



# **DESARROLLO DE LA INTELIGENCIA ESPACIAL Y LA ABSTRACCIÓN DE LAS GRANDES DIMENSIONES**

**Trabajo Fin de Máster**

**Máster Universitario en Formación del Profesorado**

**Presentado por:**

**VÍCTOR GÓMEZ VILLANUEVA**

**Dirigido por:**

**Dr. ALBERTO LASTRA SEDANO**

**Alcalá de Henares, a 17 de junio de 2020**

# Índice

---

1.	Introducción	1
1.1.	Justificación	1
1.2.	Objetivos	1
2.	Fundamentación teórica	3
2.1.	Teoría del desarrollo cognitivo	3
2.2.	Teoría de las inteligencias múltiples	4
2.3.	Principio de multilateralidad	5
2.4.	Neuroeducación	5
2.5.	Uso de herramientas digitales	5
2.6.	Adecuación al marco legislativo	6
2.6.1.	Competencias clave	6
2.6.2.	Contenidos del currículo	7
3.	Evaluación inicial	9
4.	Diseño de actividades	10
4.1.	La longitud, la superficie y el volumen	12
4.2.	La escala	19
4.3.	Las coordenadas geográficas y los husos horarios	24
4.4.	La deformación del mapa tradicional	28
4.5.	Las dimensiones de la Tierra	33
4.6.	Las dimensiones del sistema solar	38
5.	Puesta en práctica y resultados	43
5.1.	La longitud, la superficie y el volumen	43
5.2.	La escala	44
5.3.	Las coordenadas geográficas y los husos horarios	44
5.4.	La deformación del mapa tradicional	45
5.5.	Las dimensiones de la Tierra	46
5.6.	Las dimensiones del sistema solar	46
5.7.	Evaluación	47
6.	Conclusiones	48
6.1.	Diversidad	48
6.2.	Motivación	48
6.3.	Puntos de mejora	49
6.4.	Propuestas de continuación	49



## 1. Introducción

Este Trabajo Fin de Máster está enmarcado en el Máster en Formación al Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, en la especialidad de Matemáticas del curso 2019/2020.

### 1.1. Justificación

Históricamente, el docente ha sido la fuente de información más fiable que tenían los adolescentes y en la escuela aprendían y memorizaban todo tipo de datos y algoritmos. Este sistema era muy eficaz durante la época industrial y formaba a las personas para encajar a la perfección en cadenas de montaje efectuando los algoritmos necesarios sin cuestionarse qué había más allá.

Actualmente, vivimos en la era de la información debido al acceso instantáneo a internet. Si nuestros alumnos quieren saber un dato, lo pueden buscar utilizando sus terminales con acceso a la red sin necesidad de preguntar al docente y con mayor rapidez. Sin embargo, la red provee a las personas una cantidad desorbitada de información que en muchos casos no es veraz. Es por ello que el docente del siglo XXI debe transformarse y pasar de ser la fuente de información a ser el guía de su alumnado para enseñarles a razonar y discernir ante el nuevo mundo.

Corrientes de pensamiento como el terraplanismo han surgido debido a esta masiva cantidad de información en un mundo educado para ejecutar algoritmos sin cuestionarse el significado de los mismos. A través de este trabajo se intentará ayudar a que los alumnos comprendan las magnitudes de distancia, superficie y volumen en primera instancia. A continuación, se enseñará la abstracción de dichas magnitudes para posteriormente extrapolarlas a las grandes dimensiones de nuestro planeta y de nuestro sistema solar. Una combinación de matemáticas, geografía, geología y astronomía que se aprenderá de manera significativa gracias a la relación de las matemáticas con el mundo real y a la construcción escalonada de estructuras cognitivas en el sistema nervioso de acuerdo a los últimos estudios en neurociencia.

### 1.2. Objetivos

El objetivo principal es que los alumnos entiendan las proporciones reales en distancias, superficies y volúmenes y las relacionen con el mundo en el que vivimos. Normalmente es difícil que nos imaginemos conceptos inmensamente grandes, como la densidad de la masa que genera un agujero negro, que si doblamos un folio 54 veces su anchura cubre la distancia de la Tierra a la Luna. Esto ocurre especialmente en personas de edades tempranas. Además, será un proyecto transversal ya que se trabajarán conocimientos de Biología, Geología y Geografía a través de las matemáticas.

Los objetivos específicos de este proyecto son los siguientes:

- Entender las magnitudes espaciales y las relaciones entre todas ellas:
  - Longitud.
  - Superficie.
  - Volumen.
- Desarrollar la abstracción espacial y las operaciones formales:

- Escalas.
- El mapa: representación bidimensional.
- El globo terráqueo: representación tridimensional.
- Herramientas TIC: representación digital.
- Realizar estimaciones espaciales de gran escala.
- Utilizar el desarrollo espacial de manera razonada en problemas y debates.

Tras analizar los contenidos que se van a tratar en el apartado 2.6.2, el curso preferente elegido para implementar la actividad será 3º de la ESO. No obstante, se podría aplicar en otros cursos cercanos. Además, con 14 años el desarrollo cognitivo de los alumnos ya es suficiente para potenciar sus estructuras cerebrales y mejorar sus inteligencias lógica y espacial de acuerdo con la teoría de Piaget (apartado 2.1).

## 2. Fundamentación teórica

En este apartado se describe tanto la teoría del desarrollo cognitivo como la teoría de las inteligencias múltiples con el fin de entender el grado de desarrollo biológico de los procesos de aprendizaje en los adolescentes. Además, se tienen en cuenta las metodologías docentes más efectivas que se barajan en la educación actual combinando conceptos de neuroeducación y herramientas digitales. Por último, se estudiará el modo de encajar estas actividades innovadoras en los centros educativos españoles actuales de acuerdo a la ley vigente (Ministerio de educación, cultura y deporte, 2013).

### 2.1. Teoría del desarrollo cognitivo

Jean Piaget dedicó gran parte de su vida a estudiar las diferentes etapas del desarrollo cognitivo de los seres humanos (Piaget, 1975). Las conclusiones de sus estudios clasificaban en cuatro estadios generales el grado de desarrollo dependiendo de la edad de los sujetos:

- 1) Etapa sensorio-motriz (hasta los 2 años).
- 2) Etapa pre-operacional (desde los 2 años hasta los 7 años).
- 3) Etapa de las operaciones concretas (desde los 8 hasta los 11 años).
- 4) Etapa de las operaciones formales (a partir de los 12 años). En este estadio se desarrolla la capacidad de utilizar la lógica para generar conclusiones abstractas.

Piaget incide en la necesidad de crear estructuras cognitivas con diversas formas de información que llegando al cerebro formen un mayor grado de conocimiento. Cabe destacar que una única fuente de información sin contrastar es difícil que se asimile por adolescentes por muchas veces que se repita.

En particular, para este trabajo es interesante el desarrollo de la inteligencia espacial, que además fue profundamente estudiada dentro del marco del desarrollo cognitivo por el mismo autor (Piaget & Inhelder, 1947). Para la etapa de las operaciones formales, los adolescentes serían capaces de crear un universo espacial abstracto con relaciones espaciales en su imaginación y de asimilar conceptos como el infinito según los autores.

Adicionalmente, estudió el desarrollo cognitivo de la geometría euclidiana en los seres humanos (Piaget, Inhelder & Szeminska, 1948). La base de la teoría de Piaget y este estudio particular son una excelente fuente de información relevante a la hora de diseñar las actividades de este proyecto puesto que se describe la capacidad de conservación y medición de longitudes, superficies y volúmenes en adolescentes.

Las dos grandes hipótesis propuestas en dicho trabajo sobre la concepción del espacio y corroboradas mediante diversos experimentos son las siguientes (Camargo Uribe, 2011):

- Los adolescentes desarrollan su capacidad de formar representaciones espaciales y de realizar operaciones espaciales progresivamente. Este desarrollo se construye mediante la combinación de experiencias mentales y motoras.
- El proceso de desarrollo de la inteligencia espacial sigue un orden definido:
  - o En primer lugar se desarrollan las relaciones espaciales topológicas. Estas relaciones tienen en cuenta las posiciones relativas de los objetos geométricos y sus propiedades en un espacio acotado.

- En segundo lugar se desarrollan las relaciones espaciales proyectivas. Estas relaciones tienen en cuenta el punto de vista del observador, que puede variar.
- En tercer lugar se desarrollan las relaciones espaciales euclidianas. Estas relaciones tienen en cuenta un sistema de referencia (por ejemplo, un eje de coordenadas).

De acuerdo a las etapas de desarrollo, los alumnos de los institutos (de 12 a 18 años) habrían alcanzado ya el estadio 4 y serían biológicamente capaces de formar pensamientos abstractos y, en particular, imaginar representaciones espaciales que les ayuden a comprender la realidad. Estarían perfectamente capacitados para comprender y establecer modelos mentales de distancias, direcciones y relaciones espaciales entre objetos, así como de recordar rutas, de utilizar mapas adecuadamente o de comunicar información espacial.

No obstante, el desarrollo de la inteligencia espacial no se basa en la percepción visual, sino en la combinación de la actividad sensorio-motriz y una capacidad representativa (normalmente abstracta). Por lo tanto, es beneficiosa la implementación de actividades manipulativas para agilizar el desarrollo de la inteligencia espacial. Adicionalmente, se tratará de abstraer los conceptos espaciales comprendidos y de potenciar al máximo el desarrollo de los mismos utilizando herramientas digitales propias de la última década.

## 2.2. Teoría de las inteligencias múltiples

Históricamente, la inteligencia se había medido como la capacidad de entender relaciones abstractas, pero en 1983 Howard Gardner diseñó la teoría de las inteligencias múltiples (Gardner, 1983). Esa capacidad quedó recogida como una de las ocho inteligencias dentro de la teoría de este autor, listándolas de este modo:

- Inteligencia lógico-matemática.
- Inteligencia lingüística.
- Inteligencia espacial.
- Inteligencia corporal-quinestésica.
- Inteligencia musical.
- Inteligencia intrapersonal.
- Inteligencia interpersonal.
- Inteligencia naturalista.

Para conseguir los objetivos propuestos en el apartado 1.2 debemos desarrollar tanto la inteligencia espacial como la inteligencia lógico-matemática. La inteligencia espacial consiste en la percepción del mundo y la creación de imágenes mentales. En cambio, la inteligencia lógico-matemática tiene en cuenta el razonamiento complejo, la relación causa-efecto, la abstracción y la resolución de problemas.

Es interesante conocer esta teoría puesto que podemos encontrarnos con alumnos que perciban muy bien el mundo y creen imágenes mentales tridimensionales complejas pero no resuelvan el problema debido a un fallo en la secuencia lógica o viceversa. Un problema que se repite en la docencia es clasificar al alumnado como los que tienen buen desempeño, desempeño medio o mal desempeño, sin valorar las diferentes capacidades que cada uno de ellos ha podido desarrollar.

De hecho, se puede observar una clara correlación entre la teoría de Gardner y las competencias clave a desarrollar descritas en el apartado 2.6.1.

### 2.3. Principio de multilateralidad

La primera vez que escuché el principio de multilateralidad (Tellez, 2013) (Úbeda, 2014) fue en el ámbito deportivo y decía que la práctica de diversos deportes contribuía al óptimo desarrollo y a mejorar el desempeño en un deporte específico. Un deporte en el que se requiera un gran desarrollo de la coordinación muscular contribuirá a realizar movimientos más precisos en el resto. Por un lado tiene relación con la teoría de Piaget de obtener información a través de diferentes canales sensitivos y por otro lado con la teoría de las inteligencias múltiples de Gardner puesto que la mejora de una de ellas puede contribuir en la mejora de otra.

### 2.4. Neuroeducación

Tras analizar la base que constituyen los trabajos de Piaget y Gardner, merece la pena estudiar los avances en neuroeducación que han tenido lugar hasta el momento actual. Uno de los trabajos más reconocidos en este campo es el de Francisco Mora (Mora, 2013).

La principal conclusión del estudio de nuestro sistema nervioso en el aprendizaje ha destacado que los seres humanos somos capaces de memorizar y aprender mucho mejor desde un enfoque emocional. Consecuentemente, la activación de dichas emociones en los procesos de aprendizaje provocará una mejor asimilación de conceptos.

De acuerdo con la teoría de Piaget, la neurociencia defiende la construcción de estructuras mentales mediante la percepción de información que provenga a través de diferentes canales sensitivos. En el mundo físico se mide en el número de conexiones neuronales existentes en el cerebro y en la cantidad de mielina en los canales sinápticos de estas estructuras. Por lo tanto, no solo los experimentos empíricos sino que también la neurociencia se muestran a favor de la combinación de actividades manipulativas y actividades abstractas (como el uso del lenguaje matemático o de herramientas informáticas).

En la práctica, los docentes debemos captar la atención del alumnado, disparar su curiosidad, realizar actividades divertidas, promover el aprendizaje social (en grupo), relacionar los contenidos con el mundo real y, por encima de todo, emocionar a nuestros alumnos.

### 2.5. Uso de herramientas digitales

El uso de las nuevas tecnologías en el aula puede potenciar la comprensión del alumnado de una manera muy eficiente puesto que, tras haber interiorizado los conceptos básicos, son capaces de mostrar infinidad de casos prácticos en mucho menos tiempo. Esta velocidad de computación puede reforzar las estructuras cognitivas del alumnado debido a la rápida visualización de diferentes opciones e incluso puede motivarles a buscar los casos particulares donde varía el comportamiento típico en las diferentes actividades (aunque esto se puede proponer por parte del docente).

Para la puesta en práctica de las diferentes actividades descritas en el apartado 4 se van a utilizar las siguientes herramientas TIC:

- GeoGebra.
  - Graficadora 3D.
- Aplicación web de Google Maps.
- Aplicación web de FlightRadar24.
- Aplicación web Time Zone Map.
- NASA's Eyes.
  - Eyes on the Solar System.

Por último, uno de los contenidos del currículo dentro del bloque de geometría de 3º de la ESO de matemáticas académicas es el uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas (apartado 2.6.2). Además, utilizándolas se desarrolla directamente la competencia digital (apartado 2.6.1).

## 2.6. Adecuación al marco legislativo

Para justificar la realización de estas actividades dentro del marco educativo español actual no solo basta con demostrar una sólida fundamentación teórica basada en experimentos de calidad, sino que también es necesario ajustarse a las competencias claves y los contenidos recogidos en la ley educativa vigente (Ministerio de educación, cultura y deporte, 2013).

### 2.6.1. Competencias clave

De acuerdo con la ley educativa vigente (Ministerio de educación, cultura y deporte, 2015), se considera esencial el desarrollo de las competencias clave y se define en qué consisten cada una de ellas. Partiendo del conjunto de ellas:

- Comunicación lingüística.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- Competencia digital.
- Aprender a aprender.
- Competencias sociales y cívicas.
- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
- Conciencia y expresiones culturales.

Merece la pena parafrasear parte de la descripción de la segunda competencia en dicha orden:

“Se trata, por tanto, de reconocer el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo y utilizar los conceptos, procedimientos y herramientas para aplicarlos en la resolución de los problemas que puedan surgir en una situación determinada a lo largo de la vida.”

Adicionalmente, recoge cuatro áreas de desarrollo relativas a las matemáticas:

- “La cantidad: esta noción incorpora la cuantificación de los atributos de los objetos, las relaciones, las situaciones y las entidades del mundo, interpretando distintas representaciones de todas ellas y juzgando interpretaciones y argumentos. Participar en la cuantificación del mundo supone comprender las mediciones, los cálculos, las magnitudes, las unidades, los indicadores, el tamaño relativo y las tendencias y patrones numéricos.”
- “El espacio y la forma: incluyen una amplia gama de fenómenos que se encuentran en nuestro mundo visual y físico: patrones, propiedades de los objetos, posiciones, direcciones y representaciones de ellos; descodificación y codificación de información

visual, así como navegación e interacción dinámica con formas reales, o con representaciones. La competencia matemática en este sentido incluye una serie de actividades como la comprensión de la perspectiva, la elaboración y lectura de mapas, la transformación de las formas con y sin tecnología, la interpretación de vistas de escenas tridimensionales desde distintas perspectivas y la construcción de representaciones de formas.”

- “El cambio y las relaciones: el mundo despliega multitud de relaciones temporales y permanentes entre los objetos y las circunstancias, donde los cambios se producen dentro de sistemas de objetos interrelacionados. Tener más conocimientos sobre el cambio y las relaciones supone comprender los tipos fundamentales de cambio y cuándo tienen lugar, con el fin de utilizar modelos matemáticos adecuados para describirlo y predecirlo.”
- “La incertidumbre y los datos: son un fenómeno central del análisis matemático presente en distintos momentos del proceso de resolución de problemas en el que resulta clave la presentación e interpretación de datos. Esta categoría incluye el reconocimiento del lugar de la variación en los procesos, la posesión de un sentido de cuantificación de esa variación, la admisión de incertidumbre y error en las mediciones y los conocimientos sobre el azar. Asimismo, comprende la elaboración, interpretación y valoración de las conclusiones extraídas en situaciones donde la incertidumbre y los datos son fundamentales.”

Tras la descripción de la competencia clave matemática y de sus cuatro áreas es notorio que se trata del objetivo central de las actividades de este trabajo, desarrollándose todas y cada una de estas áreas en profundidad.

Adicionalmente, se desarrollarán otras de las competencias clave (especialmente la competencia digital).

### 2.6.2. Contenidos del currículo

El objetivo principal del trabajo es el desarrollo transversal de la competencia matemática a través de la comprensión formal de mapas, del globo terráqueo y de distancias, superficies o volúmenes de gran magnitud. Basado en ello y tras analizar los contenidos del currículo, las actividades encajarían en el bloque de geometría de 3º de la ESO de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de acuerdo a la ley vigente (Ministerio de educación, cultura y deporte, 2014):

Tabla 1: Contenidos de geometría de 3º ESO de matemáticas académicas

Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 3º ESO
Bloque 3. Geometría
Contenidos

Geometría del plano. Lugar geométrico. Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas. Traslaciones, giros y simetrías en el plano. Geometría del espacio. Planos de simetría en los poliedros. La esfera. Intersecciones de planos y esferas. El globo terráqueo. Coordenadas geográficas y husos horarios. Longitud y latitud de un punto. Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Sería posible también explicar parte de los contenidos del mismo bloque de 3º de la ESO de matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas, pero sin evaluar los contenidos que no apliquen a esta asignatura.

