatch, Keira Knightley, Mark Strong, Charles Dance, Matthew Goode, Matthew Beard, Allen Leech, Tuppence Middleton. Música: Alexandre Desplat.

Sinopsis:

Historia y biografía del conocido matemático Alan Turing, criptógrafo que desarrolló una máquina capaz de descifrar los códigos nazis usados en la II Guerra Mundial. Estos resultados, debido a su nivel de confidencialidad no fueron expuestos hasta mucho después, tiempo en el que Alan Turing ya había fallecido. Fue acusado y condenado por su condición de homosexual, algo ilegal en aquella época, lo cual le llevó a cometer suicidio.



Webs de interés:

Tráiler: (YouTube)

Reseña: (Filmaffinity)

Dónde ver: (HBO Max)

Lista de escenas utilizadas en esta actividad:

- Irracionalidad

  Escena: $(0{:}\,49{:}\,20 - 0{:}\,50{:}\,00)$

  Sinopsis de la escena: El antiguo profesor de Alan Turing se encuentra en una clase de matemáticas tratando de explicar la irracionalidad de $\sqrt{2}$ a sus alumnos, mientras Turing y su amigo Christopher se pasan notas codificadas con criptografía.
- El binomio de Newton y los números combinatorios

  Escena: $(0{:}\,08{:}\,24 - 0{:}\,09{:}\,16)$

  Sinopsis de la escena: En una entrevista de trabajo con un militar de las fuerzas británicas, Alan Turing trata de obtener el puesto para poder descifrar la Máquina Enigma. En esta entrevista, Turing no admite ser un genio, y pone de ejemplos a Newton o a Einstein como prodigios para la poca edad que tenían cuando hicieron sus descubrimientos. En este caso, menciona el Teorema del Binomio de Newton, a sus 22 años.

MARTE (THE MARTIAN)

(Scott, 2015)

Ficha técnica y artística:

The Martian. EEUU, 2015. 130 minutos. Dirección: Ridley Scott. Guión: Drew Goddard. Intérpretes: Matt Damon, Jessica Chastain, Chiwetel Ejiofor, Jeff Daniels, Kate Mara, Michael Peña, Sean Bean, Kristen Wiig, Sebastian Stan, Aksel Hennie. Música: Harry Gregson-Williams.

Sinopsis:

En una tormenta en Marte, unos astronautas se ven obligados a abandonar el planeta y dejar atrás a un compañero, presuntamente fallecido. Pero ha sobrevivido, se encuentra sólo y atrapado en el planeta y debe mantenerse con vida hasta poder establecer contacto con la Tierra y, eventualmente, ser rescatado del planeta rojo. Para ello, utiliza sus conocimientos y su entrenamiento para poder cultivar comida en el planeta, hace expediciones en busca de otras sondas presentes en el mismo, aprende formas de comunicarse con la Tierra, etc.

Webs de interés:

Tráiler: (YouTube)

Reseña: (Filmaffinity)

Dónde ver: (Disney +)

Lista de escenas utilizadas en esta actividad:

- La comida en raciones
  Escena: $(0:20:35 - 0:21:25)$
  Sinopsis de la escena: Mark, el astronauta abandonado en la superficie de Marte, está haciendo inventario de provisiones para sobrevivir. Debido a que la misión estaba originalmente preparada para un cierto número de personas y de días, es capaz de utilizar esos alimentos en su beneficio. Al encontrar unas raciones de patatas, se plantea cultivarlas en el planeta.

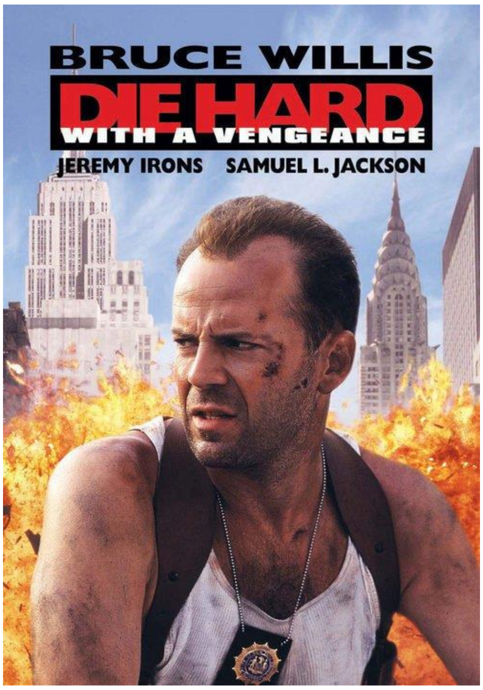
JUNGLA DE CRISTAL 3: LA VENGANZA

(McTiernan, 1995)

Ficha técnica y artística:

Die Hard with a Vengeance. EEUU, 1995. 130 minutos. Dirección: John McTiernan. Guión: Jonathan Hensleigh. Intérpretes: Bruce Willis, Samuel L. Jackson, Jeremy Irons, Graham Greene, Colleen Camp, Larry Bryggman, Anthony Peck. Música: Michael Kamen.

Sinopsis:



Una bomba explota en las concurridas calles de Nueva York. Tras diferentes llamadas telefónicas del supuesto culpable, un expolicía ha de seguir al pie de la letra sus instrucciones si no quiere que más de ellas exploten. Con la ayuda de un ciudadano que ha sido involucrado, irán resolviendo los diferentes retos y acertijos que les plantea el supuesto culpable, mientras descubren el verdadero propósito e identidad del terrorista al movilizar a todos los servicios de emergencia de la ciudad.

Webs de interés:

Tráiler: (YouTube)

Reseña: (Filmaffinity)

Dónde ver: (Disney +)

Lista de escenas utilizadas en esta actividad:

- El problema de las garrafas

  Escena: $(0:56:50 - 0:58:38)$

  Sinopsis de la escena: Los dos protagonistas llegan a una plaza de Nueva York, donde encuentran un maletín. Al abrirlo y sin quererlo, han armado una bomba de relojería. Tras recibir instrucciones por teléfono, la única manera de desactivarla es colocando una garrafa que contenga $4\ galones$ en su interior. Sin embargo, únicamente disponen de dos garrafas: una con capacidad de $5\ galones$ y otra con capacidad de $3\ galones$. ¿De qué manera pueden medir con exactitud esta cantidad que necesitan?

MONEYBALL: ROMPIENDO LAS REGLAS

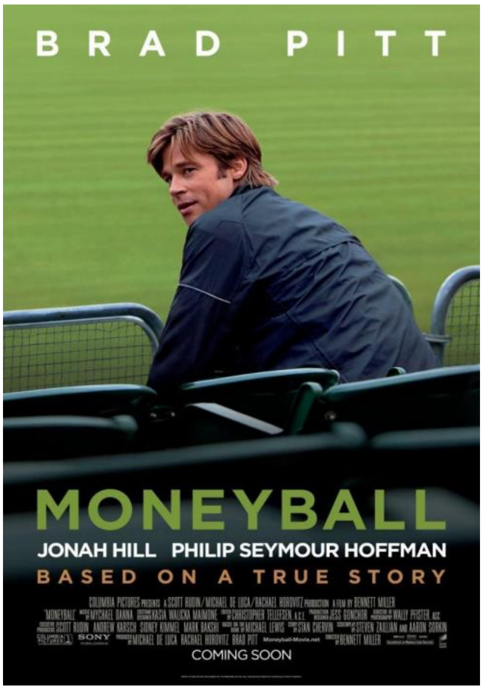
(Miller, Moneyball, 2011)

Ficha técnica y artística:

Moneyball. Estados Unidos, 2011. 133 minutos. Dirección: Bennet Miller. Guión: Aaron Sorkin, Steven Zaillian. Intérpretes: Brad Pitt, Jonah Hill, Philip Seymour Hoffman, Robin Wright, Stephen Bishop, Chris Pratt, Tammy Blanchard. Música: Mychael Danna.

Sinopsis:

En la temporada de 2001, tras grandes problemas con los jugadores, financieros y en la temporada anterior, el mánager de los Atléticos de Oakland (béisbol) decide reinventar el método por el que ficha a sus jugadores. Asesorado por un experto, utilizarán algoritmos matemáticos para determinar qué jugadores serán los más efectivos en su equipo, a la vez que no sean los más caros, y de este modo poder optar a competir con posibilidades.



Webs de interés:

Tráiler: (YouTube)

Reseña: (Filmaffinity)

Dónde ver: (Amazon Prime Vídeo)

Lista de escenas utilizadas en esta actividad:

- La estadística como voz de la razón en los deportes
  Escena: $(0{:}\,26{:}\,50 - 0{:}\,28{:}\,11)$
  Sinopsis de la escena: Tras la contratación del asesor por parte del protagonista del filme, este último le pregunta por los contenidos de su pizarra. En este momento, el asesor comienza a realizar una explicación en la que muestra todos los factores que toma en cuenta a la hora de seleccionar a los fichajes que él cree convenientes, al reducirlos a simples números.

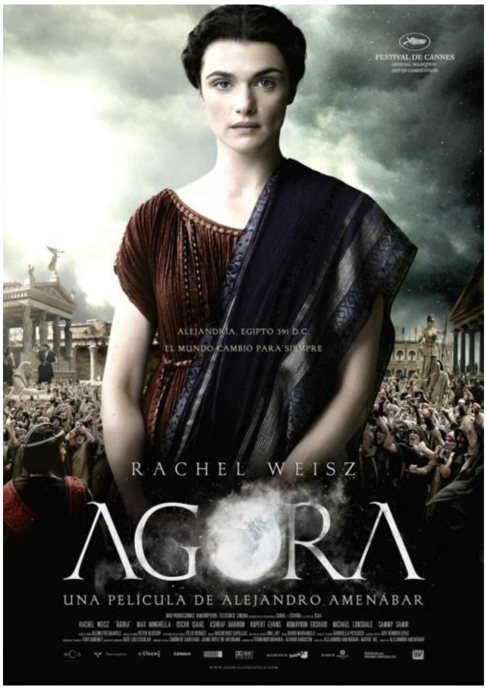
ÁGORA

(Amenábar, 2009)

Ficha técnica y artística:

Ágora. España, 2009. 126 minutos. Dirección: Alejandro Amenábar. Guión: Alejandro Amenábar, Mateo Gil. Intérpretes: Rachel Weisz, Max Minghella, Ashraf Barhom, Oscar Isaac, Michael Lonsdale, Rupert Evans, Homayoun Ershadi. Música: Dario Marianelli.

Sinopsis:



Siglo IV, situado en Alejandría, Egipto. Tras la expansión incesante del cristianismo, en conflicto con otras religiones presentes en la época, este se va expandiendo a través de la cultura. Hordas de fanáticos movidos por la ira hacia lo desconocido y tratando de imponer su fe arrasan con la biblioteca de Alejandría, lugar en el que da clases la astrónoma Hipatia, que no comulga con ninguna fe. Mientras el mundo y la sociedad a su alrededor se derrumba, y ella siembra enemigos por su conocimiento, continúa con sus investigaciones sobre el movimiento de los astros.

Webs de interés:

Tráiler: (YouTube)

Reseña: (Filmaffinity)

Dónde ver: (Amazon Prime Vídeo)

Lista de escenas utilizadas en esta actividad:

- Entre elipses y círculos
  Escena: $(1:36:54 - 1:40:40)$
  Sinopsis de la escena: Hipatia, tras numerosas reflexiones sobre el movimiento de los astros, y sopesar modelos como el de Aristarco o el de Ptolomeo, plantea una órbita elíptica, en cuyo uno de sus focos se encuentra el sol. Ella misma debate con su esclavo Aspasio sobre el tema y realiza una elipse como la que plantea.

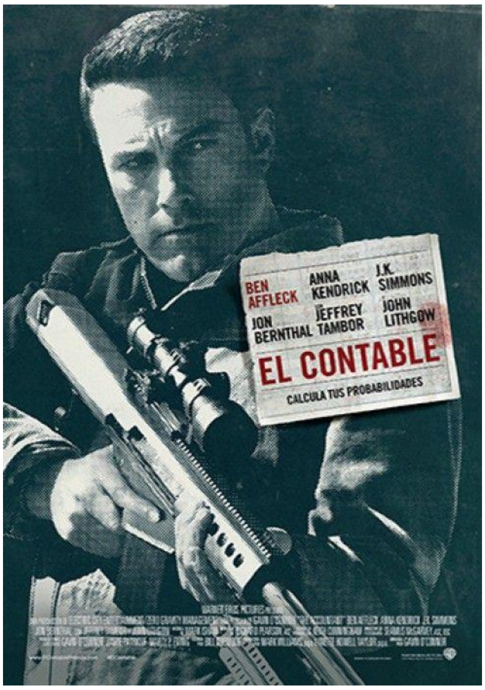
EL CONTABLE

(O'Connor, 2016)

Ficha técnica y artística:

The Accountant. EEUU, 2016. 128 minutos. Dirección: Gavin O'Connor. Guión: Bill Dubuque. Intérpretes: Ben Affleck, Anna Kendrick, J.K. Simmons, Cynthia Addai-Robinson, Jon Bernthal, John Lithgow, Jeffrey Tambor. Música: Mark Isham.

Sinopsis:



Christian Wolff tiene un leve autismo, el cual le provoca ser obsesivamente ordenado y poco abierto. Amante de los números y las matemáticas, lleva una doble vida como contable, trabajando para organizaciones criminales y poderosas alrededor de todo el mundo. Disponiendo también de diferentes habilidades de defensa personal, descubre algo que no debería haber descubierto dentro de una empresa en la que es contratado, y ha de enfrentarse a su pasado por ello.

Webs de interés:

Tráiler: ([YouTube]())

Reseña: ([Filmaffinity]())

Dónde ver: ([HBO Max]())

Lista de escenas utilizadas en esta actividad:

- Zurdos y diestros
  Escena: $(1:20:55 - 1:21:40)$
  Sinopsis de la escena: En una escena del pasado del protagonista, su padre le incita a enfrentarse a aquellos compañeros suyos que le discriminan por su condición. Tras aprender defensa personal y buscar la aprobación de su padre, el protagonista y su hermano deciden agredir a esos niños.

