Universidad de Alcalá
Escuela Politécnica Superior

GRADO EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA Y AUTOMÁTICA INDUSTRIAL

Trabajo Fin de Grado

Aplicación de técnicas de procesamiento de series temporales al sensado de contaminantes ambientales

ESCUELA POLITECNICA SUPERIOR

Autor: Mario Sañudo Herranz

Tutor/es: Felipe Espinosa Zapata
Carlos Santos Pérez

2020

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ
Escuela Politécnica Superior

Grado en Ingeniería Electrónica y Automática Industrial

Trabajo Fin de Grado

Aplicación de técnicas de procesamiento de series temporales al sensado de contaminantes ambientales

Autor: Mario Sañudo Herranz

Tutor/es: Felipe Espinosa Zapata
Carlos Santos Pérez

TRIBUNAL:

Presidente: J. Antonio Jiménez Calvo

Vocal 1º: Francisco Javier Meca Meca

Vocal 2º: Felipe Espinosa Zapata

FECHA: Septiembre 2020

Índice

Resumen 10
Abstract 11
Resumen extendido 12
Memoria 13
Objetivos 13
Fundamentos de series temporales 16
Tratamiento de datos 19
Análisis en el dominio temporal 19
- Ejemplo de aplicación: serie temporal de temperatura 21
- Ejemplo de aplicación: serie temporal de ozono 23

Análisis en el dominio frecuencial 24
- Ejemplo de aplicación: serie temporal de temperatura 28
- Ejemplo de aplicación: serie temporal de ozono 31

Transformación de datos 33
Modelado paramétrico de series temporales 37
Modelos lineales no recursivos (off-line) 40
- Ejemplo de aplicación: serie temporal de temperatura 40
- Ejemplo de aplicación: serie temporal de temperatura transformada 46
- Ejemplo de aplicación: serie temporal de ozono. 53
- Ejemplo de aplicación: serie temporal de ozono transformada. 59
- Ejemplo de aplicación: serie temporal de temperatura filtrada 71
- Ejemplo de aplicación: serie temporal de ozono filtrado. 77

Modelos lineales recursivos 81
- Ejemplo de aplicación: serie temporal de temperatura. 85
- Ejemplo de aplicación: serie temporal de ozono. 96

Modelado no lineal de series temporales 103
- Ejemplo de aplicación: serie temporal de temperatura. 104
- Caso de aplicación: serie temporal de ozono 107

Conclusión 110
Trabajos futuros 112
ANEXOS 113
ANEXO I 113

ANEXO II. 114
ANEXO III 115
ANEXO IV. 116
ANEXO V. 117
ANEXO VI. 118
ANEXO VII 119
ANEXO VIII 120
ANEXO IX 121
ANEXO X 122
ANEXO XI. 123
ANEXO XII: 124
ANEXO XIII 125
ANEXO XIV 126
ANEXO XV. 127
ANEXO XVI. 128
ANEXO XVII. 129
REFERENCIAS 130

Índice de Tablas

Tabla 1. Resultados del modelado de la serie temporal de la temperatura. 43
Tabla 2. Resultados de la predicción de la serie temporal de la temperatura a partir de los modelos calculados. 46
Tabla 3. Resultados del modelado de la serie temporal de la temperatura, una vez transformada la ordenación de los datos registrados 50
Tabla 4. Resultados del modelado de la serie temporal de la temperatura (réplica de la Tabla 1). 50
Tabla 5. Resultados de la predicción de la serie temporal de la temperatura transformada a partir de los modelos calculados. 53
Tabla 6. Resultados de la predicción de la serie temporal de la temperatura original a partir de los modelos calculados (réplica Tabla 2). 53
Tabla 7. Resultados de los distintos modelados de la serie temporal del ozono. 70
Tabla 8. Resultados del modelado de la serie temporal de la temperatura tras haberla filtrado aplicando un filtro paso bajo a una frecuencia de 0.09 ciclos/hora. 75
Tabla 9. Resultados del modelado de la serie temporal original de la temperatura (réplica Tabla 1). 75
Tabla 10. Resultados de la predicción de la serie temporal de la temperatura filtrada a 0,09 ciclos/hora a partir de los modelos calculados. 77
Tabla 11. Resultados del modelado recursivo de la serie temporal de la temperatura. 91
Tabla 12. Resultados de la predicción de la serie temporal de la temperatura a partir de los modelos recursivos calculados. 95
Tabla 13. Resultados del modelado recursivo de la serie temporal del ozono. 102
Tabla 14. Resultados de la predicción de la serie temporal del ozono a partir de los modelos recursivos calculados. 103
Tabla 15. Resumen de los resultados obtenidos en el análisis del modelado no linear en la serie temporal de temperatura. 106
Tabla 16. Resumen de los resultados obtenidos en el análisis del modelado no linear en la serie temporal de ozono. 109

Índice de Figuras

Figura 1. Esquema nodo emisor. 15
Figura 2. Esquema centro remoto. 15
Figura 3. Esquema del análisis de las observaciones de una serie temporal. 18
Figura 4. Representación del número de huelgas en Estados Unidos por año [Brockwell, 2016]. 20
Figura 5. Autocorrelación de la Figura 4. 21
Figura 6. Representación de la serie temporal de la temperatura en Madrid durante el mes de diciembre de 2019. 22
Figura 7. Representación de la función de autocorrelación de los datos de la Figura 6. 22
Figura 8. Representación de la concentración de ozono [Ghoneim, 2017]. 23
Figura 9. Resultado de la autocorrelación de la Figura 8. 24
Figura 10. Representación pasajeros en vuelos internacionales [Brockwell, 2016]. 25
Figura 11. Representación en la parte superior de la serie temporal Airpass [Brockwell, 2016], y en la inferior su espectro de potencia 25
Figura 12. Representación en la parte superior de la serie temporal Airpass y en la inferior su espectro de potencia tras un filtro paso bajo a 0.007 ciclos/día. 26
Figura 13. Representación en la parte superior de la serie temporal Airpass y en la inferior su espectro de potencia tras un filtro paso bajo a 0.005 ciclos/día. 27
Figura 14. Representación de la comparación de los distintos resultados de aplicar filtros respecto la de origen. 28
Figura 15. Representación en la parte superior de la serie temporal de la temperatura y en la inferior su espectro de potencia. 29
Figura 16. Representación en la parte superior de la serie temporal de la temperatura y en la inferior su espectro de potencia tras aplicar un filtro paso bajo en 0,09 ciclos/hora. 29
Figura 17. Representación en la parte superior de la serie temporal de la temperatura y en la inferior su espectro de potencia tras aplicar un filtro paso bajo en 0,05 ciclos/hora. 30
Figura 18. Comparación de la serie temporal de la temperatura original, con los resultados de aplicar distintos filtrados. 30
Figura 19. Representación en la parte superior de la serie temporal del ozono y en la inferior su espectro de potencia. 31
Figura 20. Representación en la parte superior de la serie temporal del ozono y en la inferior su espectro de potencia tras un filtro paso bajo en 0.005 ciclos/minuto. 31
Figura 21. Representación en la parte superior de la serie temporal del ozono y en la inferior su espectro de potencia tras un filtro paso bajo en 0.003 ciclos/minuto. 32
Figura 22. Representación de la comparación de los distintos resultados de aplicar filtros respecto la de origen. 32
Figura 23. Representación de la transformada de la serie temporal de la temperatura en Madrid durante el mes de diciembre de 2019. 33
Figura 24. Representación de la función de autocorrelación de los datos de la Figura 23. 34
Figura 25. Representación de la concentración de ozono con un tiempo de muestreo de 15 minutos [Ghoneim, 2017]. 34
Figura 26. Resultado de la autocorrelación de la Figura 25. 35
Figura 27. Representación de la concentración de ozono con un tiempo de muestreo de 60 minutos [Ghoneim, 2017]. 35
Figura 28. Resultado de la autocorrelación de la Figura 27. 36

Figura 29. Esquema modelo AR. 37
Figura 30. Esquema modelo ARI. 38
Figura 31. Esquema modelo ARMA. 38
Figura 32. Esquema modelo ARIMA. 39
Figura 33. Comparación del modelo AR de 174 regresores calculado respecto la primera quincena de datos de la temperatura de Madrid. 40
Figura 34. Comparación del modelo ARI de 119 regresores calculado respecto la primera quincena de datos de la temperatura de Madrid. 41
Figura 35. Comparación del modelo ARIMA de 89 regresores calculado respecto la primera de datos quincena de la temperatura de Madrid. 41
Figura 36. Comparación del modelo AR de 174 regresores calculado respecto la segunda quincena de datos de la temperatura de Madrid. 42
Figura 37. Comparación del modelo ARI de 119 regresores calculado respecto la segunda quincena de datos de la temperatura de Madrid. 42
Figura 38. Comparación del modelo ARIMA de 89 regresores calculado respecto la segunda quincena de datos de la temperatura. 43
Figura 39. Función de ajuste para una estructura AR de la serie temporal de la primera quincena de datos la temperatura. 44
Figura 40. Representación de la predicción de las 360 muestras (dos semanas) posteriores a la primera quincena de la temperatura, con un modelo AR de 174 regresores, junto con los datos reales. 44
Figura 41. Representación de la predicción de las 360 muestras (dos semanas) posteriores a la primera quincena de la temperatura, con un modelo ARI de 119 regresores, junto con los datos reales. 45
Figura 42. Representación de la predicción de las 72 muestras (tres días) posteriores a la primera quincena de la temperatura, con un modelo ARIMA de 89 regresores, junto con los datos reales. 45
Figura 43. Comparación del modelo AR de 138 regresores calculado respecto la primera mitad de los datos transformados. 47
Figura 44. Comparación del modelo ARI de 119 regresores calculado respecto la primera mitad de los datos de la temperatura transformados. 47
Figura 45. Comparación del modelo ARIMA de 82 regresores calculado respecto la primera mitad de los datos de la temperatura transformados. 48
Figura 46. Comparación del modelo AR de 138 regresores calculado respecto la segunda mitad de los datos de la temperatura transformados. 49
Figura 47. Comparación del modelo ARI de 119 regresores calculado respecto la segunda mitad de los datos de la temperatura transformados. 49
Figura 48. Comparación del modelo ARIMA de 82 regresores calculado respecto la segunda mitad de los datos de la temperatura transformados. 50
Figura 49. Representación de la predicción de las 200 muestras (8 días y medio) posteriores a la primera mitad de datos transformados de la temperatura, con un modelo AR de 138 regresores, junto con los datos reales. 51
Figura 50. Representación de la predicción de las 200 muestras (8 días y medio) posteriores a la primera mitad de datos transformados de la temperatura, con un modelo ARI de 119 regresores, junto con los datos reales. 52
Figura 51. Representación de la predicción de las 72 muestras (3 días) posteriores a la primera mitad de datos transformados de la temperatura, con un modelo ARIMA de 82 regresores, junto con los datos reales. 52

Figura 52. Representación de la comparación del modelo ARI obtenido con la serie temporal de ozono original. 54
Figura 53. Representación de la comparación del modelo AR obtenido con la serie temporal de ozono original. 54
Figura 54. Representación de la comparación de las primeras 167 muestras del modelo ARI obtenido con la serie temporal de ozono original. 55
Figura 55. Representación de la comparación de las primeras 167 muestras del modelo AR obtenido con la serie temporal de ozono original. 55
Figura 56. Representación de la comparación de las primeras 200 muestras del modelo ARI obtenido con la serie temporal de ozono original. 56
Figura 57. Representación de la comparación de las primeras 200 muestras del modelo AR obtenido con la serie temporal de ozono original. 56
Figura 58. Se representa la función de ajuste para una estructura AR de la serie temporal de ozono para un número de regresores máximo de 200. 57
Figura 59. Resultado de la función de autocorrelación del ozono durante dos semanas, hasta 2000 retrasos. 58
Figura 60. Comparación del modelo calculado de 1112 regresores sobre la primera semana de la serie temporal de ozono. 58
Figura 61. Comparación del modelo calculado de 1112 regresores sobre la primera semana de la serie temporal de ozono. 59
Figura 62. Representación de la comparación del modelo ARIMA obtenido con la serie temporal de ozono con tiempo de muestreo 15 minutos. 60
Figura 63. Representación de la comparación del modelo AR obtenido con la serie temporal de ozono con tiempo de muestreo 15 minutos. 60
Figura 64. Representación de la comparación del modelo ARI obtenido con la serie temporal de ozono con tiempo de muestreo 15 minutos. 61
Figura 65. Representación de la comparación de las primeras 55 muestras del modelo ARIMA obtenido con la serie temporal de ozono con 15 minutos de tiempo de muestreo. 61
Figura 66. Representación de la comparación de las primeras 55 muestras del modelo AR obtenido con la serie temporal de ozono con 15 minutos de tiempo de muestreo. 62
Figura 67. Representación de la comparación de las primeras 55 muestras del modelo ARI obtenido con la serie temporal de ozono con 15 minutos de tiempo de muestreo. 62
Figura 68. Representación de la comparación de las primeras 67 muestras del modelo ARIMA obtenido con la serie temporal de ozono con 15 minutos de tiempo de muestreo. 63
Figura 69. Representación de la comparación de las primeras 67 muestras del modelo AR obtenido con la serie temporal de ozono con 15 minutos de tiempo de muestreo. 63
Figura 70. Representación de la comparación de las primeras 67 muestras del modelo ARI obtenido con la serie temporal de ozono con 15 minutos de tiempo de muestreo. 64
Figura 71. Representación de la comparación del modelo ARIMA obtenido con la serie temporal de ozono con tiempo de muestreo 60 minutos. 64
Figura 72. Representación de la comparación del modelo AR obtenido con la serie temporal de ozono con tiempo de muestreo 60 minutos. 65
Figura 73. Representación de la comparación del modelo ARI obtenido con la serie temporal de ozono con tiempo de muestreo 60 minutos. 65
Figura 74. Representación de la comparación de las primeras 13 muestras del modelo ARIMA obtenido con la serie temporal de ozono con 60 minutos de tiempo de muestreo. 66
Figura 75. Representación de la comparación de las primeras 13 muestras del modelo AR obtenido con la serie temporal de ozono con 60 minutos de tiempo de muestreo. 66

Figura 76. Representación de la comparación de las primeras 13 muestras del modelo AR obtenido con la serie temporal de ozono con 60 minutos de tiempo de muestreo 67
Figura 77. Representación de la comparación de las primeras 17 muestras del modelo ARIMA obtenido con la serie temporal de ozono con 60 minutos de tiempo de muestreo. 67
Figura 78. Representación de la comparación de las primeras 17 muestras del modelo AR obtenido con la serie temporal de ozono con 60 minutos de tiempo de muestreo. 68
Figura 79. Representación de la comparación de las primeras 17 muestras del modelo ARI obtenido con la serie temporal de ozono con 60 minutos de tiempo de muestreo. 68
Figura 80. Resultado de la función de autocorrelación de la serie temporal de la temperatura filtrado a una frecuencia de corte de 0,09 ciclos/hora. 71
Figura 81. Comparación del modelo AR de 167 regresores calculado respecto la primera quincena de la serie temporal de temperatura filtrada a 0,09 ciclos/hora. 72
Figura 82. Comparación del modelo ARI de 115 regresores calculado respecto la primera quincena de la serie temporal de temperatura filtrada a 0,09 ciclos/hora. 72
Figura 83. Comparación del modelo ARIMA de 86 regresores calculado respecto la primera quincena de la serie temporal de temperatura filtrada a 0,09 ciclos/hora. 73
Figura 84. Comparación del modelo AR de 167 regresores calculado respecto la segunda quincena de la serie temporal de temperatura filtrada a 0,09 ciclos/hora. 73
Figura 85. Comparación del modelo ARI de 115 regresores calculado respecto la segunda quincena de la serie temporal de temperatura filtrada a 0,09 ciclos/hora. 74
Figura 86. Comparación del modelo ARIMA de 86 regresores calculado respecto la segunda quincena de la serie temporal de temperatura filtrada a 0,09 ciclos/hora. 74
Figura 87. Representación de la predicción de las 72 muestras (3días) posteriores a la primera mitad de datos de la temperatura filtrada a 0,09 ciclos/hora, con un modelo AR de 167 regresores, junto con los datos reales. 76
Figura 88. Representación de la predicción de las 360 muestras (2 semanas) posteriores a la primera mitad de datos de la temperatura filtrada a 0,09 ciclos/hora, con un modelo ARI de 115 regresores, junto con los datos reales. 76
Figura 89. Representación de la predicción de las 360 muestras (2 semanas) posteriores a la primera mitad de datos de la temperatura filtrada a 0,09 ciclos/hora, con un modelo ARIMA de 86 regresores, junto con los datos reales. 77
Figura 90. Resultado de la función de autocorrelación de la serie temporal del ozono filtrada a una frecuencia de 0.005 ciclos/minuto. 78
Figura 91. Función de ajuste de la serie temporal original de ozono para las distintas cantidades de regresores incluidos en el modelo AR. 79
Figura 92. Función de ajuste de la serie temporal de ozono filtrada a partir de -5 dB, correspondiente a 0.005 ciclos/minuto, para las distintas cantidades de regresores incluidos en el modelo AR. 79
Figura 93. Ampliación de la Figura 92. 80
Figura 94. Función de ajuste de la serie temporal de ozono filtrada a partir de 0 dB, correspondiente a 0.003 ciclos/minuto, para las distintas cantidades de regresores incluidos en el modelo AR. 80
Figura 95. Ampliación de la Figura 94. 81
Figura 96. Esquema modelos recursivos. 82
Figura 97. Esquema de la obtención de la dimensión m del vector de parámetros para los modelos recursivos con factor de olvido. 84
Figura 98. Función de ajuste de la serie temporal de la temperatura utilizando el algoritmo de factor de olvido, con un valor de 0.98. 85

Figura 99. Representación de la comparación temporal del modelo Recursivo con 21 regresores y factor de olvido 0.98 con la serie temporal de la temperatura de origen. 86
Figura 100. Función de ajuste de la serie temporal de la temperatura utilizando el algoritmo de factor de olvido, con un valor de 0.995. 86
Figura 101. Representación de la comparación temporal del modelo Recursivo con 25 regresores y factor de olvido 0.995 con la serie temporal de la temperatura de origen. 87
Figura 102. Representación de la comparación temporal del modelo Recursivo con 174 regresores y factor de olvido 0.99425 con la serie temporal de la temperatura de origen. 88
Figura 103. Función de ajuste de la serie temporal de la temperatura utilizando el algoritmo del filtro de Kalman para R1=R2. 88
Figura 104. Representación de la comparación temporal del modelo Recursivo con 26 regresores mediante el filtro de Kalman con R1=R2 respecto la serie temporal de la temperatura de origen. 89
Figura 105. Función de ajuste de la serie temporal de la temperatura utilizando el algoritmo del filtro de Kalman para R1=R2/100. 89
Figura 106. Representación de la comparación temporal del modelo Recursivo con 26 regresores mediante el filtro de Kalman con R1=R2/100 respecto la serie temporal de la temperatura de origen. 90
Figura 107. Función de ajuste de la serie temporal de la temperatura utilizando el algoritmo del filtro de Kalman para R1=R2*100. 90
Figura 108. Representación de la comparación temporal del modelo Recursivo con 26 regresores mediante el filtro de Kalman con R1=R2*100 respecto la serie temporal de la temperatura de origen. 91
Figura 109. Representación de la predicción de las últimas 180 muestras de la serie de la temperatura, correspondiente a 1 semana, con un modelo recursivo de 21 regresores con factor de olvido 0.98, junto con los datos de la serie original. 92
Figura 110. Representación de la predicción de las últimas 180 muestras de la serie de la temperatura, correspondiente a 1 semana, con un modelo recursivo de 25 regresores con factor de olvido 0.995, junto con los datos de la serie original. 93
Figura 111. Representación de la predicción de las últimas 180 muestras de la serie de la temperatura, correspondiente a 1 semana, con un modelo recursivo de 174 regresores con factor de olvido 0.99425, junto con los datos de la serie original. 93
Figura 112. Representación de la predicción de las últimas 180 muestras de la serie de la temperatura, correspondiente a 1 semana, con un modelo recursivo de 26 regresores con filtro de Kalman y R1=R2 junto con los datos de la serie original. 94
Figura 113. Representación de la predicción de las últimas 180 muestras de la serie de la temperatura, correspondiente a 1 semana, con un modelo recursivo de 26 regresores con filtro de Kalman y R1=R2/100 junto con los datos de la serie original. 94
Figura 114. Representación de la predicción de las últimas 180 muestras de la serie de la temperatura, correspondiente a 1 semana, con un modelo recursivo de 26 regresores con filtro de Kalman y R1=100*R2 junto con los datos de la serie original. 95
Figura 115. Función de ajuste de la serie temporal del ozono utilizando el algoritmo de factor de olvido, con un valor de 0.98. 96
Figura 116. Representación de la comparación temporal del modelo Recursivo con 1 regresor y un factor de olvido de 0.98 respecto la serie temporal de la temperatura de origen. 97
Figura 117. Función de ajuste de la serie temporal del ozono utilizando el algoritmo de factor de olvido, con un valor de 0.995. 97

Figura 118. Representación de la comparación temporal del modelo Recursivo con 2 regresores y un factor de olvido de 0.995 respecto la serie temporal del ozono de origen. 98
Figura 119. Representación de la comparación temporal del modelo Recursivo con 167 regresores y un factor de olvido de 0.994 respecto la serie temporal del ozono de origen. 98
Figura 120. Función de ajuste de la serie temporal del ozono utilizando el algoritmo del filtro de Kalman para R1=R2. 99
Figura 121. Representación de la comparación temporal del modelo Recursivo con 11 regresores mediante el filtro de Kalman con R1=R2, respecto la serie temporal del ozono de origen. 99
Figura 122 Función de ajuste de la serie temporal del ozono utilizando el algoritmo del filtro de Kalman para R1=R2/100..... 100
Figura 123. Representación de la comparación temporal del modelo Recursivo con 11 regresores mediante el filtro de Kalman con R1=R2/100, respecto la serie temporal del ozono de origen. 100
Figura 124. Función de ajuste de la serie temporal del ozono utilizando el algoritmo del filtro de Kalman para R1=R2*100. 101
Figura 125. Representación de la comparación temporal del modelo Recursivo con 11 regresores mediante el filtro de Kalman con R1=R2*100, respecto la serie temporal del ozono de origen. 101
Figura 126. Representación de la predicción de las últimas 288 muestras de la serie del ozono, correspondiente a 1 día, con un modelo recursivo de 167 regresores y factor de olvido 0.994, junto con los datos de la serie original..... 102
Figura 127. Esquema estructura modelo no linear. 103
Figura 128. Gráfica de la función sigmoide. 104
Figura 129. Comparación del modelo no lineal con estimador sigmoidal de 174 regresores y 2 términos de expansión respecto la primera mitad de datos de la temperatura. 104
Figura 130. Comparación del modelo no lineal con estimador sigmoidal de 174 regresores y dos términos de expansión respecto la segunda mitad de datos de la temperatura. 105
Figura 131. Comparación del modelo no lineal con estimador sigmoidal de 174 regresores y 2 términos de expansión respecto la segunda mitad de datos de la temperatura. 105
Figura 132. Representación de la predicción de 24 muestras de la serie de la temperatura, correspondiente a 1,5 días, con un modelo no linear con estimador sigmoidal de 174 regresores y 2 términos de expansión junto con los datos de la serie original. 106
Figura 133. Comparación del modelo no lineal con estimador sigmoidal de 167 regresores y 18 términos de expansión respecto la primera mitad de datos del ozono. 107
Figura 134. Comparación del modelo no lineal con estimador sigmoidal de 167 regresores y 18 términos de expansión respecto la segunda mitad de datos del ozono..... 108
Figura 135. Representación de la predicción de 288 muestras de la serie del ozono, correspondiente a 1 día, con un modelo no linear con estimador sigmoidal de 167 regresores y 18 términos de expansión junto con los datos de la serie original. 108

Resumen

En este TFG se estudia la aplicación de estructuras paramétricas lineales (AR, ARI, ARIMA), recursivas (Filtro de Kalman y Factor de Olvido) y no lineales (NLAR sigmoidal) al modelado de series temporales no lineales y variantes en el tiempo. Se aborda el procesamiento previo de datos (temporal y frecuencial), se plantean estrategias para calcular el número de regresores y se comparan los resultados de las diferentes técnicas aplicadas a una colección de datos reales. Dado el interés de la monitorización de la contaminación ambiental en ciudades inteligentes se ha elegido un registro real de ozono como caso de estudio.

Palabras clave: Ciudad Inteligente, contaminante ambiental, serie temporal, modelado paramétrico, identificación recursiva,

Abstract

This project studies the application of linear (AR, ARI, ARIMA), recursive (Kalman Filter and Forgetting Factor) and nonlinear (sigmoidal NLAR) parametric structures to the modelling of nonlinear time series and variants in time. It is approached the previous data processing (temporal and frequency), it is proposed strategies to calculate the number of regressors, and the result of the different techniques applied are compared to a collection of real data. Given the interest in monitoring environmental pollution in smart cities, a real ozone registry has been chosen as a case study.

Keyword: Smart City, environmental pollutant, time series, parametric modelling, recursive identification.

Resumen extendido

La motivación de este Trabajo de Fin de Grado está en el reto de optimizar la autonomía de los nodos de una red sensorial en el contexto de ciudades inteligentes, concretamente en la monitorización de contaminación ambiental. Una de las alternativas consiste en reducir el número de transmisiones de los sensores inalámbricos al centro remoto de procesamiento. Y a ello contribuye el disponer de modelos de la evolución temporal de la variable bajo estudio. De esta forma, solo será necesario enviar información sensada cuando la predicción proporcionada se aleje de la predicción por encima de un umbral.

Tras revisar conceptos generales de series temporales, para su aplicación se han seguido los pasos de: procesamiento de datos y modelado paramétrico. Entre las herramientas para el tratamiento de datos en el dominio del tiempo está la función de autocorrelación (ACF), su aplicación ayuda a fijar el número regresores a utilizar en el modelo. En el dominio frecuencial, el espectro de potencia de la serie orienta la aplicación de filtros que reduzcan el ruido y faciliten la obtención de modelos más sencillos. Otra aplicación muy útil, es emplear transformaciones como la reorganización de datos o el submuestreo.

El TFG se centra en el modelado paramétrico de series temporales que presentan un comportamiento no lineal y variante en el tiempo. Modelado que incluye las fases de identificación, validación y predicción. En primer lugar, se abordan los modelos lineales no recursivos (off-line) profundizando en los modelos AR, ARI y ARIMA. Posteriormente se estudian los modelos lineales recursivos (on-line) utilizando dos algoritmos ampliamente conocidos: Filtro de Kalman y el Factor de olvido. Y, por último, se abordan los modelos no lineales; de la multitud de diferentes alternativas para esta parte, se ha analizado la solución NLAR con estructura sigmoidal.

Como principal caso de estudio se ha elegido la concentración de ozono registrada en la ciudad danesa de Aarhus, además de un registro de datos de la temperatura de la ciudad de Madrid.

Memoria

Objetivos

El crecimiento previsto de las poblaciones urbanas ha impulsado a los investigadores y a las administraciones a mejorar los servicios prestados a los ciudadanos. En el centro de estos servicios se encuentran las redes inalámbricas de múltiples sensores diferentes compatibles con el Internet de las cosas (IoT).

Según las previsiones, dos tercios de la población mundial vivirá en ciudades en 2050. Aunque existen varias interpretaciones de Ciudad Inteligente, el principal objetivo es lograr un mejor uso de los recursos públicos mediante tecnologías digitales y de telecomunicación, aumentando la calidad de los servicios ofrecidos a los habitantes, administraciones públicas y empresas. [Santos, 2019]

La lucha contra la contaminación atmosférica ha demostrado ser una tarea difícil para los países con economías en rápido desarrollo. La mala calidad del aire condiciona la actividad al aire de las personas, por lo que la monitorización, supervisión y control de los contaminantes atmosféricos es una necesidad, y su predicción de gran utilidad. Sin embargo, el horizonte de predicción de estos contaminantes es bastante difícil, ya que hay muchos y diferentes procesos físicos y químicos involucrados [Hegeman, 2020].

El objetivo principal de las redes de sensores es proporcionar información suficiente para mejorar el transporte, suministros energéticos, servicios sociales, entornos públicos y seguridad de los ciudadanos. Dos grandes avances tecnológicos que mejorarían estas redes en Ciudades Inteligentes son: la comunicación eficiente entre nodos y la reducción en el consumo de energía de cada nodo.

El sensado se encuentra en el corazón de las Ciudades Inteligentes, y se utiliza para monitorizar variables relacionadas con una abundancia de aplicaciones para el medio ambiente, la atención médica, el transporte y la movilidad, el consumo de energía de los hogares, la seguridad y vigilancia, etc.

Se debe hacer una mención especial a las redes de sensores inalámbricos alimentadas por baterías (Wireless Sensor Network –WSN-), debido a su capacidad de detección ubicua en tiempo real. Generalmente, estos sensores se pueden describir como una red de nodos que detectan y permiten controlar el entorno. Sin embargo, las WSN presentan dos limitaciones en comparación con las redes cableadas clásicas: la inestabilidad en la comunicación y la autonomía energética [Santos, 2019].

La inteligencia de las ciudades está respaldada por el Internet de las Cosas (IoT), es decir, por una infraestructura de comunicación que proporciona un acceso unificado, sencillo y económico a una gran cantidad de servicios públicos, desatando así posibles sinergias y aumentando la transparencia para los ciudadanos, las empresas y las administraciones públicas. Algunos de los servicios urbanos típicos habilitados por el paradigma del Internet de las Cosas incluyen la salud estructural de los edificios, la gestión de residuos, el control del ruido, la congestión del tráfico,

el consumo de energía, el estacionamiento inteligente, la iluminación inteligente, la automatización, el impacto en la salud de los edificios públicos y la calidad del aire.

El funcionamiento básico de un nodo sensor es el siguiente: un microcontrolador recibe datos del sensor y los procesa en consecuencia. Luego, el transceptor inalámbrico transfiere los datos para permitir la comunicación física. Este proceso de transmisión de datos es responsable del mayor consumo de energía. Aunque la tecnología basada en sistemas microelectromecánicos ha logrado una reducción en el consumo del nodo sensor, su autonomía aún depende de una batería; en consecuencia, la investigación sobre estrategias para aumentar la autonomía de la batería sigue siendo un reto [Santos, 2019]. Para abordar el desafío de la autonomía energética en las WSN se trabaja en: tamaño y consumo del nodo sensor, fuentes de energía internas y externas, técnicas de comunicación, ciclos de trabajo y reducción de datos.

La mayoría de las aplicaciones basadas en redes de sensores se fundamentan en una filosofía basada en el tiempo mediante el cual las lecturas se realizan con una frecuencia de muestreo determinada. Para minimizar los problemas asociados, los nuevos estándares introducen ciclos de transmisión/recepción discontinuos con reactivaciones breves y grandes rangos de suspensión. Se propone un paso adicional mediante el cual los dispositivos de interconexión intercambian datos solo cuando se ha disparado un evento particular. Con respecto al nodo receptor, si se cuenta con un modelo del proceso sensado, algunos de los datos pueden predecirse en lugar de recibirse desde el emisor en los tiempos de muestreo. En los esquemas de muestreo aperiódicos, los datos muestreados sólo se transmiten cuando viola un umbral, lo que significa que se transmiten menos datos, logrando así una mejor utilización de los recursos [Santos, 2019].

En el contexto de Smart Cities, WSN e IoT, el presente TFG se centra en el enfoque de detección basado en eventos, es decir, la variable detectada solo se transmite cuando se detecta un cambio relevante, sin degradar el seguimiento de la señal en el nodo de supervisión remota. Esto asegura ahorro significativo en la transmisión y en el consumo energético del nodo sensor, lo que aumenta la vida útil de las baterías.

La idea general de la propuesta es la siguiente, tal y como se indica en las Figuras 1 y 2:

- Nodo emisor: envía la información x_{T_j} cuando la variable x_t sensada periódicamente (x_{T_s}) difiera significativamente de la estimada ($\hat{x}_{T_s}$) por el modelo.
- Centro remoto: estima la información de la variable $\tilde{x}_{T_s}$ entre instantes de tiempo en los que no se cuenta con medida, sólo actualizada cada T_j.

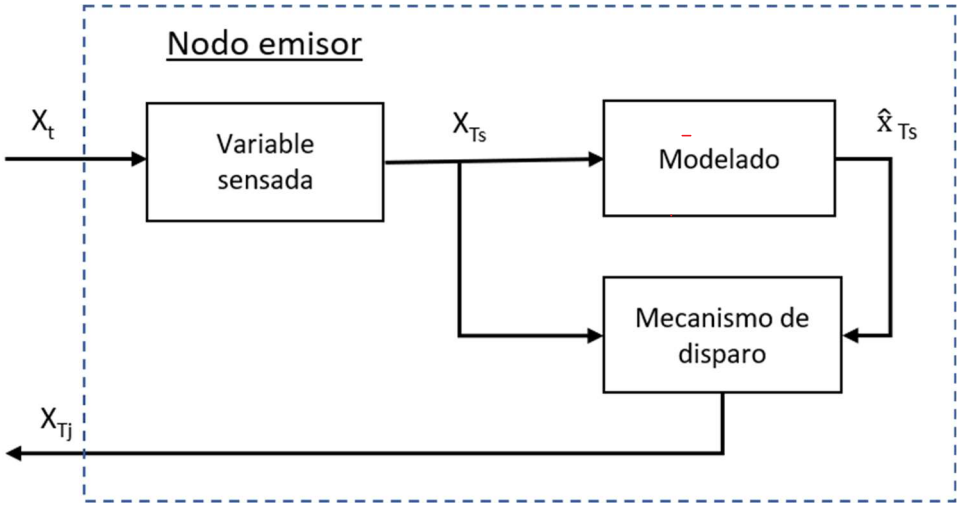

Figura 1. Esquema nodo emisor.

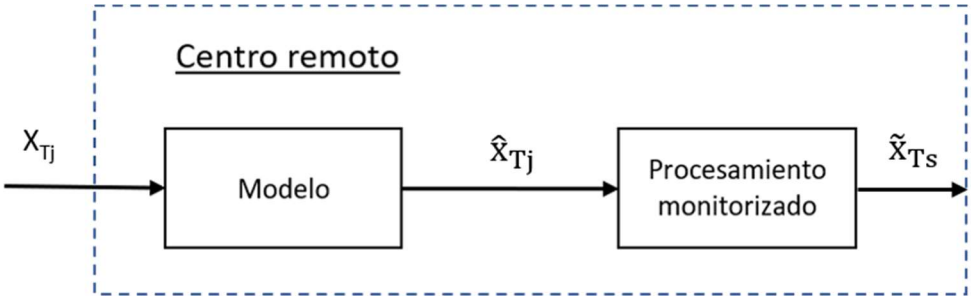

Figura 2. Esquema centro remoto.

Esta propuesta pasa por el modelado de la serie temporal bajo estudio; el punto de partida es la comprensión, estudio y análisis de los datos a examinar, de tal manera que se obtengan conocimientos sobre su comportamiento e información relevante, con la que más tarde se desarrollen los esquemas mostrados en las Figuras 1 y 2.

En el TFG se analizan diferentes técnicas de procesamiento, en el dominio temporal y frecuencial, de datos sensados; así como diferentes configuraciones de estructuras de modelos paramétricos lineales y no lineales basados en regresores, sin abordar el enfoque de redes neuronales. Como aplicación a casos reales, se analizan datos de ozono, uno de los contaminantes ambientales más perniciosos para la salud, aportados por ciudades inteligentes, en concreto los registrados entre agosto y octubre de 2014 en la ciudad danesa de Aarhus [Ghoneim, 2017]. Finalmente, se estudia el horizonte de predicción que permiten los modelos paramétricos analizados.

Fundamentos de series temporales

Una serie temporal es una secuencia de datos x_t, registrado cada uno de ellos en un tiempo específico t. Una serie temporal de tiempo discreto es aquella, en la que el conjunto T_0 de veces en el que se realizan las observaciones es un conjunto discreto, por ejemplo, cuando se realiza la toma de datos en intervalos de tiempo fijos. Mientras que las series temporales continuas se obtienen cuando las observaciones se registran continuamente en un espacio de tiempo.

Muchos conjuntos de datos aparecen como series temporales, sobre todo en el ámbito de la economía, negocios, ingeniería, ciencias naturales, etc.

Una de las características principales de las series temporales, es que las observaciones adyacentes son dependientes. La naturaleza de esta dependencia entre los datos de una serie temporal es de considerable interés práctico. Esto requiere el desarrollo de modelos estocásticos y dinámicos para datos de series de tiempo y el uso de dichos modelos en importantes áreas y aplicaciones.

Las series temporales y los modelos para su estimación tienen varias aplicaciones:

- El modelado de la serie para la predicción de valores futuros a partir del histórico de datos.
- La observación de las interrelaciones entre varias variables de interés y la determinación de modelos dinámicos multivariables para representar las relaciones conjuntas.
- El diseño de esquemas de identificación adaptativa que permita ajustar los parámetros del modelo de la serie dinámicamente.

Este Trabajo Fin de Grado (TFG) se centra en el estudio de series temporales y en el diseño de modelos para su posterior predicción.

Cualquier investigación de series temporales siempre implica un escrutinio de los datos registrados graficados en el tiempo. Este escrutinio a menudo sugiere algún método de análisis, así como estadísticos que son de utilidad para resumir la información en los datos. Destacan dos enfoques distintos, pero no mutualmente excluyentes, para el análisis de series de datos, identificados como enfoque en el dominio del tiempo y enfoque en el dominio de la frecuencia.

Respecto al dominio en el tiempo, generalmente está motivado por la suposición de que la correlación entre puntos adyacentes en el tiempo se explica mejor en términos de una dependencia del valor actual con los valores pasados. Este dominio se centra en modelar algún valor futuro de una serie de tiempo, como una función paramétrica de los valores actuales y pasados.

Por el contrario, en el dominio de la frecuencia supone que las características principales de análisis de la serie temporal se relacionan con variaciones periódicas o sistemáticas que se encuentran en la mayoría de los datos.

El objetivo de las series temporales es el estudio de diferentes técnicas para hacer inferencia de ellas. Para ello es necesario establecer un modelo de probabilidad hipotético para representar todos los datos. Una vez elegida una familia apropiada de modelos, es posible estimar los parámetros, verificar la bondad de ajuste a los datos, y posiblemente usar el modelo ajustado para mejorar nuestra comprensión del mecanismo que genera las series. Una vez que se

desarrolla el modelo satisfactorio, se puede usar de varias maneras, dependiendo del campo particular de aplicación.

El modelo puede usarse simplemente para proporcionar una descripción compacta de los datos. Por ejemplo, se puede representar datos como la suma de una tendencia específica y términos estacionarios aleatorios; para su análisis y comprensión, es importante reconocer la existencia de componentes estacionales y eliminarlos para no confundirlos con tendencias a largo plazo, este proceso se conoce como ajuste estacional. Entre otras aplicaciones de los modelos de series temporales se incluye la separación o filtrado del ruido de las señales.

En cuanto a la predicción de datos, consiste en el uso en el tiempo *t* de observaciones disponibles de una serie temporal, para pronosticar su valor en algún momento futuro *t+l*. Se supone que las observaciones están disponibles a intervalos de tiempo discretos y equiespaciados. Para el valor actual z_t y los valores anteriores z_{t-1}, z_{t-2}, z_{t-3}, …, podrían usarse para pronosticar datos posteriores $l = 1, 2, 3, \ldots$, denotada como $\hat{z}_t(l)$. El objetivo es obtener una función de pronóstico tal que el cuadrado medio de las desviaciones entre los valores reales y pronosticados z_{t+l}-$\hat{z}_t(l)$ sea lo menor posible en cada tiempo *l*.

La idea que subyace en la teoría de la predicción es la de aprender de las regularidades del comportamiento pasado de la serie para proyectarlas hacia el futuro. Por lo tanto, es preciso que los procesos estocásticos generadores de las series temporales tengan algún tipo de estabilidad. Si, por el contrario, en cada momento de tiempo presentan un comportamiento diferente e inestable, no se pueden utilizar para predecir. A estas condiciones que se les impone a los procesos estocásticos para que sean estables para predecir, se les conoce como estacionariedad.

El objetivo principal del análisis de series de tiempo es desarrollar modelos matemáticos que proporcionen descripciones plausibles para la estimación de datos, tratando de filtrar la componente aleatoria de los datos registrados.

Un modelo probabilístico completo de una serie temporal para la secuencia de variables aleatorias $X_1, X_2, X_3, \ldots$, especificaría todas las distribuciones conjuntas de los vectores aleatorios $(X_1, \ldots, X_n)'$, $n=1, 2, \ldots$, o equivalentemente todas las probabilidades.

Un tipo simple de señal generada podría ser una colección de variables aleatorias no correladas. La serie temporal generada a partir de variables no correladas se usa como modelo para el ruido en aplicaciones de ingeniería. El modelo más simple es uno en el que no hay tendencia o componente estacional y en el que las observaciones son simplemente variaciones aleatorias independientes y distribuidas idénticamente (idd) con media cero.

En [Ljung, 2018] se trata el problema de modelado de series temporales como el de identificación de un proceso sin entrada determinística pero sí con entrada aleatoria, generalmente ruido blanco.

En el comienzo del análisis de las observaciones de una serie temporal, es necesario distinguir tres aspectos, la identificación, la validación y la predicción. Los valores de la serie de tiempo se dividen en diferentes conjuntos por tramos para poder optimizar el trabajo.

- En el primero de ellos, la identificación, se realiza un estudio detallado de una gran parte de las observaciones, alrededor del 70%. Con ellos se analiza su naturaleza, comportamiento y características obtenidas a partir de distintos cálculos, conjuntos de hipótesis y suposiciones, tratando de obtener la mayor información posible. Y una vez

que se adquieren los conocimientos suficientes de la serie temporal se procede a la creación de un modelo que conociendo la información anterior se ajuste lo máximo posible a la identificación de un nuevo dato.

- En la validación, se hace uso del tramo de observaciones restante tras la identificación. En este punto lo que se busca es obtener un grado de confianza en el modelo obtenido anteriormente para el fin al que se destina. No hay una demostración de validez de un modelo, sino unos resultados positivos en un conjunto de pruebas que nos da una confianza hacia la finalidad propuesta. En el caso de las series temporales, el objetivo es el de predicción. Por ello, la prueba para demostrar su validez consiste en la predicción de los datos posteriores (correspondientes al tramo de validación) a partir del modelo creado en la identificación, y comparar ambos resultados, observando la confianza de ajuste obtenida, y si es válida para nuestro objetivo. Si el resultado no es el esperado, se ha de volver al proceso de identificación y diseñar otro modelo que se ajuste mejor a la serie temporal.
- Y, por último, la etapa de predicción, que es el objetivo del trabajo. En este punto es necesario haber obtenido un modelo adecuado, que se ajuste de una manera apropiada a la confianza exigida con el horizonte de predicción adecuado a la aplicación concreta. Para ello se debe realizar la predicción de los *l* datos posteriores que necesita el sistema, a parte del modelo obtenido, y utilizando la totalidad de las observaciones de la serie temporal de partida. De esta manera se llega al resultado final.

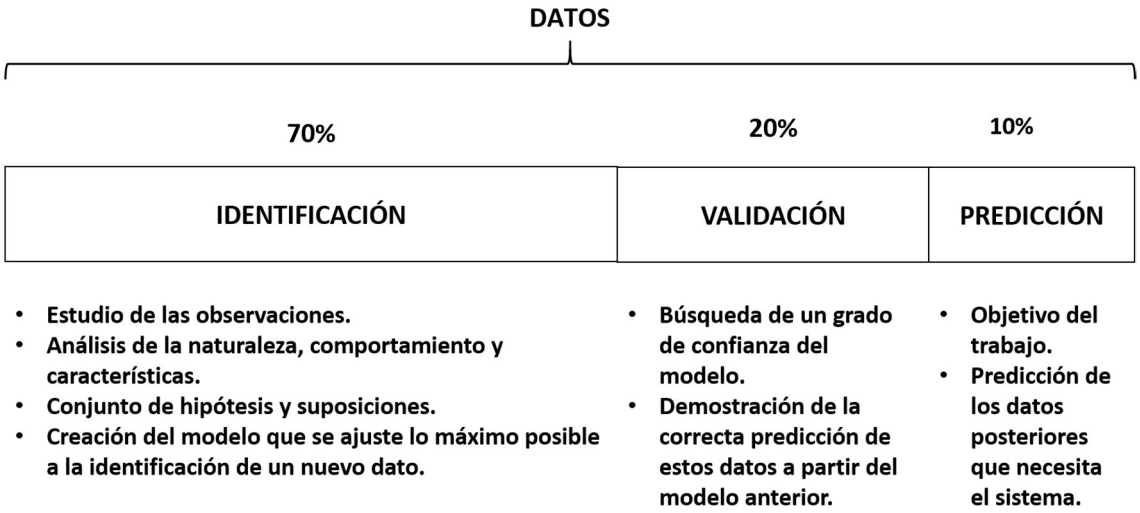

Figura 3. Esquema del análisis de las observaciones de una serie temporal

En [Makridakis, 2018] se presentan dos enfoques para el modelado de series temporales. El enfoque estadístico basado en regresores de la variable evaluada y el enfoque de aprendizaje máquina (Machine Learning). En este TFG trabajaremos con el primero para su aplicación en el modelado y predicción de contaminantes ambientales.

Tratamiento de datos

El tratamiento de datos es de vital importancia para analizar las variables con el objetivo de conseguir un modelo matemático adecuado. De esta manera se discuten algunos métodos para procesar estos datos, como la gestión de datos faltantes, la identificación de valores atípicos y el tratamiento del ruido.

Algunos de los verdaderos retos al trabajar con estos datos de telemetría real a menudo son tan sencillos como su propio acceso, ser capaz de acceder a ellos en diferentes formatos o manejar datos heterogéneos. Ahora, una vez que se tienen estos valores, a menudo la calidad no es la que queremos y se deben de combinar datos que tienen diferentes tasas de muestreo o identificar las muestras que faltan. Si se está tratando con datos de sensores del mundo real se pueden dar fallos durante la adquisición, por ello se ha de identificar los datos erróneos, los valores atípicos y posiblemente filtrar ruidos. Ahora, una vez se ha hecho esto y se han limpiado los datos, el último paso es el verdadero análisis, lo que permitirá examinar y generar algunos resultados con los datos disponibles.

El tratamiento de datos previo al modelado de series temporales se puede hacer en el dominio temporal y/o frecuencial. En este TFG se aborda el modelado de series temporales monovariables. En el caso de varias variables, existen diferentes herramientas para analizar la dependencia entre ellas, como es el análisis de componentes principales (PCA) o el coeficiente de correlación de Pearson (CCP).

Análisis en el dominio temporal

Una manera muy eficaz de analizar el comportamiento y características de una serie temporal es mediante la autocorrelación (autocorrelation function –ACF-) [Box, 2008]. Su utilidad consiste en medir la tendencia de una serie de observaciones, es decir, calcular el grado de dependencia que tiene el dato actual con los registrados anteriormente. Esta estimación, nos puede sugerir cuál de los muchos posibles modelos de series de datos son un candidato adecuado para representar la posible dependencia en los mismos.

La autocorrelación de un proceso estocástico y_t mide la correlación entre y_t e y_{t+k}, donde $k=0, \ldots, K$.

De acuerdo con [Box, 1994], la autocorrelación para el retraso k es:

$$r_k = \frac{c_k}{c_o}$$

Ecuación 1

$$c_k = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-k}(y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})$$

$$c_0 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2$$

Donde

k = retraso.

K = número máximo de retrasos a estudio.

T = número de observaciones en la serie temporal.

y_t = valor de la observación en el tiempo t.

$\bar{y}$ = valor medio del conjunto de observaciones.

c_k = autocovarianza de la señal y_t (covarianza de y_t con su desplazamiento temporal y_{t+k}, respecto el valor medio).

c_0 = varianza de y_t respecto el valor medio.

r_k = coeficiente de autocorrelación, acotado entre -1 y 1.