**Tabla 2: Contenidos de geometría de 3º ESO de matemáticas aplicadas**

Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. 3º ESO
Bloque 3. Geometría
Contenidos
Mediatriz, bisectriz, ángulos y sus relaciones, perímetro y área. Propiedades. Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas. Traslaciones, giros y simetrías en el plano. Geometría del espacio: áreas y volúmenes. El globo terráqueo. Coordenadas geográficas. Longitud y latitud de un punto.

No obstante, la gran relación entre los contenidos de la asignatura de matemáticas permite el desarrollo de las actividades de otros bloques o incluso de otros cursos. Esto está especialmente justificado por el desarrollo cognitivo de las estructuras mentales definido por Piaget (descrito en el apartado 2.1) y porque para la resolución de problemas no se deben saber de antemano las herramientas matemáticas que se deben de usar.

### 3. Evaluación inicial

Para comprobar que existen dificultades para que los alumnos comprendan las dimensiones de nuestro planeta se había pensado elaborar una encuesta en Google Docs. Ninguna hipótesis se ha de dar como correcta sin comprobarla y a través de esta encuesta se esperaba comprobar que dicha hipótesis es correcta y obtener información sobre el grado y el porcentaje de error de los alumnos.

Se esperaba implementar alguna de las actividades en una clase de 3º de la ESO de un instituto durante una sesión. Al evaluar los conocimientos iniciales de los alumnos a los que impartir la sesión se podía haber elegido la actividad que más se adecuase a su nivel.

Sin embargo, por culpa de la situación de aislamiento actual y la cancelación de clases presenciales en los institutos no ha sido posible la implementación práctica de ninguna actividad en un espectro amplio de alumnos. Sin embargo, se ha llevado a cabo de manera anecdótica y para comprobar la puesta en práctica de todas las actividades con una adolescente voluntaria.

Esta evaluación inicial para la selección de la actividad carecía de sentido y no ha sido elaborada, invirtiendo gracias a ello más tiempo en el estudio teórico y su correlación con el diseño de las actividades.

## 4. Diseño de actividades

Acorde a la fundamentación teórica, se van a proponer actividades complementarias que desarrollen las inteligencias espacial y lógica del alumnado. Por lo tanto, debe haber actividades manipulativas, actividades de abstracción y actividades abstractas. En paralelo, se tienen que tener en cuenta actividades que desarrollen secuencialmente las relaciones espaciales topológicas, proyectivas y euclidianas. Con el propósito de que el aprendizaje sea significativo, se generará curiosidad en los alumnos para que presten toda su atención y activen sus emociones durante las actividades. Por último, los contenidos trabajados en las actividades serán los descritos en el apartado 2.6.2.

La estructura está dividida en seis apartados y cada uno de ellos corresponde a una sesión de 50 minutos o 1 hora. De este modo, en seis clases se podrán implementar todas las actividades propuestas.

La forma de trabajar las actividades será en grupos de 2 o 4 alumnos, en función de las posibilidades de la clase, el material disponible y el número de alumnos. Al trabajar en equipo también suele aumentar la motivación y se pueden apoyar entre ellos.

Para alcanzar la asimilación de las grandes dimensiones del sistema solar, se ha establecido un acercamiento progresivo. Por lo tanto, es necesario mantener el orden de las actividades como se expone en este trabajo. De manera resumida y como objetivos fundamentales, se espera que en cada sesión se aprendan de manera significativa los siguientes conceptos:

1. Los sistemas de medida de longitud, superficie y volumen.
2. La escala.
3. Las medidas de ubicación del globo terráqueo.
4. La deformación del mapa bidimensional.
5. Las dimensiones de la Tierra.
6. Las dimensiones del sistema solar.

La estructura de cada una de las actividades consta de una breve introducción, los objetivos de la misma, los ejercicios a realizar, los contenidos del currículo trabajados y el material necesario. A continuación se detalla el resumen del material necesario (Tabla 3) y de los contenidos trabajados (Tabla 4) en las diferentes actividades:

**Tabla 3: Resumen del material necesario por actividad**

Número de actividad	1	2	3	4	5	6
Aplicación NASA's eyes on the Solar System						
Aplicación web Google Maps						
Aplicación web Flight Radar 24						
Aplicación web Time Zone Map						
Bolígrafo o lapicero						
Calculadora						
Celo						
Globo terráqueo						
Graficadora 3D de GeoGebra						
Hilo o metro flexible						
Mapas a escala impresos						
Motor de búsqueda de Google						

Ordenador con acceso a internet						
Pajitas						
Papel						

Tabla 4: Resumen de los contenidos trabajados por actividad

Número de actividad	1	2	3	4	5	6
Geometría del plano						
Lugar geométrico						
Teorema de Tales						
División de un segmento en partes proporcionales						
Aplicación a la resolución de problemas						
Traslaciones, giros y simetrías en el plano						
Geometría en el espacio						
Planos de simetría en los poliedros						
La esfera						
Intersecciones de planos y esferas						
El globo terráqueo						
Coordenadas geográficas y husos horarios						
Longitud y latitud de un punto						
Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas						

## 4.1. La longitud, la superficie y el volumen

La mayoría de las actividades propuestas sobre la medida de distancias, superficies y volúmenes en el sistema internacional que podemos encontrar en internet son ejercicios analíticos. Sin embargo, para un completo y eficaz desarrollo de la inteligencia espacial es mejor plantear un proceso de abstracción. Por lo tanto, esta actividad constará de un ejercicio manipulativo, un proceso de abstracción y un ejercicio abstracto como se ha fundamentado en el apartado 2. Consecuentemente, se tendrá también en cuenta el orden de comprensión espacial lógico: primero se verán las relaciones espaciales topológicas, luego las proyectivas y finalmente las euclidianas.

### Objetivos

- Desarrollar la inteligencia espacial de acuerdo a los principios de la teoría de Piaget y la neurociencia actual.
- Comprender e interiorizar los sistemas métricos y la relación de las medidas de longitud, superficie y volumen.

### Ejercicio manipulativo

La actividad debería resultar atractiva para los alumnos puesto que se va a realizar un ejercicio manipulativo en grupos que implica movimiento e interacción al que no están acostumbrados.

Utilizando pajitas de un decímetro de longitud se construirán figuras como en la Imagen 1.



Imagen 1: Cubo con pajitas (LA PAPELERA DE SHON, 2018)

Se deberán construir una línea de un decímetro, un cuadrado de un decímetro cuadrado y un cubo de un decímetro cúbico. Si fuese necesario, se les ayudará a los alumnos a construirlo para que todos puedan comenzar el ejercicio con una base correcta.

Posteriormente se les pedirá hacer una línea de dos decímetros, una superficie de dos decímetros cuadrados y un volumen de dos decímetros cúbicos. Se espera que esta actividad genere un debate sobre cuáles son las construcciones correctas.

Finalmente se construirá una línea de un metro, un cuadrado de un metro cuadrado y un cubo de un metro cúbico.

Se preguntará cuántas pajitas de un decímetro forman la línea de un metro, cuántos cuadrados de un decímetro cuadrado componen un metro cuadrado y cuántos cubos de un decímetro cúbico componen un metro cúbico. De este modo deducirán como convertir medidas de metros a decímetros, de metros cuadrados a decímetros cuadrados y de metros cúbicos a decímetros cúbicos visualmente. Adicionalmente se compararán las tres construcciones lineales, las tres construcciones cuadráticas y las tres construcciones cúbicas físicamente y se analizarán las relaciones de semejanza o de no semejanza.

Más adelante, se dejará a los alumnos observar las construcciones desde diferentes puntos de vista para desarrollar las relaciones espaciales proyectivas. Al ser construcciones de cubos “transparentes” es posible ver las aristas traseras y los siguientes ejercicios digitales resultarán más sencillos.

### **Ejercicio de abstracción**

Para abstraer la realidad a un entorno digital, les propondremos a los alumnos construir en la graficadora 3D de GeoGebra (GeoGebra) las longitudes, superficies y volúmenes con las que hemos trabajado físicamente.

De este modo tendrán que modelar segmentos de 1 unidad (Imagen 2), 2 unidades (Imagen 3) y 10 unidades; superficies de 1 unidad cuadrada (Imagen 4), 2 unidades cuadradas (Imagen 5) y 10 unidades cuadradas; y volúmenes de 1 unidad cúbica (Imagen 6), 2 unidades cúbicas (Imagen 7) y 10 unidades cúbicas.

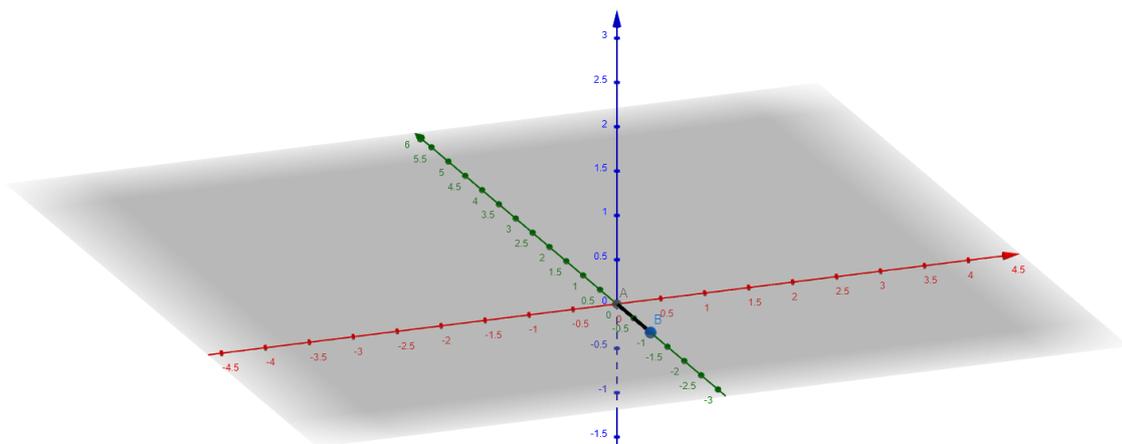


Imagen 2: segmento de 1 unidad en la graficadora 3D de GeoGebra

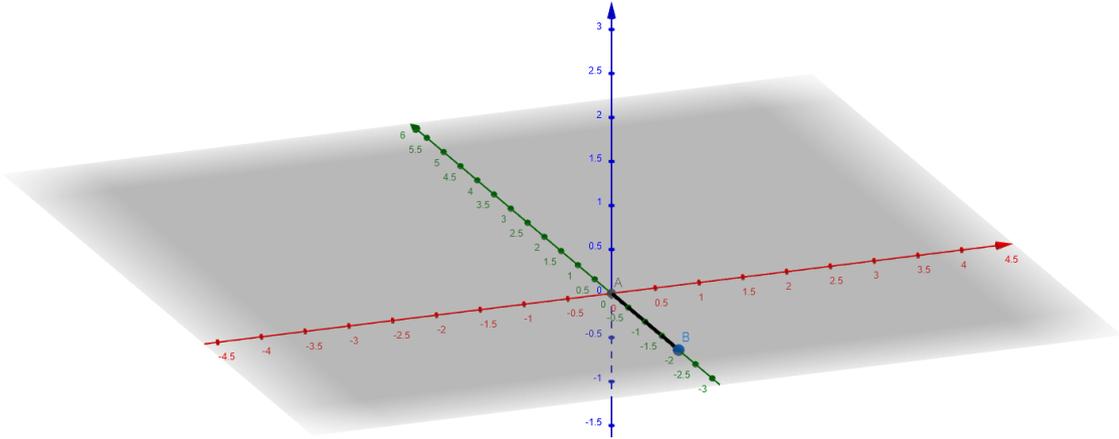


Imagen 3: segmento de 2 unidades en la graficadora 3D de GeoGebra

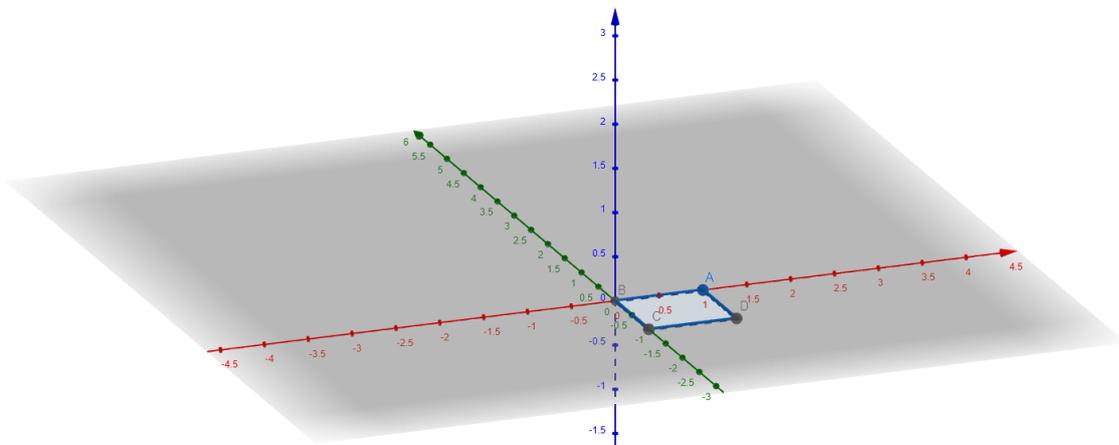


Imagen 4: superficie de una unidad cuadrada en la graficadora 3D de GeoGebra

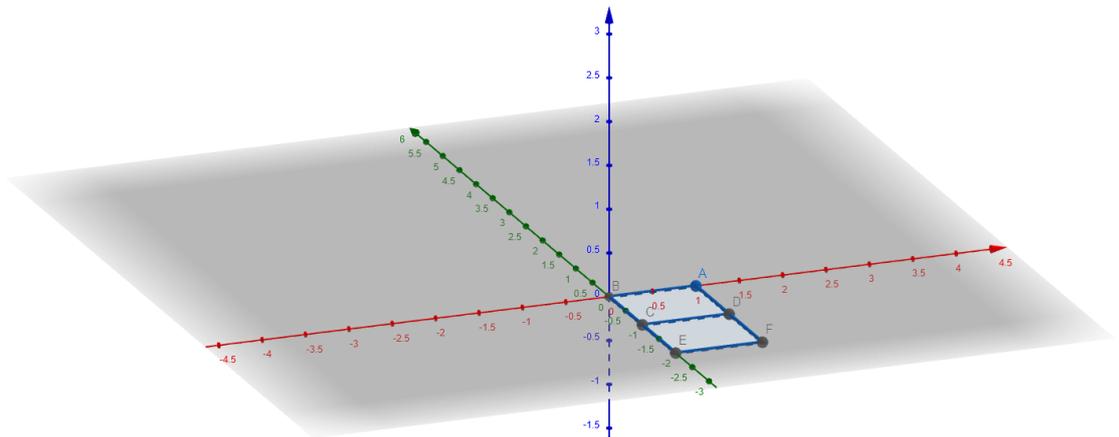


Imagen 5: superficie de dos unidades cuadradas en la graficadora 3D de GeoGebra

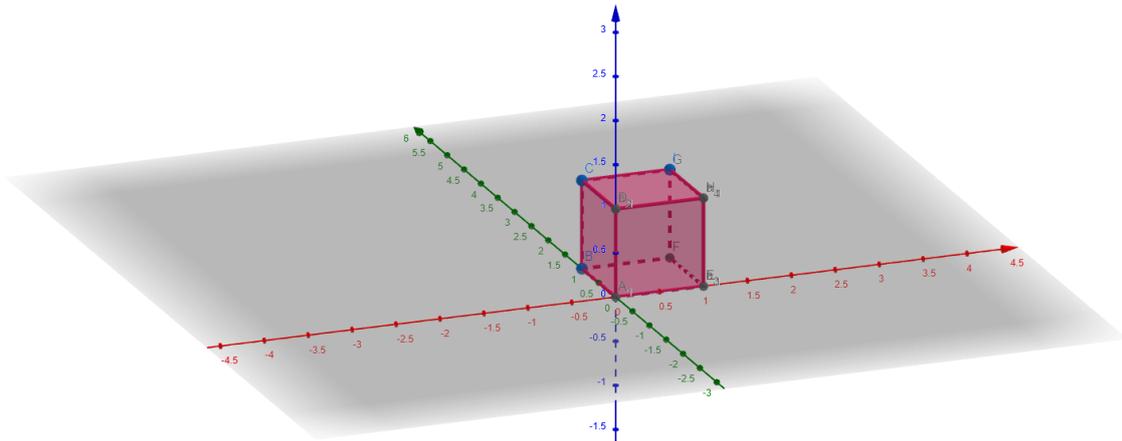


Imagen 6: volumen de una unidad cúbica en la graficadora 3D de GeoGebra

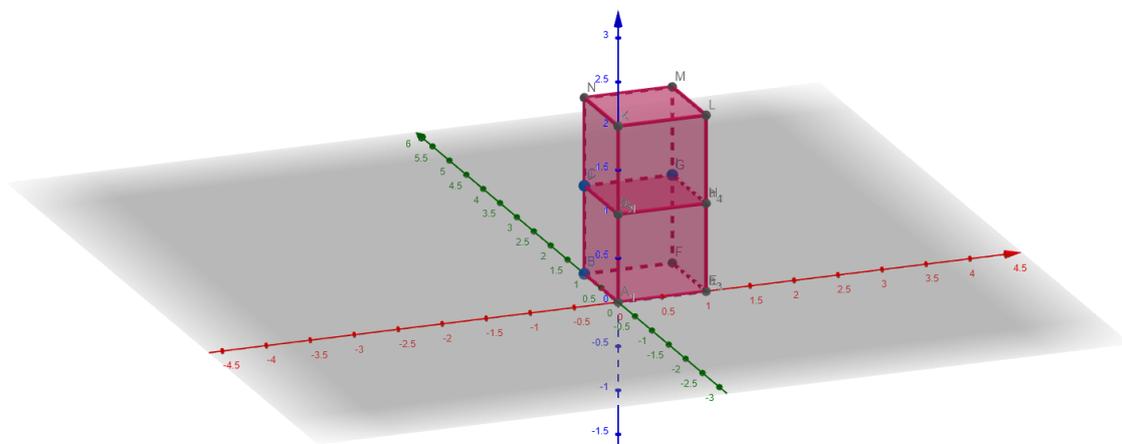


Imagen 7: volumen de dos unidades cúbicas en la graficadora 3D de GeoGebra

Mientras modelan las construcciones podrán jugar con la perspectiva modificando el punto de vista para desarrollar las relaciones espaciales proyectivas. Además, al relacionar el tamaño de las figuras con los ejes de coordenadas (suponiendo que son en decímetros) se desarrollarán las relaciones espaciales euclidianas.