CUBE

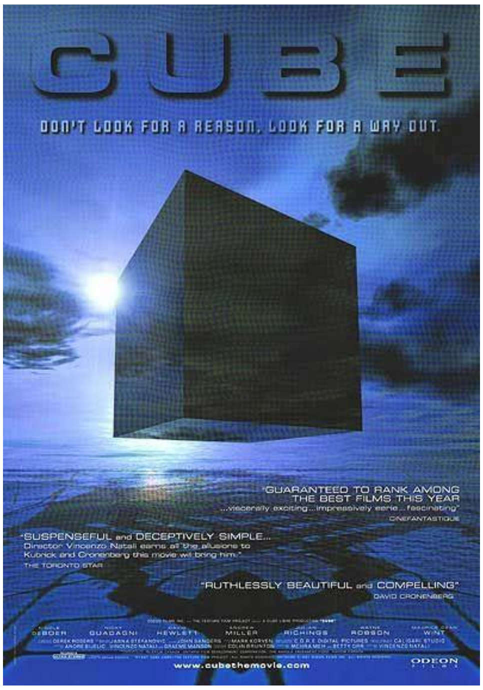
(Miller, Cube, 1997)

Ficha técnica y artística:

Cube. Canadá, 1997. 92 minutos. Dirección: Bennet Miller. Guión: Vincenzo Natali, Andre Bijelic, Graeme Manson. Intérpretes: Maurice Dean Wint, Nicole de Boer, Nicky Guadagni, David Hewlett, Andrew Miller, Wayne Robson, Julian Richings. Música: Mark Korven.

Sinopsis:

Un grupo de personas desconocidas se despiertan en un lugar extraño. Se trata de un macrolaberinto cúbico compuesto por una determinada cantidad de habitaciones en su interior, también cúbicas. Estas habitaciones se encuentran designadas por ciertos números y algunas de ellas contienen trampas mortales. Sin un propósito aparente en el laberinto. deberán cooperar y mantenerse a raya a ellos mismos si quieren sobrevivir y escapar de la gran trampa mortal que les contiene.



Webs de interés:

Tráiler: (YouTube)

Reseña: (Filmaffinity)

Dónde ver: (Filmin)

Lista de escenas utilizadas en esta actividad:

- Los volúmenes del cubo y de sus habitaciones
  Escena: $(0:40:52 - 0:42:05)$
  Sinopsis de la escena: Los personajes de la película se encuentran atrapados dentro de una de sus habitaciones. Tras una fuerte discusión entre ellos, se descubre que hay una carcasa exterior a donde se encuentran atrapados. Midiendo las dimensiones de esa carcasa y las dimensiones de una habitación, obtienen el número de habitaciones totales del cubo.

EL INDOMABLE WILL HUNTING

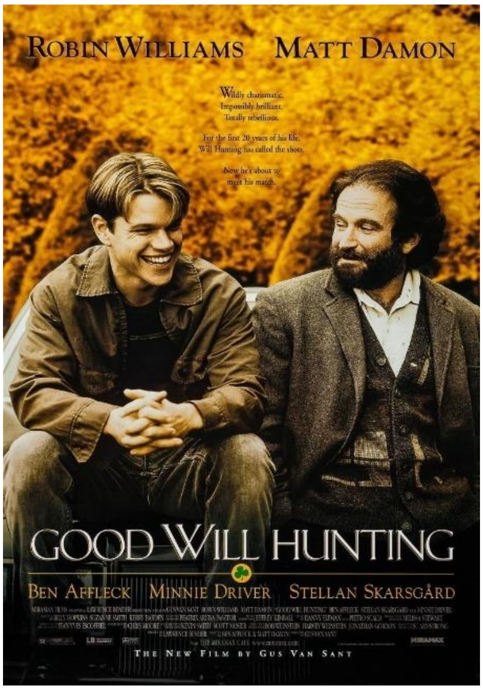
(Van Sant, 1997)

Ficha técnica y artística:

Good Will Hunting. Estados Unidos, 1997. 126 minutos. Dirección: Gus Van Sant. Guión: Matt damon, Ben Affleck. Intérpretes: Matt Damon, Robin Williams, Minnie Driver, Ben Affleck, Stellan Skarsgård. Música: Danny Elfman.

Sinopsis:

Will es un joven de origen humilde y pocos recursos con unas capacidades muy superiores al resto. Su día a día viene marcado por problemas con la ley y dificultades para salir adelante, hasta que es reconocido por un profesor de la universidad en la cual trabajaba como personal de limpieza, lo cual le permite salir de la cárcel a cambio de trabajar con él en el campo de las matemáticas y a la vez atender a un psicólogo para poder comprenderse a sí mismo.



Webs de interés:

Tráiler: (YouTube)

Reseña: (Filmaffinity)

Dónde ver: (HBO Max)

Lista de escenas utilizadas en esta actividad:

- El problema de la hamburguesa y el sofá

  Escena: $(0:09:43 - 0:10:39)$

  Sinopsis de la escena: Varios amigos van en un coche y uno de ellos pide su hamburguesa. El conductor, que ha pagado por él, trata de vacilarle para no darle su comida diciendo que puede pagarle a plazos, tal como su madre compró un sofá durante un año entero. Le dice que puede darle varios céntimos cada día y al final de la semana obtendrá su hamburguesa.

Conclusiones

Resultados del estudio

En el presente trabajo se han incluido diferentes materiales de trabajo con los que poder presentar una primera aproximación a esta metodología que busca unir estas dos disciplinas: las matemáticas y el cine.

Con ello, se ha buscado incentivar el interés del alumnado por esta materia a través de problemas relacionados con el contexto ficticio el cual se estuviera tratando en cada una de las escenas individuales, u otros problemas derivados de ellos.

De este modo, se han tratado diferentes contenidos dentro de las matemáticas de un modo diferente en cada caso, pudiendo ilustrar con estos ejemplos visuales la relación de esta ciencia con la realidad y cómo se muestra esta en los diferentes largometrajes que se han utilizado.

Si bien es cierto que las películas utilizadas en el desarrollo de este trabajo han proporcionado materiales suficientes para poder extraer diferentes problemas que utilizar en las aulas de matemáticas, es por otro lado también cierto el caso contrario. Existen otras películas con una aparente alta relación con las matemáticas de las cuales, tras su visionado, no se ha podido extraer ninguna escena la cual pudiera ser utilizada en las aulas de la ESO, dificultando de esta manera el desarrollo del trabajo.

Por lo general, este trabajo ha arrojado resultados satisfactorios, siendo capaz de proporcionar diversos materiales que pueden ser usados en una variedad de contextos (los diferentes cursos y los distintos bloques de contenido) a lo largo de la ESO en el aula de matemáticas.

Un estudio más completo pudiera haberse llevado a cabo, ampliando este número de escenas, así como incorporando nuevos y distintos largometrajes. Por otro lado, también hubiera podido incorporarse a este trabajo el uso de otras escenas de series de televisión, y no únicamente de películas, debido a que el planteamiento no hubiera cambiado en gran medida, y la incorporación de estas hubiera sido igualmente enriquecedora.

Implicaciones

El tema tratado dentro de este trabajo podría resumirse en la siguiente pregunta: ¿Pueden utilizarse fragmentos de películas como recurso didáctico en las clases de matemáticas en la ESO?

La respuesta es clara: sí que es un recurso didáctico válido y que puede servir como apoyo a la asignatura de diferentes maneras, como se puede comprobar a través de los materiales creados, tanto para el profesorado como para el alumnado. El uso de estos recursos cinematográficos relacionados con la materia es capaz de introducir diferentes problemas matemáticos puestos en contexto sin una alta inversión de tiempo en ello, debido a la corta duración de las escenas.

Los beneficios proporcionados, como ya se ha explicado en apartados anteriores, pueden resumirse en una mayor implicación de los alumnos y alumnas, al dotar de un contexto ficticio a los diferentes problemas de matemáticas presentados y que han de realizar con el fin de afianzar estos conocimientos de la asignatura.

Inicialmente, este trabajo se había planteado con el fin de utilizar largometrajes completos en las sesiones de matemáticas. Por un lado, esta idea podía contener algo positivo, en cuanto a que las cuestiones planteadas para su estudio son dotadas de un contexto más amplio dentro de la trama, y no únicamente como escenas aisladas. Sin embargo, las desventajas de realizar el planteamiento de este modo, y no como finalmente se realizó son claras:

- Por un lado, la cantidad de tiempo utilizado de este modo excedería por completo lo posible, ya que deberían dedicarse, al menos, dos o tres sesiones completas de la materia por cada largometraje que quisiera tratarse.
- Por otro lado, el contenido que influye directamente a la materia de matemáticas suele estar comprimido dentro de una única escena o conjunto de escenas, y no en la película al completo.

  En el caso de tratarse con películas completamente dedicadas o relacionadas con las matemáticas, esta selección de películas disminuiría notablemente, y no permitiría este planteamiento.

Todo esto ha llevado a que, finalmente, se optase por este diferente planteamiento, en el cual se utilizan escenas cinematográficas individuales y de corta duración, a través de las cuales introducir los diferentes problemas matemáticos que se quieren tratar.

A la hora de tratar las diferentes limitaciones que tiene este estudio, la más notable de todas ellas es que, si se quisiese ampliar el mismo a todos los bloques de contenido dentro de estos cursos tratados, podría resultar muy complicado el buscar un ejemplo de escena cinematográfica en la que se tratase cada uno de los contenidos en concreto dentro del currículo.

Es por ello por lo que no se debe basar el desarrollo de las sesiones de clase únicamente con esta metodología, sino que se debe utilizar como apoyo en ciertos momentos del curso escolar que lo permitan.

Otra de las limitaciones observadas dentro del estudio realizado es la gran cantidad de imprecisiones y errores matemáticos cometidos dentro de cada una de las películas estudiadas, así como las licencias tomadas "por el bien de la trama".

Es de especial relevancia recalcar esto: a la hora de ver un largometraje de este tipo en el que se utilizan las matemáticas, es importante no dar por supuesto la veracidad de las afirmaciones realizadas. Tanto para el profesorado como para el alumnado es importante desarrollar una visión crítica con lo observado. No porque algo se mencione con seguridad dentro de la película significa que sea cierto, matemáticamente hablando.

Del modo en el que se plantea este trabajo, se ha buscado facilitar la práctica de otros docentes que pudieran interesarse por el tema. Dentro de la organización que se ha utilizado, es muy sencillo extraer aquello que pueda resultar interesante para la aplicación en las aulas. Es por ello por lo que se ha decidido crear estos materiales para alumnado y profesorado, incluyendo las recomendaciones y soluciones a los problemas planteados, así como la lista de las escenas utilizadas.

En resumen, el proyecto se ha planteado de forma que contenga las mayores facilidades posibles para cualquier persona -docente, o no- que pueda interesarse por el tema, y tenga acceso a este documento.

Si en un futuro se realizasen estudios complementarios o similares a este, se recomienda tener claro desde el primer momento el cómo se quiere llevar a cabo el mismo, ya sea un trabajo más académico, o algo con propuestas de aplicación, como este mismo. Existe una gran cantidad de material ya creado con relación a este tema, y su consulta puede facilitar la creación de futuros trabajos, así como orientar a los mismos en las diferentes direcciones que pueden tomar.

Bibliografía y Webgrafía

Amenábar, A. (Dirección). (2009). *Ágora* [Película]. Telecinco Cinema, Mod Producciones, Himenóptero.

Beltrán Pellicer, P. (2015). *Series y largometrajes como recurso didáctico en matemáticas en educación secundaria.* [Tesis doctoral, UNED]. Redined

Clark, L., Luske, H., Meador, J., & Reitherman, W. (Dirección). (1959). *Donald y las matemáticas* [Película]. Walt Disney Productions.

Educación 3.0. (17 de Noviembre de 2021). *35 películas basadas en las matemáticas* EDUCACIÓN 3.0. https://www.educaciontrespuntocero.com/recursos/peliculas-basadas-matematicas/

Filmaffinity. (21 de Junio de 2022). https://www.filmaffinity.com/es/main.html

González, M. (28 de Marzo de 2015). *Nueve películas de, por y para matemáticos.* Xataka. https://www.xataka.com/cine-y-tv/nueve-peliculas-de-por-y-para-matematicos

Groening, M. (Dirección). (1999). *Futurama* [Serie de TV]. The Curiosity Company, 20th Century Fox Television.

Hendrix, E. (21 de Marzo de 2022). *Here are 9 Movies That Make Math Look Cool.* MovieWeb. https://movieweb.com/movies-about-math/

Heuton, C., & Falacci, N. (Dirección). (2005). *Numb3rs* [Serie de TV]. The Barry Schindel Company, Scott Free Productions, Paramount Television, CBS Paramount Network Television, CBS Productions.

Lemnismath. (7 de Septiembre de 2018). *¿Por qué tenemos 12 notas musicales? | Música y matemáticas*. [Archivo de vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=P7iC-fbdKmQ

Luketic, R. (Dirección). (2008). *21: Blackjack* [Película]. Columbia Pictures.

MacGuffin007. (11 de Diciembre de 2018). *Al cine le gustan las matemáticas.* MacGuffin007. https://macguffin007.com/2018/12/11/cine-y-matematicas/

McTiernan, J. (Dirección). (1995). *Die Hard with a Vengeance* [Película]. 20th Century Fox, Cinergi Pictures.

Miller, B. (Dirección). (1997). *Cube* [Película]. Cube Libre, The Feature Film Project, The Harold Greenberg Fund, Odeon Films, Ontario Film Development Corporation, Téléfilm Canada, Viacom Canada

Miller, B. (Dirección). (2011). *Moneyball* [Película]. Columbia Pictures, Michael De Luca, Scott Rudin Productions, Specialty Films

O'Connor, G. (Dirección). (2016). *The Accountant* [Película]. Warner Bros., Electric City Entertainment, Zero Gravity Management, RatPac-Dune Entertainment

Pastor, M. (21 de Junio de 2022). *El problema de Monty Hall*. Estadística para todos. http://www.estadisticaparatodos.es/taller/montyhall/montyhall.html

Persico, A. (16 de Abril de 2017). *10 Best Math Movies for Middle School Students.* Mashupmath. https://www.mashupmath.com/blog/2017/4/16/10-best-math-movies-for-middle-school-students

Piedrahita, L., & Sopeña, R. (Dirección). (2007). *La habitación de Fermat* [Película]. Notro Films

Población Sáez, A. J. (2006). *Las Matemáticas en el Cine.* Proyecto Sur de Ediciones S.L. Real Sociedad Matemática Española

Raga, M. C., Requena, J. L., & Muedra, A. (2010). *Matemáticas de cine.* Valencia.

Real Decreto 1105/2014 [Ministerio de Educación, Cultura y Deporte]. Por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. 26 de diciembre de 2014.

