DEMOSTRACIONES GEOMÉTRICAS MEDIANTE APLICACIONES INFORMÁTICAS

Trabajo Fin de Máster

Máster Universitario en Formación del Profesorado

Presentado por:

Alejandro Esteban Rincón.

Dirigido por:

Alberto Lastra Sedano.

Alcalá de Henares, a 20 **de** Junio **de** 2020

Índice

Introducción **1**

Objetivos... 1

Estado de la cuestión y fundamentación teórica.. 3

El estudio **10**

Descripción.. 10

Contexto 11

Análisis de herramienta y posibilidades. 12

Relación 12

Comprueba y DemuestraDetalles 17

EcuaciónLugar... 18

Actividades 21

Actividad 1 “Paralelogramos” 21

Actividad 2 “Círculo y circunferencia” 26

Actividad 3 “Mediatriz y circuncentro” 31

Actividad 4 “Bisectriz e incentro”... 36

Actividad 5 “Puntos notables”.. 40

Actividad 6 “Teorema de Pitágoras” 43

Puesta en práctica en el aula 47

Puesta actividad 1 “Paralelogramos”.. 48

Puesta actividad 2 “Círculo y circunferencia”... 49

Puesta actividad 3 “Mediatriz y circuncentro” 49

Puesta actividad 4 “ Bisectriz e incentro” 50

Puesta actividad 5 “Puntos notables” 50

Puesta actividad 6 “Teorema de Pitágoras”.. 51

Currículo y competencias. 52

Estándares de Aprendizaje Evaluables (EAE).. 53

Competencias 54

Recogida de datos, análisis de la información, resultados y plan de acción. 56

Conclusiones... 57

Resultados finales.. 57

Implicaciones... 58

Bibliografía... 59

Anexo 62

Calendario.. 62

Formularios (Google Forms).. 63

Introducción

Objetivos

Las matemáticas fuera del ámbito universitario, en términos generales, son impartidas desde una perspectiva enfocada hacia el cálculo de resultados numéricos, sin apenas mostrar a los alumnos conceptos de demostración adaptados al nivel correspondiente. Respecto a esto, no estamos hablando de poner a los alumnos a hacer demostraciones complejas, sino de introducirles a ellas de manera intuitiva a través de conceptos como propiedad, condición necesaria, contraejemplo… Reflexionando sobre esto, nos surge una pregunta ¿Cómo podemos introducir a los alumnos en el mundo de la demostración matemática? Sin lugar a dudas, se trata de algo complejo, ya que éstas se rigen por el formalismo y requieren exactitud. Existe un software orientado a la docencia llamado GeoGebra, cuya incorporación en el aula, ayuda a mejorar diferentes aspectos académicos de los alumnos, por ejemplo, a nivel competencial (García, 2011). Este programa, incorpora funcionalidades de demostración matemática formal, que lleva desarrollando, principalmente durante la última década, ofreciendo técnicas cada vez más sofisticadas y eficientes. Es por ello, que surge la idea de trabajar con los alumnos estos aspectos a través de GeoGebra.

La incorporación gradual de software de geometría dinámica que se está produciendo en las aulas, pone de manifiesto la necesidad de formar al alumno en aspectos demostrativos, ya que es común encontrarnos ante situaciones donde el alumno que tiene una construcción creada desliza los diferentes elementos de ésta y al ver que en sus pruebas se cumple una propiedad, piensa que es formalmente cierta. Sin embargo, hay propiedades que no se cumplen únicamente en un punto y si el alumno no hace pasar su construcción por dicho punto, pensará que la propiedad es totalmente cierta. Es por esto, que creemos que este nuevo enfoque que proponemos, ayudará a los alumnos a minimizar errores como el comentado. Trabajando diferentes competencias y también habilidades ,muy importantes para el desarrollo de las matemáticas, que apenas se están trabajando como la búsqueda de contraejemplos o de condiciones que cumplan una propiedad (condiciones necesarias). A todo esto, hay que añadir que se puede conseguir eliminar falsas creencias sobre propiedades erróneas que pueda llegar a tener el alumno.

En este documento, reflexionaremos sobre cuáles son los puntos fuertes y débiles que existen al trabajar con esta metodología en cursos anteriores al ámbito universitario. Así como, el grado hasta el cual es beneficiosa la incorporación de este tipo de funcionalidades que ofrecen el resultado directamente al alumno, como ya sucedió antes con otros utensilios como las calculadoras, ya que consideramos que debe existir un control del uso, porque de otro modo, el abuso de software de demostración automática puede conducir al alumno hacia su dependencia.

Los objetivos sobre los que realizamos este trabajo es poder responder las preguntas que aparecen con el nacimiento de estas funcionalidades en herramientas de índole educativo, como por ejemplo, si dichos programas son lo suficientemente potentes como para poder trabajar en el aula, el método de trabajo que resulta más eficiente para que el alumno desarrolle sus conocimientos y competencias, el grado trabajo de cada una de las competencias con este tipo de funcionalidad, la actitud y emociones que se generan en los alumnos cuando trabajamos con este tipo de metodología… De cualquier modo, debido a las limitaciones en las que actualmente nos encontramos[1], el alcance del trabajo será puramente teórico, donde se desarrollará y describirá de manera minuciosa como realizar el estudio. Para ello han sido creadas una serie de "actividades" en GeoGebra, cuya finalidad no es trabajarlas como una serie de ejercicios que se le da al alumno y este de manera individual los hace, más bien son un material de apoyo a las explicaciones del docente. Algo parecido a un PowerPoint sobre el que el profesor se apoya y , en este caso, al ser dinámico, el alumno puede interactuar también. Como se verá en apartados posteriores son actividades minuciosamente preparadas y estructuradas con el fin de que en el estudio se lleven al aula para trabajar con los alumnos, pero también para la recopilación de los resultados, intentando de este modo, dar respuesta a las preguntas que pretende resolver el estudio.

Como comentaremos de manera más profunda en el apartado "Estado de la cuestión y fundamentación teórica", hay muy pocos estudios sobre la incorporación en el aula de funcionalidades de demostración geométrica automática, en la mayoría de los casos, estos estudios están realizados sobre personas con un nivel educativo universitario, como por ejemplo en (Recio, Richard y Vélez 2019). De este modo, nuestro trabajo es uno de los pioneros en dicha temática, donde analizamos cómo trabajar con alumnos de

[1] En 2020 ha habido una pandemia global debido al virus COVID-19 que ha supuesto la suspensión de las clases presenciales en España.

secundaria, de la cual prácticamente no hay precedentes, con el fin de que un día se ponga en práctica y pueda servir ayuda e inspiración a otras personas que quieran realizar un estudio sobre dicha temática.

La metodología de trabajo y los programas en GeoGebra creados para analizar los datos y trabajar con los alumnos en el aula, también ayudan a la compresión sobre el funcionamiento de los diferentes comandos de demostración automática en GeoGebra, por lo que, a pesar de no ser el objetivo fundamental del trabajo. Dichos programas pueden ayudar a los diferentes docentes de matemáticas a conocer estos comandos y, también, a tener a su disposición una propuesta de como trabajar con sus alumnos las funcionalidades de demostración automática. Además, como las actividades que han sido creadas, están subidas en la nube de GeoGebra el acceso a ellas es bastante fácil y suponen un recurso más para todos aquellos docentes que, al verlas, quieran trabajar a través de ellas con sus alumnos.

Estado de la cuestión y fundamentación teórica.

Desde su existencia, los ordenadores, han sido de gran utilidad para facilitar y agilizar procesos de cálculo. Hasta finales del siglo XX, no se comienza a plantear su utilidad en las demostraciones matemáticas. Es en el año 1976, cuando es aceptada la primera demostración que hace uso de un ordenador, concretamente en el famoso teorema de los cuatro colores. La aceptación de una demostración que hacía uso de un ordenador supuso una gran polémica y fue rechazada por algunos matemáticos. Otro famoso resultado que su demostración hace uso de un ordenador es la Conjetura de Kepler, que recurre a los denominados "formal proof assitant"[2]. En cuanto a la geometría, una de las publicaciones pioneras fue (Wu, 1978) donde se establece un método algebraico mecanizado para demostraciones geométricas. Provocando el nacimiento de los llamados algoritmos de *Demostración Automática de Teoremas* (DAT) que aseguran categóricamente la veracidad de un resultado y su validez matemática es absoluta.

Con el avance de los métodos de demostración automática, surge la cuestión de cómo interfiere esta nueva metodología en el mundo de la enseñanza. Podemos ver una reflexión sobre esto en (Recio, 2001), donde se analiza la gran diferencia que existe entre demostrar y enseñar a demostrar. También se reflexiona sobre la gran importancia

[2] Software que interactúan con el usuario para encontrar demostraciones formales.

de realizar una buena elección sobre qué demostrar y qué no, a qué grupos demostrar y cuáles no. Ya que un uso excesivo de demostraciones sin utilidad en el proceso de aprendizaje puede llevar a la disminución de la atención y la falta de motivación. Al igual que sucedió con las calculadoras hace años, es necesario investigar sobre como ayudarían estos nuevos elementos tecnológicos y hasta qué punto utilizarlos.

GeoGebra es un software interactivo de educación matemática que surge en 2002 como tesis de Máster de Markus Hohenwarter (Hohenwarter, 2002), en la universidad de Salzvurg. El objetivo era poder trabajar el álgebra y la geometría de manera conjunta en un solo programa, ya que hasta aquel entonces solo existían programas que trabajan estos campos por separado. Debido a sus múltiples funcionalidades y su sencillez, actualmente es una de los software más utilizados de pedagogía matemática, traducido a más de 50 lenguas y usado en más de 180 países. Es habitual ver como los alumnos que se inician en el uso de este software, quedan convencidos sobre la veracidad o falsedad de un resultado mediante la comprobación visual que se realiza al arrastrar al azar los elementos creados, al ver que ciertas propiedades permanecen. De esto modo, parece interesante la incorporación de funcionalidades DAT para trabajar dichas creencias que existen en los alumnos y aportarles una herramienta que les permita confirmar o rechazar los resultados matemáticamente y no solo visualmente, como se ha ido haciendo hasta el momento.

En la primeras versiones de GeoGebra, concretamente desde 2002, existía la herramienta *Relación* que daba respuesta a las relaciones básicas que existían entre dos objetos, concretamente: la perpendicularidad, el paralelismo, la igualdad o la incidencia. La respuesta estaba basada en criterios numéricos, de tal modo que, el programa consideraba que dos rectas eran paralelas, si los vectores que se tomaban de ellas eran "aproximadamente" proporcionales, es decir, si dada la precisión de número de dígitos seleccionada por el usuario en los ajustes del software, ambos vectores resultaban ser proporcionales, por lo tanto, se trata de una respuesta "aproximada" pero que, en ningún caso, es una verdad matemática rigorosamente cierta.

En 2010 aprovechando la consolidación de los métodos DAT, se inicia en GeoGebra un proceso de incorporación de dichos métodos en su software, incorporando sofisticadas técnicas de geometría algebraica, lógica formal y álgebra computacional. Consiguiendo desarrollar nuevos comandos como: Comprueba(), CompruebaDetalles() y

EcuaciónLugar(), dichas incorporaciones, abrieron más el debate sobre cómo utilizarlas para enseñar a los alumnos y dónde se debían establecer los límites de su uso. El comando Comprueba(<proposición>), trata de dar respuesta a la proposición introducida, los resultados que puede devolver son "true", "false" o "indefinido" en el caso de que GeoGebra no sea capaz de determinar la veracidad o falsedad de la proposición. El DemuestraDetalles(<proposición>)[3] es más preciso y devuelve una lista cuyo primer elemento es "true" o "false" refiriéndose a la veracidad o falsedad de la proposición y los siguientes elementos de la lista son las condiciones que harían que la proposición no se cumpliera, están condiciones son naturaleza puramente algebraica, por lo que hay en ocasiones que dicha naturaleza algebraica tiene sentido geométrico, pudiendo ayudar a la compresión de los alumnos sobre las premisas necesarias y suficientes para que se verifique un teorema, pero hay que tener cuidado, ya que hay en otras ocasiones en las que el sentido algebraico y geométrico no concuerdan. En cuanto al comando Relación(), del mismo modo que en las versiones anteriores, la herramienta devuelve una respuesta basada en el procedimiento de "aproximación" descrito anteriormente, pero se le añade una nueva funcionalidad que podemos activar pulsando en la etiqueta "Más ..." que sale junto con la respuesta. Si la etiqueta es activada se pone en marcha el subsistema DAT de GeoGebra para determinar si la propiedad obtenida es rigurosamente cierta. Además, existe la posibilidad de que GeoGebra establezca las "*condiciones de no degeneración*" que describen las situaciones (por ejemplo, A es igual B) sobre las que la propiedad deja de ser cierta. Por último, EcuaciónLugar() tiene diferentes estructuras que explicaremos más adelante, pero básicamente lo que hace es calcular la ecuación de un lugar geométrico ya determinado, de un lugar geométrico sobre el que se mueve un punto que o tiene restringido su movimiento por su construcción o sobre el que establecemos la restricción, por ejemplo, dados 3 puntos A,B y C sin restricciones EcuaciónLugar(EstanAlineados(A,B,C), A) nos dará como solución la recta que pasa por B y C que es el lugar geométrico donde tiene que "vivir" A para que los tres puntos estén alineados, para más detalle véase (Kovács, 2015).

Como se comenta en (Ueno, 2016) y (Ueno, 2017) la respuesta de estos comandos depende del método de construcción seguido a la hora de la creación de los diferentes elementos. Obteniendo mejores resultados, cuando la construcción ha sido realizada utilizando herramientas más básicas como: "Recta", "Recta perpendicular",

[3] En las nuevas versiones CompruebaDetalles() se suprimió por DemuestraDetalles().

“Circunferencia”… en contraposición con otras más sofisticadas como “PoligonoRegular”. Además, los resultados que estos demostradores automáticos ofrecen han ido mejorando con la distintas versiones de GeoGebra y se ha podido comprobar que ejemplos de resultados incompletos que se comentan en (Ueno, 2016) y (Ueno, 2017) han sido solventados en la versión 6.0 de GeoGebra.

Tras está gran evolución en la demostraciones automáticas, se abre el debate ¿Cómo repercute este tipo avances e incorporaciones de métodos DAT en programas con finalidad pedagógica matemática como GeoGebra? Con lo que hemos visto anteriormente, podemos asegurar de que a nivel técnico se ha conseguido llegar a un alto grado de madurez y estás nuevas funcionalidades poseen gran calidad. Sin embargo, aunque existen algunas propuestas en el marco educativo, véanse (Hohenwarter, Kovács & Recio, 2019b) y (Recio, Richard & Vélez, 2019), es evidente que nos encontramos en una fase inicial, que es necesaria desarrollar para poder determinar cómo interfiere el uso de estas herramientas en la educación y dar respuesta a multitud de preguntas que surgen como: ¿Hasta qué punto es bueno su uso?, ¿Cuáles son las restricciones que se deben establecer? como en su día se establecieron con el uso de otros recursos tecnológicos que surgieron en cada momento como por ejemplo la calculadora, si ahora las nuevas tecnologías pueden resolver problemas que antes no los resolvían las personas ¿Deben cambiar los contenidos impartidos? etc.

Algunos trabajos que proponen el uso de estas herramientas de demostración automática en educación como (Kovács, Recio, Richard & Vélez 2017) y (Vélez, 2018), dividen el razonamiento en matemáticas en 3 grupos:

Deducción: un ejemplo sería cuando tenemos la regla “Si dos rectas paralelas distintas no se cortan” y el caso “Estas dos rectas distintas son paralelas” entonces el resultado por deducción seria “Estas dos rectas no se cortan”.

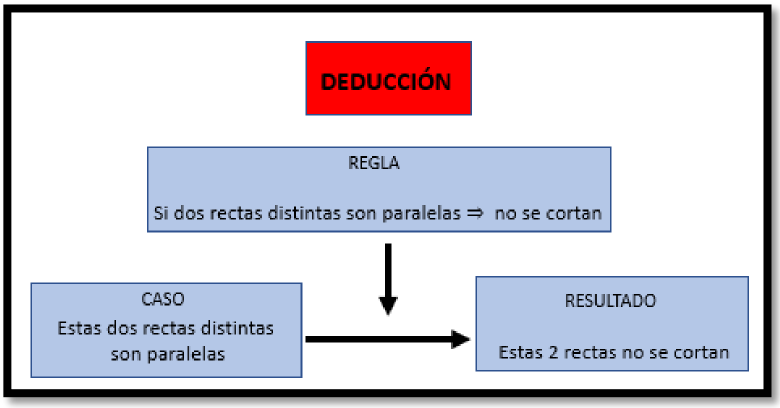


Ilustración 1. Diagrama de deducción

Inducción: en el ejemplo anterior sería cuando tenemos el caso "Estas dos rectas distintas son paralelas" y el resultado "Estas dos rectas no se cortan", y a través de ello pasamos plantearnos la regla "Si dos rectas paralelas distintas no se cortan"

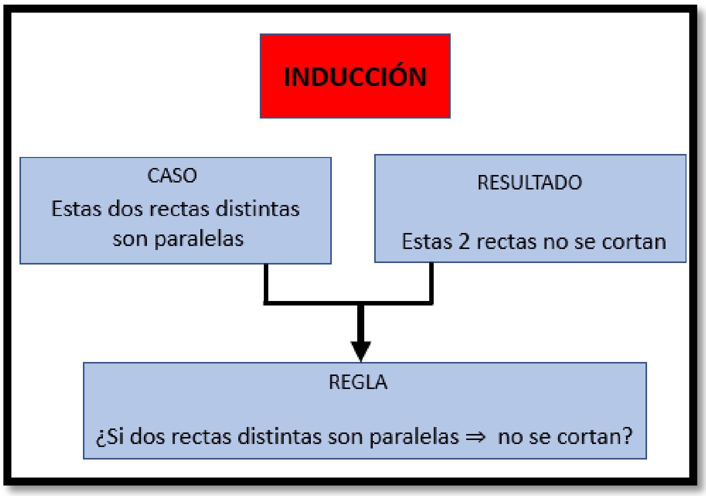


Ilustración 2. Diagrama inducción

Abducción: siguiendo con el ejemplo, sería cuando tenemos la regla "Si dos rectas paralelas distintas no se cortan" y el resultado ""Estas dos rectas distintas son paralelas" y a través de ello pasamos a preguntarnos si se verifica el caso "Estas dos rectas distintas son paralelas",

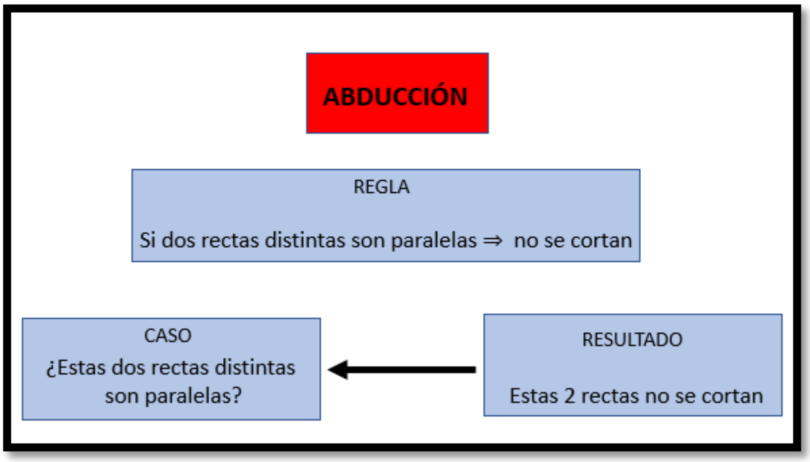


Ilustración 3. Diagrama abducción.

Como se menciona en (Kovács., Recio, Richard, & Vélez, 2017) y (Vélez, 2018), GeoGebra permite al alumno realizar las acciones de derivar, descubrir y demostrar, utilizando las tres formas de razonamiento descritas anteriormente (deducción, inducción y abducción) a través de la geometría, esto es posible gracias a las herramientas de razonamiento automático como Relación, EcuaciónLugar, Comprueba ,DemuestraDetalles… que han sido implantadas en el software.

La derivación consiste en hallar y/o conjeturar las propiedades que se cumplen entre objetos en una construcción. El comando que facilita la realización de esta labor es Relación, como hemos explicado anteriormente, ofrece una primera respuesta únicamente de tanteo numérico, pero pulsando en la etiqueta "Más …" nos ofrece otra respuestas más rigurosa y con total veracidad matemática. Dicho comando nos permite comparar:

- Recta/s: perpendicularidad, paralelismo, tangencia (o transversalidad) a otras rectas o cónicas, concurrencia.
- Punto/s: pertenencia a recta o cónica, tres puntos están alineados, cuatro puntos son cocíclicos o colineales.
- Igualdades entre dos o más objetos: áreas, longitudes, puntos.

El descubrimiento, se refiere al proceso que se produce desde la reflexión del alumno sobre cuáles son las modificaciones que deben realizar en una construcción propuesta para que una propiedad determinada se cumpla, hasta conseguir obtener la respuesta. En este caso, el comando EcuaciónLugar es el que permite trabajar con ello y descubrir la ecuación algebraica de:

- Un lugar geométrico definido previamente definido con la herramienta LugarGeométrico[4]
- El lugar geométrico donde debe "vivir" un punto definido en base a las restricciones de otro punto, que también tiene restricciones. Por ejemplo: dada una circunferencia c de centro O y un punto A que pertenece a ella, definimos B como el punto medio del segmento AO, si escribimos en la entrada de GeoGebra EcuaciónLugar(B, A) nos da la ecuación de todos los puntos medios que están entre los puntos que pertenecen a la circunferencia (la restricción que le hemos puesto al punto A "pertenecer a la circunferencia") y su centro(la restricción que le hemos puesto a B "ser punto medio del centro y de un punto que pertenece a la circunferencia"). Para este caso particular, la ecuación que nos da como respuesta GeoGebra es la ecuación de la circunferencia de centro O y de radio la mitad del radio de c.
- El lugar geométrico sobre el que debe "vivir" un punto, para que se cumpla una determinada propiedad: estar alineados, ser cocíclicos, ser paralelas… Por ejemplo, dada una recta r, los puntos A, B y la recta p definida como la recta que pasa por A y B, si escribimos EcuaciónLugar(SonParalelas(r, p), B) en la entrada, la respuesta será la ecuación de la recta paralela a r que pasa por A, es decir, para que r y p sean paralelas, B tiene que pertenecer a la recta paralela a r que pasa por A.

La demostración, se refiere al proceso de verificación de las relaciones conjeturadas a nivel general, para ello se utilizará el comando Comprueba. Para ver determinar cuáles son las condiciones excepcionales sobre las que no se verifica la propiedad (*condiciones de no degeneramiento),* utilizaremos el comando DemuestraDetalles.