### **Ejercicio abstracto**

Una vez construidas las respectivas figuras podrán rotarlas, trasladarlas, convertirlas en figuras semejantes más grandes o más pequeñas y cambiar el punto de vista. El alumno desarrollará su inteligencia espacial al realizar dichas acciones. Por lo tanto se propondrá el siguiente ejercicio:

1. Construir un cubo de 1 unidad cúbica (Imagen 8).
2. Trasladar el cubo a una unidad de distancia (Imagen 9).
3. Transformarlo en un cubo semejante con el doble de volumen (Imagen 10).
4. Rotarlo  $45^\circ$  sobre una de sus aristas (Imagen 11).
5. Transformarlo en un cubo semejante cuyo valor de la distancia de la diagonal de una de sus caras sea 1 unidad (Imagen 12).

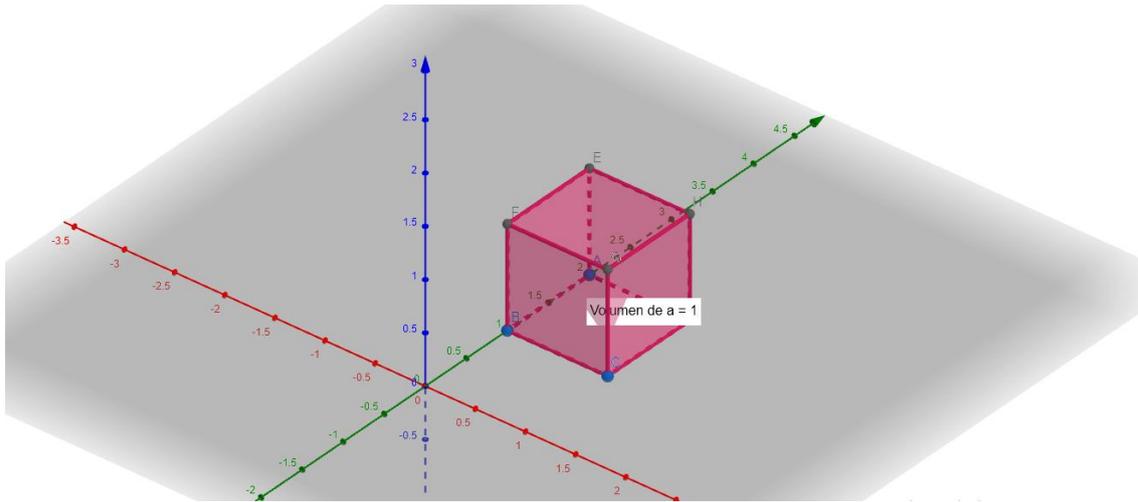


Imagen 8: Cubo de una unidad cúbica en la graficadora 3D de GeoGebra

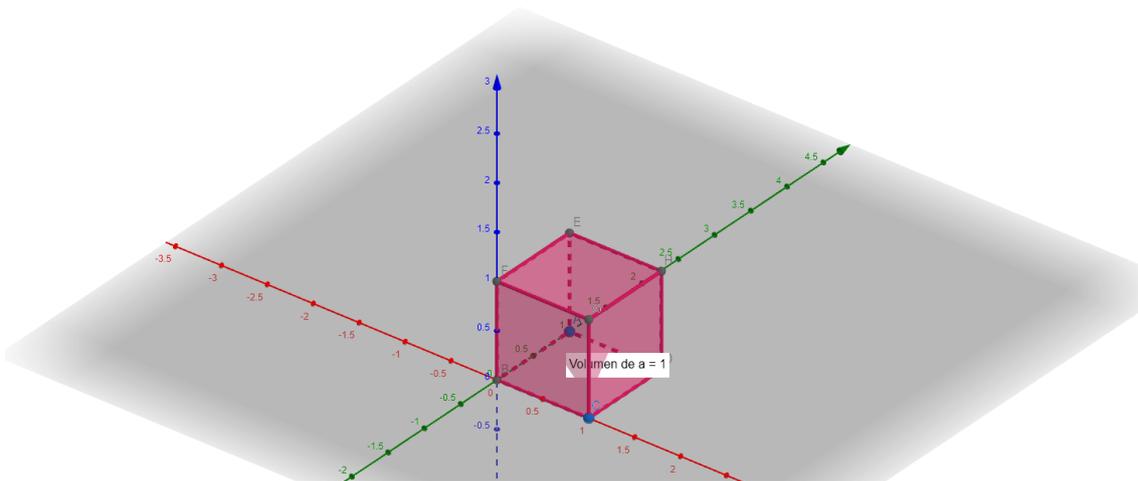


Imagen 9: Cubo trasladado una unidad de longitud en la graficadora 3D de GeoGebra

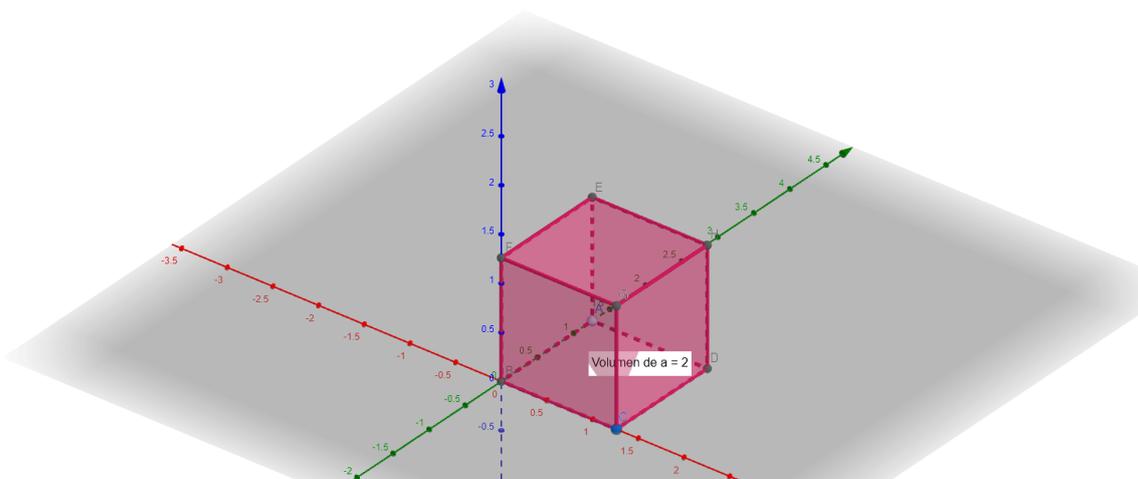


Imagen 10: Cubo semejante con el doble de volumen en la graficadora 3D de GeoGebra

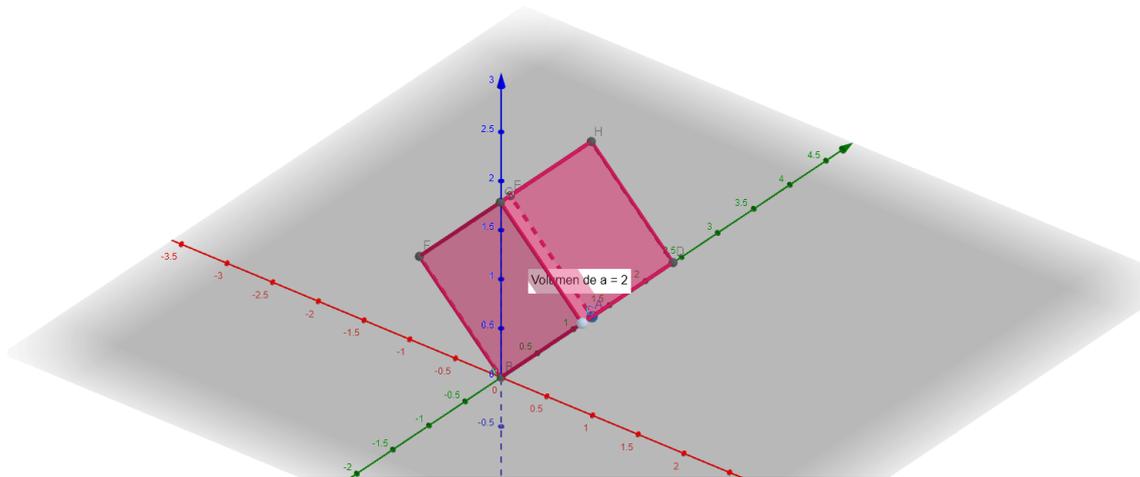


Imagen 11: Cubo rotado  $45^\circ$  sobre una de sus aristas en la graficadora 3D de GeoGebra

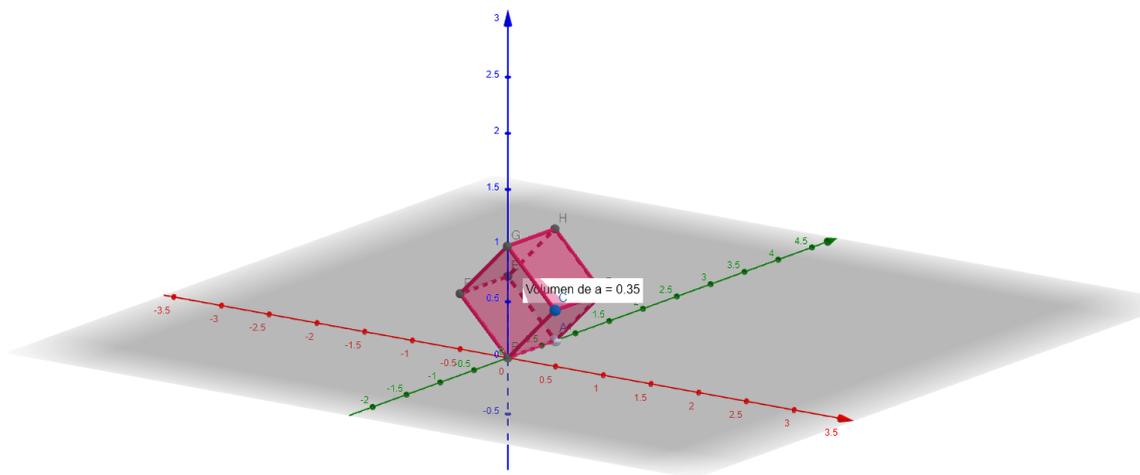


Imagen 12: Cubo semejante cuyo valor de la distancia de la diagonal de una de sus caras sea 1 unidad en la graficadora 3D de GeoGebra

Si sobrase tiempo se podrían plantear más transformaciones dentro de la primera sesión para mejorar las carencias apreciadas en los alumnos mediante la observación.

### Contenidos

- Geometría del plano.
- Teorema de Tales.
- División de un segmento en partes proporcionales.
- Aplicación a la resolución de problemas.
- Traslaciones, giros y simetrías en el plano.
- Geometría del espacio.
- Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

### Material

- Celso.
- Graficadora 3D de GeoGebra.
- Ordenador con acceso a internet.

- Pajitas de 1 decímetro de longitud hasta el pliegue (se pueden cortar para ajustar la medida).

## 4.2. La escala

Una vez interiorizado el sistema métrico para entender las medidas de longitud, superficie y volumen a escala real, se procederá a explicar el concepto de escala y a usarla para entender las grandes magnitudes del planeta a través de mapas.

### Objetivos

- Entender el concepto de escala y su utilidad.
- Estimar distancias y superficies de gran escala.
- Incrementar la capacidad de aprendizaje autónomo mediante el uso de herramientas digitales e internet.

### Ejercicio de atracción

En primer lugar, se expondrán dos mapas sin escala y se pedirá a los alumnos que estimen el tamaño de las superficies que se encuentran en los mapas (Imagen 13 e Imagen 14).



Imagen 13: Mapa de Brasil y del estado de Río de Janeiro sin escala (Gobierno Vasco)



Imagen 14: Mapa de la Comunidad de Madrid sin escala (CEIP Manuel Bartolomé Cossío)

Es imposible saber la superficie o las longitudes de las imágenes porque no existe ninguna escala que nos permita calcularlas. Se intentará que los alumnos lleguen a esa conclusión mediante preguntas guiadas. Gracias a ello, se logrará entender la utilidad de las escalas y esto llamará la curiosidad del alumnado para querer aprender a utilizarlas.

### **Ejercicio de comprensión**

Ahora que tenemos la atención de los estudiantes, les pediremos que dibujen a escala real en un folio el cuadrado creado con pajitas en la actividad 4.1. Al ser a escala real les indicaremos que la escala numérica del dibujo es 1:1 ya que 1 decímetro en el plano equivale a 1 decímetro en el mundo físico (Valor en el plano: Valor real).

A continuación, se les pedirá dibujar el mismo cuadrado pero esta vez la longitud de los lados será la mitad. Tras dibujarlo les preguntaremos cuál sería la escala de ese dibujo. El resultado esperado será 1:2 ya que 1 decímetro en el plano equivale a 2 decímetros en la realidad (en el dibujo mide 0,5 decímetros y en la realidad sigue midiendo 1 decímetro).

### **Ejercicio de gran escala**

En este ejercicio les entregaremos el mapa de Brasil expuesto al inicio de la actividad, pero incluyendo la escala como en la Imagen 15. Ahora les volveremos a pedir que estimen la superficie de Brasil.



Imagen 15: Mapa de Brasil y del estado de Río de Janeiro con escala (Gobierno Vasco)

El objetivo es que dividan el mapa de Brasil en varios rectángulos aproximados, midan los lados de los rectángulos, hallen las longitudes reales de los lados de esos rectángulos y calculen la superficie aproximada del país (Imagen 16). El mismo proceso deberán aplicarlo para estimar la superficie del estado de Río de Janeiro utilizando la escala 1:4.000.000.

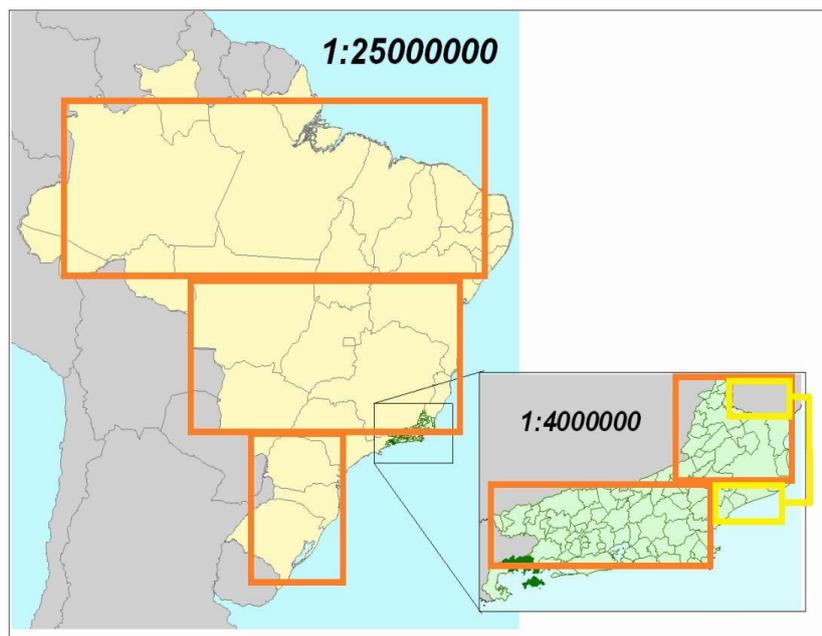


Imagen 16: Mapa de Brasil y del estado de Río de Janeiro con escala y rectángulos auxiliares para hacer estimaciones (Gobierno Vasco)

Tras realizar las estimaciones podrán comprobar sus resultados buscando en Google “superficie de Brasil” y “superficie del estado de Río de Janeiro”, obteniendo los resultados “8,516 millones km<sup>2</sup>” y “43.696 km<sup>2</sup>” respectivamente.

Cuando finalicen el cálculo de la estimación de las superficies anteriores se les mostrará en un ordenador la Imagen 17. Tendrán que estimar de nuevo la superficie de la Comunidad de

Madrid, pero utilizando la escala gráfica. Se les explicará que al existir diferentes resoluciones de pantalla es necesario que en un entorno digital la escala se muestre de este otro modo para que sea compatible con cualquier resolución. No obstante, este tipo de escalas es más intuitivo que la anterior.

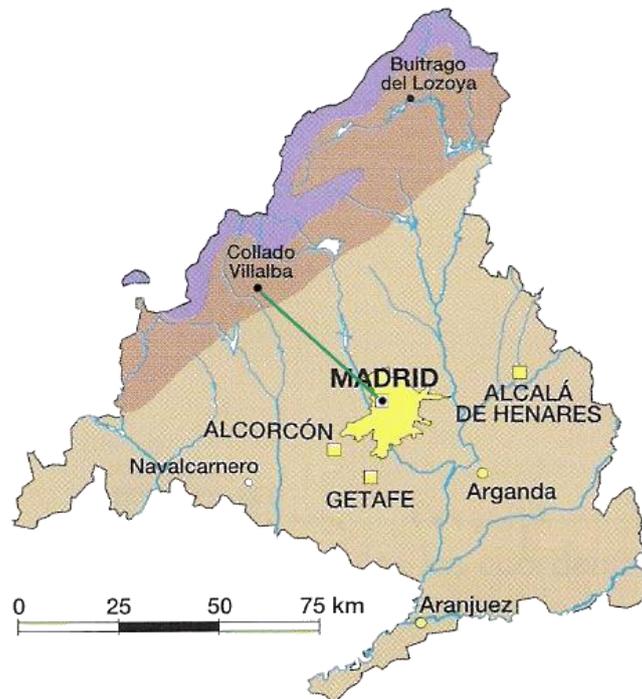


Imagen 17: Mapa de la Comunidad de Madrid con escala (CEIP Manuel Bartolomé Cossío)

Después de estimarla, podrán comprobar en Google de nuevo con cuanta precisión lo han hecho buscando “superficie de la Comunidad de Madrid”. La superficie que nos muestra Google es “8.022 km<sup>2</sup>”.