Scott, R. (Dirección). (2015). *The Martian* [Película]. 20th Century Fox, Scott Free Productions, TSG Entertainment

Sorando Muzás, J. M. (2014). *100 escenas de cine y televisión para la clase de matemáticas.* Servicio de publicaciones de la federación española de sociedades de profesores de matemáticas (FESPM).

Sorando Muzás, J. M. (21 de Junio de 2022). *¿Cine en clase de matemáticas?... también.* Centro de Comunicación y Pedagogía. http://www.centrocp.com/cine-clase-matematicas-tambien/

Sorando Muzás, J. M. (20 de Junio de 2022). *Matemáticas en el cine y las series de TV.* Matemáticas en tu mundo. https://matematicasentumundo.es/CINE/cine.htm

Sulem, M. (13 de Junio de 2022). *20 films about math, mathematicians and math geniuses.* Yardbarker. https://www.yardbarker.com/entertainment/articles/20_films_about_math_mathematicians_and_math_geniuses/s1__28630979#slide_1

Tyldum, M. (Dirección). (2014). *The Imitation Game* [Película]. Black Bear Pictures, Ampersand Pictures.

Van Sant, G. (Dirección). (1997). *Good Will Hunting* [Película]. Lawrence Bender Productions, Miramax.

Anexos

En este último y complementario apartado de anexos se adjuntan todas las escenas que se han utilizado para llevar a cabo este estudio, organizadas por los diferentes cursos en los que se pretenden aplicar

Cada una de las escenas tratadas incluirá dos materiales distintos: uno de ellos orientado hacia el profesorado y otro hacia el alumnado, de forma que el primero de ellos incluirá las indicaciones necesarias, así como una posible solución de cada uno de los problemas planteados.

En este último y complementario apartado de anexos a este Trabajo Fin de Máster se adjunta todo el conjunto de escenas utilizadas para llevar a cabo este estudio. Todas estas escenas ya mencionadas han sido organizadas según aquel curso de la ESO al que estén orientadas, incluyendo aquellos contenidos que traten individualmente.

Estas escenas se incluyen introducidas por sus principales características (a qué película pertenecen, a qué curso están orientadas, etc.), para así dar paso a su subdivisión en dos secciones claramente diferenciadas:

- Por un lado, se encuentra aquel material para el alumnado, conteniendo los diferentes ejercicios y problemas relacionados con la escena en cuestión, así como unas breves indicaciones, en el caso de que fuera necesario.
- Por otro lado, también se ha incluido material para el profesorado, en el cual se ha explicado aquellas indicaciones necesarias para el planteamiento del ejercicio en las clases. Además de esto, este material para el docente incluye una posible solución (en el caso de que esto fuera posible) a cada uno de los problemas planteados para el alumno, explicando cada uno de los pasos seguidos hasta alcanzarla, y su posible interpretación.

De este modo, cualquier docente que quisiera aplicar esta metodología en sus clases, puede ser capaz de ello, seleccionando aquellas actividades que más le plazcan, y así disponiendo fácilmente de todo el material necesario para ello, complementado por la información encontrada en el apartado “plan de acción” de cada película tratada.

-

ESCENA 1:

LA CONJETURA DE GOLDBACH

-

PELÍCULA:

LA HABITACIÓN DE FERMAT

-

ORIENTADO A:

1º DE LA ESO

-

CONTENIDOS TRATADOS:

NÚMEROS PRIMOS

-

La habitación de Fermat:

La conjetura de Goldbach

1. Comprueba que, efectivamente, esta conjetura se cumple para los siguientes números: 24, 58, 142, 826, otro número a tu elección.

2. ¿Por qué esta conjetura sólo sirve para los números pares y no para los impares?

3. ¿Crees que es necesario establecer una ley general sobre algo de este estilo, o comprobando que se cumple para cualquier ejemplo debería valer?

La habitación de Fermat:

La conjetura de Goldbach

-material para el profesorado-

Planteamiento del ejercicio en clase:

Dentro de todo lo que se puede plantear con esta escena, se elige una aproximación básica a los números primos, contenido que suele tratarse en los primeros cursos de la ESO. De esta forma, se plantean dos ejercicios en los cuales los alumnos podrán trabajar descomposición en factores primos, así como las diferencias entre números primos y compuestos. Se debe enunciar la conjetura o mostrar la escena de forma que los alumnos comprendan el enunciado antes de comenzar.

El propósito de este ejercicio es fomentar la reflexión por los alumnos, que pueden trabajar en parejas en las que compartan ideas y así el problema resulte más interactivo. Por ello, el tercero de estos problemas fomenta una reflexión en ellos, pudiendo iniciar así el pensamiento científico.

Una posible solución:

1. *Comprueba que, efectivamente, esta conjetura se cumple para los siguientes números: 24, 58, 142, 826, otro número a tu elección.*
   Puede haber varias soluciones a cada uno de estos números puestos de ejemplo: $24 = 17 + 7 = 19 + 5;\ 58 = 47 + 11 = 41 + 17; 142 = 139 + 3 = 101 + 41; 826 = 317 + 509 = 823 + 3$

2. *¿Por qué esta conjetura sólo sirve para los números pares y no para los impares?*
   Porque, debido a que todos los números primos son impares (menos el 2) y al sumar cualquier pareja de impares se obtiene un número par, la única manera de que esta conjetura fuera válida para un cierto número impar es que fuese la suma de un número primo en concreto y el número 2. Se muestra un ejemplo a continuación: $15 = 13 + 2$, sí que lo cumple. $17 = 15 + 2$, no lo cumple (ya que 15 no es primo).

3. *¿Crees que es necesario establecer una ley general sobre algo de este estilo, o comprobando que se cumple para cualquier ejemplo debería valer?*

   Aunque esta pregunta incite a la reflexión más allá de a una solución directa, a los alumnos se les pueden presentar las siguientes cuestiones:

   ¿Se puede asegurar que el sol va a salir cada mañana? Al final, sin conocer los comportamientos que rigen el movimiento de los astros, aunque hayamos observado que, durante todas nuestras vidas, el sol ha salido cada mañana, no podríamos establecer una ley que lo regulase. En otras palabras, hasta que no se hubiese demostrado científicamente la causa de por qué el sol sale cada mañana, no podríamos asegurar que al día siguiente el sol fuera a salir.

   Otro ejemplo más relacionado con las matemáticas es la suma de los ángulos internos de un triángulo. Muchos alumnos (deberían) conocen que, al sumar estos ángulos, esta suma da 180º. Sin embargo, muchos de ellos no lo han visto demostrado fuera de realizar varios ejemplos y comprobar que en todos ellos se cumple, similar al planteamiento de una conjetura.

-

ESCENA 2:

LAS HIJAS DEL PROFESOR

-

PELÍCULA:

LA HABITACIÓN DE FERMAT

-

ORIENTADO A:

1º DE LA ESO

-

CONTENIDOS TRATADOS:

DIVISIBILIDAD

-

La habitación de Fermat

Las hijas del profesor

1. Busca todos los divisores de los siguientes números:
    a. 50

    b. 64

    c. 22

    d. 36

2. Piensa si, en las siguientes agrupaciones, va a sobrar algo. En el caso de que sobre, indica cuánto:
    a. Almacenando 300 litros de gasolina en coches con capacidad de 15 litros.

    b. Grabando una película de 190 minutos en escenas de 20 minutos.

    c. Subiendo a un ascensor de 400 kilogramos con personas de 75 kilogramos.

    d. Agrupando en grupos de 3 un instituto de 621 alumnos.

3. Un alumno le pregunta a un profesor: "¿Qué edad tienen tus tres hijas?" Este responde que el producto de sus edades es igual a 36 y que la suma es igual al número de la casa del alumno. "Me falta un dato" protesta el alumno, a lo que el profesor le responde: "Es verdad, la mayor toca el piano". ¿Qué edad tienen las tres hijas?

La habitación de Fermat

Las hijas del profesor

-material para el profesorado-

Planteamiento del ejercicio en clase:

Esta escena trata un problema que necesita de realizar cierto procedimiento lógico para organizar los pasos necesarios a la solución. El propio ejercicio se le puede plantear a los alumnos y alumnas y, al tratarse de algo que requiere cierta reflexión, se puede dejar paso a la comunicación entre ellos, al tratar de resolverlo por grupos.

El problema se les puede mostrar a los alumnos y alumnas tanto mostrando la escena de la película como planteándolo el propio docente, de modo que no quepa duda sobre su enunciado. Debido a que el problema contiene cierta complejidad, se plantean dos ejercicios de divisibilidad introductorios a este, quedando entonces esta actividad compuesta por los siguientes ejercicios:

Una posible solución:

1. *Busca todos los divisores de los siguientes números:*

   a. *50*

$$D(50) = 1, 2, 5, 10, 25, 50$$

   b. *64*

$$D(64) = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$$

   c. *22*

$$D(22) = 1, 2, 11, 22$$

   d. *36*

$$D(36) = 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$$

2. *Piensa si, en las siguientes agrupaciones, va a sobrar algo. En el caso de que sobre, indica cuánto:*

   a. *Almacenando 300 litros de gasolina en coches con capacidad de 15 litros.*
      Como son coches de 15 litros de capacidad, para 300 litros quedarán llenos 20 coches enteros, y no sobrará nada.

   b. *Grabando una película de 190 minutos en escenas de 20 minutos.*
      Una película de 190 minutos no se puede grabar en escenas de 20 minutos, éstas sólo llenarán 9 escenas hasta los 180 minutos y, por lo tanto, sobrarán 10 minutos.

   c. *Subiendo a un ascensor de 400 kilogramos con personas de 75 kilogramos.*
      Personas de 75 kilogramos podrán entrar 5 hasta llenar 375 kilogramos del ascensor, por lo que sobrarán 25 kilogramos hasta llegar al total de 400 kilogramos.

   d. *Agrupando en grupos de 3 un instituto de 621 alumnos.*
      Como 3 es divisor de 621, sí que se podrán hacer grupos de 3 alumnos en el instituto (concretamente 207 grupos) sin que sobre nadie sólo o en pareja.

3. *Un alumno le pregunta a un profesor: "¿Qué edad tienen tus tres hijas?" Este responde que el producto de sus edades es igual a 36 y que la suma es igual al número de la casa del alumno. "Me falta un dato" protesta el alumno, a lo que el profesor le responde: "Es verdad, la mayor toca el piano". ¿Qué edad tienen las tres hijas?*

   Aunque el propio enunciado lleve a la creación de un sistema de la forma: $x \cdot y \cdot z = 36; x + y + z = casa$, no es esto ni mucho menos necesario para su resolución.

   Para comenzar con la primera condición, vamos a ver todas las combinaciones que llevan a que su producto sea 36, ya que una de estas será nuestra solución buscada. A continuación, se mostrará qué suma otorga cada una de ellas:

$$C_1 = \{1, 1, 36\};\ S_1 = 38;\ C_2 = \{1\ , 2, 18\};\ S_2 = 21;$$

$$C_3 = \{1, 3, 12\};\ S_3 = 16;\ C_4 = \{1, 4, 9\};\ S_4 = 14;$$

$$C_5 = \{1, 6, 6\};\ S_5 = 13;\ C_6 = \{2, 2, 9\};\ S_6 = 13;$$

$$C_7 = \{2, 3, 6\};\ S_7 = 11;\ C_8 = \{3, 3, 4\};\ S_8 = 10;$$

   La segunda condición es que su suma tenía que ser el número de la casa de aquel que preguntaba. Como este número es conocido para esa persona, en el caso de encontrarse entre los obtenidos, hubiera averiguado la solución en ese mismo momento. Sin embargo, al preguntar por un dato extra, se muestra que hay varias opciones sobre las que elegir. El único número cuya suma se encuentra repetida es el 13. Es por ello por lo que la tercera y última pista da la solución: "la mayor toca el piano". Entre las dos opciones restantes ($C_5 = \{1, 6, 6\};\ S_5 = 13;\ C_6 = \{2, 2, 9\};\ S_6 = 13;$), la única de ellas donde hay una hija "mayor" es aquella en la que las hijas tienen 2, 2 y 9 años.

-

ESCENA 3:

DIMENSIONES DE UN CAMPO DE FÚTBOL

-

PELÍCULA:

DONALD Y LAS MATEMÁTICAS

-

ORIENTADO A:

1º DE LA ESO

-

CONTENIDOS TRATADOS:

DESCOMPOSICIÓN DE ÁREAS

-

Donald y las matemáticas

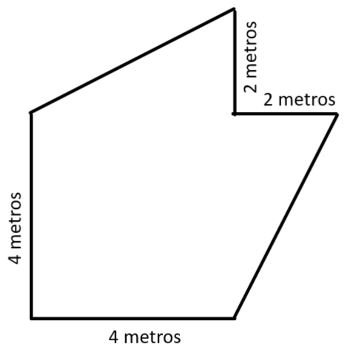
Dimensiones de un campo de fútbol

1. Dibuja un campo de fútbol y calcula su perímetro y su área. Recuerda utilizar las unidades correctas en cada caso. Un campo de fútbol "convencional" tiene forma rectangular y mide aproximadamente 50 metros de ancho y 100 metros de largo.

2. ¿Y si ahora dividimos el campo en las dos mitades de cada equipo? ¿Cuánto mide el área y perímetro de cada uno? ¿Y si sumamos las áreas?

3. En vez de dividir el campo en los dos equipos, vamos a realizar una de las diagonales del rectángulo, dividiéndolo de nuevo en dos partes iguales. ¿Cuánto mide el área y perímetro de cada uno? ¿Y si sumamos las áreas?

4. Calcula el área de la siguiente figura (utiliza lo aprendido en los anteriores):



Donald y las matemáticas

Dimensiones de un campo de fútbol

-material para el profesorado-

Planteamiento del ejercicio en clase:

Debido a la gran popularidad del fútbol tradicional tal y como lo conocemos fuera de los Estados Unidos sobre el fútbol americano, se trabajará con este anterior sobre cualquier otro deporte. De cualquier modo, el ejercicio puede adaptarse a cualquier tipo de campo (cualquier tamaño) siempre que se cambien los datos proporcionados.

Como referencia: un campo de fútbol "convencional" tiene forma rectangular y mide aproximadamente 50 metros de ancho y 100 metros de largo.