En (Recio, Richard y Vélez 2019), se describe un experiencia en la que se pone en práctica el uso de las herramientas de demostración automática de GeoGebra con fines educativos, el trabajo se lleva a cabo en la Universidad de Cantabria (España), Université de Montréal (Canadá) y Universidad Antonio de Nebrija (España) con 75 estudiantes que se encontraban realizando el máster de formación de profesorado de secundaria en la especialidad de matemáticas. El trabajo consistía en dar una formación previa de dos horas sobre el uso de herramientas DAT de GeoGebra, una vez conocidas

[4] Para más información con el comando LugarGeomético ir a: https://wiki.geogebra.org/es/Herramienta_de_Lugar_Geom%C3%A9trico

las herramientas, a lo largo de las siguientes sesiones, se les preguntaba a los alumnos ,que habían sido divididos en grupos de dos o tres personas, una serie de cuestiones que debían abordar realizando una conjunto de actividades guiadas con GeoGebra. Se puede decir, que la reacción general de los alumnos hacia las herramientas DAT fue positiva, sin embargo, durante el desarrollo de las tareas, los alumnos se encontraban más cómodos utilizando métodos y argumentaciones más tradicionales que llevaban desarrollando y trabajando a lo largo de su vida. Al no estar familiarizados a trabajar con técnicas DAT no aprovecharon todo el potencial que estas ofrecen. Es por esto, que sería interesante la realización de más trabajos de este tipo y sobre todo en alumnos que estén cursando secundaria para determinar el alcance que pueden llegar a tener la inclusión de estas nuevas herramientas DAT en la enseñanza de la geometría.

El estudio

Descripción

Ante la situación sanitaria de pandemia global debido al virus COVID-19, el estudio no ha podido llevarse a la práctica, por lo que será puramente teórico. En este apartado se tratarán diferentes aspectos como: el contexto de los alumnos, analizaremos las herramientas y sus posibilidades didácticas, la puesta en práctica en el aula, actividades creadas, recogida de datos…Todo ello de manera teórica sobre una situación hipotética que hemos desarrollado, pudiendo realizar algún tipo de modificación en el caso de que en un futuro se pueda realizar el estudio de manera práctica, adaptándolo a las circunstancias particulares, a nivel de centro, alumnado… En las que nos encontremos. En cualquier caso, el estudio ha sido diseñado de manera flexible, haciendo posible la modificación de su estructura para las distintas circunstancias que se puedan encontrar.

El software sobre el que se va a trabajar en el estudio es GeoGebra, pues es el que más posibilidades ofrece a nivel educativo para trabajar sobre demostraciones geométricas automáticas en secundaria. Para la realización del estudio, han sido creadas una serie de programas adaptados al currículo de los alumnos sobre los que se va a practicar el estudio. Debido a las posibilidades que ofrece la herramienta Google Forms en la recopilación de datos también se crearán diferentes cuestionarios para alumnos y profesores que han de rellenar. Además, describiremos como sería la puesta en práctica en el aula, la recogida de datos, currículo y competencias, análisis de la información y los resultados.

Contexto

Planteamos un centro público en el cual vamos a realizar el estudio ubicado en Guadalajara, Castilla La-Mancha. Por lo que sus contenidos de currículo vienen determinados por (Real Decreto, 2015) y más concretamente (Decreto , 2015) de su comunidad autónoma. El curso en el cual realizaremos nuestro estudio será 1º ESO, donde el centro tiene tres grupos A, B y C de 28 alumnos cada uno. Para contrastar datos los resultados: en el grupo de A se trabajará como se viene haciendo durante todo el curso, en el grupo B se incorporará GeoGebra, pero sin utilizar comandos de demostración automática y en el grupo C se recurrirá a GeoGebra y funcionalidades demostración automática. De este modo, en este último grupo va a ser donde vamos a centrar principal atención. Los alumnos están distribuidos en las clases de manera heterogénea, los niveles similares son similares y en cada grupo existen alumnos con distintas capacidades en matemáticas. La razón por la cual, en el grupo A se continua con la metodología habitual, es con el fin de poder comparar los datos frente los grupos que trabajan con GeoGebra, de manera que sea más posible detectar cuáles son los puntos fuertes y débiles de la metodología habitual y los de las metodologías en las que se incorpora GeoGebra. Del mismo modo, en el grupo B trabajarán con GeoGebra, pero sin comandos de demostración automática, para poder contrastar en nuestro estudio, entre una metodología de GeoGebra que no utiliza los comandos de demostraciones automáticas y una metodología de GeoGebra que sí que los utiliza, para así ver los aspectos en los que influye la incorporación de dichos comandos en metodologías que usan GeoGebra.

En los 3 grupos el docente es el mismo y el centro posee recursos suficientes como para poder trabajar 3 alumnos en un ordenador, concretamente, tiene 10 ordenadores y en aula existe un proyector donde se puede compartir la pantalla del ordenador del profesor. Los alumnos no tienen conocimientos previos de GeoGebra, por lo que tiene que ser enseñados. En cuanto a los alumnos con necesidades especiales se valorará como adaptarles la actividad, principalmente a los que necesitan adaptación curricular significativa (ACNEE), se les proporcionará otro material adaptado a sus capacidades y se analizará como proceder para cada alumno concreto, debido a la gran variedad de casos posibles y al carácter de especificación que hay que realizar para cada caso particular, consideramos que un desarrollo más profundo de esta temática en el estudio se escaparía del alcance de extensión sobre el que se ha diseñado este trabajo, abriéndose la posibilidad de realización de otros estudios. De este modo, como hemos comentado el docente deberá asegurar la involucración del alumno con necesidades especiales dentro de la actividad, determinando como modificar la misma para ello, pudiendo ser un punto de análisis en este el estudio, pero la influencia de la metodología propuesta en este trabajo en alumnos con necesidades especiales se escapa del alcance de este estudio.

El curso elegido ha sido 1º ESO, pues consideramos que, aunque el objetivo es el trabajo de esta metodología a lo largo de todos los curso de secundaria, el aprendizaje será mucho mejor en cursos posteriores si se ha trabajado de esta manera en los anteriores. Además, puede existir la creencia de que esta metodología es únicamente para alumnos de nivel universitario, por lo que este estudio también ofrece un enfoque de como trabajar con alumnos que aún no tienen conocimientos avanzados de matemáticas.

Análisis de herramienta y posibilidades.

En esta primera fase vamos a mostrar las posibilidades que ofrece GeoGebra a nivel de demostración de geometría automática y analizaremos cómo podemos utilizarlas para la docencia. Los comandos de demostración automática que ofrece GeoGebra son 4:

Relación

El comando Relación[<Objeto>, <Objeto>][5] permite trabajar desde la ventana de entrada y a través de los iconos de acceso directo de GeoGebra.

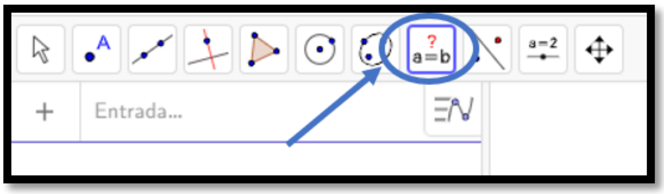


Ilustración 4. Acceso directo del comando Relación

[5] Más información del comando Relación en https://wiki.geogebra.org/es/Comando_Relaci%C3%B3n

Básicamente, lo que hace este comando es buscar características que existen entre dos objetos (son iguales, perpendiculares, paralelos…) y dar una respuesta según su comparación numérica, es decir, aproximada y basada en el número de cifras de redondeo que se tiene configurado en el software de GeoGebra, de este modo, si tenemos dos puntos A = (0.00000001,0) , B= (0,1) y escribimos en la pantalla de entrada Relación(A,B) nos encontraremos con el siguiente mensaje:

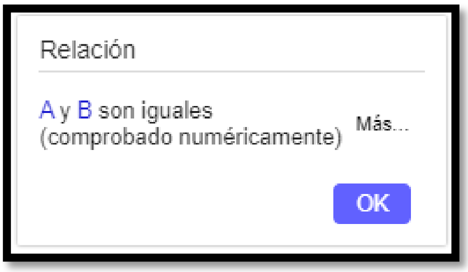


Ilustración 5. Ventana resultado de Relación.

Apareciendo un botón al lado de la derecha de la ventana donde pone “Más” que y si pulsamos encontramos lo siguiente:

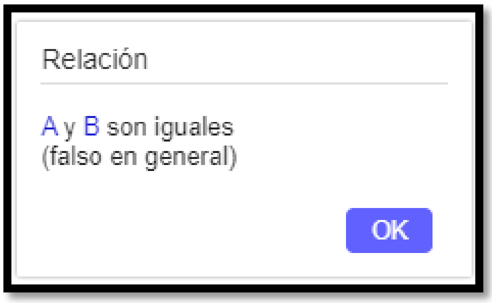


Ilustración 6. Ventana resultado Relación "Más".

Lo que sucede cuando pinchamos en este botón es que GeoGebra recurre a diferentes técnicas de demostración automática para determinar si la proposición es cierta o falsa, de este modo, la respuesta proporcionada, a diferencia de la anterior, se trata de una verdad absoluta que posee veracidad matemática total. Cuando establecemos una relación entre dos objetos, hay ocasiones en las que no aparece esta opción de “Más”. Esto sucede porque, según se indica en (Vélez, 2018), este comando solo es capaz de analizar algunas propiedades, de modo que, el botón ”Más” aparecerá cuando el programa pueda analizar los objetos por los que le hemos preguntado. En (Ueno, 2019) podemos ver las situaciones donde este comando es capaz de detectar la relación que existe entre dos objetos son:

- Perpendicularidad entre dos rectas o segmentos.
- Paralelismo entre dos rectas o segmentos.
- Igualdad entre dos puntos, longitudes, o áreas de polígonos.
- Pertenencia de un punto a un segmento, recta o cónica.
- Tangencia entre una recta y una cónica.

Como podemos ver, no va a ser posible trabajar todo el currículo de secundaria, ya que el comando no es capaz de comparar ángulos de manera formal, por lo que a la espera de nuevas actualizaciones que incorporen mejoras en este aspecto, las únicas propiedades sobre las que vamos a poder trabajar sobre ángulos, son aquellas en la que el ángulo sea recto, ya que podemos categorizarlo a través de la perpendicularidad de los segmentos o rectas que lo forman. Además, este comando tiene la capacidad de informar cuáles son las condiciones bajo las que se verifica la propiedad, por ejemplo, dada la siguiente construcción donde C es el punto medio del segmento AB:

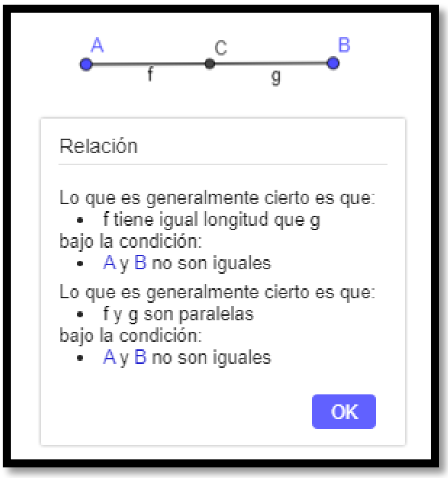


Ilustración 7. Relación segmentos punto medio.

También existe la posibilidad de Relación[<Lista>] de modo que el programa busca relaciones entre los elementos de lista, donde como se indica en (Ueno, 2019) de las situaciones en las que es capaz ofrecer respuesta son:

- Tres líneas son concurrentes.
- Tres puntos son colineales.
- Cuatro puntos son cocíclicos.

En el caso de que queramos saber la relación de 3 o más objetos con la herramienta “Relación” lo haremos con el botón derecho.

En cuanto al uso de este comando en aula, podemos puede ser de utilidad en las siguientes situaciones:

- **<u>Autoverificación de las propiedades de una construcción hecha por el propio alumno</u>**: Una actividad interesante sería la de pedir al alumno que haga una construcción que verifique una o varias propiedades, que sean posibles de probar de manera formal con GeoGebra. Por ejemplo, “ *Realiza una construcción en GeoGebra de un triángulo con al menos un punto libre que cumpla que siempre es isósceles*”. Una solución a esta actividad sería la de crear una circunferencia c de centro A y que pasa por B, y crear un punto C que pertenezca a c.

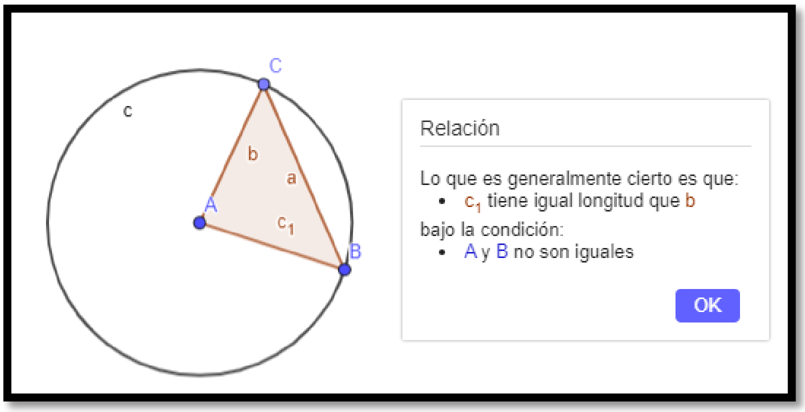


Ilustración 8. Comprobación triangulo isósceles.

Como vemos el triángulo ABC es un triángulo que bajo las restricciones que lo hemos construido siempre es isósceles. Cuando el alumno realice una construcción errónea, podrá comprobarlo mediante este comando pasando a probar con otras construcciones y ,de este modo , eliminar creencias erróneas que tenía anteriormente en su cabeza.

- **<u>Investigar qué condiciones son necesarias para cumplir una propiedad</u>**: Supongamos que, bajo las condiciones de la actividad anterior, un alumno realiza una construcción donde construye un cuadrado con la herramienta polígono regular con vértices A,B,C y D, para luego formar su triángulo con la unión de tres vértices A, B y D, como en la siguiente imagen:

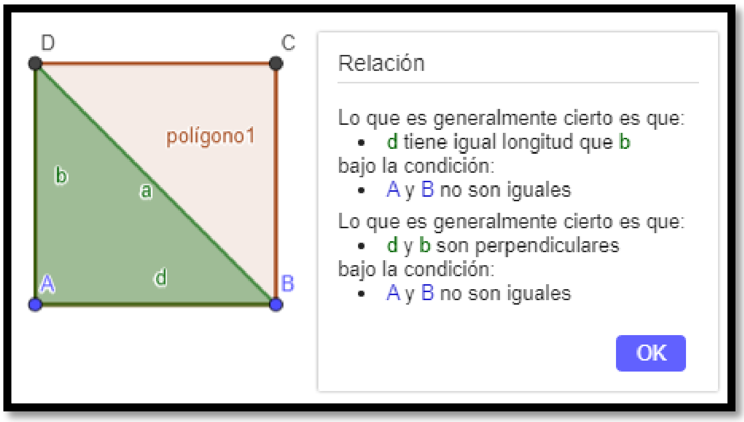


Ilustración 9. Triángulo isósceles rectangular.

Como vemos al preguntar por la relación entre b y d, además de la propiedad que andábamos buscando (b=d), podemos ver que se cumple otra propiedad (b y d son perpendiculares), de este modo, surge la pregunta de si todos los triángulos isósceles tienen dos lados que son perpendiculares, teniendo el alumno que investigar si es cierta o buscar algún contraejemplo.

- **Búsqueda de condiciones suficientes o categorizaciones:** Una actividad que realizaremos a los alumnos en nuestro estudio es la de trabajar las diferentes características de los paralelogramos, buscando dar una definición exacta de cada uno de ellos (cuadrado, rectángulo, rombo y romboide):

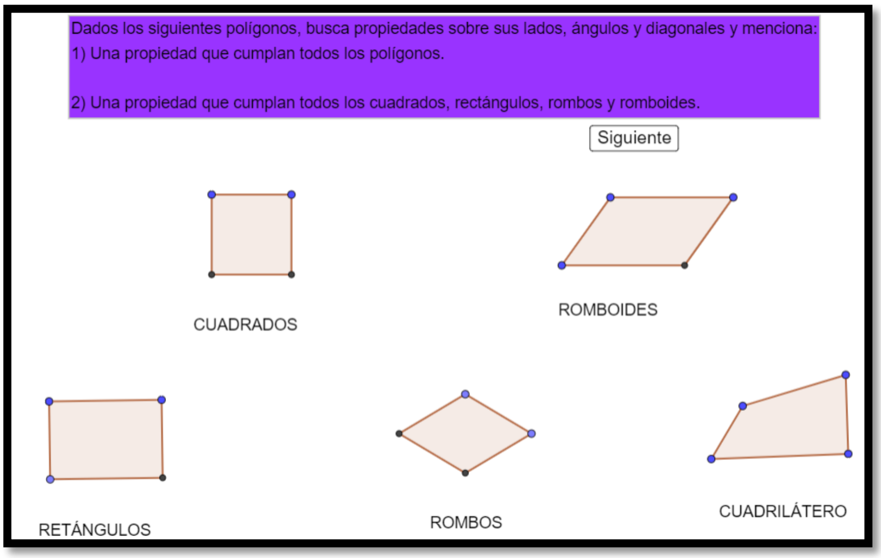


Ilustración 10. Propiedades de Paralelogramos.

Como explicaremos más adelante, el alumno tiene que encontrar propiedades que sólo cumplan los cuadrados (respectivamente rectángulos, rombos, romboides), de manera que el comando Relación le va a servir como herramienta de verificación y de información en la búsqueda de propiedades (lados iguales, diagonales perpendiculares…) para finalmente tener que dar un definición formal de cuadrado, rombo… a través de la propiedades que cumple ,por ejemplo, una posible definición de un alumno sería “Un *cuadrado es todo polígono que cumple que: tiene 4 lados, todos sus lados son iguales, sus lados opuestos paralelos, sus diagonales son perpendiculares y sus lados contiguos son perpendiculares*”. Puede que, en estas definiciones, como sucede en nuestro caso, haya propiedades que el alumno exija en su definición que resulten redundantes. Por lo que el profesor, también puede pedir al alumno investigar sobre si en su definición hay alguna propiedad redundante, por ejemplo, a través de preguntas, ¿Existe algún polígono con cuatro lados iguales y con lados contiguos perpendiculares que no sea un cuadrado? De este modo, hemos visto que el comando Relación resulta muy interesante en la búsqueda de propiedades de polígonos, para conseguir definiciones por parte de los alumnos y diferenciarlos de otros.

Comprueba y DemuestraDetalles

Los comandos Comprueba[< Expresión lógica>][6], DesmuestaDetalles[<Expresión lógica>][7] tienen un funcionamiento similar al comando Relación, con la diferencia que, en este caso, es el alumno el que pregunta sobre una situación concreta, por ejemplo, EstanAlineados, SonParalelas… A diferencia del comando Relación que nos mostraba las propiedades que el software consideraba. Por tanto, estos comandos permiten trabajar en situaciones donde queremos que el alumno vaya viendo y formulando sus hipótesis y no le vengan dadas directamente por GeoGebra. Además, podemos recurrir a ellos para conocer la respuesta sobre situaciones que el Relación no ha sido capaz de responder.

La diferencia principal entre los dos es que el comando DemuestraDetalles además de darnos la respuesta sobre la propiedad que estamos preguntado, nos devuelve una lista donde se indican las condiciones bajo las cuales la propiedad no es cierta. En el caso de que el programa no se capaz de comprobar la veracidad o falsedad de la expresión,

[6] Más información del comando Relación en: https://wiki.geogebra.org/es/Comando_Demuestra.
[7] Más información de este comando en: https://wiki.geogebra.org/es/Comando_DemuestraDetalles

devolverá como respuesta “indefinido” para Comprueba y “{}” para DemuestraDetalles.

EcuaciónLugar

El comando EcuaciónLugar[<Función lógica >,< Punto libre >][8] nos muestra el lugar geométrico donde tiene que estar el punto libre para que se verifique la función lógica. Por ejemplo, dados 3 puntos libres A, B y C, si escribimos por pantalla EcuaciónLugar[EstanAlineados(A,B,C), C] nos da como resultado la recta que pasa por A y B:

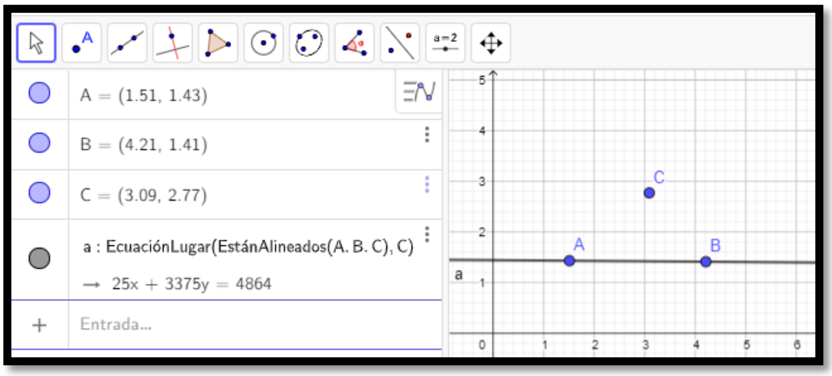


Ilustración 11. EcuaciónLugar 3 puntos alineados.

Hay que tener en cuenta que este comando tiene algunos errores que esperamos que se arreglen en futuras versiones, ya que si creamos la recta f que pasa por A y B, nos encontramos con que software nos dice que estas rectas son distintas, sin embargo, si creamos una ecuación con la misma fórmula que el resultado, GeoGebra nos dice que son iguales:

[8]Más información del comando es: https://wiki.geogebra.org/es/Comando_Ecuaci%C3%B3nLugar

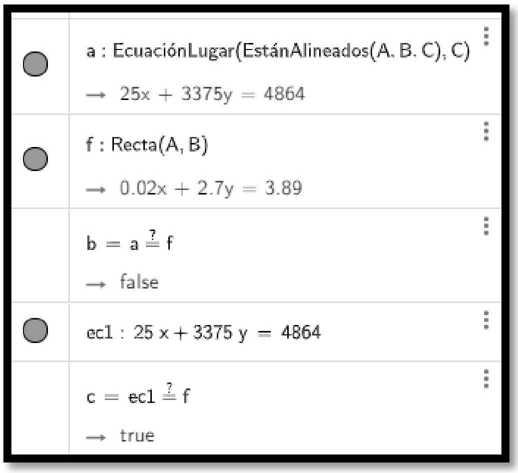


Ilustración 12. Comparación con EcuaciónLugar

En cualquier caso, se trata de una funcionalidad muy interesante para trabajar en el aula, que será de gran ayuda en los siguientes casos:

- **<u>Representación de puntos con una propiedad</u>**: podemos usarlo para ver propiedades interesantes, por ejemplo, dados dos puntos A y B ¿Cuáles son todos los puntos del plano que están a la misma distancia del punto A que del punto B? Con el procedimiento que mostramos en la siguiente imagen, vemos como el comando EcuaciónLugar nos devuelve la mediatriz del segmento AB.