Por último se les pedirá a los alumnos que estimen la superficie de su país favorito y la longitud entre dos ciudades del mismo país en Google Maps utilizando la escala pertinente. Para comprobar el resultado podrán buscar en Google de nuevo la superficie del país y se les enseñará a medir distancias en Google Maps:

- 1) Click derecho en el origen y seleccionar “Medir distancia”.
- 2) Click derecho en el destino y seleccionar “Distancia aquí”.

En la Imagen 18 se muestra un ejemplo de medida de distancia de Madrid a Barcelona en Google Maps. La aplicación indica que la distancia es de 506 km.

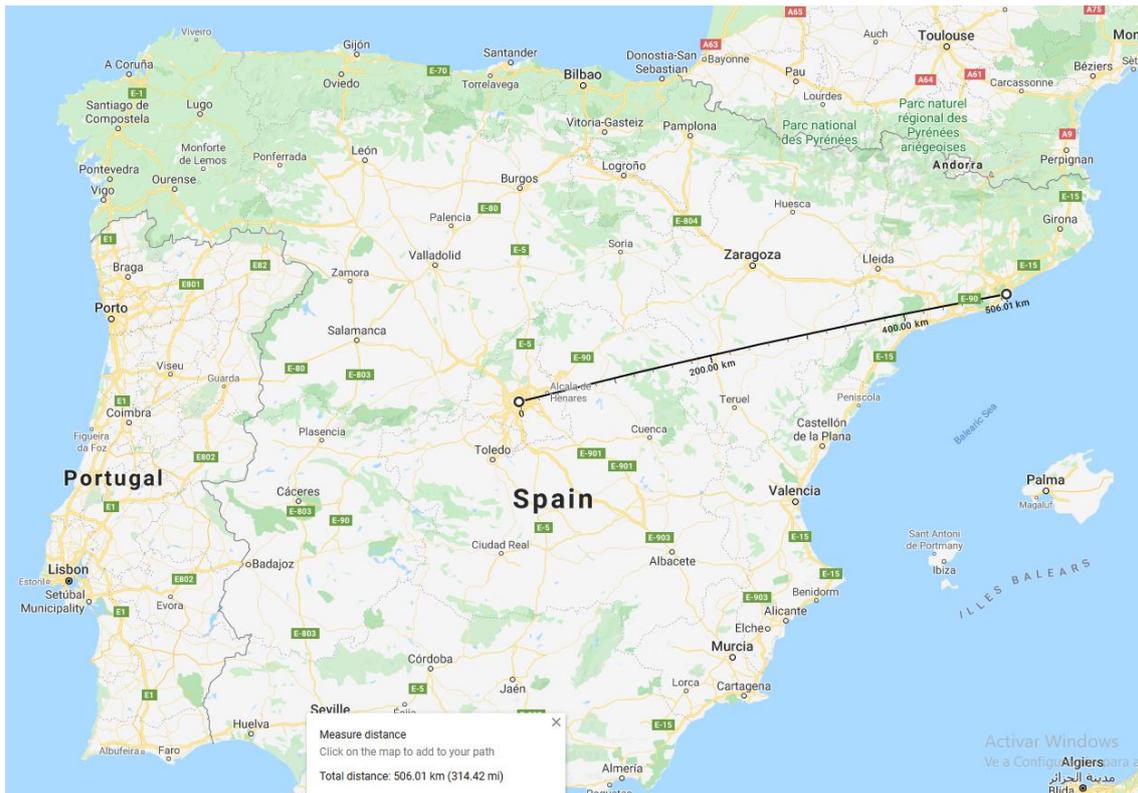


Imagen 18: Medidor de distancia de Madrid a Barcelona en Google Maps

## Contenidos

- Geometría del plano.
- Aplicación a la resolución de problemas.
- Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

## Material

- Aplicación web de Google Maps.
- Bolígrafo o lapicero.
- Calculadora.
- Mapa de Brasil y del estado de Río de Janeiro con escalas impreso.
- Motor de búsqueda de Google.
- Ordenador con acceso a internet.
- Papel.

### 4.3. Las coordenadas geográficas y los husos horarios

En la primera actividad se han desarrollado las relaciones espaciales topológicas, proyectivas y euclidianas. En la segunda actividad se ha interiorizado el concepto de escala y se han realizado las primeras estimaciones de distancias y superficies sobre un mapa a gran escala.

En esta tercera actividad se espera introducir al alumnado a las relaciones espaciales euclidianas a gran escala. Para realizar dichas relaciones espaciales en base a un eje de coordenadas es necesario presentar los conceptos de longitud y latitud, así como la unión de ellos para formar las coordenadas geográficas. Además, se introducirá también el concepto de husos horarios, comprendido en los contenidos del currículo.

#### Objetivos

- Generar curiosidad en los alumnos al ver un caso de aplicación real atractivo.
- Descubrir los conceptos de coordenadas geográficas, husos horarios, longitud y latitud.
- Facilitar herramientas digitales a los alumnos para desarrollar su aprendizaje autónomo.

#### Ejercicio de identificación

Para empezar deberán entrar por parejas en el siguiente link: <https://www.flightradar24.com/>

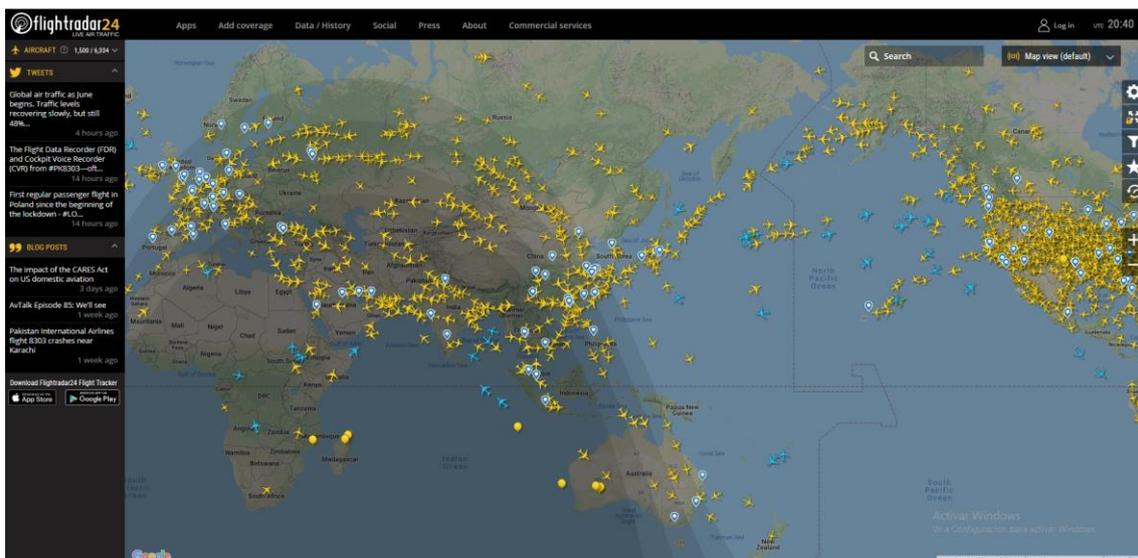


Figura 1: Interfaz de Flightradar24

Flightradar24 es una página web que monitoriza todos los vuelos civiles del espacio aéreo. Al entrar en la página web, aparecen tres números después del link introducido: <https://www.flightradar24.com/x,y/z>. Se les preguntará lo siguiente:

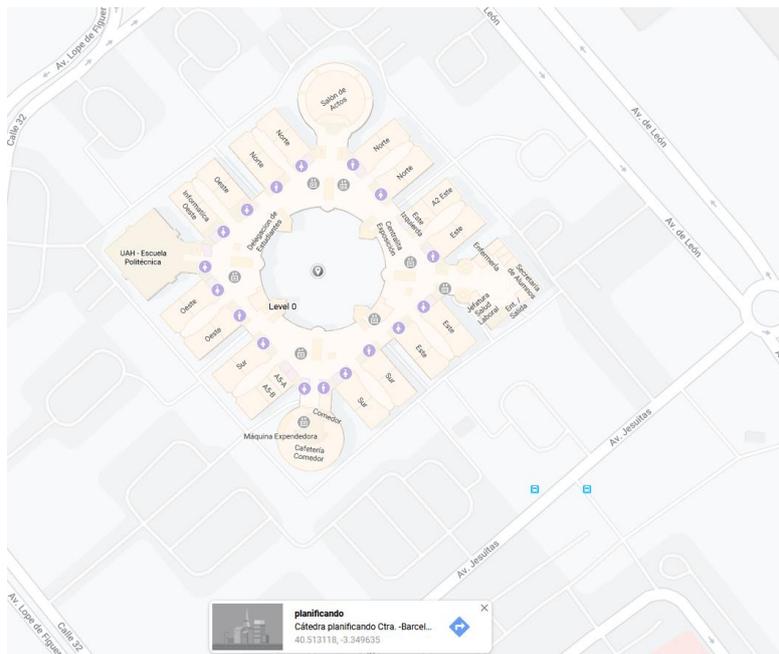
- ¿Qué significa el número 'x'? (Esta variable indica la latitud donde se centra el mapa)
- ¿Qué significa el número 'y'? (Esta variable indica la longitud donde se centra el mapa)
- ¿Qué significa el número 'z'? (Esta variable aumenta el zoom al aumentar su valor)
- ¿Por qué aparece una zona del mapa sombreada? (Indica las zonas del mundo donde no hay luz solar en el momento actual)

Se puede alterar el mapa para cambiar el valor de los parámetros 'x', 'y' y 'z'. Con dichas manipulaciones será más fácil deducir el significado de dichos valores numéricos.

A continuación se pedirá a los alumnos que busquen el origen de coordenadas. Cuando lo encuentren se les explicará el motivo de la latitud 0 (ecuador) y el origen de la longitud 0 (meridiano de Greenwich debido a la localización del Real Observatorio de Greenwich).

### **Ejercicio de coordenadas geográficas**

Para obtener las coordenadas geográficas del lugar donde nos encontramos, se accederá a la aplicación web de Google Maps, se hará click derecho en dicha ubicación y se seleccionará "¿Qué hay aquí?". Google Maps nos indicará la dirección del lugar seleccionado y sus coordenadas geográficas (latitud, longitud) como en la Imagen 19.



**Imagen 19: Obtención de coordenadas del edificio politécnico de la UAH en Google Maps**

La acción inversa también se puede ejecutar en esta aplicación web. Únicamente se deberá introducir la latitud y la longitud en formato anglosajón y separado con una coma. Por ejemplo, se les preguntará a los alumnos qué ciudad se encuentra en la latitud -34,6038 y en la longitud -58,3816. Al introducir "-34.6038,-58.3816" en el buscador de Google Maps, la aplicación web les dirigirá a Buenos Aires (Argentina) (Imagen 20).

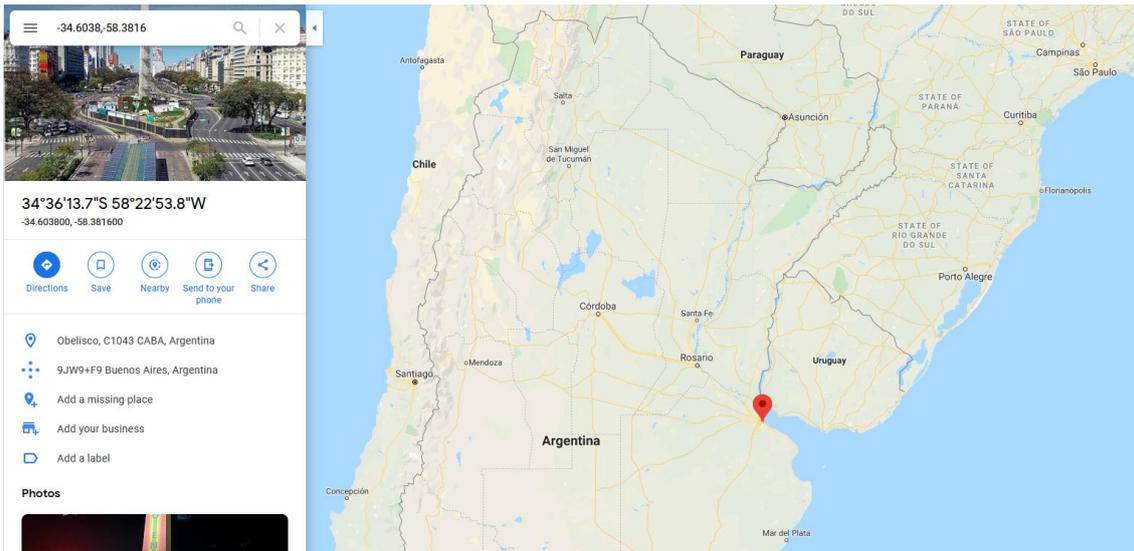


Imagen 20: Coordenadas de Buenos Aires introducidas en el buscador de Google Maps

### Ejercicio de husos horarios

En este último ejercicio para reforzar el conocimiento de los husos horarios se les indicará que accedan a la página web: <https://www.timeanddate.com/time/map/>

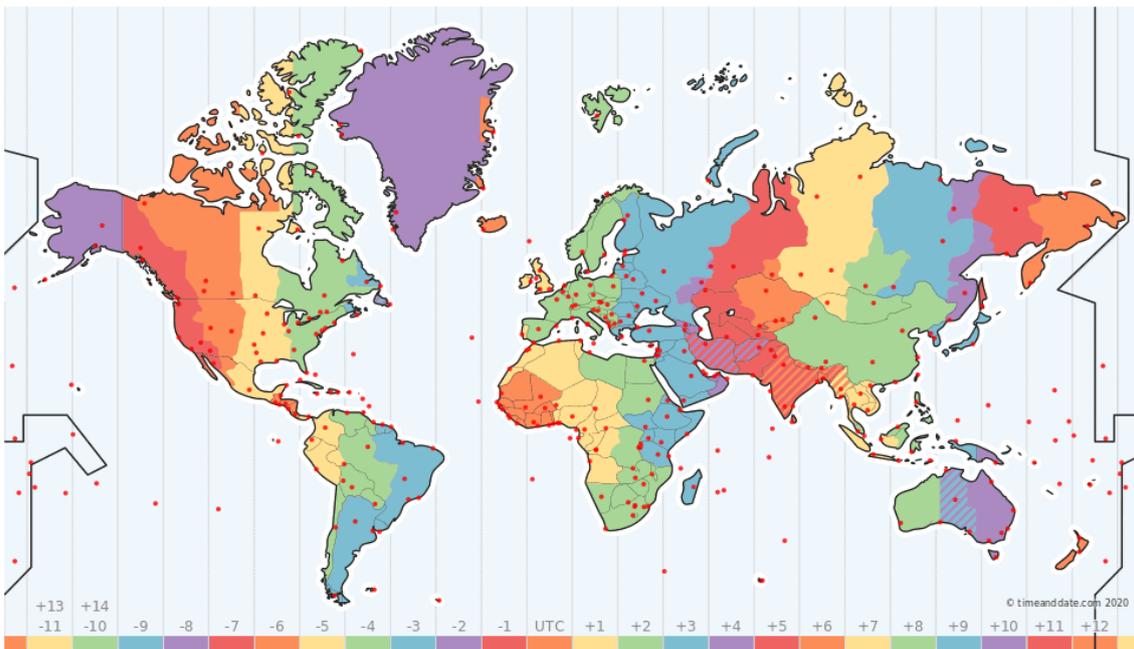


Imagen 21: Mapa de husos horarios de timeanddate.com

Mientras visualizan el mapa se explicará que la hora de referencia es el horario UTC. En España seguimos el horario UTC+1 o CET (Central European Time) en invierno y el horario UTC+2 o CEST (Central European Summer Time) en verano.

Para abstraer el concepto de huso horario y hacerlo atractivo se les puede preguntar cuál es la diferencia horaria entre Madrid (España) y Sydney (Australia). Si hacemos este ejercicio en verano, la diferencia será de 8 horas. Sin embargo, si hacemos este mismo ejercicio en invierno, la diferencia será de 10 horas puesto que se suma el cambio de hora de Madrid más el cambio de hora en el otro sentido de Sydney puesto que se encuentran en hemisferios

diferentes. Otras curiosidades que pueden llamar la atención es preguntarles por la diferencia horaria entre Teherán (Irán) y Madrid que es de 2 horas y 30 minutos. Y el horario más curioso lo lleva Katmandú (Nepal), donde hay una diferencia de 3 horas y 45 minutos con Madrid.

Por último, se planteará el siguiente problema:

Si un avión despegue de Madrid a las 7:15 hora local y aterrice en Katmandú a las 21:00 hora local, ¿cuánto tiempo dura el vuelo del avión?

### **Contenidos**

- Aplicación a la resolución de problemas.
- El globo terráqueo.
- Coordenadas geográficas y husos horarios.
- Longitud y latitud de un punto.
- Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

### **Material**

- Aplicación web de Flight Radar 24.
- Aplicación web de Google Maps.
- Aplicación web Time Zone Map.
- Ordenador con conexión a internet.

#### 4.4. La deformación del mapa tradicional

A lo largo de esta actividad se mostrará la deformación de las magnitudes de distancia y superficie en los mapas tradicionales de dos dimensiones. Para ello se comenzará motivando a los alumnos con un caso famoso, luego se estudiarán comportamientos extraños en los cálculos de distancias y finalmente se comprobará la deformación del globo terráqueo al modelarlo en dos dimensiones.