Una posible solución:

1. *Dibuja un campo de fútbol y calcula su perímetro y su área. Recuerda utilizar las unidades correctas en cada caso. Un campo de fútbol "convencional" tiene forma rectangular y mide aproximadamente 50 metros de ancho y 100 metros de largo.* El campo dibujado quedaría de la siguiente manera:

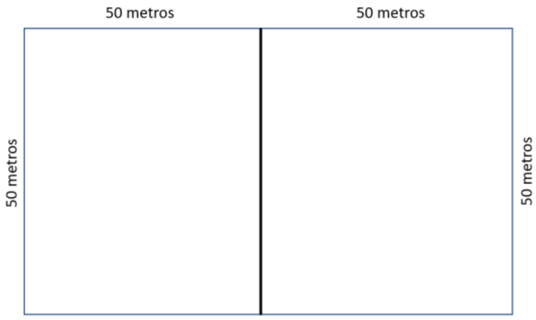
El perímetro de cualquier figura es la suma de las medidas de sus lados. El área del rectángulo es la base por la altura, quedando:

$$P(Campo\ Grande) = \ 50 + 100 + 50 + 100 = 300\ metros$$

$$\acute{A}(Campo\ Grande) = 50 \cdot 100 = 5000\ metros^2$$

2. *¿Y si ahora dividimos el campo en las dos mitades de cada equipo? ¿Cuánto mide el área y perímetro de cada uno? ¿Y si sumamos las áreas?*

   El nuevo campo dibujado quedaría de la siguiente manera (dibujo orientativo):



   Procediendo del mismo modo que antes, para cada una de las partes (que son dos partes iguales):

$$P(Medio\ Campo) = 50 + 50 + 50 + 50 = 200\, metros$$

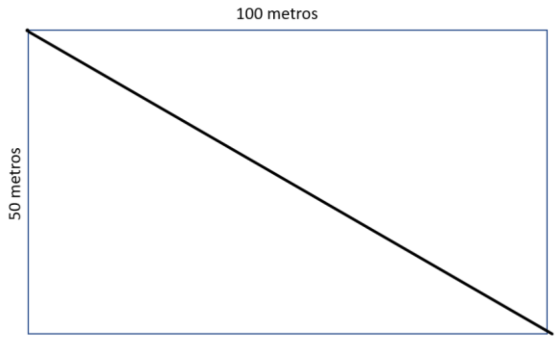
$$Á(Medio\ Campo) = 50 \cdot 50 = 2500\, metros^2$$

$$Suma\ de\ las\ áreas(Medio\ Campo) = 2500 + 2500 = 5000\, metros^2$$

   Se observa que al sumar las dos áreas se obtiene el área de la figura mayor.

3. *En vez de dividir el campo en los dos equipos, vamos a realizar una de las diagonales del rectángulo, dividiéndolo de nuevo en dos partes iguales. ¿Cuánto mide el área y perímetro de cada uno? ¿Y si sumamos las áreas?*

   El nuevo campo dibujado quedaría de la siguiente manera (dibujo orientativo):



   De este modo, para calcular el perímetro se necesita utilizar el Teorema de Pitágoras. Para calcular el área hay que recordar que es una expresión diferente al ser un triángulo.

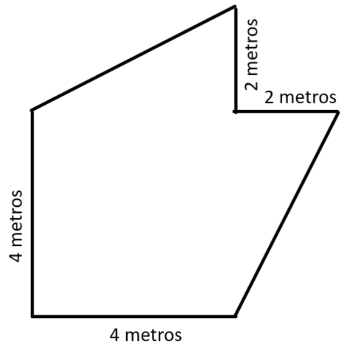
$$Diagonal^2 = 100^2 + 50^2; Diagonal = 111{,}80\, metros$$

$$P(Triángulo) = 100 + 111{,}80 + 50 = 261{,}80\, metros$$

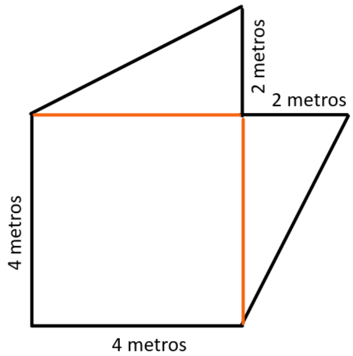
$$Á(Triángulo) = \frac{100 \cdot 50}{2} = 2500\ metros^2$$

$$Suma\ de\ las\ áreas(Triángulos) = 2500 + 2500 = 5000\ metros^2$$

4. *Calcula el área de la siguiente figura (utiliza lo aprendido en los anteriores):*



Dividiendo la “compleja” figura que se da en figuras más simples:



Como se puede observar, se trata de un cuadrado y dos triángulos. Habiendo aprendido que la suma de las áreas de las diferentes figuras simples constituye el área de la figura total, se opera fácilmente:

$$Á(Cuadrado) = 4 \cdot 4 = 16\ metros^2$$

$$Á(Triángulo) = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4\ metros^2$$

$$Suma\ de\ las\ áreas(Total) = 16 + 4 + 4 = 24\ metros^2$$

-

ESCENA 4:

COMPRANDO EN EL SASTRE

-

PELÍCULA:

21: BLACKJACK

-

ORIENTADO A:

1º DE LA ESO

-

CONTENIDOS TRATADOS:

OPERACIONES CON PORCENTAJES

-

21: Blackjack

Comprando en el sastre

“El cinturón son 49,95 menos el 15%. La chaqueta, 589,99. Los pantalones, 285,99 menos el 10%. La camisa no está rebajada, pero le puedo hacer un 5% sobre 69,99. Los zapatos, 155. De modo que todo será 1 042 dólares con 68 centavos”

1. Realiza esta cuenta tú, deteniéndote en cada uno de los pasos y comprueba si es correcto o no.

2. ¿Es lo mismo que te quiten el IVA a que te hagan un descuento del 21%? Compruébalo.

3. ¿A qué precio tenemos que comprar un artículo si queremos venderlo un 15% más caro y de este modo ganar 25€?

4. De los 600 alumnos y alumnas de un instituto, un 80% se van de excursión. De estos últimos, un 45% son chicas. Entre todos los chicos, sólo un 15% de ellos hablan inglés. ¿Cuántos chicos de los que fueron a la excursión no hablan inglés?

21: Blackjack

Comprando en el sastre

Planteamiento del ejercicio en clase:

Se utiliza esta escena de la película para mostrar un ejemplo práctico de los problemas y operaciones con porcentajes. Curiosamente, la cuenta realizada en la película no es correcta, pudiendo tratarse de un error. Más adelante, se presentan otros problemas de porcentajes, en los cuales hay que reflexionar sobre cada cosa que se está tratando de calcular.

Una posible solución:

"El cinturón son 49,95 menos el 15%. La chaqueta, 589,99. Los pantalones, 285,99 menos el 10%. La camisa no está rebajada, pero le puedo hacer un 5% sobre 69,99. Los zapatos, 155. De modo que todo será 1 042 dólares con 68 centavos"

1. *Realiza esta cuenta tú, deteniéndote en cada uno de los pasos y comprueba si es correcto o no.*

$$Cinturón = 49{,}95 \cdot 0{,}85 = 42{,}46\$$$

$$Chaqueta = 589{,}99\$$$

$$Pantalones = 285{,}99 \cdot 0{,}90 = 257{,}39\$$$

$$Camisa = 69{,}99 \cdot 0{,}95 = 66{,}49\$$$

$$Zapatos = 155\$$$

$$Total = 42{,}46 + 589{,}99 + 257{,}39 + 66{,}49 + 155 = 1\ 111{,}33\$$$

Hemos comprobado que la cuenta está mal realizada (la tienda perdería dinero).

2. *¿Es lo mismo que te quiten el IVA a que te hagan un descuento del 21%? Compruébalo.*

Pongamos un ejemplo; un televisor que, sin IVA, cuesta $500€$. Una vez le apliquemos este impuesto del 21% extra, se nos quedaría en:

$$500 + 500 \cdot 0{,}21 = 605€$$

Por lo tanto, cuando comprásemos este televisor sin ningún tipo de rebaja, nos costaría $605€$. Ahora comparemos las dos rebajas propuestas, la primera de ellas será a la que le quitaremos el IVA, y la segunda de ellas, aquella en la que rebajaremos un 21% el precio:

$$SIN\ IVA: Precio = 500€$$

$$DESCUENTO\ 21\%: Precio = 605 \cdot 0{,}79 = 477{,}95€$$

Mucha gente no diferencia estos dos conceptos, y los alumnos también pensarán de este modo, por lo que la demostración matemática es muy visual para ellos.

3. *¿A qué precio tenemos que comprar un artículo si queremos venderlo un 15% más caro y de este modo ganar 25€?*

   Si queremos vender un artículo un 15% más caro, y ganar cierta cantidad con esa venta, será ese incremento de porcentaje el propio incremento en dinero que obtengamos de la venta.

$$\frac{15}{100} = \frac{25}{x}; x = 166{,}66€$$

4. *De los 600 alumnos y alumnas de un instituto, un 80% se van de excursión. De estos últimos, un 45% son chicas. Entre todos los chicos, sólo un 25% de ellos hablan inglés. ¿Cuántos chicos de los que fueron a la excursión no hablan inglés?*

   Para realizar este ejercicio simplemente deberemos ir con cuidado poco a poco y viendo claramente qué estamos operando:

$$Alumnos_{Total} = 600\ alumnos\ y\ alumnas$$

$$Alumnos_{Excursión} = Total \cdot 0{,}80 = 480\ alumnos\ y\ alumnas$$

$$Chicos_{Excursión} = Alumnos_{Excursión} \cdot 0{,}55 = 264\ chicos$$

$$Chicos_{Excursión-no\ inglés} = Chicos_{Excursión} \cdot 0{,}75$$
$$= 198\ chicos\ no\ hablan\ inglés.$$

-

ESCENA 5:

IRRACIONALIDAD

-

PELÍCULA:

THE IMITATION GAME (DESCIFRANDO ENIGMA)

-

ORIENTADO A:

2º DE LA ESO

-

CONTENIDOS TRATADOS:

RAÍCES Y NÚMEROS IRRACIONALES

-

The Imitation Game (Descifrando Enigma)

Irracionalidad

1. Trata de calcular la raíz cuadrada de 2 con cuatro decimales. ¿Ves si es sencillo hacer esto?

2. Demuestra que, si un número "n" es par, se puede expresar como $n = 2k$, siendo k otro número entero cualquiera. ¿Cómo sería para los números impares?

3. ¿Es la raíz cuadrada de 2 un número racional o irracional? ¿Es $\frac{577}{408}$ una buena aproximación?

The Imitation Game (Descifrando Enigma)

Irracionalidad

-material para el profesorado-

Planteamiento del ejercicio en clase:

Para demostrar que la raíz cuadrada de dos no es un número racional se puede proceder de distintas formas. Para ello, es mejor que los alumnos se enfrenten a ella directamente y traten de aproximarse al problema, para que más tarde traten de demostrarlo ellos mismos con una demostración más "formal".

Una posible solución:

1. *Trata de calcular la raíz cuadrada de 2 con cuatro decimales. ¿Ves si es sencillo hacer esto?*
   Resolviendo "a mano" la raíz cuadrada de 2, vamos obteniendo lo siguiente, que no es un proceso sencillo:

$\sqrt{2}$	1,4142
-1	
100	
-96	24 x 4=96
400	
-281	281 x 1=281
11900	
-11296	2824 x 4=11296
60400	
-56564	28282 x 2=56564
3836	

2. *Demuestra que, si un número "n" es par, se puede expresar como $n = 2k$, siendo k otro número entero cualquiera. ¿Cómo sería para los números impares?*
   Para un número par es una demostración muy sencilla. Cualquier número par tiene el número 2 como divisor. Es decir, que, si ese número par "n" lo dividimos por 2, obtendremos otro número entero "k". Es por ello por lo que se hace el paso contrario: al multiplicar ese número entero por 2, obtendremos un número par. $n = 2k$.

Para un número impar podemos pensar que cualquier número impar va entre dos números pares. Es decir, se van intercalando. Por ello, si a cualquier número par le sumamos (o le restamos) una unidad, obtendremos un número impar. Como hemos expresado un número par como $n = 2k$, para los números impares se podrá expresar como $n = 2k \pm 1$.

3. *¿Es la raíz cuadrada de 2 un número racional o irracional? ¿Es* $\frac{577}{408}$ *una buena aproximación?*

Este ejercicio anterior se ha utilizado para familiarizar a los alumnos con la notación para hacer esta demostración. Para demostrar que $\sqrt{2}$ es un número irracional, haremos el caso contrario (que sea racional), y al obtener un absurdo, veremos que no puede serlo.

Para que $\sqrt{2}$ sea un número racional, se tiene que expresar como una fracción, que supondremos irreducible, y de dos números $a, b > 0$ (cualquier otro caso no tendría sentido).

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}; 2 = \frac{a^2}{b^2}; 2b^2 = a^2$$

Por lo que hemos visto antes, si $a^2 = 2b^2$, eso significa que $a^2\ es\ par$ y, por lo tanto, $a\ es\ par$. De este modo:

$$2b^2 = a^2 = (2k)^2; 2b^2 = 4k^2; b^2 = 2k^2$$

Por lo que hemos visto antes, si $b = 2k^2$, eso significa que $b^2\ es\ par$ y, por lo tanto, $b\ también\ es\ par$. Sin embargo, si ambos números a y b fueran pares, la fracción con la que hemos comenzado no es irreducible, lo cual contradice la suposición inicial y, por lo tanto, se demuestra que es un número irracional esta raíz.

Probaremos la aproximación dada en el enunciado: $\frac{577}{408} = 1{,}414215686$ y la compararemos con la expresión original de la raíz: $\sqrt{2} = 1{,}414213562$, viendo que falla en el 6º decimal, y pudiendo concluir que es una buena aproximación (aunque siempre es mucho mejor no aproximar nada, ya que los números no son lo mismo).

-

ESCENA 6:

LA COMIDA EN RACIONES

-

PELÍCULA:

MARTE (THE MARTIAN)

-

ORIENTADO A:

2º DE LA ESO

-

CONTENIDOS TRATADOS:

SISTEMAS DE ECUACIONES

-

Marte (The Martian)

La comida en raciones

5. Mark ha descubierto en la despensa una cantidad de raciones de comida y ha comenzado a cultivar otra cantidad de raciones de patatas.
   Si había una cantidad de raciones de comida para 6 personas preparada para durar 68 soles, calcula cuántas raciones de patatas debe cultivar si le van a rescatar en el sol número 700.