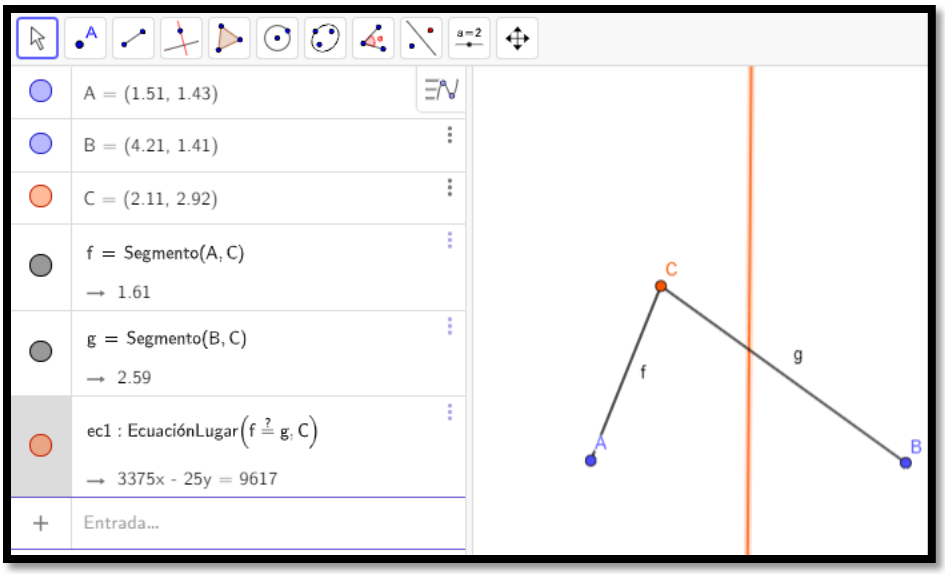


Ilustración 13. Mediatriz con EcuaciónLugar.

- **<u>Teoremas y búsqueda de generalidades o contraejemplos</u>:** este comando sirve de utilidad para el mejor entendimiento conceptual de los teoremas, por ejemplo, dado un triángulo de vértices A, B y C. Podemos ver el lugar geométrico donde tiene que estar el punto A para que se cumpla la propiedad del teorema de Pitágoras (suponiendo que siempre el lado más largo es c):

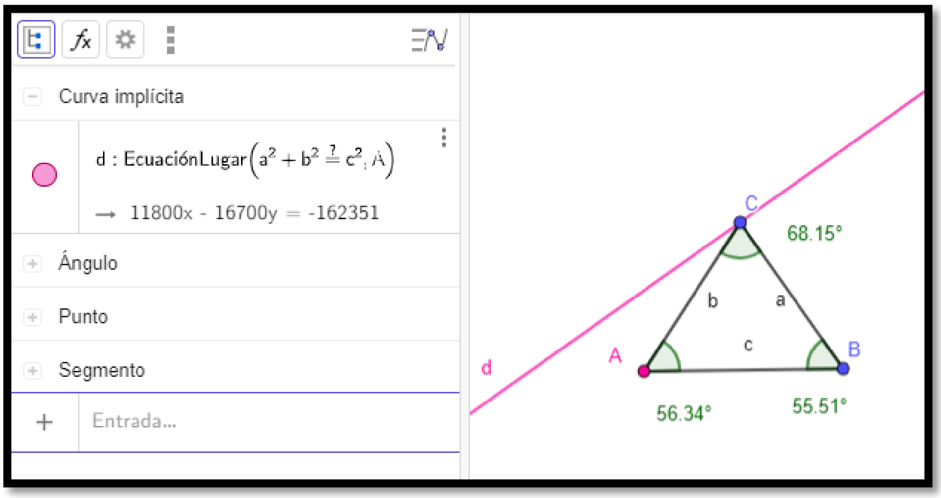


Ilustración 14. Pitágoras lugar geomático A.

Como vemos A tiene que estar en la recta perpendicular al lado a que pasa por C, del mismo modo, tenemos un resultado análogo para el lugar geométrico de B. Por último, el lugar geométrico donde tiene que estar el punto C:

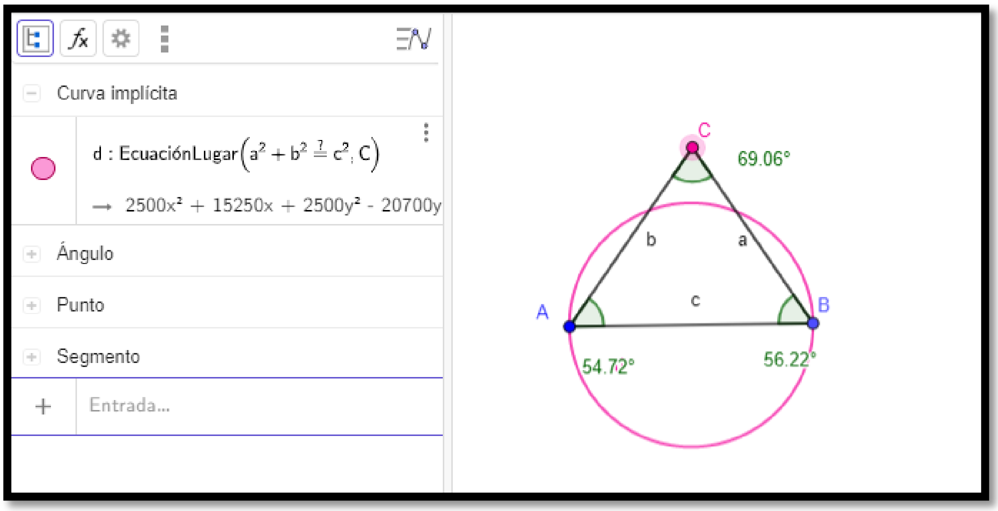


Ilustración 15. Pitágoras lugar geométrico C.

Vemos que se trata de una circunferencia donde el lado c es el diámetro, si C se encuentra en esta circunferencia el triángulo sería recto también. De este modo, hemos podido ver que la propiedad se cumple solo cuando el triángulo es rectángulo. En realidad, lo que hemos visto es la implicación en sentido contrario del teorema de Pitágoras, es decir, si la suma de los cuadrados de los lados más pequeños es igual al cuadrado del grande, entonces el triángulo es rectángulo. De este modo hemos respondido a la pregunta ¿Existe algún triángulo no rectángulo que cumpla la propiedad de Pitágoras? Hemos visto que los triángulos, siempre son rectángulos, por lo que, no existe un contraejemplo.

Actividades

En este apartado vamos a describir las diferentes actividades que, como ya hemos comentado, se trata de un recurso para el profesor sobre el que se apoya en sus explicaciones, como si se tratará de un PowerPoint. La forma de trabajo con los alumnos en el aula la detallaremos en el apartado de "Puesta en práctica en el aula".

Actividad 1 "Paralelogramos"

Esta actividad[9] tiene como objetivo trabajar con los alumnos las propiedades que tienen en común todos los paralelogramos, así como, las características particulares que tienen cada uno de sus tipos: cuadrados, rectángulos, romboides y rombos. Para acabar consiguiendo una definición formal por parte del alumno.

Para la realización de esta actividad, hemos creado en GeoGebra 5 clases de cuadriláteros, donde todos ellos tienen puntos libres sobre los que se puede investigar y que conservan las características de su grupo correspondiente, como vemos en la siguiente imagen:

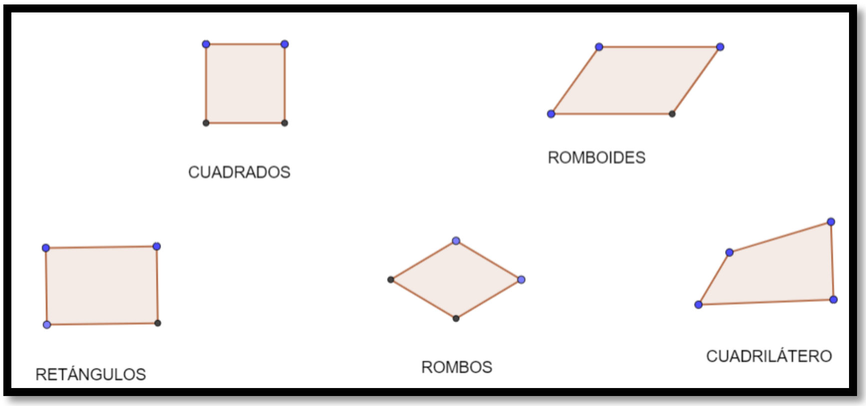


Ilustración 16. Actividad 1 cuadrilátero y paralelogramos

Se trata de una actividad en la que se van haciendo preguntas al alumno, con el fin de trabajar los elementos deseados. Para ello, se han creado 2 botones "Anterior" y "Siguiente", que permiten la navegación dentro de la actividad.

[9] Ver actividad en: https://www.geogebra.org/classic/af3uxavc

Pantalla 1

Al iniciar la actividad el alumno se va a encontrar con la siguiente pantalla:

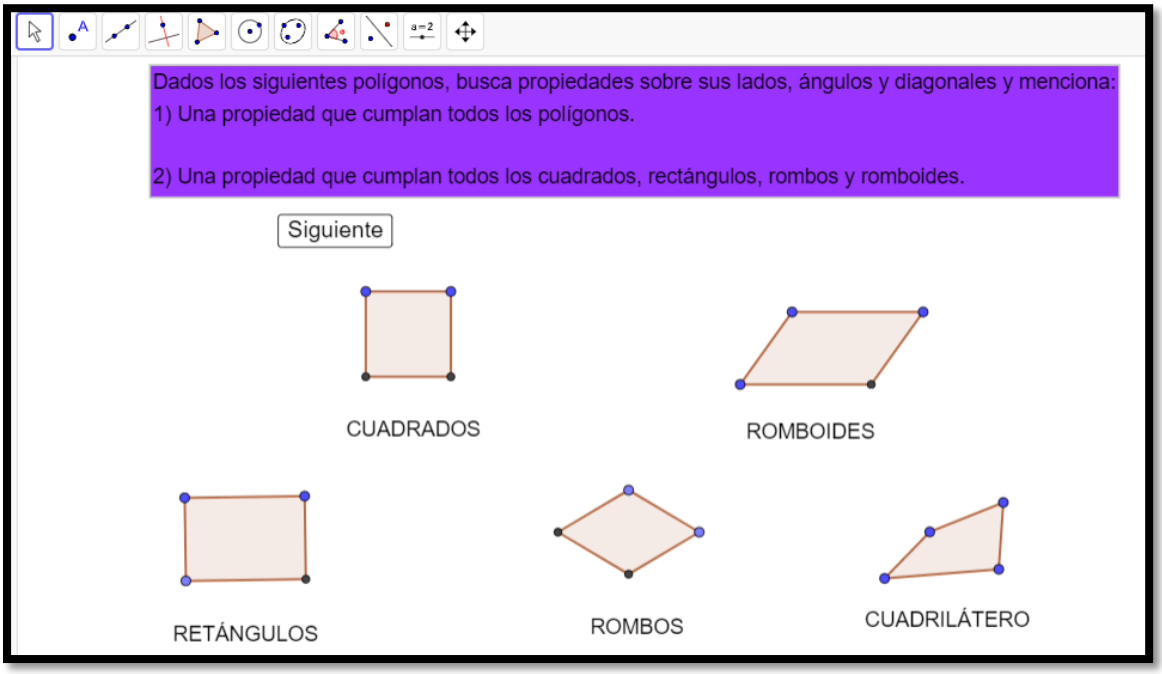


Ilustración 17. Actividad 1 pantalla 1

Como vemos en el apartado 1) se les pregunta por una propiedad que cumplan los 5 polígonos, algunas de ellas son: todos son polígonos, tienen 4 vértices, tienen 2 diagonales… Siendo de principal interés que todos ellos son cuadriláteros y, por lo tanto, tienen 4 lados. El motivo de la pregunta del apartado 2) es con el objetivo de que el alumno investigue propiedades que cumplen los paralelogramos, pero los cuadriláteros, en general, no. Principalmente, la más importante va a ser que sus lados opuestos son paralelos, no obstante, también existen otras como que la intersección de sus diagonales se produce dentro del propio polígono (aunque GeoGebra no es capaz de ofrecer una respuesta formal de dicho hecho, únicamente ofrece la respuesta numérica). Sin embargo, podemos comprobar que las propiedades más características de los paralelogramos, sí que es capaz de determinarlas:

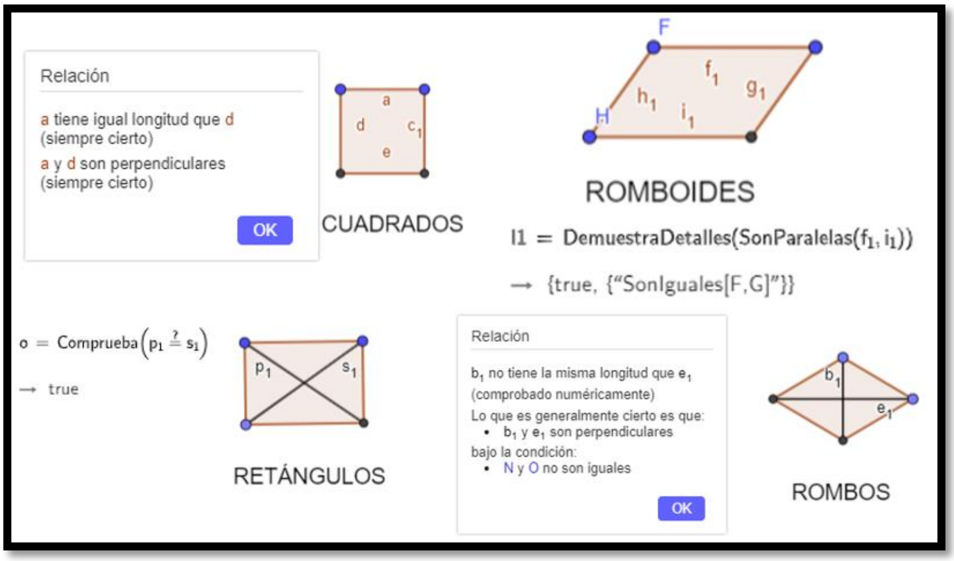


Ilustración 18. Verificaciones formales propiedades paralelogramos.

Pantalla 2, 3, 4 y 5

Estando en la pantalla 1, si pinchamos en el botón "Siguiente", llegamos a la pantalla 2, donde nos aparece otro apartado. En este caso, se pregunta por una propiedad que cumplan todos los cuadrados, pero no el resto de los polígonos que se muestran. Lo que se busca, es que el alumno investigue sobre las propiedades que distinguen a los cuadrados con respecto al resto de paralelogramos. Pulsando en el botón siguiente, llegamos a un apartado que nos pregunta por 2 propiedades que cumplan sólo los rectángulos, más adelante solo los romboides y en el siguiente solo los rombos. El objetivo en todos estos apartados es similar al del apartado que hemos explicado con respecto al cuadrado, con la diferencia que en estos casos se piden 2 propiedades, ya que en el cuadrado la propiedad de que todos sus lados son iguales nos permite diferenciarlo respecto del resto. Una posible solución para estos apartados es la siguiente:

- **Cuadrados**: "Todos sus lados son iguales."
- **Rectángulos**: "Todos sus ángulos interiores son rectos" y "Sus diagonales no son perpendiculares en general".
- **Romboide: "**Sus ángulos interiores no son rectos" y "Sus diagonales no son perpendiculares en general".
- **Rombo:** "Sus lados no son iguales en general" y "Sus diagonales son perpendiculares".

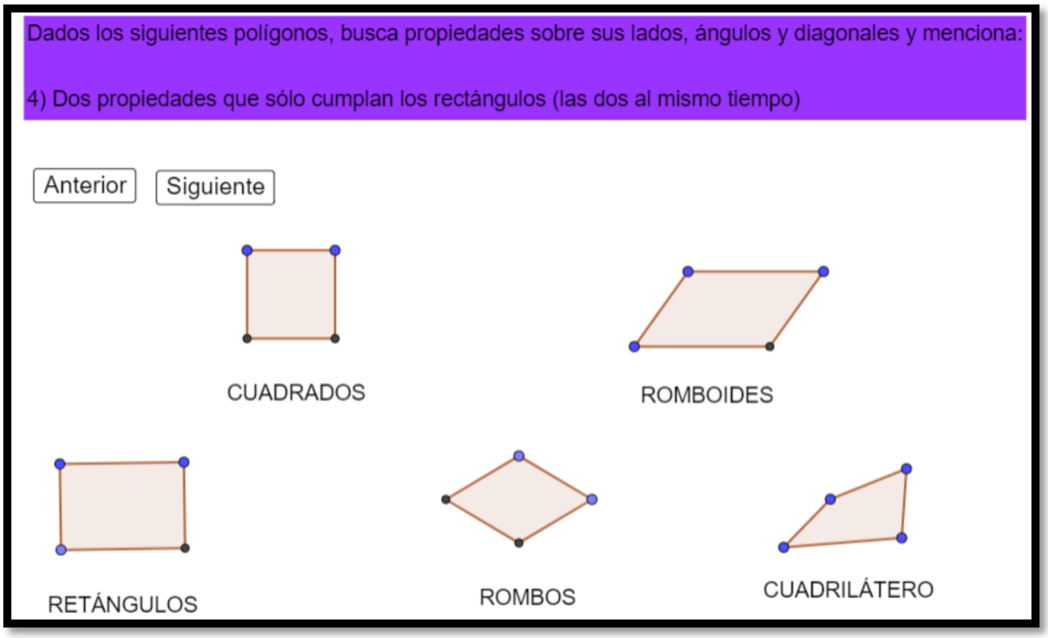


Ilustración 19. Actividad 1 pantalla 3.

Pantalla 6

Una vez determinadas las propiedades particulares de cada paralelogramo, se pide que se realice una construcción de los diferentes paralelogramos que cumpla las propiedades características de su caso particular, además de las propiedades generales que se han dicho de los paralelogramos. Con ello, vamos a hacer al alumno trabajar en cómo establecer dichas restricciones en su construcción y además cómo construir los diferentes paralelogramos. En el caso de que la construcción este mal, el propio alumno puede verlo comprobando si cumplen las propiedades características que se han dicho en los anteriores apartados, modificando la construcción en base a ello.

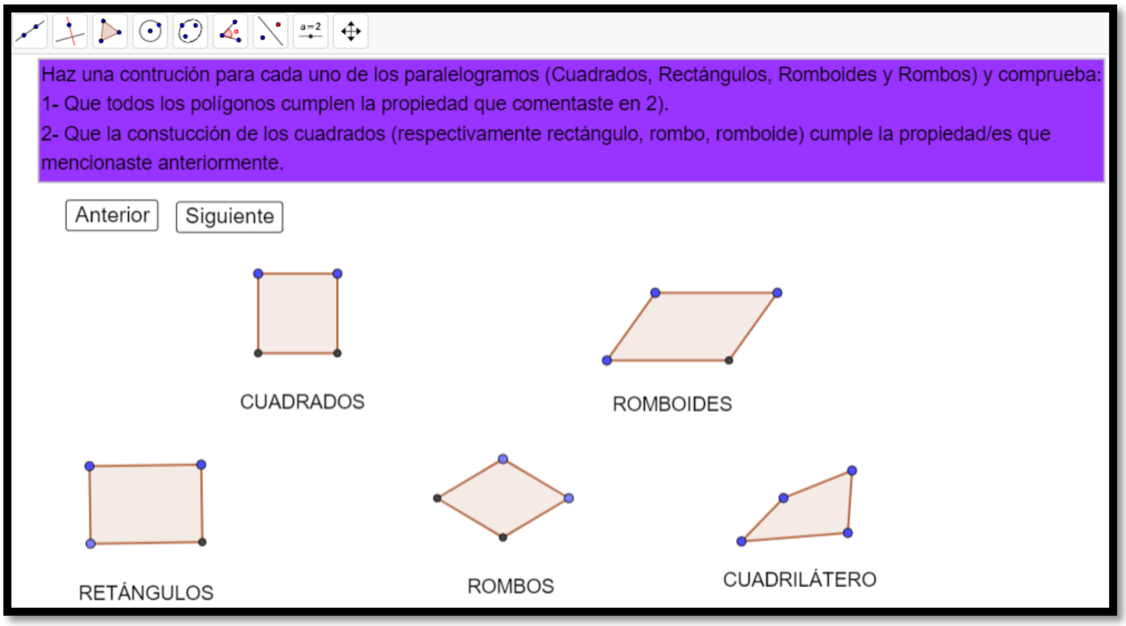


Ilustración 20. Actividad 1 pantalla 6.

Pantalla 7

Para terminar la actividad, el alumno, aprovechando lo que ha aprendido durante la actividad, tiene que dar una definición propia de: cuadrado, rectángulo, rombo, romboide, cuadrilátero y paralelogramo.