A modo de ejemplo, a continuación, se ilustra el tratamiento de datos mediante el uso de la autocorrelación, con los valores obtenidos de [Brockwell, 2016], donde se representa el número de huelgas producidas cada año en Estados Unidos, desde 1951 hasta 1980.

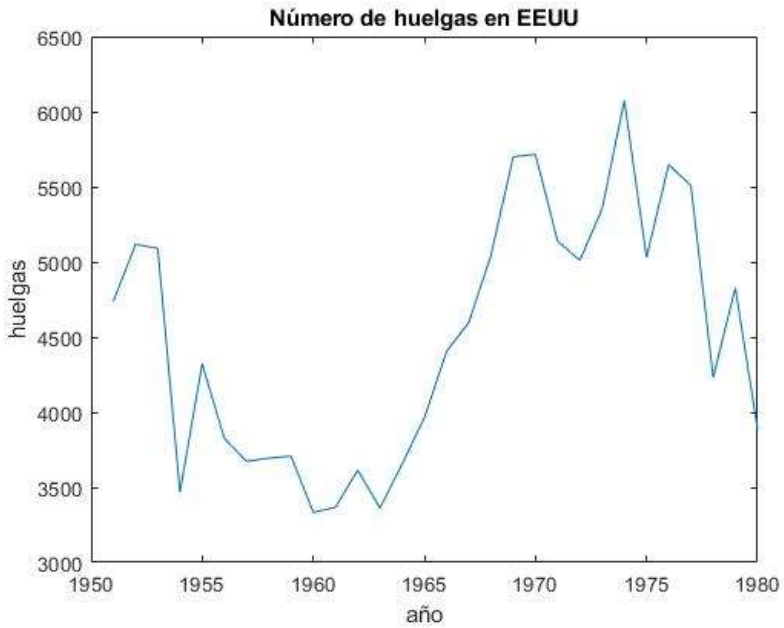

Figura 4. Representación del número de huelgas en Estados Unidos por año [Brockwell, 2016].

Aparentemente, no se visualiza ninguna relación posible en la variación de las observaciones con el tiempo. Sin embargo, con el uso de la autocorrelación, se puede ver la relación existente entre los valores en función del retraso en el tiempo que tienen. El valor de retardo para el cual la función ACF está por debajo del umbral de confianza del 90% es el valor de referencia para elegir el número de regresores a incluir en la propuesta de modelo.

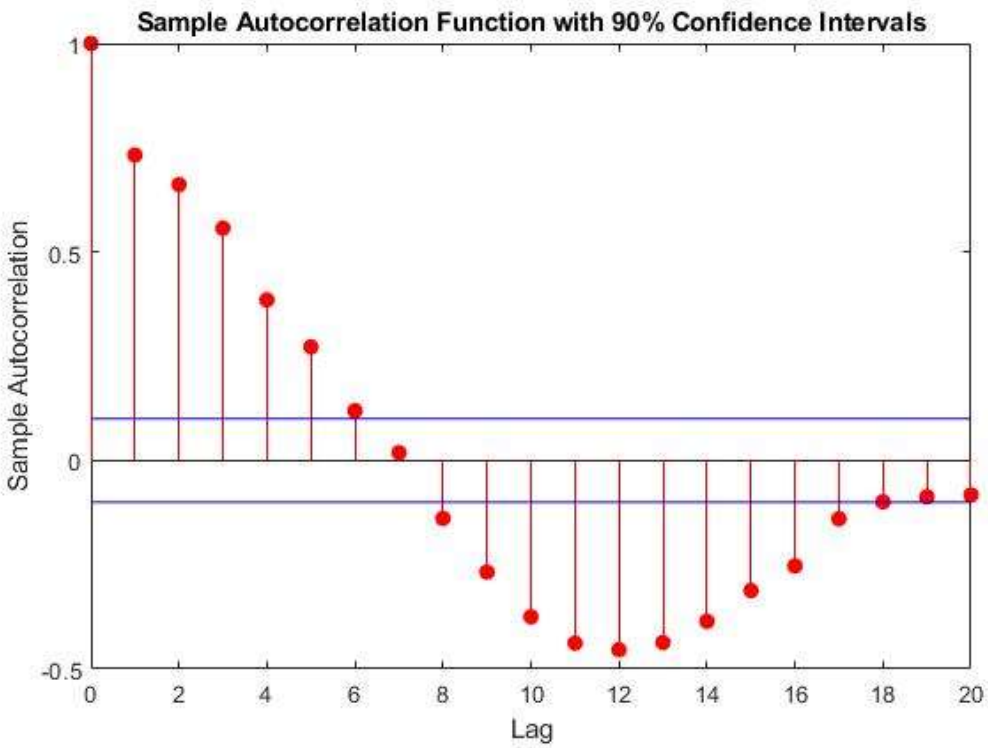

Figura 5. Autocorrelación de la Figura 4.

En la autocorrelación de estos datos, se observa que a medida que aumenta el retraso entre las muestras la dependencia entre ellas decrece. Aproximadamente a partir de 5 muestras anteriores a la actual, la correlación existente está por debajo del umbral fijado y, por lo tanto, se puede despreciar su aportación a la estimación de nuevos valores. Los valores negativos de autocorrelación indican que la relación existente entre ambas observaciones es inversa, es decir, que cuando aumenta una, la otra disminuye, y viceversa. El umbral azul que se puede observar en la Figura 5, corresponde con los límites o intervalos de confianza de autocorrelación superior e inferior al 90%.

- Ejemplo de aplicación: serie temporal de temperatura

En este apartado, se procede al estudio de la serie temporal con la información de la temperatura de la ciudad de Madrid durante el mes de diciembre de 2019. Con un periodo de muestreo de 60 minutos, y un total de 744 muestras, según muestra la Figura 6.

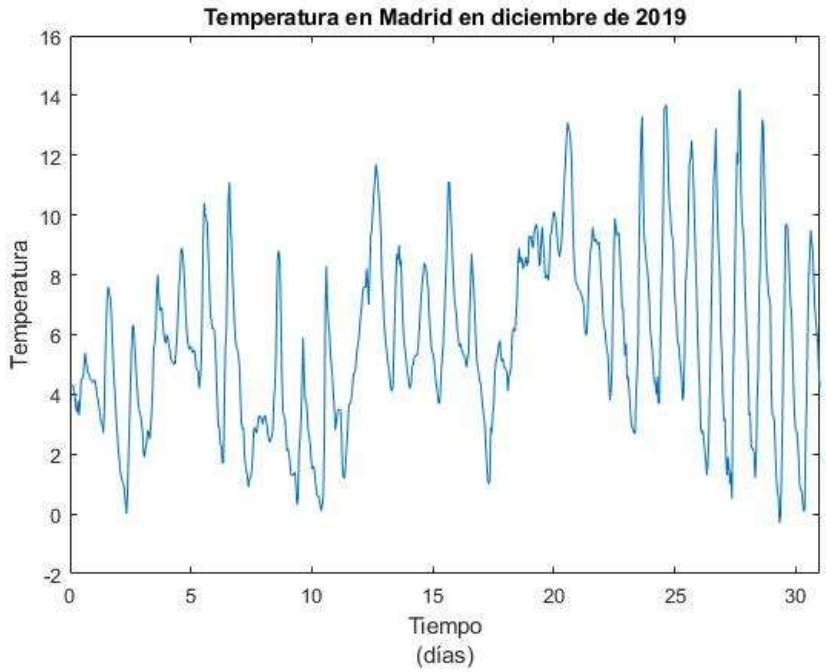

Figura 6. Representación de la serie temporal de la temperatura en Madrid durante el mes de diciembre de 2019.

En la Figura 7, se muestra la solución de la función de autocorrelación de la serie temporal de la temperatura, hasta un total de 250 retardos, equivalente a 10,41 días. Donde se ve una clara tendencia de correlación entre muestras retardadas entre sí un valor cercano a 24 y sus múltiplos, este valor es el esperado al tener una tendencia periódica de 24 horas. Se señala con un 95% de confianza con el segmento horizontal azul; los datos representados al tener una alta correlación con los retrasos múltiplos de 24, no hay un claro valor significativo desde el cual no se supere el 95% de confianza. Sin embargo, podría considerarse que a partir del retardo 174 los valores son menores y se supera la franja ligeramente.

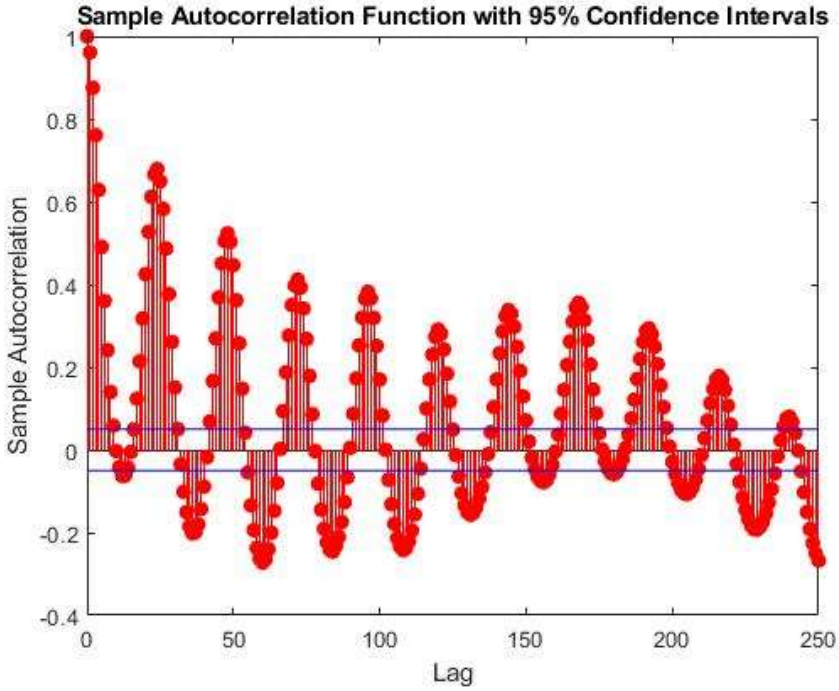

Figura 7. Representación de la función de autocorrelación de los datos de la Figura 6.

- Ejemplo de aplicación: serie temporal de ozono

A continuación, se aplica el estudio de autocorrelación a la serie temporal con información de la contaminación ambiental registrada en la ciudad danesa de Aarhus [Ghoneim, 2017], con ubicación latitud: 56.23172069428210 y longitud: 10.104986076057400. De los diferentes contaminantes, nos centramos en las observaciones de la concentración de ozono con un periodo de 5 minutos y 2016 muestras, lo que corresponde al transcurso de tiempo de una semana, tal y como muestra la Figura 8.

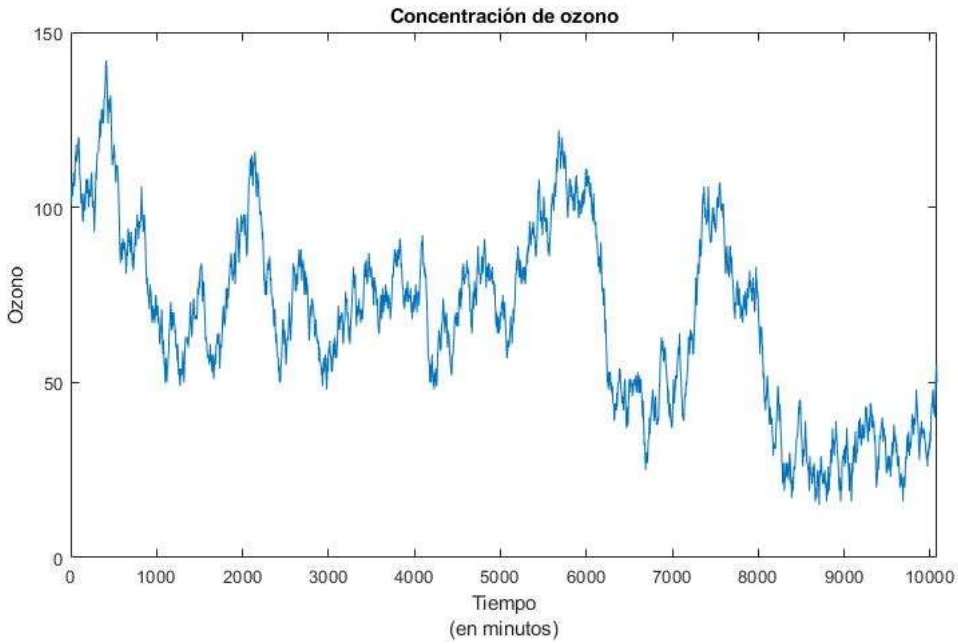

Figura 8. Representación de la concentración de ozono [Ghoneim, 2017].

En la Figura 9 se representa la autocorrelación de la serie temporal del ozono. Al ser una consecución de datos muy amplios, es necesario ampliar el valor del retardo de forma que se alcance el umbral de confianza límite. Se ha optado por un valor máximo de 288 retardos, correspondiente al transcurso de un día natural, teniendo en cuenta que los datos de partida están registrados con 1muestra/5min. Se observa, que la correlación entre muestras disminuye de manera directa según se aumentan los retardos, aunque, una vez pasados los 200 retardos la correlación aumenta, el cruce con la banda del 95% de confianza se produce en la muestra 167. Por lo que será necesario crear un modelo con 167 regresores para alcanzar ese valor de confianza.

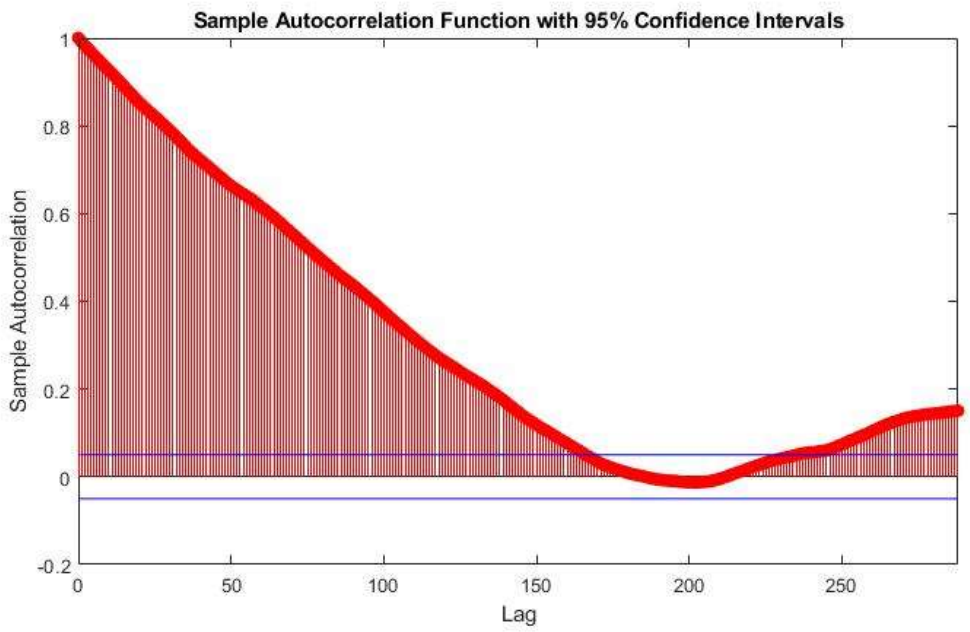

Figura 9. Resultado de la autocorrelación de la Figura 8.

Análisis en el dominio frecuencial

Otro enfoque del procesamiento de datos previo al modelado es a partir de la idea de que una serie temporal exhiba un comportamiento repetitivo o regular a lo largo del tiempo. El concepto de regularidad de una serie puede expresarse mejor en términos de variación periódica del fenómeno subyacente que produce la serie, expresado como frecuencias de Fourier. Desde el punto de vista de la regresión, se puede imaginar un sistema que responda a varias frecuencias, produciendo combinaciones lineales de seno y coseno [Shumway, 2011]. Para manejar este tipo de dependencia es necesario el estudio en el dominio de la frecuencia.

Para la realización de este estudio es muy interesante el uso de la densidad espectral de potencia o espectro de potencia, que muestra para cada frecuencia la energía presente. De esta manera, se puede saber la periodicidad de las observaciones según la frecuencia, y entorno a qué frecuencias se acumula la mayor información registrada.

Para ilustrar la efectividad del estudio basado en el espectro de potencia, se escogen los datos AIRPASS.TSM de [Brockwell, 2016], los cuales, representan la cantidad de pasajeros de aerolíneas internacionales mensuales totales desde enero de 1949 hasta diciembre de 1960. Con un total de 144 datos, correspondientes a una periodicidad de un mes, durante 12 años, lo que supone una frecuencia de muestreo de 0.033 datos/día, tal y como indica la Figura 10.

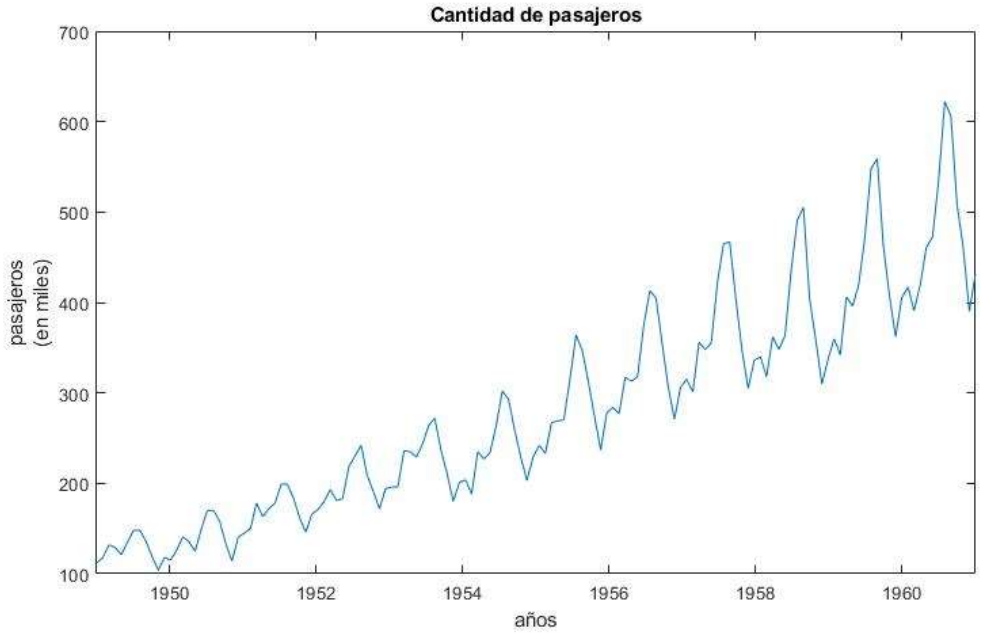

Figura 10. Representación pasajeros en vuelos internacionales [Brockwell, 2016].

Con estos datos, se realiza el espectro de potencia para ver cómo es la repetitividad y periodicidad de la serie temporal. Obteniendo la siguiente Figura:

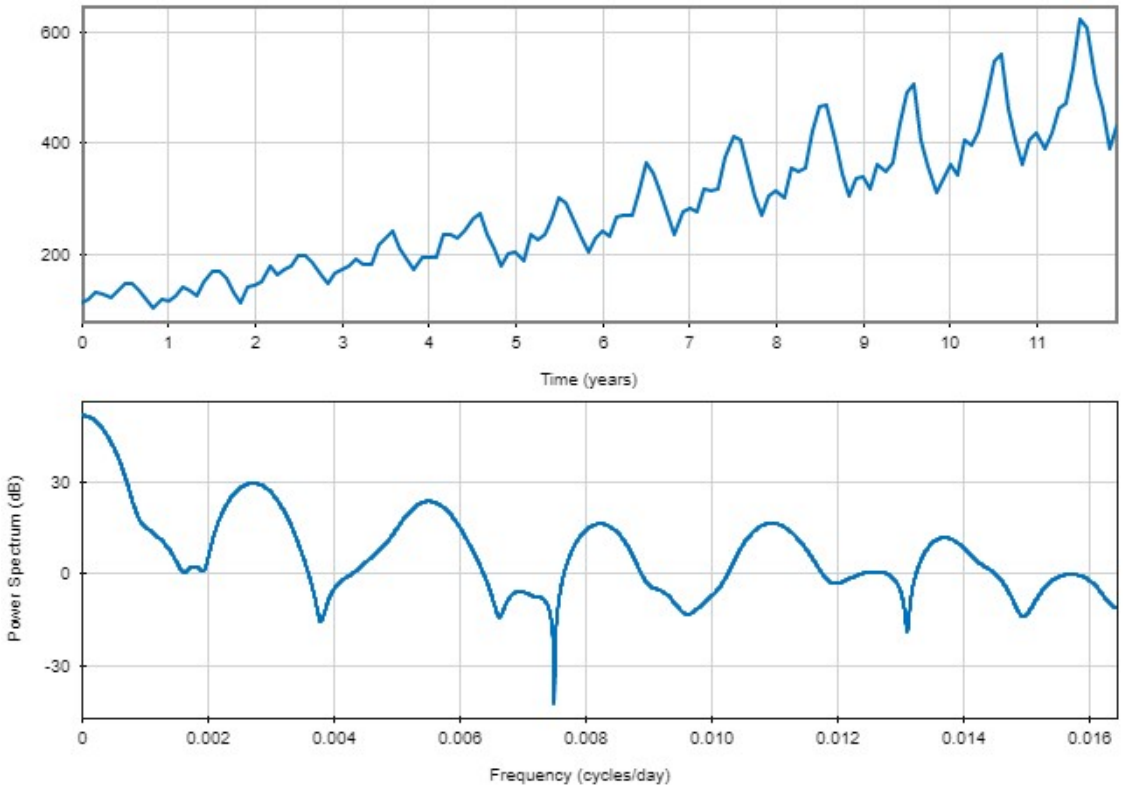

Figura 11. Representación en la parte superior de la serie temporal Airpass [Brockwell, 2016], y en la inferior su espectro de potencia

Se realiza el espectro de potencia, que se ve en la parte inferior de la Figura 11, donde, el eje X representa la frecuencia, desde 0 hasta 0.016 ciclos al día. Hay que observar las frecuencias a las que se acumula la mayor cantidad de potencia, en este caso, cabe destacar las frecuencias

próximas a 0, 0.003 y 0.006 ciclos/día, correspondientes a 0, 1.095 y 2.19 ciclos al año. Las frecuencias restantes registran una potencia espectral inferior a 20dB y se consideran menos significativas. También, cabe destacar, que los valores del espectro a altas frecuencias corresponden al ruido que pueda tener la serie temporal. Por lo que, para la finalidad de modelar una serie de observaciones, es adecuado destacar la acumulación de energía en frecuencias bajas.

Después de este análisis del espectro de potencia, es interesante analizar el efecto de un filtrado de la señal facilitando así el modelado de la serie temporal. En este caso, a la vista de la Figura 11, se diseña un filtro paso bajo con frecuencia de corte de 0.007 ciclos/día, lo que equivale a una repetitividad de 2.55 veces al año.

En la Figura 12, se representa tanto el espectro de potencia, como las observaciones resultantes tras realizar un filtro paso bajo con frecuencia de corte 0.007 ciclos/día. El resultado muestra las frecuencias superiores a la indicada se hacen despreciables.

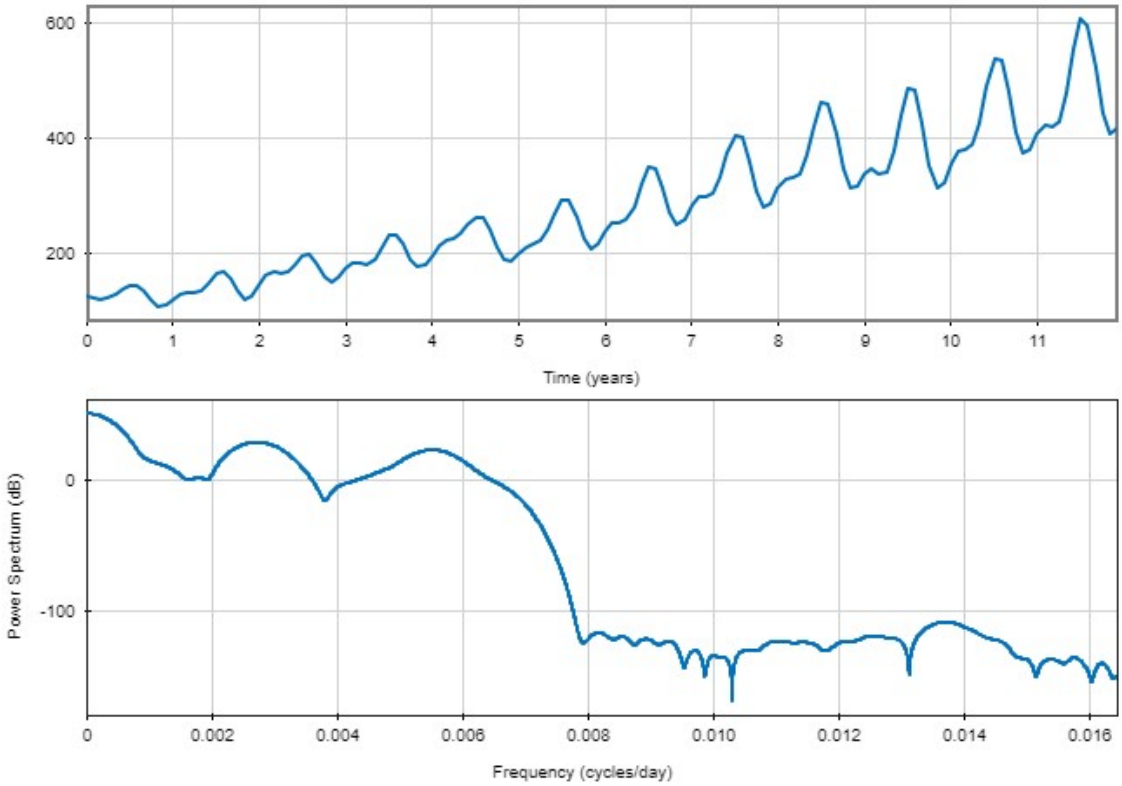

Figura 12. Representación en la parte superior de la serie temporal Airpass y en la inferior su espectro de potencia tras un filtro paso bajo a 0.007 ciclos/día.

Y en la Figura 13 el resultado de aplicar a la serie temporal de origen un filtro paso bajo con frecuencia de corte 0,005 ciclos/día.

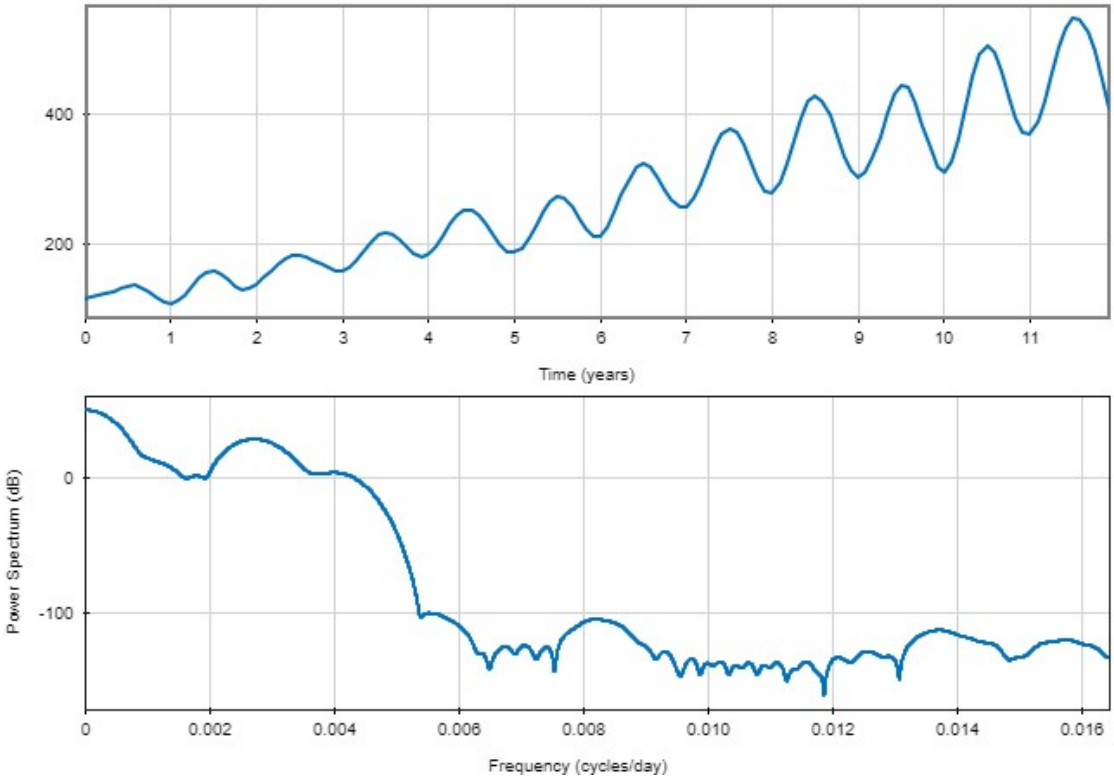

Figura 13. Representación en la parte superior de la serie temporal Airpass y en la inferior su espectro de potencia tras un filtro paso bajo a 0.005 ciclos/día.

El otro paso muy importante de este estudio es comprobar que las observaciones resultantes del filtrado no tienen grandes diferencias con la serie temporal de origen, puesto que se busca que se asemejen lo máximo posible. Si se comparan las gráficas superiores de las Figuras 11, 12 y 13, los resultados son muy similares, pero se debe cuantificar tanto el ajuste que se pierde en este filtrado y el error que se comete. Para identificar estos valores, se utiliza el error cuadrático medio (MSE) y el ajuste porcentual (Fit percent), cuyos cálculos se definen posteriormente en el apartado de Modelado paramétrico de series temporales.

En la Figura 14 se realiza la comparación entre la serie temporal de origen y los distintos productos de la aplicación de filtros. Los valores obtenidos son de 89,71% de ajuste y un error MSE de 151,46 con el filtro de 0.007 ciclos/día (filtro 1), y 80,71% y 562,51 referido al segundo filtrado (0.005 ciclos/día).

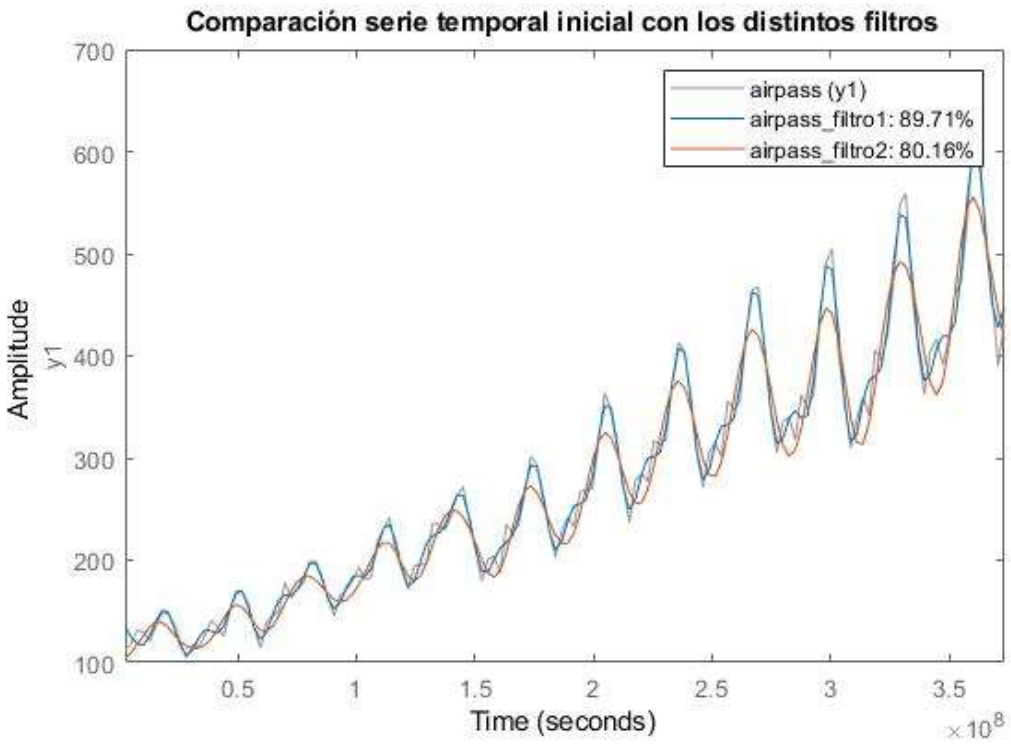

Figura 14. Representación de la comparación de los distintos resultados de aplicar filtros respecto la de origen.

Analizando estos resultados se aprecia que no hay grandes diferencias entre ellas, por lo que el resultado del filtrado es satisfactorio. En caso de que el efecto del filtro difiera mucho de los valores iniciales, es porque se ha filtrado demasiada señal, y han desaparecido valores significativos. Por lo que será necesario realizar otro filtrado a una frecuencia más alta.

- ## Ejemplo de aplicación: serie temporal de temperatura

En la Figura 15 superior se representa la serie temporal de la temperatura en Madrid en diciembre de 2019, y en la parte inferior el espectro de potencia que le corresponde.

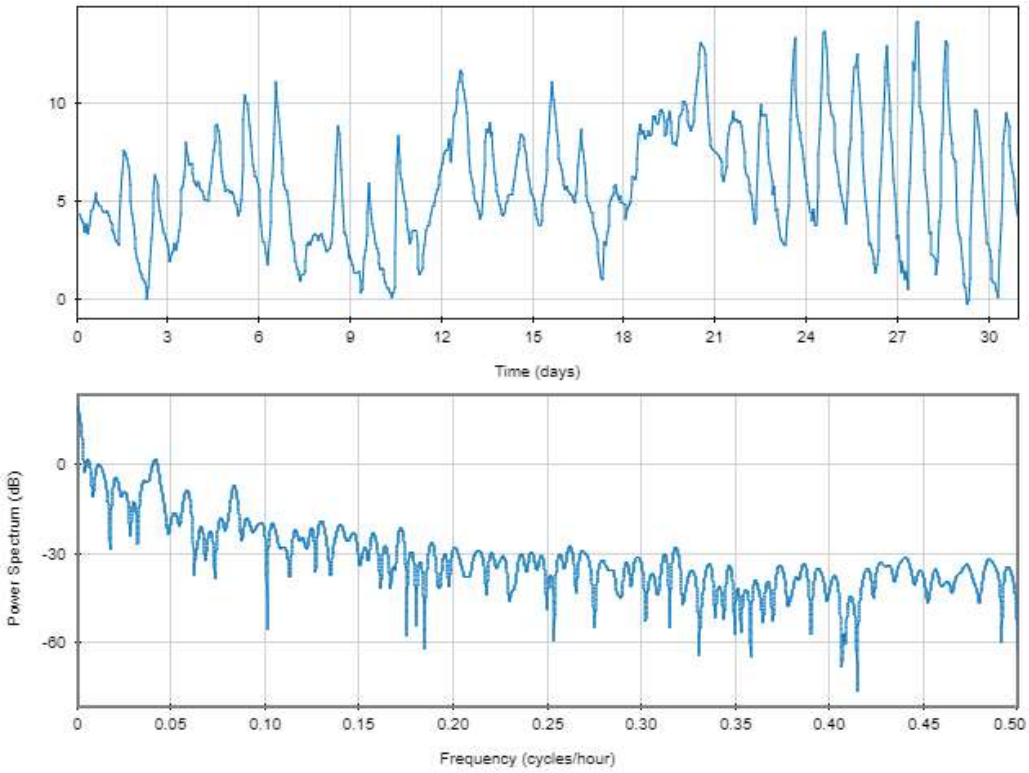

Figura 15. Representación en la parte superior de la serie temporal de la temperatura y en la inferior su espectro de potencia.

Se puede ver que los valores del espectro van disminuyendo cuando la frecuencia aumenta, estando los valores relevantes cercanos a la frecuencia 0. Se propone filtrar esta serie con un filtro paso bajo de frecuencia de corte 0,09 ciclos/hora, equivalente a -20dB.

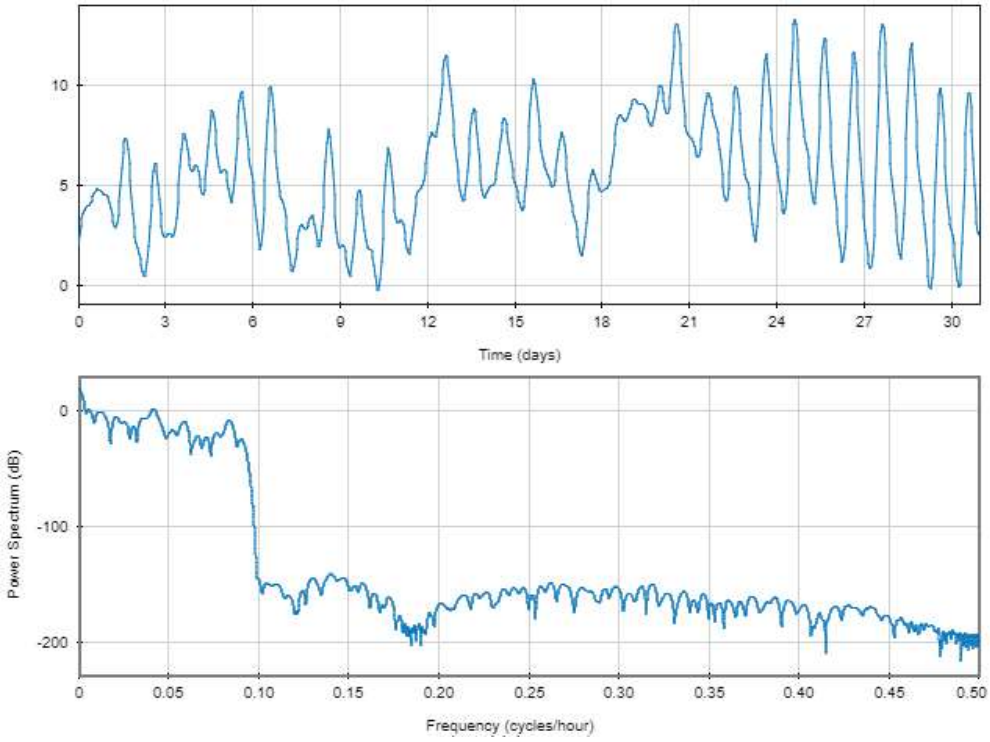

Figura 16. Representación en la parte superior de la serie temporal de la temperatura y en la inferior su espectro de potencia tras aplicar un filtro paso bajo en 0,09 ciclos/hora.

A continuación, se vuelve a aplicar otro filtro aún más restrictivo, con una frecuencia de corte de 0,05 ciclos/hora, que es equivalente a -10dB.

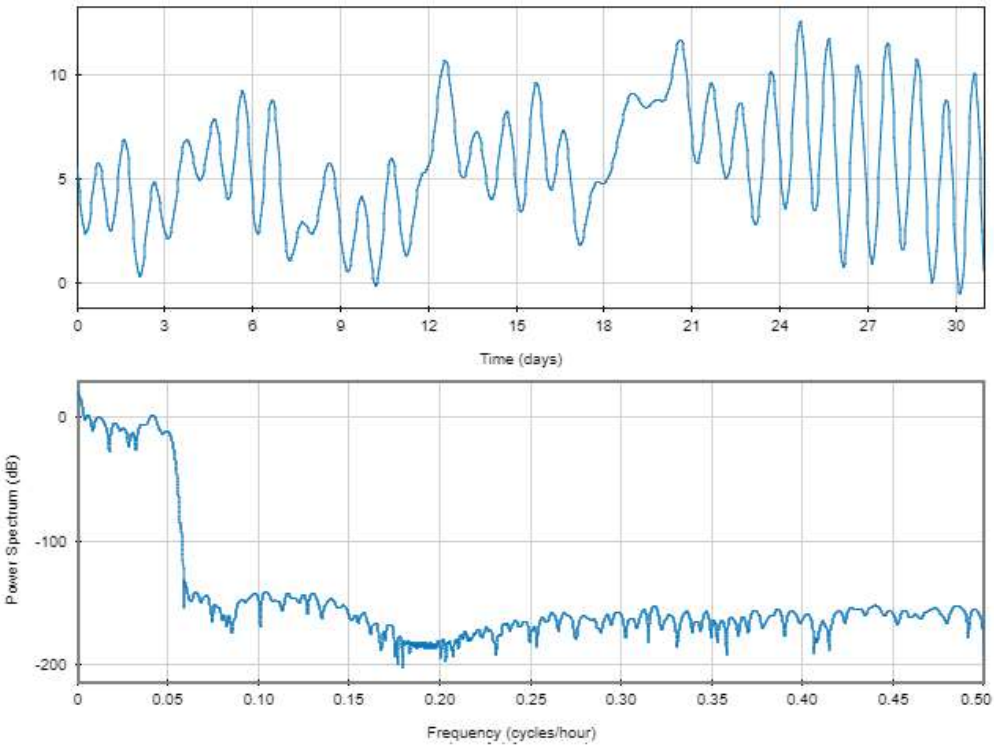

Figura 17. Representación en la parte superior de la serie temporal de la temperatura y en la inferior su espectro de potencia tras aplicar un filtro paso bajo en 0,05 ciclos/hora.

Una vez que se ha calculado las distintas series temporales obtenidas mediante el filtrado de señal, es necesario cuantificar la semejanza entre los datos originales y los procesados. Con el primer filtro, se obtienen un ajuste del 82,66% y un error cuadrático medio de 0,2672; en cuanto al segundo filtro, que es a una frecuencia menor, el ajuste es de 66,96% y un MSE de 0,9698.

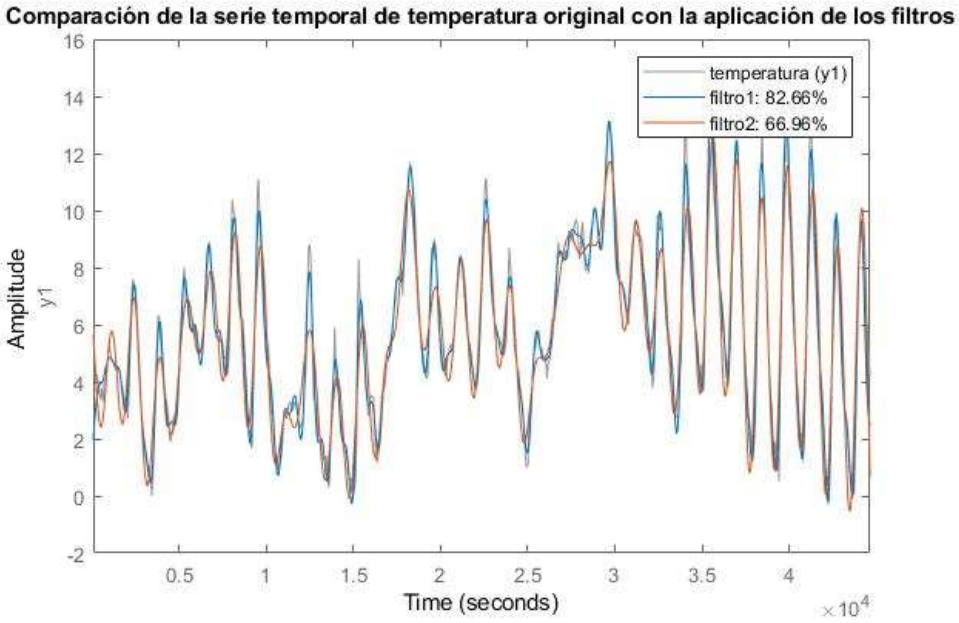

Figura 18. Comparación de la serie temporal de la temperatura original, con los resultados de aplicar distintos filtrados.

- Ejemplo de aplicación: serie temporal de ozono

En la Figura 19 superior se representa la serie temporal del ozono y en la inferior su espectro en potencia, donde el eje X muestra la frecuencia en ciclos/minuto.

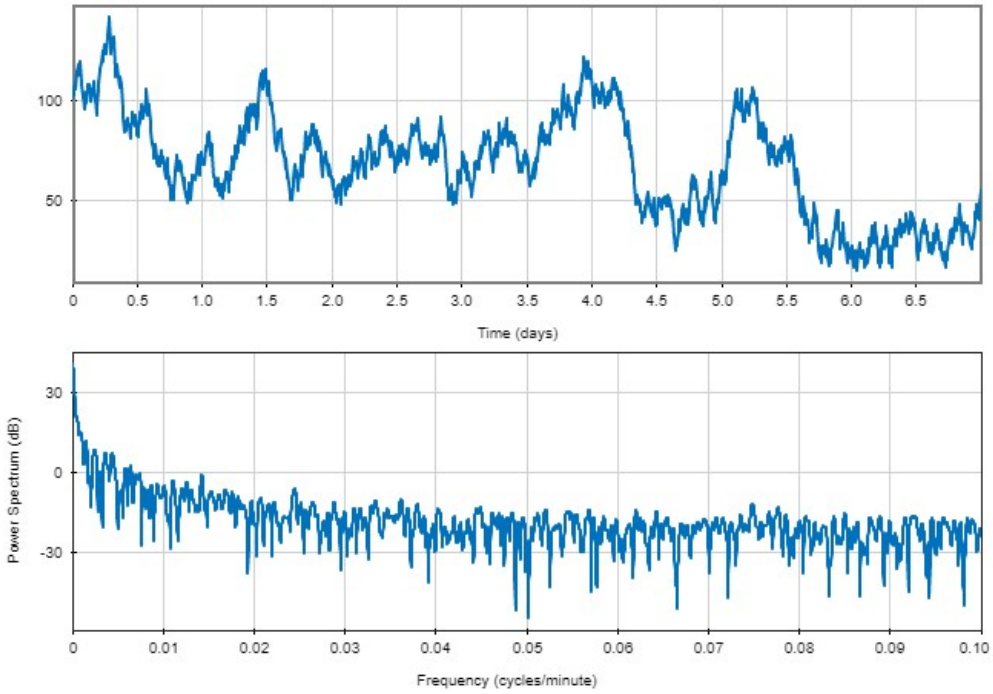

Figura 19. Representación en la parte superior de la serie temporal del ozono y en la inferior su espectro de potencia.

Se aprecia que la potencia de la señal disminuye hasta alcanzar un nivel prácticamente constante a partir de 0.05 ciclos/minuto. Por lo que para filtrar la serie temporal mediante la aplicación de un filtro paso bajo, se propone una frecuencia de corte en la que la potencia de la señal es inferior a -5dB, es decir 0.005 ciclos/minuto. Obteniéndose el siguiente resultado:

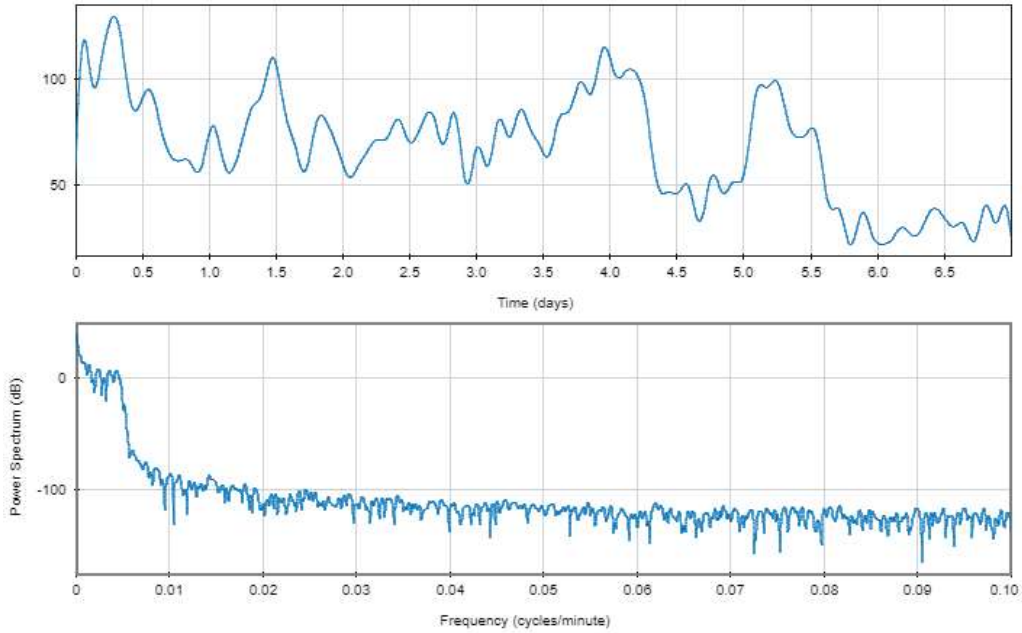

Figura 20. Representación en la parte superior de la serie temporal del ozono y en la inferior su espectro de potencia tras un filtro paso bajo en 0.005 ciclos/minuto.