##### Objetivos

- Generar curiosidad en los alumnos al ver un caso de aplicación real atractivo.
- Entender la razón de la deformación del mapa del mundo en dos dimensiones y la forma en que ocurre.
- Comenzar a asimilar las grandes dimensiones del planeta Tierra.

##### Ejercicio de la vuelta al mundo en 80 días

No hay viajero más célebre que Phileas Fogg (Verne, 1872) y navegando por internet nos podemos encontrar con un mapa donde se muestra el viaje que hizo para dar la vuelta al mundo en 80 días. Se procederá a enseñarles un boceto encontrado en la red de esta odisea particular (Imagen 22).



Imagen 22: Mapa del viaje de Phileas Fogg según Wikipedia

A continuación se les preguntará si observan alguna manera de hacer el recorrido más corto, suponiendo esto una mejora en el tiempo de llegada y reduciendo esos 80 días de duración.

##### Ejercicio de intuición bidimensional

Tras captar la atención del alumnado con el ejercicio del libro *la vuelta al mundo en 80 días* se les pedirá que busquen en Google Maps las ciudades de Tokio (Japón), Jerusalén (Israel) y Helsinki (Finlandia). A continuación se les preguntará a qué ciudad tardaría menos en llegar un vuelo desde la ciudad de Tokio: ¿Jerusalén o Helsinki?

La respuesta intuitiva delante de un mapa debería ser Jerusalén, puesto que el segmento recto entre ambas ciudades es más corto. Sin embargo, se les pedirá medir la distancia con la herramienta que proporciona Google Maps como en la actividad 4.2.

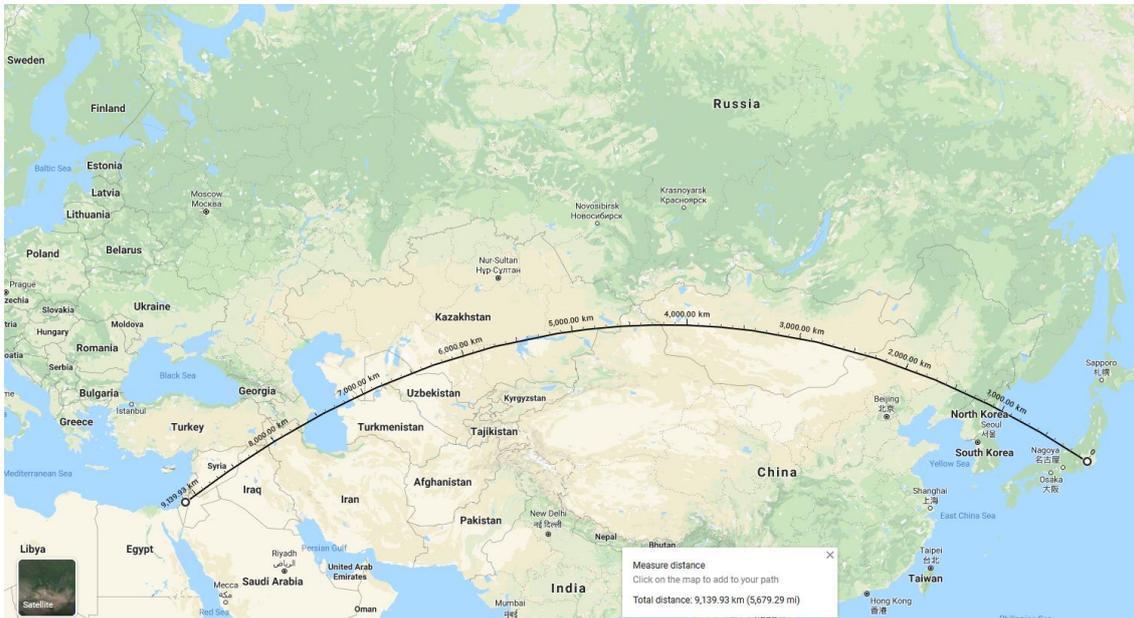


Imagen 23: Cálculo de la distancia entre Tokio y Jerusalén

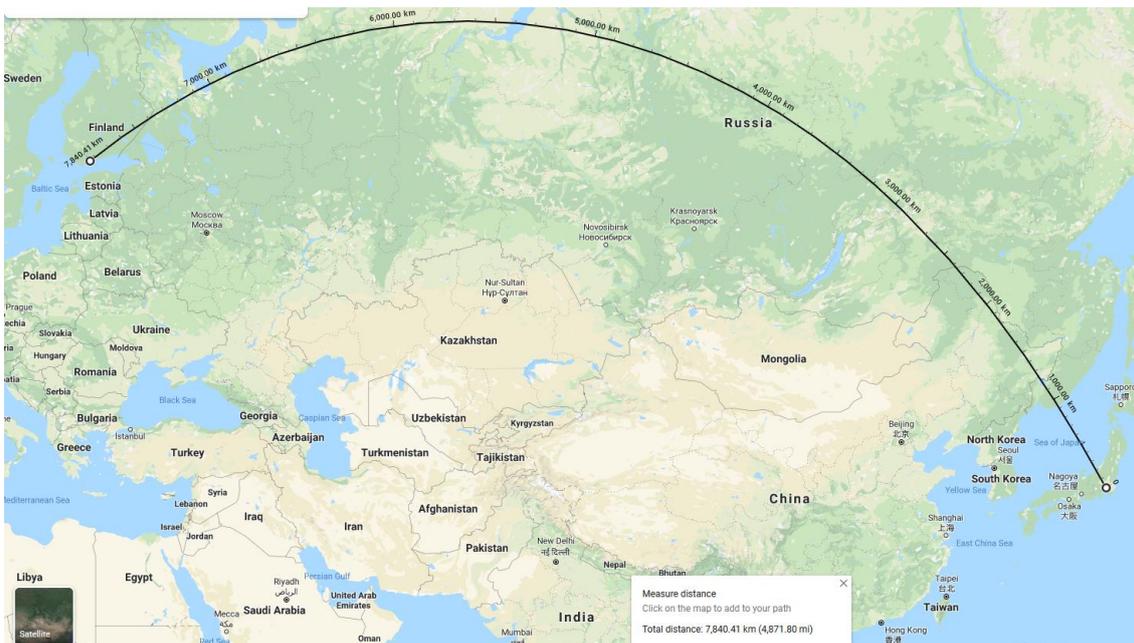


Imagen 24: Cálculo de la distancia entre Tokio y Helsinki

Como se puede observar en la Imagen 23, la distancia entre Tokio y Jerusalén es de 9.140 km y al observar la Imagen 24, la distancia entre Tokio y Helsinki es de 7.840 km. Por lo tanto, Helsinki está más cerca de Tokio que Jerusalén.

A continuación se le preguntará al alumno que diga a simple vista que país tiene mayor superficie: ¿Ecuador o Islandia?

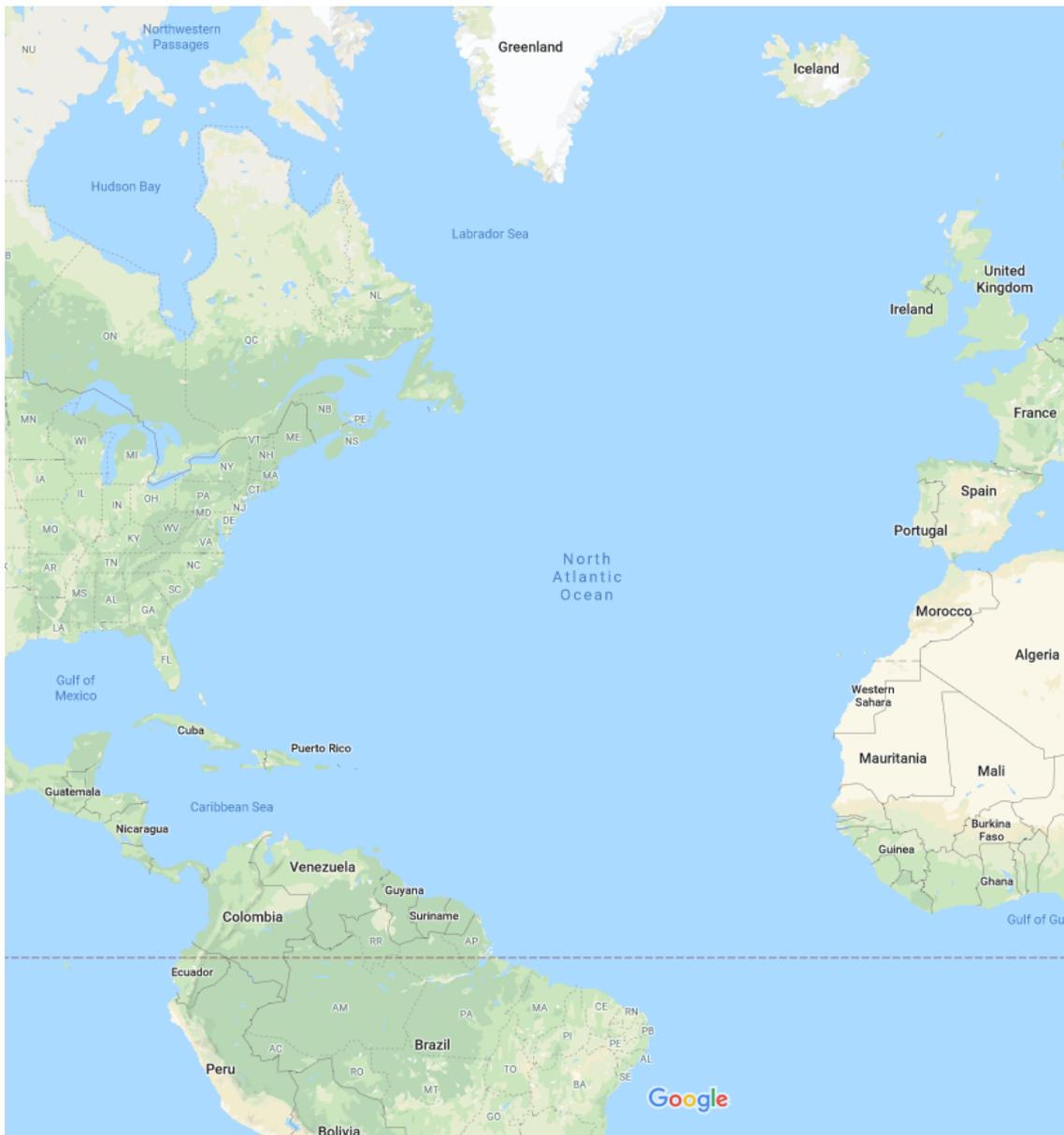


Imagen 25: Mapa con Ecuador e Islandia

A primera vista parece que Islandia es más grande que Ecuador, pero si se utiliza el medidor de distancias para calcular la base y la altura de un rectángulo aproximado y estimar la superficie de ambos países se averiguará que la superficie de Ecuador es de 284.000 km<sup>2</sup> y la superficie de Islandia es de 103.000 km<sup>2</sup>.

Al finalizar el ejercicio, se debatirá con el alumnado para deducir que las distancias y superficies cercanas al ecuador aparecen más pequeñas que las lejanas al ecuador en el mapa. De hecho, la escala gráfica varía sin hacer zoom al alejarte del ecuador o acercarte a él.

Para asentar la comprensión, es curioso y didáctico observar un mapa tradicional con las relaciones de superficies de los países sin deformación como en la Imagen 26.

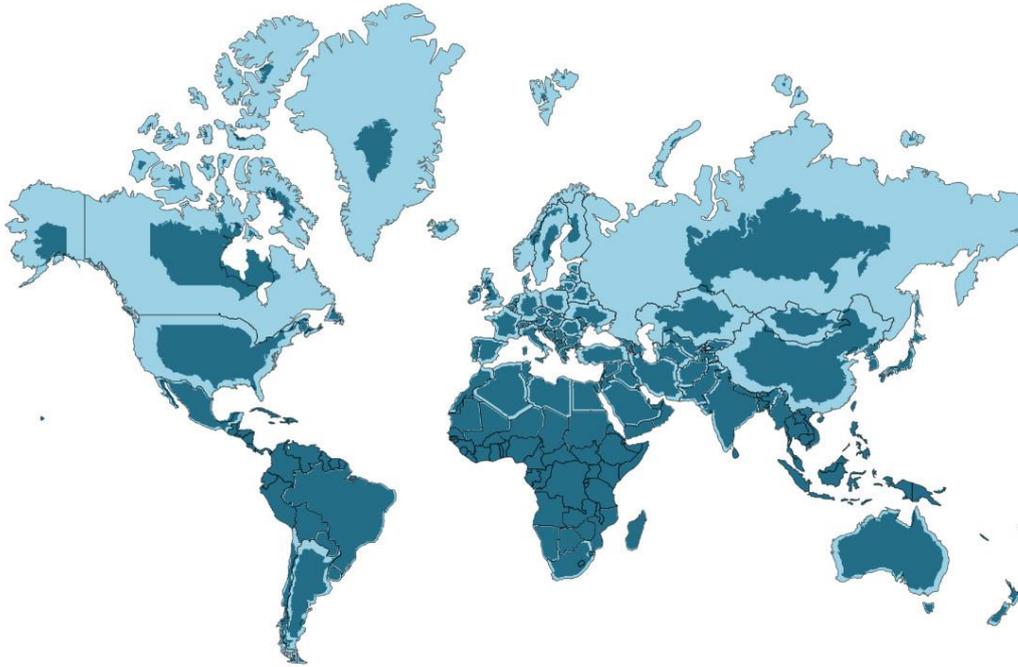


Imagen 26: Mapa del mundo con la relación de superficies real

### **Ejercicio manipulativo**

Para entender la deformación del mapa, se procederá a medir en un globo terráqueo con un hilo la distancia de Tokio a Helsinki y la distancia de Tokio a Jerusalén. Utilizando este método, se podrá comprobar visualmente que es más corta la distancia entre Tokio y Helsinki. Además se podrán comparar las imágenes del globo terráqueo con las de Google Maps para entender la deformación de la esfera plasmada en un mapa bidimensional.

### **Ejercicio de la vuelta al mundo en 80 días**

Finalmente se volverá a analizar el mapa del viaje de Phileas Fogg del inicio.

El objetivo es que el alumnado deduzca que el trayecto marítimo de Yokohama a San Francisco según el dibujo está recorriendo una distancia mucho más grande de la necesaria. Lo podemos comprobar en Google Maps (Imagen 27) o en el globo terráqueo con un hilo. Incluso existe una corriente oceánica que propulsaría el barco a mayor velocidad a través de la ruta que se muestra en la imagen.

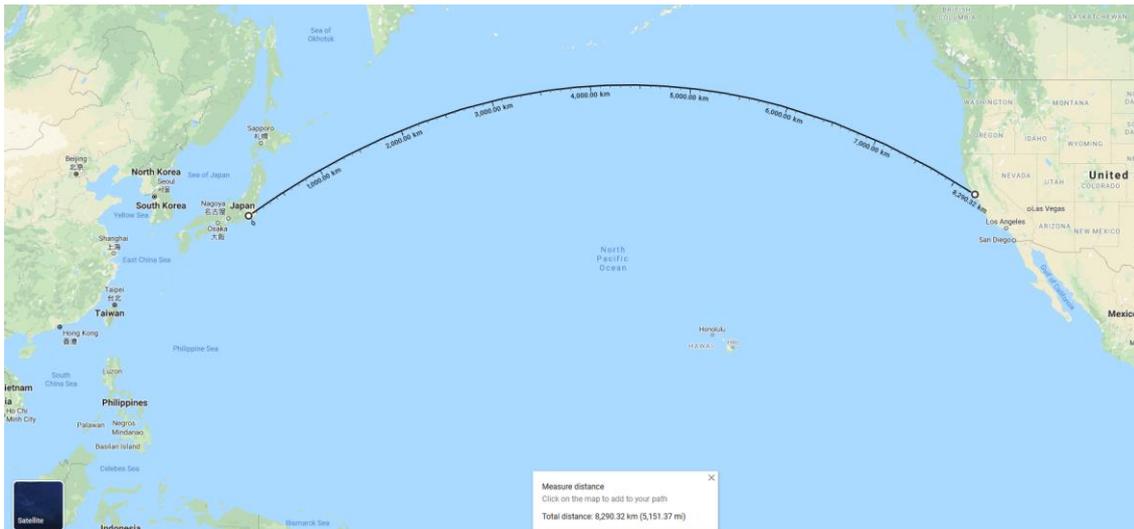


Imagen 27: Camino más corto de Yokohama a San Francisco

## Contenidos

- Geometría del plano.
- División de un segmento en partes proporcionales.
- Aplicación a la resolución de problemas.
- Geometría del espacio.
- La esfera.
- El globo terráqueo.
- Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

## Material

- Aplicación web de Google Maps.
- Calculadora.
- Globo terráqueo.
- Hilo o metro flexible.
- Ordenador con conexión a internet.

## 4.5. Las dimensiones de la Tierra

Conociendo la condición esférica de la tierra a través del globo terráqueo se trabajará el discernimiento del volumen de nuestro planeta. Asimismo se analizarán las profundidades de los océanos y las alturas de los picos de la Tierra en comparación con su radio para asimilar mejor el volumen terrestre.

### Objetivos

- Asimilar las dimensiones del planeta Tierra.
- Contrastar las dimensiones de las fosas oceánicas y las montañas terrestres.
- Visualizar de forma abstracta la forma de la corteza terrestre y fundamentar la aproximación a forma esférica de nuestro planeta.

### Ejercicio Viaje al centro de la Tierra

En otra de sus célebres novelas, *Viaje al centro de la Tierra* (Verne, *Viaje al centro de la Tierra*, 1864), Julio Verne fantaseó con la llegada de los humanos al centro de nuestro planeta y escogió comenzar el viaje en el volcán Snæfellsjökull (Islandia). ¿Qué distancia tuvo que recorrer Axel, el protagonista del libro, para llegar al centro de la Tierra? ¿Habría sido mejor elegir otro lugar de partida suponiendo que hubiese un pasadizo similar?

### Ejercicio tamaño terrestre

Utilizando la herramienta de medir distancias de Google Maps como en ejercicios anteriores, se pedirá a los alumnos que calculen la superficie, el volumen y el radio de la Tierra.