6. ¡Vaya! Ha habido una brecha en la base y se le han echado a perder $3/4$ de las raciones de patatas que había conseguido cultivar.
   Con toda su comida restante, calcula cuánto debe reducir su comida (por ejemplo, comiendo la mitad de lo que debería) si quiere seguir llegando vivo al día 700.
   Nota: Si no has sido capaz de resolver el problema anterior, puedes considerar que la solución obtenida ha sido 400 raciones de comida y 300 raciones de patatas.

Marte (The Martian)

La comida en raciones

-material para el profesorado-

Planteamiento del ejercicio en clase:

Se plantean varios ejercicios de sistemas de ecuaciones sencillos para comenzar a tratar esta parte de las matemáticas.

La organización de la información y el paso del enunciado al lenguaje algebraico es una capacidad que debe ser trabajada de modo que los alumnos y alumnas puedan aproximarse a los problemas con facilidad, perdiendo el "miedo" que puedan tener a cada uno de ellos.

Una posible solución:

1. *Mark ha descubierto en la despensa una cantidad de raciones de comida y ha comenzado a cultivar otra cantidad de raciones de patatas.*
   Si había una cantidad de raciones de comida para 6 personas preparada para durar 68 soles, calcula cuántas raciones de patatas debe cultivar si le van a rescatar en el sol número 700.
   Es un sistema de ecuaciones sencillo, donde el único problema es saber plantearlo e identificar las variables. Consideraremos que Mark se toma una ración cada día y que consumiría proporcionalmente a las 6 personas (consumiría 6 veces menos):

$$x = raciones\ de\ comida$$

$$y = raciones\ de\ patatas$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{6} = 68 \\ x + y = 700 \end{cases} ; \begin{cases} x = 408\ raciones\ normales \\ y = 292\ raciones\ de\ patatas \end{cases}$$

2. *¡Vaya! Ha habido una brecha en la base y se le han echado a perder* $3/4$ *de las raciones de patatas que había conseguido cultivar.*

   Con toda su comida restante, calcula cuánto debe reducir su comida (por ejemplo, comiendo la mitad de lo que debería) si quiere seguir llegando vivo al día 700.

   Nota: Si no has sido capaz de resolver el problema anterior, puedes considerar que la solución obtenida ha sido 400 raciones de comida y 300 raciones de patatas.

   En este caso habrán cambiado las condiciones del problema, pero con los datos obtenidos anteriormente se pueden calcular de forma sencilla.

$$x = raciones\ de\ comida = 408$$

$$y = raciones\ de\ patatas = \frac{292}{4} = 73$$

   Como es fácil de ver, con 408 y 73 raciones en total, no es capaz de llegar hasta el día 700. Para “reducir” su comida diaria, simplemente dividiremos entre esa proporción (por ejemplo, si queremos duplicar el tiempo que le duran, debe comer la mitad cada día):

$$z = cuánta\ proporción\ de\ ración\ debe\ comer\ al\ día$$

$$\frac{x+y}{z} = \frac{408+73}{z} = 700; z = \frac{(408+73)}{700} = 0{,}69$$

   Por ello, Mark debe, en lugar de tomarse 1 ración de comida al día, tomarse 0,69 raciones de comida al día.

   Para los datos propuestos en el caso de no haber resuelto el problema anterior, quedaría del siguiente modo: $x = 400; y = \frac{300}{4} = 75; z = \frac{(400+75)}{700} = 0{,}68$.

   Por ello, Mark debe, en lugar de tomarse 1 ración de comida al día, tomarse 0,68 raciones de comida al día.

-

ESCENA 7:

EL PROBLEMA DE LAS GARRAFAS

-

PELÍCULA:

JUNGLA DE CRISTAL 3: LA VENGANZA

-

ORIENTADO A:

2º DE LA ESO

-

CONTENIDOS TRATADOS:

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

-

Jungla de cristal 3: la venganza

El problema de las garrafas

1. Si tenemos dos garrafas distintas, una de $5\,litros$ y otra de $3\,litros$. ¿Cómo es posible medir $4\,litros$ con una garrafa? La medida ha de ser exacta y no ha de realizarse "a ojo".

2. Un grupo de personas celebra su cumpleaños en una fiesta. Según la tradición, tienes que intercambiar regalos con todas las personas presentes, pero sólo una única vez con cada persona. Si en total ha habido 45 intercambios de regalos en una fiesta: ¿Cuántas personas fueron a la fiesta?
   Nota= si yo le regalo algo a Pepe, y Pepe me da su propio regalo, cuenta como un único intercambio.

3. Una familia quiere celebrar una boda. Llamando al restaurante para reservar cuántos van a comer, llega el momento de decir el número de invitados. Como la madre del novio tiene un peculiar sentido del humor, le dice por teléfono al encargado:
   "El total de las personas que somos, más la mitad del total que somos, más usted, más la mitad de la mitad del total que somos, más los cuatro de la banda y el sacerdote que no comen, más los diez camareros que necesitaremos, hará un total de 212 personas"
   ¿Cuántas personas van a comer?

Jungla de cristal 3: la venganza

El problema de las garrafas

-material para el profesorado-

Planteamiento del ejercicio en clase:

La resolución de problemas mediante la organización de la información y el establecimiento de una notación clara es una parte muy importante de las matemáticas. Desarrollando este y otros problemas del estilo puede trabajarse esta competencia.

Una posible solución:

1. *Si tenemos dos garrafas distintas, una de* $5\ litros$ *y otra de* $3\ litros$. *¿Cómo es posible medir* $4\ litros$ *con una garrafa? La medida ha de ser exacta y no ha de realizarse "a ojo".*

   Aunque haya varias posibilidades de resolver este problema, aquí se muestran dos de ellas. La clave para resolverlo y no perderse por el camino es establecer una buena notación. En este caso, se establecerá $(\frac{0}{5}, \frac{0}{3})$ para referirse a cada una de las garrafas y cómo están de llenas. Puede ser interesante plantearles a los alumnos y alumnas el reto de intentar buscar la menor cantidad de movimientos posibles.

$$\left(\frac{0}{5}, \frac{0}{3}\right) \to \left(\frac{0}{5}, \frac{3}{3}\right) \to \left(\frac{3}{5}, \frac{0}{3}\right) \to \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{3}\right) \to \left(\frac{5}{5}, \frac{1}{3}\right) \to \left(\frac{0}{5}, \frac{1}{3}\right) \to \left(\frac{1}{5}, \frac{0}{3}\right) \to \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{3}\right)$$
$$\to \left(\frac{4}{5}, \frac{0}{3}\right) \to Solucionado\ (forma\ 1)$$

$$\left(\frac{0}{5}, \frac{0}{3}\right) \to \left(\frac{5}{5}, \frac{0}{3}\right) \to \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{3}\right) \to \left(\frac{2}{5}, \frac{0}{3}\right) \to \left(\frac{0}{5}, \frac{2}{3}\right) \to \left(\frac{5}{5}, \frac{2}{3}\right)$$
$$\to \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{3}\right) \to Solucionado(forma\ 2)$$

2. *Un grupo de personas celebra su cumpleaños en una fiesta. Según la tradición, tienes que intercambiar regalos con todas las personas presentes, pero sólo una única vez con cada persona. Si en total ha habido 45 intercambios de regalos en una fiesta: ¿Cuántas personas fueron a la fiesta?*

   Nota= si yo le regalo algo a Pepe, y Pepe me da su propio regalo, cuenta como un único intercambio.

   La clave para realizar este problema es comprender dos cosas. La primera de ellas es que no vas a realizar un intercambio de regalos contigo mismo. La segunda es que la misma persona no va a intercambiar regalos con alguien con el que ya lo ha hecho. Se puede presentar esta información en una tabla para comprenderlo:

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
P1	X	O	O	O	O	O	O
P2	X	X	O	O	O	O	O
P3	X	X	X	O	O	O	O
P4	X	X	X	X	O	O	O
P5	X	X	X	X	X	O	O
P6	X	X	X	X	X	X	O
P7	X	X	X	X	X	X	X

En la tabla, se marca con una X cuando no se hace un regalo y con una O cuando sí se hace. En el caso de 7 invitados (ejemplo) encontramos que se hacen 21 regalos. Si lo expandiéramos hasta tener 45 regalos, veríamos que son un total de 10 personas en la fiesta.

Otro modo de verlo es que la primera persona hace $n-1$ intercambios, la segunda persona hace $n-2$ intercambios, hasta que las últimas personas hacen $n-(n-1)=1$; $n-n=0$ intercambios. Siendo un total de 45 intercambios y n personas, y operando desde la última a la primera, tendremos:

$$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45\ intercambios$$

Como la primera persona hace $n-1=9$ intercambios, tenemos que hay un total de 10 personas en la fiesta.

3. *Una familia quiere celebrar una boda. Llamando al restaurante para reservar cuántos van a comer, llega el momento de decir el número de invitados. Como la madre del novio tiene un peculiar sentido del humor, le dice por teléfono al encargado:*

   "El total de las personas que somos, más la mitad del total que somos, más usted, más la mitad de la mitad del total que somos, más los cuatro de la banda y el sacerdote que no comen, más los diez camareros que necesitaremos, hará un total de 212 personas"

   ¿Cuántas personas van a comer?

   Este ejercicio no tiene ninguna complicación, más allá de saber identificar quiénes participan, quiénes no y qué se está preguntando. Designando $x = total\ de\ personas\ que\ van\ a\ comer$, el enunciado, transcrito de forma matemática quedaría del siguiente modo:

$$x + \frac{x}{2} + 1 + \frac{x}{4} + 4 + 1 + 10 = 212$$

   Como únicamente hay que contar el total de personas que comen y, de los que menciona, ni el sacerdote, ni los camareros, ni la banda, ni el encargado comen, lo único que hay que hallar es ese valor de x en una ecuación lineal muy sencilla.

$$\frac{7x}{4} + 16 = 212; x = \frac{4 \cdot (212 - 16)}{7} = 112\ personas\ que\ van\ a\ comer$$

-

ESCENA 8:

LA ESTADÍSTICA COMO VOZ DE LA RAZÓN EN LOS DEPORTES

-

PELÍCULA:

MONEYBALL: ROMPIENDO LAS REGLAS

-

ORIENTADO A:

2º DE LA ESO

-

CONTENIDOS TRATADOS:

TABLAS DE DATOS

-

Moneyball: rompiendo las reglas

La estadística como voz de la razón en los deportes

1. Eres el seleccionador de un equipo de balonmano. Has de sustituir a tu portera y estás decidiéndote entre las cuatro opciones. Utilizando la estadística de la temporada anterior, busca la mejor opción para tu equipo en general.

Jugadora	Posición	G(9m)	P(9m)	G(6m)	P(6m)	G(7m)	P(7m)	G(CA)	P(CA)
Ana	Portera	347	170	545	142	95	25	54	13
Berta	Portera	290	200	723	229	84	20	41	9
Cristina	Portera	376	187	632	187	101	35	36	14
Diana	Portera	304	149	615	220	77	30	66	12

Leyenda: G=goles recibidos; P=paradas efectuadas; 6m=desde el área; 9m=desde lejos del área; 7m=desde la línea de penalti; CA=en un contraataque.

2. Expresa el porcentaje de parada de cada uno de los tipos de tiro. Realiza un diagrama de sectores para cada una de las estadísticas de la portera que hayas escogido.

Moneyball: rompiendo las reglas

La estadística como voz de la razón en los deportes

-material para el profesorado-

Planteamiento del ejercicio en clase:

Debido a la poca popularidad del béisbol como deporte dentro de nuestro país, se propone en este ejercicio el realizar esto con otro deporte. En este caso, se pone a los alumnos en el papel de un seleccionador de balonmano femenino.

En el deporte de balonmano, hay siete roles en total: portero (1), extremos (2), laterales (2), central (1) y pívot (1). Para este ejercicio, únicamente se les pedirá a los alumnos que seleccionen a una portera para sustituir a la de su equipo, entre las opciones disponibles y utilizando la estadística.

Los nombres de las porteras no son elegidos al azar. Cada una de ellas simboliza una letra de la "A" a la "D". Aunque sea un detalle sutil, es de ayuda para diferenciar bien los datos, y poder esquematizar las cosas (no hace falta escribir el nombre completo cada vez).

Una posible solución:

1. *Eres el seleccionador de un equipo de balonmano. Has de sustituir a tu portera y estás decidiéndote entre las cuatro opciones. Utilizando la estadística de la temporada anterior, busca la mejor opción para tu equipo en general.*

Jugadora	*Posición*	*G(9m)*	*P(9m)*	*G(6m)*	*P(6m)*	*G(7m)*	*P(7m)*	*G(CA)*	*P(CA)*
Ana	*Portera*	*347*	*170*	*545*	*142*	*95*	*25*	*54*	*13*
Berta	*Portera*	*290*	*200*	*723*	*229*	*84*	*20*	*41*	*9*
Cristina	*Portera*	*376*	*187*	*632*	*187*	*101*	*35*	*36*	*14*
Diana	*Portera*	*304*	*149*	*615*	*220*	*77*	*30*	*66*	*12*

Leyenda: G=goles recibidos; P=paradas efectuadas; 6m=desde el área; 9m=desde lejos del área; 7m=desde la línea de penalti; CA=en un contraataque.

2. *Expresa el porcentaje de parada de cada uno de los tipos de tiro. Realiza un diagrama de sectores para cada una de las estadísticas de la portera que hayas escogido.*

En este caso, al tratarse de dos ejercicios que se complementan el uno al otro y pueden realizarse como uno sólo, la solución planteada tratará de hacerlo de este modo y al final se extraerán las conclusiones y el veredicto a la elección:

Aunque influirían muchos más factores a la hora de seleccionar a un jugador, vamos a tomar únicamente estos en cuenta. Como se puede ver por la cantidad de las muestras, el balonmano es un deporte donde hay muchísimos más tiros desde el área o desde lejos del área que desde la línea de penalti o en un contraataque. Por ello, aunque una portera tenga un porcentaje mayor de parada en esas categorías, debería influir en menor medida en nuestra decisión, y por ello se hace una tabla total. Se presenta una tabla a continuación con los resultados obtenidos.