Y otro filtro a una frecuencia aún menor de 0,003 ciclos/minuto, que corresponde a una potencia de 0dB.

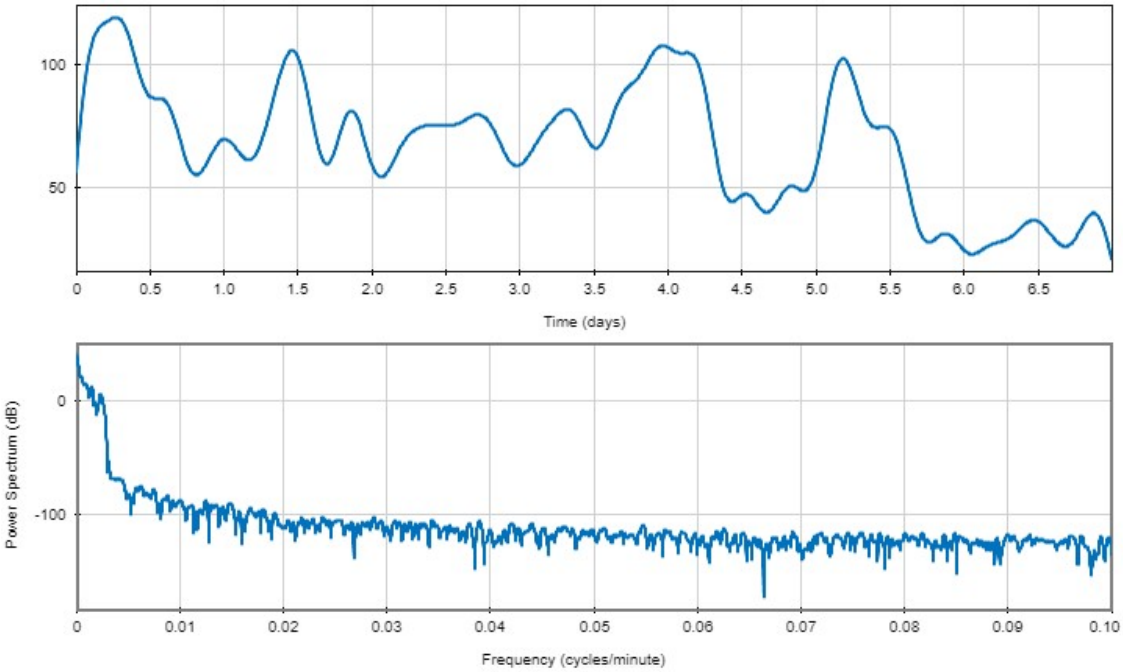

Figura 21. Representación en la parte superior de la serie temporal del ozono y en la inferior su espectro de potencia tras un filtro paso bajo en 0.003 ciclos/minuto.

Comparando las series temporales resultantes, obtenidas en la aplicación de los distintos filtros, se pretende analizar la degradación respecto a la señal original. Con el primer filtro, se obtiene un resultado de 80,46% en ajuste, y 25,6661 de error cuadrático medio. Y con el segundo filtro, los datos de interés son de 71,98% de ajuste, y un MSE de 52,7671, respecto las muestras de datos iniciales del ozono.

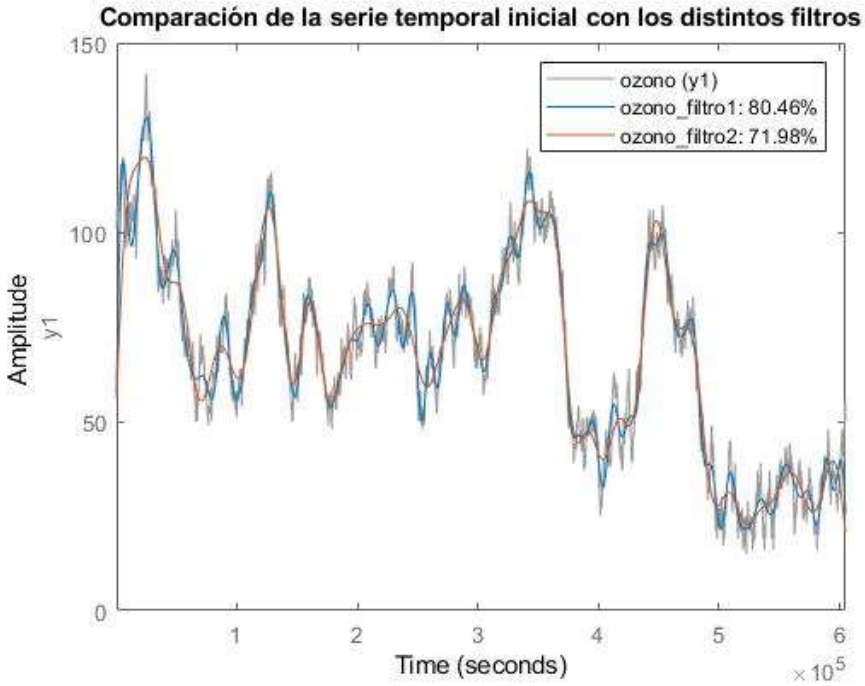

Figura 22. Representación de la comparación de los distintos resultados de aplicar filtros respecto la de origen.

Transformación de datos

En búsqueda del modelo que mejor se adapte a las componentes dominantes de la serie temporal, se deben analizar los datos originales y, además de eliminar ruido y estudiar la existencia de discontinuidades aparentes o cambios repentinos, realizar transformaciones que faciliten el modelado de la serie [Brockwell, 2016].

En el ejemplo ya comentado de la temperatura de Madrid, se propone realizar una transformación en la forma de analizar los datos de la serie temporal. La propuesta consiste en agrupar los datos por horas del día, en lugar de seguir el criterio de secuencia temporal. Es decir, los primeros 31 datos corresponden a la temperatura de las 00:00 obtenida del día 1 hasta el 31, los segundos 31 datos a la temperatura registrada a la 01:00 de los mismos días, y así consecutivamente hasta completar la totalidad de las 24 horas. Así lo que se consigue es crear una tendencia mucho más clara, ya que los resultados de la temperatura siempre son máximos al mediodía y mínimos por la noche, y seguirá la misma tendencia ya que en los días calurosos no crearán un distinto comportamiento, sino que será parte de la serie temporal. Obteniéndose como resultado de la serie temporal la siguiente Figura.

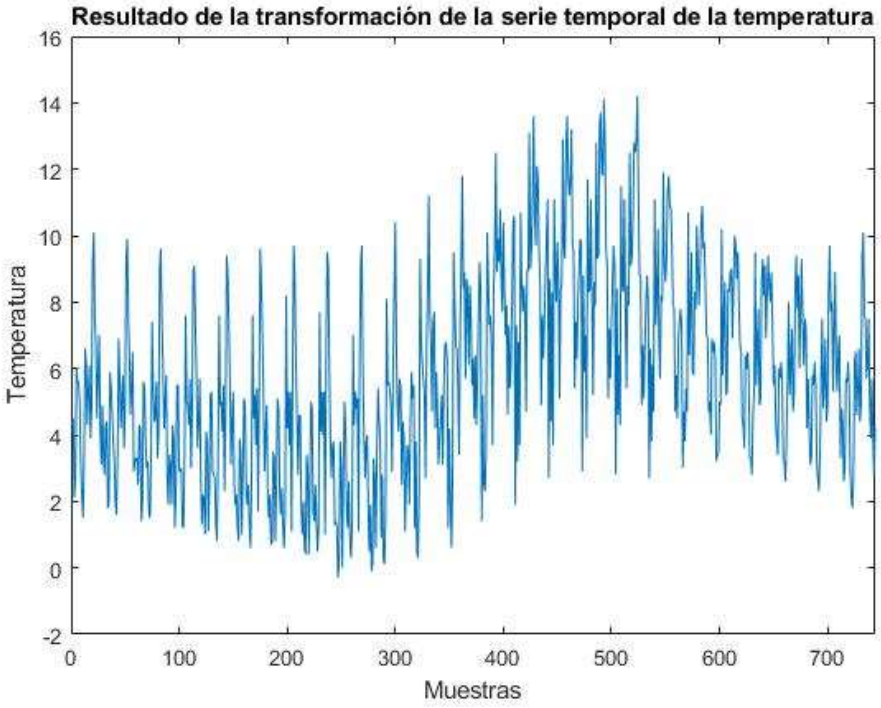

Figura 23. Representación de la transformada de la serie temporal de la temperatura en Madrid durante el mes de diciembre de 2019.

En la Figura 24, se representa el resultado de la función de autocorrelación de la transformada de la serie temporal de la temperatura, con un total de 300 retardos, es decir, 12,5 días. Se observa una clara correlación entre muestras retardadas un valor de 31 y sus múltiplos, esto se debe a que la periodicidad es de 31 muestras, ya que es la totalidad de días. La gráfica cruza claramente el umbral de 95% de confianza para un valor de 138; entonces, será éste el valor escogido para establecer el número de regresores idóneo a proponer en el modelo paramétrico de la serie.

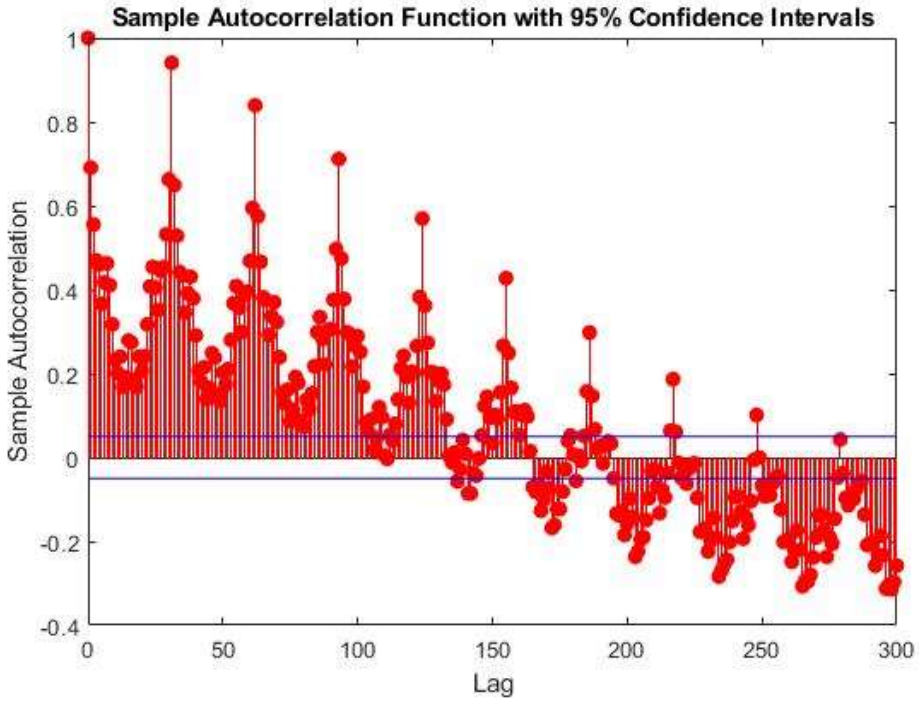

Figura 24. Representación de la función de autocorrelación de los datos de la Figura 23.

En cuanto a la transformación planteada para la serie temporal de la concentración de ozono; dado que cuanto mayor sea la componente de ruido de los datos registrados más difícil es su modelado, se estudia el efecto del submuestreo (reducción de la frecuencia o ampliación del periodo de muestreo) con el fin de que sea más eficiente la creación de un modelo. Al tratarse de un conjunto de datos que las muestran están poco distanciadas en el tiempo (5 minutos), se propone transformar la serie temporal aumentando el periodo de muestreo, trabajando con un conjunto de datos muestreados a 15 y a 60 minutos. Obteniéndose los siguientes resultados:

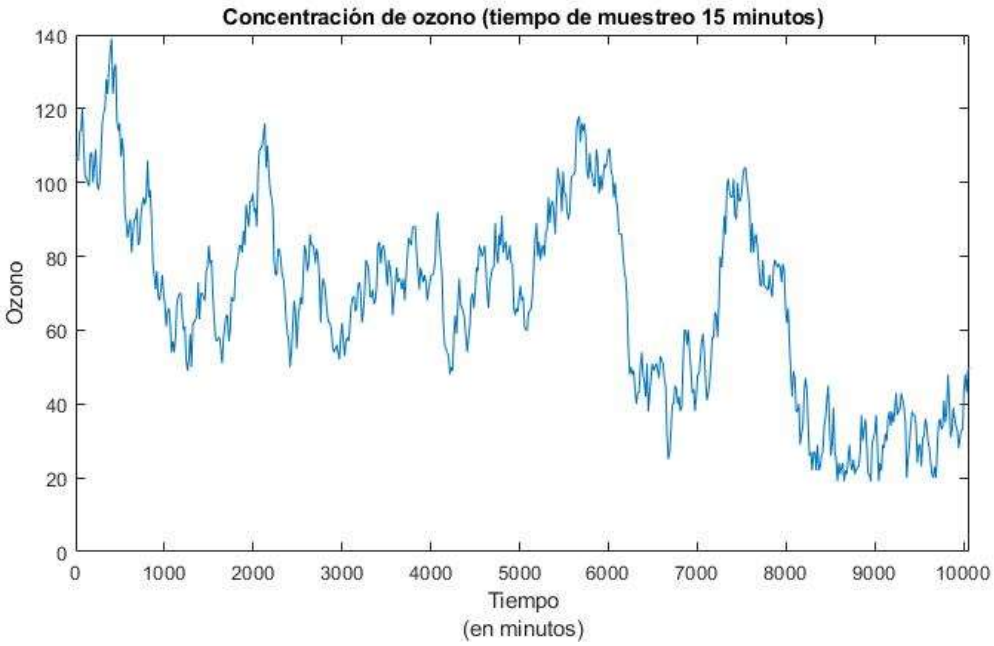

Figura 25. Representación de la concentración de ozono con un tiempo de muestreo de 15 minutos [Ghoneim, 2017].

En la Figura 26, que se muestra la autocorrelación de la serie temporal del ozono con un tiempo de muestreo de 15 minutos, hasta el retraso número 96, correspondiente a un día completo. Se puede demostrar, que la banda de confianza del 95% cruza en un valor de 55. Comparando este resultado con el anterior, de la Figura 9, donde el resultado fue de 167 muestras, se puede corroborar que mediante este filtrado se ha reducido considerablemente el número de regresores necesarios.

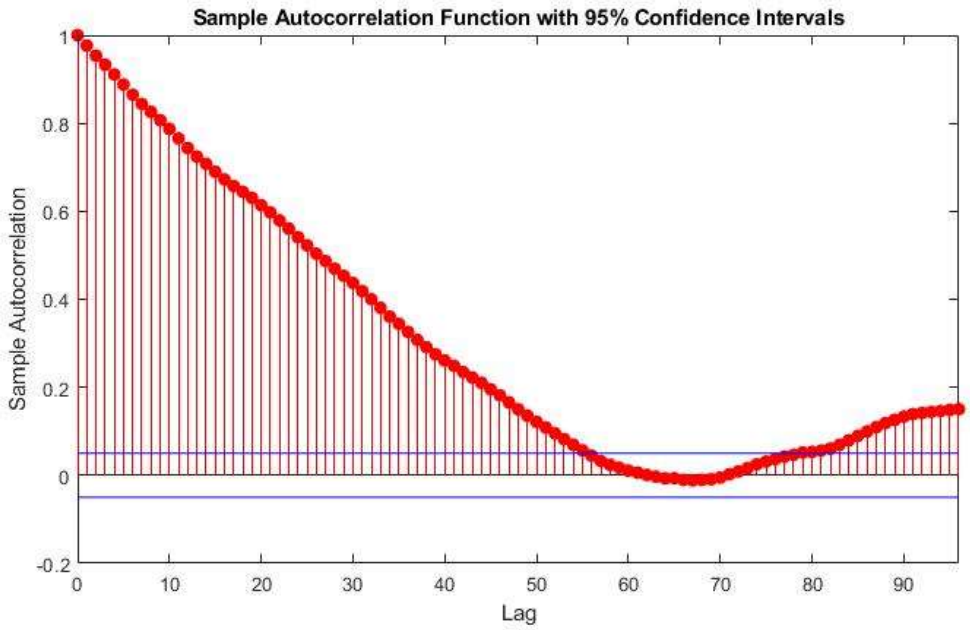

Figura 26. Resultado de la autocorrelación de la Figura 25.

Finalmente, se continua este estudio ampliando el tiempo de muestreo a 60 minutos.

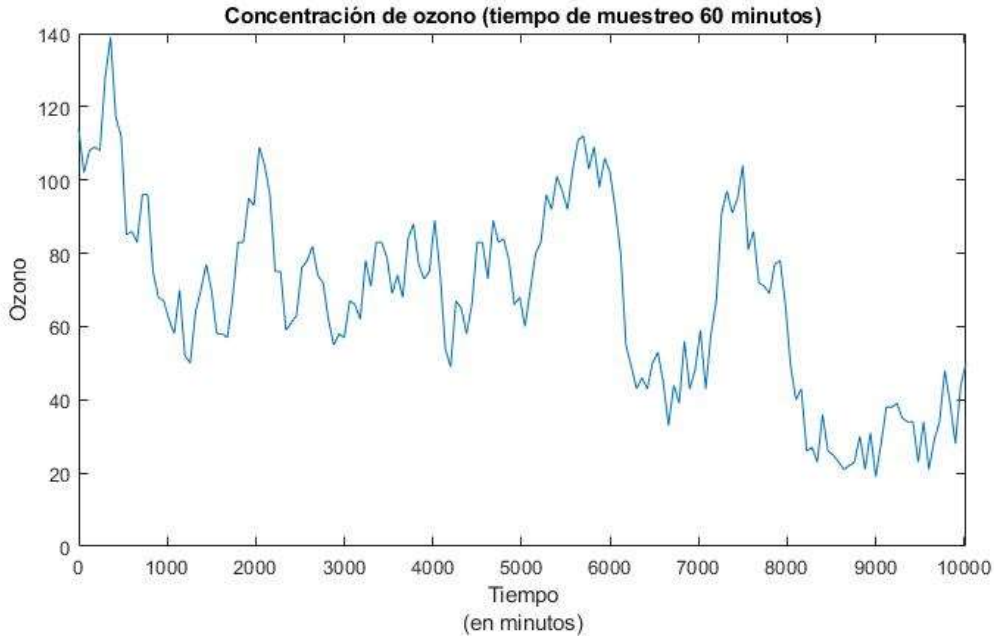

Figura 27. Representación de la concentración de ozono con un tiempo de muestreo de 60 minutos [Ghoneim, 2017].

En la Figura 28, resultante de la autocorrelación de la serie de observaciones del ozono con un tiempo de muestreo de 60 minutos, se representan hasta un valor de retardo 24, es decir, hasta

el tiempo de un día anterior. Cruzando la gráfica con la banda del 95% de confianza en el retardo 13.

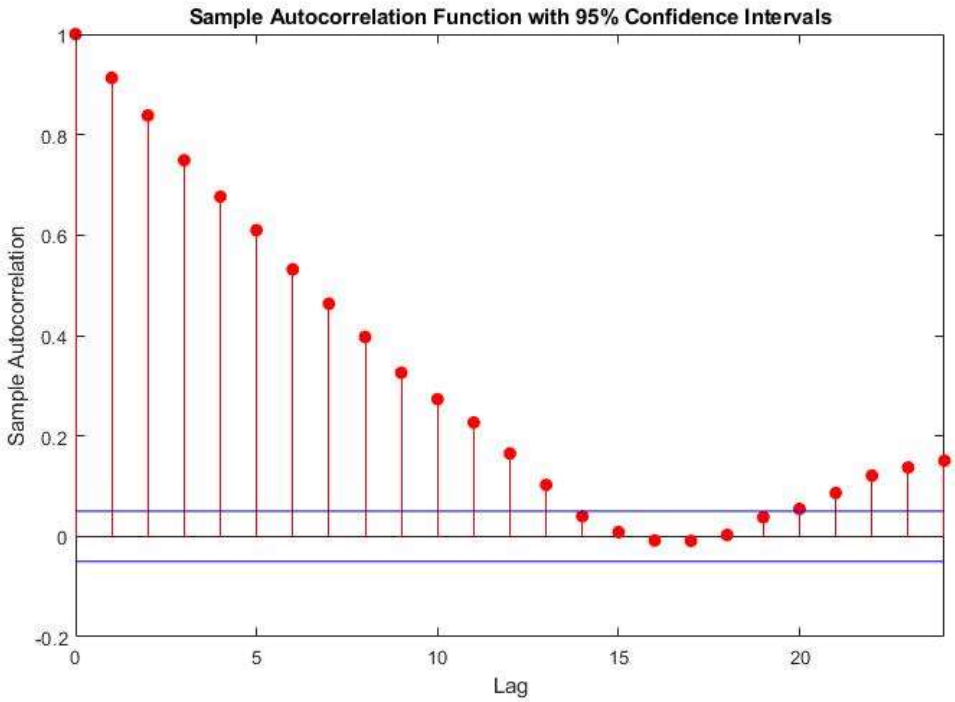

Figura 28. Resultado de la autocorrelación de la Figura 27.

Modelado paramétrico de series temporales

El objetivo del modelado es explicar el valor que toma en el momento t una variable que presenta dependencia temporal, para ello se recoge información sobre el pasado de la variable, se observa su evolución en el tiempo y se explota el patrón de regularidad que muestran los datos.

Los modelos constan de una parte sistemática que sigue cierta regularidad, y otra aleatoria.

Los modelos paramétricos tratan de obtener la representación de la serie en términos de la interrelación temporal de sus elementos. Este tipo de modelos se caracterizan por representar la serie como combinación lineal (sumas o diferencias ponderadas) de la variable retardada y de una variable aleatoria, en general ruido blanco y también con posible retardo.

Los modelos lineales más utilizados son: autorregresivo (AR), autorregresivo de media móvil (ARMA), autorregresivo integrado (ARI) y autorregresivo integrado de media móvil (ARIMA) [Shumway, 2011].

- Modelo AR: el modelo autorregresivo (AutoRegresive) es una representación de un proceso aleatorio, en el que la serie de estudio depende de sus observaciones pasadas. Concretamente, la salida estimada y_k , y(t) en la Figura 29, depende de manera lineal de sus valores anteriores, considerando como única entrada un ruido blanco e(t).

$$\mathrm{A(z)*Y(z) = E(z)}$$

Ecuación 2.

$$\mathrm{A(z)= 1 - a_1\, z^{-1} - \cdots - a_N\, z^{-N}}$$

$$y_k = \sum_{i=1}^{N} a_i\, y_{k-i} + e_k$$

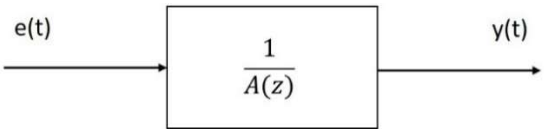

Figura 29. Esquema modelo AR.

- Modelos ARI: el modelo autorregresivo integrado es el resultado de añadir un integrador al modelo AR.

$$A(z) * Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} * E(z)$$

Ecuación 3.

$$y_k = y_{k-1} + \sum_{i=1}^{N} a_i\, \Delta y_{k-i} + e_k$$

siendo,

$$\Delta y_{k\text{-}i} = y_{k\text{-}i} - y_{k\text{-}i\text{-}1}$$

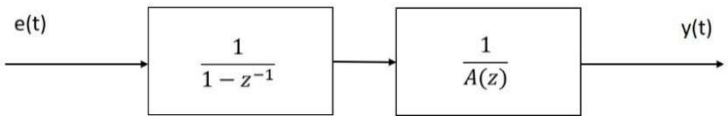

Figura 30. Esquema modelo ARI.

- Modelo ARMA: el modelo de promedio móvil autorregresivo (AutoRegresive Moving Average) combina tanto la propiedad de procesos MA, donde se refiere a un modelo de media móvil, como la propiedad de procesos AR, que es la parte autorregresiva.

$$\mathrm{A(z)*Y(z) = C(z)*E(z)}$$

Ecuación 4.

$$\mathrm{C(z)} = \mathrm{c_0} + \mathrm{c_1}\, z^{-1} + \cdots + \mathrm{c_M}\, z^{-\mathrm{M}}$$

$$y_k = \sum_{i=1}^{N} a_i\, y_{k-i} + \sum_{i=0}^{M} c_i\ e_{k-i}$$

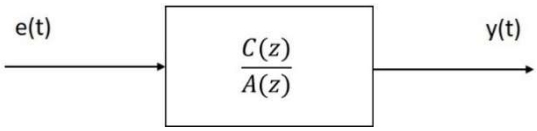

Figura 31. Esquema modelo ARMA.

- Modelos ARIMA: el modelo de promedio móvil integrado autorregresivo es el resultado de añadir un integrador al modelo ARMA.

$$A(z) * Y(z) = \frac{C(z)}{1 - z^{-1}} * E(z)$$

Ecuación 5.

$$y_k = y_{k-1} + \sum_{i=1}^{N} a_i\, \Delta y_{k-i} + \sum_{i=0}^{M} c_i\ e_{k-i}$$

siendo,

$$\Delta y_{k-i} = y_{k-i} - y_{k-i-1}$$

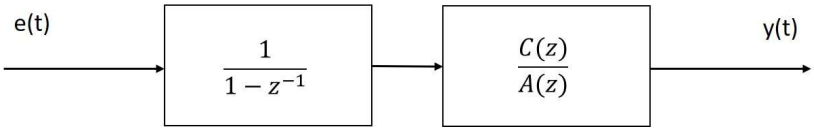

Figura 32. Esquema modelo ARIMA.

Para cuantificar la semejanza de los modelos con la serie temporal de procedencia, se utiliza el porcentaje de ajuste y el error cuadrático medio (MSE), que se obtienen de la siguiente manera:

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(\hat{y}_{t-}y_t)^2$$

Ecuación 5.

Donde:

N = número de observaciones en la serie temporal.

y_t= *valores originales de la serie temporal, registrados con periodo T.*

$\hat{y}_t$= *estimación de la variable en el instante t (t=k·T) según el modelo.*

$$FitPercent = 100 * (1 - \frac{||y_t - \hat{y}_t||}{||y_t - \overline{y_t}||})$$

Ecuación 6.

Donde:

$\overline{y}$ = valor medio del conjunto de observaciones.

$\hat{y}_t$= *estimación de los valores del modelo.*

y_t= *valores originales de la serie temporal.*

||= norma 2 de un vector.

Este valor de ajuste varía entre –Inf y 100. El valor 0% representa que el modelo tiene el mismo ajuste que una línea recta igual a la media de las observaciones, y un valor del 100% el ajuste perfecto.

Modelos lineales no recursivos (off-line)

- Ejemplo de aplicación: serie temporal de temperatura

Tras haber hecho el tratamiento de datos conveniente sobre esta serie temporal, comentado anteriormente, y representado en la Figura 7, donde la función de autocorrelación indica que se deben tomar un número de regresores igual a 174 para crear un modelo, ahora es el momento de trabajar en su modelado.

En este punto, se dispone a dividir los datos en la primera y segunda quincena del mes. La primera de ellas se utilizará para identificación y la segunda de ellas como validación para corroborar las conclusiones obtenidas.

Para el análisis de los datos de identificación se procede a la realización de tres modelos distintos AR, ARI y ARIMA.

Se plantea en primer lugar un modelo con una estructura AR (Ecuación 1), con un total de coeficientes de 174, y se obtienen los resultados de la Figura 33.

El modelo completo calculado, con los 174 coeficientes, se adjunta en el ANEXO I. En cuanto a este modelo cabe destacar un ajuste del 69,51%, con un error cuadrático medio de 0,5731 y un tiempo de cómputo de 1,3729 segundos (Matlab 2018a corriendo en un PC ASUS X541UV).

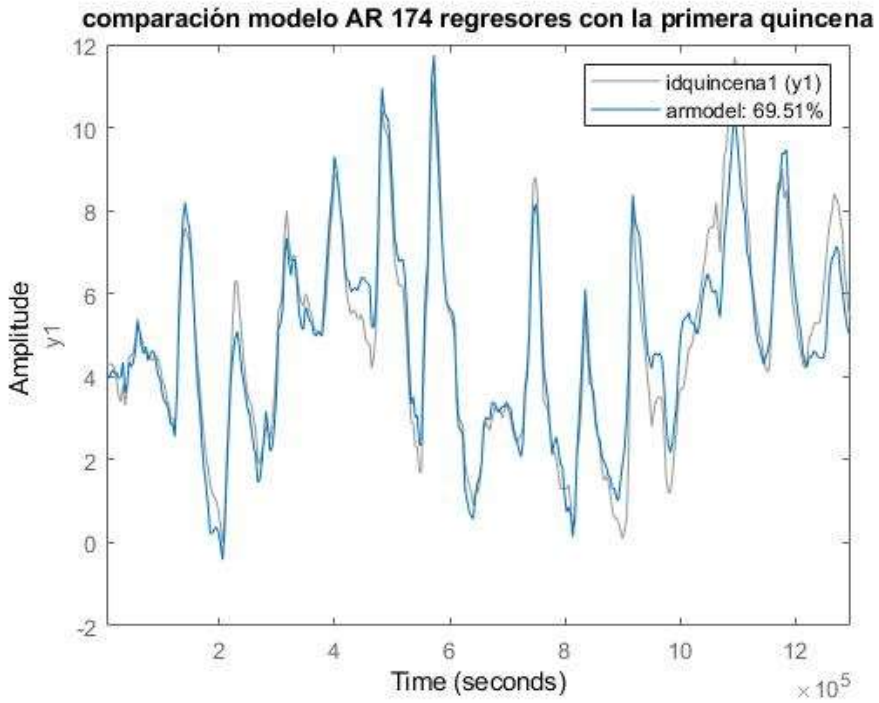

Figura 33. Comparación del modelo AR de 174 regresores calculado respecto la primera quincena de datos de la temperatura de Madrid.

Se continúa con el modelo ARI (Ecuación 2), en este caso no es posible el cálculo de los 174 regresores, dado que la herramienta de Matlab no permite tantos en esta estructura de modelo. Entonces se modela con 119 regresores que es el mayor permitido en este punto. Obteniendo los resultados de la Figura 34.

El modelo calculado se encuentra en el ANEXO II. El rendimiento obtenido es de 46,7% de ajuste, 1,7514 de MSE y un tiempo necesario de cálculo de 2,6243 segundos.

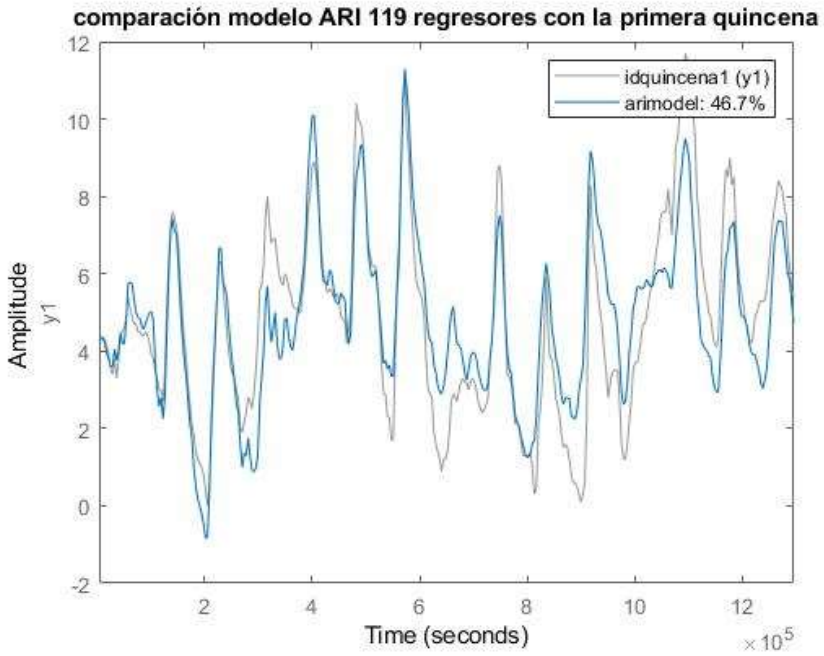

Figura 34. Comparación del modelo ARI de 119 regresores calculado respecto la primera quincena de datos de la temperatura de Madrid.

Se finaliza este proceso de identificación con un modelo ARIMA. Para este modelo la restricción de la cantidad de regresores a utilizar es aún mayor, y el valor que más se aproxima al necesitado es de 89. Se obtienen los resultados de la Figura 35. El modelo ARIMA se encuentra en el ANEXO III. En cuanto a este modelo los resultados de interés son de 36,84 % de ajuste, un error MSE de 2,4593 y un tiempo de cómputo de 3,2288 segundos.

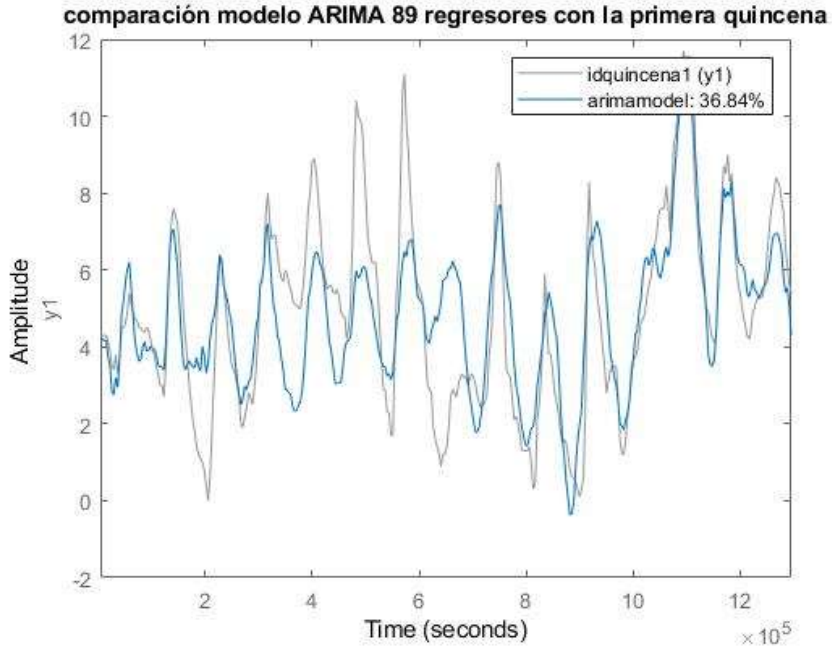

Figura 35. Comparación del modelo ARIMA de 89 regresores calculado respecto la primera de datos quincena de la temperatura de Madrid.

Una vez realizado este proceso y habiendo calculado los distintos modelos que se pueden ajustar a la serie temporal de estudio, se procede a la etapa de validación. En la cual, se comprueba el resultado de comparar los modelos resultantes que se calculan respecto la primera quincena del mes de diciembre, con los datos de la segunda quincena. De esta manera se puede ver si la totalidad de la serie temporal tiene un mismo comportamiento, o es cambiante; así como, el error que se ejerce al extrapolar el modelo a otro espacio de tiempo.

Se comienza por el modelo AR y obteniéndose los resultados de la Figura 36, con un 41,45 % de ajuste y un MSE 3,221.

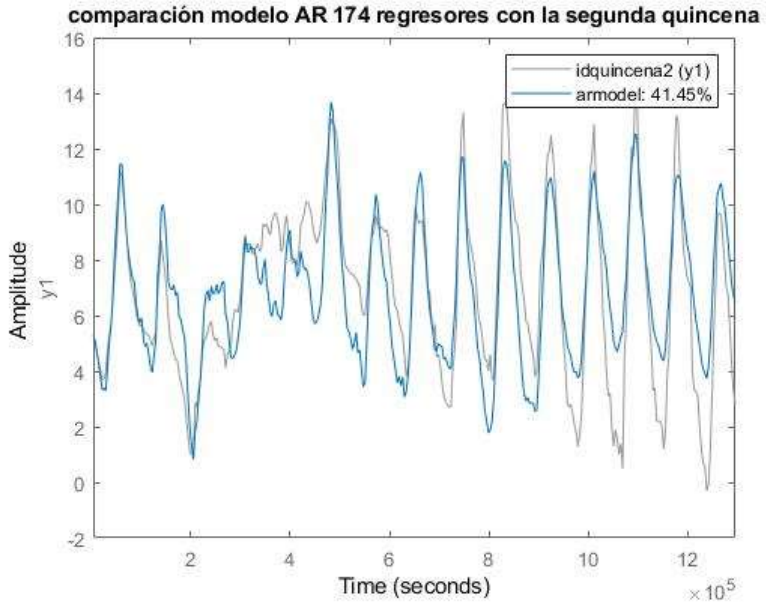

Figura 36. Comparación del modelo AR de 174 regresores calculado respecto la segunda quincena de datos de la temperatura de Madrid.

Se continua por el modelo ARI, ver Figura 37. Con un ajuste del 37,7% y un error MSE de 3,6479.

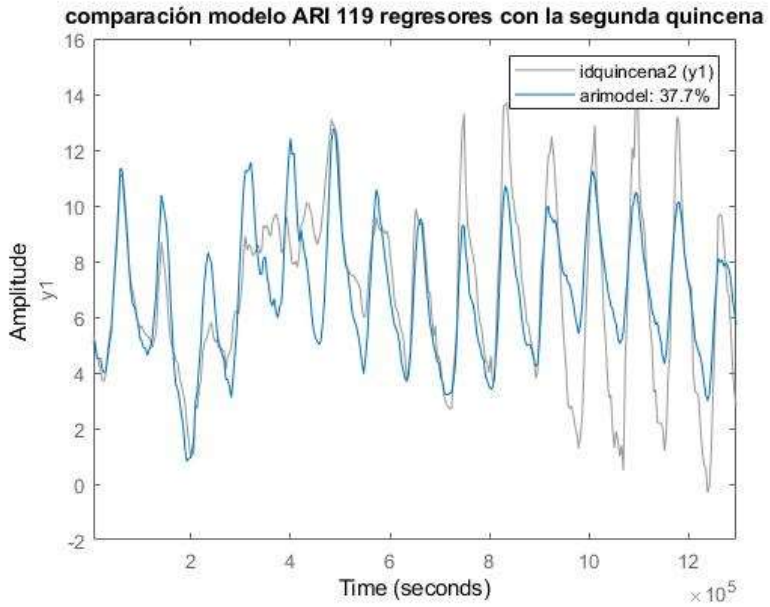

Figura 37. Comparación del modelo ARI de 119 regresores calculado respecto la segunda quincena de datos de la temperatura de Madrid.

Por último, la Figura 38 muestra el resultado de estimación con el modelo ARIMA, con un ajuste de 36,36% y un error MSE de 3,8057.

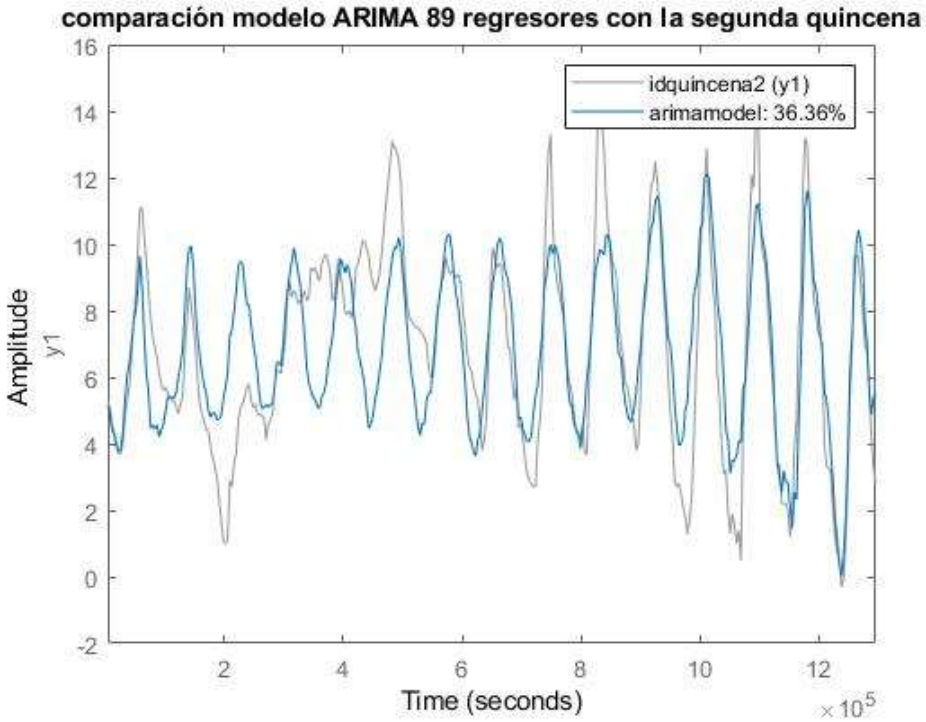

Figura 38. Comparación del modelo ARIMA de 89 regresores calculado respecto la segunda quincena de datos de la temperatura.

En la siguiente tabla se resumen los resultados de modelado de la serie temporal de temperaturas de Madrid durante el mes de diciembre de 2019.

Modelo	Número de regresores	Tiempo de cómputo (segundos)	Identificación		Validación	
			Ajuste (%)	Error (MSE)	Ajuste (%)	Error (MSE)
AR	174	1,3729	69,51	0,5731	41,51	3,221
ARI	119	2,6243	46,7	1,7514	37,7	3,6479
ARIMA	89	3,2288	36,84	2,4593	36,36	3,8057

Tabla 1. Resultados del modelado de la serie temporal de la temperatura.

Del estudio realizado se concluye que el modelo AR presenta un mayor ajuste en la fase de identificación, fundamentalmente debido al notable incremento de regresores utilizados.

El modelo ARIMA con el 51% de regresores con respecto al modelo AR consigue un porcentaje de ajuste del 53% en identificación y del 87% en validación con respecto a los obtenidos con AR. De igual forma, el modelo ARIMA con el 75% de regresores con respecto al ARI consigue un porcentaje de ajuste del 79% en identificación y del 96% en validación con respecto a los obtenidos con ARI.

Hasta ahora se ha utilizado la función de autocorrelación de la señal original para estudiar el número de regresores a utilizar en el modelo, como primera aproximación al problema de modelado. Un análisis más exhaustivo lleva a evaluar el porcentaje de ajuste de la salida del modelo a la señal original en función del número de regresores. En la Figura 39 se puede ver cómo dicho ajuste va aumentando con el número de regresores. En el caso de estructura AR, el

porcentaje máximo se consigue para un total de coeficientes cercano a 174, próximo al obtenido con el estudio de autocorrelación.

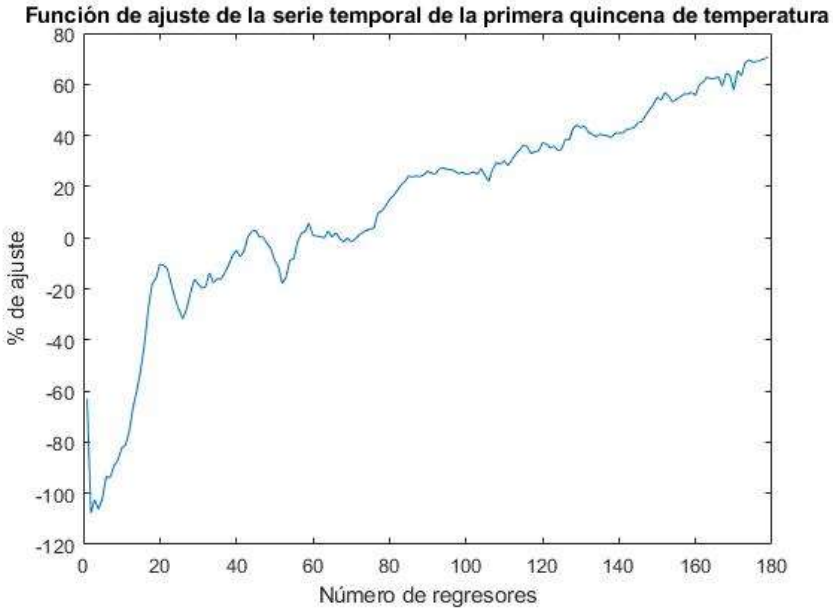

Figura 39. Función de ajuste para una estructura AR de la serie temporal de la primera quincena de datos la temperatura.

Comenzando por el modelo AR de 174 regresores (Figura 40), siguiendo por el ARI de 119 regresores (Figura 41), de los cuales se ha realizado una predicción de las siguientes 360 muestras, correspondientes a 1, 3 y 7 días de estudio, y el ARIMA con 89 regresores (Figura 42), del cual, la predicción se ha realizado de las futuras 72 muestras, que es igual a 3 días, ya que a partir de este periodo se producía un gran error de predicción. Los datos obtenidos se muestran cuantificados por periodos de tiempo de la Tabla 2.

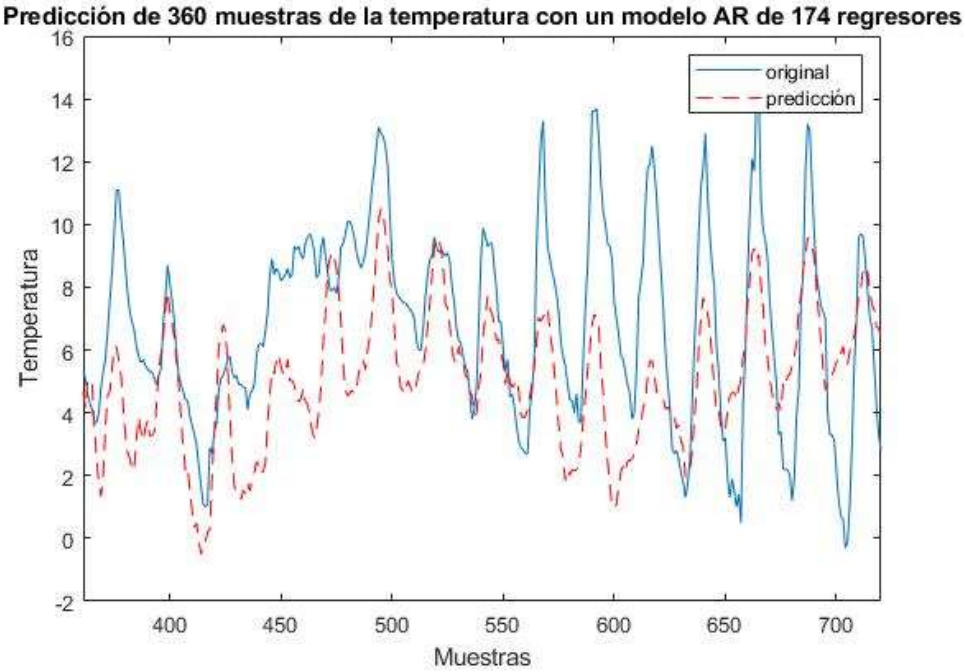

Figura 40. Representación de la predicción de las 360 muestras (dos semanas) posteriores a la primera quincena de la temperatura, con un modelo AR de 174 regresores, junto con los datos reales.