Se espera realicen los siguientes pasos:

- Utilizar Google Maps para medir la mitad del perímetro de un círculo formado por un plano que corta el planeta por el ecuador.
- Multiplicar por dos el valor obtenido para hallar el perímetro anterior (línea del ecuador).
- Hallar el radio de la Tierra con la fórmula:

$$\text{Perímetro}_{\text{círculo}} = 2\pi r$$

- Hallar la superficie de la Tierra con la fórmula:

$$\text{Superficie}_{\text{esfera}} = 4\pi r^2$$

- Hallar el volumen de la Tierra con la fórmula:

$$\text{Volumen}_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

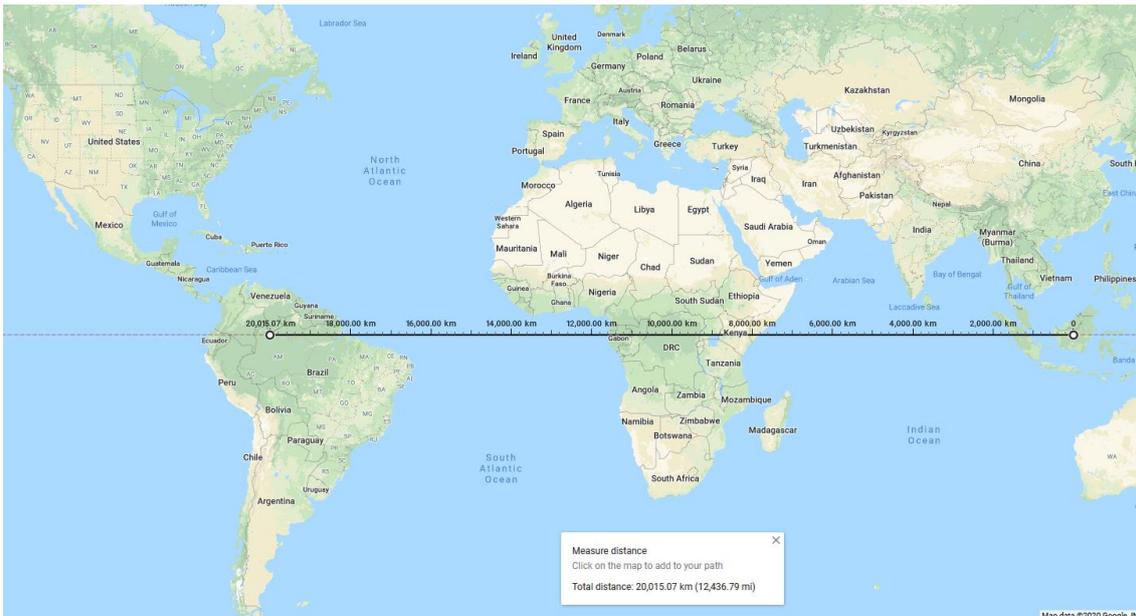


Imagen 28: Medida de la mitad de la línea del ecuador en Google Maps

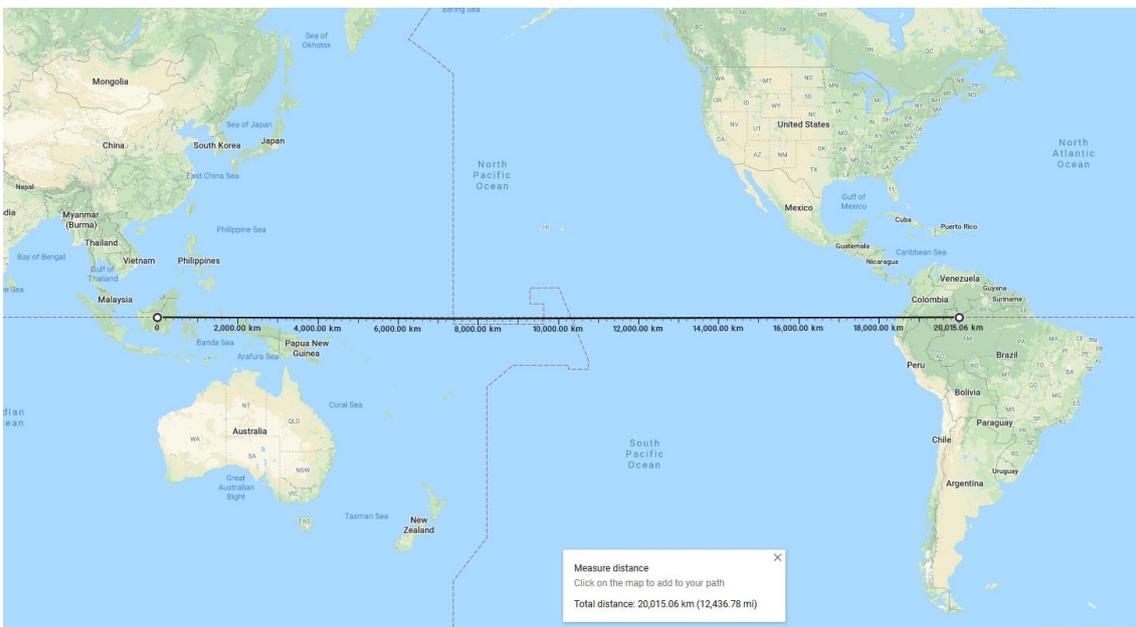


Imagen 29: Medida de la otra mitad de la línea del ecuador en Google Maps

La mitad de la línea del ecuador mide aproximadamente 20.015 km.

La línea del ecuador mide aproximadamente 40.030 km.

El radio de la Tierra mide aproximadamente  $\frac{20.015 \text{ km}}{\pi} = 6.371 \text{ km}$ .

La superficie de la Tierra mide aproximadamente  $4\pi(6.371 \text{ km})^2 = 510.100.000 \text{ km}^2$ .

El volumen de la Tierra mide aproximadamente  $\frac{4}{3}\pi(6.371 \text{ km})^3 = 1.083.000.000.000 \text{ km}^3$ .

**Ejercicio profundidad y altura terrestre**

En este ejercicio se propondrá a los alumnos buscar los puntos más altos y los más profundos de nuestro planeta. Podrán utilizar la imagen satélite de Google Maps, sus conocimientos previos y el libre acceso a internet.

A continuación se les mostrará los 14 ocho miles que todo montañero desea escalar. Estos catorce puntos consisten en los picos que superan los ocho mil kilómetros de altura, todos ellos situados en la cordillera del Himalaya como se muestra en la Imagen 30.

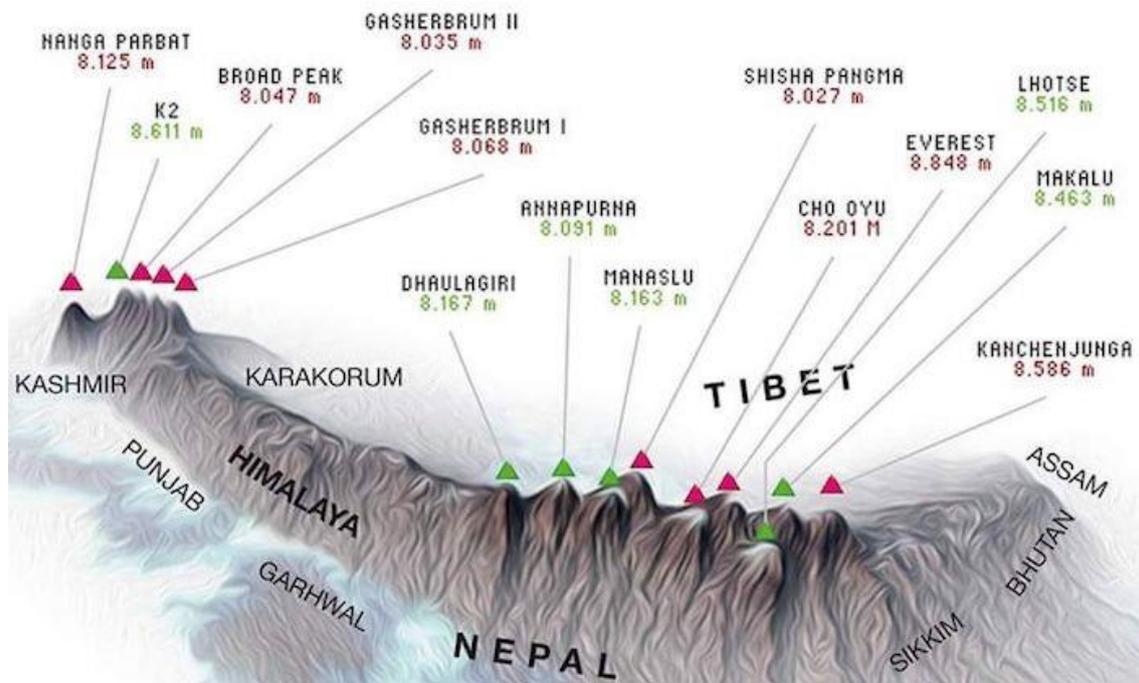


Imagen 30: Los 14 ocho miles (Chinochano, 2019)

Después se les mostrará la Imagen 31 del esquema con la fosa más profunda del mundo al oeste del océano pacífico, la fosa de las Marianas. En dicho esquema se compara la altura del Everest con la profundidad del abismo Challenger, el más profundo de dicha fosa y del mundo.

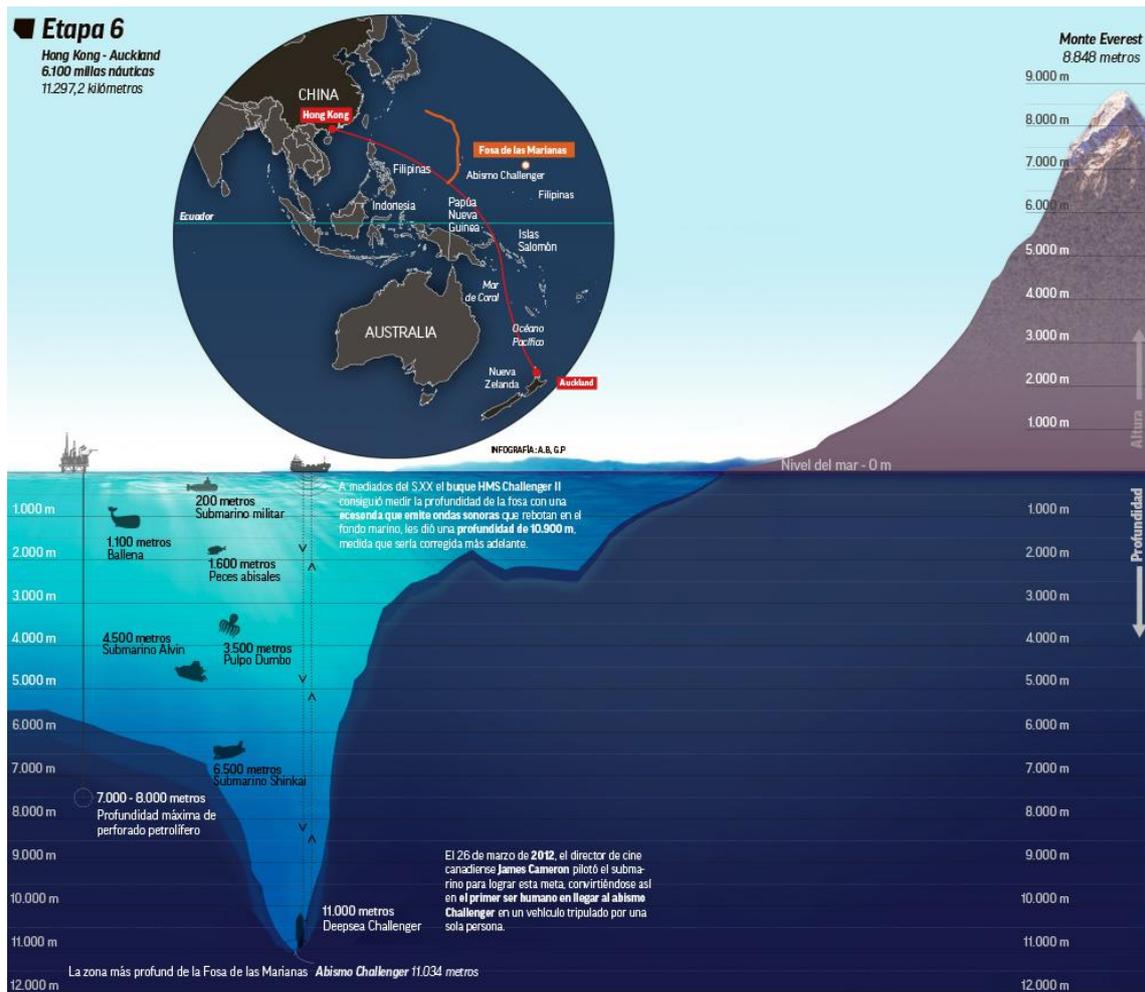


Imagen 31: Esquema del abismo Challenger y el monte Everest (Rivera, 2018)

### Ejercicio de aproximación esférica

Con la información de la montaña más alta y el abismo más profundo del mundo se procederá a comparar dichas magnitudes con el radio terrestre. Así pues, se propondrá a los alumnos dibujar un modelo en el que las distancias mantengan la relación. Las distancias a dibujar son las siguientes:

- Radio de la tierra (6.371 km).
- Abismo Challenger de la fosa de las Marianas (11.034 m  $\approx$  11km).
- Monte Everest de la cordillera del Himalaya (8.848 m  $\approx$  9km).

Por lo tanto el abismo Challenger se encontrará a 6.360 km del centro de la Tierra y el monte Everest a 6.380 km. Mencionando estas cifras y visualizando los dibujos de los alumnos se concluirá que las deformaciones en la corteza terrestre son totalmente despreciables en comparación con la forma esférica de la misma.

### Ejercicio Viaje al centro de la Tierra

Por último, contestando a la pregunta inicial sólo se ahorrarán 20 km de los 6.371 km que habría que recorrer para llegar al centro de la Tierra. Así que no influirá mucho la decisión de dónde empezar el viaje propuesto por Julio Verne si hubiese más pasadizos.

### Contenidos

- Geometría del plano.
- Lugar geométrico.
- División de un segmento en partes proporcionales.
- Aplicación a la resolución de problemas.
- Geometría del espacio.
- La esfera.
- Intersecciones de planos y esferas.
- El globo terráqueo.
- Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

### **Material**

- Aplicación web de Google Maps.
- Bolígrafo o lapicero.
- Calculadora.
- Motor de búsqueda de Google.
- Ordenador con conexión a internet.
- Papel.

## 4.6. Las dimensiones del sistema solar

En la actividad anterior se han conocido las dimensiones de la Tierra, pero esos números carecen de sentido al no poderlos comparar con su entorno. ¿Es la Tierra un planeta grande? Para resolver esta pregunta y seguir desarrollando la inteligencia espacial se estudiarán las dimensiones del sistema en el que se encuentra nuestro planeta.

### Objetivos

- Generar curiosidad en los alumnos al ver un caso de aplicación real atractivo.
- Desarrollar la capacidad de medida de distancias y volúmenes a gran escala.
- Mejorar la inteligencia espacial mediante ejercicios que requieren abstracción espacial.
- Conocer el sistema solar y conocer realmente las distancias y los volúmenes de los cuerpos que lo componen.

### Ejercicio SpaceX

En 1969, la NASA llevó al primer ser humano a la superficie lunar: un pequeño paso para el hombre, pero un gran paso para la humanidad. Elon Musk se ha propuesto llevar al primer ser humano a Marte con su empresa SpaceX en 2025 y crear la primera colonia marciana a finales del siglo XXI. Pero, ¿por qué es tan complicado llegar a Marte si ya se llegó a la Luna?

Al buscar imágenes del sistema solar nos encontramos con esquemas en el que la relación de tamaños de los planetas no se muestra fiel a la realidad como ocurre en la Imagen 32. En dicha imagen, incluso Júpiter presenta el mismo volumen que el sol. Las relaciones de volumen y de distancia entre cuerpos celestes no se respetan.

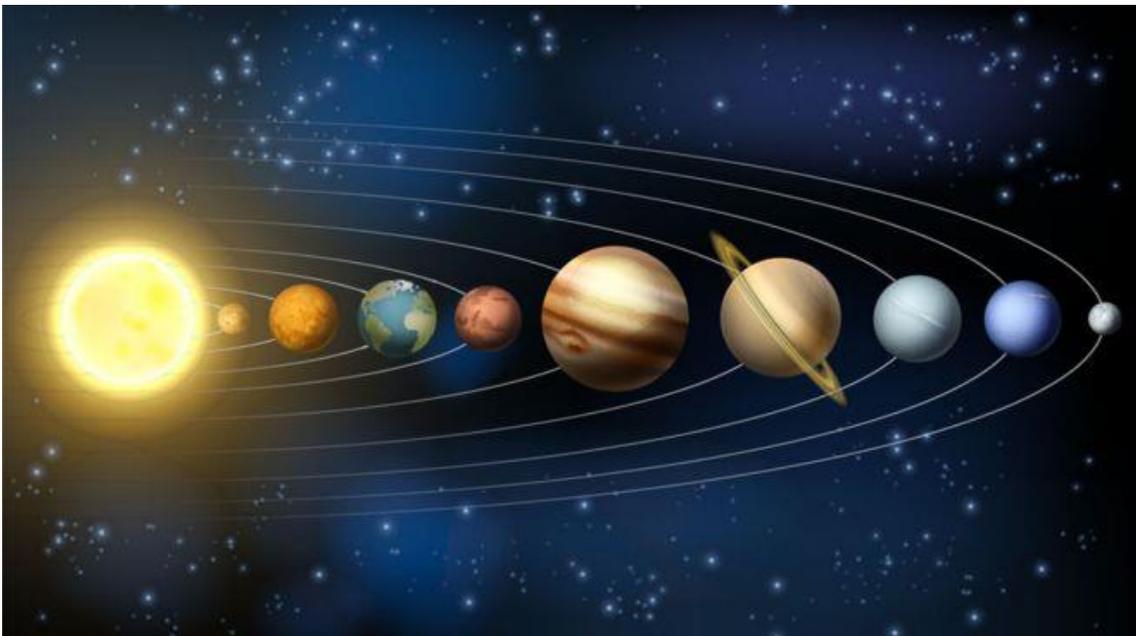


Imagen 32: Modelo de sistema solar no semejante al de la realidad (BBC News Mundo, 2019)

### Ejercicio volúmenes del sistema solar

También podemos encontrar otros modelos que respetan las proporciones de los volúmenes de los planetas y sus relaciones de tamaño como la Imagen 33. Las distancias no se respetan y la ubicación de cuerpos celestes da lugar a confusión.