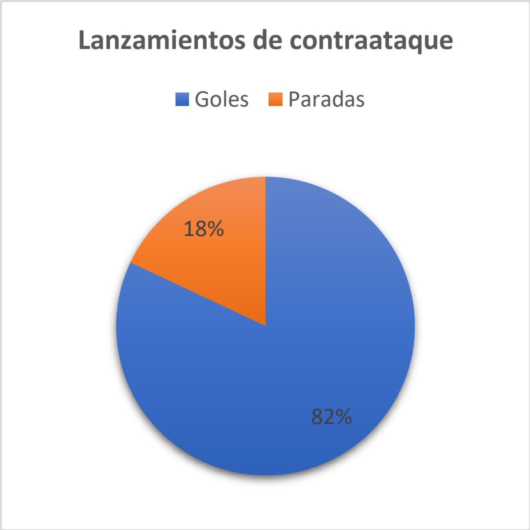
Jugadora	L(9m)	%P(9m)	L(6m)	%P(6m)	L(7m)	%P(7m)	L(CA)	%P(CA)
Ana	517	32,88%	687	20,67%	120	20,83%	67	19,40%
Berta	490	40,81%	952	24,05%	104	19,23%	50	18%
Cristina	563	33,21%	819	22,83%	136	25,74%	50	28%
Diana	453	32,89%	835	26,35%	107	28,04%	78	15,3%

Leyenda: L=lanzamientos totales en la categoría (Goles + Paradas); %P=porcentaje de paradas.

Jugadora	Ana	Berta	Cristina	Diana
Lanzamientos recibidos totales	1391	1596	1568	1473
Paradas hechas en total	350	458	423	411
Porcentaje de paradas total	25,16%	28,70%	26,98%	27,90%

Con estos datos, podríamos inclinarnos por elegir a Berta para el ejercicio pedido. Tiene una impecable efectividad de parada en los lanzamientos desde lejos del área. Es una portera muy sólida en los lanzamientos desde el área y, aunque no destaque en los lanzamientos de penalti o de contraataque, su pequeño número no afecta a sus estadísticas totales.

Habiendo elegido a Berta, se expresan a continuación los diagramas de sectores de cada uno de los tipos de lanzamientos que haya recibido.



-

ESCENA 9:

¿QUÉ ORDEN SIGUEN ESTOS NÚMEROS?

-

PELÍCULA:

LA HABITACIÓN DE FERMAT

-

ORIENTADO A:

3º DE LA ESO

-

CONTENIDOS TRATADOS:

SUCESIONES

-

La habitación de Fermat

¿Qué orden siguen estos números?

1. ¿Qué orden siguen los siguientes números?: 5, 4, 2, 9, 8, 6, 3, 1

2. Continúa las siguientes sucesiones con el siguiente término:
    a. 1, 4, 9, 16, 25, 36...

    b. 1, 1, 2, 3, 5, 8...

    c. 1, 3, 5, 7, 9, 11...

3. Crea una sucesión tuya propia de 5 números, expresa cómo sería el término a_n de esa sucesión, y escribe el término n=100.

La habitación de Fermat

¿Qué orden siguen estos números?

-material para el profesorado-

Planteamiento del ejercicio en clase:

Se busca tratar esta escena cuando se introduzcan sucesiones en clase (3º ESO en Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas y Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas).

En ella, se puede proponer resolver a los alumnos la sucesión de la escena, además de otras con más "fundamento matemático", como las expresadas en los ejemplos siguientes.

Una posible solución:

1. *¿Qué orden siguen los siguientes números?: 5, 4, 2, 9, 8, 6, 3, 1*
   Estos números siguen orden alfabético (Cinco, Cuatro, Dos, Nueve, Ocho, Seis, Tres, Uno). Se puede plantear este ejercicio como un "acertijo" de forma que los alumnos cooperen y busquen maneras menos usuales de resolverlo.

2. *Continúa las siguientes sucesiones con el siguiente término:*
   a. *1, 4, 9, 16, 25, 36...*
      La primera sucesión es de la forma $a_n=n^2$, por lo que el siguiente término es el $a_7=7^2=49$
   b. *1, 1, 2, 3, 5, 8...*
      La segunda sucesión es la sucesión de Fibonacci, de la forma $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ por lo que el siguiente término es el $a_7=8+5=13$.
   c. *1, 3, 5, 7, 9, 11...*

      La última sucesión de ejemplo es la sucesión de números impares, de la forma $a_n=2n-1$, por lo que el siguiente término será el $a_7=14-1=13$.

3. *Crea una sucesión tuya propia de 5 números, expresa cómo sería el término a_n de esa sucesión, y escribe el término n=100.*

   Debido a que esta pregunta busca fomentar la creatividad del alumno y su creatividad, no puede ser como tal propuesta una solución en este documento, sino que cada docente que trate de aplicar esta actividad juzgará los ejercicios que hayan resuelto sus alumnos.

-

ESCENA 10:

¿DÓNDE ESTÁ EL PADRE?

-

PELÍCULA:

LA HABITACIÓN DE FERMAT

-

ORIENTADO A:

3º DE LA ESO

-

CONTENIDOS TRATADOS:

SISTEMAS DE ECUACIONES

-

La habitación de Fermat

¿Dónde está el padre?

1. Hay una madre y un hijo; la madre es 21 años mayor que el hijo. En 6 años el hijo será 5 veces menor que su madre. ¿Dónde está el padre en este momento?

2. Hemos comprado 3 peonzas de madera y 2 de metal por 1,45€ y ayer compramos 2 de madera y 5 de metal por 1,7€. ¿Cuánto cuesta cada una de ellas?

3. En una clase hay el doble de alumnos que en otra. Si pasan 8 alumnos desde la primera clase a la segunda, ambas clases tendrán el mismo número de alumnos ¿Cuántos alumnos hay en cada una de estas clases?

4. En un examen tipo test de 25 preguntas en total se obtienen 4 puntos por cada respuesta correcta, y se resta 1 punto por cada respuesta equivocada. Si una persona ha respondido a 17 preguntas y ha obtenido 43 puntos en total ¿Cuántas respuestas ha fallado?

La habitación de Fermat

¿Dónde está el padre?

-material para el profesorado-

Planteamiento del ejercicio en clase:

Bajo el uso de la escena de la película, se introducen diferentes problemas de sistemas de ecuaciones lineales para realizar en clase, utilizando diferentes temáticas y planteamientos en cada uno de ellos.

El primero de todos, aquel relacionado con la película, más que un problema de matemáticas puede considerarse un chiste malo. Si se resuelve correctamente, únicamente falta interpretar el resultado, que a primera vista no tiene sentido matemático.

Una posible solución:

1. *Hay una madre y un hijo; la madre es 21 años mayor que el hijo. En 6 años el hijo será 5 veces menor que su madre. ¿Dónde está el padre en este momento?*

$$x = edad\ madre; y = edad\ hijo;$$

$$\begin{cases} x = y + 21 \\ 5(y+6) = (x+6) \end{cases}$$

$$-\ Sustitución \begin{cases} x = y + 21 \\ 5(y+6) = (y+27); 5y - y = 27 - 30; y = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Llegando a este punto, sólo falta interpretar la solución, no es necesario averiguar la edad de la madre en este caso ($x = 20{,}25\ años$). Como estamos operando en años, el hijo tiene $y = -\frac{3}{4} años = -9\ meses$, y se deja a la imaginación del lector lo que está haciendo el padre en este momento.

2. *Hemos comprado 3 peonzas de madera y 2 de metal por 1,45€ y ayer compramos 2 de madera y 5 de metal por 1,7€. ¿Cuánto cuesta cada una de ellas?*

$$x = coste\ de\ peonzas\ de\ madera; y = coste\ de\ peonzas\ de\ metal; (cts)$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 145 \\ 2x + 5y = 170 \end{cases} - Reducción \begin{cases} 6x + 4y = 290 \\ -6x - 15y = -510 \end{cases};$$

$$4y - 15y = 290 - 510; y = 20\ cts; x = \frac{(145 - 2 \cdot 20)}{3} = 35\ cts$$

Solución: Las peonzas de madera cuestan 0,20€ cada una de ellas y las de metal cuestan 0,35€ cada una de ellas.

3. *En una clase hay el doble de alumnos que en otra. Si pasan 8 alumnos desde la primera clase a la segunda, ambas clases tendrán el mismo número de alumnos ¿Cuántos alumnos hay en cada una de estas clases?*

$$x = alumnos\ clase\ 1;\ y = alumnos\ clase\ 2$$

$$\begin{cases} x = 2y \\ (x - 8) = (y + 8) \end{cases} - Igualación \begin{cases} x = 2y \\ x = y + 16 \end{cases};\ 2y = y + 16; y = 16; x = 2 \cdot 16 = 32$$

Solución: En una clase hay 32 alumnos y en la otra hay 16 alumnos.

4. *En un examen tipo test de 25 preguntas en total se obtienen 4 puntos por cada respuesta correcta, y se resta 1 punto por cada respuesta equivocada. Si una persona ha respondido a 17 preguntas y ha obtenido 43 puntos en total ¿Cuántas respuestas ha fallado?*

$$x = preguntas\ acertadas; y = preguntas\ falladas;$$

$$\begin{cases} 4x - y = 43 \\ x + y = 17 \end{cases} - Reducción\ \{5x = 60; x = 12; 12 + y = 17; y = 5$$

Solución: esa persona ha fallado 5 respuestas (y ha acertado 12)

-

ESCENA 11:

ENTRE ELIPSES Y CÍRCULOS

-

PELÍCULA:

ÁGORA

-

ORIENTADO A:

3º DE LA ESO

-

CONTENIDOS TRATADOS:

GEOMETRÍA DEL PLANO

-

ÁGORA

ENTRE ELIPSES Y CÍRCULOS

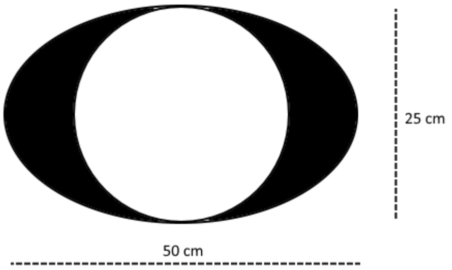
1. ¿Qué distancia recorrería la Tierra a lo largo de cada año alrededor del sol en el caso de que siguiera un movimiento circular?

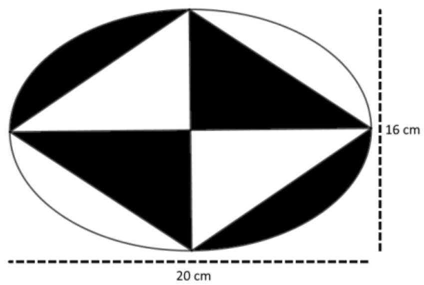
$$R = 149{,}6\ millones\ de\ km$$

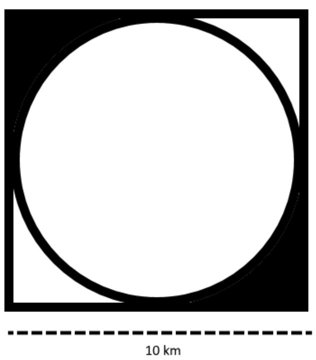
2. Calcula ahora el área que trazaría la Tierra en el caso de que siguiera un movimiento elíptico alrededor del sol y compáralo con el circular.

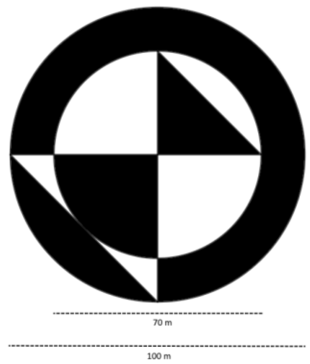
$$a = 152{,}10\ millones\ de\ km$$
$$b = 147{,}10\ millones\ de\ km$$

3. Halla el área sombreada de las siguientes figuras geométricas:









ÁGORA
ENTRE ELIPSES Y CÍRCULOS
-material para el profesorado-

Planteamiento del ejercicio en clase:

La escena muestra, tras mucha investigación y debate en segmentos anteriores de la película, una propuesta de que la Tierra orbita elípticamente alrededor del sol, situado en uno de los focos. Si bien este descubrimiento se le atribuye a Johannes Kepler (doce siglos después), no es del todo irreal poder pensar que ya se hubiera investigado este hecho con anterioridad. De hecho, sobre Hipatia solo tenemos testimonios directos.

En clase de matemáticas puede aprovecharse esta y otras escenas de la película para poder explicar el concepto de las secciones cónicas o profundizar en formas como la elipse y el círculo, como se plantea en estos ejercicios.