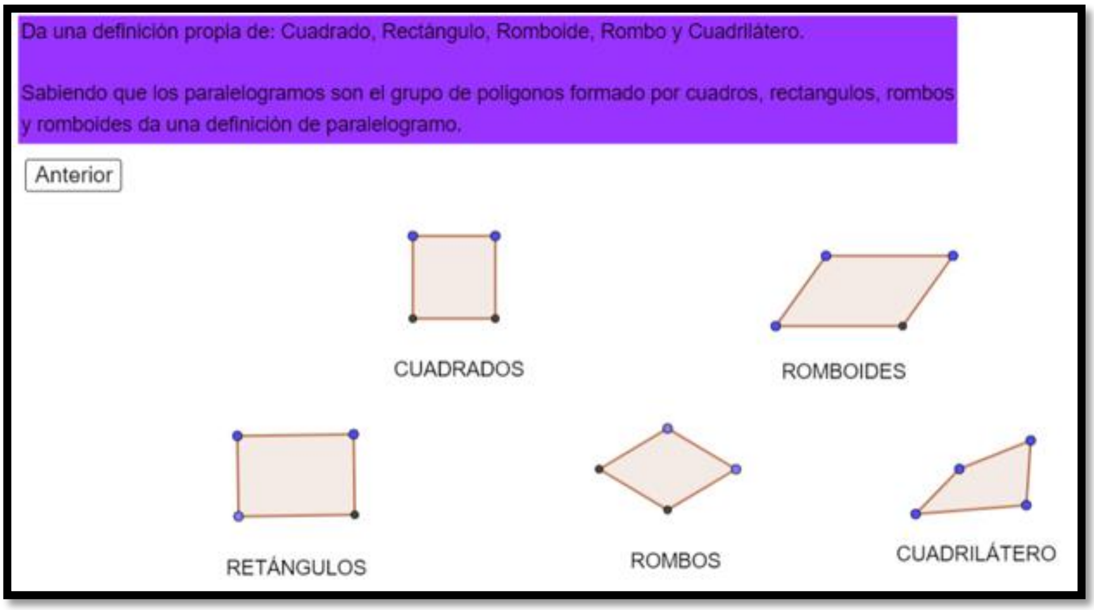


Ilustración 21. Actividad 1 pantalla 7

Actividad 2 "Círculo y circunferencia"

En esta actividad[10] el objetivo es trabajar sobre las propiedades de los círculos, de las circunferencias y de los puntos que componen dichas formas. Una de las características del círculo, es que está compuesto por todos aquellos puntos que cumplen que la distancia a su centro es menor o igual que su radio, mientras que en la circunferencia son los puntos que cumplen que la distancia es igual. Basándonos en esta propiedad, hemos construido esta actividad, creando un punto A y un punto C, el cual es azul cuando la distancia del segmento AC es menor o igual a 2.5 unidades. Trabajando sobre esta construcción y mediante una serie de preguntas, el objetivo es que el alumno consiga entender las propiedades del círculo (respectivamente circunferencia) y consiga por él mismo dar una definición de ellos.

Pantalla 1

El alumno al iniciar la actividad se encontrará con la siguiente pantalla:

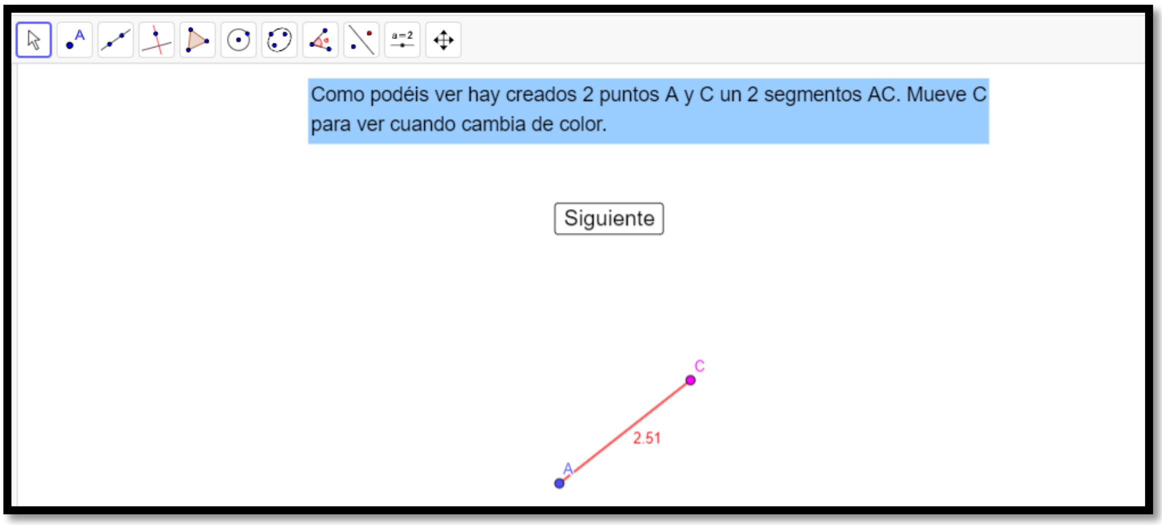


Ilustración 22. Actividad 2 pantalla.

Se trata de una primera toma de contacto para entender cómo va a funciona la construcción con la que va a trabajar.

Pantalla 2

Para asegurarnos que el alumno se está fijando sobre el punto C, preguntamos cuando cree que el punto C es azul.

[10] Ver actividad en: https://www.geogebra.org/classic/kygchgxn

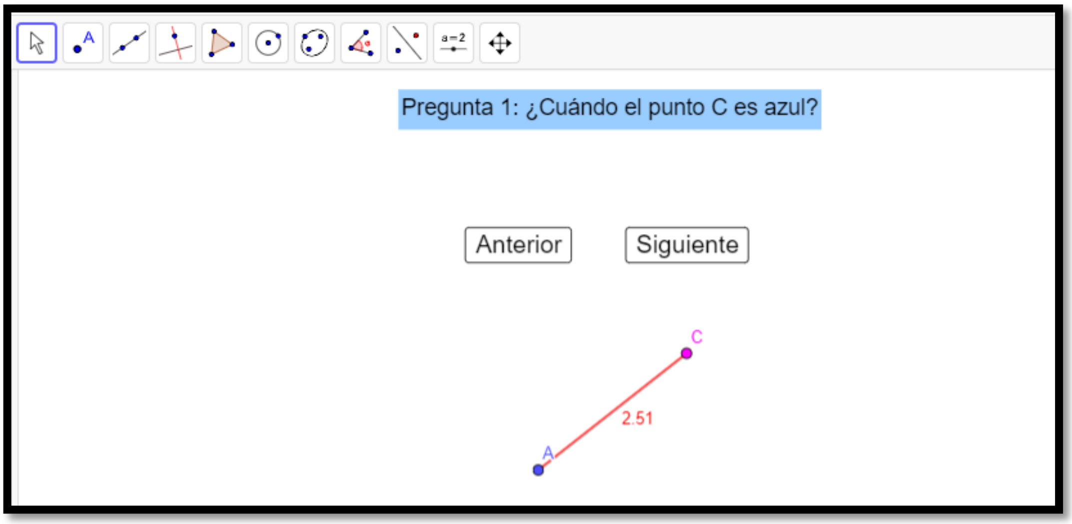


Ilustración 23. Actividad 2 pantalla 2.

Pantalla 3

En este apartado peguntamos, de manera implícita y adaptada a los conocimientos matemáticos de un alumno de 1º ESO, sobre el lugar geométrico que forman los puntos del plano que están a una distancia de 2.5 unidades del punto A. Como sabemos, estos puntos forman un círculo. Sin embargo, no esperamos que el alumno consiga responder de manera correcta, si no que le preguntamos por la forma que ellos creen que tendrá según su intuición. En cierto modo, se está intentado provocar interés al alumno por conocer la forma de este lugar geométrico.

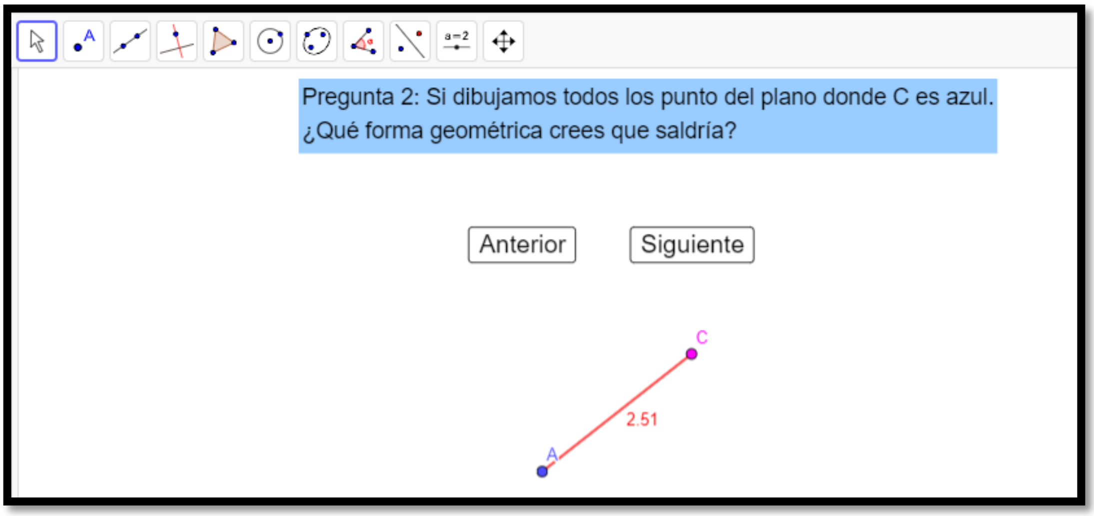


Ilustración 24. Actividad 2 pantalla 3.

Pantalla 4 y 5

GeoGebra tiene un funcionalidad para los puntos llamada "rastro" que dibuja el recorrido que tiene un punto cuando se desplaza dicho punto de la construcción. De alguna manera, podríamos decir que se trata de un paso previo al comando EcuaciónLugar, ya que nos permite ver, de manera intuitiva y no formal, por donde se desplaza el punto. En este apartado, vamos a aprovechar este comando para que el alumno investigue sobre los puntos del plano donde el punto C es azul, para activarlo simplemente hay que hacer clic con el botón derecho en el punto C y activar la casilla "Mostrar rastro". Como se puede ver en la imagen inferior, este es el resultado de mover el punto sobre el plano.

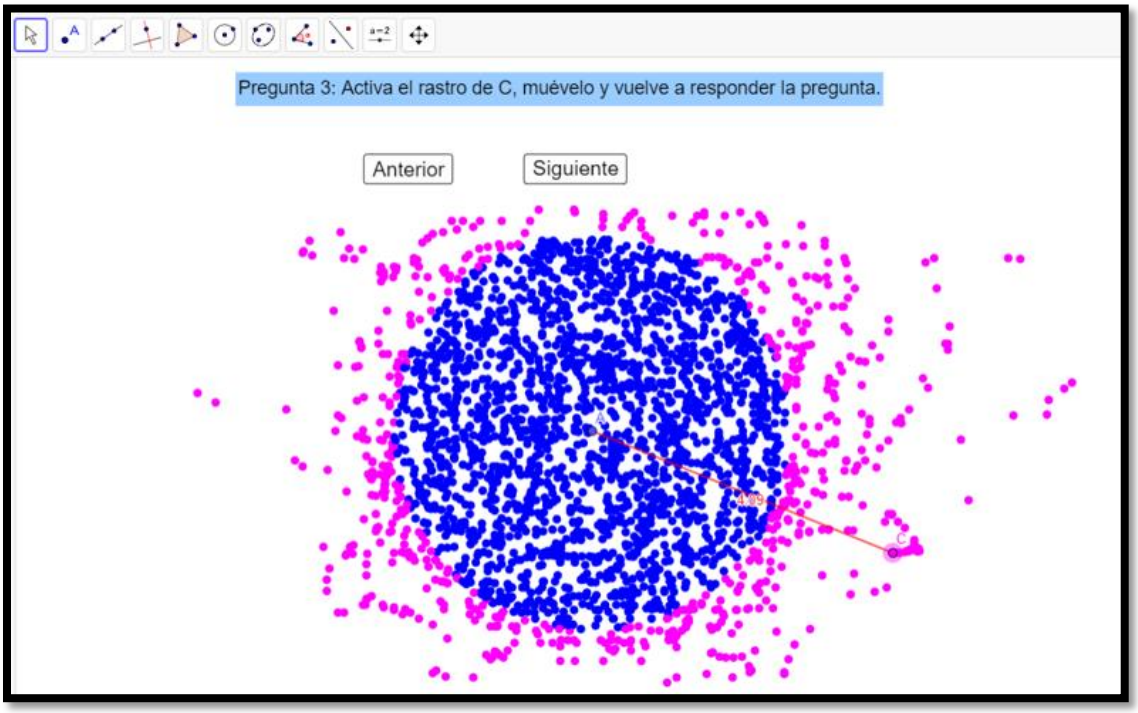


Ilustración 25. Actividad 2 pantalla 4 con rastro activado.

Una vez conseguida una figura como la se la imagen de arriba donde se ve que la parte azul tiene forma de circulo, podemos dar al botón de siguiente, llegando a un nuevo apartado donde se le confirma: "Los puntos del plano donde C es azul forman un CÍRCULO!!! Ahora, escribe una definición de círculo por ti mismo." Los apartados anteriores han sido creados con el objetivo de que el alumno al llegar aquí consiga comprender que un círculo está formado por los puntos que están a una distancia menor o igual que su radio. Evidentemente, es difícil que un alumno de 1º ESO consiga darte una definición formal y tan estricta de círculo, es por ello, por lo que esta actividad, como explicaremos en el apartado de "Puesta en práctica en el aula", está pensada para trabajar de manera conjunta a modo de debate, donde entre todos los alumnos van aportando ideas y el profesor les va guiando.

Nos gustaría resaltar, que hasta el momento no se recurrido a ningún tipo de herramienta de demostración automática ya que GeoGebra no permite trabajar con estos comandos bajo la relación "menor o igual", considerando que dichas herramientas son complementarias a una metodología de trabajo y no se debe caer en el error de intentar incorporarlas en todo momento y sin sentido. En cualquier caso, a partir de los siguientes apartados, sí que se comenzará a trabajar con estas herramientas.

Pantalla 6, 7 y 8

Una vez hemos trabajado con el círculo, pasamos al concepto de circunferencia. En este momento de la actividad, el alumno ya tiene en mente las propiedades que cumple un círculo, lo que ayudará a llegar al concepto de circunferencia. En la pantalla 6 el alumno verá lo siguiente:

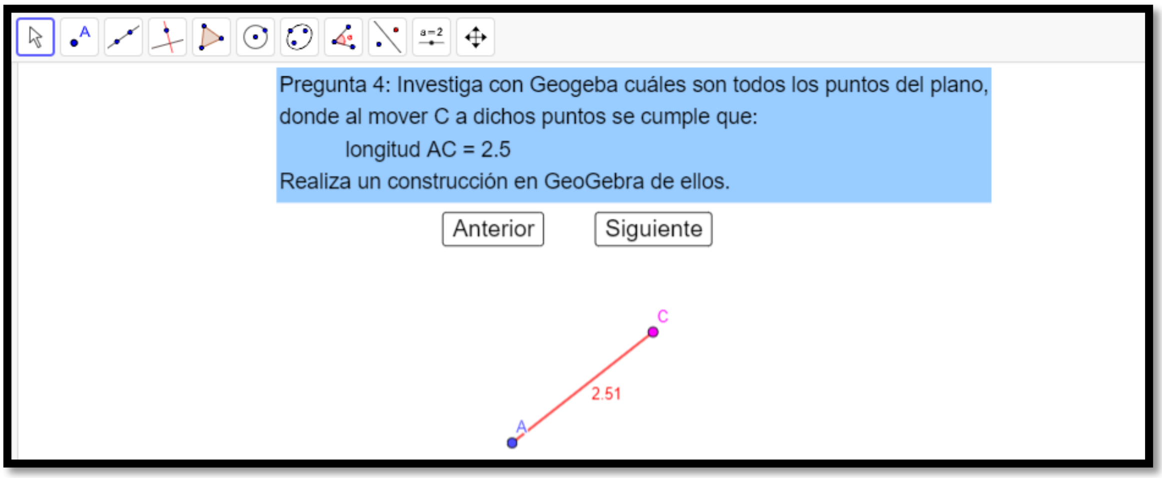


Ilustración 26. Actividad 2 pantalla 6.

En la imagen se puede ver como se pregunta por los puntos del plano donde la longitud del segmento AC es igual a 2.5 dejando A fijo y únicamente moviendo C, esto es, la circunferencia de centro A y radio 2.5 unidades. Sabiendo del caso anterior que los puntos cuya distancia al punto A era menor o igual que 2.5 formaban un círculo, consideramos que es más fácil para el alumno llegar a que la construcción que se le pide en este apartado es una circunferencia. Una vez hecha la construcción, en la siguiente pantalla se le pide al alumno que escriba en la ventana de entrada

"EcuaciónLugar(AC==2.5,C)" para ver de manera formal cuáles son los verdaderos puntos que cumplen esto y que lo comparen con su construcción. Una vez hecho esto, clicando en "Siguiente", el alumno se encontrará con un texto que le confirma que dichos puntos forman una circunferencia y se pide dar una definición formal.

Pantalla 9 y 10

Estos últimos apartados pueden considerarse como complementarios, pues el grueso de la actividad se encuentra en los apartado anteriores, de esto modo, podemos considerar esta última parte de la actividad como algo extra, lo cual hemos decidido incorporarlo ya que puede servir de ayuda a algunos alumnos y además es de utilidad para las actividades y conceptos posteriores. Lo que verá el alumno cuando se encuentre esta pantalla es lo siguiente:

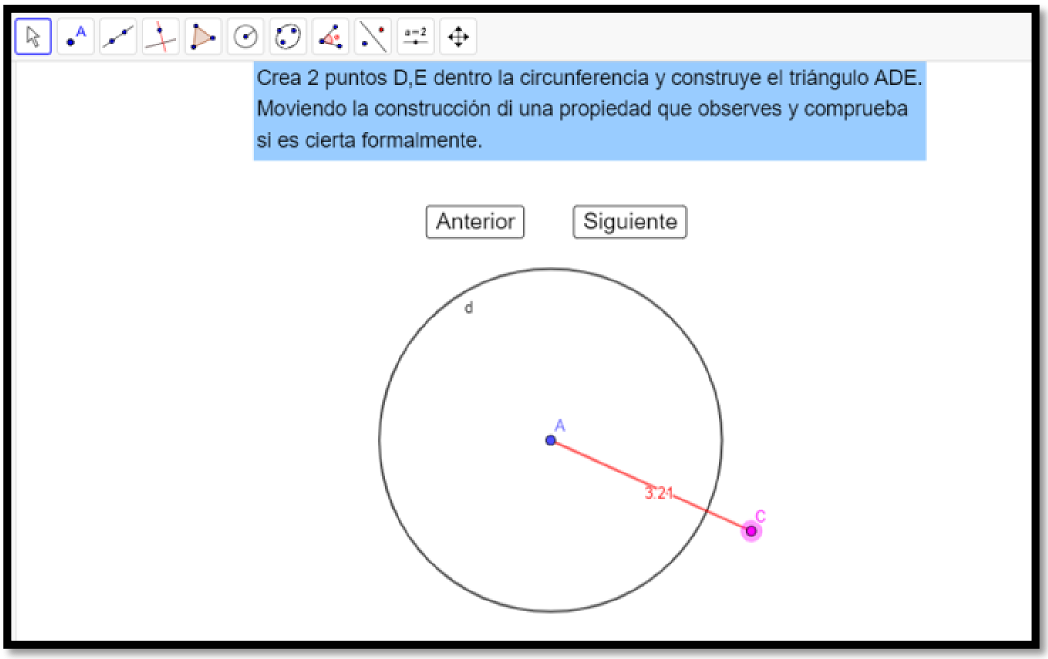


Ilustración 27. Actividad 2 pantalla 9.

La circunferencia que aparece en la imagen es la cónica resultante del comando que hemos puesto en uno de los apartados anteriores "EcuaciónLugar(AC==2.5,C)". Con este enunciado lo esperado es que el alumno se dé cuenta de que el triángulo resultante es isósceles y de este modo, hacerle ver que una manera de construir triángulos isósceles es a través de una circunferencia. Como se muestra en la siguiente imagen, GeoGebra reconoce de manera formal dicha propiedad.

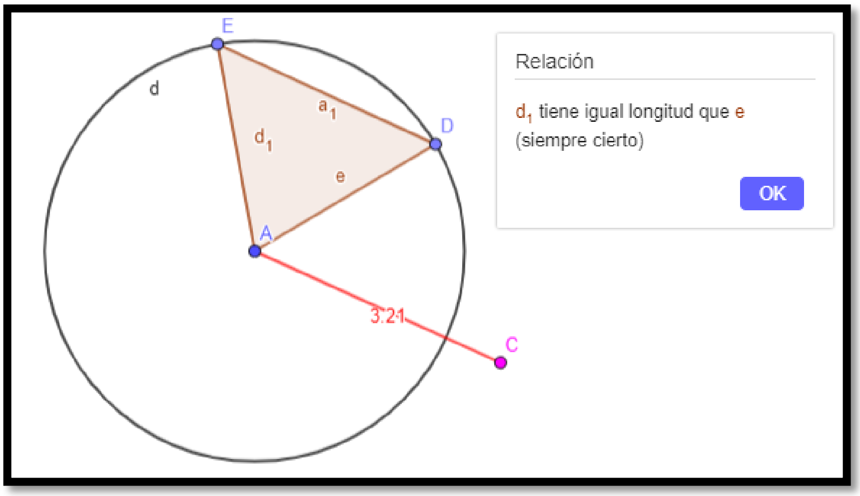


Ilustración 28. Actividad 2 comprobación isósceles.

En cuanto al último apartado, pedimos al alumno que realice una construcción de un triángulo isósceles y lo compruebe de manera formal, con el objetivo de que la construcción del alumno este basada en la propiedades que tienen los puntos de la circunferencia, concretamente, que todos sus puntos están a la misma distancia del centro.

Actividad 3 "Mediatriz y circuncentro"

En esta actividad[11], se trabajará el concepto de mediatriz de dos puntos, reflexionando sobre sus propiedades más importantes, concretamente, es la recta que cumple que todos sus puntos están a la misma distancia de estos dos puntos. Además, consideramos importante que el alumno aprenda a realizar una construcción correcta de mediatriz, es por ello, que durante la actividad el alumno deberá construir la mediatriz y comprobar mediante los diferentes comandos que su construcción es correcta.

Es este caso, consideramos que puede resultar de ayuda para el alumno trabajar en una construcción donde se puedan ver la cuadrícula, por ello, la vamos a dejar visible. La construcción realizada para esta actividad consta de 3 puntos libres A, B y C, sobre los que se han construido los segmentos AB y CB dejado visible su longitud.

En cuanto a la parte final de actividad, basándonos en lo trabajado en los apartados anteriores sobre mediatrices, se introduce el concepto de circuncentro pasando a

[11] Ver actividad en: https://www.geogebra.org/classic/vjpmg98t

analizar sus principales características, como que el circuncentro de un triángulo es el centro de la circunferencia que pasa por los 3 vértices y, por tanto, es el punto en que se encuentra a igual distancia de todos los vértices del triángulo.