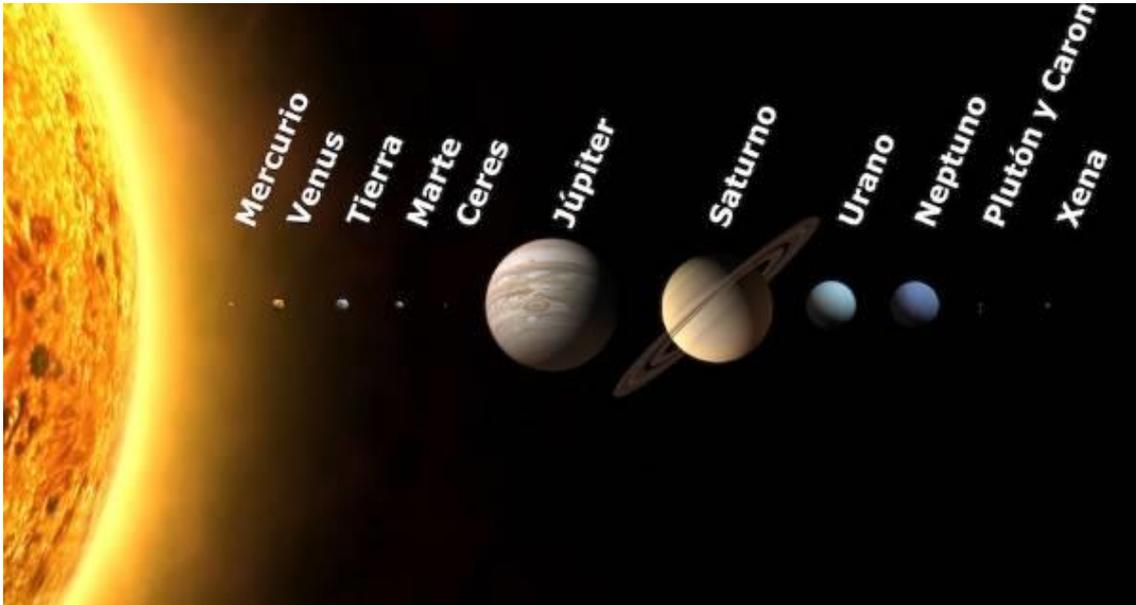


Imagen 33: Modelo de sistema solar no semejante al de la realidad (Libertad Digital)

Se utilizará esta imagen para que a partir del valor de volumen de la Tierra que se ha estimado en el ejercicio anterior, estimen los volúmenes de Marte, Júpiter y el sol.

- El volumen calculado de la Tierra era de  $1.083.000.000.000 \text{ km}^3$  o  $1,083 \cdot 10^{12} \text{ km}^3$ .

Después, se les indicará que busquen los volúmenes que han estimado en Google y podrán autoevaluar su capacidad de estimación.

- El volumen de Marte es de  $1,632 \cdot 10^{11} \text{ km}^3$ .
- El volumen de Júpiter es de  $1,431 \cdot 10^{15} \text{ km}^3$ .
- El volumen del sol es de  $1,412 \cdot 10^{18} \text{ km}^3$ .

Estas cifras pueden no ser comprendidas por el alumnado. Por lo tanto, se les preguntará cuántas veces es un cuerpo celeste más grande que otro. Deberán deducir lo siguiente:

$$\frac{\text{Volumen}_{\text{Tierra}}}{\text{Volumen}_{\text{Marte}}} = \frac{1,083 \cdot 10^{12} \text{ km}^3}{1,632 \cdot 10^{11} \text{ km}^3} = 6,636$$

Por lo tanto, la Tierra es 6,636 veces más grande que Marte.

$$\frac{\text{Volumen}_{\text{Júpiter}}}{\text{Volumen}_{\text{Tierra}}} = \frac{1,431 \cdot 10^{15} \text{ km}^3}{1,083 \cdot 10^{12} \text{ km}^3} = 1.321$$

Por lo tanto, Júpiter es 1.321 veces más grande que la Tierra.

$$\frac{\text{Volumen}_{\text{Sol}}}{\text{Volumen}_{\text{Tierra}}} = \frac{1,412 \cdot 10^{18} \text{ km}^3}{1,083 \cdot 10^{12} \text{ km}^3} = 1.303.786$$

Por lo tanto, el sol es 1,3 millones de veces más grande que la Tierra.

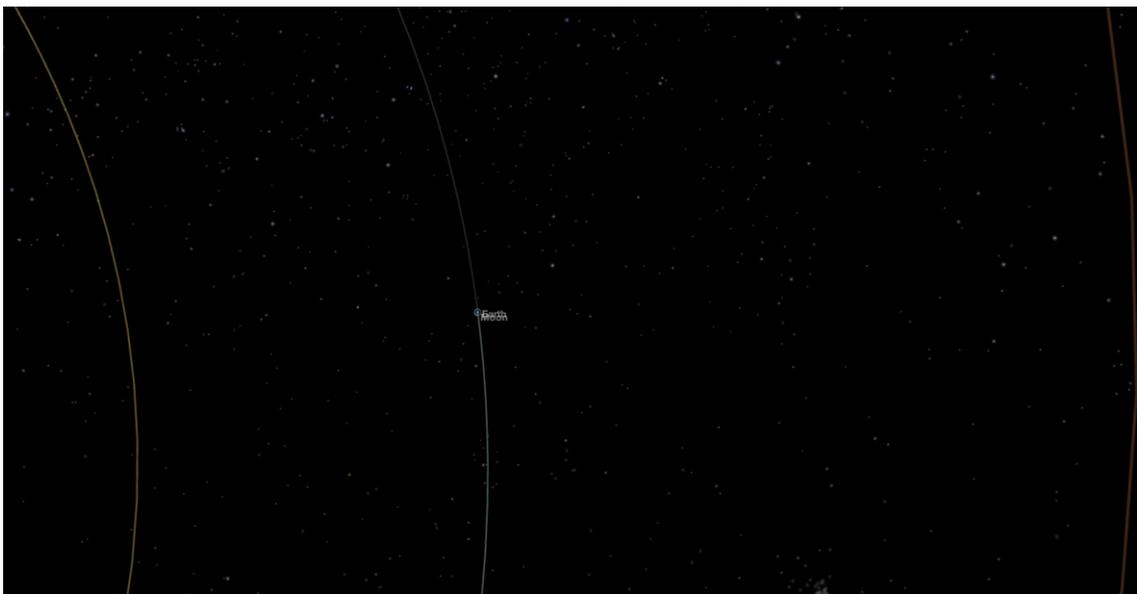
Se espera que los alumnos queden impresionados por la inmensidad del sistema solar al calcular estas cifras. Si muestran interés por el tema y quieren seguir conociendo el universo se les puede tentar a conocer si la estrella de nuestro sistema es grande o pequeña en comparación con otras estrellas de nuestra galaxia u otras galaxias.

### **Ejercicio distancias del sistema solar**

Se utilizará la aplicación de software libre NASA's Eyes para realizar este ejercicio. En concreto, la aplicación Eyes on the solar system, que está incluida en la anterior. El mero hecho de navegar por el sistema solar con esta aplicación permitirá al alumnado vislumbrar la inmensidad del universo.

No obstante, trabajaremos la estimación de distancias en este ejercicio utilizando la aplicación. Deberán centrar la aplicación en el planeta Tierra y conociendo su radio del ejercicio anterior, se les pedirá que estimen la distancia de la Tierra a la Luna recorrida en 1969.

En segundo lugar, se les pedirá que estimen la distancia de la Tierra a Marte que planea recorrer SpaceX en 2025. Obviamente, la distancia que estamos preguntando depende del momento temporal, ya que ambos planetas están orbitando alrededor del sol. Así que podrán estimar la menor distancia entre sus órbitas.



**Imagen 34: Comparación de la distancia de la Tierra a la Luna y a las órbitas de Venus y Marte en la aplicación NASA's eyes on the solar system**

En tercer lugar, se pedirá que estimen también la distancia de la Tierra al sol, que equivaldría al radio de la órbita que recorre nuestro planeta si fuese circular.

- El radio calculado de la Tierra era de  $6.371 \text{ km}$ .

Por último, se les indicará que busquen las distancias que han estimado en Google y podrán autoevaluar su capacidad de estimación.

- La distancia de la Tierra a la Luna es de  $384.400 \text{ km}$  o  $3,844 \cdot 10^5 \text{ km}$ .
- La distancia de la Tierra a Marte es de 54,6 millones de kilómetros o  $5,46 \cdot 10^7 \text{ km}$ .
- La distancia de la Tierra al sol es de 149,6 millones de kilómetros o  $1,496 \cdot 10^8 \text{ km}$ .

Se les preguntará cuántas veces habría que ir a la Luna para llegar a Marte:

$$\frac{Distancia_{Marte}}{Distancia_{Luna}} = \frac{5,46 \cdot 10^7 \text{ km}}{3,844 \cdot 10^5 \text{ km}} = 142$$

Por lo tanto, habría que recorrer 142 veces la distancia que recorrió el Apolo XI antes de alunizar para poder viajar a Marte en una de las naves de SpaceX.

### **Ejercicio SpaceX**

Ahora se les volverá a preguntar por qué creen que se está tardando tanto a enviar astronautas a pisar el planeta rojo si hace ya 50 años que Neil Armstrong pisó la Luna.

Las dos grandes diferencias con respecto al viaje a la Luna que se espera son las siguientes:

- La distancia es 142 veces más grande.
- Las oportunidades de lanzamientos se dan cada cierto tiempo puesto que es beneficioso esperar a que haya un acercamiento orbital entre la Tierra y Marte.

Y además habría que retornar antes de que ambos planetas se separasen o esperar a que se volviesen a acercar para regresar puesto que sus órbitas son independientes al contrario que la órbita de la Luna, que depende de la Tierra.

Otro dato curioso que puede descubrir a través de la aplicación de la NASA es la abismal distancia a la que se encuentran los planetas que orbitan más alejados como Urano o Neptuno en comparación con la distancia que nos separa de nuestra estrella (Imagen 35).

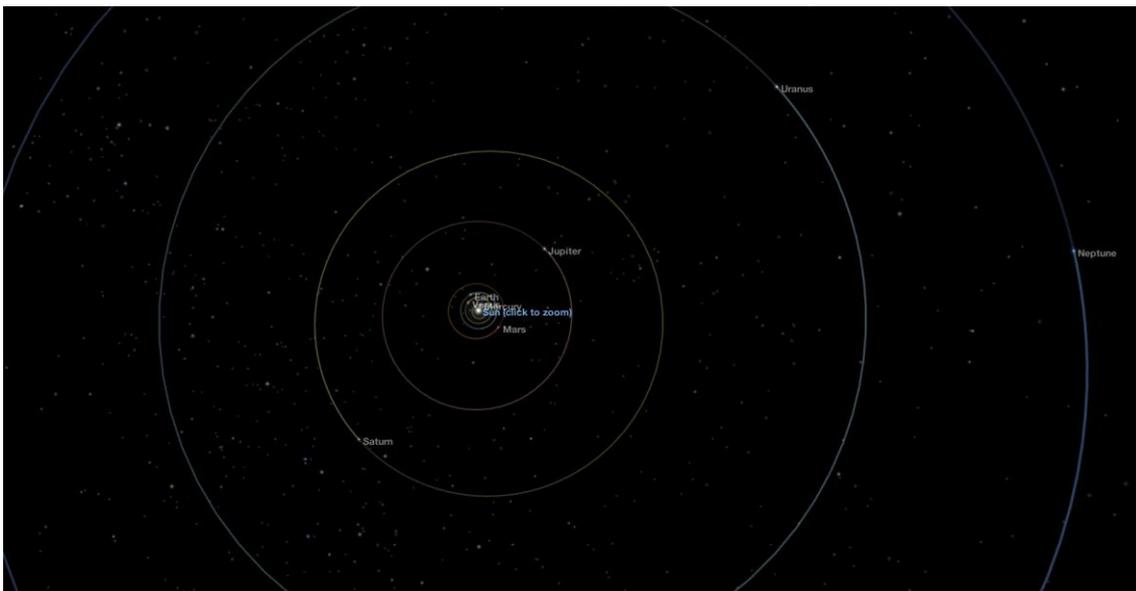


Imagen 35: Relación de distancias en el sistema solar en la aplicación NASA's eyes on the solar system

### **Contenidos**

- Teorema de Tales.
- División de un segmento en partes proporcionales.
- Aplicación a la resolución de problemas.
- Traslaciones, giros y simetrías en el plano.
- Geometría del espacio.
- La esfera.
- El globo terráqueo.

- Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

### **Material**

- Aplicación NASA's eyes on the solar system.
- Calculadora.
- Motor de búsqueda de Google.
- Ordenador con conexión a internet.

## 5. Puesta en práctica y resultados

La puesta en práctica de las actividades no ha podido llevarse a cabo con un grupo numeroso de alumnos debido a la situación de confinamiento en la que se ha desarrollado este trabajo. Sin embargo, se ha conseguido ejecutar de manera anecdótica con dos adolescentes con el fin de estudiar la puesta en marcha y la temporalización de la misma. Al tratarse de una muestra pequeña de alumnos no se pueden sacar conclusiones contrastadas con dicha experiencia, pero sí puede tenerse en cuenta como una primera toma de contacto para observar las posibilidades de las actividades.

Una de las comprobaciones que se han hecho durante la práctica es la necesidad del material. El espacio de trabajo (Imagen 36) que se ha montado para la ejecución no disponía de una calculadora (se utilizó la calculadora del ordenador) y gracias a la experiencia se añadió a la lista de materiales para las actividades que la requerían.

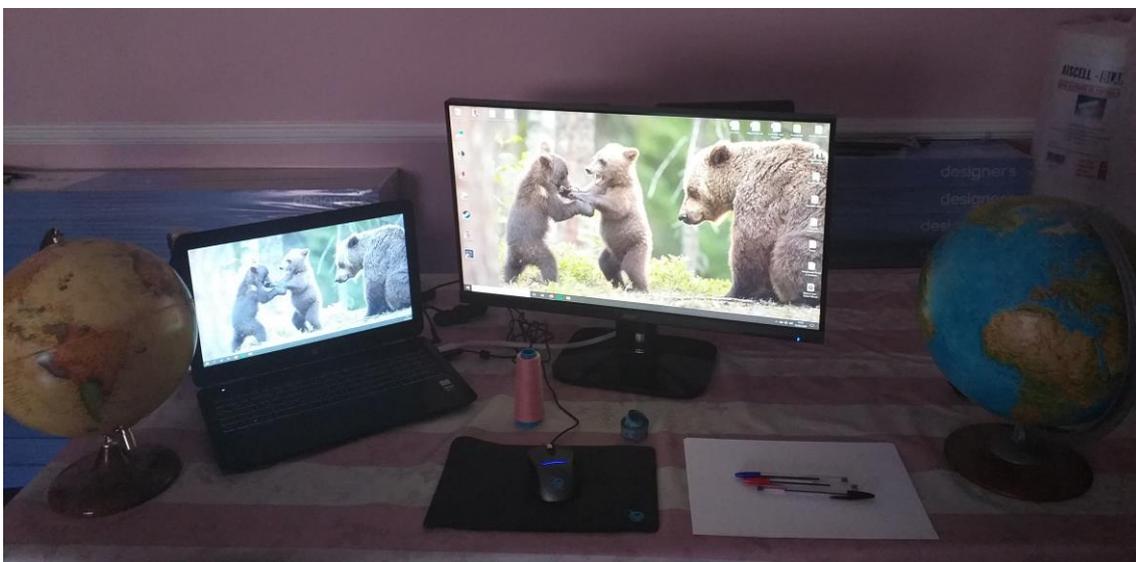


Imagen 36: Espacio de trabajo para la puesta en práctica

La duración de las actividades con dos alumnos ha sido de entre 30 y 40 minutos. Teniendo en cuenta que en una clase normal tendremos aproximadamente 30 alumnos, se puede considerar una duración adecuada para realizar las sesiones en el tiempo disponible.

Respecto a la retroalimentación informativa de las actividades, será descrita brevemente a continuación.

### 5.1. La longitud, la superficie y el volumen

Ambos alumnos han cometido el error esperable en el cálculo de superficies y volúmenes. Cuando se les ha pedido la representación gráfica de  $1\text{ m}$ ,  $1\text{ m}^2$ ,  $1\text{ m}^3$  y  $2\text{ m}$  no han tenido problemas, pero para representar la superficie de  $2\text{ m}^2$  han definido un cuadrado cuyo lado era  $2\text{ m}$  y para representar un volumen de  $2\text{ m}^3$  definieron un cubo con aristas de  $2\text{ m}$ .

Este conocimiento sobre las medidas de superficie y volumen se ha reforzado en la construcción de estructuras en la graficadora 3D de GeoGebra y posteriormente con las transformaciones mientras se visualizaba el volumen de la figura.

## 5.2. La escala

Al ver los mapas sin escala se han percatado de que falta algún dato y han sugerido solicitar la superficie de la comunidad de Madrid para hallar la de Brasil. Se les ha propuesto la idea de la escala y han comprendido la utilidad de esta.

Después se ha aplicado la escala numérica mediante el primer ejercicio donde debían entender la siguiente nomenclatura: (Valor en el plano: Valor real). Sin embargo, ha sido necesario trabajarlo visualmente (Imagen 37) dado que han confundido la escala de ampliación con la de reducción.