Una posible solución:

1. *¿Qué distancia recorrería la Tierra a lo largo de cada año alrededor del sol en el caso de que siguiera un movimiento circular?*

$$R = 149{,}6\ millones\ de\ km$$

Resolver este problema es algo muy simple: únicamente hay que hallar la longitud de la circunferencia dado el radio. La única complicación posible puede ser el uso de las unidades o la confusión con otras medidas (p.e. el área).

$$d = 2\pi R = 2\pi \cdot 149{,}6 \cdot 10^6$$
$$= 939\ 964\ 522\ km\ recorre\ la\ Tierra\ cada\ vez\ que\ pasa\ un\ año$$

2. *Calcula ahora el área que trazaría la Tierra en el caso de que siguiera un movimiento elíptico alrededor del sol y compáralo con el circular.*

$$a = 152{,}10\ millones\ de\ km$$
$$b = 147{,}10\ millones\ de\ km$$

El cálculo de la longitud de la elipse es algo muy complejo para este nivel y por lo tanto, en este caso se pide el cálculo del área trazada en la órbita.

$$A = \pi ab = \pi \cdot 152{,}10 \ \cdot 10^6 \cdot 147{,}10 \ \cdot 10^6 = 7{,}029 \cdot 10^{16} km^2$$

En el caso de que fuera un movimiento circular:

$$A = \pi R^2 = \pi \cdot (149{,}6 \cdot 10^6)^2 = 7{,}031 \cdot 10^{16} km^2$$

3. *Halla el área sombreada de las siguientes figuras geométricas:*

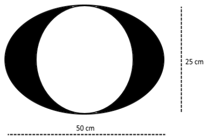


Figura 1: se trata de un círculo inscrito en una elipse. Para calcular el área sombreada basta con hacer la diferencia de sus áreas:

$$Área = Área_{Elipse} - Área_{Círculo} = \pi ab - \pi r^2$$

$$= \pi \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{50}{2} - \pi \cdot \left(\frac{25}{2}\right)^2 = 490{,}87\ cm^2$$

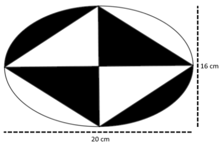


Figura 2: se puede hacer de diferentes maneras, pero aquí se identifica como una elipse y varios triángulos.

$$Área = Área_{Triangulos} + Área_{Arcos\ de\ elipse}$$

$$= 2 \cdot Área_{Triángulo} + \left(\frac{Área_{Elipse} - 4 \cdot Área_{Triángulo}}{2}\right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{\frac{20}{2} \cdot \frac{16}{2}}{2}\right) + \left(\frac{\pi \cdot \frac{20}{2} \cdot \frac{16}{2} - 4 \cdot \frac{\frac{20}{2} \cdot \frac{16}{2}}{2}}{2}\right) = 80 + 45{,}66 = 40\pi$$

$$= 125{,}66\ cm^2$$

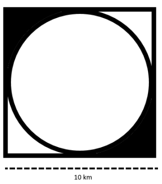


Figura 3: es un círculo inscrito en un cuadrado.

$$Área = \frac{Área_{Cuadrado} - Área_{Círculo}}{2} = \frac{10^2 - \pi \cdot \left(\frac{10}{2}\right)^2}{2}$$

$$= 10{,}73\ km^2$$

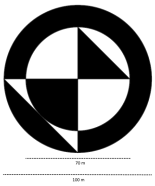


Figura 4: puede parecer muy compleja, pero los dos círculos están divididos en cuatro partes por los triángulos, simplificando mucho las relaciones entre ellos. De este modo, se pueden calcular con estas cuatro figuras:

$$\acute{A}rea(Tri\acute{a}ngulo\ peque\tilde{n}o) = A_{TP} = \frac{35^2}{2}$$

$$\acute{A}rea(Tri\acute{a}ngulo\ grande) = A_{TG} = \frac{50^2}{2}$$

$$\acute{A}rea(C\acute{i}rculo\ peque\tilde{n}o) = A_{CP} = \pi \cdot 35^2$$

$$\acute{A}rea(C\acute{i}rculo\ grande) = A_{CG} = \pi \cdot 50^2$$

$$\begin{aligned} Figura\ sombreada &= A_{TP} + \frac{A_{CP}}{4} + \left[(A_{CG} - A_{CP}) - \left(A_{TG} - \frac{A_{CP}}{4}\right)\right] \\ &= 612{,}5 + 1225\pi + \left[(1275\pi) - \left(1250 - \frac{1225\pi}{4}\right)\right] \\ &= 8178{,}59\ m^2 \end{aligned}$$

-

ESCENA 12:

ZURDOS Y DIESTROS

-

PELÍCULA:

EL CONTABLE

-

ORIENTADO A:

3º DE LA ESO

-

CONTENIDOS TRATADOS:

PROBABILIDAD SIMPLE Y COMPUESTA

-

El contable

Zurdos y Diestros

1. El padre del protagonista afirma que hay un 90% de probabilidades de que los 4 niños sean diestros. Aproximadamente un 87% de las personas son diestras, pero podemos redondear esto a un 90% sin muchos problemas. Aun así; ¿es cierta la afirmación de su padre?

2. En una estantería de una biblioteca hay 4 novelas, 6 biografías y 2 guías de viaje. Tomando 2 libros al azar; ¿qué probabilidad hay de que sean de la misma temática?

3. Al lanzar dos dados de 6 caras a la vez, calcula la probabilidad de que multiplicando las caras ocultas se obtenga un múltiplo de 5.

El contable

Zurdos y diestros

-material para el profesorado-

Planteamiento del ejercicio en clase:

La escena se plantea como un ejercicio de probabilidad compuesta. En la escena, el padre del protagonista le insta a romper las muñecas derechas de los niños que le habían acosado, debido a que es muy probable que todos ellos sean diestros.

Es muy importante recalcar que, aunque ser víctima de acoso es algo muy grave y deben tomarse acciones respecto a ello, la violencia nunca es la solución para los problemas y únicamente puede agravar más la situación.

Una posible solución:

4. *El padre del protagonista afirma que hay un 90% de probabilidades de que los 4 niños sean diestros. Aproximadamente un 87% de las personas son diestras, pero podemos redondear esto a un 90% sin muchos problemas. Aun así; ¿es cierta la afirmación de su padre?*

   Si únicamente se tratara de una persona, sí podríamos afirmar que esto es cierto. Sin embargo, al tratarse de 4 personas distintas, esto es un caso de probabilidad compuesta, en la que deberemos aplicar cada una de estas probabilidades una detrás de otra:

$$P_{4Diestros} = P_{1ºDiestro} \cdot P_{2ºDiestro} \cdot P_{3ºDiestro} \cdot P_{4ºDiestro} = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9$$
$$= 0{,}6561 = 65{,}61\% \neq 90\%$$

   Parece mentira la cantidad de errores matemáticos expresados en los diferentes medios de entretenimiento. Mostrar que estos errores son muy comunes y no se debe creer en algo aunque suene con mucha seguridad también puede dar lugar a un buen ejercicio.

5. *En una estantería de una biblioteca hay 4 novelas, 6 biografías y 2 guías de viaje. Tomando 2 libros al azar; ¿qué probabilidad hay de que sean de la misma temática?*

Habiendo un total de 12 $libros$ en esa estantería, podemos establecer tres posibles soluciones a lo que nos pide el enunciado. La primera de ellas (1) es tomar dos novelas, la segunda de ellas (2) es tomar dos biografías, mientras que la tercera de ellas (3) es tomar dos guías de viaje. Es importante recordar que, tras haber tomado el primer libro de la estantería, esta pasa a tener 11 $libros$ y por lo tanto la situación ha cambiado, además de que queda un libro menos de la temática escogida:

$$(1): P_{2\ Novelas} = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = 0{,}0833$$

$$(2): P_{2\ Biografías} = \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} = 0{,}2272$$

$$(3): P_{2\ Guías} = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = 0{,}0151$$

Como cualquiera de estos tres casos nos sirve para tomar dos libros de la misma temática, sumaremos estas probabilidades:

$$P_{2\ Temática} = P_{2\ Novelas} + P_{2\ Biografías} + P_{2\ Guías} = 0{,}3257$$

6. *Al lanzar dos dados de 6 caras a la vez, calcula la probabilidad de que multiplicando las caras ocultas se obtenga un múltiplo de 5.*

Las caras ocultas de los dados son aquellas que quedan por debajo; es decir, tocando la superficie sobre la que se tiren. Estos dados están numerados del 1 al 6 y, por lo tanto, el múltiplo de dos dados como mucho puede dar 36.

Vamos a ver cuántos múltiplos de 5 hay hasta el número 36:

$$M(5) = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35$$

Veamos también cómo obtener cada uno de los resultados:

$$P(obtener\ 5) = P_1(1) \cdot P_2(5) + P_1(5) \cdot P_2(1)$$

$$P(obtener\ 10) = P_1(2) \cdot P_2(5) + P_1(5) \cdot P_2(2)$$

$$P(obtener\ 15) = P_1(3) \cdot P_2(5) + P_1(5) \cdot P_2(3)$$

$$P(obtener\ 20) = P_1(4) \cdot P_2(5) + P_1(5) \cdot P_2(4)$$

$$P(obtener\ 25) = P_1(5) \cdot P_2(5)$$

$$P(obtener\ 30) = P_1(6) \cdot P_2(5) + P_1(5) \cdot P_2(6)$$

$$P(obtener\ 35) = no\ se\ puede\ obtener\ con\ estos\ dados = 0$$

Debido a que se trata de un dado de 6 $caras$, cada una de estas probabilidades de obtener una tirada individual se trata de $\frac{1}{6}$ y, por lo tanto, podemos calcularlas fácilmente. La probabilidad total será la suma de cada una de las probabilidades:

$$P(múltiplo\ de\ 5) =$$

$$= P(5) + P(10) + P(15) + P(20) + P(25) + P(30) + P(35)$$

$$= \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} + \frac{1}{18} + 0 = \frac{11}{36} = 0{,}305$$

Otra forma quizás más sencilla de calcular esta probabilidad es dándonos cuenta de que, para que obtengamos un múltiplo de 5, se debe obtener, al menos en uno de los dados, un múltiplo de 5 (o en los dos dados):

$$P(múltiplo\ de\ 5) = P(1\ cinco\ en\ 2\ dados) + P(2\ cincos\ en\ 2\ dados)$$

$$= [P(5) \cdot P(no\ 5) + P(no\ 5) \cdot P(5)] + [P(5) \cdot P(5)]$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36} = 0{,}305$$

-

ESCENA 13:

LOS VOLÚMENES DEL CUBO Y SUS HABITACIONES

-

PELÍCULA:

CUBE

-

ORIENTADO A:

4º DE LA ESO

-

CONTENIDOS TRATADOS:

ÁREAS Y VOLÚMENES DE FIGURAS TRIDIMENSIONALES

-

Cube

Los volúmenes del cubo y de sus habitaciones

1. Considerando que las dimensiones de cada cubo pequeño (cada habitación) son de $2{,}6\,metros$ en cada dirección, y que cada lado del cubo grande (el total de habitaciones) son 26 cubos pequeños, calcula el volumen total que ocupa el cubo de la película.

2. Teniendo en cuenta que todas las paredes de todos los cubos están construidas con una aleación de metales que cuesta $150\,euros\ \ cada\,metro^2$, calcula cuánto presupuesto es necesario para construir la superestructura.

3. Si quisiéramos construir un cubo de $148035{,}9\,metros^3$, ¿cuántos cubos pequeños (y de qué tamaños) habría en ese momento dentro? Pista: las dimensiones del cubo pequeño han de ser diez veces más pequeñas que el número de cubos en esa fila. Ejemplo: si el cubo pequeño tiene $3{,}6\,metros$ de largo, habrá $36\,cubos$ en esa fila.

Cube

Los volúmenes del cubo y de sus habitaciones

-material para el profesorado-

Planteamiento del ejercicio en clase:

Se plantea como un ejercicio de geometría en el que los alumnos habrían de calcular las dimensiones de varios objetos relacionados con el cubo de la película. En estos ejercicios, relacionarán las diferentes formas, y podrán realizar esquemas si es necesario para organizar su información. Habrán de diferenciar entre unas medidas y otras y siempre tener claro en todo momento qué es lo que quieren hacer:

Una posible solución:

1. *Considerando que las dimensiones de cada cubo pequeño (cada habitación) son de* $2{,}6\, metros$ *en cada dirección, y que cada lado del cubo grande (el total de habitaciones) son 26 cubos pequeños, calcula el volumen total que ocupa el cubo de la película.*
   El volumen de un cubo pequeño es de $V_{CP} = 2{,}6^3 = 17{,}576\, metros^3$ y en el cubo grande hay $26^3 = 17576\, habitaciones$, es sencillo obtener que el cubo grande tiene un total de $V_{CG} = 2{,}6^3 \cdot 26^3 = 308\,915{,}78\, metros^3$ (como referencia, una piscina olímpica tiene un volumen de 3 375 metros^3).

2. *Teniendo en cuenta que todas las paredes de todos los cubos están construidas con una aleación de metales que cuesta* $150\, euros\ cada\ metro^2$*, calcula cuánto presupuesto es necesario para construir la superestructura.*
   En este caso se trata de un problema de áreas. No basta con calcular el área del cubo mayor, ya que nos olvidaríamos de todas las áreas interiores de los cubos pequeños. Por ello tenemos que calcular el área de uno de esos cubos y luego multiplicar ese resultado por el número de cubos pequeños que hay (que no es igual al área del cubo grande). Para calcular el área de un cubo pequeño, calcularemos el área de una de sus caras, y luego lo multiplicaremos por el total de caras (6):

$$Á_{CP} = 6 \cdot (2{,}6 \cdot 2{,}6) = 40{,}56\, metros^2$$

$$Á_{Total} = 17576 \cdot 40{,}56 = 712\,882{,}56\, metros^2$$

$$Precio_{Total} = 712\,882{,}56\, metros^2 \cdot 150\, \frac{€}{metros^2} = 106\,932\,384\, €$$

Muy muy caro... Y eso sin contar las trampas mortales...

3. *Si quisiéramos construir un cubo de* $148\,035{,}9\, metros^3$*, ¿cuántos cubos pequeños (y de qué tamaños) habría en ese momento dentro? Pista: las dimensiones del cubo pequeño han de ser diez veces más pequeñas que el número de cubos en esa fila. Ejemplo: si el cubo pequeño tiene* $3{,}6\, metros$ *de largo, habrá* $36\, cubos$ *en esa fila.*

   Para realizar este ejercicio necesitaremos algo más de cabeza... Vamos a seguir el procedimiento contrario al primer apartado con un poco de cuidado. Tomando las dimensiones del cubo grande y realizando una raíz cúbica, obtendremos la longitud de cada una de las aristas de este cubo grande.

$$Longitud_{aristaG} = \sqrt[3]{148035{,}9} = 52{,}9\, metros$$

   Pero ahora llega el problema de que no conocemos qué cantidad de cubos pequeños ni de qué tamaño vamos a meter en este cubo grande. Sin embargo, la relación entre estos factores nos dará una pista. La longitud de esta arista del cubo grande se corresponde con la longitud de la arista del cubo pequeño multiplicado por el número de cubos pequeños. Como el número de cubos pequeños es diez veces esta longitud pequeña, tendremos ya esta medida despejada:

$$L_{aG} = 52{,}9 = L_{aP} \cdot N_{CP} = L_{aP} \cdot 10L_{aP} = 10L_{aP}^2;$$

$$L_{aP} = \sqrt{{}^{52{,}9}/_{10}} = 2{,}3\, metros$$

   Por lo tanto, las dimensiones de cada cubo pequeño en este nuevo cubo grande serán de $2{,}3x2{,}3x2{,}3\, metros$ y en total habrá $23\, cubos$ en cada dirección, haciendo un total de nada más y nada menos que: $12\,167\, cubos$.

-

ESCENA 14:

EL PROBLEMA DE LA HAMBURGUESA Y EL SOFÁ

-

PELÍCULA:

EL INDOMABLE WILL HUNTING

-

ORIENTADO A:

4º DE LA ESO

-

CONTENIDOS TRATADOS:

INTERÉS SIMPLE Y COMPUESTO

-

El indomable Will Hunting

El problema de la hamburguesa y el sofá

El sofá de la madre de Morgan, pagando 10 dólares al mes durante un año, costaría 120 dólares en total.

1. ¿Cuánto tendría que pagar en total si el sofá se encontraba bajo un 5% de interés mensual simple?