Pantalla 1

Al inicio de la actividad el alumno se encontrará la siguiente pantalla:

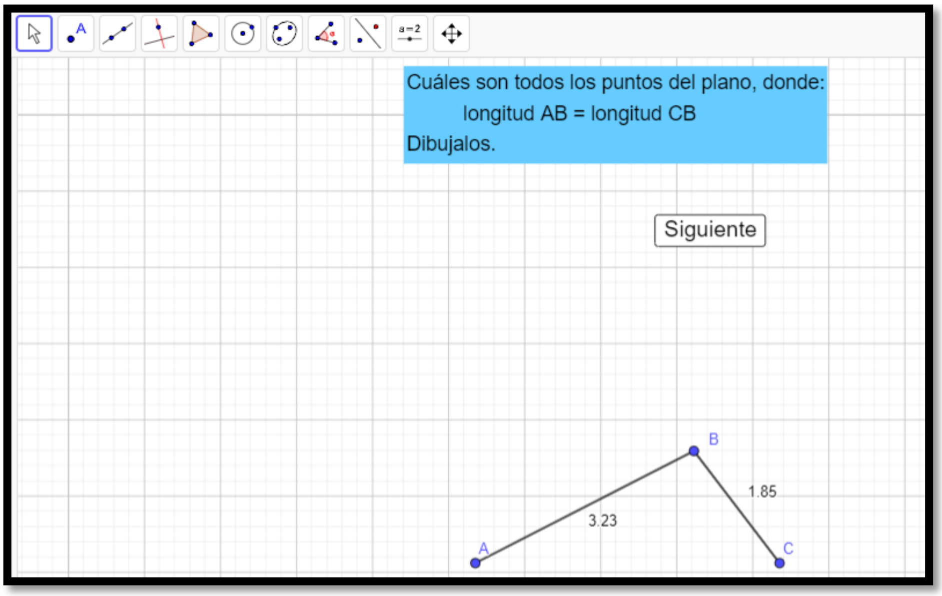


Ilustración 29. Actividad 3 pantalla 1.

Como se puede ver en la imagen, se pide que investigue cuáles son los puntos del plano donde la longitud de los segmentos AB y CB es igual, esto es, cuando el punto B se encuentra en la mediatriz formada por A y C. Como vemos, al estar la cuadrícula visible, resulta más fácil llegar a determinarla. Tras la investigación, se pide realizar una construcción de los puntos que cumplen la propiedad. En este apartado, no es necesario que el alumno realice la construcción formal de que es la recta que corta perpendicularmente al segmento AC y pasa por el punto medio… El objetivo es que el alumno consiga un concepto visual de la idea de mediatriz. Es por ello, que es suficiente con que construya la mediatriz para este caso particular.

Pantalla 2

En este apartado ponemos visible la solución y el alumno podrá comprobar que efectivamente está es la respuesta correcta teniendo que compararla con su construcción para ver si es correcta.

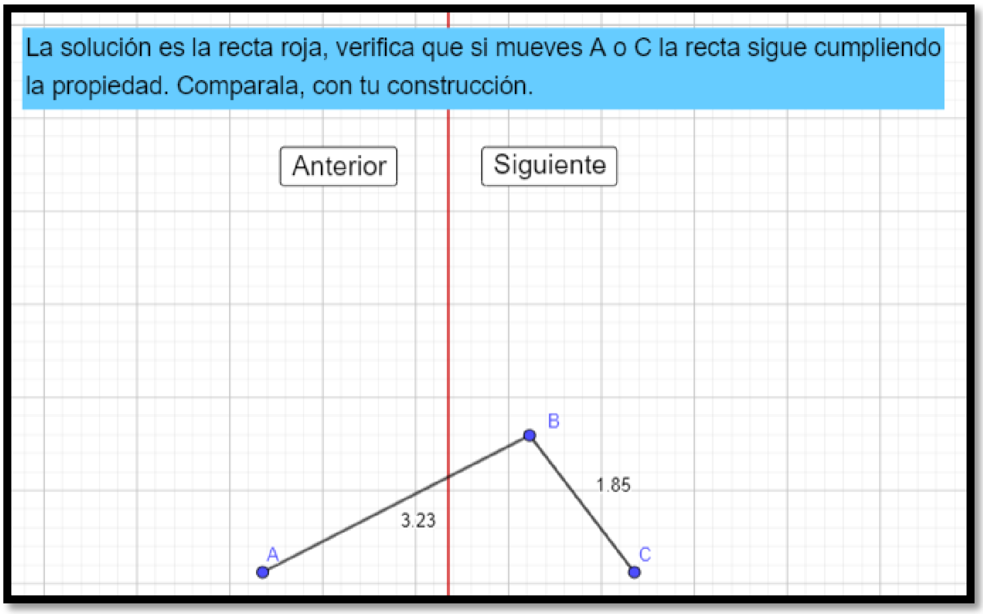


Ilustración 30. Actividad 3 pantalla 2.

Pantalla 3

Una vez comparada, pasamos a buscar propiedades de esta recta, para más adelante, en el caso de que no se haya hecho así, proceder a su construcción correcta:

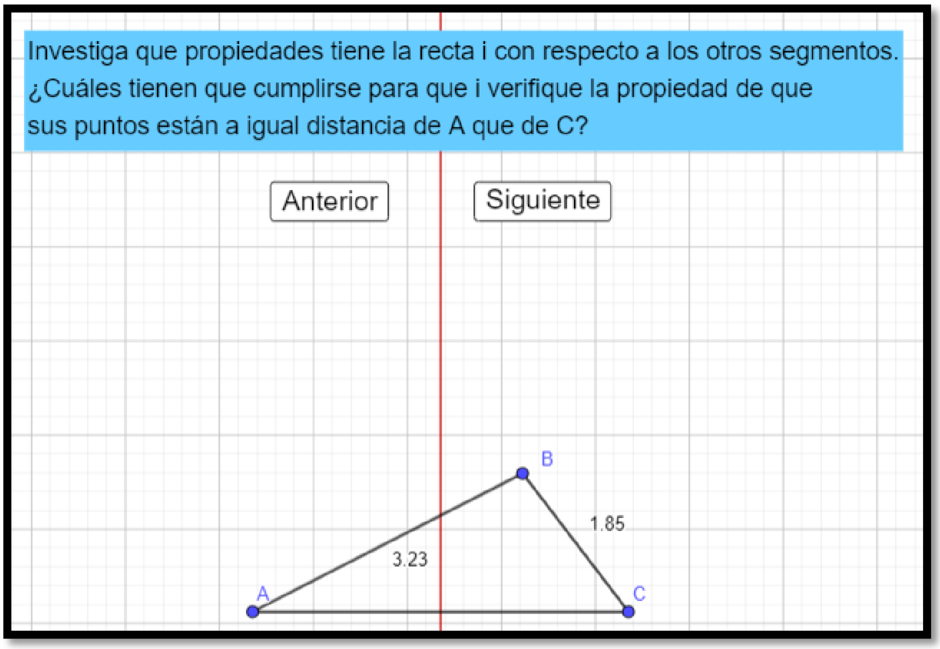


Ilustración 31. Actividad 3 pantalla 3.

Hemos puesto visible, el segmento AC en este apartado, con el objetivo de que sea más fácil para el alumno ver algunas propiedades, por ejemplo, que la mediatriz pasa por el punto medio, que corta perpendicular… Como vemos, en la imagen de abajo, los comandos de demostración automática de GeoGebra son capaces de responder sobre esta construcción:

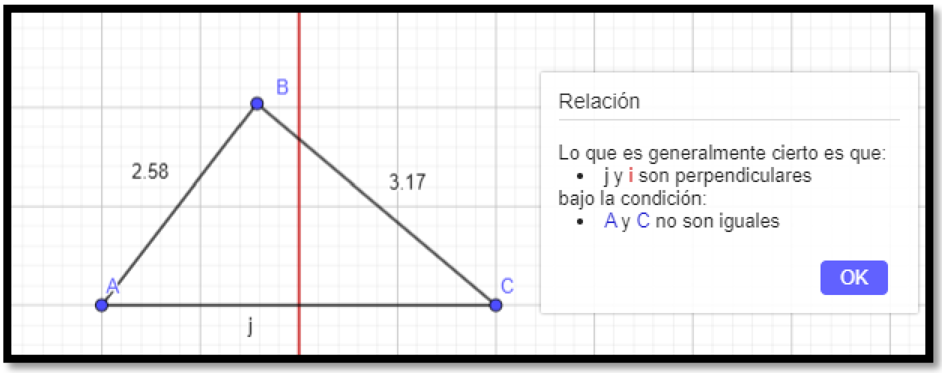


Ilustración 32. Actividad 3 perpendicularidad mediatriz.

Pantalla 4 y 5

En este apartado el alumno deberá modificar su construcción, en el caso de que no sea correcta, para que se cumpla siempre la propiedad de que los puntos de la recta están a la misma distancia, por lo tanto, cuando movamos A o B, la construcción debe estar realizada de tal manera que se siga verificando. Lo trabajado en los apartados anteriores, en los que hemos buscado propiedades, servirán de ayuda para que el alumno llegue a una construcción correcta.

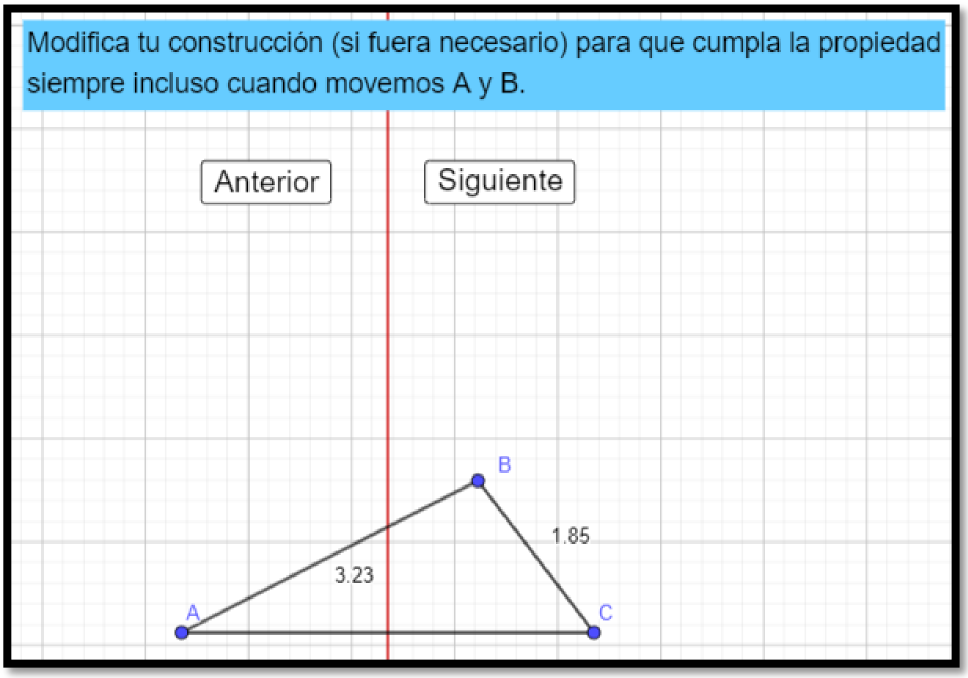


Ilustración 33. Actividad 3 pantalla 4.

Una vez realizada la construcción, en la pantalla 5, se le pide comparar formalmente si la construcción es igual a la recta roja que es la solución.

Pantalla 6 y 7

Con el objetivo de llegar a descubrir el circuncentro, vamos a pedir al alumno que realice la misma construcción para todos aquellos puntos que están a la misma distancia de A que de B y otra para los que están a la misma distancia de C que de B:

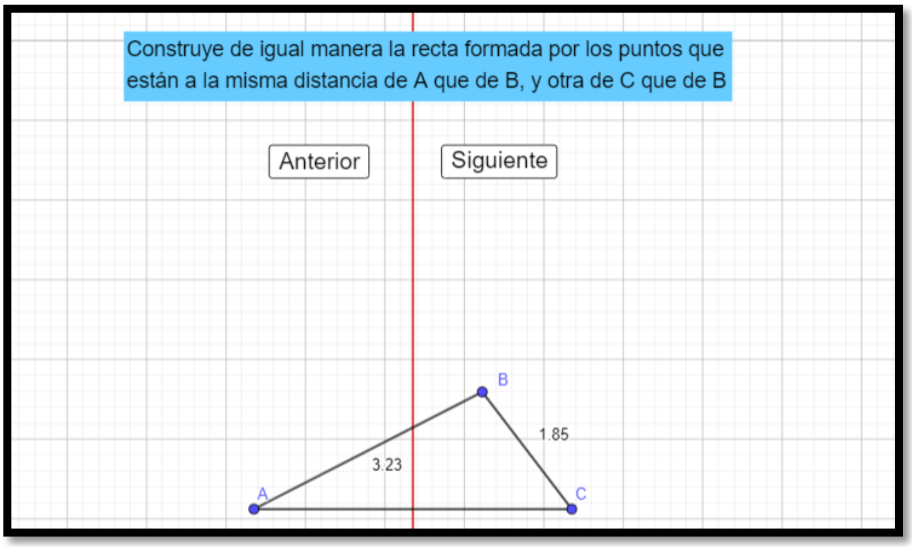


Ilustración 34. Actividad 3 pantalla 6.

De este modo, el alumno va a trabajar, además, de cómo hacer las mediatrices un procedimiento para construir el circuncentro. Para ello, en la pantalla 6, una vez creadas las 3 mediatrices, se pregunta si existe algún punto que llame especialmente la atención y que se busquen propiedades de él. Principalmente, lo más llamativo es que las 3 rectas se cortan en un punto que es el circuncentro, el cual, entre otras cosas, cumple que todos los vértices están a la misma distancia de él.

Pantalla 8

En este último apartado, nos enfocamos en enseñar una de las propiedades más interesantes: El circuncentro, es el centro de la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo.

Actividad 4 "Bisectriz e incentro"

En esta actividad[12] vamos a trabajar el concepto de incentro, así como, los pasos que hay que realizar para llegar a él y sus propiedades más importantes. Para esto, es necesario introducir el concepto de bisectriz que divide un ángulo en dos del mismo tamaño. Basándonos en esto último, hemos diseñado la actividad, de modo que se le pide al alumno inicialmente que investigar cómo crear una recta que divida un ángulo en dos iguales. Aprovechando que en la actividad anterior se ha trabajado con el concepto de mediatriz, vamos a volver a recurrir a ella para construir la bisectriz. El proceso consiste en: dado el triángulo, construir otro con 2 lados iguales (isósceles) como vemos en la siguiente imagen:

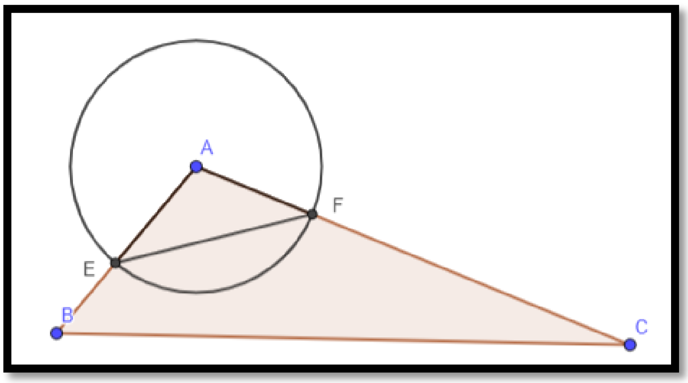


Ilustración 35. Construcción bisectriz.

Como se puede deducir de la imagen, la bisectriz del ángulo A y la mediatriz de los puntos E y F son la misma recta. De esto modo, los primeros apartados de la actividad girarán en torno a este enfoque. Por otro lado, los siguientes irán centrados en la búsqueda de propiedades de la bisectriz y el incentro.

Pantalla 1

En esta primera pantalla el alumno se encuentra con una construcción de un triángulo con vértices A, B y C. Como método introductorio a la actividad, preguntamos al alumno que investigue como dividir el ángulo A en dos iguales:

[12] Ver actividad en: https://www.geogebra.org/classic/z6tzpuzv

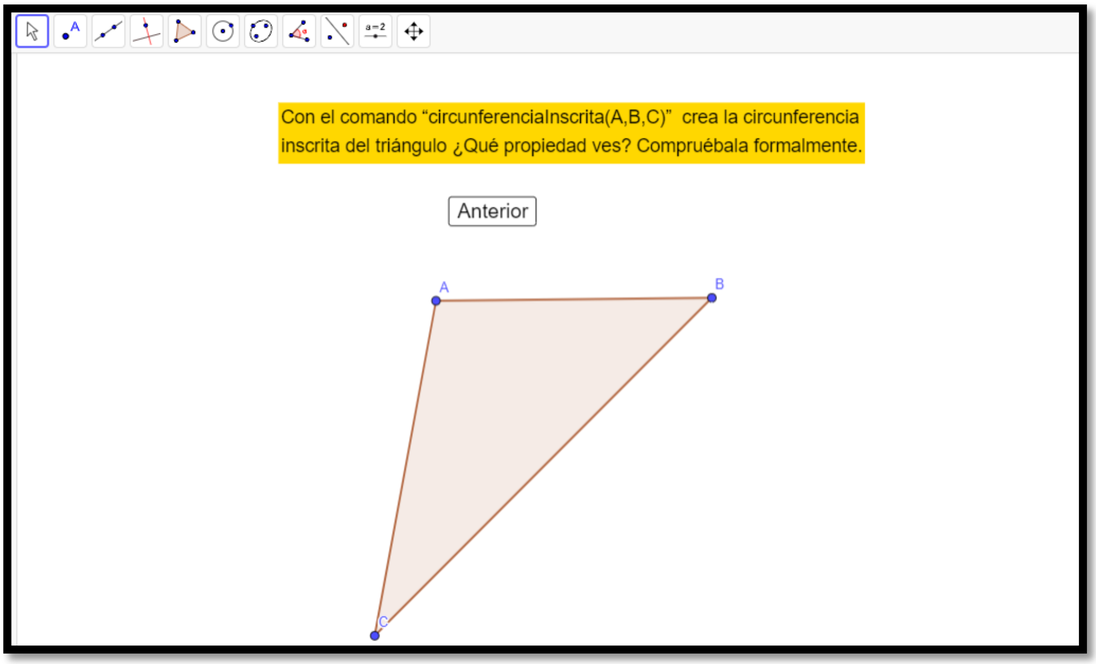


Ilustración 36. Actividad 4 pantalla 1.

Pantalla 2 y 3

Una vez creada la necesidad al alumno de conocer un método de dividir un ángulo en dos iguales, pasamos a dar una serie de indicaciones que tienen que hacer en GeoGebra para llegar a la construcción de la bisectriz.

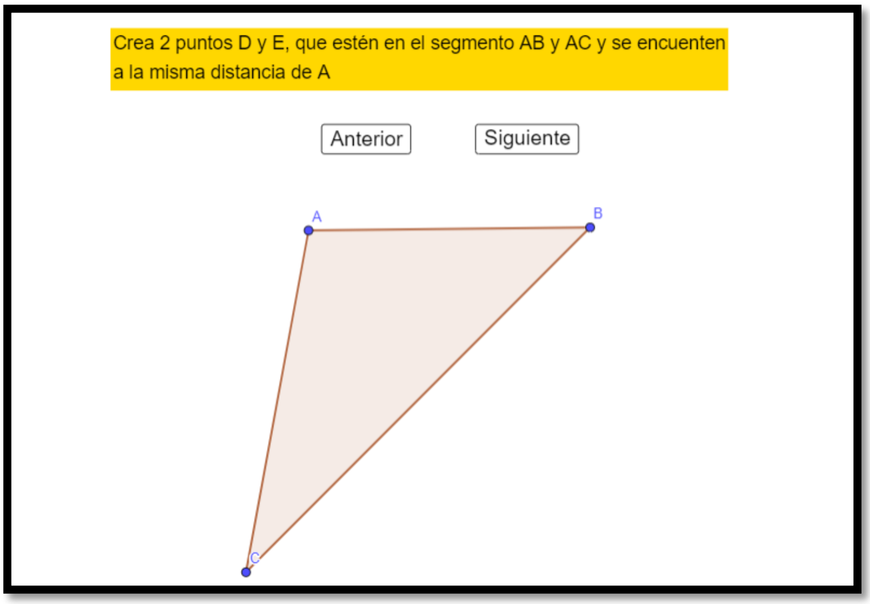


Ilustración 37. Actividad 4 pantalla 2.

Estas indicaciones están basadas, como hemos comentado al inicio de la actividad, en construir la bisectriz a través de un triángulo con dos lados iguales y la mediatriz.

Pantalla 4 y 5

Una vez realizadas todas la indicaciones, pasamos a investigar qué propiedades se cumplen cuando los dos ángulos son iguales y cuáles de ellas hacen que los dos ángulos lo sean:

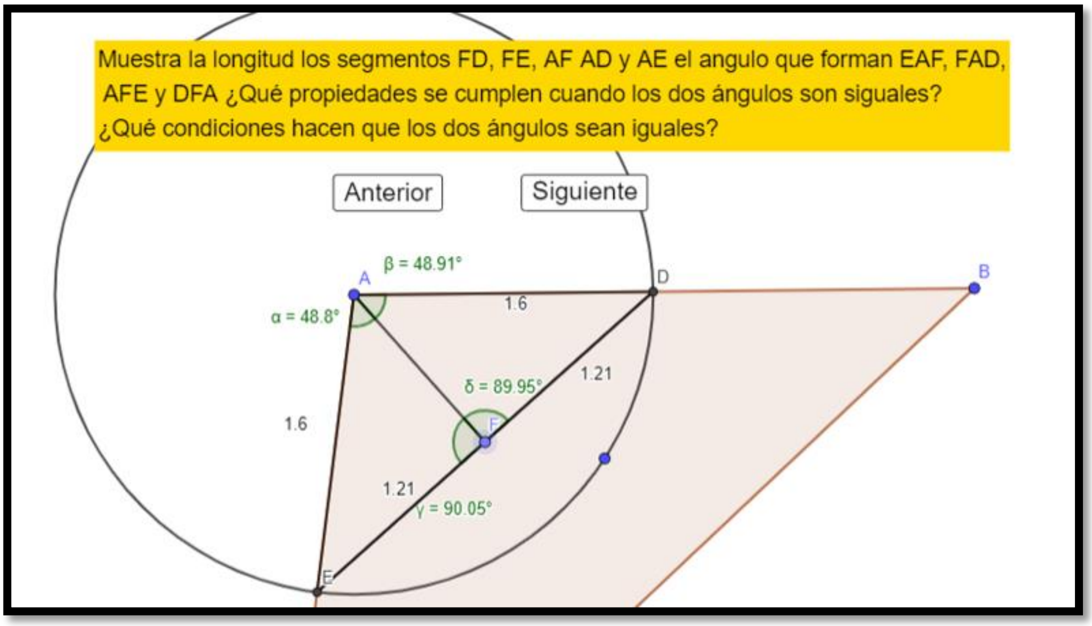


Ilustración 38. Actividad 4 pantalla 4.

Como vemos en la imagen, algunas de las propiedades que se dan cuando los dos ángulos son iguales son: el triángulo EAD es isósceles, AFE y DFA forman un triángulo rectángulo, el segmento AF es perpendicular al segmento ED, A está en la mediatriz de los puntos E y D… En esta última propiedad se centra la siguiente pantalla donde se pregunta en qué famosa recta se encuentra el punto A (el alumno ya conoce el concepto de mediatriz pues en la actividad se ha trabajado).