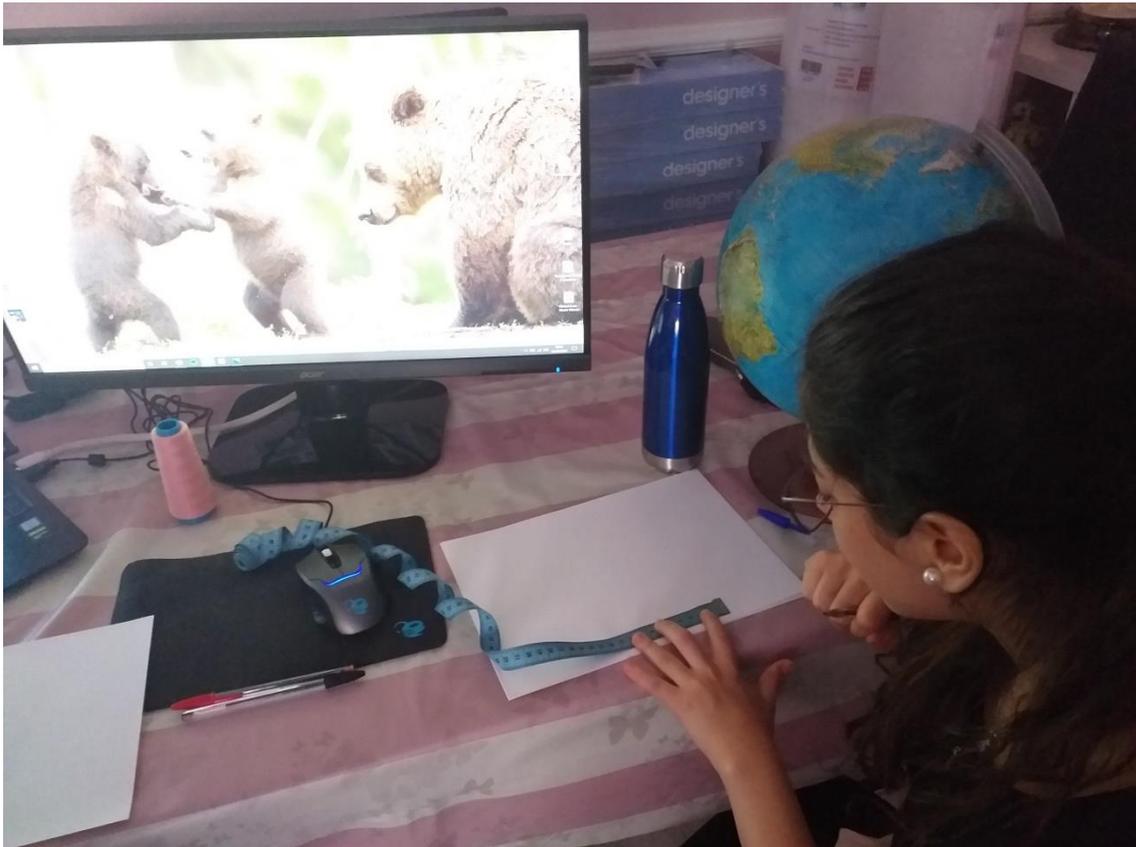


Imagen 37: Representación visual de la escala numérica en la práctica

La estimación realizada de la superficie de Brasil con la escala numérica ha sido bastante aproximada. La escala gráfica es más intuitiva y no les ha llevado mucho tiempo comprenderla.

Durante la estimación de las superficies, uno de los alumnos ha utilizado directamente la calculadora del ordenador. Dicho material no se había tenido en cuenta en el diseño inicial de la actividad y ha sido agregado.

## 5.3. Las coordenadas geográficas y los husos horarios

En primer lugar, les ha parecido entretenido trabajar sobre la aplicación web de Flight Radar 24. Tras deducir que las variables corresponden a la latitud, la longitud y el zoom han preguntado directamente por el origen de coordenadas antes de que se les preguntara a ellos. Eso muestra curiosidad por la actividad y ganas de aprender, por lo tanto uno de los objetivos en esta pequeña muestra de alumnos se ha cumplido.

El resto de los ejercicios se ha ejecutado con normalidad y el problema final se ha resuelto de manera eficaz en poco tiempo, lo que indica una buena comprensión de los husos horarios.

#### 5.4. La deformación del mapa tradicional

Al inicio de esta actividad se ha conseguido llamar la atención de los alumnos con la novela de Julio Verne. Más adelante, la intuición les ha hecho concluir que Jerusalén está más cerca de Tokio que Helsinki. Sin embargo, tras comprobarlo mediante la medida de Google Maps y después en el globo terráqueo con un hilo (Imagen 38), se han quedado asombrados y se han preguntado cuál es el motivo de este suceso.



Imagen 38: Medida de la distancia de Helsinki a Tokio con un hilo

Una vez han buscado las superficies de Islandia y Ecuador han sugerido que podría depender de la distancia a la línea del ecuador. Esa intuición ha sido aplaudida y se les ha confirmado que las distancias y superficies más cercanas a la línea del ecuador están menos deformadas. Al preguntar el motivo se les ha explicado que se debe a la imposibilidad de plasmar la superficie de una esfera sobre un rectángulo y que quedaría como en la Imagen 39 si queremos mantener la semejanza.



Imagen 39: Superficie esférica del globo terráqueo plasmada sobre un plano (Agência Fapesp, 2010)

Por último, se les ha tenido que ayudar para que deduzcan que la trayectoria de Yokohama a San Francisco no es la óptima en el mapa de la vuelta al mundo en 80 días, pero al darles pistas para fijarse en ese trayecto no les ha costado esfuerzo comprenderlo.

## 5.5. Las dimensiones de la Tierra

Para calcular el radio de la Tierra a través de Google Maps se les ha ocurrido rápidamente medir la línea del ecuador. Sin embargo no han recordado las fórmulas de la longitud de la circunferencia, de la superficie de la esfera ni del volumen de la esfera. Se les ha incitado a utilizar las herramientas que tienen para resolver el problema y han utilizado el motor de búsqueda de Google para obtener las fórmulas.

Al almacenar las fórmulas en la memoria a corto plazo para aprobar exámenes, no se entienden y cuesta mucho más recordarlas a largo plazo.

A continuación, no han tenido problema en encontrar la cordillera del Himalaya y la fosa de las Marianas por sus conocimientos generales. Con un poco de guía han relativizado correctamente sus 9 kilómetros de altura y 11 kilómetros de profundidad respectivamente en comparación con los 6.371 kilómetros del radio de la Tierra.

Finalmente, gracias a comprender las dimensiones del radio de la Tierra en comparación con la altura del monte Everest y de la profundidad del abismo Challenger han despreciado el lugar de inicio de la expedición al centro de la Tierra.

## 5.6. Las dimensiones del sistema solar

Al realizar esta actividad se han presentado dos problemas de comprensión:

- No han operado correctamente con notación científica.
- Han restado los volúmenes de los diferentes cuerpos para ver cuántas veces era más grande uno que otro.

Al redirigir su intuición y enseñarles el funcionamiento de la notación científica han logrado realizar la actividad y concluido lo grande que son las dimensiones del sistema solar.

Se entiende que el conocimiento ha sido interiorizado ya que los dos principales escollos a los que se enfrenta SpaceX para llegar a Marte en comparación con el viaje a la Luna de 1969 han sido identificados por los alumnos directamente.

## 5.7. Evaluación

La mejor forma de evaluar la puesta en práctica de las actividades es comprobar si los objetivos propuestos al inicio del trabajo se han logrado. Por lo tanto, se va a analizar la consecución de los mismos:

- Entender las magnitudes espaciales y las relaciones entre todas ellas:
  - Longitud.
  - Superficie.
  - Volumen.

Este objetivo se ha logrado tras la realización de la primera actividad, puesto que han conseguido comprender la relación entre las unidades de longitud (decímetros y metros), superficie (decímetros cuadrados y metros cuadrados) y volumen (decímetros cúbicos y metros cúbicos) a pesar de cometer errores al inicio.

- Desarrollar la abstracción espacial y las operaciones formales:
  - Escalas.
  - El mapa: representación bidimensional.
  - El globo terráqueo: representación tridimensional
  - Herramientas TIC: representación digital.

En la segunda actividad se ha trabajado y logrado el objetivo de la comprensión de las escalas. El resto de los objetivos de este punto se han desarrollado a lo largo del resto de actividades y hay un gran cambio en la abstracción espacial de los sujetos del experimento tras la realización de las actividades. Ellos mismos reconocen haber mejorado su cognición respecto al mundo que les rodea.

- Realizar estimaciones espaciales de gran escala.

Las estimaciones de gran escala también han mejorado enormemente con respecto al punto de partida. A pesar de no ser muy precisas tras trabajarlas, puesto que es una habilidad compleja, las estimaciones iniciales eran notoriamente menos acertadas (incluso a pequeña escala).

- Utilizar el desarrollo espacial de manera razonada en problemas y debates.

Problemas como la sombra del mapa de Flight Radar 24, la distancia al centro de la Tierra o la problemática del viaje a Marte en comparación con el viaje a la Luna han sido resueltos y justificados. Quizá no haya sido posible que descubrieran la ineficiente trayectoria de Yokohama a San Francisco por el corte del mapa. No obstante, este objetivo se ha logrado y es el más útil para el futuro de los estudiantes sin ninguna duda.

Finalmente, la evaluación global ha sido muy positiva a pesar de la pequeña muestra de alumnos analizada. Estudios futuros realizados en una situación de normalidad deberían ser más concluyentes trabajando con un mayor número de sujetos.

## 6. Conclusiones

Este trabajo está dividido en dos partes principales. La primera parte consiste en la aplicación de los conceptos teóricos sobre el desarrollo de la inteligencia espacial en la actividad docente. La segunda parte se trata de la puesta en práctica anecdótica de las actividades diseñadas. Las conclusiones que se pueden extraer de la primera parte son visiblemente válidas. Sin embargo la pequeña muestra de alumnos que han realizado las actividades no permite que se concluya una eficiente puesta en práctica con certeza.

### 6.1. Diversidad

La diversidad en las aulas es un hecho con el que siempre vamos a trabajar. Los docentes deben trabajar las debilidades y reforzar las fortalezas puesto que, de acuerdo al principio de multilateralidad, la mejora en una de las áreas ayudará al desarrollo del resto. Adicionalmente, cuantas más diversas sean las entradas de información que experimenten los alumnos, más se consolidará el conocimiento por la construcción de estructuras mentales más robustas.

El principio de multilateralidad tiene relación con la teoría de Piaget de obtener información a través de diferentes canales sensitivos y por otro lado con la teoría de las inteligencias múltiples de Gardner puesto que la mejora de una de ellas puede contribuir en la mejora de otra. El sistema educativo español y el marco legal en el que se encuentra fomentan el desarrollo de las competencias clave definidas a nivel europeo. Estas competencias clave están claramente fundamentadas en los estudios de las inteligencias múltiples de Howard Gardner.

Mejorar la inteligencia lingüística según Gardner o la competencia de comunicación lingüística según la ley educativa contribuye a una mejora de la capacidad de comprensión de las matemáticas. Esta aplicación del principio de multilateralidad se puede llevar a cabo con cualquier otra inteligencia o competencia clave. Algunos centros se han dado cuenta de esto y orientan sus metodologías docentes a proyectos transversales. No obstante, la serie de actividades propuestas en este trabajo contribuyen a la mejora de varias inteligencias o competencias y se centran en un objetivo de desarrollo de la cognición espacial en el marco de las matemáticas.

Albert Einstein decía que *“no se puede juzgar a un pez por su habilidad para trepar un árbol”* y un docente se suele encontrar con clases muy heterogéneas. Como profesores no debemos juzgar a nuestros alumnos por sus capacidades o deficiencias, pero sí debemos ser conscientes de ellas e intentar potenciar cada una de ellas al máximo nivel posible.

### 6.2. Motivación

Querer es poder. Un alumno motivado obtiene muchos mejores resultados que un alumno desmotivado debido a la atención que presta, a la curiosidad que muestra y al esfuerzo que aplica. Este es el primer axioma que debería aplicar todo docente.

Pero lo difícil es llamar la atención del alumnado, emocionarlo. Si con la metodología tradicional no se consigue este objetivo, se debe buscar alguna alternativa. Cambiar y analizar si aumenta la motivación utilizando el ensayo-error. No obstante, la neurociencia nos muestra que mediante las emociones se aprende mejor y esos aprendizajes perduran más en la mente

de los estudiantes. Utilizando la imaginación, se pueden diseñar actividades que generen esa curiosidad necesaria y que emocionen. Al inicio de las actividades propuestas se ha procurado mostrar problemas reales o historias motivadoras para conseguir este objetivo y en la pequeña puesta en práctica se ha conseguido.

Es esencial intentar mejorar las metodologías docentes cuando éstas no funcionan, porque solo puede desembocar en dos caminos: Mejorar el funcionamiento de la clase o quedarse como antes. No obstante, los avances en neurociencia constatan que un planteamiento docente con actividades emocionantes funciona mejor.

### 6.3. Puntos de mejora

La principal debilidad del trabajo es la reducida muestra de alumnos con la que se ha ensayado. No se puede concluir si los resultados de la práctica han sido positivos o negativos debido a ello.

La inclusión de los planos de simetría en los poliedros (Tabla 4) hubiese supuesto el estudio de todos los contenidos del bloque de geometría de 3º de la ESO de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. No se ha encontrado lugar para ello en las actividades propuestas dados los objetivos iniciales y se podría trabajar ese contenido al finalizarlas. Sin embargo, haber logrado tratarlo dentro de las actividades hubiese conseguido armonizar el trabajo mucho mejor con los contenidos del marco legal vigente.

### 6.4. Propuestas de continuación

El siguiente paso natural a este trabajo es la implementación en las aulas de los centros educativos. De esta manera, se pueden utilizar los beneficios que aporta al desarrollo de la inteligencia espacial de los alumnos y a la vez se puede evaluar la efectividad en un grupo numeroso.

Dependiendo del punto de partida, se puede ampliar la base del desarrollo de la cognición espacial con un mayor número de ejercicios en torno a las transformaciones de superficies y volúmenes contruidos de manera manipulativa.

Tras la realización de las actividades, se pueden plantear ejercicios de estimaciones de superficies y volúmenes de gran escala a los alumnos. Por ejemplo, podrían estimar la superficie de países insulares como Australia, Madagascar y Fiyi o podrían estimar el volumen de lagos como el Titicaca y el Victoria.

## Bibliografía

Agência Fapesp. (2010). *Mapa-múndi verde mostra altura das florestas da Terra*. Recuperado de: <https://www.institutodeengenharia.org.br/site/2010/07/27/mapamundi-verde-mostra-altura-das-florestas-da-terra/>

BBC News Mundo. (2019). *Cuál es el planeta más cercano a la Tierra (la respuesta no es tan simple como piensas)*. Recuperado de: <https://www.bbc.com/mundo/noticias-46911045>

Camargo Uribe, L. (2011). *El legado de Piaget a la didáctica de la Geometría*. Revista Colombiana de Educación, N. 60, pp. 41-60.

CEIP Manuel Bartolomé Cossío. (s.f.). *Escala gráfica*. Recuperado de: [http://www.bartolomecossio.com/MATEMATICAS/escala\\_grfica.html](http://www.bartolomecossio.com/MATEMATICAS/escala_grfica.html)

Chinochano. (2019). *Hay que VER, ESTos alpinistas*. Recuperado de: <http://chinochano.org/hay-que-ver-estos-alpinistas/>

Flightradar24. (s.f.). *Live Flight Tracker - Real-Time Flight Tracker MAp*. Recuperado de: <https://www.flightradar24.com/>

Gardner, H. (1983). *Multiple intelligences*. New York: Basic Books.

GeoGebra. (s.f.). *Graficadora 3D*. Recuperado de: <https://www.geogebra.org/3d>

Gobierno Vasco. (s.f.). *Mapa con escala numérica*. Recuperado de: <https://elearning13.hezkuntza.net/014312/mod/url/view.php?id=143>

Google. (s.f.). *Google Maps*. Recuperado de: <https://www.google.com/maps>

LA PAPELERA DE SHON. (30 de agosto de 2018). *COMO HACER UNA FIGURA GEOMÉTRICA DE UN CUBO CON PAJITAS* [Vídeo]. YouTube.

<https://www.youtube.com/watch?v=m269lylM1c>

Libertad Digital. (s.f.). *Sistema Solar*. Recuperado de: <https://www.libertaddigital.com/lugares/sistema-solar/>

Ministerio de educación, cultura y deporte. (9 de diciembre de 2013). *Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa*. Boletín Oficial del Estado.

Ministerio de educación, cultura y deporte. (26 de diciembre de 2014). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Boletín Oficial del Estado.

Ministerio de educación, cultura y deporte. (29 de enero de 2015). *Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato*. Boletín Oficial del Estado.

Mora, F. (2013). *Neuroeducación, solo se puede aprender aquello que se ama*. Madrid: Alianza Editorial.

NASA. (s.f.). *NASA's Eyes*. Recuperado de: <https://eyes.nasa.gov/>

Piaget, J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives: problème central du développement*. Paris: PUF

Piaget, J., & Inhelder, B. (1947). *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Paris: PUF

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1948). *La géométrie spontanée chez l'enfant*. Paris: PUF

Rivera, A. (15 de febrero de 2018). La Fosa de las Marianas: el Everest invertido del océano. MARCA. Recuperado de: <https://www.marca.com/otros-deportes/volvo-ocean-race/2018/02/15/5a8494f9ca4741e2318b45c1.html>

Tellez, M. (2013). *Principio de multilateralidad*. Recuperado de: <http://educacionfisicacuarto.blogspot.com/2013/03/principio-de-multilateralidad.html>

Time and Date AS. (s.f.). *Time Zone Map*. Recuperado de: <https://www.timeanddate.com/time/map/>

Úbeda, V. (2014). *El principio de multilateralidad y especialización progresiva*. Recuperado de: <http://www.vicenteubeda.com/el-principio-de-multilateralidad-y-especializacion-progresiva/>

Verne, J. (1864). *Viaje al centro de la Tierra*. Paris: Pierre-Jules Hetzel.

Verne, J. (1872). *La vuelta al mundo en 80 días*. Paris: Pierre-Jules Hetzel.