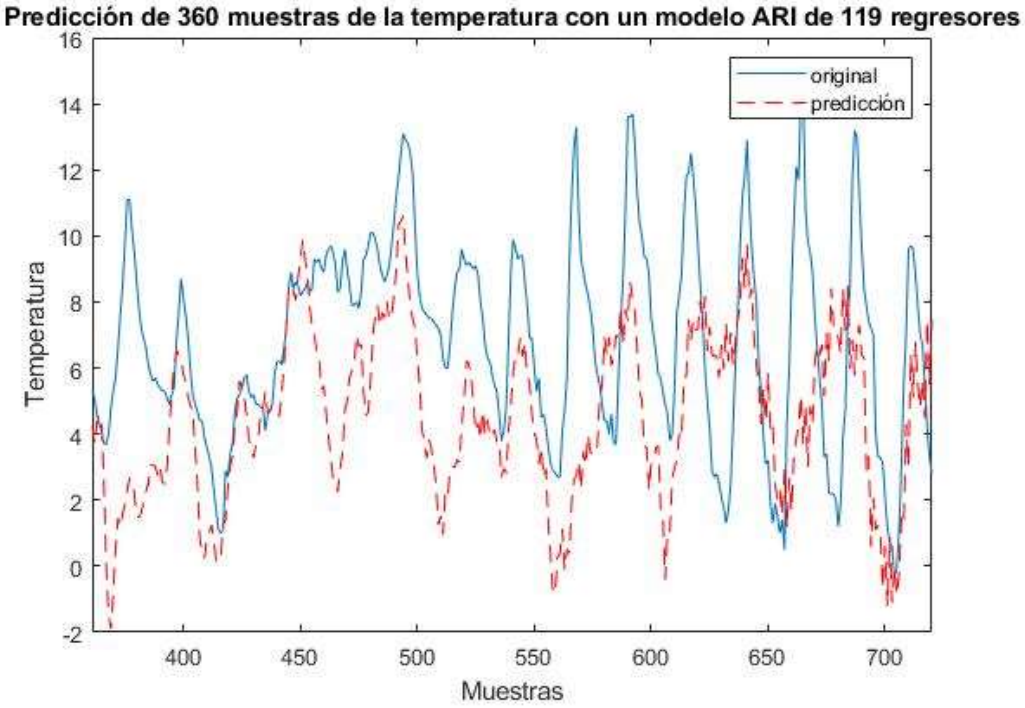

Figura 41. Representación de la predicción de las 360 muestras (dos semanas) posteriores a la primera quincena de la temperatura, con un modelo ARI de 119 regresores, junto con los datos reales.

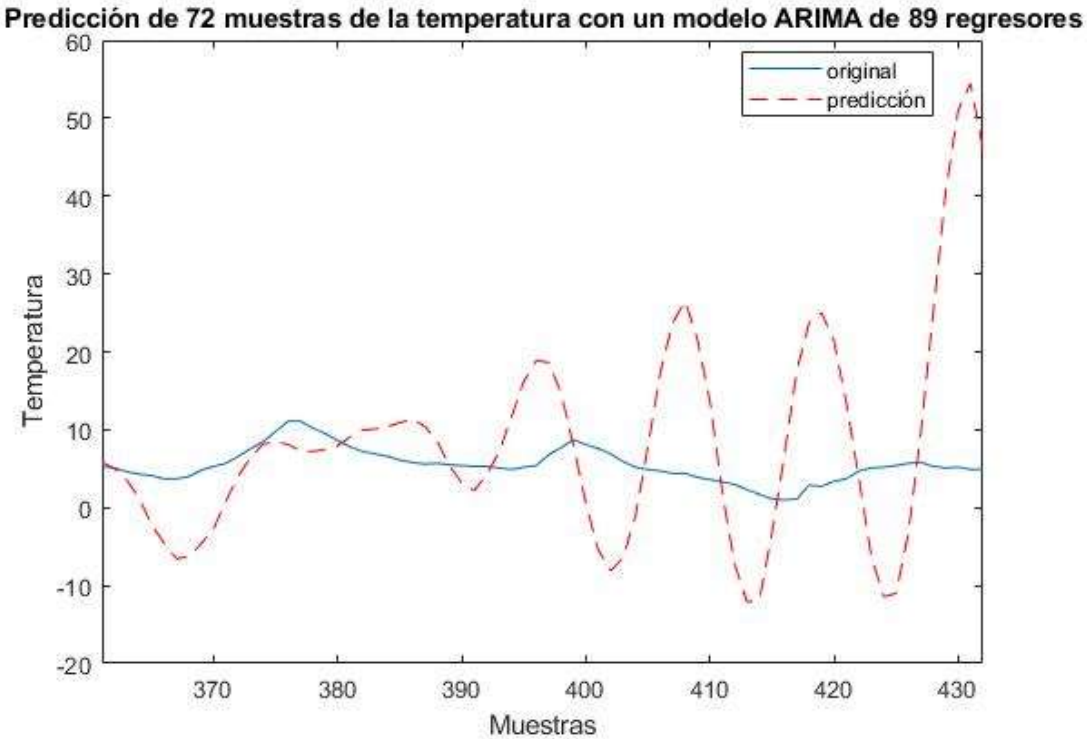

Figura 42. Representación de la predicción de las 72 muestras (tres días) posteriores a la primera quincena de la temperatura, con un modelo ARIMA de 89 regresores, junto con los datos reales.

Modelo	Número de regresores	Predicción de 24 muestras (1 día)		Predicción de 72 muestras (3 días)		Predicción de 180 muestras (1 semana)	
		Ajuste (%)	Error (MSE)	Ajuste (%)	Error (MSE)	Ajuste (%)	Error (MSE)
AR	174	-50,77	12,39	-20,41	6,6145	-19,18	8,4152
ARI	119	-141,2	31,70	-60,86	13,0094	-42,55	12,0384
ARIMA	89	-111,7	24,42	-556,1	196,417	-	-

Tabla 2. Resultados de la predicción de la serie temporal de la temperatura a partir de los modelos calculados.

Analizando los resultados mostrados en la Tabla 2 sobre la predicción de los modelos para diferentes periodos de tiempo, se puede observar que con el modelo AR se obtienen los mejores valores de ajuste y error, mientras que con el ARIMA los peores, alcanzando resultados insignificantes a partir de un periodo de 72 muestras. Estos resultados son fundamentalmente originados por la cantidad de regresores existentes en los modelos; ya que en el modelo AR hay un número elevado de coeficientes, y en los otros dos modelos restantes los parámetros a cuantificar son peores a medida que el número de regresores disminuye.

- Ejemplo de aplicación: serie temporal de temperatura transformada

Tras haber realizado el tratamiento de datos de esta serie temporal resultante de la transformación de los datos de la temperatura de la ciudad de Madrid en diciembre de 2019, siendo la función de autocorrelación la correspondiente a la Figura 24, la cual indicaba como 138 el número de regresores idóneo a utilizar. Se procede de la misma manera que anteriormente, diferenciando la identificación de la validación y realizando los modelos AR, ARI y ARIMA.

Comenzando por el modelo AR, con 138 regresores, obteniéndose los resultados de la Figura 43, con un ajuste del 78,01% con un error cuadrático medio de 0,269 y un tiempo de cómputo de 1,2985 segundos. El eje X de dicha Figura denominado como “Tiempo transformado” representa con un periodo de muestreo de 60 minutos los valores ordenados por horas, es decir, la primera muestra corresponde a la hora 00:00 del día 1, la segunda a la hora 00:00 del día 2 y así consecutivamente.

El modelo completo calculado se adjunta en el ANEXO IV.

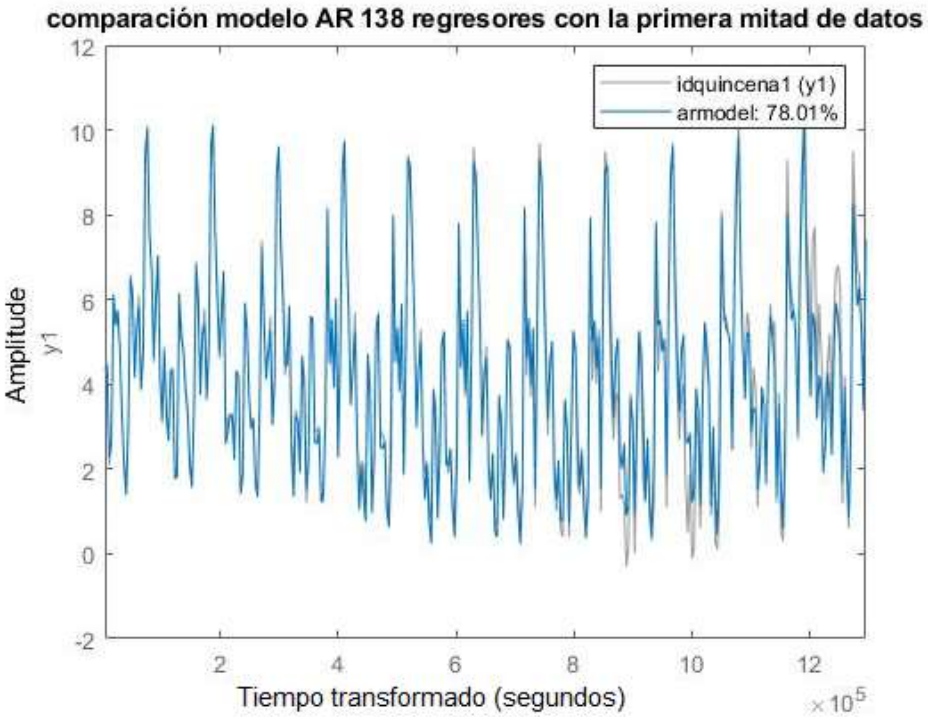

Figura 43. Comparación del modelo AR de 138 regresores calculado respecto la primera mitad de los datos transformados.

Se sigue con el modelo ARI, en cuyo caso no es posible el cálculo de tantos regresores, por lo que se realiza sobre 119 que es el máximo disponible en la herramienta Matlab. El resultado obtenido y mostrado en la Figura 44 proporciona un 76,61% de ajuste, 0,3044 de MSE y un tiempo necesario de cálculo de 2,8162 segundos. El modelo completo se adjunta en el ANEXO V.

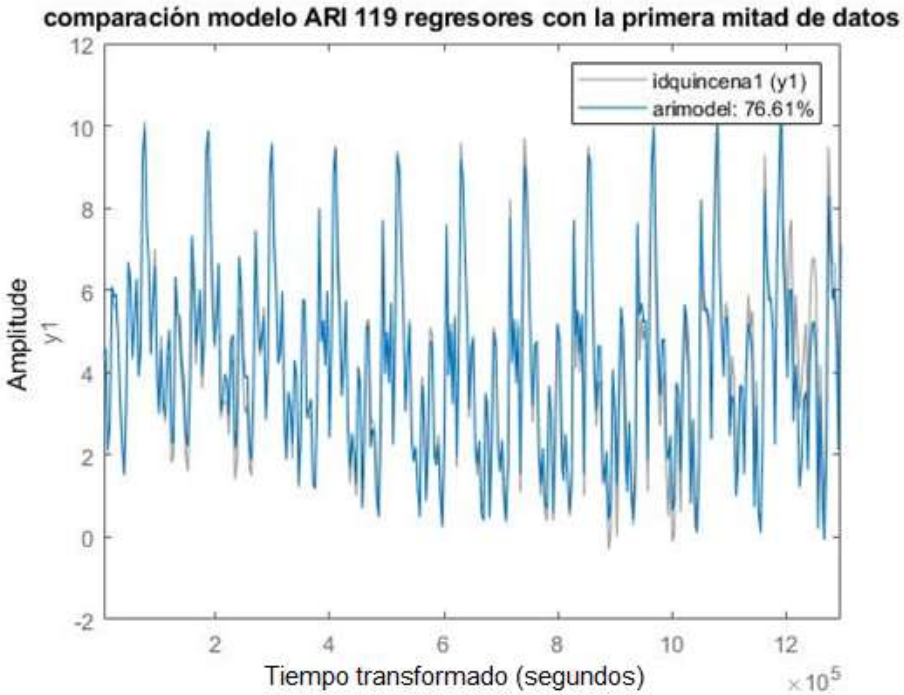

Figura 44. Comparación del modelo ARI de 119 regresores calculado respecto la primera mitad de los datos de la temperatura transformados.

El último paso del proceso de identificación es la creación del modelo ARIMA. En este caso, también existe restricción en cuanto al número de regresores a utilizar, por lo que se utiliza un modelo con 82 coeficientes. En la Figura 45 se indica el rendimiento correspondiente, con un 60,97% de ajuste, un error de 0,8476 y un tiempo de cómputo de 3,6998 segundos. El modelo resultante se muestra en el ANEXO VI.

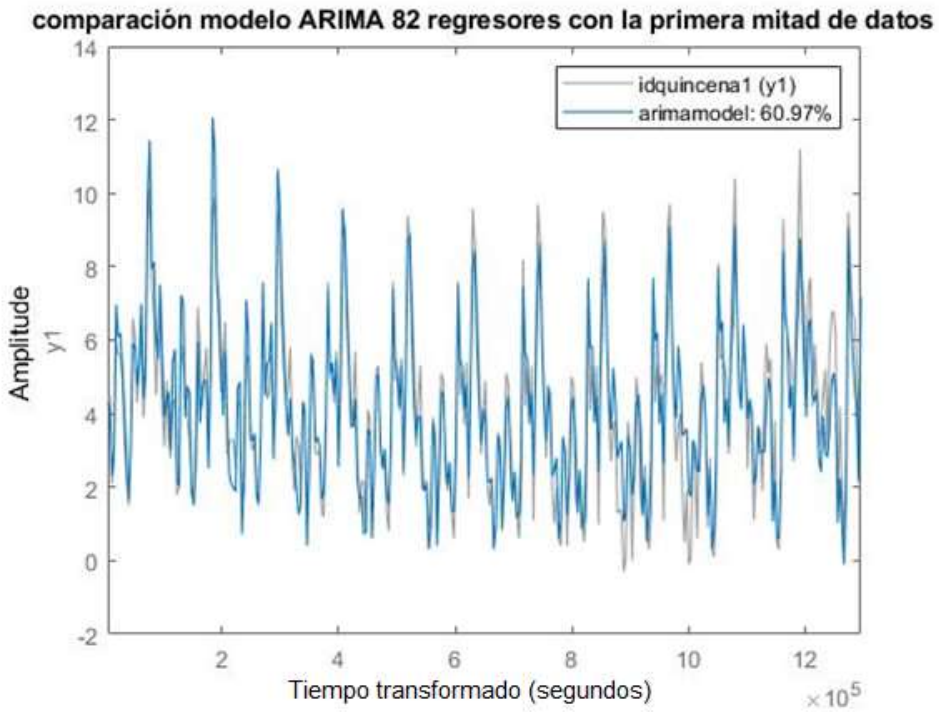

Figura 45. Comparación del modelo ARIMA de 82 regresores calculado respecto la primera mitad de los datos de la temperatura transformados.

Llegados a este punto, se ha finalizado el proceso de identificación y comienza la validación, para ver el resultado de los modelos calculados con la siguiente mitad de datos (segunda quincena del mes de diciembre 2019).

La validación del modelo AR se muestra en la Figura 46. Los valores de interés son ajuste del 57,57% y un MSE 1,2557.

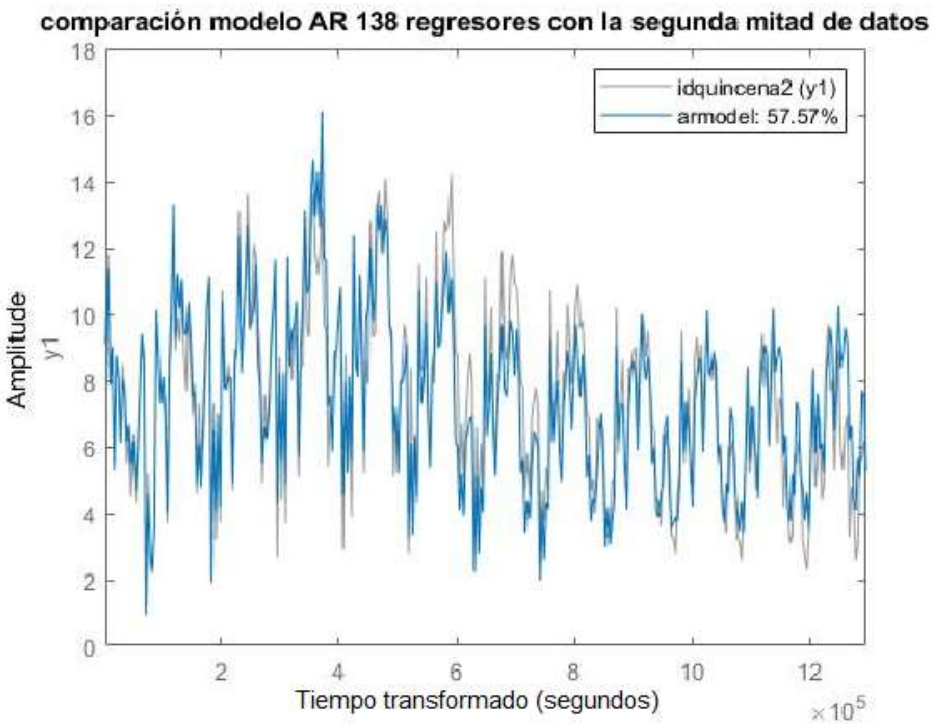

Figura 46. Comparación del modelo AR de 138 regresores calculado respecto la segunda mitad de los datos de la temperatura transformados.

Se continua por el modelo ARI, en la Figura 47, consiguiendo un ajuste del 58,9% y un error de 1,1782.

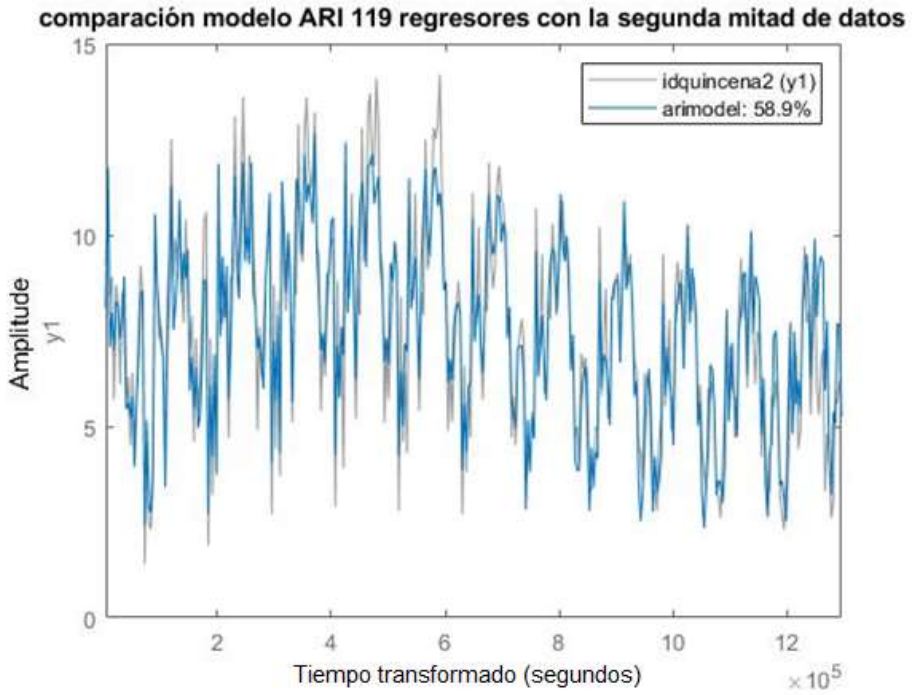

Figura 47. Comparación del modelo ARI de 119 regresores calculado respecto la segunda mitad de los datos de la temperatura transformados.

Por último, el modelo ARIMA se muestra en la Figura 48, con un ajuste de 49,82% y un error MSE de 1,7565.

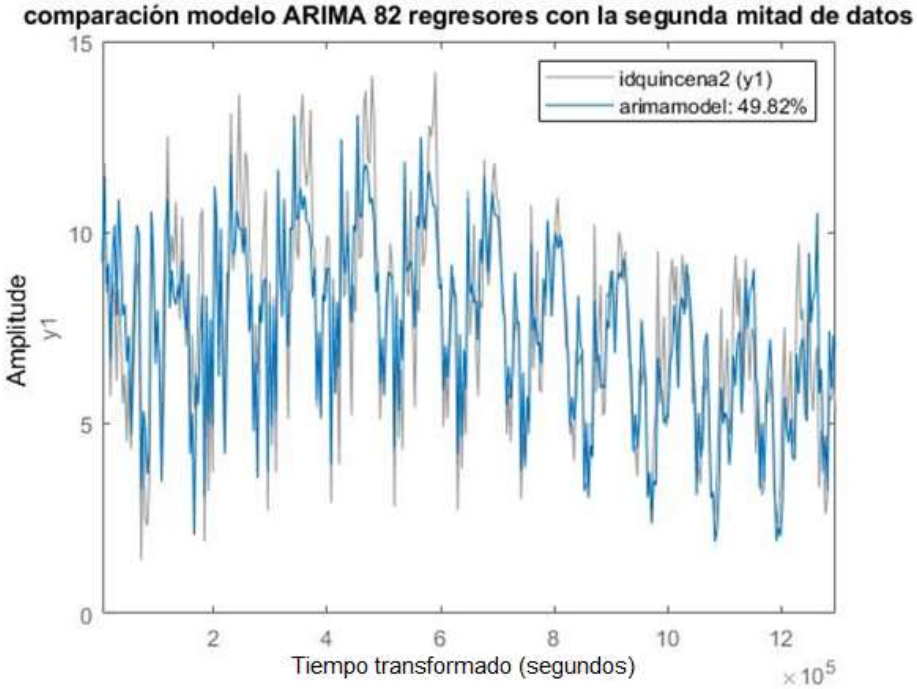

Figura 48. Comparación del modelo ARIMA de 82 regresores calculado respecto la segunda mitad de los datos de la temperatura transformados.

En la siguiente tabla se muestran los resultados del estudio de modelado de la serie temporal de temperatura bajo estudio, una vez transformada la ordenación de los datos registrados.

Modelo	Número de regresores	Tiempo de cómputo (segundos)	Identificación		Validación	
			Ajuste (%)	Error (MSE)	Ajuste (%)	Error (MSE)
AR	138	1,2985	78,01	0,269	57,57	1,2557
ARI	119	2,8162	76,61	0,3044	58,9	1,1782
ARIMA	82	3,6998	60,97	0,8476	49,82	1,7565

Tabla 3. Resultados del modelado de la serie temporal de la temperatura, una vez transformada la ordenación de los datos registrados

Modelo	Número de regresores	Tiempo de cómputo (segundos)	Identificación		Validación	
			Ajuste (%)	Error (MSE)	Ajuste (%)	Error (MSE)
AR	174	1,3729	69,51	0,5731	41,51	3,221
ARI	119	2,6243	46,7	1,7514	37,7	3,6479
ARIMA	89	3,2288	36,84	2,4593	36,36	3,8057

Tabla 4. Resultados del modelado de la serie temporal de la temperatura (réplica de la Tabla 1).

Del análisis de la Tabla 3 se deduce:

- El modelo ARI proporciona un porcentaje de ajuste, tanto en identificación como en validación, similar al AR, pero con 19 regresores menos, y por tanto 19 coeficientes menos en el modelo. Sin embargo, duplica el tiempo de ajuste de los coeficientes.

- El modelo ARIMA, si bien con un número de coeficientes notablemente inferior a las otras alternativas (56 menos que AR y 37 menos que ARI), multiplica por 3 el tiempo de cómputo y por 4 el error MSE de identificación de AR.

Algunas otras consideraciones generales del estudio realizado a partir de la serie temporal de temperaturas en la ciudad de Madrid son:

- El análisis e interpretación de los datos registrados antes de proceder a abordar el modelado es fundamental.
- Una apropiada organización de los datos, favoreciendo variaciones menos bruscas, facilita el modelado de la serie temporal.
- Las funciones ARI y ARIMA de Matlab limitan las posibilidades de modelado e imponen condiciones más restrictivas que las derivadas del estudio de autocorrelación de los datos.

Tras haber analizado estos cálculos y estudios, es la hora de predecir valores futuros (más allá de la validación) mediante los modelos realizados. En primer lugar, se realiza la predicción con el modelo AR de 138 regresores de las siguientes 200 muestras (Figura 49), que equivale a 8,5 días, ya que aumentando este periodo de tiempo se acumula el error de cálculo obtenido y los resultados difieren mucho de lo esperado; más tarde, se procede con el modelo ARI de 119 regresores (Figura 50), de la misma manera que con el anterior. Y, por último, el modelo ARIMA de 82 regresores (Figura 51), en el cual se calculan únicamente los siguientes 72 datos, correspondientes a 3 días, porque es el periodo de tiempo límite hasta el que el resultado obtenido es razonable. En la Tabla 5 se exponen los resultados cuantificados en distintos periodos de tiempo bajo estudio.

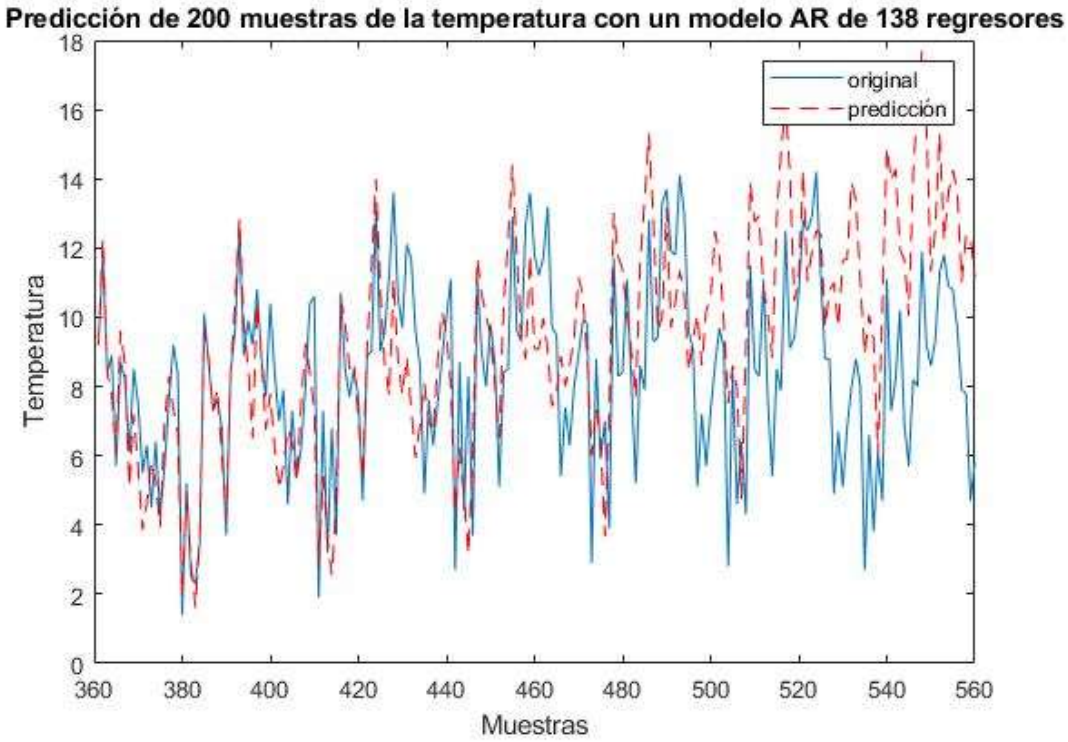

Figura 49. Representación de la predicción de las 200 muestras (8 días y medio) posteriores a la primera mitad de datos transformados de la temperatura, con un modelo AR de 138 regresores, junto con los datos reales.

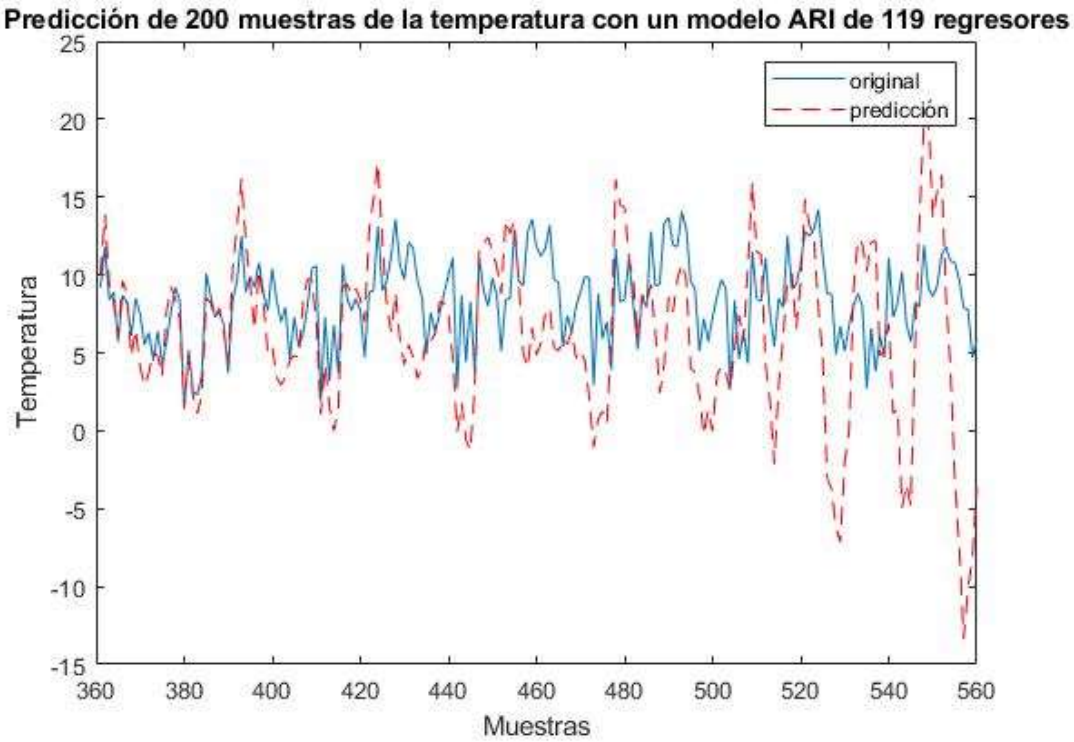

Figura 50. Representación de la predicción de las 200 muestras (8 días y medio) posteriores a la primera mitad de datos transformados de la temperatura, con un modelo ARI de 119 regresores, junto con los datos reales.

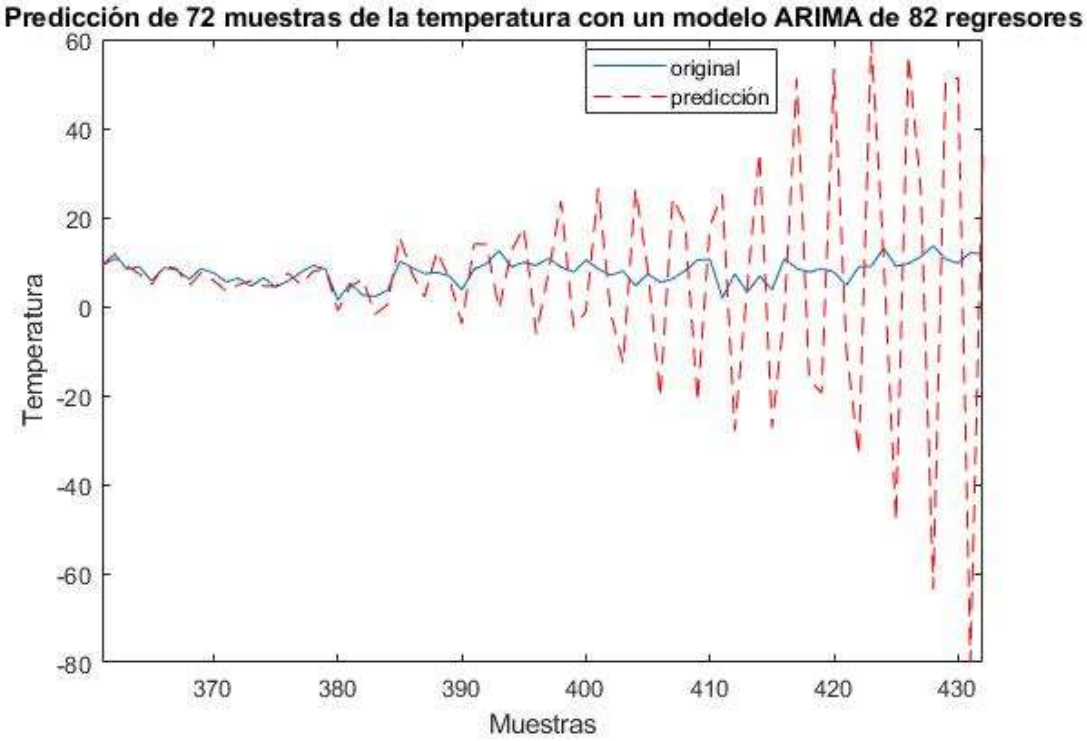

Figura 51. Representación de la predicción de las 72 muestras (3 días) posteriores a la primera mitad de datos transformados de la temperatura, con un modelo ARIMA de 82 regresores, junto con los datos reales.

Modelo	Número de regresores	Predicción de 24 muestras (1 día)		Predicción de 72 muestras (3 días)		Predicción de 180 muestras (1 semana)	
		Ajuste (%)	Error (MSE)	Ajuste (%)	Error (MSE)	Ajuste (%)	Error (MSE)
AR	138	57,76	1,1248	41,74	2,45	8,976	6,4415
ARI	119	40,45	2,2353	-4,838	7,93	-56	18,91
ARIMA	82	27,06	3,3527	-801	587	-	-

Tabla 5. Resultados de la predicción de la serie temporal de la temperatura transformada a partir de los modelos calculados.

Modelo	Número de regresores	Predicción de 24 muestras (1 día)		Predicción de 72 muestras (3 días)		Predicción de 180 muestras (1 semana)	
		Ajuste (%)	Error (MSE)	Ajuste (%)	Error (MSE)	Ajuste (%)	Error (MSE)
AR	174	-50,77	12,39	-20,41	6,6145	-19,18	8,4152
ARI	119	-141,2	31,70	-60,86	13,0094	-42,55	12,0384
ARIMA	89	-111,7	24,42	-556,1	196,417	-	-

Tabla 6. Resultados de la predicción de la serie temporal de la temperatura original a partir de los modelos calculados (réplica Tabla 2).

Si se observan los datos de la Tabla 5 sobre la predicción de los modelos para diferentes cantidades de datos, se aprecia que, en la totalidad de los modelos, para tiempos cercanos al presente (1 y 3 días) la predicción es mejor. Sin embargo, al aumentar el tiempo de predicción los resultados empeoran. Si nos centramos en los diferentes modelos, el AR, que es el que incluye más regresores registra el mejor rendimiento, mientras que el ARIMA al tener únicamente 82, el peor. Por otro lado, dentro de este periodo de tiempo los resultados son mucho mejores, sobre todo en la predicción de resultados a corto plazo, pasando en la predicción de 1 día de tiempo en el modelo AR de un ajuste de -20,41% a 57,76%.

- ## Ejemplo de aplicación: serie temporal de ozono.

En esta parte, se estudia el modelado de la serie temporal de ozono, mediante el uso de los resultados obtenidos en el tratamiento de datos realizado anteriormente. Tal y como se mostró en la función de autocorrelación de la Figura 9, para el modelo se propone un total de 167 regresores.

Para este estudio se utilizan dos estructuras paramétricas: AR, ARI. La estructura ARIMA en este caso no es posible su aplicación porque al tratarse de una serie temporal formada por muchos datos, y es necesario la aplicación de gran cantidad de regresores, el modelo ARIMA implementado en Matlab se vuelve inestable.

Se comienza por una estructura de modelo ARI, y se obtienen los siguientes resultados:

El modelo completo obtenido para este ejemplo se muestra en el ANEXO VII. Consta de un ajuste del 11,21% respecto los datos de origen, un error cuadrático medio (MSE) de 529,8343 y es necesario que transcurra un tiempo de 12,8676 segundos para su cálculo.

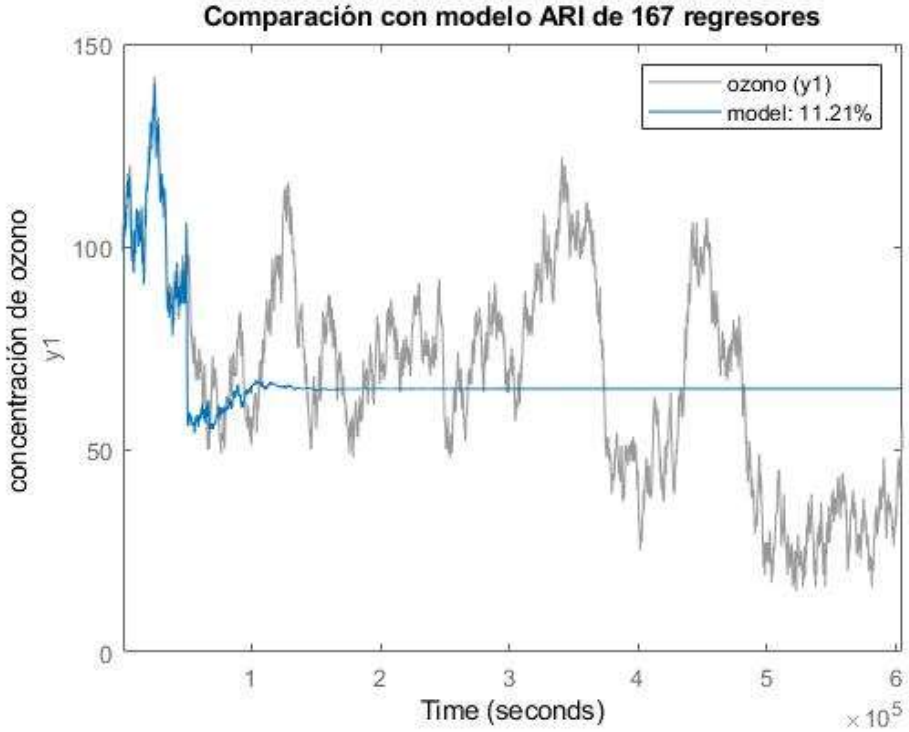

Figura 52. Representación de la comparación del modelo ARI obtenido con la serie temporal de ozono original.

A continuación, se ensaya el modelo AR obteniendo los siguientes resultados:

Este modelo AR con 167 coeficientes, tiene un ajuste 17,06% con un error (MSE) de 462,2787, tardando un total de 2,0735 segundos en ejecutarse. El resultado del modelo completo se expone en el ANEXO VIII.

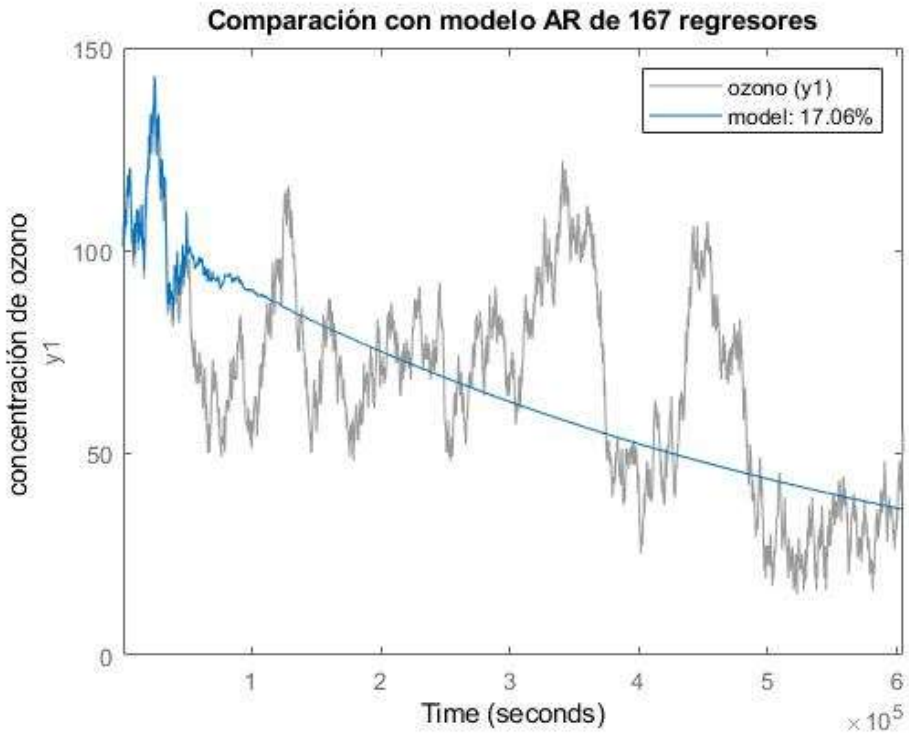

Figura 53. Representación de la comparación del modelo AR obtenido con la serie temporal de ozono original.

Tras realizar las comparaciones en las Figuras 52 y 53, se puede ver que los modelos creados se ajustan bien al comienzo de la serie temporal, aproximadamente hasta el mismo valor de observaciones que regresores tiene el modelo. A partir de ese punto, el modelo se va distanciando progresivamente de los datos de estudio y empeorando el ajuste. Esto es debido a que la serie temporal tiene un comportamiento muy no lineal y cambiante; entonces, el modelo calculado se ajusta el comienzo de la serie, pero transcurrido un número de muestras igual al número de regresores la predicción se degrada con el tiempo.

En la realización de este estudio los errores cuadráticos medios de los modelos ARI y AR para este espacio de tiempo de estudio correspondiente a 167 muestras, que equivale a 13,89 horas son de 0.0013 y $9{,}2214*10^{-4}$, y en ajuste 99,75% y 99,79%, respectivamente. De esta manera se corrobora que el ajuste para el comienzo de la serie temporal es correcto.

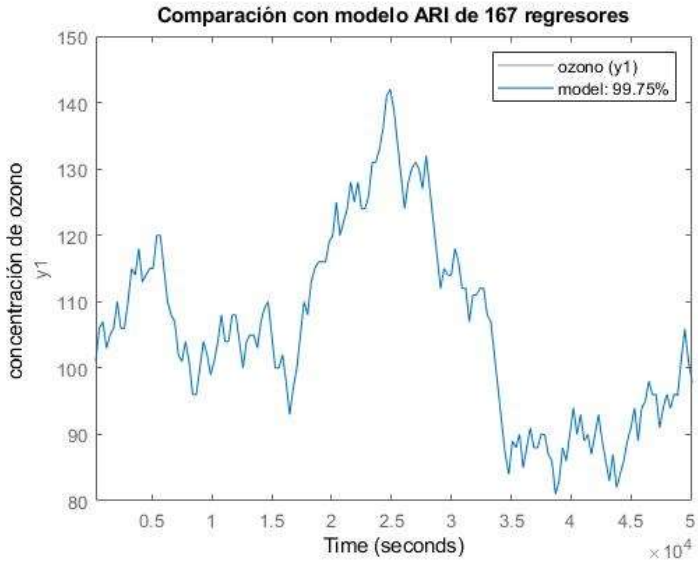

Figura 54. Representación de la comparación de las primeras 167 muestras del modelo ARI obtenido con la serie temporal de ozono original.

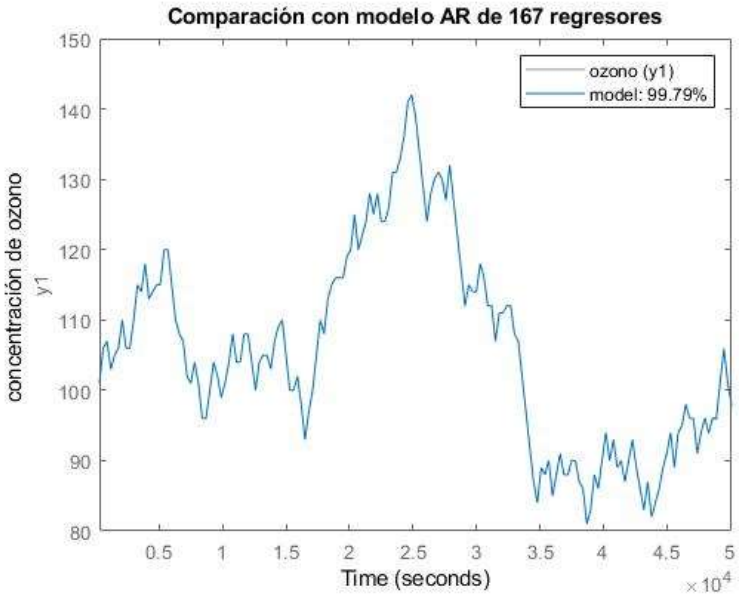

Figura 55. Representación de la comparación de las primeras 167 muestras del modelo AR obtenido con la serie temporal de ozono original.

Para continuar el análisis se aumenta las muestras de estudio de 176 a 200, que equivale a 16,67 horas. Obteniéndose siguientes resultados:

Comparando los modelos con las primeras 200 observaciones tal y como se ha hecho en las Figuras 56 y 57. El rendimiento obtenido para el modelo ARI un error (MSE) de 16,6556 y un ajuste del 76,06%, y en cuanto al modelo AR unos valores de 14,9175 de error y 77,31% de ajuste.

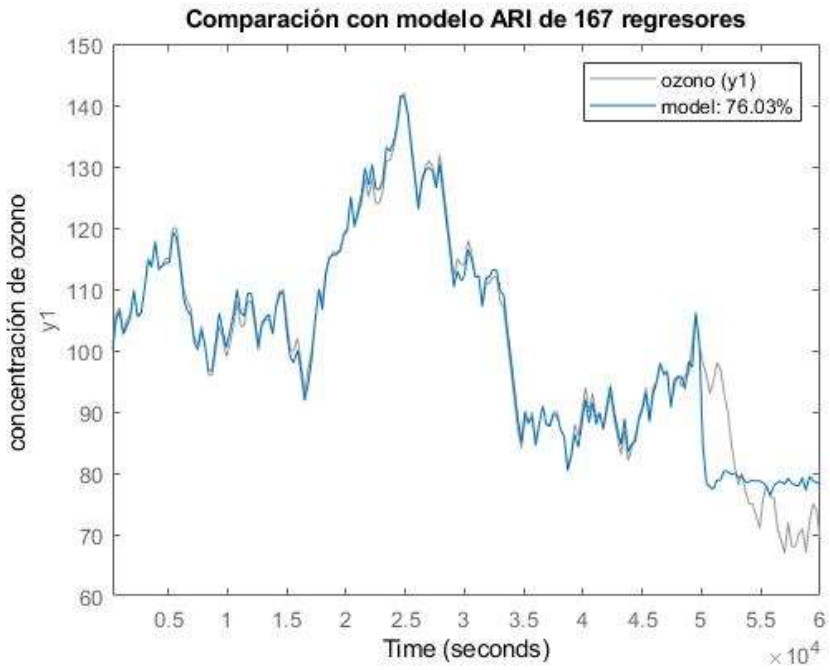

Figura 56. Representación de la comparación de las primeras 200 muestras del modelo ARI obtenido con la serie temporal de ozono original.

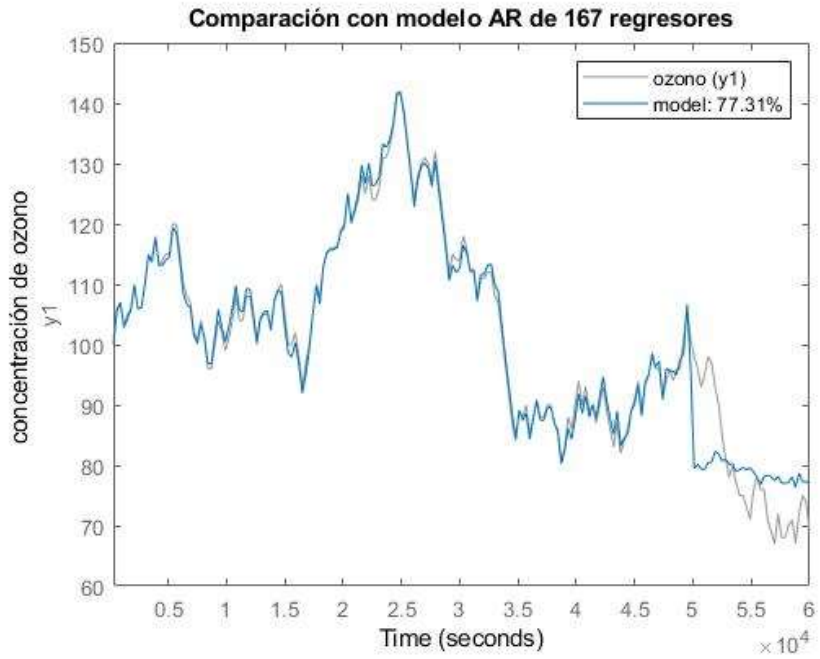

Figura 57. Representación de la comparación de las primeras 200 muestras del modelo AR obtenido con la serie temporal de ozono original.