Pantalla 6, 7 y 8

Una vez conocemos como realizar la bisectriz, pasamos a guiar al alumno hacia la construcción del incentro y sus propiedades. Para esto, en la pantalla 6 le pedimos que realice la bisectriz de los 3 ángulos del triángulo, por lo que, también practicará sus conocimientos obtenidos anteriormente sobre la construcción de bisectrices.

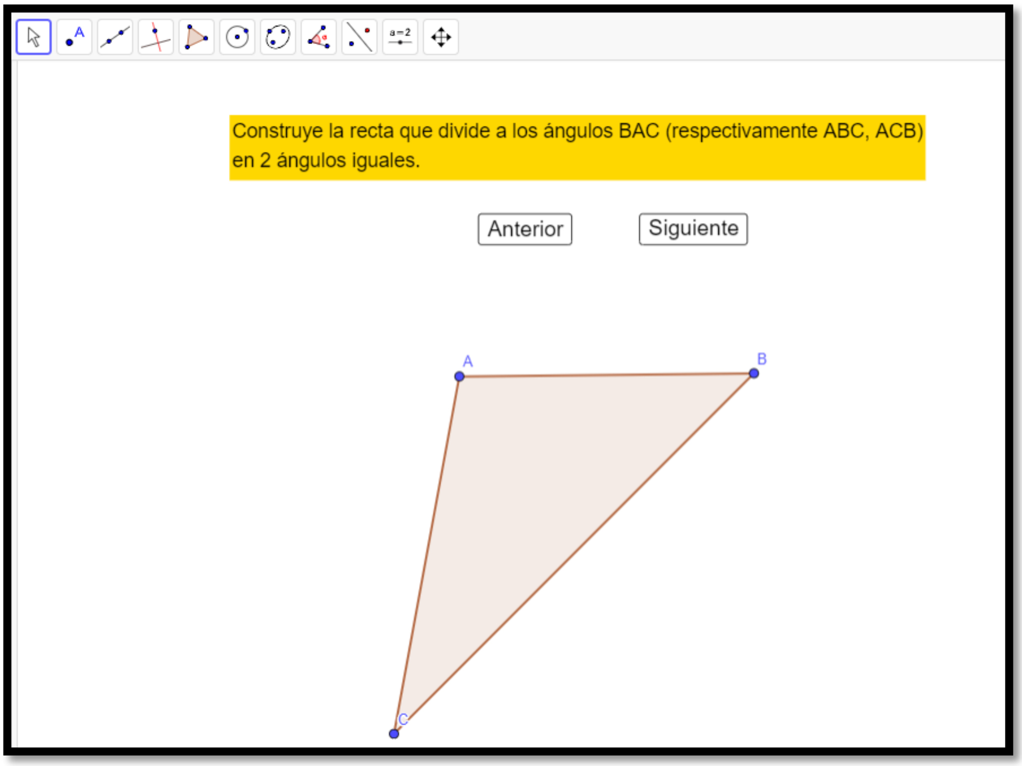


Ilustración 39. Actividad 4 pantalla 6.

En las siguientes pantallas se pide que haga la bisectriz con la herramienta “bisectriz” de GeoGebra y compare si son formalmente iguales con GeoGebra, para verificar si la construcción que han hecho es correcta. Como apunte, hay que indicar que la construcción de la mediatriz debe hacerse de manera manual, ya que, si la creamos con la herramienta “mediatriz” los comandos de demostración automática de GeoGebra, no son capaces de responder si son iguales o no. Por otro lado, el comando relación es menos efectivo en esta comparación, dando un respuesta más ambigua “Parcialmente verdadero, parcialmente false”, para conocer más sobre este tipo de respuesta ir a (Kovács, Z. et al. 2018), por lo que se recomienda usar el comando comprueba que funciona correctamente.

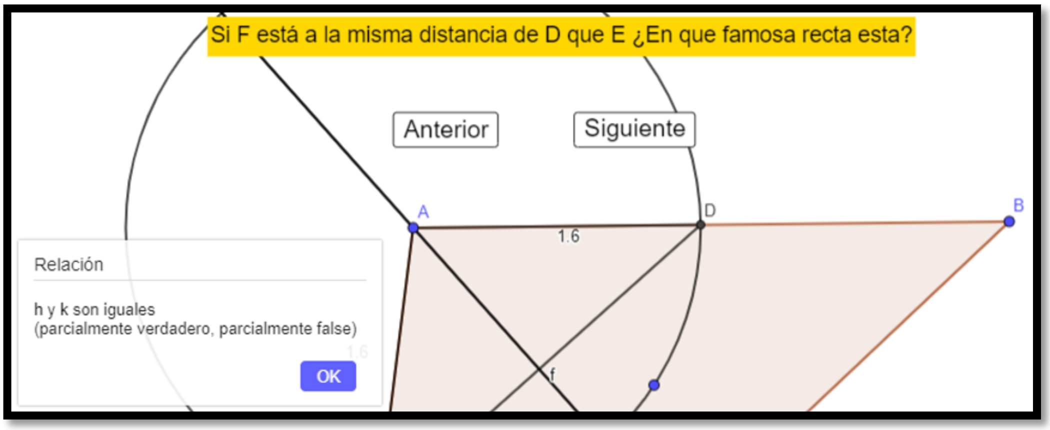


Ilustración 40. Actividad 4 Relación.

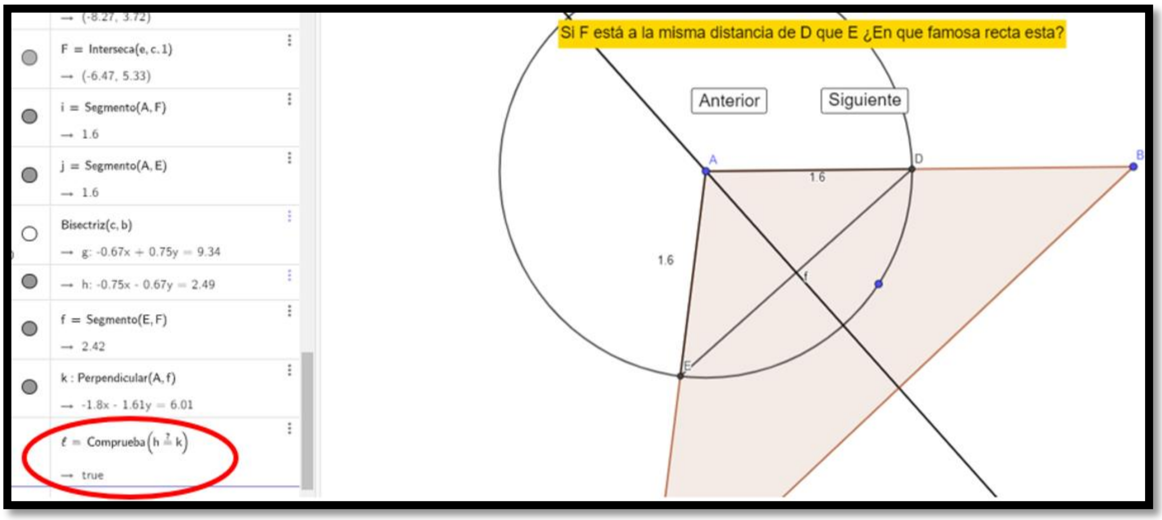


Ilustración 41. Actividad 4 comprueba.

Pantalla 9

En este último apartado, se trabaja el incentro enfocándonos en que es el punto de intersección de las 3 bisectrices y el centro de la circunferencia inscrita. Para ello, utilizaremos el comando "CircunferenciaInscrita" de GeoGebra y los comandos de demostración automática.

Actividad 5 "Puntos notables"

En esta actividad[13] vamos a trabajar una interesante propiedad, el circuncentro, ortocentro y baricentro de un triángulo están siempre alineados. Además, si el triángulo es isósceles, el incentro también lo está. Esta actividad tiene menos indicaciones y se encuentra más orientada a la propia investigación del alumno. Primero se va a pedir

[13] Ver actividad en: https://www.geogebra.org/classic/dwdtkhdm

construir los puntos notables (Circuncentro, Baricentro, Incentro y Ortocentro) del triángulo que hay creado en la actividad, para más tarde preguntar por sus propiedades, teniendo que investigar y deslizar en su construcción para ver cuando los 4 puntos están alineados.

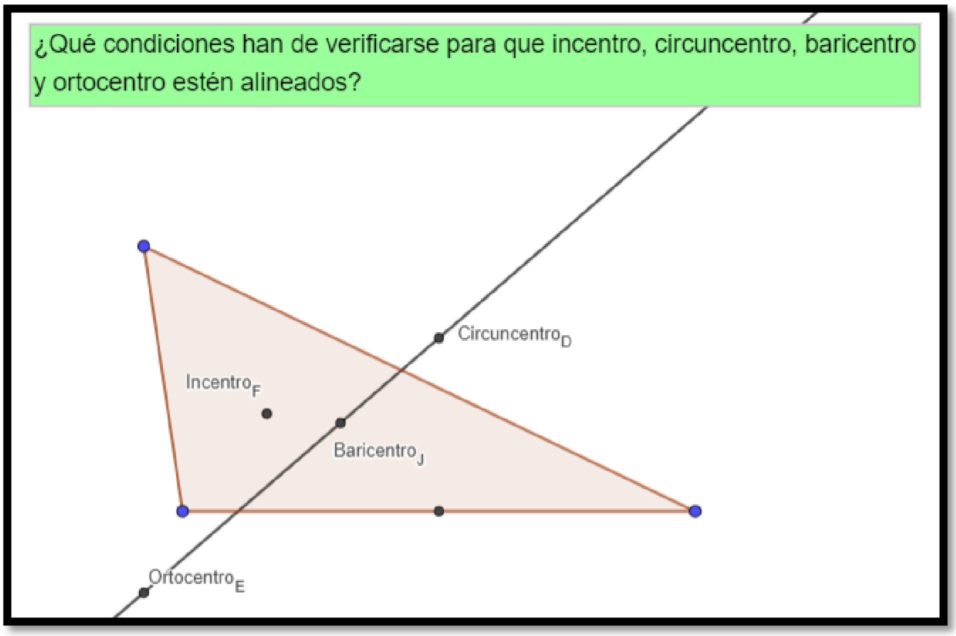


Ilustración 42. Actividad 5 puntos notables alineados.

Pantalla 1

Para comprender y poner en práctica como se construyen y qué son los puntos notables, el alumno deberá primero realizar una construcción de cada uno de ellos.

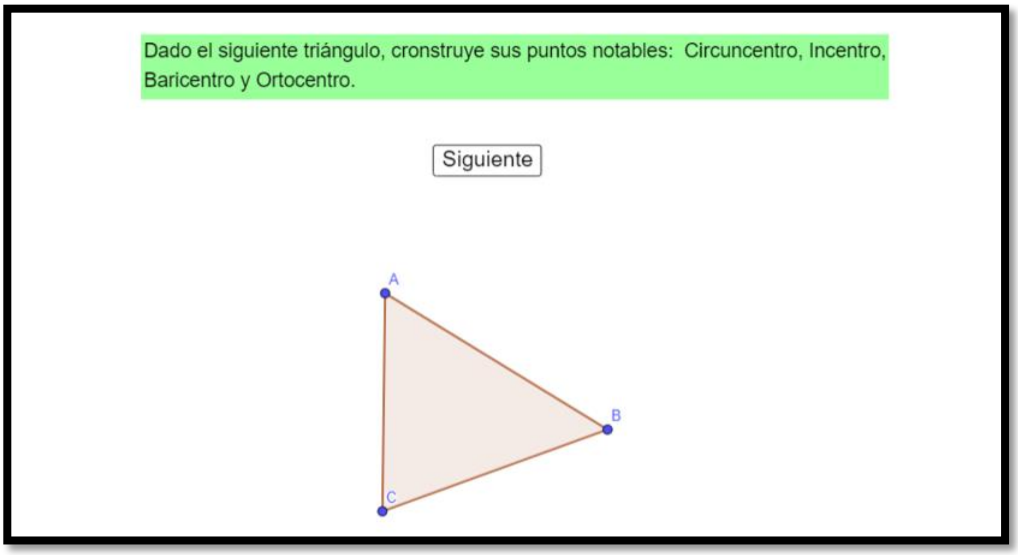


Ilustración 43. Actividad 5 pantalla 1.

Pantalla 2

Para observar que Circuncentro, Ortocentro y Baricentro están alineados, pedimos crear una recta que pasa por Ortocentro y Baricentro. Dee este modo, también puede servir para darnos cuenta de que si no están alineados la construcción no ha sido correcta.

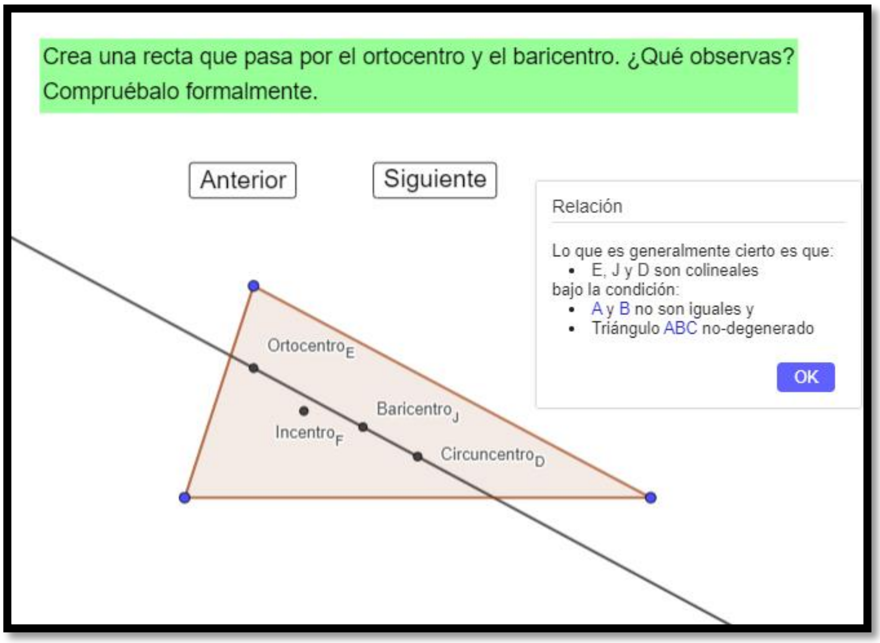


Ilustración 44. Actividad 5 pantalla 2.

Como vemos el comando relación es capaz de confirmar la colinealidad que existe entre Ortocentro, Baricentro y Circuncentro.

Pantalla 3 y 4

Una vez hemos descubierto que estos tres puntos están alineados, pasamos a preguntarnos cuándo lo estará también el incentro, por lo que el alumno tiene que deslizar la construcción hasta encontrar un punto donde esto se cumpla. De modo que, se vean las propiedades que se cumplen, y creándose posibles hipótesis sobre bajo qué condiciones estarán alineados. Una vez hecho esto, el alumno deberá comprobar si dichas hipótesis son verdaderas o falsas, para construir un triángulo con las restricciones que establece en sus hipótesis y ver de manera formal mediante los comando de GeoGebra si los 4 puntos notables están alineados.

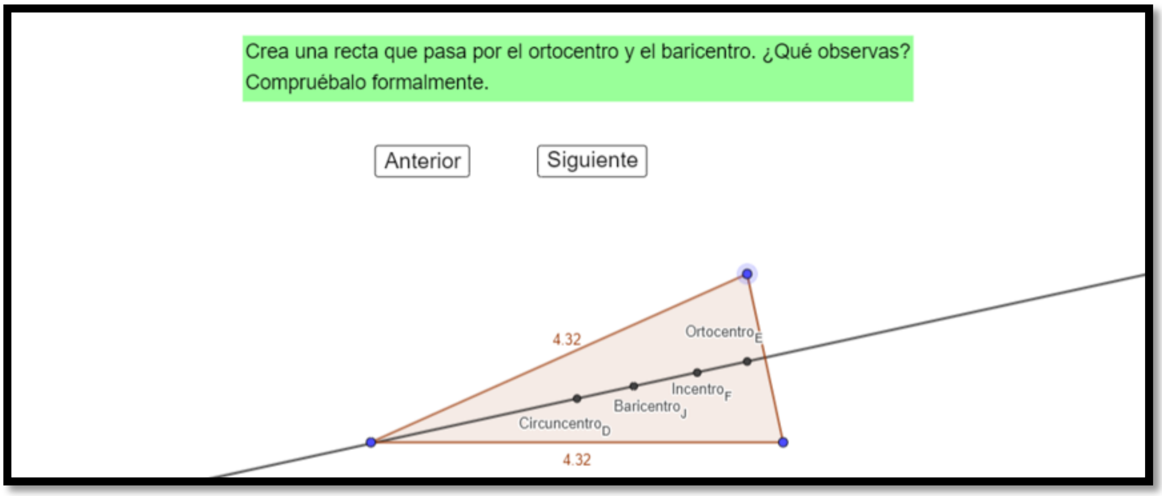


Ilustración 45. Actividad 5 pantalla 3.

Como podemos ver en la imagen, los 4 puntos están alineados cuando el triángulo es isósceles. Por esto, los dos últimos apartados de la actividad también ayudan al alumno a reforzar contenidos de las actividad anteriores, pues para construir un triángulo isósceles se puede recurrir a las circunferencias, como se vio en la actividad 2, los puntos de la circunferencia cumplen que están a la misma distancia del centro.

Actividad 6 "Teorema de Pitágoras"

En esta actividad[14], al igual que en la anterior, ha sido diseñada para que el alumno deslice y trabaje la construcción de manera más libre. Concretamente, vamos a trabajar el teorema de Pitágoras, para ello hemos recurrido a una construcción que suele ser habitual para enseñar a los alumnos el significado conceptual de dicho teorema. Hemos construido un triángulo con 3 puntos libres, y 3 cuadrados aprovechando cada uno de los lados del triángulo.

[14]Ver actividad en: https://www.geogebra.org/classic/s6tsr

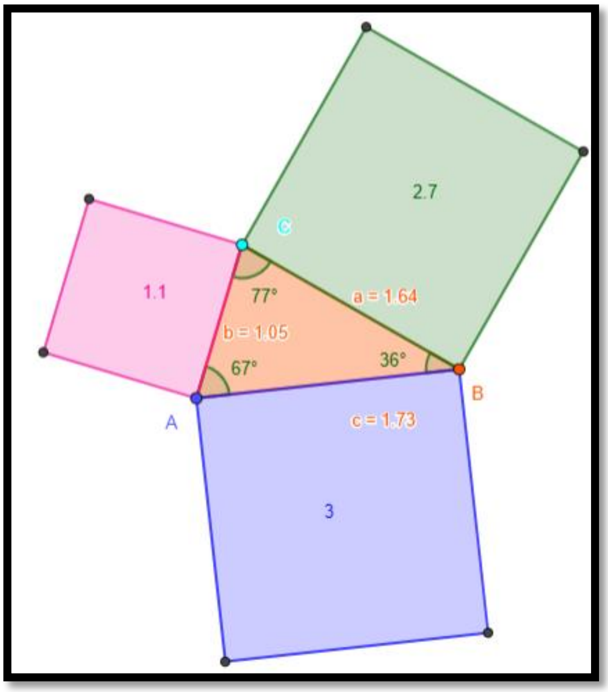


Ilustración 46. Actividad 6 Teorema de Pitágoras.

Pantalla 1

En este apartado únicamente explicamos y ponemos en contexto la construcción para que se comprenda de donde salen cada uno de los tres cuadrados.

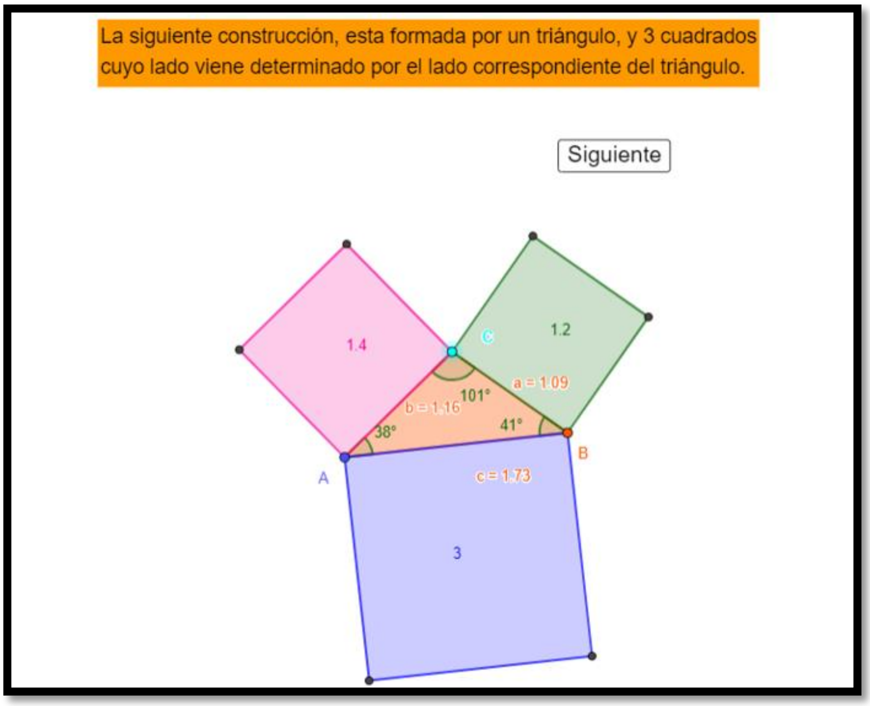


Ilustración 47. Actividad 6 pantalla 1.

Pantalla 2

En este apartado pasamos a buscar las condiciones que debe tener un triángulo para que se verifique el teorema de Pitágoras. Para ello, el alumno investigará cuando se cumple que la suma de las áreas de los cuadrados pequeños es igual a la del grande y mirará las propiedades que se cumplen, para realizar una hipótesis sobre las condiciones que hacen que se cumpla el teorema. Basándose en dicha hipótesis, construirá un triángulo en otra hoja de GeoGebra y comprobará si se cumple el teorema. Una vez realizado todo esto proceso, el alumno debe considerar las condiciones que se deben cumplir un triángulo para que se cumpla la propiedad del teorema de Pitágoras.