2. ¿Y en el caso de que fuera un interés compuesto del mismo tipo?

3. Si la madre de Morgan ha tenido que pagar un total de 260 dólares por el sofá tras estos 12 meses de interés simple: ¿A qué interés se encontraba el producto?

4. Disponiendo de un presupuesto de 500 dólares. ¿Cuánto es el máximo tiempo que se puede estar pagando el sofá con un interés compuesto del 2% mensual?

El indomable Will Hunting

El problema de la hamburguesa y el sofá

-material para el profesorado-

Planteamiento del ejercicio en clase:

Normalmente, cuando pagas algo a plazos, no sueles tener que pagar intereses, ya que el precio se ha ajustado a este pago fraccionado. Sin embargo, para tratar estos sencillos problemas de interés simple y compuesto, se ha planteado la escena utilizada en la película, "jugando" un poco con los datos propuestos y variándolos por el bien de las matemáticas.

Las expresiones referidas al interés simple y al compuesto se pueden expresar del siguiente modo:

$$I_S = C_i \cdot \frac{i}{100} \cdot t$$

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)^t$$

Una posible solución:

1. *¿Cuánto tendría que pagar en total si el sofá se encontraba bajo un 5% de interés mensual simple?*

   Bajo un 5% de interés mensual simple ($C_i = 120\ dólares;\ t = 12\ meses;\ i = 5$):

   $$I_S = 120 \cdot \frac{5}{100} \cdot 12 = 72$$

   Por ello, la madre de Morgan tendrá que pagar en total: $C_f = 120 + 72 = 192\ dólares$.

2. *¿Y en el caso de que fuera un interés compuesto del mismo tipo?*

   Bajo un 5% de interés mensual compuesto ($C_i = 120\ dólares;\ t = 12\ meses;\ i = 5$):

   $$C_f = 120 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{12} = 215{,}5\ dólares$$

   (Vemos que en este caso sería mucho mejor elegir un interés simple)

3. *Si la madre de Morgan ha tenido que pagar un total de 260 dólares por el sofá tras estos 12 meses de interés simple: ¿A qué interés se encontraba el producto?*

   En este caso se utilizará la misma expresión, pero en el enunciado nos presentarán otros datos distintos. ($C_i = 120\ dólares;\ t = 12\ meses;\ C_f = 260\ dólares$):

$$C_f = C_i + I_S; 260 = 120 + I_S; I_S = 140\ dólares$$

$$140 = 120 \cdot \frac{i}{100} \cdot 12; i = \frac{140 \cdot 100}{120 \cdot 12} = 9{,}72\%$$

4. *Disponiendo de un presupuesto de 500 dólares. ¿Cuánto es el máximo tiempo que se puede estar pagando el sofá con un interés compuesto del 2% mensual?*

   Como el presupuesto es de 500 dólares, la cantidad final a pagar no puede exceder este presupuesto (aquí surge la duda de por qué no lo pagaría todo de golpe, pero en este contexto ficticio lo ignoraremos). ($C_i = 120\ dólares;\ C_f = 500\ dólares; i = 2\%$):

$$500 = 120 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^t; \frac{500}{120} = \left(1 + \frac{2}{100}\right)^t;$$

$$\ln\frac{500}{120} = t \cdot \ln\left(1 + \frac{2}{100}\right); t = \frac{\ln\frac{500}{120}}{\ln\left(1 + \frac{2}{100}\right)} = 72.07\ meses \approx 6\ años$$

-

ESCENA 15:

EL BINOMIO DE NEWTON Y LOS NÚMEROS COMBINATORIOS

-

PELÍCULA:

THE IMITATION GAME (DESCIFRANDO ENIGMA)

-

ORIENTADO A:

4º DE LA ESO

-

CONTENIDOS TRATADOS:

NÚMEROS COMBINATORIOS

-

The Imitation Game (Descifrando Enigma)

El binomio de Newton y los Números Combinatorios

Teorema:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$
$$= \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 y^n;$$

1. Ya hemos comprobado que el teorema se cumple para el caso en el que $n = 2$ que ya conocemos. Comprueba que también funciona para los casos más aparentemente sencillos $n = 0; n = 1$. ¿Tiene sentido lo que has obtenido?

2. Comprueba que el binomio de Newton se cumple para el caso $n = 3$ al compararlo con la forma tradicional (operando las multiplicaciones).

3. Opera los siguientes ejemplos con el binomio de Newton:
    a. $(x-3)^6$

    b. $(2-3y)^4$

4. En la expresión $(x+y)^n$: ¿Qué número acompaña a y^{24} cuando $n = 33$?

The Imitation Game (Descifrando Enigma)

El binomio de Newton y los Números Combinatorios

-material para el profesorado-

Planteamiento del ejercicio en clase:

Se plantea este ejercicio para extender la aplicación de los números combinatorios dentro de las expresiones que los alumnos ya conocen con respecto a los productos notables.

Es necesaria la introducción de la notación utilizada con un ejemplo de la aplicación del binomio de Newton para el caso más básico $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ de modo que los estudiantes comprendan la forma de aplicar este teorema.

Una posible solución:

Teorema:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$
$$= \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 y^n;$$

1. *Ya hemos comprobado que el teorema se cumple para el caso en el que $n = 2$ que ya conocemos. Comprueba que también funciona para los casos más aparentemente sencillos $n = 0; n = 1$. ¿Tiene sentido lo que has obtenido?*

   Es tan sencillo como introducir el valor $n = 0$ en el teorema. Como el primer término es $\binom{n}{0}$ y el último es $\binom{n}{n}$, concluiremos con que nuestra solución únicamente tiene un término, que será: $(x+y)^0 = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

   Para el caso en el que tenemos $n = 1$, veremos que en este caso únicamente tendremos dos términos (los dos primeros), por lo que nuestra operación quedará del siguiente modo: $(x+y)^1 = \binom{1}{0} x^1 y^0 + \binom{1}{1} x^0 y^1 = x + y$.

   Ambas de estas soluciones tienen sentido (es lo lógico, debe funcionar para todos los casos, aunque sean muy triviales).

2. *Comprueba que el binomio de Newton se cumple para el caso $n = 3$ al compararlo con la forma tradicional (operando las multiplicaciones).*

   Resolviendo $(x + y)^3$ de ambas formas deberemos obtener el mismo resultado, así mostrando su eficacia al poder resolver las mayores expresiones.

   Método 1:

$$\begin{aligned}(x + y)^3 = (x + y)(x + y)(x + y) &= (x^2 + xy + yx + y^2)(x + y) \\ &= x^3 + x^2y + x^2y + xy^2 + yx^2 + y^2x + y^2x + y^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\end{aligned}$$

   Método 2:

$$\begin{aligned}(x + y)^3 &= \binom{3}{0} x^3y^0 + \binom{3}{1} x^2y^1 + \binom{3}{2} x^1y^2 + \binom{3}{3} x^0y^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\end{aligned}$$

   De este modo, comprobamos que funciona el método (y encima nos ahorra mucho trabajo).

3. *Opera los siguientes ejemplos con el binomio de Newton:*

   a. $(x - 3)^6 =$

$$\begin{aligned}&\binom{6}{0} x^6 \cdot (-3)^0 + \binom{6}{1} x^5 \cdot (-3)^1 + \binom{6}{2} x^4 \cdot (-3)^2 + \binom{6}{3} x^3 \cdot (-3)^3 \\ &+ \binom{6}{4} x^2 \cdot (-3)^4 + \binom{6}{5} x^1 \cdot (-3)^5 + \binom{6}{6} x^0 \cdot (-3)^6 \\ &= x^6 - 18x^5 + 135x^4 - 540x^3 + 1215x^2 - 1458x^1 \\ &+ 729\end{aligned}$$

   b. $(2 - 3y)^4 =$

$$\begin{aligned}&\binom{4}{0} 2^4 \cdot (-3y)^0 + \binom{4}{1} 2^3 \cdot (-3y)^1 + \binom{4}{2} 2^2 \cdot (-3y)^2 + \binom{4}{3} 2^1 \\ &\cdot (-3y)^3 + \binom{4}{4} 2^0 \cdot (-3y)^4 \\ &= 16 - 96y + 216y^2 - 216y^3 + 81y^4\end{aligned}$$

4. *En la expresión $(x + y)^n$: ¿Qué número acompaña a y^{24} cuando $n = 33$?*

   Como únicamente nos piden el término numérico que acompaña a y^{24} en el caso de que $n = 33$, sólo buscaremos ese dentro del binomio:

$$(x + y)^{33} = \binom{33}{24} x^{33-24}y^{24} = 38\,567\,100 \cdot x^9y^{24}$$

   Esto es por lo que ese término que buscamos es el $38\,567\,100$ (sólo imagina hacer estas operaciones multiplicando a mano).

-

ESCENA 16:

EL PROBLEMA DE MONTY HALL

-

PELÍCULA:

21: BLACKJACK

-

ORIENTADO A:

4º DE LA ESO

-

CONTENIDOS TRATADOS:

DIAGRAMAS DE ÁRBOL. REGLA DE LAPLACE

-

21: Blackjack

El problema de Monty Hall

En un concurso de televisión se encuentran tres puertas. Tras dos de ellas no hay ningún premio, pero tras la última hay un coche.

El presentador conoce dónde está el coche y te deja elegir una puerta. Elijas la que elijas, el presentador abrirá una de las puertas sin premio (no la que hayas elegido tú) para enseñarte que no hay nada.

En ese momento, el presentador te deja cambiar tu elección de puerta a la otras que hay sin abrir: ¿Qué haces?

1. Trata de resolver el problema matemáticamente. ¿Vale la pena cambiar de puerta o es mejor quedarte con la que hay? ¿Por qué?

2. ¿Qué probabilidad de ganar el coche hay si cambiamos de puerta? ¿Y si no lo hacemos?

3. Vamos a cambiar el problema para ver si queda más claro. Ahora hay 50 puertas en lugar de sólo 3. Eliges una puerta cualquiera y el presentador elimina 48 de las puertas restantes sin premio.
   Por tanto, queda una puerta con premio y una puerta sin él. ¿Cambias ahora de puerta? ¿Han aumentado tus posibilidades de ganar en este caso respecto al anterior o se han reducido?

21: Blackjack
El problema de Monty Hall
-material para el profesorado-

Planteamiento del ejercicio en clase:

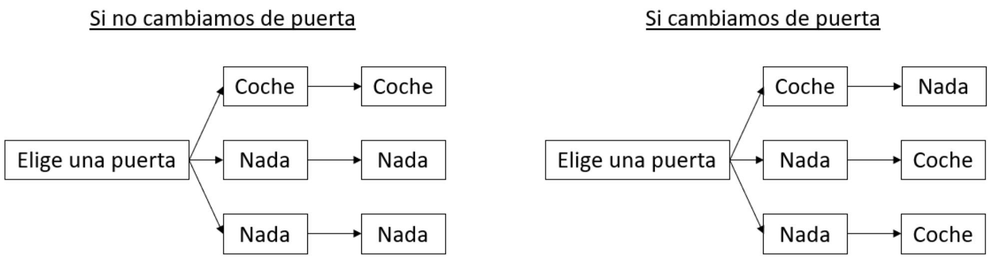
En un concurso de televisión se encuentran tres puertas. Tras dos de ellas no hay ningún premio, pero tras la última hay un coche. El presentador conoce dónde está el coche y te deja elegir una puerta. Elijas la que elijas, el presentador abrirá una de las puertas sin premio (no la que hayas elegido tú) para enseñarte que no hay nada. En ese momento, el presentador te deja cambiar tu elección de puerta a la otras que hay sin abrir: ¿Qué haces?

Se trata de un famoso problema que a simple vista parece no tener sentido matemático. ¿Cómo es posible que las probabilidades hayan cambiado tras abrir una puerta si debieran seguir siendo las mismas? Mucha gente decide no cambiar de puerta porque se pueden pensar que el presentador del programa les está estafando y deciden confiar en su elección anterior.

Una posible solución:

Para poder resolver este ejercicio, se pueden utilizar varios tipos de explicaciones posibles. La primera de ellas es la encontrada en la película. Una explicación muy útil es la realización de este propio concurso en el aula, al no requerir de una gran preparación (pueden "construirse" las puertas con tres papeles en los que está escrito su contenido). Existen diferentes simulaciones en la web las cuales pueden mostrarse para ilustrar esta solución: https://www.estadisticaparatodos.es/taller/montyhall/montyhall.html.

Por último, se pueden utilizar diagramas de árbol para poder resolver este problema, y es una opción muy importante para ilustrar el problema con lenguaje matemático. La clave para la resolución de este problema es que el presentador sí que sabe dónde está el coche, por lo que nos quita deliberadamente una puerta en la que no hay nada y siempre deja el coche dentro de las opciones nuevas a elegir:



1. *Trata de resolver el problema matemáticamente. ¿Vale la pena cambiar de puerta o es mejor quedarte con la que hay? ¿Por qué?*
   Como ya se ha visto de varias maneras, vale mucho más la pena cambiar la puerta que hemos elegido la primera vez, debido a que han cambiado las condiciones del problema (han quitado arbitrariamente una de las opciones).

2. *¿Qué probabilidad de ganar el coche hay si cambiamos de puerta? ¿Y si no lo hacemos?*
   Si cambiamos de puerta, hay un 66,6% de probabilidades de conseguir el coche en este caso, Por otro lado, habrá un 33,3% de probabilidades de conseguirlo en el caso de no cambiar de puerta.

3. *Vamos a cambiar el problema para ver si queda más claro. Ahora hay 50 puertas en lugar de sólo 3. Eliges una puerta cualquiera y el presentador elimina 48 de las puertas restantes sin premio.*
   Por tanto, queda una puerta con premio y una puerta sin él. ¿Cambias ahora de puerta? ¿Han aumentado tus posibilidades de ganar en este caso respecto al anterior?
   Este problema es mucho más visual que el anterior, pero sigue exactamente el mismo principio. Cuando tú eliges una puerta entre las 50, lo más probable es que el coche se encuentre entre las otras 49. Por ello, cuando el presentador elimina 48 de ellas, sigue siendo mucho más probable que se encuentre ahí, porque el presentador las ha eliminado deliberadamente conociendo en cuál es la que se encuentra el coche. Por lo tanto, sí que hay que cambiar de puerta ahora, y habrán aumentado (mucho) nuestras posibilidades de ganar respecto al caso anterior (en este caso, al cambiar de puerta, la posibilidad de ganar sería $49/50 = 98\%$).