De esta manera se ha comprobado, que al aumentar el número de observaciones por encima de la cantidad de regresores que tiene el modelo, el ajuste empeora. Por ello es interesante estudiar el modelo en el rango de observaciones que se ajusta más.

En este punto, se estudia la validez del estudio de la función de autocorrelación, que es en lo que nos hemos basado hasta ahora para analizar el número de regresores a utilizar en el modelo. Para ello, se realiza el análisis de la función de ajuste de una determinada estructura paramétrica en función del número de regresores, con el fin de determinar mejor la configuración de un determinado modelo.

En la Figura 58, se puede ver cómo la gráfica no sigue una tendencia lineal ascendente, sino que hay picos en los que el ajuste es más alto. Se aprecia que para 130 regresores se obtiene un ajuste de 19,15%, un valor mayor que el que se ha obtenido anteriormente (167 regresores); o en el caso de 55 regresores el ajuste es de 16,32%, resultado muy similar al estudiado con una cantidad de regresores mucho mayor (167). Con este estudio podemos ver que en algunos casos el proceso de identificación mejora con menor número de regresores que el deducido del estudio de correlación, sin embargo, hay que analizar las consecuencias en la validación del modelo.

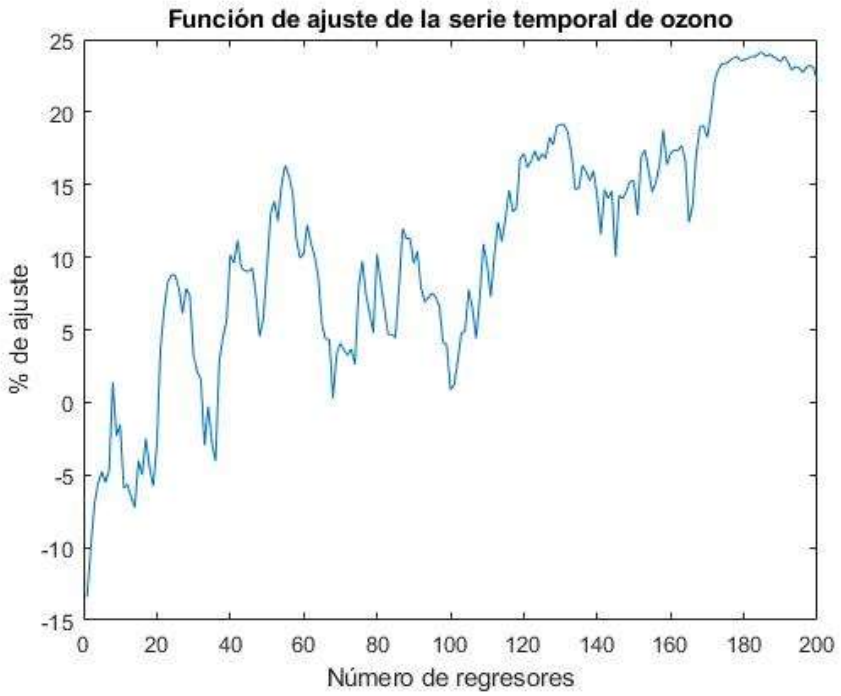

Figura 58. Se representa la función de ajuste para una estructura AR de la serie temporal de ozono para un número de regresores máximo de 200.

El último estudio realizado con la serie temporal del ozono es el proceso de identificación y validación en un tiempo de dos semanas. Los datos de la primera semana se utilizarán para el proceso de identificación, obteniendo finalmente un modelo resultante, y los valores de la segunda semana se utilizarán para la validación.

En primer lugar, se procede a analizar la función de autocorrelación de la serie temporal original para la totalidad de las dos semanas, obteniéndose los resultados de la Figura 59. En primer lugar, se aprecia que la gráfica baja de manera significativa por debajo del umbral del 95% para un retraso de 1112, pero la evolución posterior, creciente y negativa, de esta función augura un

mal comportamiento del modelo lineal para esta serie temporal. Con todo, se ensaya un modelo lineal con un total de 1112 regresores.

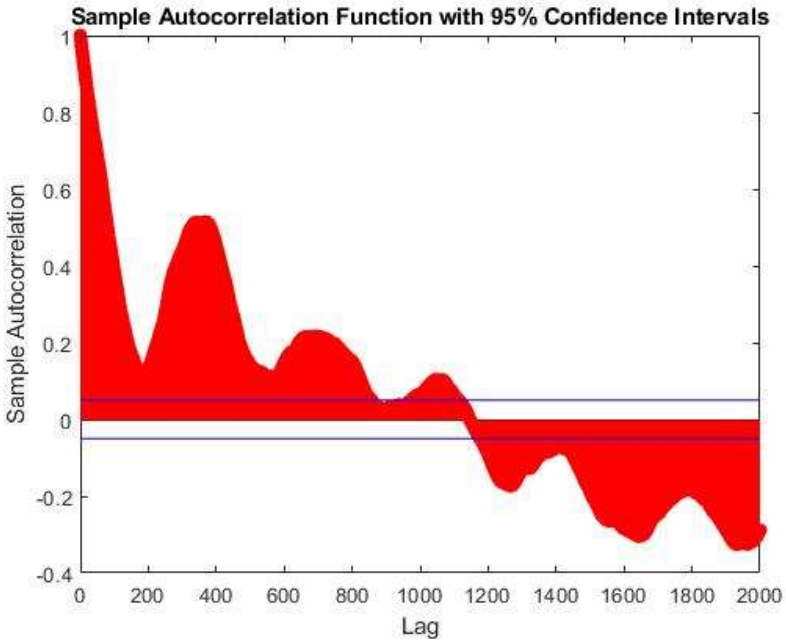

Figura 59. Resultado de la función de autocorrelación del ozono durante dos semanas, hasta 2000 retrasos.

Se calcula un modelo ARI de 1112 regresores sobre los datos de la primera semana. Los datos obtenidos en este proceso son de un ajuste total del 29,64% sobre la primera semana.

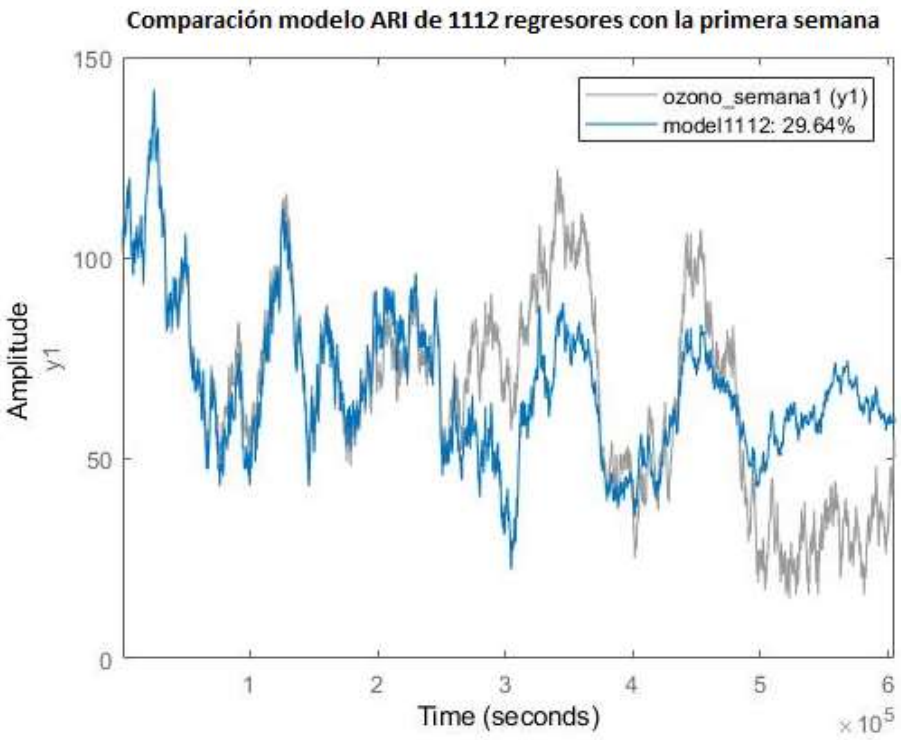

Figura 60. Comparación del modelo calculado de 1112 regresores sobre la primera semana de la serie temporal de ozono.

Una vez que se ha calculado el modelo buscado y se sabe cómo se comporta con el periodo de tiempo de una semana, se procede a la validación del modelo con la segunda semana de datos. Obteniéndose, finalmente, que ajuste sobre la segunda semana en el proceso de validación es del 37,8%.

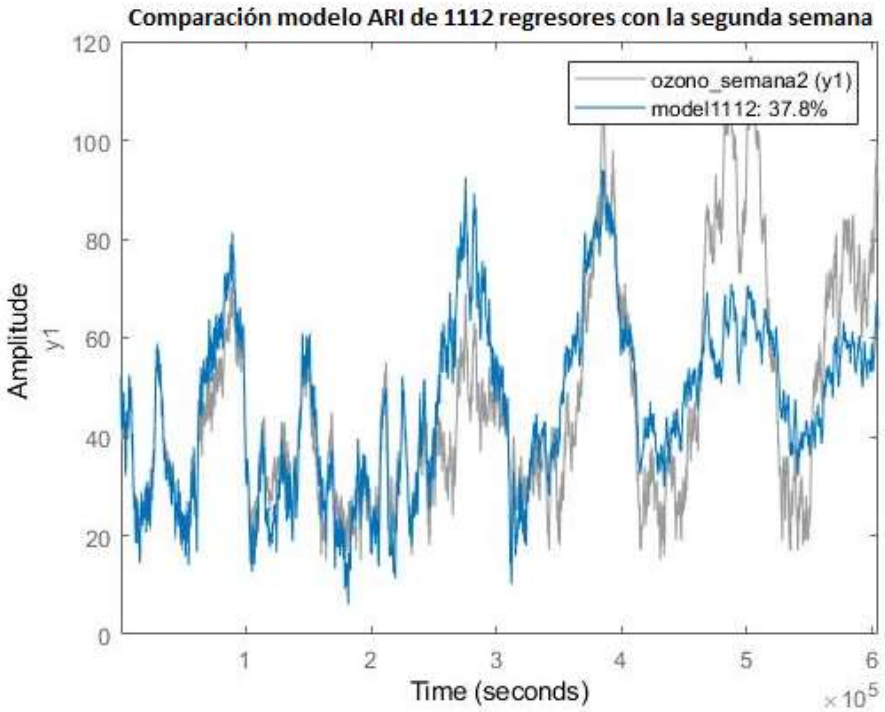

Figura 61. Comparación del modelo calculado de 1112 regresores sobre la primera semana de la serie temporal de ozono.

- Ejemplo de aplicación: serie temporal de ozono transformada.

En este punto, se va a hacer el estudio de modelado con las series temporales transformadas mediante la alteración del tiempo de muestreo. Comenzando por el caso en el que el tiempo de muestreo es de 15 minutos, en vez de 5 minutos como es originalmente. Aplicando la información obtenida en el tratamiento de datos con la función de autocorrelación (Figura 26) donde se demuestra la necesidad de utilizar 55 regresores para el modelado.

Se plantea un modelo equivalente para estas observaciones. Mediante un modelo ARIMA de 55 regresores, se obtienen los siguientes resultados indicados en el ANEXO IX y representados en la Figura 62.

El modelo obtenido tiene un porcentaje de ajuste de 11,7%, un error cuadrático medio (MSE) de 518,0038 y un tiempo de cálculo de 4,7728 segundos.

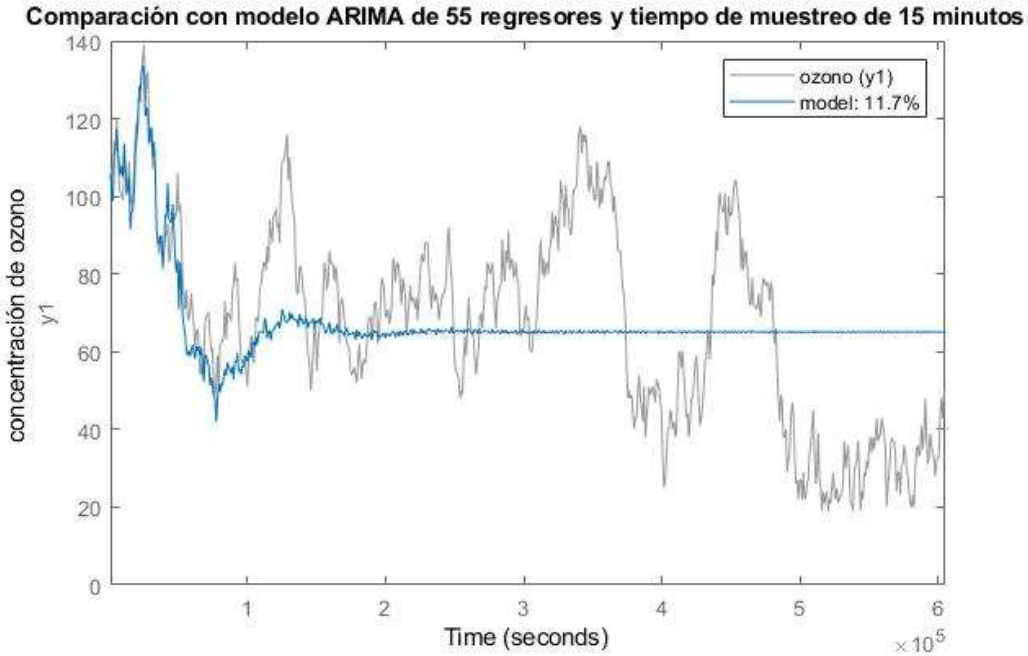

Figura 62. Representación de la comparación del modelo ARIMA obtenido con la serie temporal de ozono con tiempo de muestreo 15 minutos.

Seguidamente, se realiza un modelo de prueba para una estructura tipo AR, con 55 regresores. El modelo completo calculado para este ejemplo se muestra en el ANEXO X y en la Figura 63. El rendimiento alcanzado en este modelo es de: 17,56% de ajuste, un error (MSE) 451,5153 y un tiempo de cómputo de 1,201 segundos.

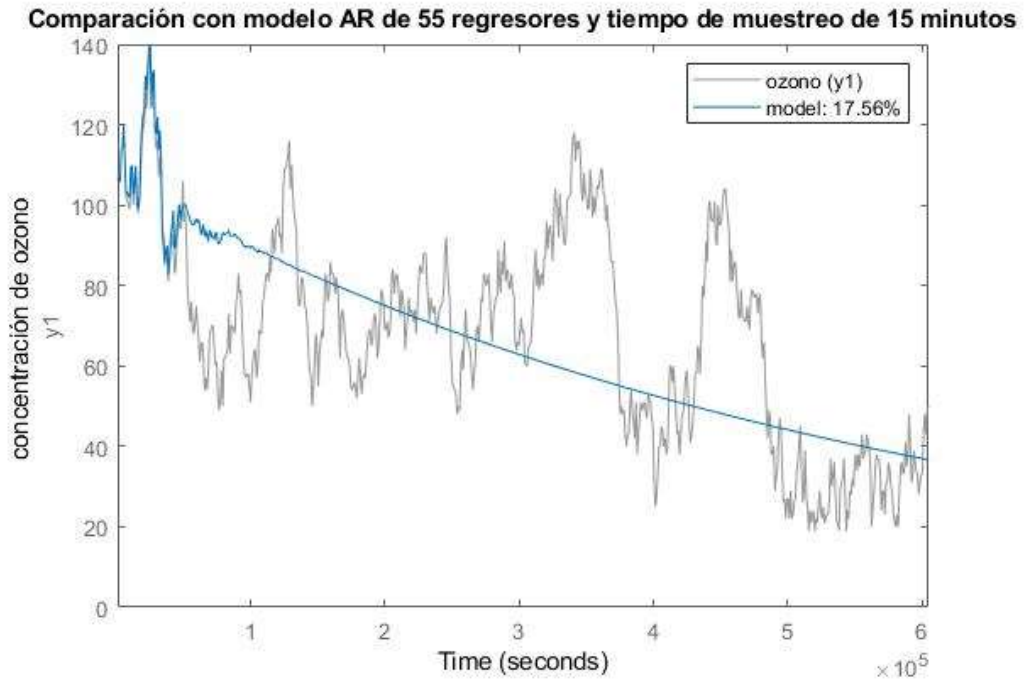

Figura 63. Representación de la comparación del modelo AR obtenido con la serie temporal de ozono con tiempo de muestreo 15 minutos.

Y de la misma manera que los anteriores el modelo ARI (ANEXO X), con unos datos de 10,94% de ajuste, un error de 526,8953 y un tiempo de cómputo total de 3,1447 segundos.

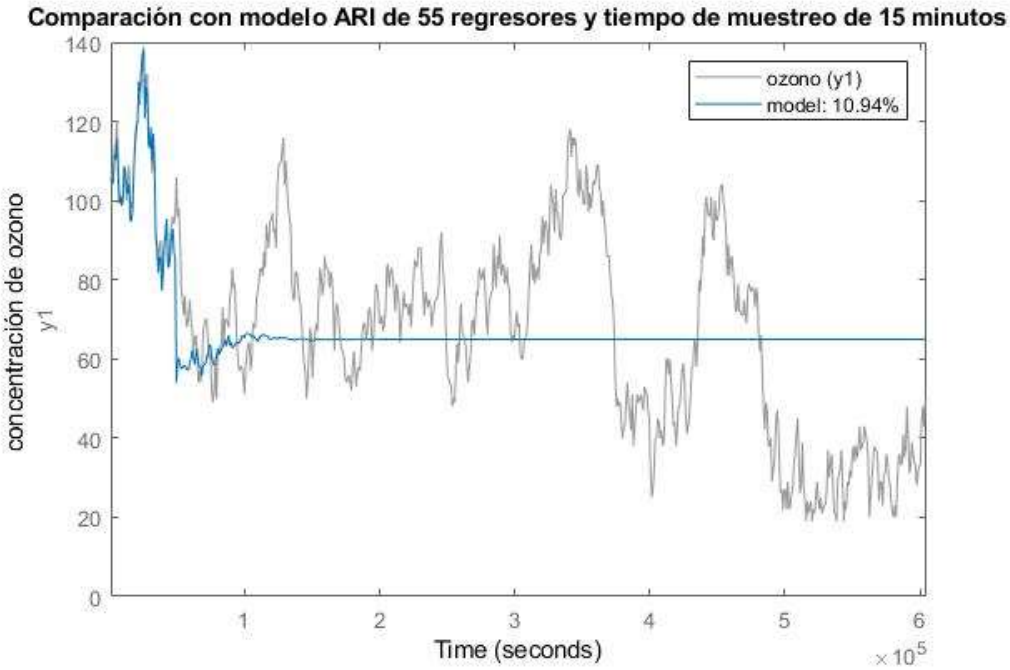

Figura 64. Representación de la comparación del modelo ARI obtenido con la serie temporal de ozono con tiempo de muestreo 15 minutos.

Una vez que se ve el resultado del modelo en la serie temporal completa, es momento para ver cómo se comporta en las primeras observaciones. Para ello se realiza el análisis para en las primeras 55 muestras, coincidente al número de regresores de la serie temporal, que corresponde a 13,75 horas.

En las Figuras 65, 66 y 67, los resultados de la comparación de los modelos calculados con las primeras muestras de serie temporal son de 100% de ajuste y MSE $5{,}67*10^{-25}$ para el modelo ARIMA, 100% de ajuste y MSE $1{,}67*10^{-20}$ para el AR y 100% de ajuste y MSE $2{,}88*10^{-19}$ para el modelo ARI.

Figura 65. Representación de la comparación de las primeras 55 muestras del modelo ARIMA obtenido con la serie temporal de ozono con 15 minutos de tiempo de muestreo.

Figura 66. Representación de la comparación de las primeras 55 muestras del modelo AR obtenido con la serie temporal de ozono con 15 minutos de tiempo de muestreo.

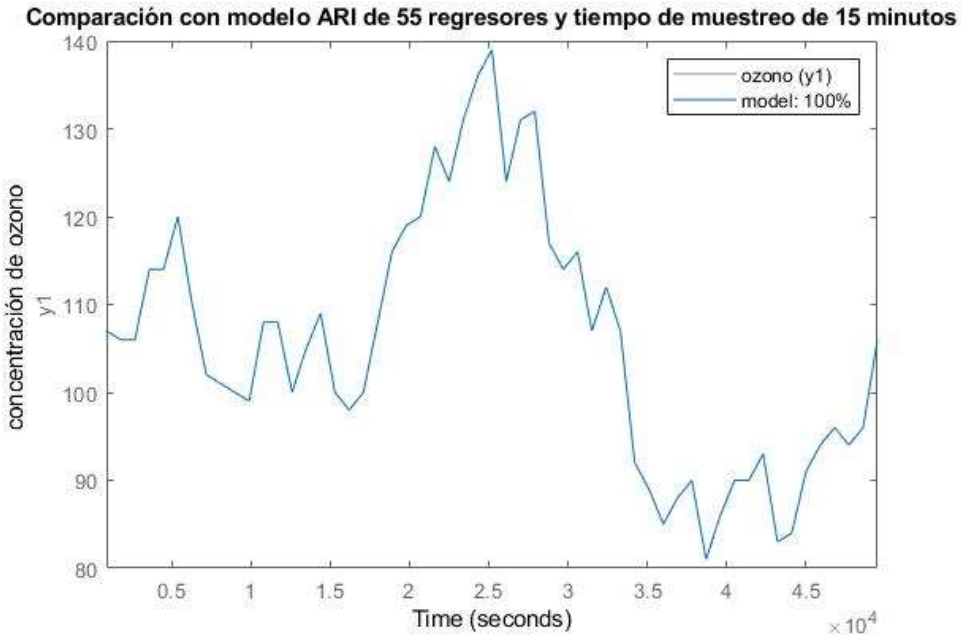

Figura 67. Representación de la comparación de las primeras 55 muestras del modelo ARI obtenido con la serie temporal de ozono con 15 minutos de tiempo de muestreo.

Por último, se realiza el mismo análisis aumentando las muestras hasta un tiempo de estimación de 16,75 horas para ver cuánto error se comete al añadir este periodo.

Los resultados para este nuevo tiempo de estimación son de 75,6% de ajuste y un error cuadrático medio 19,9495 en el modelo ARIMA, en el AR un 72% en ajuste y MSE de 23,6398 y en el modelo ARI un ajuste del 68,39% y MSE 30,1339. Por lo que al aumentar el tiempo de estudio el error crece, como cabía esperar.

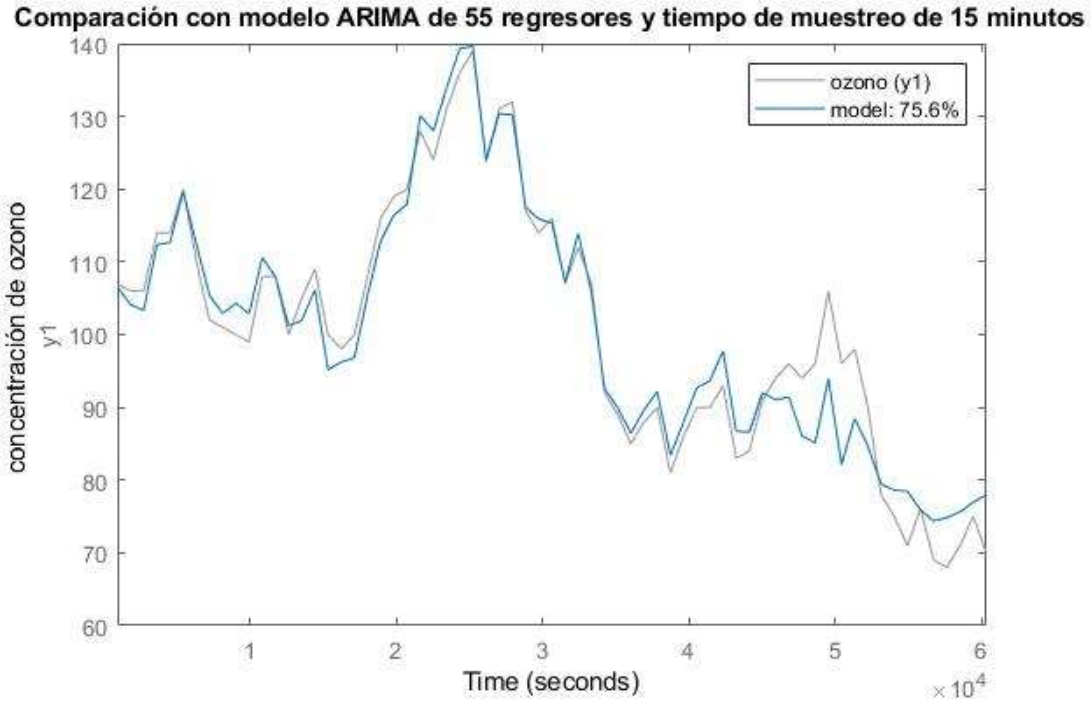

Figura 68. Representación de la comparación de las primeras 67 muestras del modelo ARIMA obtenido con la serie temporal de ozono con 15 minutos de tiempo de muestreo.

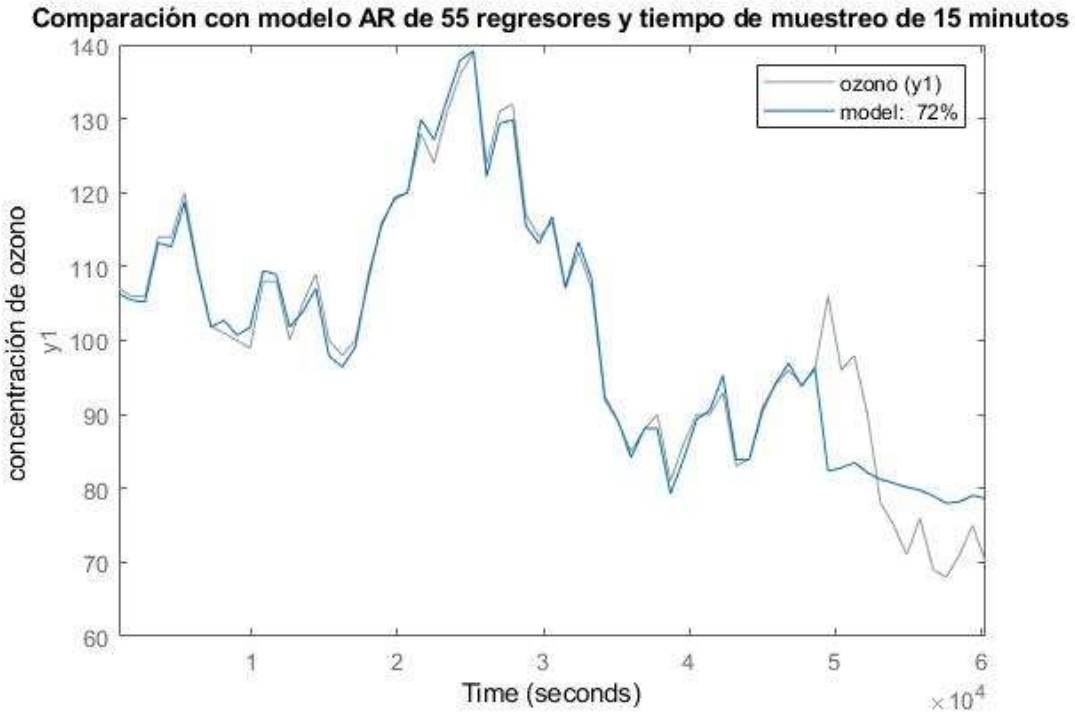

Figura 69. Representación de la comparación de las primeras 67 muestras del modelo AR obtenido con la serie temporal de ozono con 15 minutos de tiempo de muestreo.

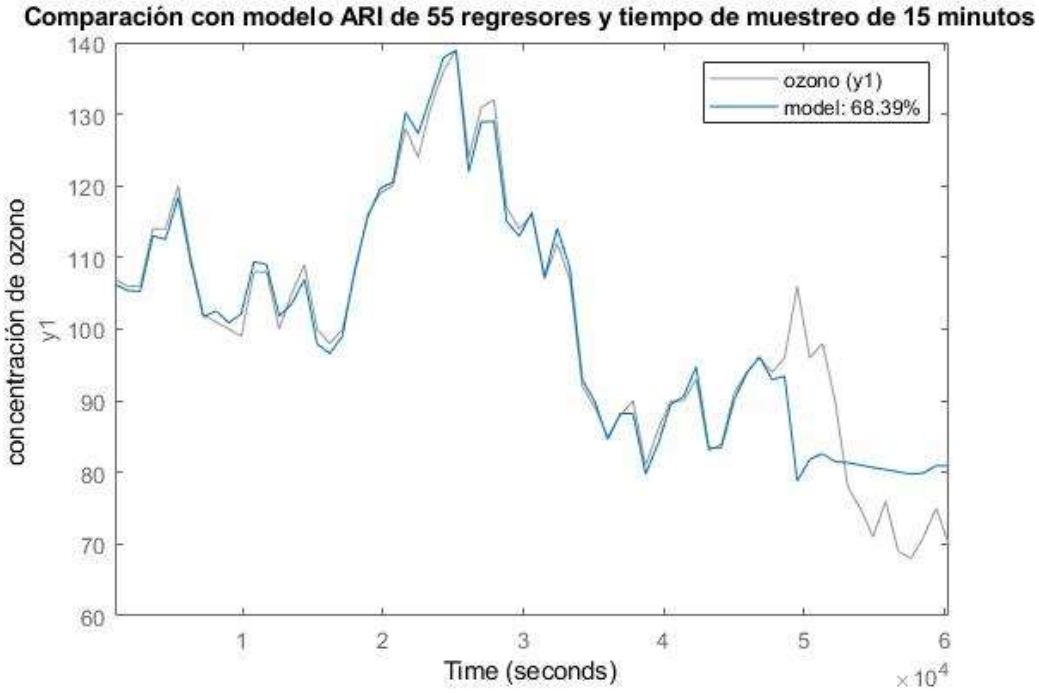

Figura 70. Representación de la comparación de las primeras 67 muestras del modelo ARI obtenido con la serie temporal de ozono con 15 minutos de tiempo de muestreo.

A continuación, se realiza la transformación a un tiempo de muestreo de 60 minutos. Mediante los conocimientos adquiridos con el tratamiento de datos de esta serie temporal en la Figura 28, donde se demuestra que es necesario utilizar 13 regresores en su modelado. Se procede de la misma manera que en el estudio anterior. Planteando un modelo ARIMA, utilizando 13 regresores. Obteniendo los siguientes valores indicados en el ANEXO XI. Este modelo creado tiene un porcentaje de ajuste igual a 12,09 %, un error cuadrático medio de 514,0078 y necesita un tiempo de cálculo de 3,361 segundos.

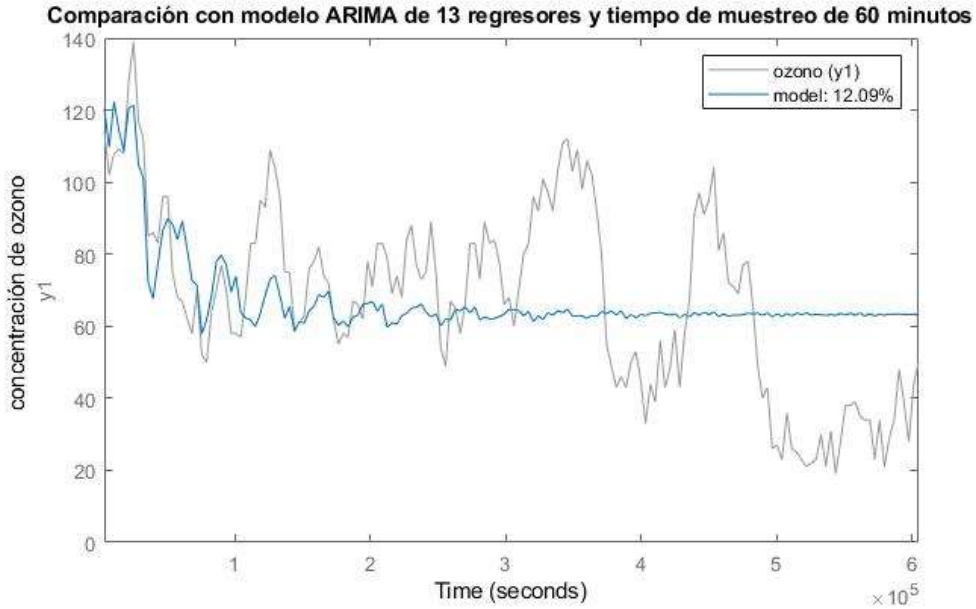

Figura 71. Representación de la comparación del modelo ARIMA obtenido con la serie temporal de ozono con tiempo de muestreo 60 minutos.

Se realiza el modelado para una estructura tipo AR. El modelo completo calculado para este ejemplo se encuentra en el ANEXO XI.

Los valores de interés son: 15,26 % de ajuste, error (MSE) 477,6235, y un tiempo de cómputo de 1,1831 segundos.

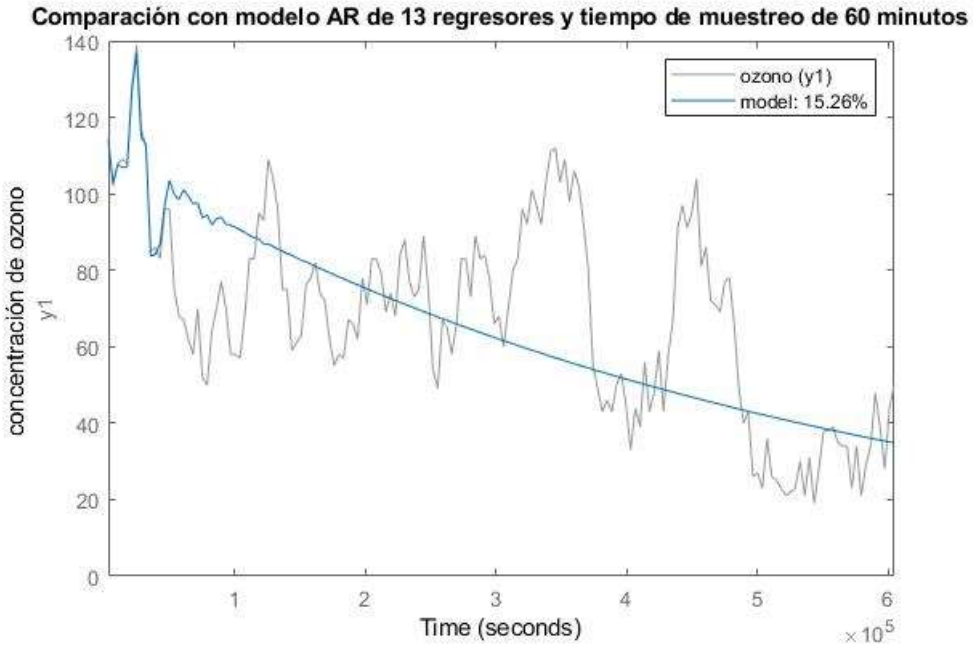

Figura 72. Representación de la comparación del modelo AR obtenido con la serie temporal de ozono con tiempo de muestreo 60 minutos

Y, por último, el modelo ARI, el cual se encuentra en el ANEXO XI, donde destaca un ajuste del 11,76% un error 517,9828, con un tiempo de cómputo necesario de 3,2386 segundos.

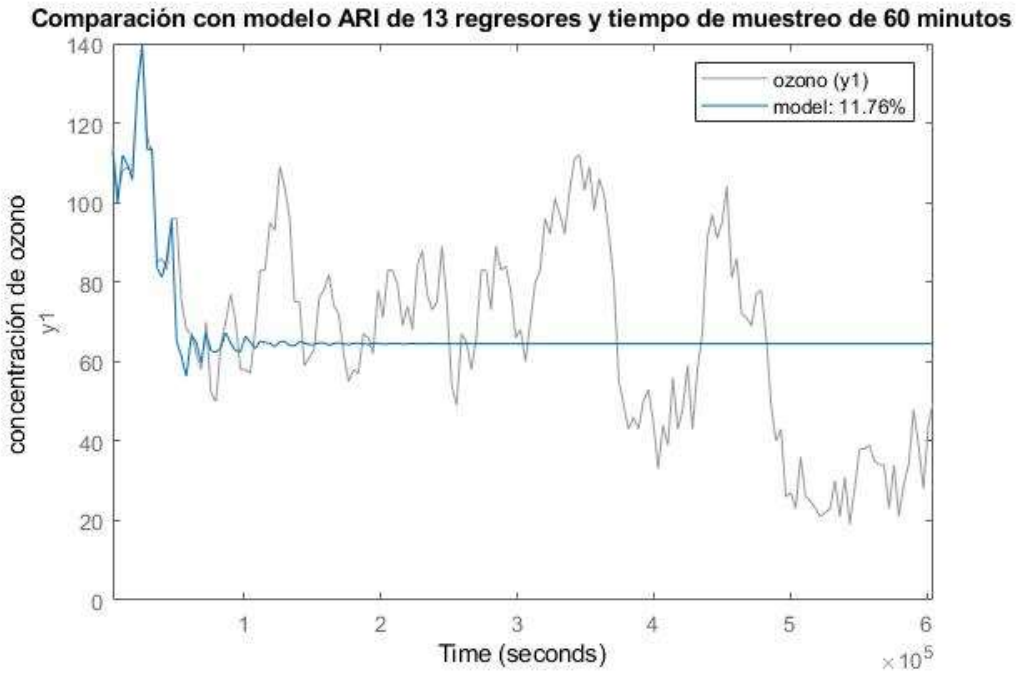

Figura 73. Representación de la comparación del modelo ARI obtenido con la serie temporal de ozono con tiempo de muestreo 60 minutos.

Respecto la comparación de los modelos con las primeras 13 muestras equivalente a 13 horas de la serie temporal, estos son los resultados:

Los datos obtenidos en este análisis son: en cuanto al modelo ARIMA un ajuste del 100% y un error $9{,}21*10^{-25}$, respecto al modelo AR un ajuste del 100% y $4{,}77*10^{-19}$ de error, y en cuanto el modelo ARI un ajuste del 100% y un error de $5{,}0534*10^{-26}$.

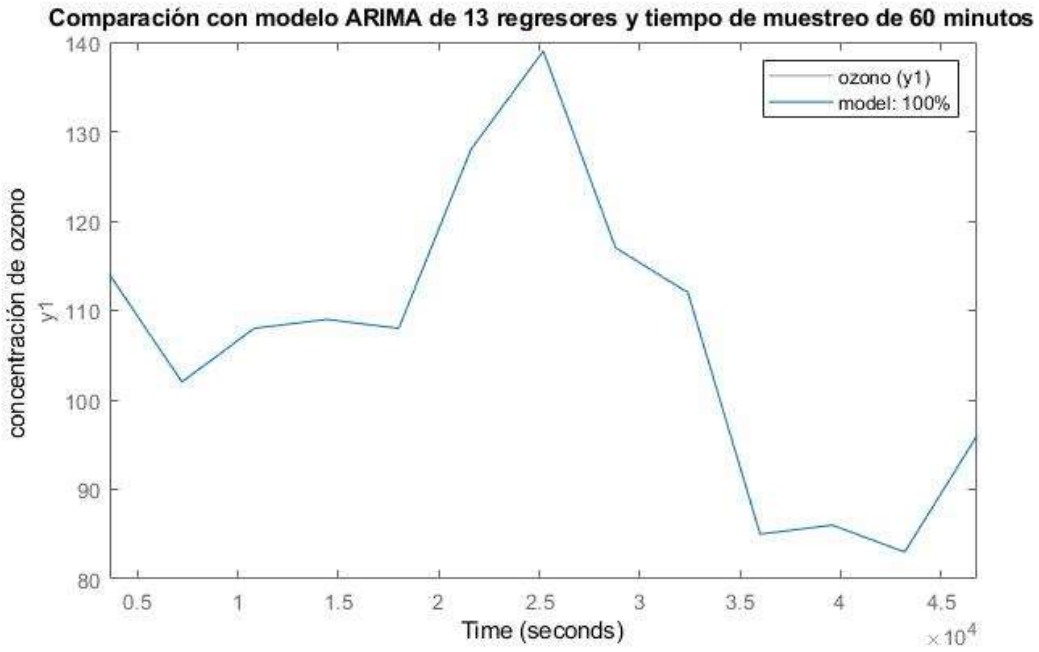

Figura 74. Representación de la comparación de las primeras 13 muestras del modelo ARIMA obtenido con la serie temporal de ozono con 60 minutos de tiempo de muestreo.

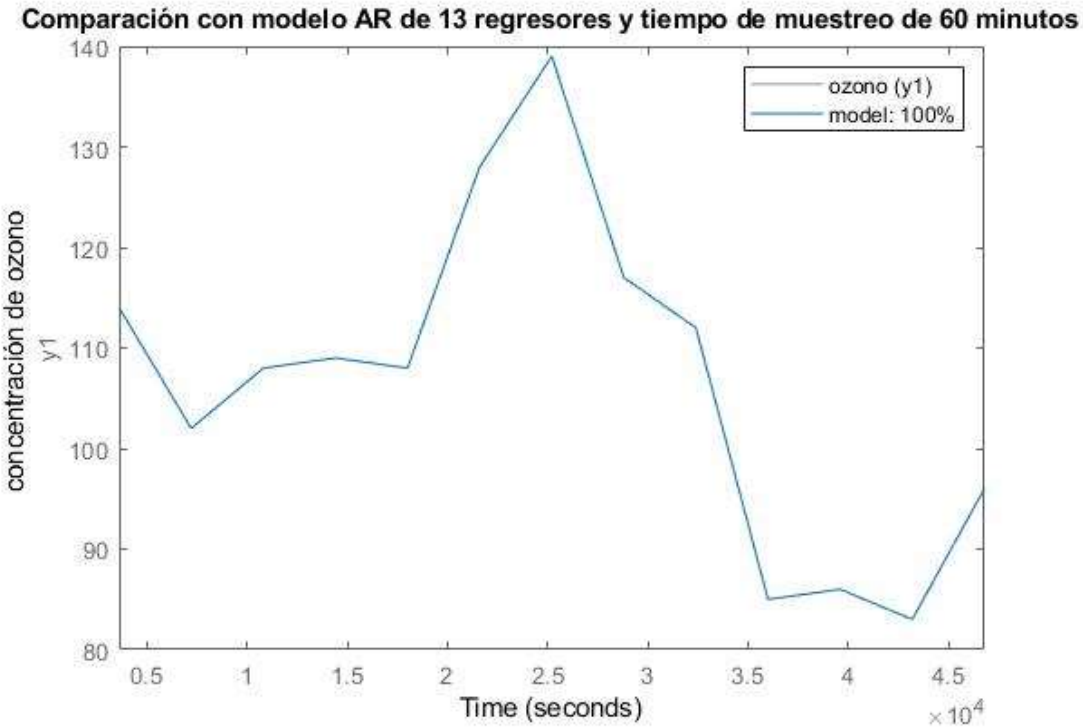

Figura 75. Representación de la comparación de las primeras 13 muestras del modelo AR obtenido con la serie temporal de ozono con 60 minutos de tiempo de muestreo.

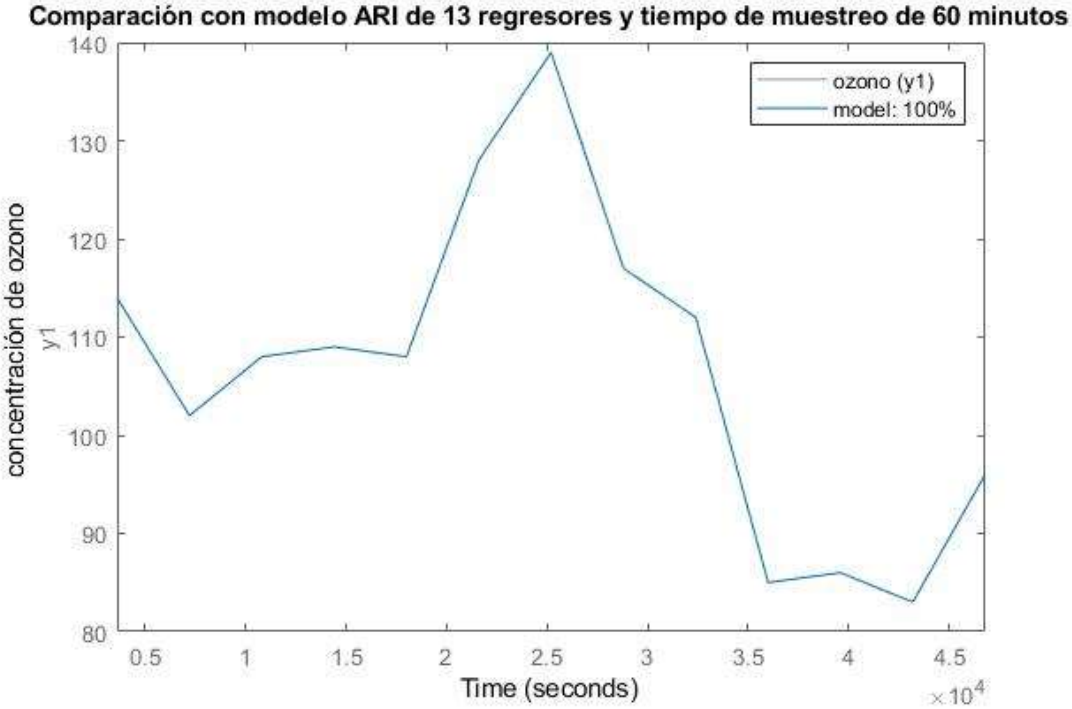

Figura 76. Representación de la comparación de las primeras 13 muestras del modelo AR obtenido con la serie temporal de ozono con 60 minutos de tiempo de muestreo

Y se realiza el estudio para un tiempo de 17 horas, tal y como se ha abordado anteriormente.

Los resultados obtenidos en el modelo ARIMA son de 46,51% de ajuste y un error MSE 111,499. El modelo AR consta de 63,47% y 51,9836 de error. Y el modelo ARI de 72,52% de ajuste y MSE igual a 29,429.