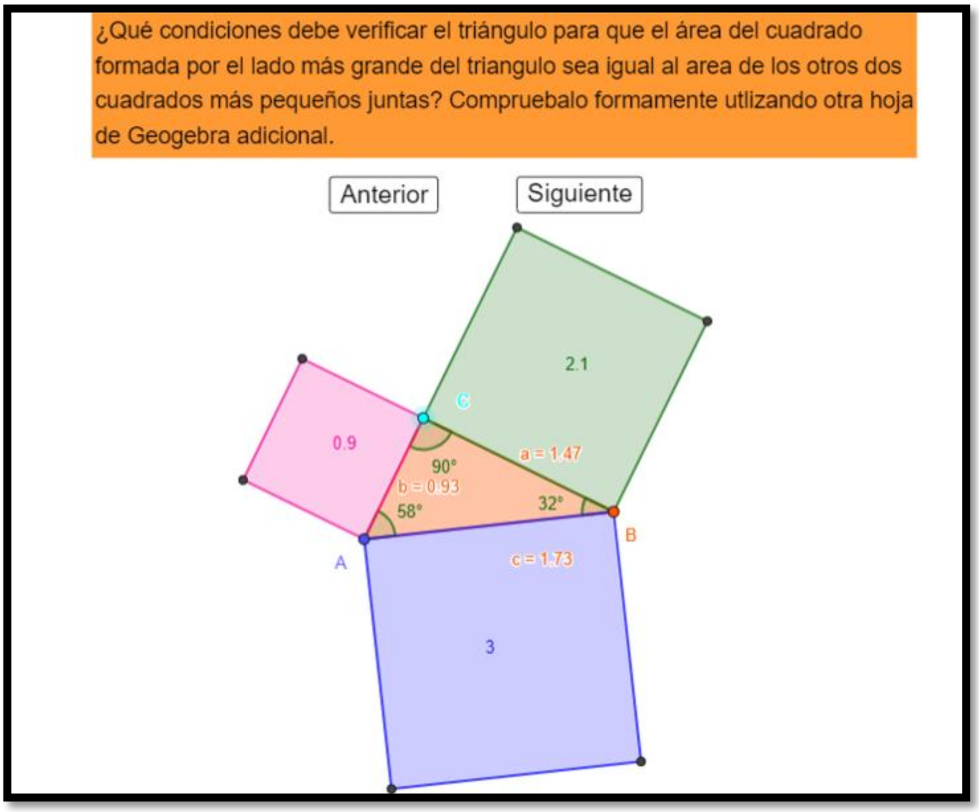


Ilustración 48. Actividad 6 pantalla 2.

Como se ve en la imagen, hemos encontrado un punto donde la suma del área de los cuadrados pequeños es igual a la del grande, por lo que, una vez hubiera llegado aquí el alumno pasaría a buscar qué sucede con los lados, los ángulos…

Pantalla 3

Una vez hemos trabajado el teorema de Pitágoras con la explicaciones pertinentes del profesor y hemos visto que el teorema se cumple cuando el triángulo es rectángulo. Nos puede surgir la duda ¿Esta situación se cumple únicamente para triángulos rectángulos?, o, por el contrario, existen más triángulos que cumplan esta propiedad. Por ello, en los siguiente apartados vamos a ver el teorema de Pitágoras en el sentido contrario, de tal modo que, si la suma de las áreas pequeñas es igual a la grande, el triángulo es rectángulo. Por esto, vamos a preguntar al alumno para que investigue sobre si existen triángulos no rectángulos que cumplan la propiedad.

Pantalla 4

Para investigar sobre la búsqueda de contraejemplos uno de los comando de más ayuda de demostración automática es "Ecuación lugar" este comando nos va a informar donde tienen que vivir los puntos A, B y C para que la suma de las áreas de los pequeños se igual a la de los grandes, en la pantalla 4 se investigará donde tiene que vivir el punto A. Ejecutando "EcuaciónLugar($c^2 \stackrel{?}{=} a^2 + b^2$, A)", veremos lo siguiente:

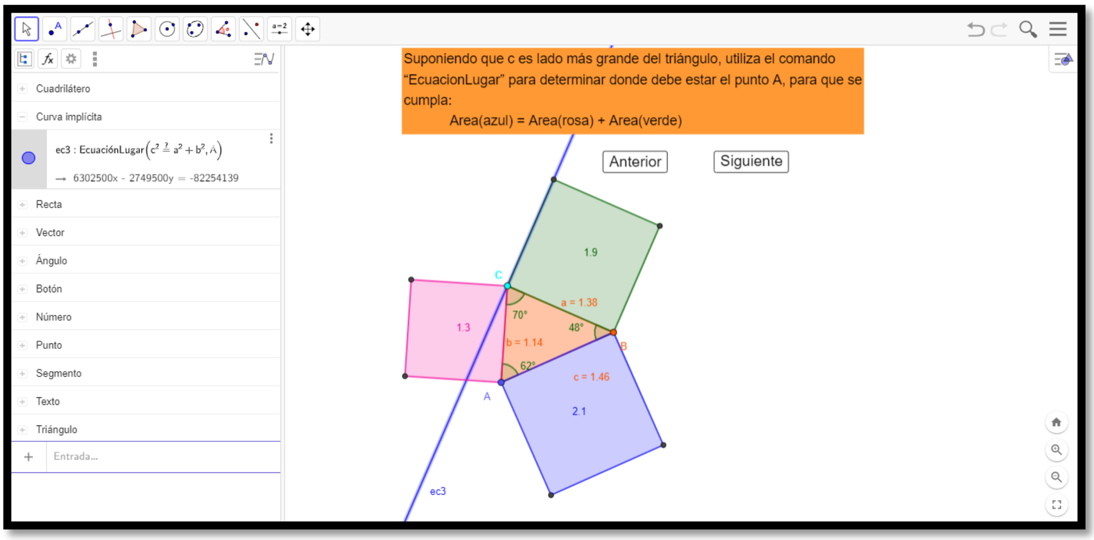


Ilustración 49. Actividad 6 Lugar de punto A.

Como se puede ver, A tiene que estar en la recta perpendicular al segmento CB que pasa por C para que se cumpla dicha condición, es decir, el triángulo tiene que ser recto.

Pantalla 5

Una vez sabemos dónde debe vivir A, se pide construir el lugar donde debe vivir B, esto es, en la recta perpendicular al segmento AC que pasa por C. Finalmente, el alumno debe comprobar si su construir es igual a la resultante con el comando "EcuaciónLugar".

Pantalla 6

Para terminar, se hará lo mismo para le punto C, lo que puede dar lugar a encontrar una nueva propiedad que cumplen las circunferencias:

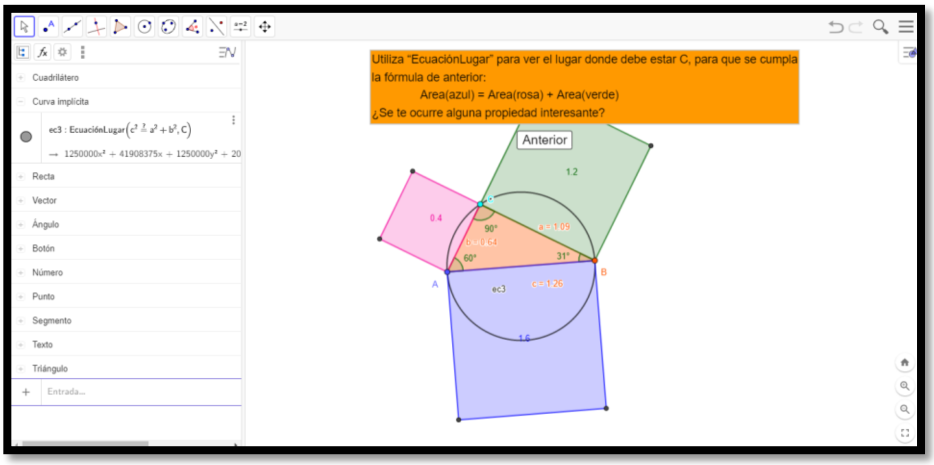


Ilustración 50. Actividad 6 pantalla 6.

La figura resultante es una circunferencia, si llevamos el punto C a dicha circunferencia podemos ver que el triángulo siempre cumple que es recto. De este modo, hemos visto que los únicos triángulos que cumplen la propiedad del teorema de Pitágoras son los rectángulos. Por otro lado, de aquí podemos pasar a investigar cuándo 3 puntos de una circunferencia forman un ángulo recto.

Puesta en práctica en el aula

Anteriormente, hemos descrito cada una de las actividades, explicando los detalles con los que han sido creadas, la estrategia seguida y los objetivos de los contenidos que se han buscado trabajar. En este apartado, mostraremos una propuesta a nivel metodológico de cómo aplicar en el aula dichas actividades que han sido creadas para que su duración sea de una sesión para cada actividad. Cabe destacar que están diseñadas como un recurso, por lo que no deben ser consideradas como una actividad en la que el alumno trabaja con el ordenador y el docente no interviene, más bien, han sido creadas como un material de apoyo en las explicaciones, es decir, como si se tratara de una presentación de PowerPoint, donde el profesor explica y recurre a ellas para el mejor entendimiento de los contenidos, además tienen la ventaja de ser interactivas.

La metodología de trabajo que proponemos en todas las actividades es en grupos de 2 o 3 alumnos dependiendo del número de recursos que tengamos, para nuestro caso particular hemos dicho que tenemos 10 ordenadores y 28 alumnos. La distribución del aula de los alumnos será como en la siguiente imagen:

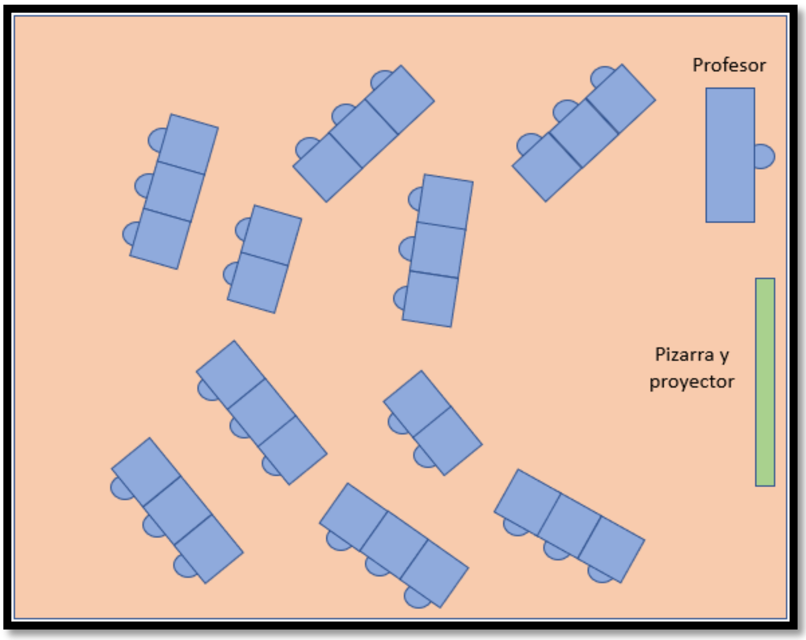


Ilustración 51. Distribución aula.

Esta colocación está inspirada en la distribución de espiga, no obstante, los alumnos no pueden colocarse unos enfrente de los otros debido a que es necesario que todos los alumnos vean la pantalla del ordenador o Tablet que tienen en cada grupo.

Puesta actividad 1 "Paralelogramos"

El profesor comparte la actividad en el proyector, a la vez que los propios alumnos la tienen en sus ordenadores. En cada pantalla, el docente pedirá a los alumnos, que trabajen, por grupos, las diferentes cuestiones que se indican en ella y una vez las han trabajado, pasamos a hacer una ronda donde cada grupo debe decir sus respuestas, debatiendo con el resto de los grupos y el profesor si son correctas. El propio docente, puede recurrir al GeoGebra para mostrar contraejemplos, o por el contrario a mostrar a través de los comandos de demostración automática las respuestas correctas, además, explicará los conceptos que considere más oportunos o que vea que no han quedado del todo claro. Cuando el profesor considere oportuno pasará a la siguiente pantalla, repitiendo el proceso hasta llegar a la sexta pantalla, donde los alumnos realizarán las construcciones que se indican y será el profesor el que se pase por las mesas para ver lo que están haciendo. Finalmente, en la última pantalla, toda la clase en conjunto, trabajará en dar una definición de cada uno de los elementos que se piden: cuadrado, rectángulo, rombo...

Puesta actividad 2 “Círculo y circunferencia”

En este caso, los alumnos trabajarán en sus grupos las cinco primeras pantallas. En esta última, donde se pide la definición de círculo, cada grupo dirá la suya y debatirá con el resto si es correcta o si necesita matices, para finalmente dar una definición común. Del mismo modo, se procederá para las 3 siguientes pantallas donde se trabajará sobre el concepto de circunferencia y se debatirá sobre su definición. En la pantalla que ha a continuación, los alumnos buscarán propiedades y luego las dirán, el profesor explicará los conceptos que considere más importantes y las propiedades que haya que mencionar y no han sido descubiertas por ningún grupo. En la última, el docente se pasará por las mesas, observará y ayudará en la construcción pedida a los alumnos.

Puesta actividad 3 “Mediatriz y circuncentro”

En el comienzo de la actividad se dejará a los alumnos que dibujen lo que se indica en la primera pantalla, el profesor dará la solución tal y como se muestra en la siguiente pantalla diciendo los pasos que tienen que seguir a los alumnos para comprobarlo de manera formal, es decir, mediante comandos de demostración automática, si su construcción es correcta o no. Para la pantalla 3, seguiremos el mismo procedimiento que en apartados de actividades anteriores en los que se pedía investigar propiedades. Primero los alumnos las buscarán, para después comentarlas y debatirlas en conjunto, añadiendo explicación de otras propiedades que no hayan salido si el docente lo considera. En la pantalla 4, el docente se pasará por las mesas viendo y ayudando a los alumnos que hacen la construcción pedida, para después explicar cómo comprobar de manera formal si la construcción es correcta, aquí es donde se introduce el concepto de mediatriz y se explica por parte del docente. Del mismo modo, el profesor se pasará por las mesas para ver como hacen la construcción que se pide en la pantalla 6, explicando, en la siguiente, la solución y realizando el mismo la construcción, de modo que, se les preguntará a los alumnos si existe algún punto interesante en la construcción que ven (como se pregunta en la siguiente pantalla) y si en sus construcciones sucede lo mismo. En la última pantalla, el profesor a la vez que los alumnos crearán una circunferencia como se indica en la actividad y se preguntará por lo que sucede, pasando a explicar lo que es el circuncentro y repasando las propiedades que se han visto en la actividad.

Puesta actividad 4 “ Bisectriz e incentro”

En las tres primeras pantallas, donde se pregunta cómo dividir un ángulo en dos iguales, se puede hacer de manera conjunta entre toda la clase y el profesor, añadiendo preguntas y matices que consideren oportunos, a la vez que los alumnos van probando en sus ordenadores. Una vez se ha hecho de manera conjunta la actividad con el seguimiento de los pasos del profesor de la solución correcta, dejamos unos minutos para que los alumnos investiguen las propiedades de la construcción y las condiciones que hacen que los dos ángulos sean iguales, debatiendo sobre cuales ha encontrado cada grupo y explicando el concepto de bisectriz y sus aspectos más importantes. En la pantalla 5, nos preguntan por una recta que hemos creado (la mediatriz) donde el profesor pasa a recordar, si fuera necesario, los puntos clave de la mediatriz que fue vista en la actividad anterior. Una vez, se ha sido explicado el concepto de bisectriz por el profesor y se ha trabajado su construcción, los alumnos en sus grupos, deberán crear las diferentes bisectrices del triángulo (como se pide en la pantalla 6), esta vez sin tener la ayuda de las indicaciones del profesor. Cuando los alumnos hayan terminado, el profesor mostrará la herramienta de GeoGebra “bisectriz” a los alumnos y les enseñará como probar con los comandos de demostración automática de GeoGebra si su construcción está bien. Además, se utilizará para explicar que el punto de intersección es el incentro y aprovechando lo que nos piden en el último apartado, donde tenemos que crear una circunferencia inscrita, para explicar las propiedades y conceptos más importantes.

Puesta actividad 5 “Puntos notables”

En la primera pantalla se trabajarán los puntos notables y procederemos a su construcción. En el caso del incentro y el circuncentro será únicamente de recordatorio, pero el baricentro y ortocentro se explicarán de manera más detallada. Una vez hecho esto, como se indica en la siguiente pantalla, el profesor, a la vez que los alumnos, creará una recta que pasa por el ortocentro y el baricentro, observándose, que ortocentro, baricentro y circuncentro están alineados y mostrándoselo a los alumnos de manera formal.

En la segunda parte de la actividad, serán los alumnos los que investiguen cuando los cuatro puntos notables están alineados estableciendo sus hipótesis y realizando una construcción con esas restricciones para comprobar si están alineados y si sus hipótesis son correctas, pudiendo recurrir al profesor que se estará pasándose por las mesas.

Puesta actividad 6 “Teorema de Pitágoras”

En la primera pantalla el profesor explica la construcción que hay creada en la actividad, se puede hacer hincapié en la relación entre los lados y el área de los cuadros, es decir, $lado^2$ = área, después, se dejará a los alumnos ,por grupos, investigar la respuesta a la pregunta que se les plantea, teniendo cada grupo que comentar lo que ha observado al resto de clase. Finalmente, el profesor va arrastrando el triángulo a los puntos donde es rectángulo y enseña que se cumple la propiedad (del teorema), construyendo un triángulo rectángulo y comprobando de manera formal que la hipotenusa al cuadrado es igual la suma del cuadrado de los catetos, pasando a explicar el teorema de Pitágoras.

Como se indica en la pantalla 3, el docente preguntará al alumno si cree que esta propiedad solo la cumplen los triángulos rectángulos, teniendo estos que investigar o intentar buscar contraejemplos. Cuando los alumnos hayan investigado, pasamos a hacer una ronda por todos los grupos, donde comentarán si según su investigación consideran que los únicos triángulos que cumplen esa propiedad son los rectángulos. Para salir de dudas, el docente, apoyándose en la pantalla 4, enseñará cómo utilizar el comando EcuaciónLugar mostrando donde tiene que vivir el punto A para que la propiedad se cumpla. Los alumnos harán esto mismo en los ordenadores y observarán que en esos puntos donde tiene que vivir el punto A el triángulo siempre es rectángulo. Una vez visto esto, los propios alumnos deben construir el lugar geométrico donde creen que tiene que vivir B para que se cumpla la propiedad (por lo que se trata de una situación análoga a la anterior) y comprobar que su construcción es igual a la que surge con el comando EcuaciónLugar. Por último, el profesor mostrará donde tiene que vivir el punto C, preguntando a sus alumnos que si en ese caso también es el triángulo rectángulo y proponiéndoles que investiguen cuando 3 puntos de una circunferencia son rectángulos, debatiendo sobre ello una vez hayan investigado y explicando la solución final.

Currículo y competencias.

A nivel curricular, hemos orientado nuestras actividades según los contenidos que se establecen en (Decreto, 2015) de Castilla La-Mancha para el curso de 1º ESO de la asignatura de Matemáticas, la relación entre actividades, EAE y competencias: competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT), competencia aprender a aprender (AA), competencia en comunicación lingüística (CL), competencia en sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (CIEE), competencia social y cívica (CSC), competencia en conciencia y expresiones culturales (CEC),

	Estándares de Aprendizaje Evaluables	Competencias
Actividad 1	1.4. Clasifica los cuadriláteros y paralelogramos atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos y conociendo sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales	CMCT, CL, CIEE
	1.1. Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema, simetrías[15].	
Actividad 2	1.5. Define círculo y circunferencia, e identifica las propiedades geométricas que caracterizan sus puntos.	AA, CL, CSC
Actividad 3	1.3. Define las rectas y puntos notables de un triángulo, conoce sus propiedades y los traza.	CMCT, CIEE, CD
Actividad 4	1.3. Define las rectas y puntos notables de un triángulo, conoce sus propiedades y los traza.	CMCT, CIEE, CD
Actividad 5	1.3. Define las rectas y puntos notables de un triángulo, conoce sus propiedades y los traza.	AA, CD, CSC

Competencia digital (CD) es la siguiente:

[15] En esta actividad solo se trabajan cuadrados, por lo que el EAE debe ser subdividido en la programación, ya que la actividad solamente trabaja una parte del estándar.

Actividad 6	3.1. Comprende los significados aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema construyendo otros polígonos sobre los lados del triángulo rectángulo.	CMCT, AA, CSC

Tabla 1. EAE y competencias

Estándares de Aprendizaje Evaluables (EAE)

Este trabajo es enfocado a la didáctica de la geometría, por lo que los estándares que teníamos disponibles para trabajar son los que se encuentran dentro de dicho bloque, concretamente del curso 1º ESO. Algunos estándares no se han decido trabajar con esta metodología y según como podemos ver en (Decreto, 2015) son los siguientes:

Estándares de Aprendizaje Evaluables (No utilizados)
1.2. Clasifica los triángulos atendiendo tanto a sus ángulos como a sus lados
2.1. Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas.
2.2. Calcula la longitud de la circunferencia, el área del círculo, la longitud de un arco y el área de un sector circular, y las aplica para resolver problemas geométricos.
3.2. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contextos reales.
4.1. Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza.

Tabla 2. Estándares no utilizados.

En el caso de los EAE 1.2 y 4.1 no los hemos incorporado, ya que, aunque GeoGebra es un software bastante potente en cuanto las funcionalidades de demostración automática, hemos podido comprobar que en la mayoría de las situaciones que le planteábamos sobre estos EAE: sobre igualdad de ángulos, semejanza de figuras… GeoGebra no es capaz de ofrecer una respuesta. Por otro lado, los EAE 2.1, 2.2 y 3.2 no se han añadido, aunque sí que se han trabajado desde una perspectiva más teórica conceptos relacionados con ellos como áreas de círculos, teorema de Pitágoras… Pues al tratarse de estándares más prácticos, consideramos que no es de utilidad recurrir a los comandos de demostración automática en dichos casos.

En cuanto a los estándares elegidos, hay que destacar que el 1.1 se trabaja de manera parcial, pues en la actividad, en cuanto a polígonos regulares, únicamente se trabajan las propiedades del cuadrado. Respecto al resto, han sido elegidos debido a que se ha considerado que son interesantes de ser trabajados con esta metodología y GeoGebra es capaz de aportarnos las funcionalidades necesarias para poder llevarlas al aula. De este modo, las actividades han sido diseñadas, como se explica en los apartados de "Puesta en práctica en el aula" y "Actividades", para el trabajo de cada uno de los estándares que se ven en la tabla 1.

Competencias

Al igual que sucedía con los estándares, las actividades han sido diseñada basándose en las competencias con el objetivo de que el alumno consiga el mayor nivel de consecución de cada una de las competencias.

Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT)

Esta competencia, evidentemente, está relacionada con nuestra asignatura. Además, al incorporar una metodología de influencia tecnológica, en nuestro plan de trabajo propuesto, la competencia CMCT va a ser una en las que más se van a desarrollar los alumnos. A priori, sin haber llevado el estudio a la práctica, y, por tanto, no haber podido apoyarnos en datos, consideramos que la incorporación que proponemos de funcionalidades de demostración automática en secundaria ayuda a desarrollar y trabajar el pensamiento lógico-matemático, así como, la predicción de fenómenos e interpretación de los mismos, todo ello relacionadas con la competencia CMCT como se indica en (Decreto, 2015). En nuestro caso, los alumnos la trabajan en las 6 actividades que proponemos. No obstante, hemos relacionado esta competencia con las actividades 1, 3, 4 y 6 porque consideramos que son en las que más se trabaja, al tratarse de actividades donde los contenidos se ven desde una perspectiva puramente geométrica y donde se desarrolla el pensamiento lógico-matemático.

Competencia aprender a aprender (AA)

Es otra de las competencias donde consideramos que mayor desarrollo consiguen los alumnos con el uso de esta metodología. En nuestra propuesta, existen muchos apartados donde se pide al alumno que busquen la posición donde se produce una propiedad, o que investigue las condiciones bajo las que produce un fenómeno. Con todo ello, el alumno estará trabajando la competencia de aprender a aprender. Por lo que, a pesar de que consideramos que esta competencia se trabaja en todas las actividad, existe un mayor grado en las que hemos apuntado en la tabla 1, es decir, las actividades

2, 5 y 6. Pues se tratan de actividades, donde en la mayor parte de ellas, el alumno trabaja en la búsqueda de propiedades por sí mismo.

Competencia en comunicación lingüística (CL)

El desarrollo en esta competencia lo conseguimos con la incorporación de la precisión lenguaje matemático dentro del lenguaje habitual. En nuestro caso, trabajamos esta competencia en las actividades 1 y 2 donde se busca encontrar una definición formal de diferentes elementos: paralelogramos, cuadriláteros, circunferencia, círculo… Además, al tratarse de actividades donde los alumnos tienen que exponer y defender tus ideas a través del lenguaje, durante este proceso también se desarrolla la competencia lingüística.

Competencia en sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (CIEE)

Según (Decreto, 2015) de Castilla La-Mancha, esta competencia se obtiene a través distintos aspectos como la resolución de problemas, el uso de la argumentación para defender las ideas o resultados obtenidos… Principalmente, esto lo desarrollamos a través de los debates donde los alumnos trabajan en dicha resolución, buscando soluciones y gestionándose para, más tarde, defender sus ideas en los debates frente a los demás grupos. Esto sucede en mayor medida, en las actividades 1, 3 y 4 donde más parte de debate hay planificada.

Competencia social y cívica (CSC)

Como se indica en (Decreto, 2015) desde las matemáticas de 1º ESO, podemos trabajar esta competencia a través del trabajo cooperativo, aprendiendo a reconocer puntos de vista distintos y valorar las aportaciones de los compañeros. En nuestro caso, todas las actividades que hemos propuesto son de trabajo en equipo, por lo que en mayor o menor de medida, todas ellas ayudarán al desarrollo de esta competencia. Sin embargo, en las actividades donde más tiempo se trabaja de manera cooperativa son la 2, 5 y 6.

Competencia en conciencia y expresiones culturales (CEC)

Está competencia en (Decreto, 2015) se propone trabajarla, a través de las producciones artísticas o el uso histórico de las matemáticas para la explicación, resolución y justificación de problemas de la humanidad. Para nuestra metodología, hemos probado a recurrir a los comandos de demostración automática para el estudio de producciones artísticas. Sin embargo, debido a la total precisión que necesitan dichos comandos, hemos considerado no añadirla en las actividades. No obstante, como la consideramos importante, el profesor es el que debe hacer alusiones a ello en sus explicaciones, pero como comentamos, estas explicaciones son trabajadas desde el punto de vista geométrico y no desde la visión de este trabajo en relación al uso de las funcionalidades de demostración automática en GeoGebra. Es por ello, que consideramos que nuestra metodología no ayudaría en gran medida al su desarrollo, siendo mejor otras opciones. Además, nuestro estudio únicamente propone la metodología de trabajo de una parte de un bloque (Bloque 3 Geometría) del currículo que se establece en (Decreto, 2015), por lo que tampoco es necesario que en esta pequeña parte se trabajen todas las competencias, pudiendo desarrollarse en otras partes del curso o incluso en este mismo bloque, por ejemplo, como hemos visto anteriormente en la tabla 2, sobre los estándares 2.1, 2.2 y 3.2 (los cuáles no hemos incorporado en nuestras actividades) relacionados con situaciones prácticas, sobre los cuales consideramos que es más coherente desarrollar está competencia.

Competencia digital (CD)

La metodología que proponemos supone un trabajo continuo del alumno con herramientas tecnológicas. Por lo que, los alumnos desarrollarán esta competencia en todas las actividades que hemos creado, teniendo que realizar un mayor uso de ellas en las actividades 3, 4 y 5 donde el alumno aprenderá a utilizar herramientas como “Mediatriz”, “Bisectriz”, “Baricentro”…

Recogida de datos, análisis de la información, resultados y plan de acción.

Al tratarse de un estudio que no se ha podido llevar a la práctica debido la situación de pandemia global[16], este apartado tendrá menos grado de profundizad de lo esperado. En el apartado “Calendario” del anexo se puede ver la temporalización del estudio.

Consideramos de utilidad, que el profesor recoja anotaciones de sensaciones, respuestas de alumnos, dificultades, facilidades… De todo lo que haya visto durante las seis sesiones. De este modo, se podrán comparar en cierto modo, los puntos fuertes y débiles de esta metodología, además de, cómo y cuándo emplearla. También, es relevante conocer las sensaciones de los alumnos, de modo que, al final del estudio, es de utilidad

[16] En 2020 ha habido una pandemia global debido al virus COVID-19 que ha supuesto la suspensión de las clases presenciales en España.

pasarles una encuesta donde se pregunte por el grado de satisfacción. Por último, una vez se haya hecho la evaluación a los alumnos sobre estos contenidos, se han de comparar los resultados con los demás grupos que utilizaban distintas metodologías, tanto el que solo incorporaba GeoGebra, como el que seguía la metodología habitual de clase. De este modo, podremos ver si los resultado obtenidos también se deben a únicamente a la incorporación de GeoGebra o a los comandos de demostración automática, siendo más fácil ver sobre qué resultados influyen los comandos. Además, comparar los resultados obtenidos de la misma clase sobre otros contenidos explicados con otra metodología es de utilidad en el análisis.

Conclusiones

Resultados finales

A lo largo del estudio hemos visto que existen distintas funcionalidades de demostración automática destinadas a la didáctica. También, hemos comprobado su potencia y, conforme a ello, se ha hecho una propuesta de trabajo en el aula. A pesar de que al principio puede generar rechazo trabajar utilizando estas funcionalidades en alumnos con menos conocimientos matemáticos, consideramos que de forma prudente y con una buena planificación del profesor, pueden llegar a ser de gran utilidad.

Al comienzo de la investigación, resulto difícil encontrar propiedades adaptadas al temario de secundaria en las que GeoGebra fuera capaz de ofrecer respuestas formales. Sin embargo, tras un periodo de tiempo se empieza a interiorizar como funcionan dichos comandos y a entender sobre que propiedades hay que preguntarle. Además, al ser una temática muy poco trabajada, no nos hemos podido apoyar sobre otros trabajos, siendo la metodología final de autoría e inspiración propia. No obstante, nos gustaría dejar claro que la metodología que proponemos en cada una de las actividades se trata un material que sirve de apoyo al profesor, como hemos comentado en los apartados anteriores, las actividades son como presentaciones de PowerPoint donde el profesor se apoya en ellas y explica a los alumnos, los cuales también las tienen y realizan lo que les señala el profesor cuando este se lo indica. Consideramos que esta metodología es la más eficaz, por lo que no queremos que estas actividades sean consideradas como una serie de ejercicios que se le da a los alumnos y de manera autónoma ellos las realizan. Es más, al tratarse de comandos que pueden resultar difíciles de entender y usar para los alumnos, como se puede ver en el apartado "Puesta en práctica en el aula" en la mayoría de los casos donde el alumno tiene que recurrir a ellos se hace de manera guiada y conjunta con el profesor.

Implicaciones

La incorporación de los comandos de demostración automática en nuestra metodología, puede llegar suponer un aumento en la motivación del alumno, además de un fuerte desarrollo del pensamiento lógico-matemático y por tanto del desarrollo de la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología, además de la competencia digital y aprender a aprender. Al conocer estas herramientas, nosotros mismo hemos procedido a investigar propiedades y nos han surgido dudas que hemos conseguido responder a través de estas funcionalidades, como, por ejemplo, ¿Cuál será el lugar geométrico donde se cumple que el perímetro de un triángulo es igual 2? Se trata de un proceso divertido de aprendizaje que puede motivar a los alumno, e incluso algunos de ellos pueden pasar a investigar en sus casas. No obstante, consideramos que existen muchas situaciones en las que el software no es capaz de ofrecer respuesta y debería desarrollar más sus funcionalidades para poder ser capaz de comparar elementos claves de geometría en secundaria como son los ángulos.

La situación de no haber podido llevar a la práctica el estudio, puede llegar a suponer una sensación de incompletitud, aunque debido a esto, ha sido posible trabajar sobre la metodología e investigar las maneras más efectivas de usar las funcionalidades, además de poder recurrir a más bibliografía. Solo queda decir, que es un tema muy interesante y con un potencial enorme que consideramos en un futuro no muy lejano ayudará a la mejora de la calidad educativa. Por lo que recomendamos en estudios futuros, principalmente, a los docentes que quieran poner en práctica esta metodología, una incorporación previa de GeoGebra a los alumno para más tarde llegar a trabajar con las funcionalidades de demostración automática.

Bibliografía

Decreto 40/2015, de 15/06/2015, por el que se establece el currículo de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Castilla-La Mancha.

García, M. D. M. (2011). Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir GeoGebra en el aula (*Doctoral dissertation, Universidad de Almería*).

Hohenwarter, M. (2002). GeoGebra-a software system for dynamic geometry and algebra in the plane. *Unpublished master's thesis, University of Salzburg, Austria.*

Hohenwarter, M. [Organización de Estados Iberoamericanos OEI] (10 de Diciembre de 2013). Conferencia Dynamic Mathematics for Everyone (subtitulada) Markus Hohenwarter. [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=Yq1eBZjz16I

Hohenwarter, M., Kovács, Z., & Recio, T. (2019a). Determinando propiedades geométricas simbólicamente con GeoGebra. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *100*, 79-84

Hohenwarter, M., Kovács, Z., & Recio, T. (2019b). Using Automated Reasoning Tools to Explore Geometric Statements and Conjectures. En *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching* (pp. 215-236). Springer, Cham.

Hohenwarter, M., & Lavicza, Z. (2010). GeoGebra, its community and future. En *Asian Technology Conference in Mathematics*

Kovács, Z. (2015). The Relation Tool in GeoGebra 5. En Botana, F., Quaresma, P. (Eds.), Postconference Proceedings of the 10th International Workshop on Automated Deduction in Geometry (ADG 2014), 9-11 July 2014, Lecture Notes in Artificial Intelligence 9201 (pp. 53-71). Springer.

Kovács, Z., Recio, T., Richard, P. R., & Vélez, M. P. (2017). GeoGebra automated reasoning tools: A tutorial with examples. En *Proceedings of the 13th*

International Conference on Technology in Mathematics Teaching (pp. 400-404).

Kovács Z., Recio, T. y Vélez, M. P. (2018). Detecting truth, just on parts. Revista Matemática Complutense, Volume 32, Issue 2, 451–474

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado. Madrid, 3 de enero de 2015, núm. 3, 169-546.

Recio, T. (2001). La mecánica de la demostración y la demostración mecánica. *Recuperado de http://www. uv. es/~ didmat/angel/seiem. html.*

Recio, T., Richard, P. R., & Vélez, M. P. (2019). Designing Tasks Supported by GeoGebra Automated Reasoning Tools for the Development of Mathematical Skills. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 26(2), p.81-88

Saéz, E. [Derivando] (04 de Enero de 2017). Teorema de los cuatro colores. [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=Rv6r5K9con8

Schnider, P. (2009). An introduction to proof assistants. En *Student Seminar in Combinatorics: Mathematical Software* (Vol. 8).

Ueno, C. (2016). Demostraciones geométricas automáticas en GeoGebra. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *93*, 141-150.

Ueno, C. (2017). Demostraciones geométricas automáticas en GeoGebra: Casos prácticos. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *94*, 107-115.

Ueno, C. (2019). Explorando relaciones geométricas en GeoGebra. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *102*, 97-106.

Van Vaerenbergh, S., Recio, T., & Vélez, M. P. (2019). Herramientas de Razonamiento Automático en GeoGebra: qué son y para qué sirven.

Vélez, M. P. (2018). Taller 7: Resolviendo problemas con la cabeza mientras GeoGebra razona automáticamente. IV Día de GeoGebra Albacete 2018. Recuperado de http://www.nebrija.es/~pvelez/DiaGeoGebra2018/DiaGeoGebra2018-ART%28Marzo2018%29.pdf

Wu, W.T. (1978). On the Decision Problem and the Mechanization of Theorem Proving in Elementary. *Scientia Sinica 21*. 157-179.

Anexo

Calendario

En este apartado mostraremos la estructura temporal del estudio, añadiendo también la parte práctica que, aunque no se ha podido incorporar, se ha hecho su temporalización.

Primera semana: Búsqueda de bibliográfica relacionada con el estudio, así como, metodologías propuestas o ya realizadas, estudios previos relacionados, software de referencia existentes, funcionalidades que contienen, comparación de los mismos, limitaciones y puntos positivos de los diferentes programas. …

Segunda semana: Aprendizaje del software elegido, en nuestro caso, GeoGebra. Aprendiendo a utilizar las herramientas, estudiando sobre qué contenidos del currículo es más eficaz esta metodología y apoyándose sobre propuestas que han sido vistas la semana anterior para llevar al aula los comandos de demostración automática.

Tercera semana: Creación de las actividades sobre los contenidos previamente elegidos y realización de la "puesta en práctica en el aula" para trabajar con los alumnos. Comenzando a incorporar GeoGebra en las explicaciones, ya que será más fácil para los alumnos trabajar con este software si se incorpora de manera progresiva. Creación de los formularios Google Forms que servirán para la recogida de datos.

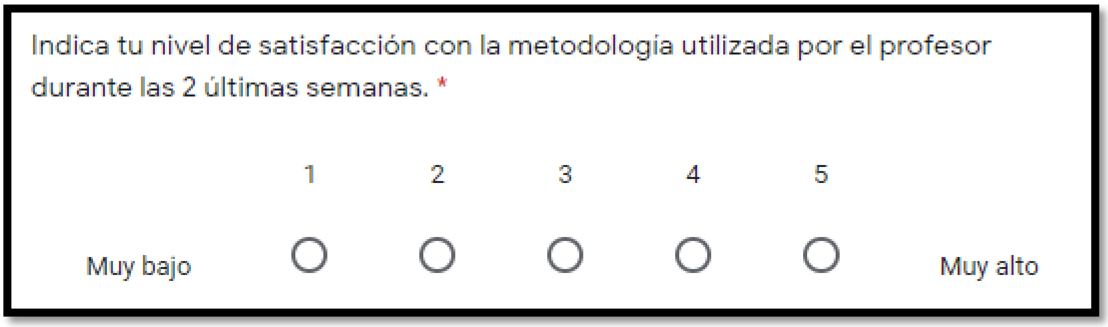
Cuarta y quinta semana: Trabajo de las 6 sesiones (una sesión por cada actividad) en el aula y regida de datos tanto al final de las sesiones por parte del profesor, como al final de la quinta semana, en una encuesta hecha a los alumnos.

Sexta semana: Evaluación a los alumnos sobre los contenidos y análisis de los resultados obtenidos, tanto en la evaluación como en los formularios, además de la comparación con resultados anteriores de esa misma clase y con el resto de los grupos que han utilizado esta metodología. Por último, exposición de conclusiones y reflexiones sobre el estudio y la metodología utilizada.

Formularios (Google Forms)

En este apartado mostramos el formulario[17] que ha sido creado para que respondan los alumnos una vez hayan terminado las actividades, las preguntas son las siguientes:

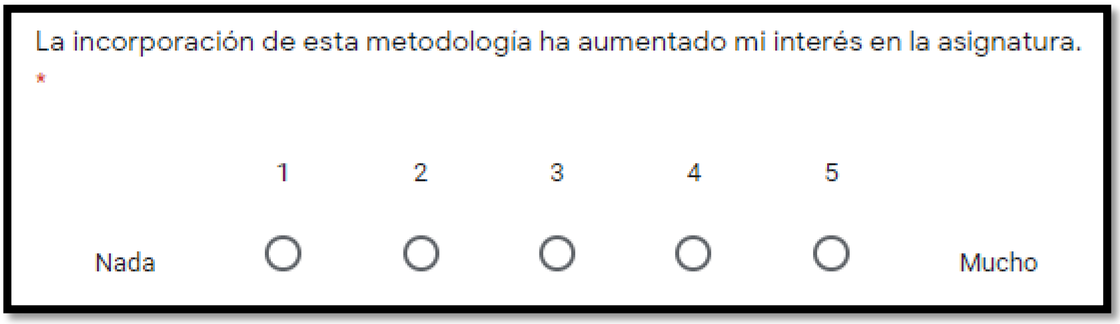
Pregunta 1


Indica tu nivel de satisfacción con la metodología utilizada por el profesor durante las 2 últimas semanas. *

	1	2	3	4	5	
Muy bajo	○	○	○	○	○	Muy alto

Pregunta 1

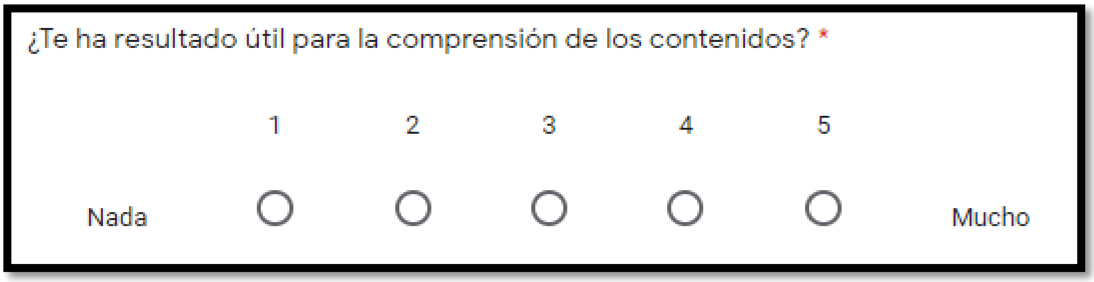
Pregunta 2


La incorporación de esta metodología ha aumentado mi interés en la asignatura. *

	1	2	3	4	5	
Nada	○	○	○	○	○	Mucho

Pregunta 2

Pregunta 3


¿Te ha resultado útil para la comprensión de los contenidos? *

	1	2	3	4	5	
Nada	○	○	○	○	○	Mucho

Pregunta 3

[17] Ver formulario en: https://forms.gle/C8W5z1QxMu2dXeAN8

Pregunta 4

¿Qué es lo que más te ha gustado de la metodología?

Tu respuesta

Pregunta 4

Pregunta 5

¿Qué es lo que menos te ha gustado de la metodología? *

Tu respuesta

Pregunta 5

Pregunta 6

¿Qué te han parecido las diferentes actividades? *

	Nada interesante	Poco interesante	Normal	Interesante	Muy interesante	No asistí
Actividad 1 “Paralelogramos”	○	○	○	○	○	○
Actividad 2 “Círculo y circunferencia”	○	○	○	○	○	○
Actividad 3 “Mediatriz y circuncentro”	○	○	○	○	○	○
Actividad 4 “Bisectriz e incentro”	○	○	○	○	○	○
Actividad 5 “Puntos notables”	○	○	○	○	○	○
Actividad 6 “Teorema de Pitágoras”	○	○	○	○	○	○

Pregunta 6

<u>Pregunta 7</u>

¿Querrías que el profesor volviera a utilizar esta metodología?

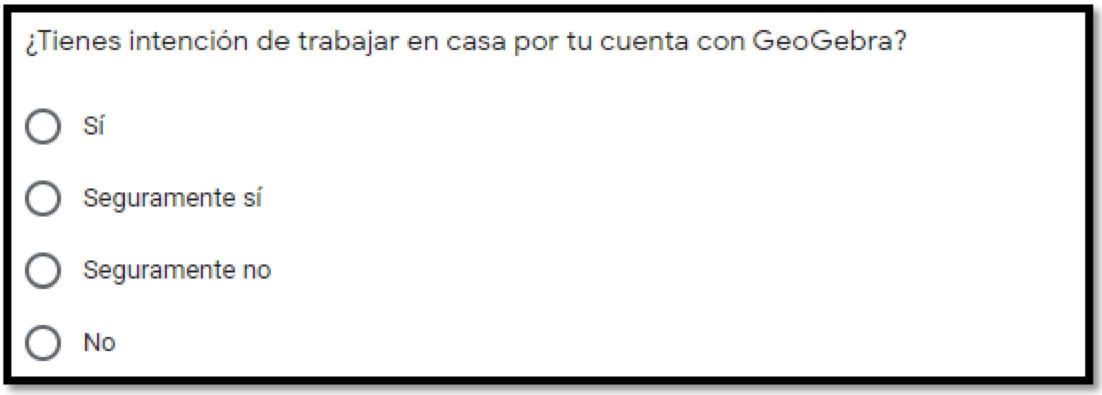
○ Sí

○ No

○ Indiferente

Pregunta 7

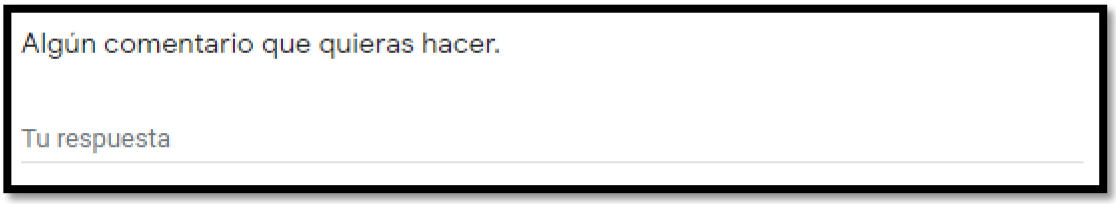
<u>Pregunta 8</u>


¿Tienes intención de trabajar en casa por tu cuenta con GeoGebra?

- Sí
- Seguramente sí
- Seguramente no
- No

Pregunta 8

Pregunta 9


Algún comentario que quieras hacer.

Tu respuesta

Pregunta 9