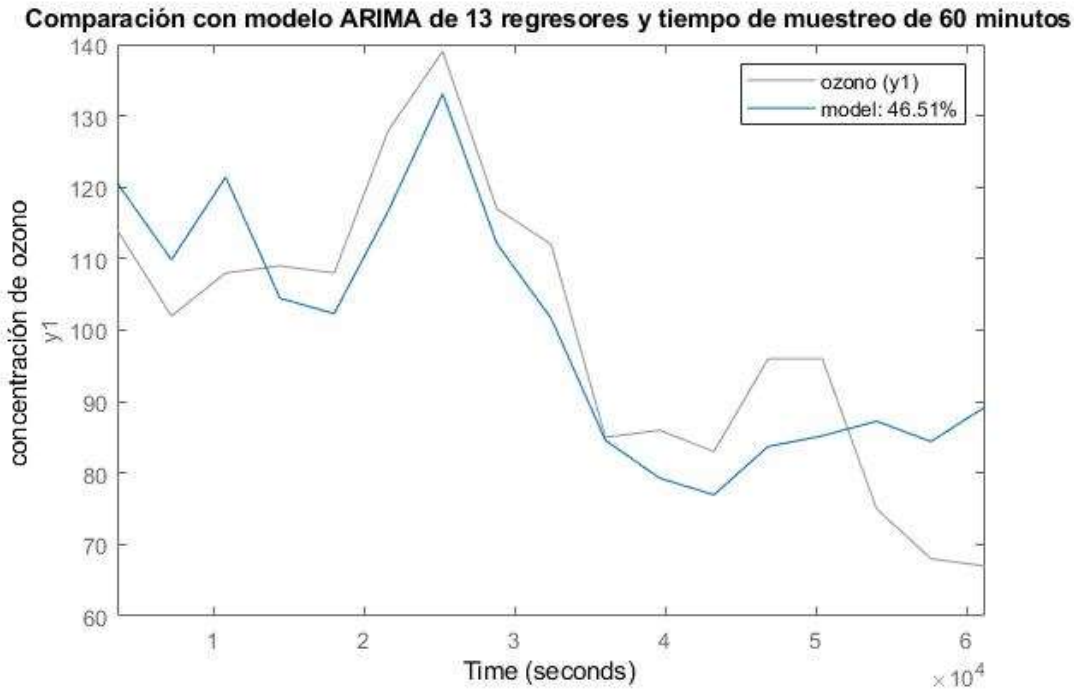

Figura 77. Representación de la comparación de las primeras 17 muestras del modelo ARIMA obtenido con la serie temporal de ozono con 60 minutos de tiempo de muestreo.

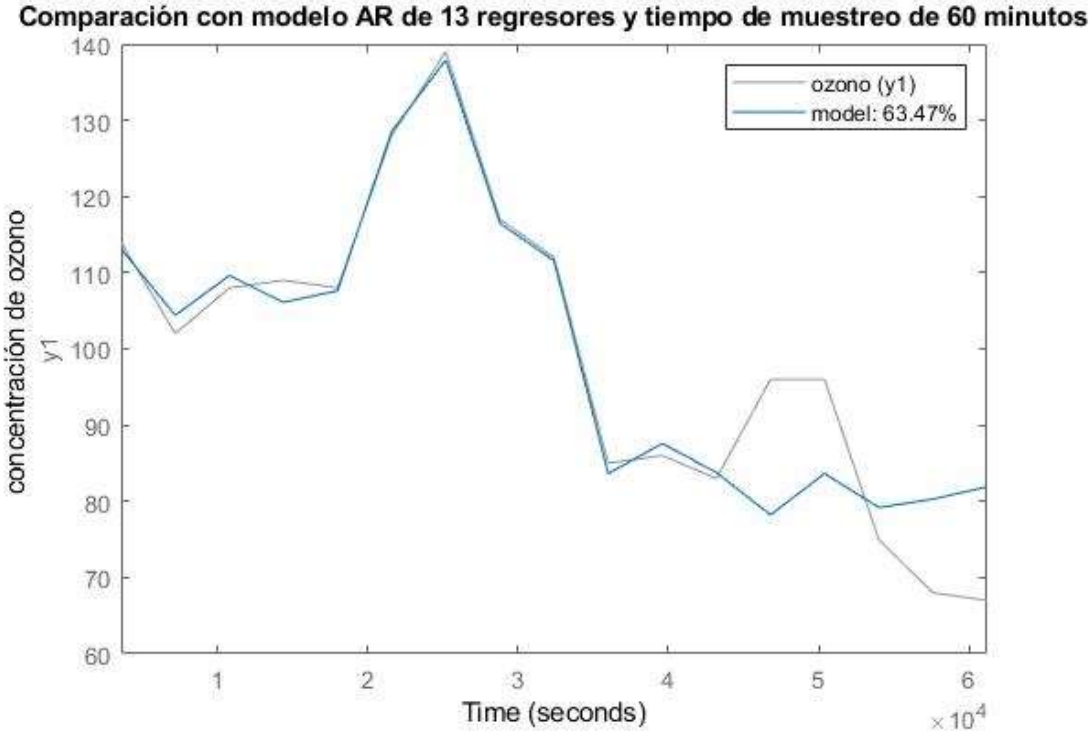

Figura 78. Representación de la comparación de las primeras 17 muestras del modelo AR obtenido con la serie temporal de ozono con 60 minutos de tiempo de muestreo.

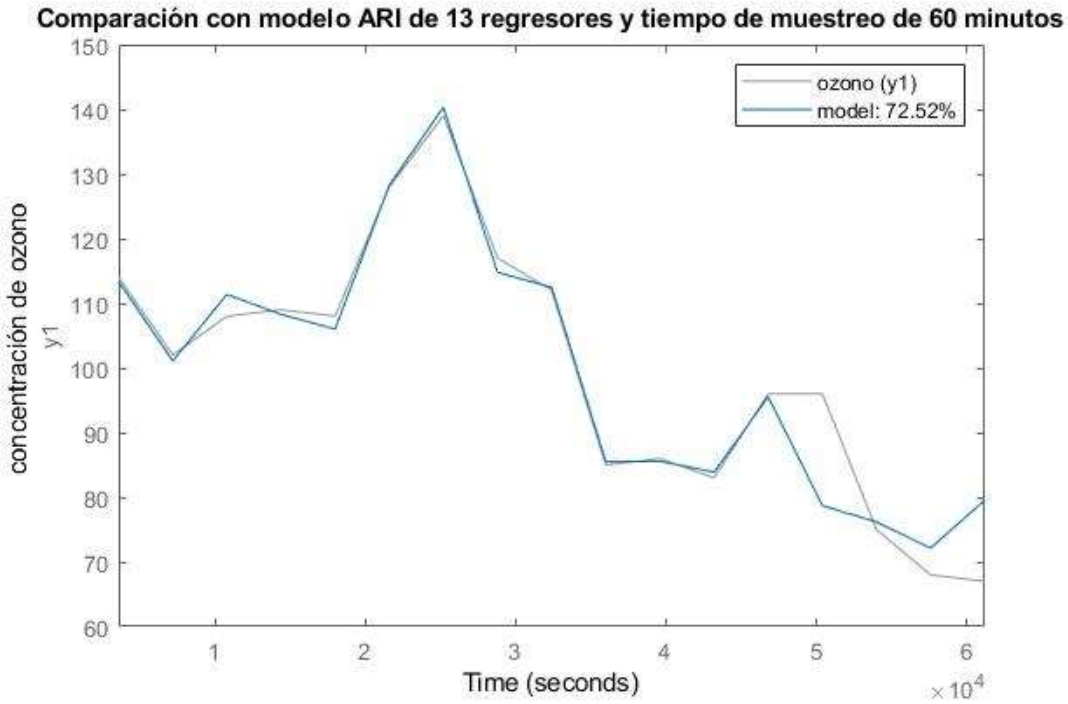

Figura 79. Representación de la comparación de las primeras 17 muestras del modelo ARI obtenido con la serie temporal de ozono con 60 minutos de tiempo de muestreo.

En la Tabla 7 se resumen todos los datos obtenidos mediante las distintas pruebas de cálculo de modelos para la serie temporal de ozono, y se obtienen las siguientes conclusiones:

- Independientemente de las estructuras paramétricas evaluadas, aumentar el tiempo de muestreo conlleva simplificar el modelo y reducir el tiempo de cómputo. Sin embargo, hay que valorar la pérdida de información temporal que esto conlleva.
- Comparando los modelos analizados, para el caso de aplicación la estructura ARIMA requiere un mayor coste computacional con una despreciable mejora en el error de modelado.
- Para una misma frecuencia de muestreo y un mismo número de regresores, el modelo AR proporciona un modelo con mejor ajuste y menor tiempo de cómputo.
- Para una estructura paramétrica dada, y un periodo de muestreo concreto, la predicción empeora a medida que el horizonte crece.
- Para una estructura paramétrica dada al submuestrear (incremento de T) los datos originales se consiguen modelos más sencillos, con menor tiempo de cálculo y con resultados similares tanto en la fase de identificación como en la de predicción.

Modelos	Tiempo de muestreo	Serie temporal para comparar	Número de regresores	Porcentaje de ajuste	Error (MSE)	Tiempo de cómputo (segundos)
ARIMA	**5***	Original (Ts=5')	-	-	-	-
		167 muestras (14 horas)	-	-	-	
		200 muestras (17 horas)	-	-	-	
	15	Original (Ts=15')	55	11,7%	518	4,7728
		167 muestras (14 horas)	55	100%	$5,67*10^{-25}$	
		200 muestras (17 horas)	55	75,6%	19,95	
	60	Original (Ts=60')	13	12,09%	514	3,361
		167 muestras (14 horas)	13	100%	$9,21*10^{-25}$	
		200 muestras (17 horas)	13	46,51%	111,50	
AR	**5**	Original (Ts=5')	167	17,06%	462,2787	2,0735
		167 muestras (14 horas)	167	99,79%	$9,22*10^{-4}$	
		200 muestras (17 horas)	167	77,31%	14,9175	
	15	Original (Ts=15')	55	17,56%	451,51	1,201
		167 muestras (14 horas)	55	100%	$1,67*10^{-20}$	
		200 muestras (17 horas)	55	72%	23,64	
	60	Original (Ts=60')	13	15,26%	477,62	1,1831
		167 muestras (14 horas)	13	100%	$4,77*10^{-19}$	
		200 muestras (17 horas)	13	63,47%	51,9836	
ARI	**5**	Original (Ts=5')	167	11,21%	462,2787	12,8676
		167 muestras (14 horas)	167	99,75%	0,0013	
		200 muestras (17 horas)	167	76,03 %	16,6556	
	15	Original (Ts=15')	55	10,94%	526,8953	3,1447
		167 muestras (14 horas)	55	100%	$2,88*10^{-19}$	
		200 muestras (17 horas)	55	68,39%	30,1339	
	60	Original (Ts=60')	13	11,76%	517,98	2,8174
		167 muestras (14 horas)	13	100%	$5,05 *10^{-26}$	
		200 muestras (17 horas)	13	72,52%	29,429	

Tabla 7. Resultados de los distintos modelados de la serie temporal del ozono.

*No es posible calcular un modelo ARIMA de tantos coeficientes ya que el modelo se vuelve inestable.

- Ejemplo de aplicación: serie temporal de temperatura filtrada

En este caso las series temporales a analizar son las resultantes del tratamiento de datos, realizado anteriormente, en el dominio de la frecuencia. Comenzando por la aplicación del primer filtro a una frecuencia de 0,09 ciclos/hora, donde la señal resultante junto con su espectro de potencia se encuentra mostrada en la Figura 16.

Para empezar con el análisis, se realiza el estudio de la función de autocorrelación de la totalidad de la señal para ver cómo se comporta y poder continuar con el proceso de identificación y validación.

Tal y como se aprecia en la Figura 80, donde se muestra la autocorrelación de la serie temporal filtrada, el resultado es muy similar en comparación con los datos originales. Debido a que no se ha cambiado el comportamiento ni la tendencia, solamente se ha disminuido el nivel de ruido, de manera que la correlación entre muestras es el mismo. Por lo que el número de regresores a utilizar es de 167.

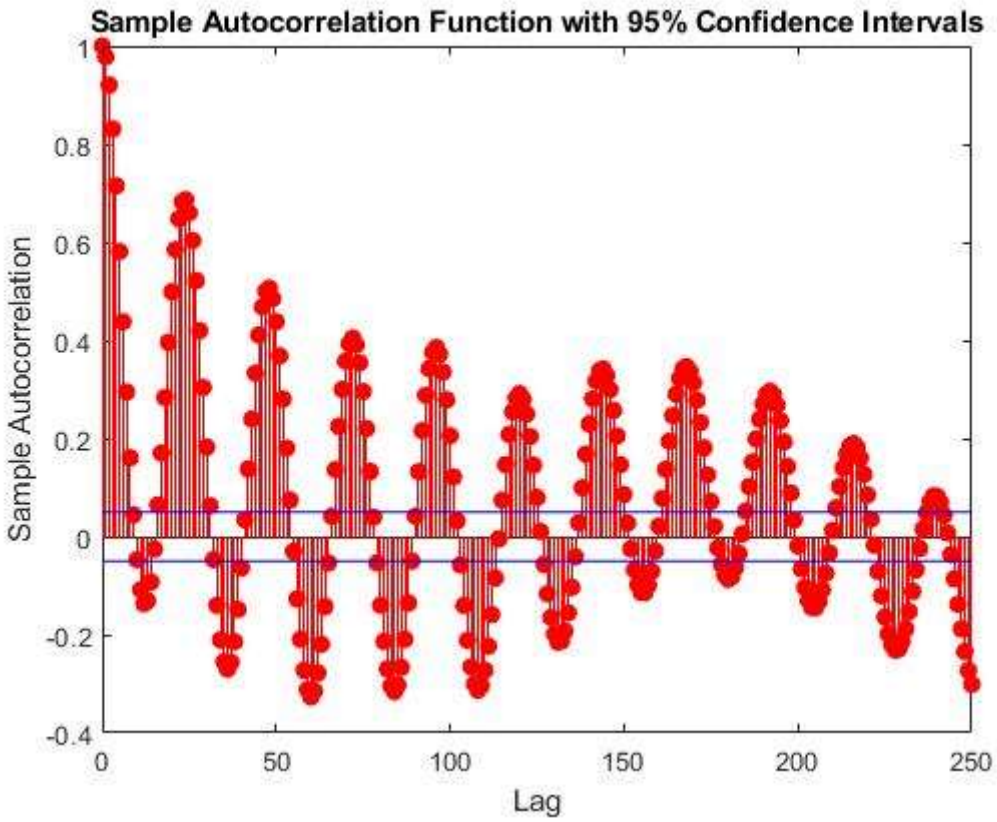

Figura 80. Resultado de la función de autocorrelación de la serie temporal de la temperatura filtrado a una frecuencia de corte de 0,09 ciclos/hora.

A continuación, comienza el proceso de identificación. Para ello se separan los datos en dos series temporales, que serán denominadas como primera y segunda quincena del mes de diciembre. Para la identificación se crearán tres tipos de modelos sobre la primera quincena de datos y se comentarán los resultados obtenidos.

Se comienza por el modelo AR con 167 regresores (ANEXO XII). Los resultados de este modelo muestran un ajuste del 69,58%, un error cuadrático medio de 0,5501 y un tiempo de cómputo de 1,3245 segundos.

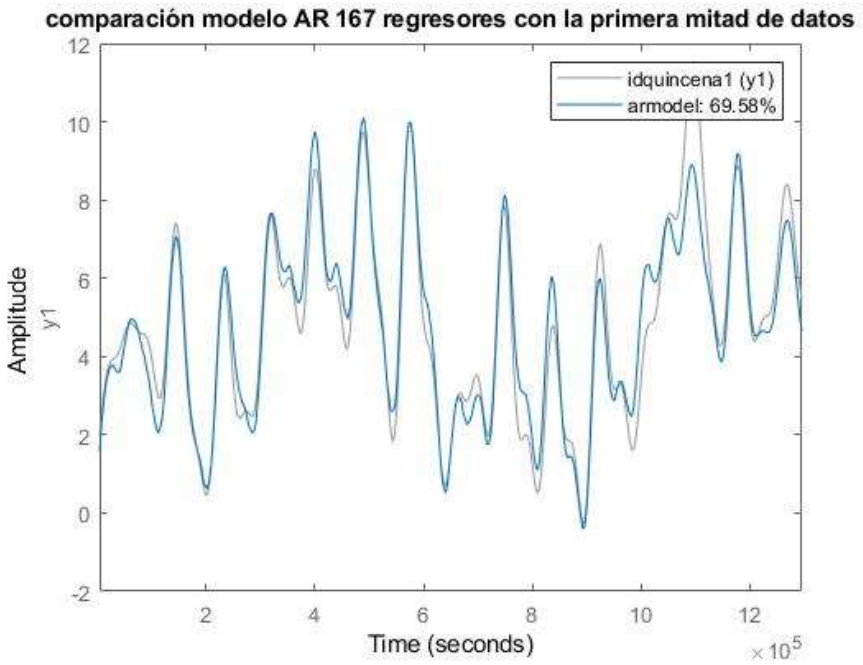

Figura 81. Comparación del modelo AR de 167 regresores calculado respecto la primera quincena de la serie temporal de temperatura filtrada a 0,09 ciclos/hora.

Se continua con el modelo ARI de 115 regresores (ANEXO XIII), ya que es el número máximo de regresores que permite la herramienta Matlab. Con este modelo se obtiene un ajuste del 46,7%, un error de 1,6890 y necesita un tiempo de cálculo de 2,8624 segundos.

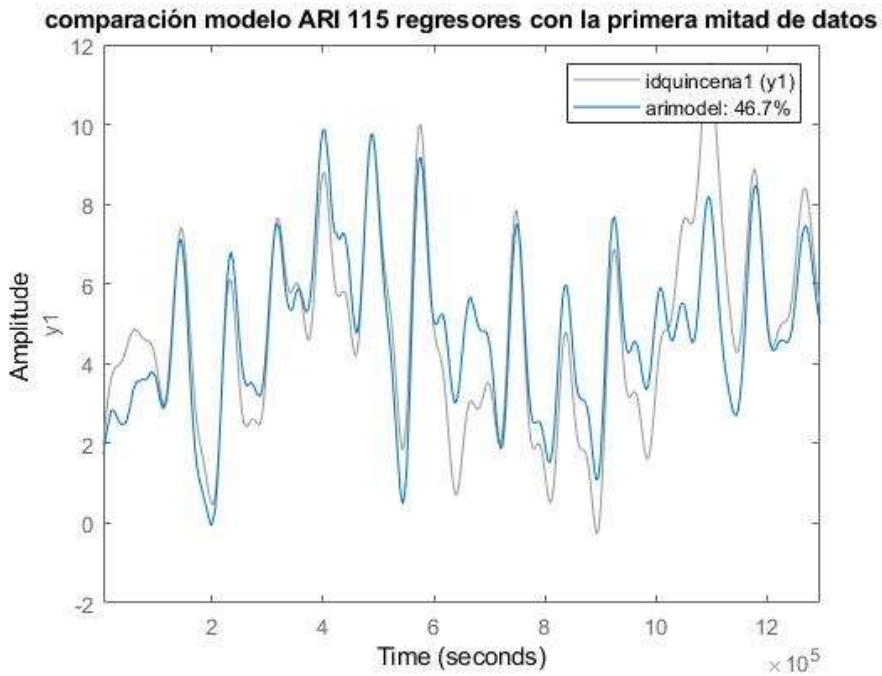

Figura 82. Comparación del modelo ARI de 115 regresores calculado respecto la primera quincena de la serie temporal de temperatura filtrada a 0,09 ciclos/hora.

Se finaliza esta parte con el modelo ARIMA de 86 regresores (ANEXO XIV). Éste genera un rendimiento de 41,94% de ajuste, MSE 2,0042 y un tiempo de cómputo igual a 2,5996 segundos.

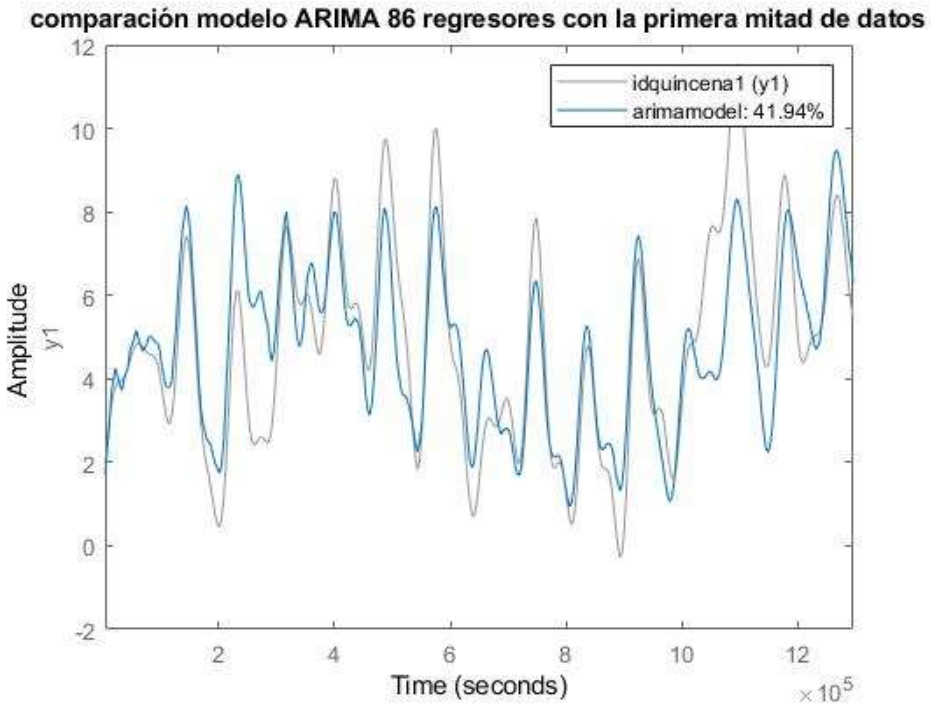

Figura 83. Comparación del modelo ARIMA de 86 regresores calculado respecto la primera quincena de la serie temporal de temperatura filtrada a 0,09 ciclos/hora.

Una vez que se ha realizado el proceso de identificación y se han calculado los distintos modelos, es momento de validarlos.

El modelo AR es el primero. Los valores de interés son de 45,89% de ajuste y un error de 2,6615.

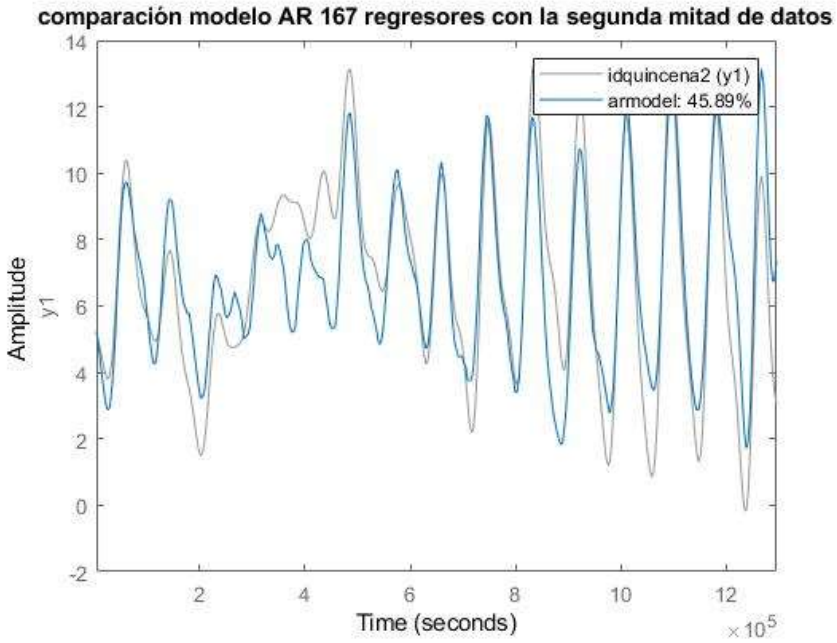

Figura 84. Comparación del modelo AR de 167 regresores calculado respecto la segunda quincena de la serie temporal de temperatura filtrada a 0,09 ciclos/hora.

El modelo ARI consta de un ajuste del 46,94% y un error MSE de 2,56.

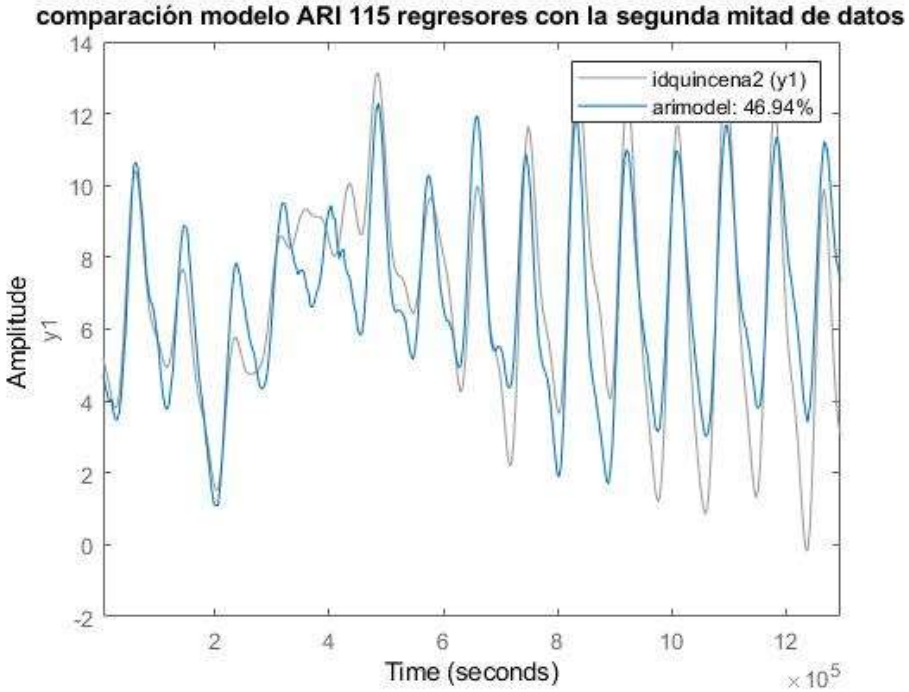

Figura 85. Comparación del modelo ARI de 115 regresores calculado respecto la segunda quincena de la serie temporal de temperatura filtrada a 0,09 ciclos/hora.

Por último, el producto del modelo ARIMA es un ajuste de 45,81% y un error cuadrático medio de 2,6702.

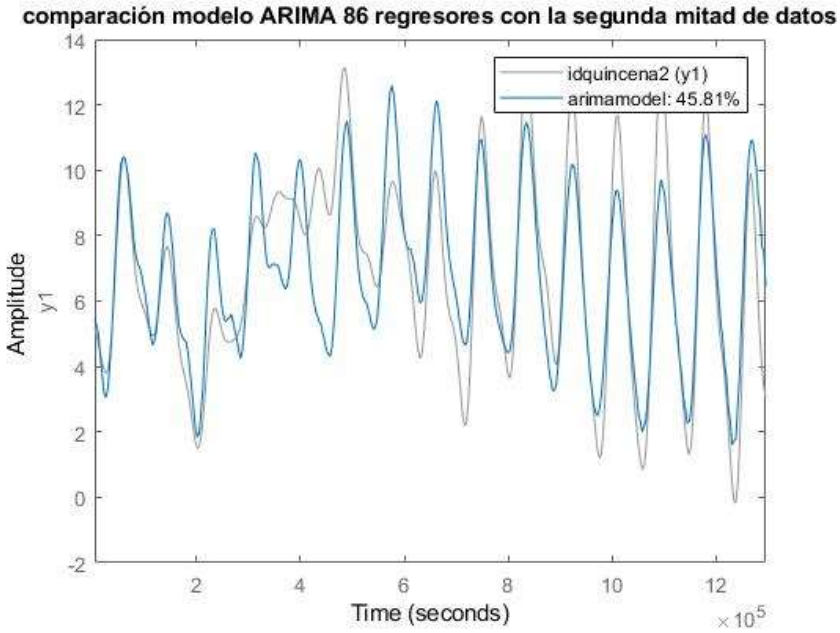

Figura 86. Comparación del modelo ARIMA de 86 regresores calculado respecto la segunda quincena de la serie temporal de temperatura filtrada a 0,09 ciclos/hora.

Modelo	Número de regresores	Tiempo de cómputo (segundos)	Identificación		Validación	
			Ajuste (%)	Error (MSE)	Ajuste (%)	Error (MSE)
AR	167	1,2467	69,58	0,5501	45,89	2,6615
ARI	115	2,8624	46,7	1,689	46,94	2,56
ARIMA	86	2,5996	41,94	2,0042	45,81	2,6702

Tabla 8. Resultados del modelado de la serie temporal de la temperatura tras haberla filtrado aplicando un filtro paso bajo a una frecuencia de 0.09 ciclos/hora.

Modelo	Número de regresores	Tiempo de cómputo (segundos)	Identificación		Validación	
			Ajuste (%)	Error (MSE)	Ajuste (%)	Error (MSE)
AR	174	1,3729	69,51	0,5731	41,51	3,221
ARI	119	2,6243	46,7	1,7514	37,7	3,6479
ARIMA	89	3,2288	36,84	2,4593	36,36	3,8057

Tabla 9. Resultados del modelado de la serie temporal original de la temperatura (réplica Tabla 1).

Del análisis de la Tabla 8 se deduce qué tras el filtrado, comparando los datos con los obtenidos en la Tabla 9 correspondiente a los datos originales sin filtrar:

- En las tres estructuras analizadas, el número de regresores y el tiempo de cómputo se reducen ligeramente.
- En la fase de identificación el ajuste de los modelos AR y ARI es prácticamente el mismo, empeorando ligeramente en el caso ARIMA.
- En las tres estructuras, el ajuste mejora ligeramente en la fase de validación, especialmente en las estructuras ARI y ARIMA.
- En definitiva, el filtrado contribuye a obtener modelos paramétricos más sencillos mejorando ligeramente el error de modelado.

Y el último paso a abordar para este conjunto de modelos es el proceso de predicción. Con el modelo AR se realiza una predicción de las siguientes 72 muestras (Figura 87), es decir, 3 días, porque a partir de esta cantidad el sistema se vuelve inestable y los resultados carecen de valor. En cuando a los modelos ARI y ARIMA, se calcula la predicción de 360 muestras (Figura 88 y 89 respectivamente). Los resultados cuantificados por franjas de cantidad de muestras se encuentran en la Tabla 10.

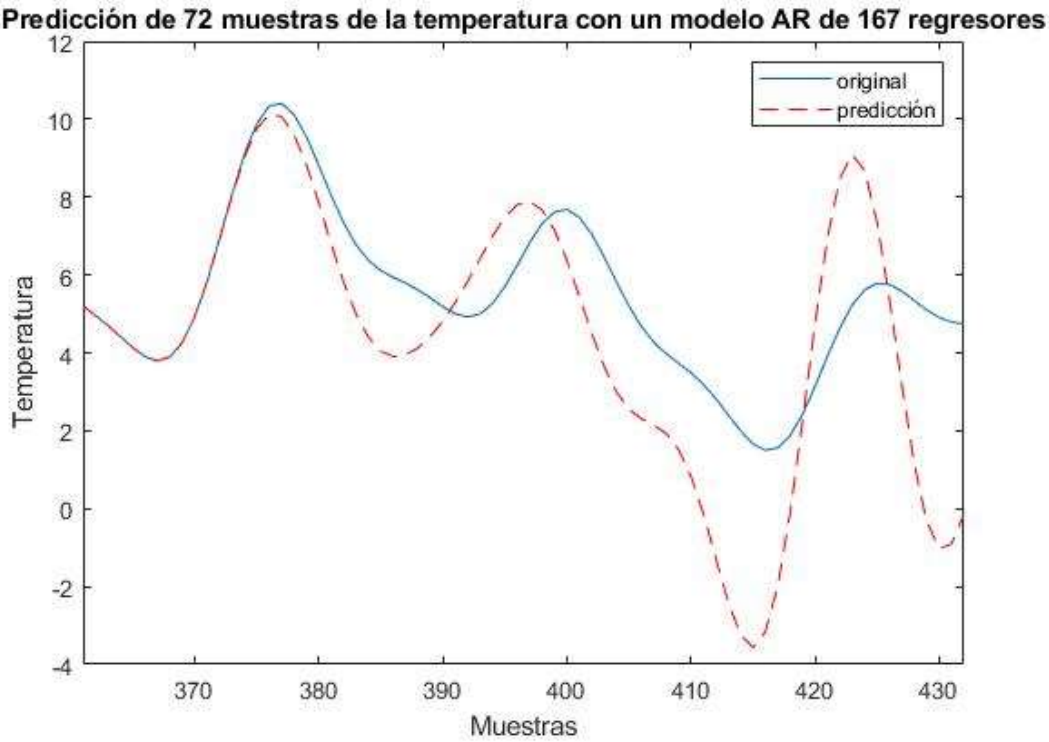

Figura 87. Representación de la predicción de las 72 muestras (3días) posteriores a la primera mitad de datos de la temperatura filtrada a 0,09 ciclos/hora, con un modelo AR de 167 regresores, junto con los datos reales.

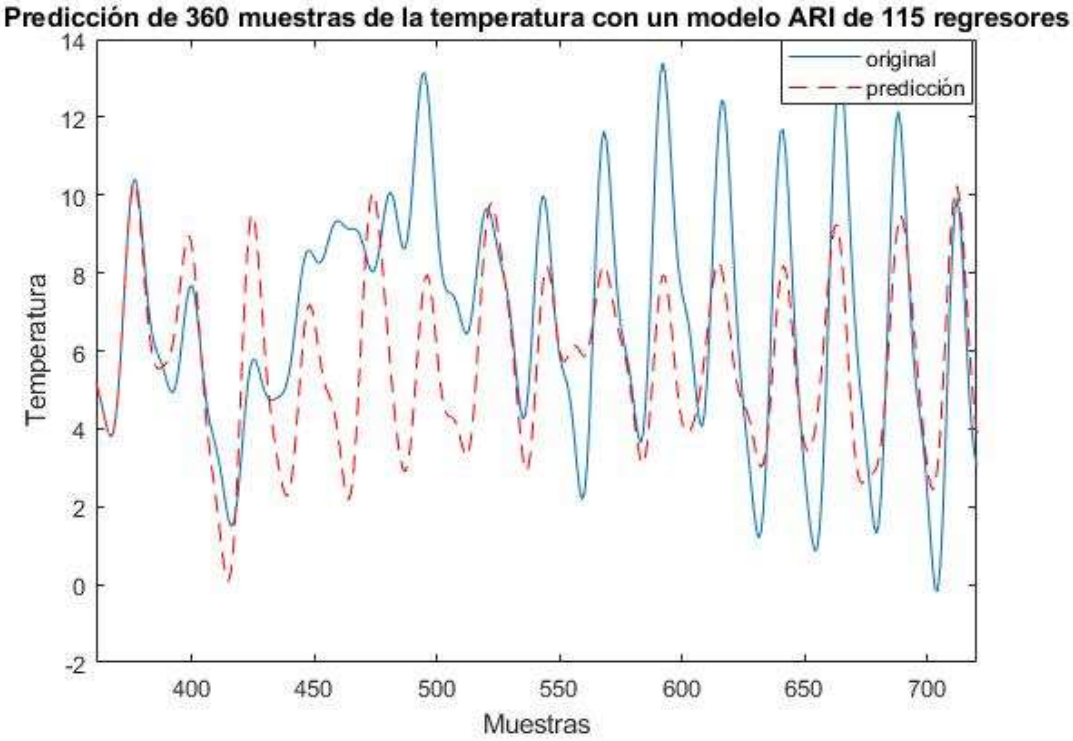

Figura 88. Representación de la predicción de las 360 muestras (2 semanas) posteriores a la primera mitad de datos de la temperatura filtrada a 0,09 ciclos/hora, con un modelo ARI de 115 regresores, junto con los datos reales.

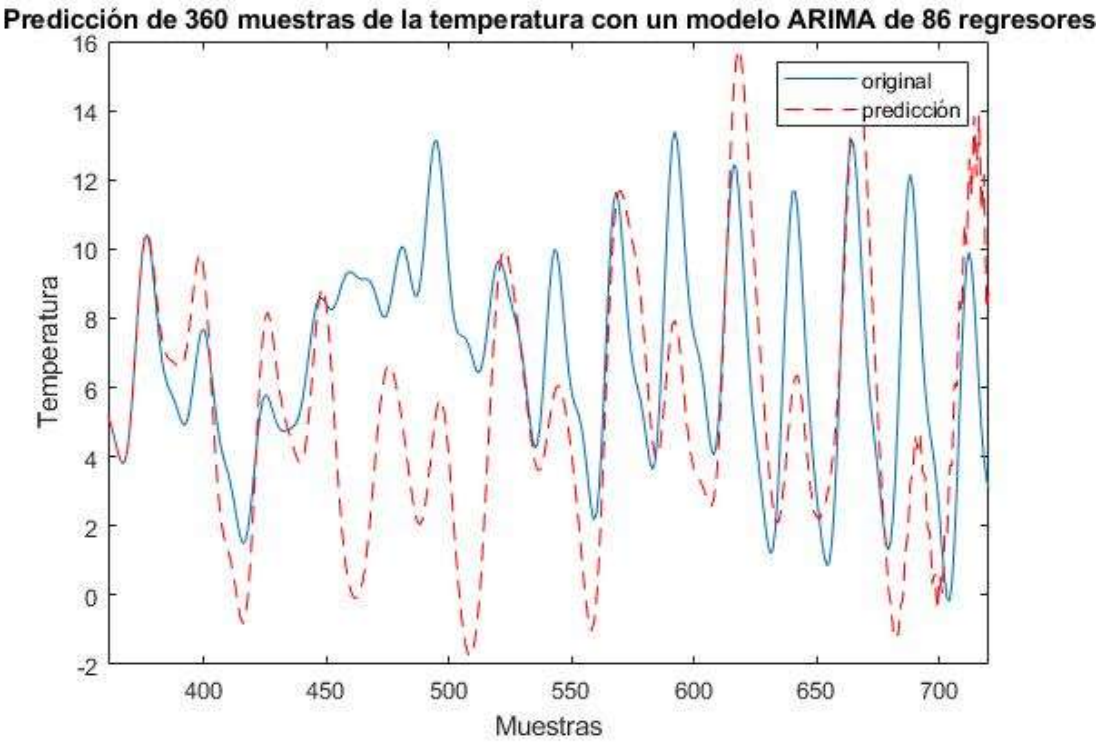

Figura 89. Representación de la predicción de las 360 muestras (2 semanas) posteriores a la primera mitad de datos de la temperatura filtrada a 0,09 ciclos/hora, con un modelo ARIMA de 86 regresores, junto con los datos reales.

Modelo	Número de regresores	Predicción de 24 muestras (1 día)		Predicción de 72 muestras (3 días)		Predicción de 180 muestras (1 semana)	
		Ajuste (%)	Error (MSE)	Ajuste (%)	Error (MSE)	Ajuste (%)	Error (MSE)
AR	167	68,1	0,5360	-19,16	6,167	-	-
ARI	115	90,97	0,043	33,63	1,913	-20,28	8,2642
ARIMA	86	89,34	0,0598	27,92	2,256	-73,09	17,115

Tabla 10. Resultados de la predicción de la serie temporal de la temperatura filtrada a 0,09 ciclos/hora a partir de los modelos calculados.

De los resultados obtenidos en la Tabla 10, destaca negativamente el modelo AR, que a priori, por los resultados obtenidos en la identificación y validación, y la cantidad de regresores que contiene era de suponer que fuera el que mejor predicción realizara; pero, en contra de lo esperado el sistema se vuelve inestable muy pronto y las predicciones dejan de tener relevancia.

- Ejemplo de aplicación: serie temporal de ozono filtrado.

En las Figuras 20 y 21, se encuentran las series temporales resultado del tratamiento de datos en el dominio de la frecuencia para el registro de la concentración de ozono. En la primera de ellas tanto las muestras resultantes como el espectro de potencia para una frecuencia de corte de 0,005 ciclos/minuto, al igual que en la siguiente, pero para una frecuencia de corte más restrictiva de 0,003 ciclos/minuto.

Una vez creadas las nuevas series temporales, se procede a su estudio para ver en qué aspectos se ha mejorado al hacer el filtrado. Comenzando por la autocorrelación, en esta parte se escoge la serie temporal resultante de aplicar el primer filtro a una frecuencia de 0,005 ciclos/minuto.

En la Figura 90, se puede ver que la autocorrelación alcanza la banda de confianza del 95% para un valor retardo de 166. Si comparamos esta gráfica con la Figura 9, correspondiente a la función de autocorrelación de la serie temporal del ozono original, no hay diferencia apreciable entre ambas. Esto se debe a que, al filtrar la señal, se elimina la parte de mayor frecuencia, es decir, la que varía rápidamente creando ruido, pero los valores significativos y representativos de la serie de observaciones siguen presentes, por lo que la correlación entre muestras debe ser similar.

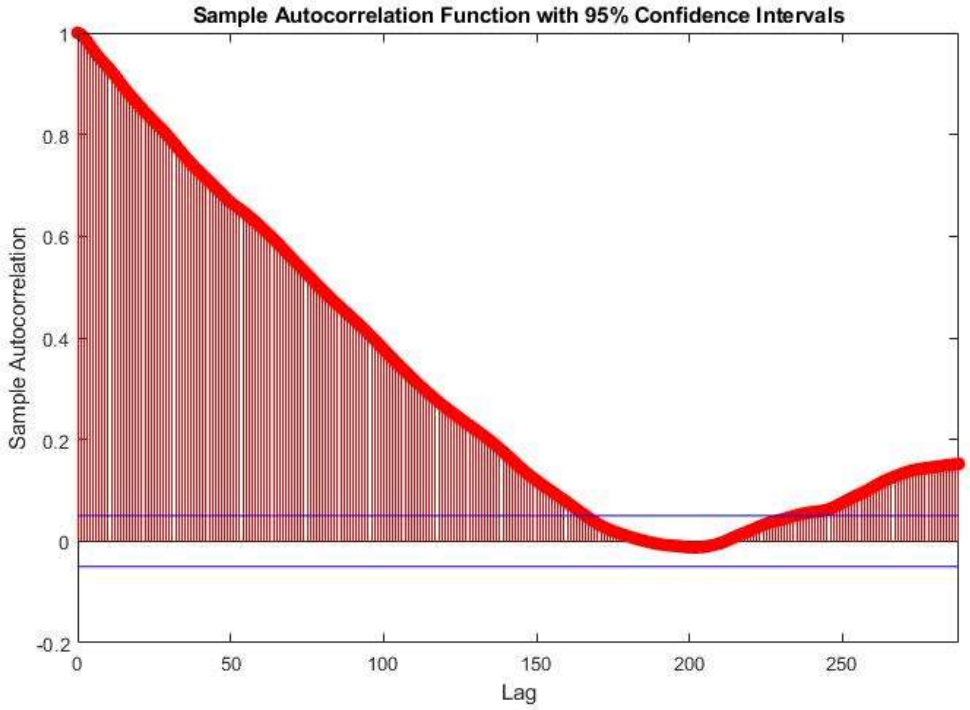

Figura 90. Resultado de la función de autocorrelación de la serie temporal del ozono filtrada a una frecuencia de 0.005 ciclos/minuto.

Otra manera de valorar los coeficientes necesarios para la creación de un modelo es evaluando la función de ajuste, que resulta de cuantificar el ajuste de un determinado modelo en función de los coeficientes utilizados, de esta manera, se puede apreciar la mejora obtenida mediante el tratamiento de datos aplicado. Tal y como se grafica a continuación para una estructura de modelo AR en las distintas series de observaciones obtenidas a partir de la concentración de ozono.

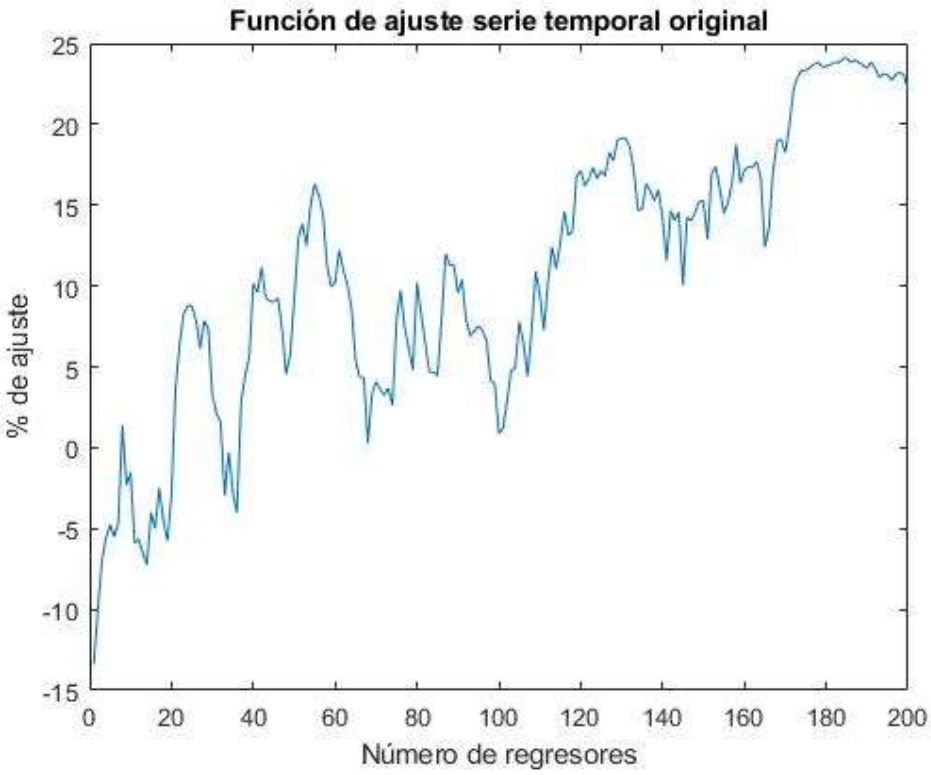

Figura 91. Función de ajuste de la serie temporal original de ozono para las distintas cantidades de regresores incluidos en el modelo AR.

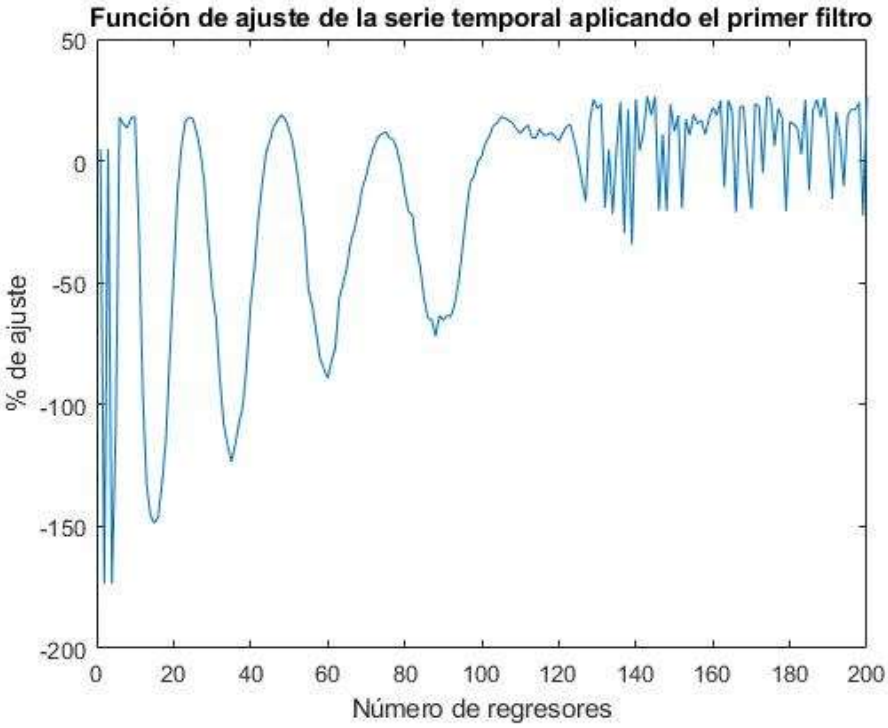

Figura 92. Función de ajuste de la serie temporal de ozono filtrada a partir de -5 dB, correspondiente a 0.005 ciclos/minuto, para las distintas cantidades de regresores incluidos en el modelo AR.

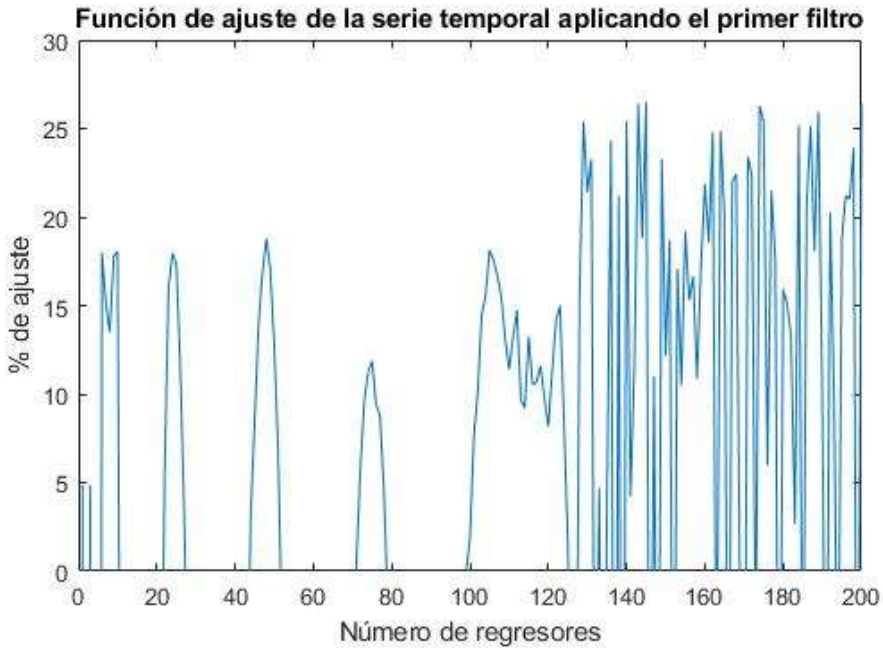

Figura 93. Ampliación de la Figura 92.

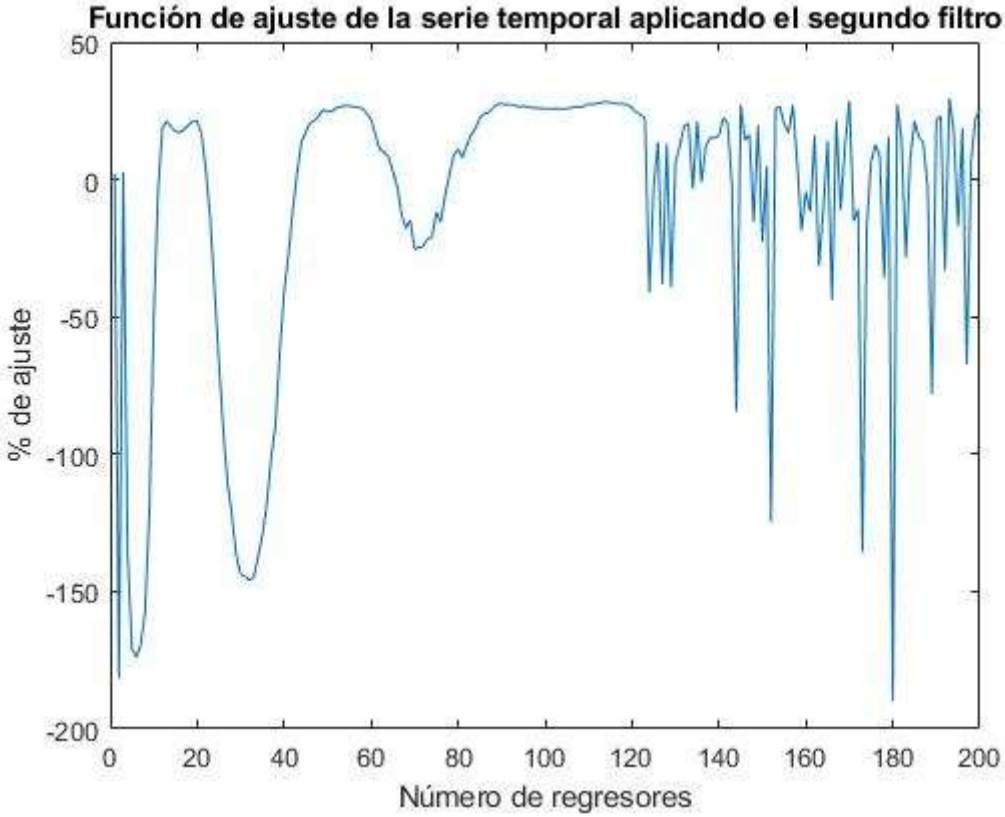

Figura 94. Función de ajuste de la serie temporal de ozono filtrada a partir de 0 dB, correspondiente a 0.003 ciclos/minuto, para las distintas cantidades de regresores incluidos en el modelo AR.

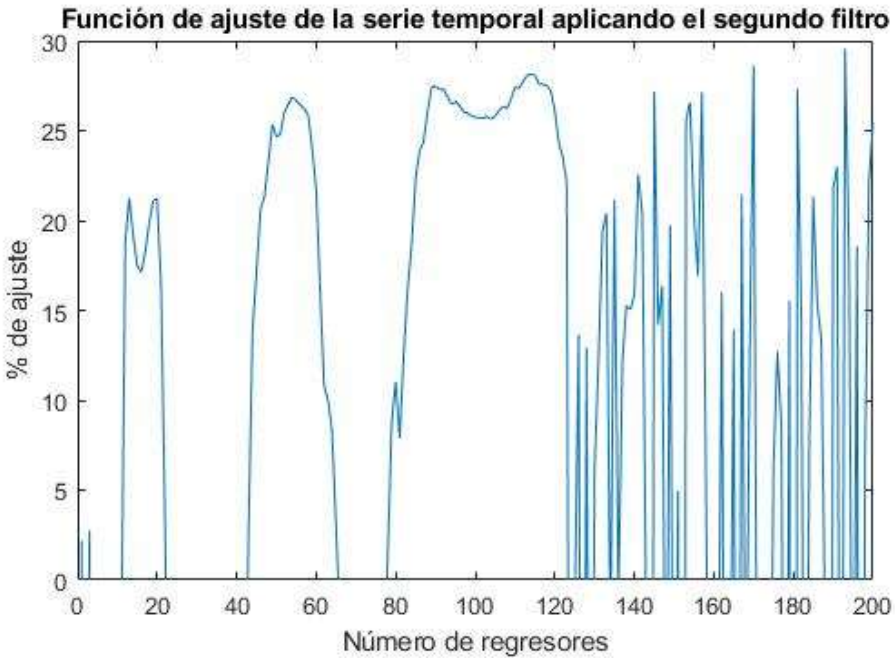

Figura 95. Ampliación de la Figura 94.

En las Figuras 91, 92 y 94, donde se representa la función de ajuste del modelo AR en función del número de regresores y para las diferentes series temporales resultantes tras realizar el filtrado. Se pretende analizar la contribución de este análisis y para qué cantidad de regresores el modelo es más eficiente.

Este nuevo estudio conduce a que, para el modelo AR, un número de regresores de 185 permitiría alcanzar un porcentaje de ajuste del 24%. Con el filtro de 0.005 ciclos/minuto, con tan solo 10 regresores se alcanza un ajuste del 18,05% y con 143 regresores se llega a un ajuste del 26,42%. Respecto el filtro de 0.003 ciclos/minuto, con 13 regresores se obtiene un ajuste del 21,24%, valor que llega a un máximo de 28,14% con 114 regresores.

En definitiva, el filtrado de la señal original permite, para una misma estructura de modelo, conseguir niveles de ajuste (a la señal filtrada) del modelo superiores con un menor número de regresores.

Modelos lineales recursivos

Para los sistemas que exhiben un comportamiento variante en el tiempo se aconseja trabajar con modelos de series temporales adaptativos, generalmente con estructura constante, pero con identificación recursiva de parámetros. [Ljung, 1999]

Los algoritmos de estimación paramétrica recursiva (on-line) actualizan los parámetros del modelo con cada nuevo valor registrado de la variable bajo estudio, tal y como indica la Figura 96 donde $\hat{y}$ representa la salida estimada a partir de los datos registrados anteriores y θ representa al vector de parámetros actualizado con la nueva información registrada. Este tipo de estimación es ideal para estimar pequeñas desviaciones en los valores de los parámetros de un sistema en un punto operativo conocido.

La actualización de los valores de los parámetros depende de su histórico y de las mediciones actuales. Por lo tanto, son eficientes en términos de uso de memoria. Además, los cálculos tienen demandas computacionales pequeñas [Simon, 2006].

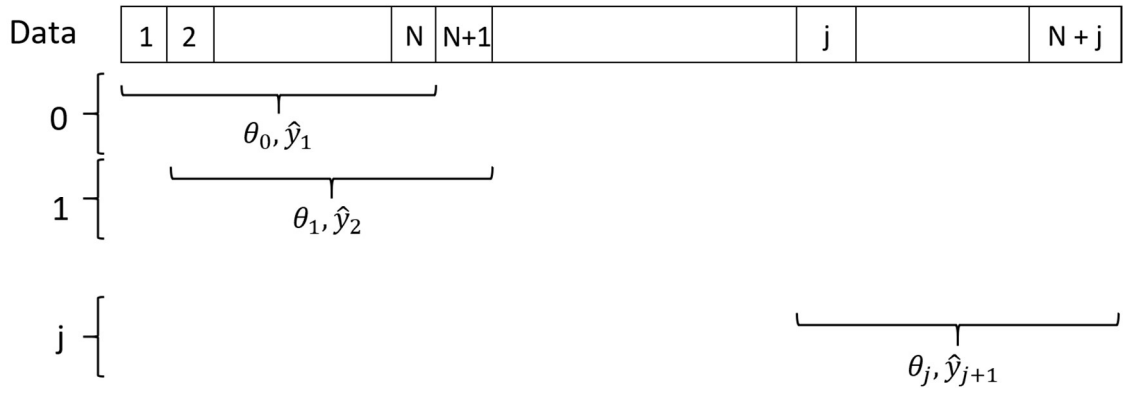

Figura 96. Esquema modelos recursivos.

A continuación, se describen dos algoritmos ampliamente utilizados en la estimación on-line:

- Filtro de Kalman

Entre las aplicaciones del Filtro de Kalman (FK) está la de estimación paramétrica y, por tanto, la de modelado de series temporales. En este caso se utiliza para la identificación recursiva del conjunto de parámetros definido para modelar la serie.

El punto de partida es el modelo de dos procesos aleatorios: parámetros θ y medida y.

$$\theta(t) = \theta(t-1) + w(t)$$

Ecuación 7

$$y(t) = \psi^T(t)\,\theta(t) + e(t)$$

Ecuación 8

Siendo

$$\mathrm{R}_1 = \mathrm{E}[\mathrm{w(t)w^T(t)}] \quad , \quad \mathrm{R}_2 = \mathrm{E}[\mathrm{e(t)e^T(t)}]$$

Ecuación 9

las matrices de covarianza de incertidumbre de parámetros w(t) y de ruido de medida e(t), representados por ruidos blancos

La estimación de la variable bajo estudio, con m parámetros y por tanto con m regresores, responde a la ecuación en diferencias

$$\begin{aligned}\hat{y}(t) &= \hat{\theta}_{1,t-1}\, y_{t-1} + \hat{\theta}_{2,t-1}\, y_{t-2} + \cdots + \hat{\theta}_{m,t-1}\, y_{t-m} \\ &= [y_{t-1}\; y_{t-2} \cdots y_{t-m}][\hat{\theta}_{1,t-1}\; \hat{\theta}_{2,t-1} \cdots\; \hat{\theta}_{m,t-1}]^T\end{aligned}$$

$$\hat{y}(t) = \psi^T(t-1)\,\hat{\theta}(t-1)$$

Ecuación 10

donde $\hat{\theta}$(t-1) representa la estimación del vector de los m parámetros del modelo en la muestra anterior a la actual y ψ(t-1) el vector de regresión que incluye el conjunto de los m datos previos de la variable a estimar y(t).

Cada nueva medida $y(t)$, el algoritmo de FK actualiza el vector de parámetros estimado $\hat{\theta}(t)$ ponderando la diferencia entre la medida y su estimación mediante la ganancia del FK $K(t)$.

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}\ (t-1) + K(t)\big(y(t) - \hat{y}(t)\big)$$

Ecuación 6

La ganancia $K(t)$, variante en el tiempo, es función del vector de regresión $\psi(t\text{-}1)$, de la matriz de covarianza del error de estimación de parámetros $P(t)$ y de la matriz de covarianza del ruido de medida R_2, según muestra la expresión

$$K(t) = \frac{P(t-1)\,\psi(t-1)}{R_2 + \psi^T(t-1)P(t-1)\psi(t-1)}$$

Ecuación 7

La matriz de covarianza del error de estimación de la variable de la serie temporal P(t) es definida positiva [Carlson, 1973] y para su actualización se utiliza la expresión:

$$P(t) = P(t-1) + R_1 - \frac{P(t-1)\psi(t-1)\psi(t-1)^T\ P(t-1)}{R_2 + \psi(t-1)^T P(t-1)\psi(t-1)}$$

Ecuación 83

La aplicación del Filtro de Kalman para modelado recursivo de series temporales asume que R2=1, por lo que R1 está normalizado con respecto a R2.

La aplicación del Filtro de Kalman requiere de la inicialización de los vectores θ(t=0) y P(t=0) [Ljung, 1999]. Esto supone que se ha de establecer una estrategia para dimensionar el tamaño del vector de parámetros, que coincide con el tamaño del vector de regresión.

- Estimación recursiva con factor de olvido.

Este algoritmo utiliza una estructura similar a la del Filtro de Kalman, pero con la novedad de incluir el parámetro λ (factor de olvido) que determina el peso de las medidas recientes frente a las más antiguas, tanto en el cálculo de la ganancia $K(t)$ como en la actualización de la matriz $P(t)$.

Así se tiene

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}\ (t-1) + K(t)(y(t) - \hat{y}(t))$$

Ecuación 94

$$\hat{y}(t) = \psi^T(t-1)\ \hat{\theta}(t-1)$$

Ecuación 105

$$K(t) = \frac{P(t-1)\psi(t-1)}{\lambda + \psi^T(t-1)P(t-1)\psi(t-1)}$$

Ecuación 116

$$P(t) = \frac{1}{\lambda}\left\{P(t-1) - \frac{P(t-1)\psi(t-1)\psi(t-1)^T\, P(t-1)}{\lambda + \psi(t-1)^T P(t-1)\psi(t-1)}\right\}$$

Ecuación 127

La ganancia K(t) minimiza la función de coste $\sum_{j=1}^{t} \lambda^{t-j}\,(y(j)-\hat{y}(j))^2$ $\sum_{j=1}^{t} \lambda^{t-j}\,(y(j)-\hat{y}(j))^2$

El horizonte de memoria $\tau = \frac{1}{1-\lambda}$ da idea de qué medidas más antiguas que τ muestras contribuyen poco (aproximadamente por debajo del 30%) a la actualización de la ganancia K, de la matriz P, y con ello al vector de parámetros $\hat{\theta}$. El factor de olvido es un escalar de rango $0 < \lambda < 1$, pero en la práctica los valores suelen estar entre 0.98 y 0.995 [Ljung, 1999], [Ljung, 2018]. Así, valores de λ próximos a la unidad contribuyen a contar con un amplio horizonte de medida, y valores de λ próximos a cero reducen significativamente dicho horizonte. Como puede comprobarse, el caso $\lambda = 1$ es equivalente al Filtro de Kalman anteriormente descrito, con R_1=0 y R_2=1.

En la práctica, el proceso a seguir para la aplicación de esta técnica se muestra en la Figura 97. La función ACF orienta la elección del horizonte de memoria, y por tanto el tamaño del vector de regresión y el del vector de parámetros. El horizonte de memoria está directamente relacionado con el factor de olvido, argumento de esta función de identificación recursiva.

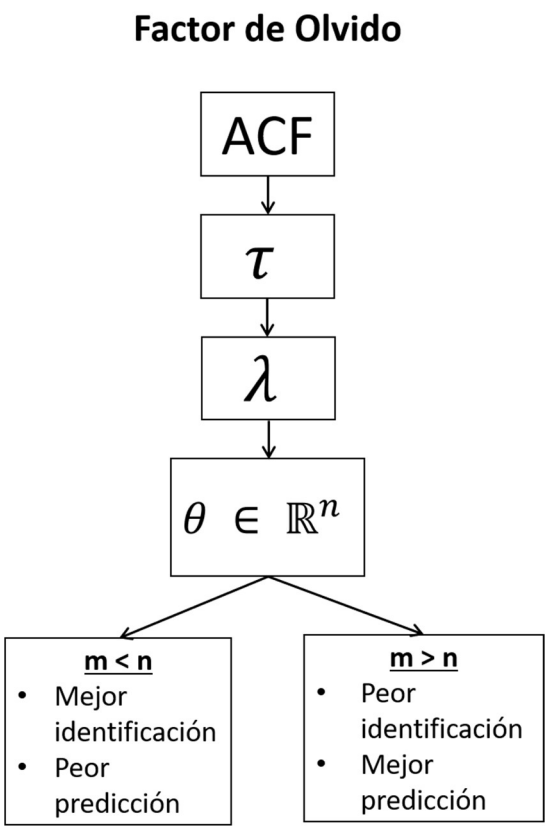

Figura 97. Esquema de la obtención de la dimensión m del vector de parámetros para los modelos recursivos con factor de olvido.

- Ejemplo de aplicación: serie temporal de temperatura.

En este apartado, se procede al estudio de la serie temporal con las muestras de la temperatura durante el mes de diciembre de 2019 en la ciudad de Madrid, usada en casos anteriores. Al tratarse de un análisis con modelos recursivos, y el modelo estar actualizándose constantemente con cada dato entrante, en este caso solo se realiza el apartado de identificación.

Al comenzar este estudio se pretende demostrar las diferencias que se obtienen en la aplicación de los distintos factores de olvido, para ello, se escogen ambos extremos, 0,98 y 0,995. Para seleccionar el pertinente número de regresores en cada factor de olvido, se utiliza la función de porcentaje de ajuste

Se comienza utilizando el algoritmo del factor de olvido, estableciendo como factor de olvido el valor 0.98, el mínimo recomendado; de modo que el sistema tiene un horizonte de memoria de 50 muestras. Obteniéndose la Figura 98, donde se puede ver que el ajuste alcanza su máximo valor para 21 regresores, y que a partir de 25 el ajuste sigue un decremento progresivo.

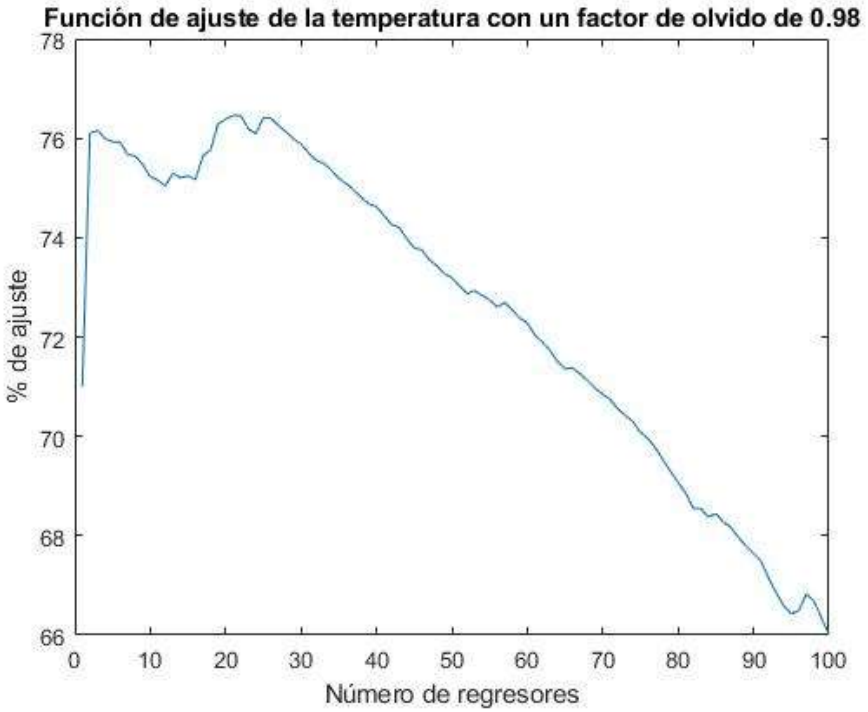

Figura 98. Función de ajuste de la serie temporal de la temperatura utilizando el algoritmo de factor de olvido, con un valor de 0.98.

A continuación, se calcula el modelo lineal recursivo de 21 regresores, representado en la Figura 99. Con el cual se obtienen unos resultados de 76,46% de ajuste, un error cuadrático medio de 0,4924, y un tiempo de cálculo de 0,1228 segundos.

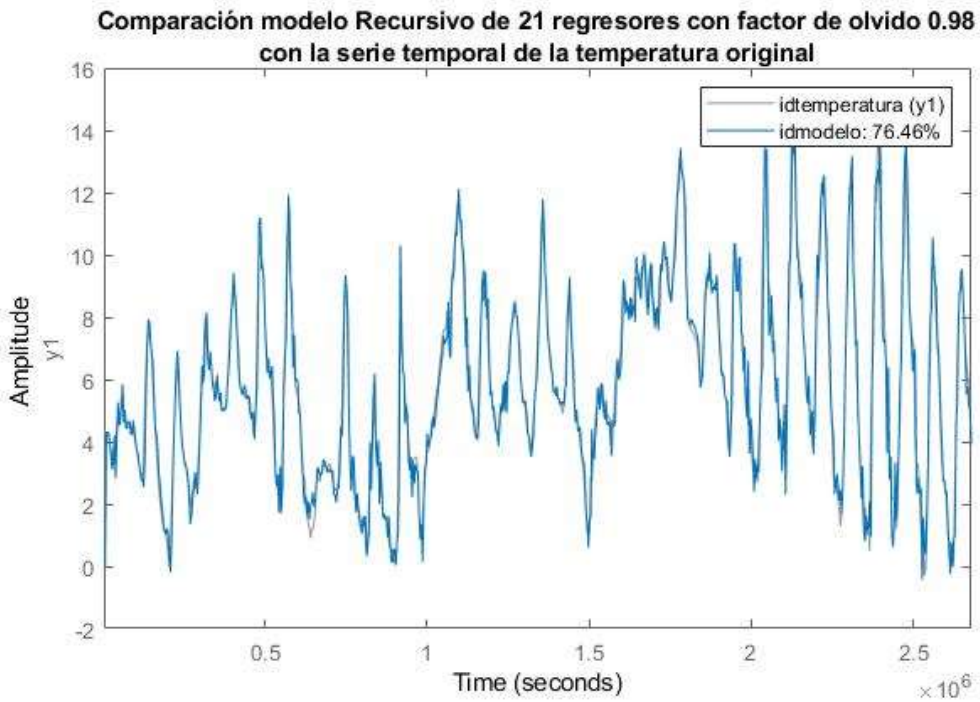

Figura 99. Representación de la comparación temporal del modelo Recursivo con 21 regresores y factor de olvido 0.98 con la serie temporal de la temperatura de origen.

Se prosigue utilizando el máximo valor aconsejable del factor de olvido, 0,995; fijando este valor se obtiene un horizonte de memoria de 200 muestras. En la Figura 100 se representan los resultados de la función de ajuste para esta investigación, en la que se aprecia que el máximo ajuste del modelo se produce para un total de 25 regresores.

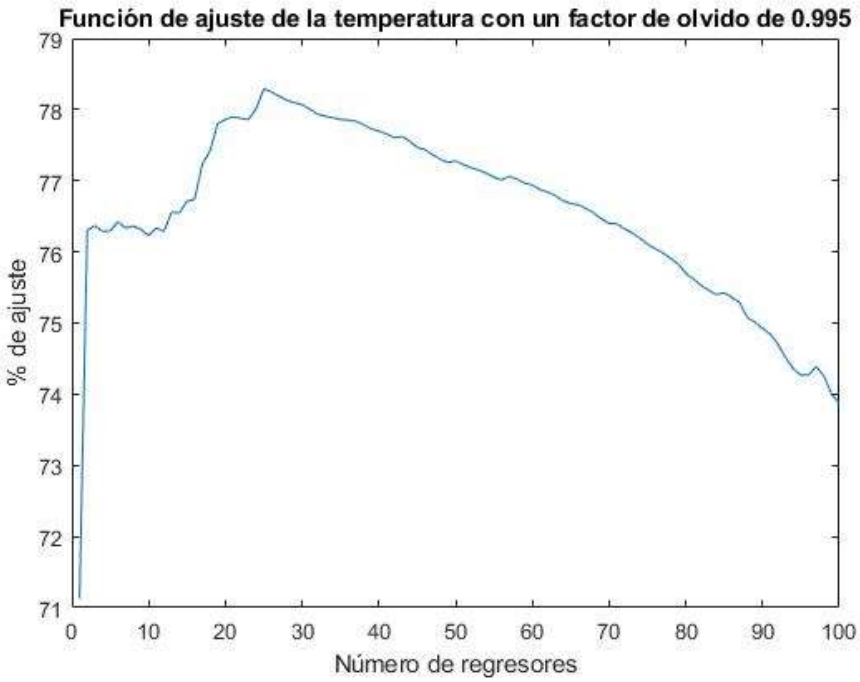

Figura 100. Función de ajuste de la serie temporal de la temperatura utilizando el algoritmo de factor de olvido, con un valor de 0.995.

Una vez que se sabe la cantidad de regresores a utilizar, se crea el modelo, representado en la Figura 101. El rendimiento generado es de 78,29% en cuanto al ajuste, un error MSE de 0,4188, y un tiempo de cómputo necesario de 0,1233 segundos.

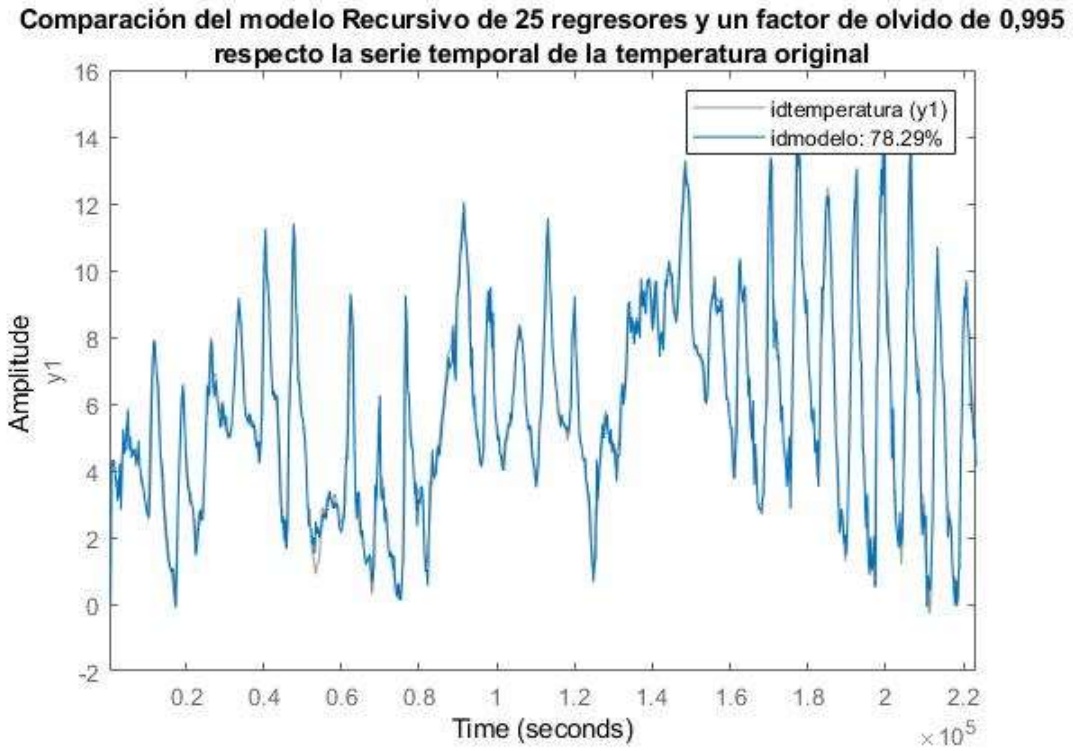

Figura 101. Representación de la comparación temporal del modelo Recursivo con 25 regresores y factor de olvido 0.995 con la serie temporal de la temperatura de origen.

Una vez que se ha estudiado la aplicación de distintos factores de olvido y se han realizado las diferentes demostraciones, se realiza la propuesta para establecer el tamaño del vector de regresores en modelos recursivos mediante factor de olvido. Tal y como se calculó en la Figura 7, la función de autocorrelación de esta serie temporal indica una dimensión de 174 regresores, lo que equivale a un horizonte de memoria $\tau = 174$. A partir de esto, se puede obtener el factor de olvido correspondiente que es $\lambda = 0{,}99425$. Este estudio concluye que es necesario un modelo recursivo con unas especificaciones de 0,99425 de factor de olvido y una cantidad de regresores de 174, obteniéndose en el proceso de identificación un ajuste de 65,7%, un error cuadrático medio de 1,0457 y un tiempo de cómputo de 0,3024 segundos.

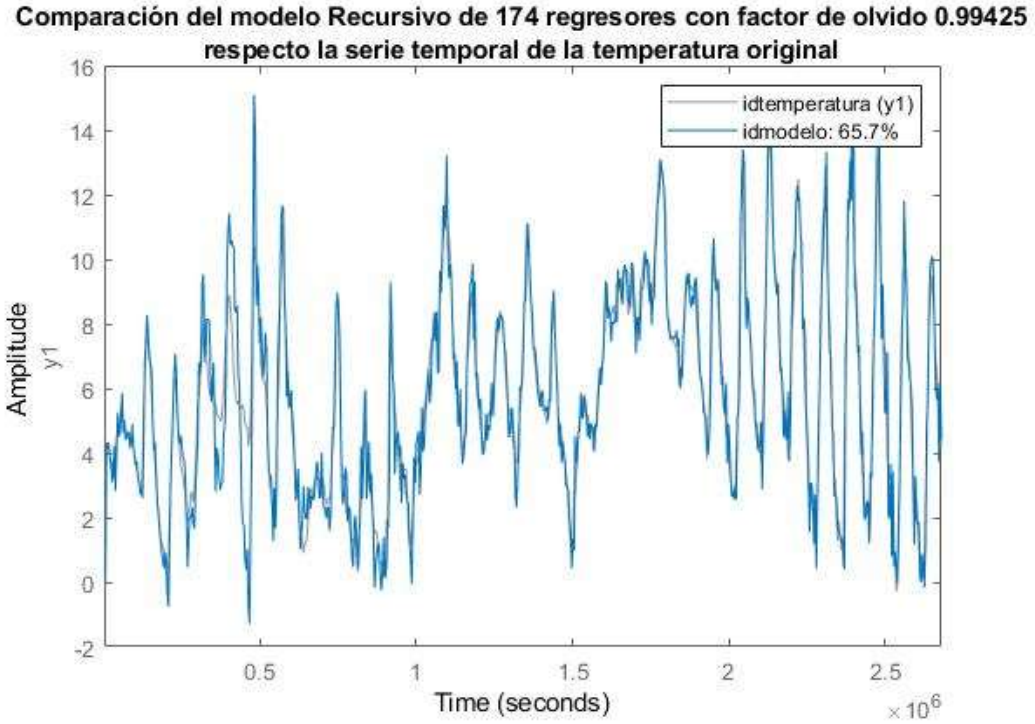

Figura 102. Representación de la comparación temporal del modelo Recursivo con 174 regresores y factor de olvido 0.99425 con la serie temporal de la temperatura de origen.

Se finaliza el análisis de este ejemplo de datos sobre la temperatura de Madrid con el uso del algoritmo de la función de Kalman. Siguiendo la pauta de Matlab, se asigna el valor unitario a la matriz de covarianza de residuos R2. Entonces, es conveniente evaluar el efecto para diferentes valores de R1, en este caso se ensaya: R1=R2, R1=R2/100, y R1=R2*100.

Se comienza con la relación R1=R2; el resultado de la función de ajuste para diferente número de regresores se muestra en la Figura 103, observándose que se alcanza el máximo ajuste para un total de 26 coeficientes.

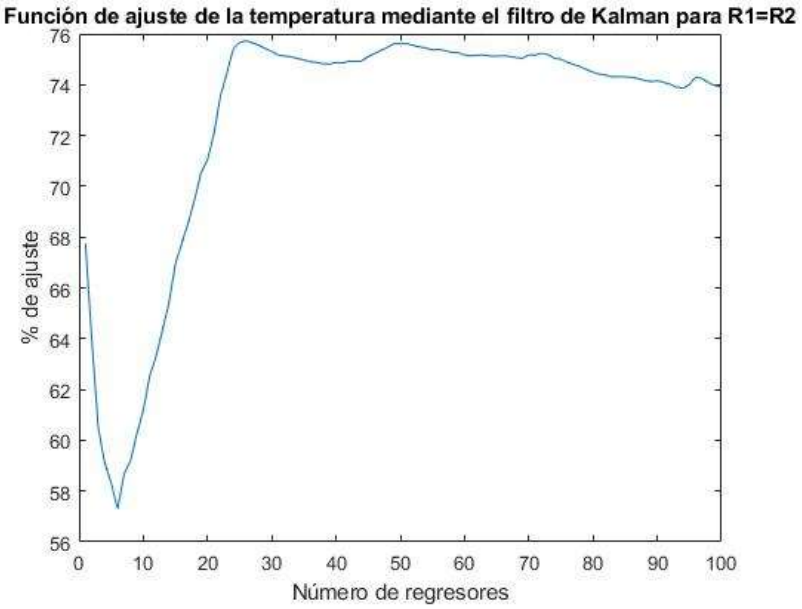

Figura 103. Función de ajuste de la serie temporal de la temperatura utilizando el algoritmo del filtro de Kalman para R1=R2.

Se calcula el modelo recursivo para 26 regresores mediante el filtro de Kalman con R1=R2, y el producto es: un ajuste del 75,73%, un MSE igual a 0,5234 y un tiempo de ejecución de 0,1509 segundos.

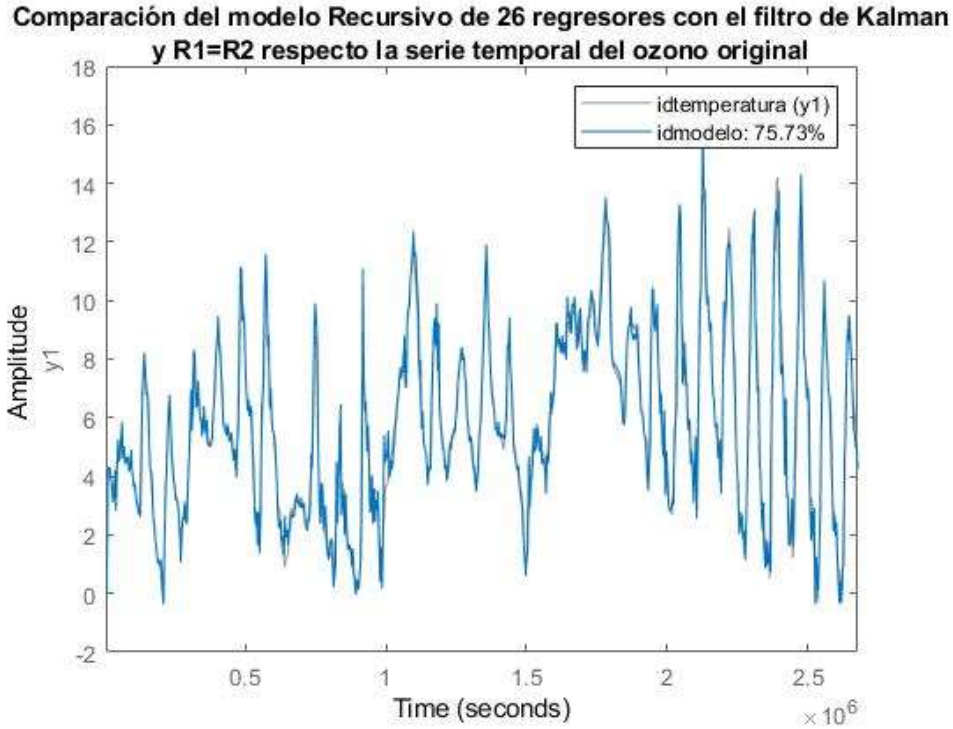

Figura 104. Representación de la comparación temporal del modelo Recursivo con 26 regresores mediante el filtro de Kalman con R1=R2 respecto la serie temporal de la temperatura de origen.

La siguiente relación para analizar con el filtro de Kalman es para R1=R2/100. El cálculo de la función de ajuste se indica en la Figura 105, en la cual, el número de regresores óptimo es de 26.

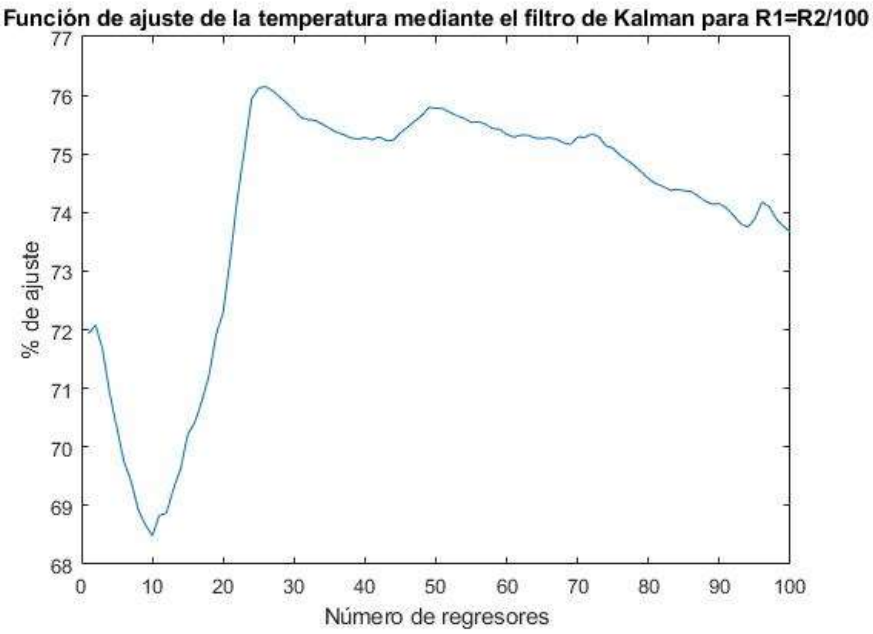

Figura 105. Función de ajuste de la serie temporal de la temperatura utilizando el algoritmo del filtro de Kalman para R1=R2/100.

El resultado del modelo recursivo obtenido para estas especificaciones es de 76,15% de ajuste, un error cuadrático medio igual a 0,5056 y el tiempo de cálculo es de 0,1585 segundos.

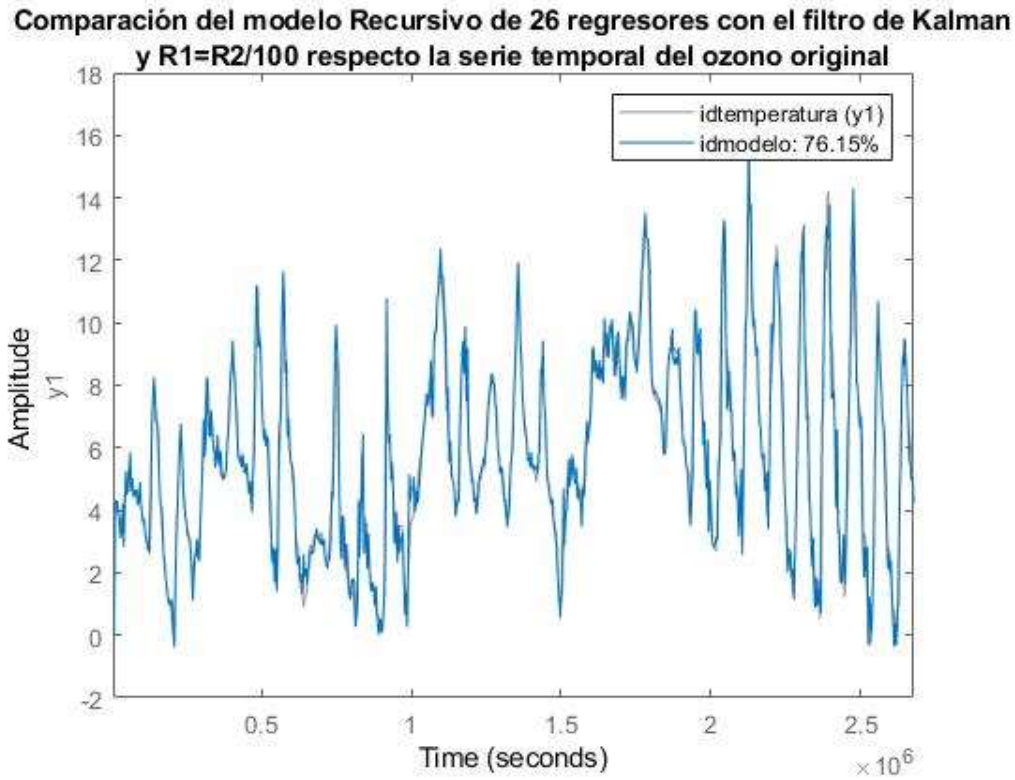

Figura 106. Representación de la comparación temporal del modelo Recursivo con 26 regresores mediante el filtro de Kalman con R1=R2/100 respecto la serie temporal de la temperatura de origen.

Y, por último, el modelo recursivo mediante el filtro de Kalman con una relación de R1=100*R2. La función de ajuste obtenida para este caso se encuentra en la Figura 107, donde se indica que el máximo ajuste es para 26 regresores.

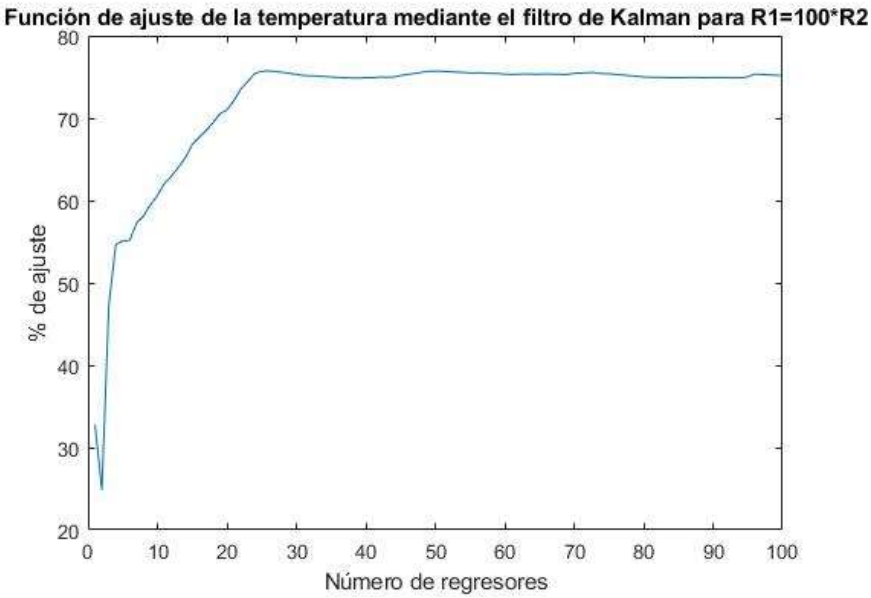

*Figura 107. Función de ajuste de la serie temporal de la temperatura utilizando el algoritmo del filtro de Kalman para R1=R2*100.*

Se calcula el modelo recursivo con el algoritmo del filtro de Kalman para R1=100*R2, produciendo un ajuste de 75,74%, un MSE de 0,5231 y un tiempo de cómputo igual a 0,1694 segundos.

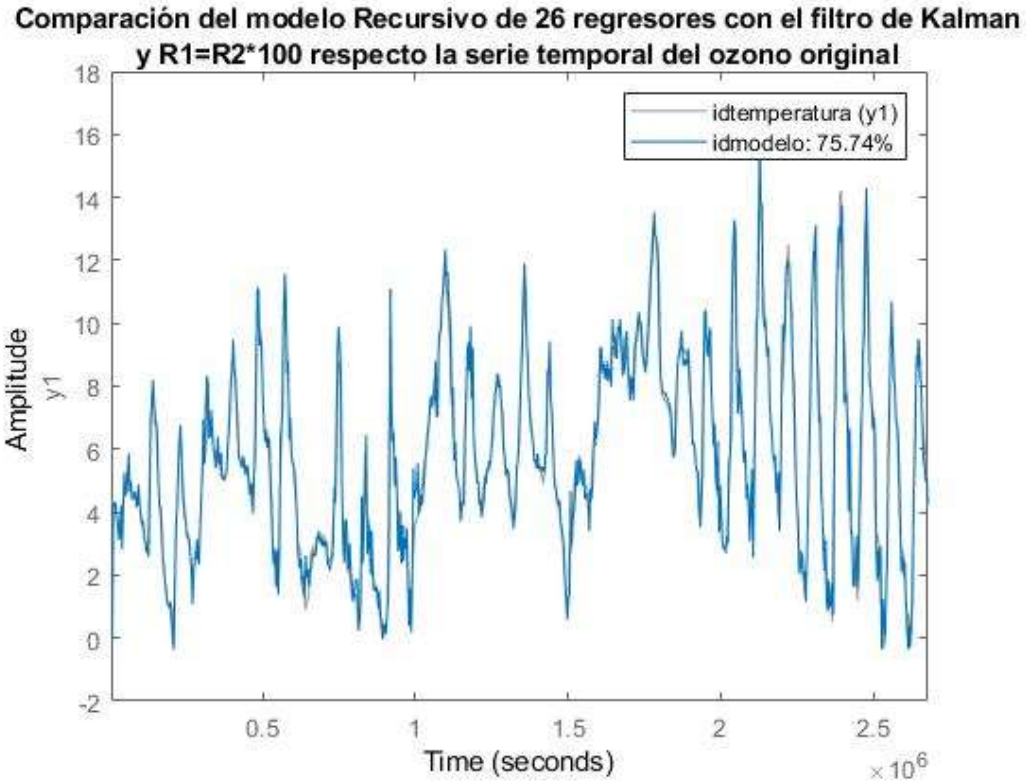

*Figura 108. Representación de la comparación temporal del modelo Recursivo con 26 regresores mediante el filtro de Kalman con R1=R2*100 respecto la serie temporal de la temperatura de origen.*

Algoritmo	Número de regresores	Tiempo de cómputo (segundos)	Porcentaje de ajuste (%)	Error (MSE)
Factor de olvido 0,98	21	0,1228	76,46	0,4924
Factor de olvido 0,995	25	0,1233	78,29	0,4188
Factor de olvido 0,99425	174	0,3024	65,7	1,0457
Filtro de Kalman (R1=R2)	26	0,1509	75,73	0,5234
Filtro de Kalman (R1=R2/100)	26	0,1585	76,15	0,5056
Filtro de Kalman (R1=100*R2)	26	0,1694	75,74	0,5231

Tabla 11. Resultados del modelado recursivo de la serie temporal de la temperatura.

En la Tabla 11 se representan los resultados cuantitativos en el proceso de identificación de los modelos recursivos. Las cifras obtenidas con este tipo de modelado son, en general, altos niveles

de ajuste y poco error acumulado, reduciendo considerablemente la cantidad de regresores a utilizar y con ello el tiempo de cómputo necesario. Destaca el modelo con factor de olvido 0,995, necesitando únicamente 21 regresores para el cual un ajuste del 78,29%. Por otro lado, el modelo propuesto con 174 regresores tiene un ajuste ligeramente inferior al resto, con 65,7% de ajuste, como era de esperar al tener tanta cantidad de regresores, pero esta disminución de precisión en la identificación se espera compensar con una mejor predicción.

Para finalizar este proceso, se exponen en las siguientes figuras las propias predicciones obtenidas de cada uno de los modelos recursivos calculados, para un total de 180 muestras, lo que corresponde aproximadamente a una semana. Esta predicción se calcula sobre los últimos 180 datos a partir de todos los anteriores y se muestran los valores reales medidos correspondientes para analizar sus diferencias. Y en la Tabla 12 se desarrolla de manera cuantitativa los resultados obtenidos en cada una de las predicciones en la aplicación de los distintos modelos recursivos.

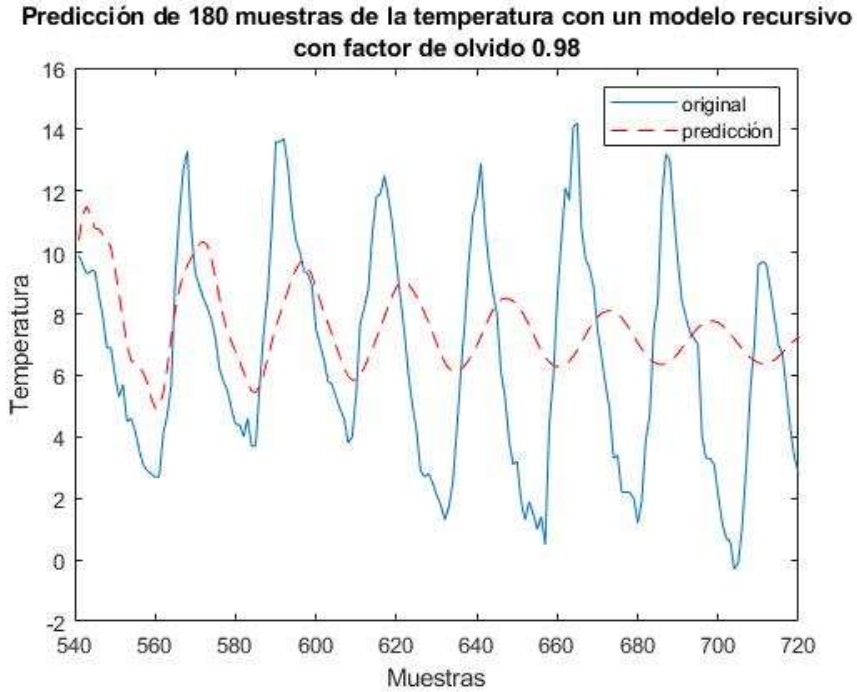

Figura 109. Representación de la predicción de las últimas 180 muestras de la serie de la temperatura, correspondiente a 1 semana, con un modelo recursivo de 21 regresores con factor de olvido 0.98, junto con los datos de la serie original.

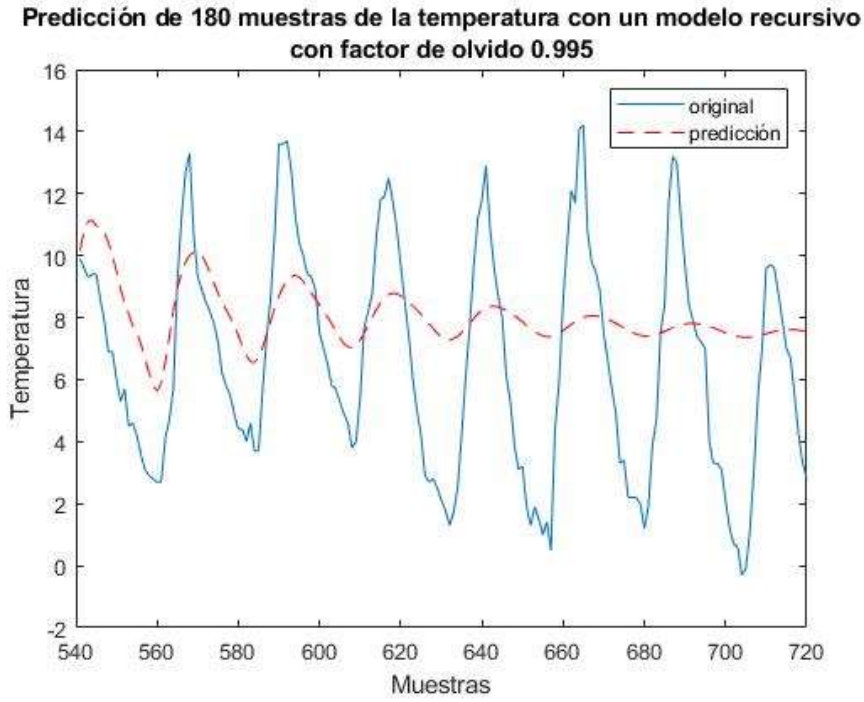

Figura 110. Representación de la predicción de las últimas 180 muestras de la serie de la temperatura, correspondiente a 1 semana, con un modelo recursivo de 25 regresores con factor de olvido 0.995, junto con los datos de la serie original.

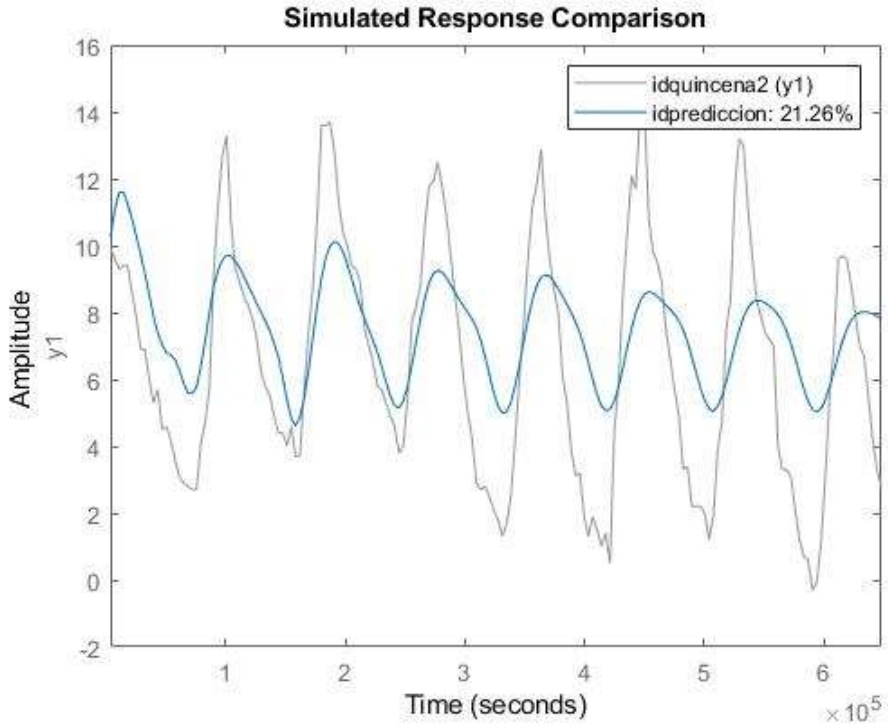

Figura 111. Representación de la predicción de las últimas 180 muestras de la serie de la temperatura, correspondiente a 1 semana, con un modelo recursivo de 174 regresores con factor de olvido 0.99425, junto con los datos de la serie original.

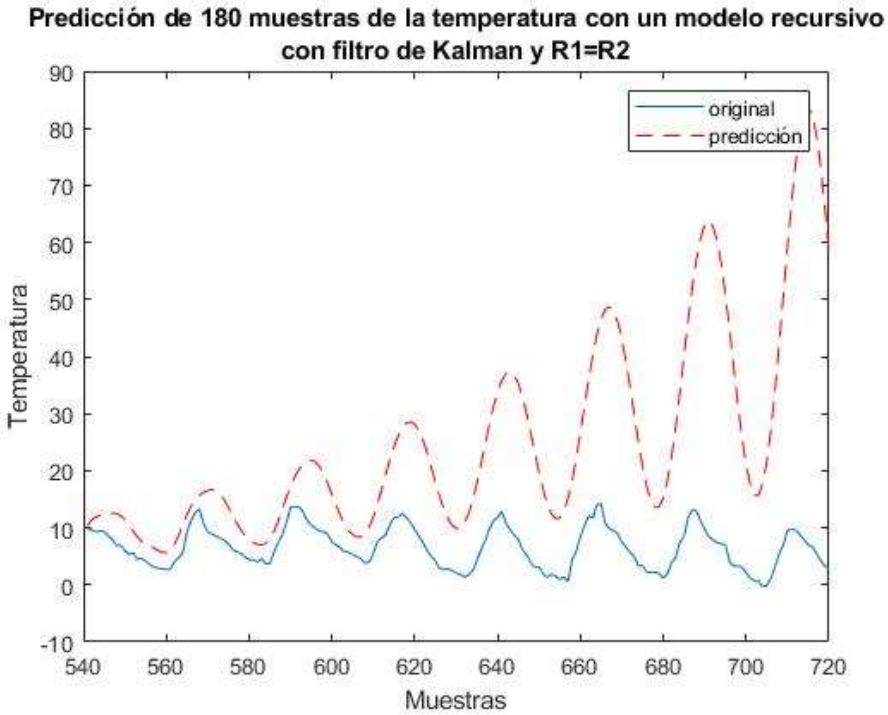

Figura 112. Representación de la predicción de las últimas 180 muestras de la serie de la temperatura, correspondiente a 1 semana, con un modelo recursivo de 26 regresores con filtro de Kalman y R1=R2 junto con los datos de la serie original.

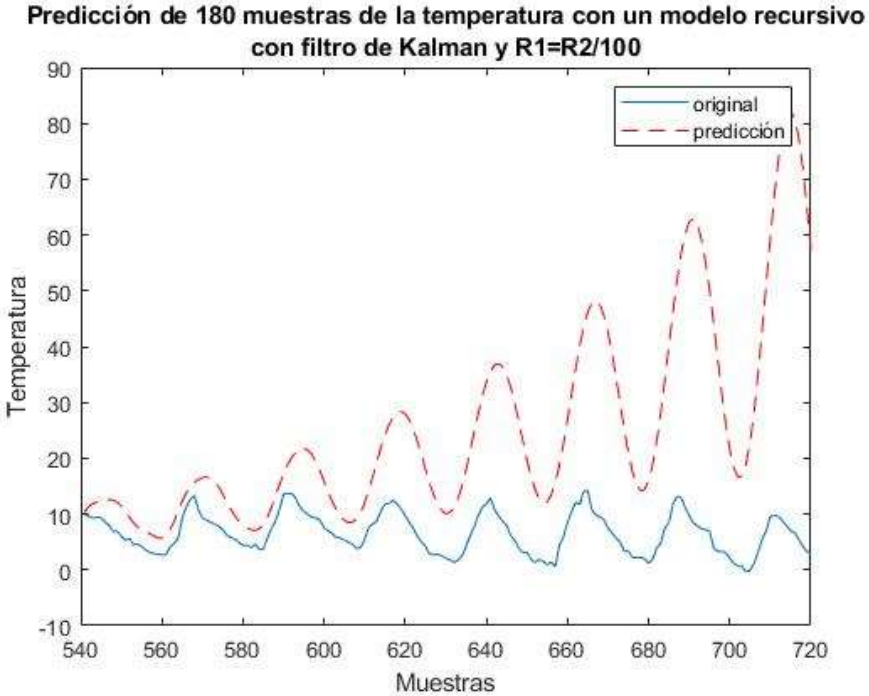

Figura 113. Representación de la predicción de las últimas 180 muestras de la serie de la temperatura, correspondiente a 1 semana, con un modelo recursivo de 26 regresores con filtro de Kalman y R1=R2/100 junto con los datos de la serie original.

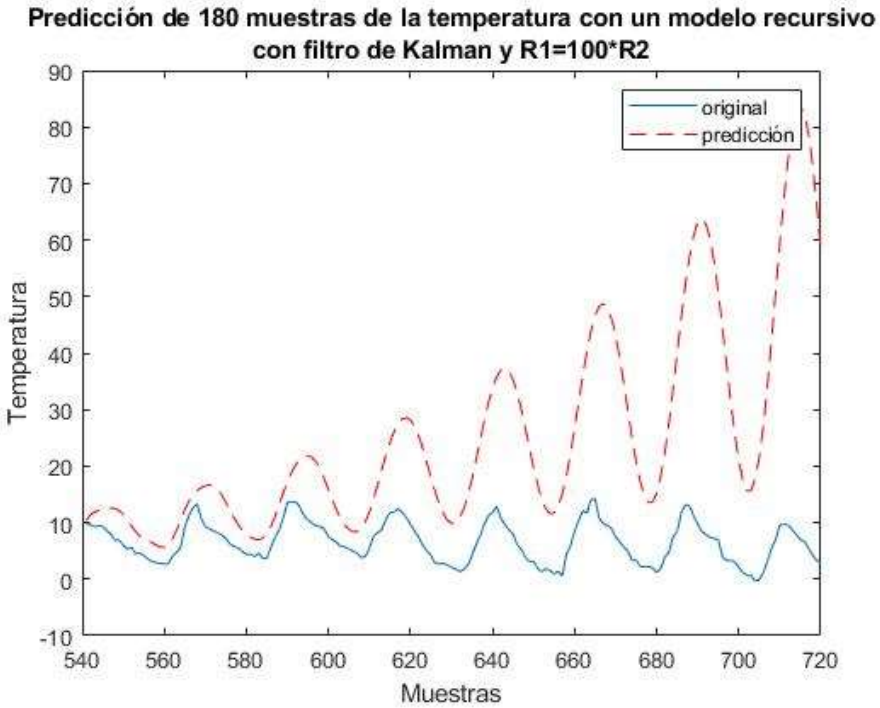

*Figura 114. Representación de la predicción de las últimas 180 muestras de la serie de la temperatura, correspondiente a 1 semana, con un modelo recursivo de 26 regresores con filtro de Kalman y R1=100*R2 junto con los datos de la serie original.*

Modelo	Número de regresores	Predicción de 24 muestras (1 día)		Predicción de 72 muestras (3 días)		Predicción de 180 muestras (1 semana)	
		Ajuste (%)	Error (MSE)	Ajuste (%)	Error (MSE)	Ajuste (%)	Error (MSE)
Factor de olvido 0.98	21	1,9	5,7293	20,09	5,6016	-0,60	12,874
Factor de olvido 0.995	25	-17,18	8,1739	16,27	6,14	2,808	12,01
Factor de olvido 0,99425	174	-0,21	5,9784	33,11	3,9234	21,26	7,8866
Filtro de Kalman R1=R2	26	-52,03	13,76	-87,82	30,94	-615,5	651,14
Filtro de Kalman R1=R2/100	26	-52,05	13,7643	-87,63	30,88	-610,1	641,37
Filtro de Kalman R1=100*R2	26	-52,03	13,7604	-87,82	30,94	-615,6	651,33

Tabla 12. Resultados de la predicción de la serie temporal de la temperatura a partir de los modelos recursivos calculados.

En vista de los resultados obtenidos, se aprecia que en los modelos que se aplica el filtro de Kalman, con 26 parámetros, la predicción se distancia rápidamente de los datos medidos. Con la técnica del factor de olvido, se tiene mejor resultado en la predicción, en especial, el modelo

propuesto con 174 regresores y factor de olvido 0,99425 en el cual se llega a conseguir un ajuste del 33,11% para un periodo de tiempo de 3 días. Con este resultado, se comprueba que haber incluido más parámetros en el modelo no mejora los resultados de identificación, pero si los de predicción. Respecto los resultados para la predicción de un día, resultan peores que para una semana, lo que puede deberse a la mayor influencia de las condiciones iniciales y la tendencia en los primeros datos de la predicción.

- Ejemplo de aplicación: serie temporal de ozono.

Se procede en este ejemplo mediante la misma metodología que en el ejemplo anterior de la temperatura. Se comienza con el algoritmo del factor de olvido con un valor de 0.98, y el estudio de la función de ajuste, representada en la Figura 115. Donde se ve, que, al tratarse de una consecución de muestras con un comportamiento muy cambiante y no lineal, el ajuste disminuye en todo momento con el aumento de regresores que la modelan. Por ello, el mejor ajuste es para un solo regresor.

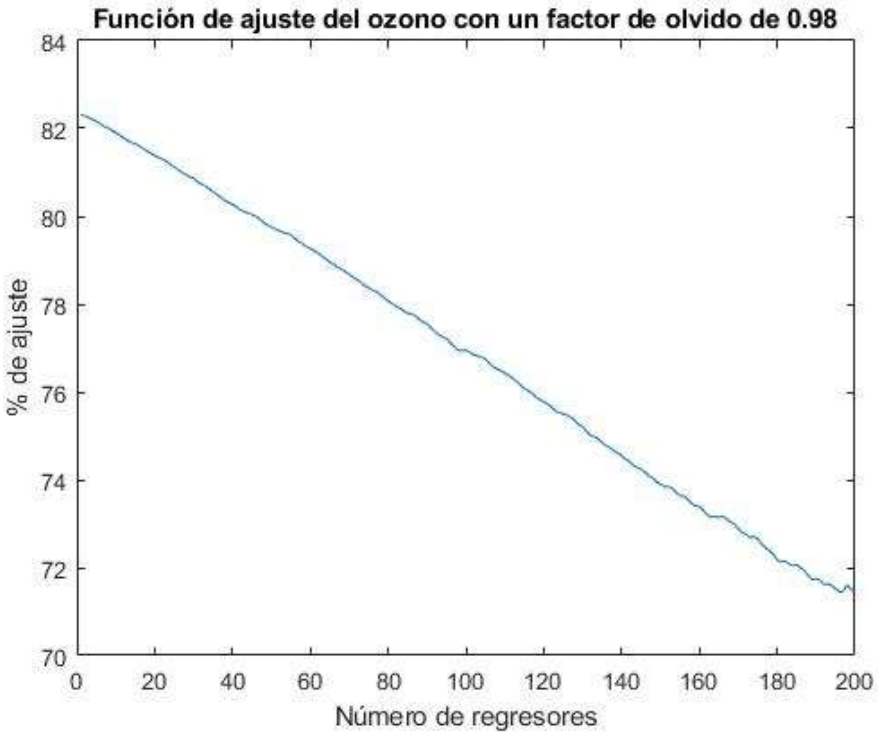

Figura 115. Función de ajuste de la serie temporal del ozono utilizando el algoritmo de factor de olvido, con un valor de 0.98.

En el cálculo de este modelo (Figura 116), se generan unos valores de interés de 82,3% de ajuste, un error MSE de 21,05 y un tiempo de cómputo igual a 0,408 segundos.

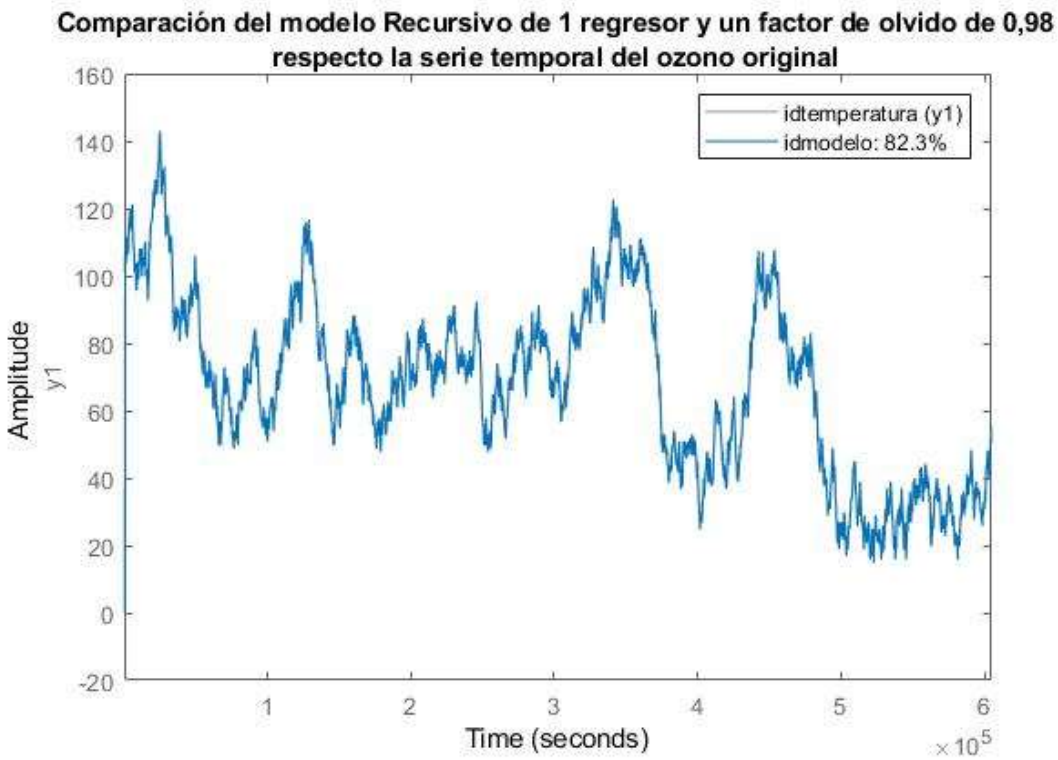

Figura 116. Representación de la comparación temporal del modelo Recursivo con 1 regresor y un factor de olvido de 0.98 respecto la serie temporal de la temperatura de origen.

Se prosigue, fijando el factor de olvido a un valor de 0,995. Calculando la función de ajuste, que se muestra en la Figura 117, la cual es muy similar a la obtenida anteriormente con un factor de olvido de 0,98, resultando como número óptimo de regresores dos.

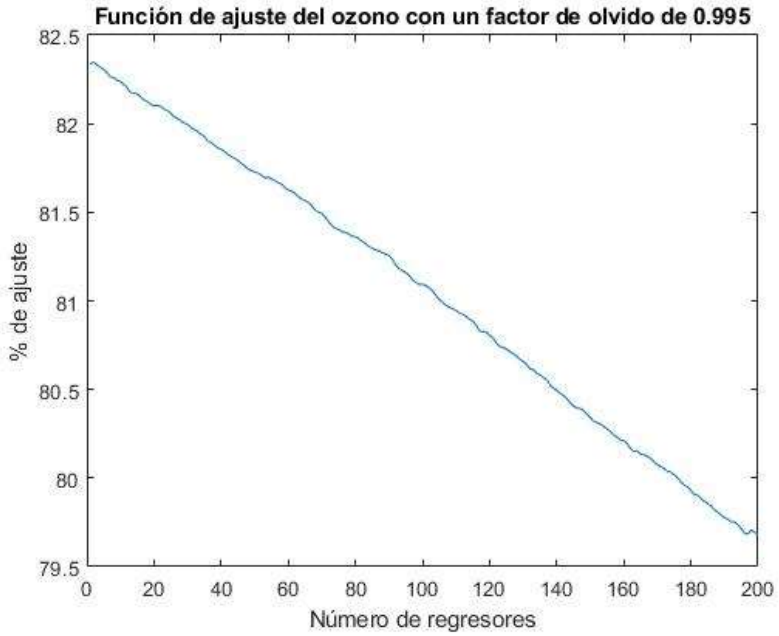

Figura 117. Función de ajuste de la serie temporal del ozono utilizando el algoritmo de factor de olvido, con un valor de 0.995.

El rendimiento producido en la creación de este modelo con estas especificaciones es de un ajuste de 82,35 %, un error cuadrático medio de 20,94 y un tiempo de cómputo de 0,3287 segundos.

Figura 118. Representación de la comparación temporal del modelo Recursivo con 2 regresores y un factor de olvido de 0.995 respecto la serie temporal del ozono de origen.

Se sigue el estudio con la propuesta para establecer la dimensión del vector de regresores mediante la función de autocorrelación; la cual, exponía en la Figura 9 que era necesario un total de 167 regresores, que es el mismo valor que el horizonte de memoria (τ) buscado para nuestro modelo recursivo. Obtenido un factor de olvido $\lambda = 0{,}994$ para alcanzar ese horizonte de memoria. Por lo que el modelo recursivo necesario consta de 167 regresores y un factor de olvido de 0,994. De esta manera se genera un modelo con un rendimiento del 79,73% de ajuste, un error MSE de 27,60, y un tiempo de cálculo de 1,2746 segundos.

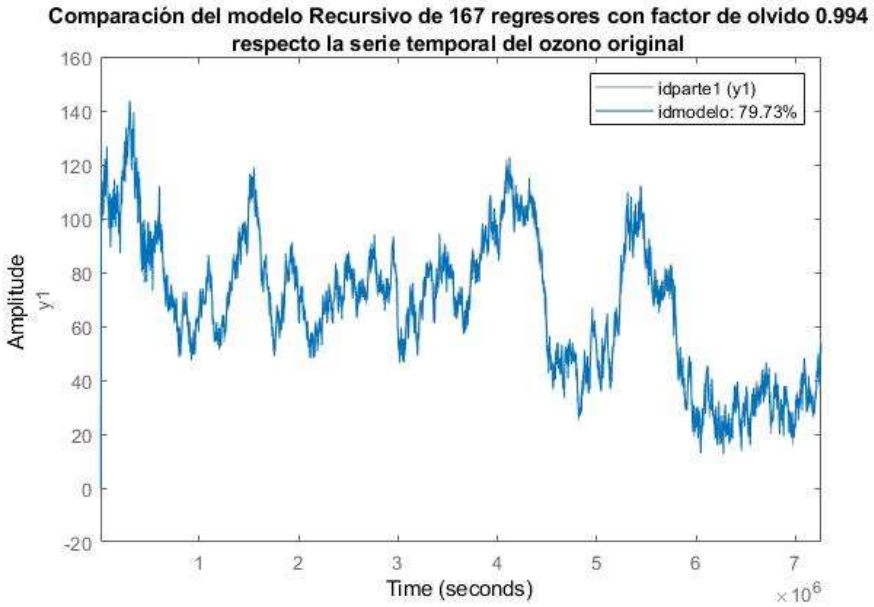

Figura 119. Representación de la comparación temporal del modelo Recursivo con 167 regresores y un factor de olvido de 0.994 respecto la serie temporal del ozono de origen.

Se completa el estudio de modelos recursivos lineales para este ejemplo de la serie temporal de ozono con el algoritmo del filtro de Kalman, comenzando por la relación de R1=R2. El cálculo de la función de ajuste representada en la Figura 120 muestra que el valor máximo de ajuste corresponde al modelo de 11 regresores.

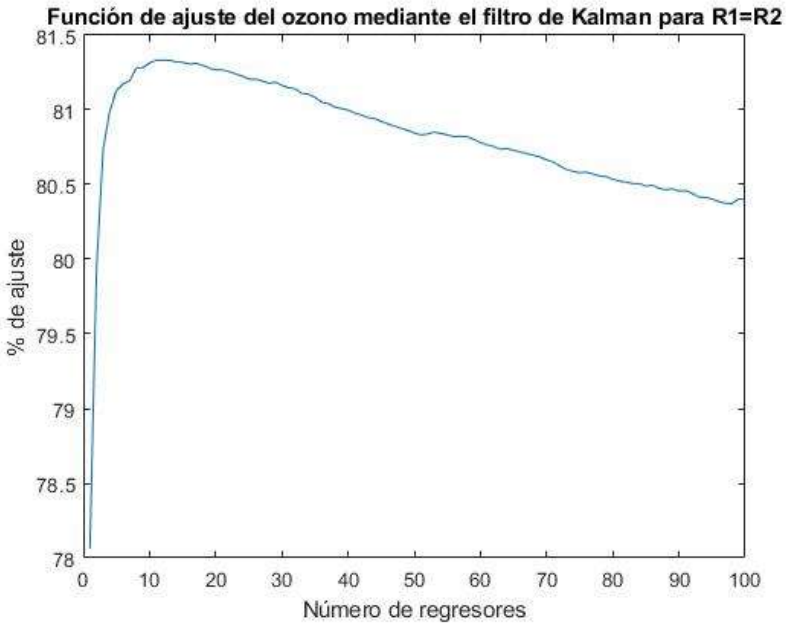

Figura 120. Función de ajuste de la serie temporal del ozono utilizando el algoritmo del filtro de Kalman para R1=R2.

El modelo recursivo con 11 regresores mediante el filtro de Kalman consta de 81,33% de ajuste, 23,4175 de error MSE y el tiempo de ejecución es de 0,3916 segundos.

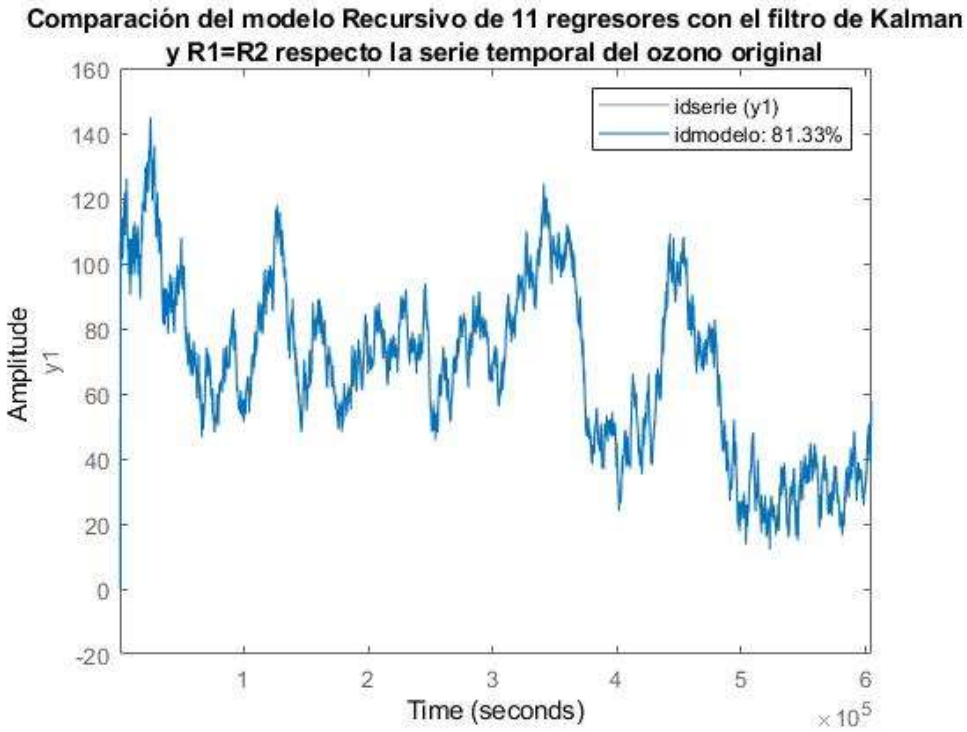

Figura 121. Representación de la comparación temporal del modelo Recursivo con 11 regresores mediante el filtro de Kalman con R1=R2, respecto la serie temporal del ozono de origen.

Se prosigue el proceso con la relación R1=R2/100. Obteniéndose la siguiente Figura como función de ajuste y 11 como número óptimo de regresores.

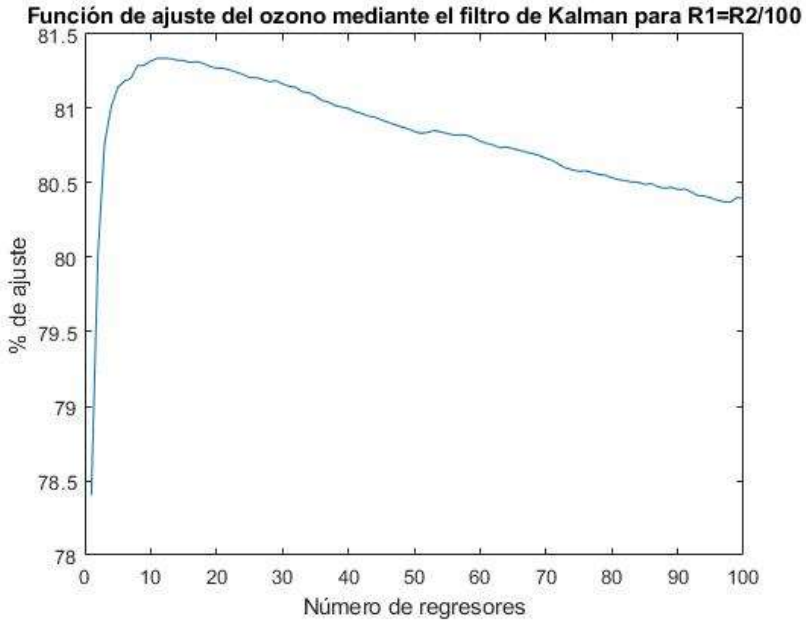

Figura 122 Función de ajuste de la serie temporal del ozono utilizando el algoritmo del filtro de Kalman para R1=R2/100.

Con el modelo recursivo resultante de estas especificaciones, el producto es 81,34% de ajuste, un error de 23,4077 y un tiempo necesario para el cálculo igual a 0,3739 segundos.

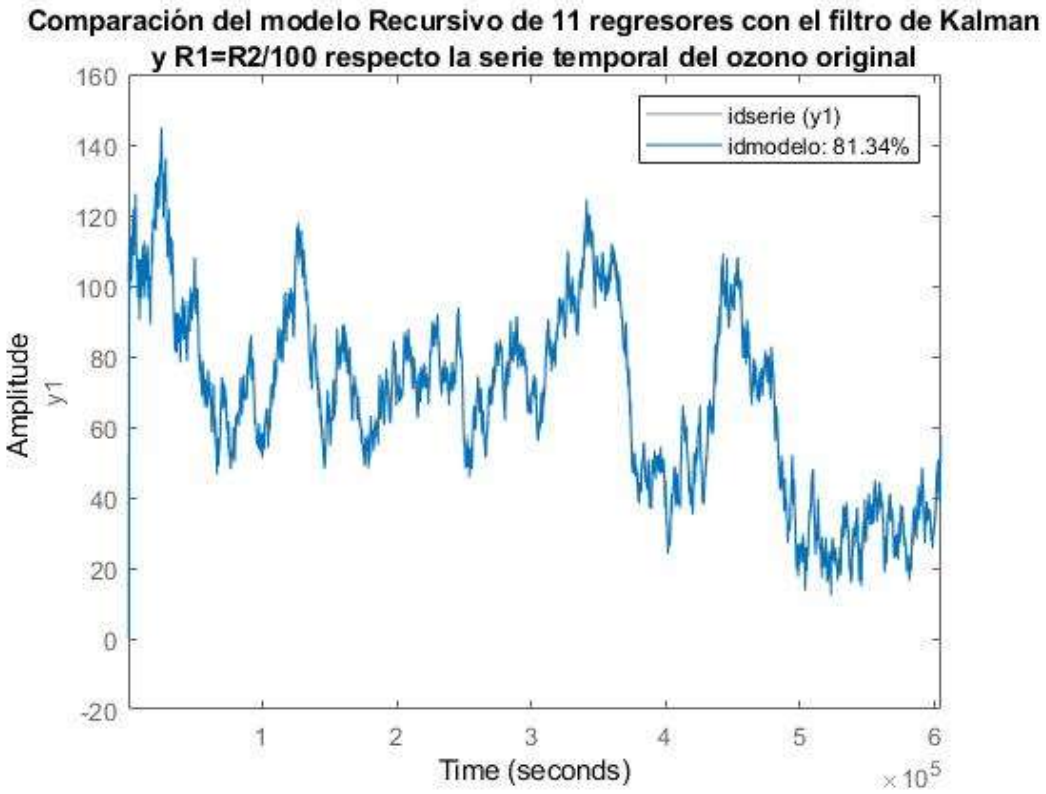

Figura 123. Representación de la comparación temporal del modelo Recursivo con 11 regresores mediante el filtro de Kalman con R1=R2/100, respecto la serie temporal del ozono de origen.

Finalmente, se realiza el estudio para una relación de R1=100*R2. En la función de ajuste correspondiente (Figura 124), los resultados muestran un número de regresores a utilizar de 11.

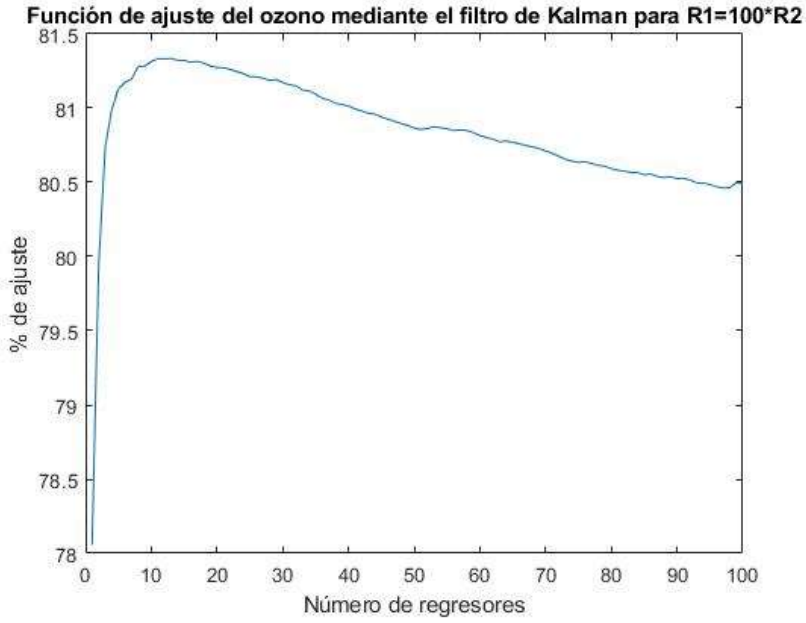

*Figura 124. Función de ajuste de la serie temporal del ozono utilizando el algoritmo del filtro de Kalman para R1=R2*100.*

En la realización de este modelo recursivo mediante el algoritmo del filtro de Kalman para R1=100*R2 el rendimiento es de un ajuste de 81,33%, un error cuadrático medio igual a 23,4176 y el tiempo de cómputo es de 0,387 segundos.

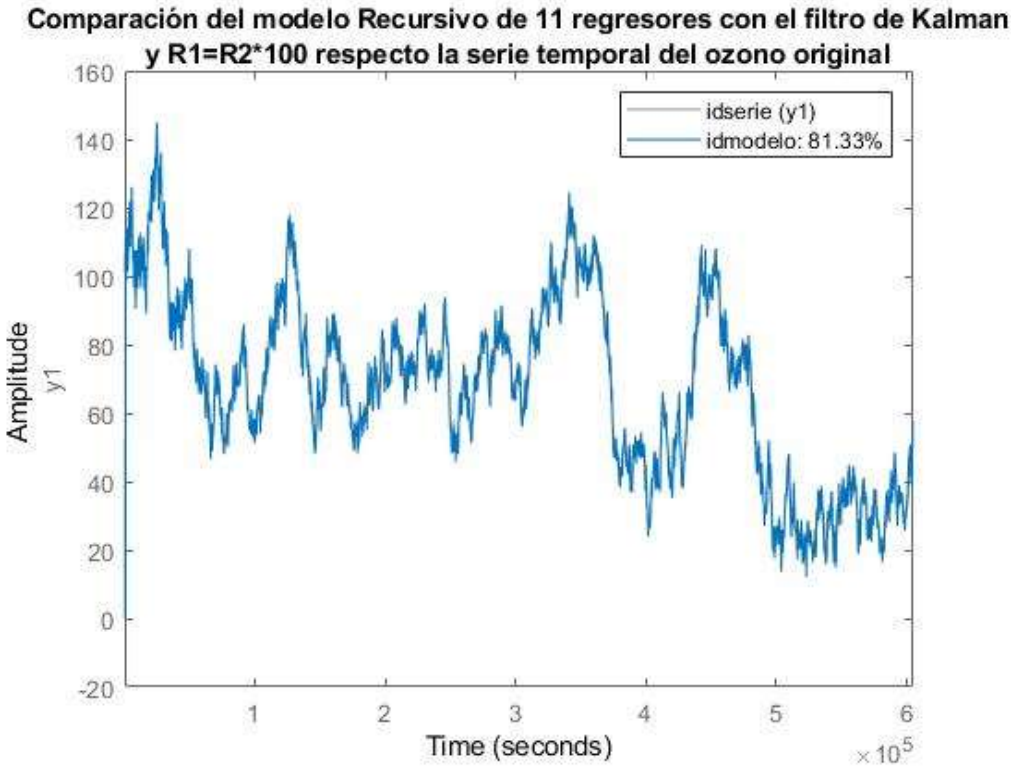

*Figura 125. Representación de la comparación temporal del modelo Recursivo con 11 regresores mediante el filtro de Kalman con R1=R2*100, respecto la serie temporal del ozono de origen.*

Algoritmo	Número de regresores	Tiempo de cómputo (segundos)	Porcentaje de ajuste (%)	Error (MSE)
Factor de olvido 0,98	1	0,408	82,3	21,05
Factor de olvido 0,995	2	0,3287	82,35	20,94
Factor de olvido 0,994	167	1,2941	79,73	27,6076
Filtro de Kalman (R1=R2)	11	0,3916	81,33	23,4175
Filtro de Kalman (R1=R2/100)	11	0,3739	81,34	23,4077
Filtro de Kalman (R1=100*R2)	11	0,387	81,33	23,4176

Tabla 13. Resultados del modelado recursivo de la serie temporal del ozono.

En la Tabla 13 se muestran cuantificados los datos de la etapa de identificación del modelado recursivo en la serie temporal de la concentración de ozono; se ve que los resultados del porcentaje de ajuste y de error cuadrático medio son buenos, llegando al 82,35% y 20,84 respectivamente, para el caso del factor de olvido 0,995. También destaca el bajo número de regresores óptimo, llegando a ser de 1 en el caso del factor de olvido 0,98; esto se debe a que, al tratarse de un conjunto de datos con un comportamiento no lineal y muy cambiante, un menor número de regresores facilita la adaptación, pero dificulta la predicción. Por otro lado, el modelo propuesto con 167 parámetros y regresores obtiene unos resultados de identificación levemente peores. Sin embargo, como se muestra en la Figura 126 y en la Tabla 14 no se han conseguido los resultados esperados en la predicción con esta solución de 167 regresores para un horizonte de predicción de 288 muestras.

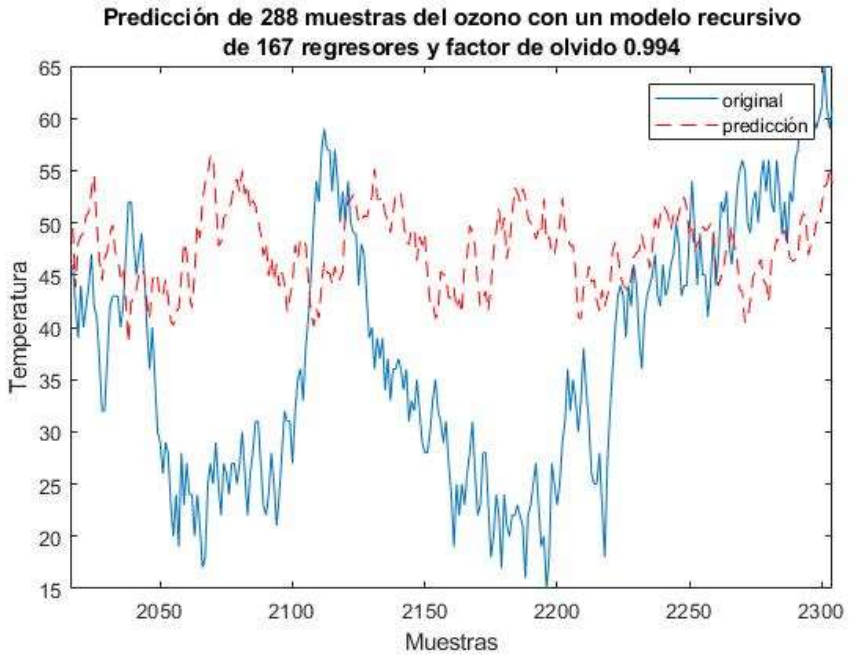

Figura 126. Representación de la predicción de las últimas 288 muestras de la serie del ozono, correspondiente a 1 día, con un modelo recursivo de 167 regresores y factor de olvido 0.994, junto con los datos de la serie original.

Modelo	Número de regresores	Predicción de 288 muestras (1 día)	
		Ajuste (%)	Error (MSE)
Factor de olvido 0.994	167	-32,99	262,0337

Tabla 14. Resultados de la predicción de la serie temporal del ozono a partir de los modelos recursivos calculados.

Modelado no lineal de series temporales

Muchos procesos, especialmente aquellos que ocurren en las ciencias naturales y la ingeniería, exhiben alguna forma de comportamiento no lineal. Este comportamiento incluye características que no son posibles modelar mediante técnicas lineales, como patrones pseudocíclicos en los que los valores de la muestra aumentan a sus máximos a diferentes velocidades de las que caen, o ráfagas de valores periféricos en las series observadas. Esto ha suscitado mucho interés y el desarrollo de ciertos tipos de modelos de series temporales no lineales, incluidos los modelos bilineales, autorregresivos exponenciales, umbrales autorregresivos y coeficientes estocásticos o aleatorios. Con el uso de estos diversos tipos de modelos, los procedimientos de identificación y estimación se vuelven más complicados, incluido el problema fundamental de qué tipo de modelo no lineal podría ser útil para una serie temporal particular. En este TFG se ha trabajado con los modelos AR no lineales [Box, 2008].

Un modelo AR no linear consiste en un modelo de regresores y un estimador no lineal, como se indica en la Figura 127. El estimador no lineal comprende funciones lineales y no lineales que actúan sobre los regresores del modelo proporcionando la salida. Se calculan los valores de los regresores a partir de los valores de datos de salida pasados.

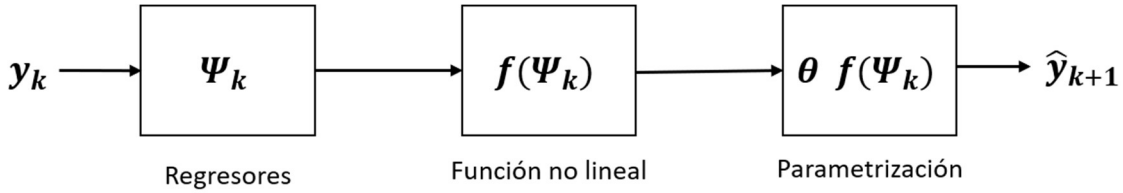

Figura 127. Esquema estructura modelo no linear.

Matlab tiene disponibles diferentes estimadores no lineales. En este TFG se ha escogido la función sigmoidal para el modelado no lineal de series temporales, función representada en la Figura 128 y caracterizada por la siguiente ecuación:

$$f(z) = \frac{1}{e^{-z} + 1}$$

Ecuación 18

La estimación proporcionada por el modelo es

$$\hat{y}_k = \sum_{i=1}^{N} \theta_i\, f(\psi_{k-1})$$

Ecuación 139

Siendo ψ_{k-1} el vector de regresión de N medidas consideradas hasta la muestra anterior a la de estimación, y θ_i el vector de parámetros del modelo

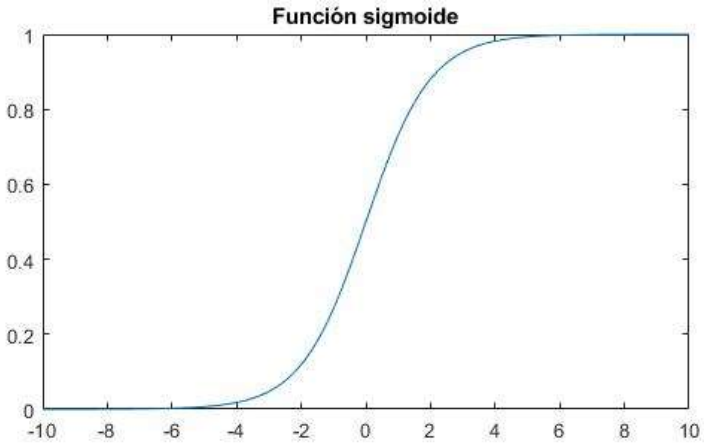

Figura 128. Gráfica de la función sigmoide.

- Ejemplo de aplicación: serie temporal de temperatura.

En la realización de esta aplicación se toma como punto de partida la función ACF mostrada en la Figura 7, para dicha serie temporal de estudio, la cual, indicaba que era necesario un total de 174 regresores para su modelaje. A partir de aquí, lo que se pretende, es añadir regresores no lineales con estructura sigmoidal al modelo. Para ello se comienza el modelo de identificación creando un modelo se 174 regresores lineales y 2 términos en la expansión de la función sigmoidal que utiliza Matlab: sigmoidnet.m [Ljung, 2018] con el cual se obtiene un rendimiento de 100% de ajuste, un error MSE de $1{,}02*10^{-26}$, y un tiempo de cómputo de 6,27 segundos

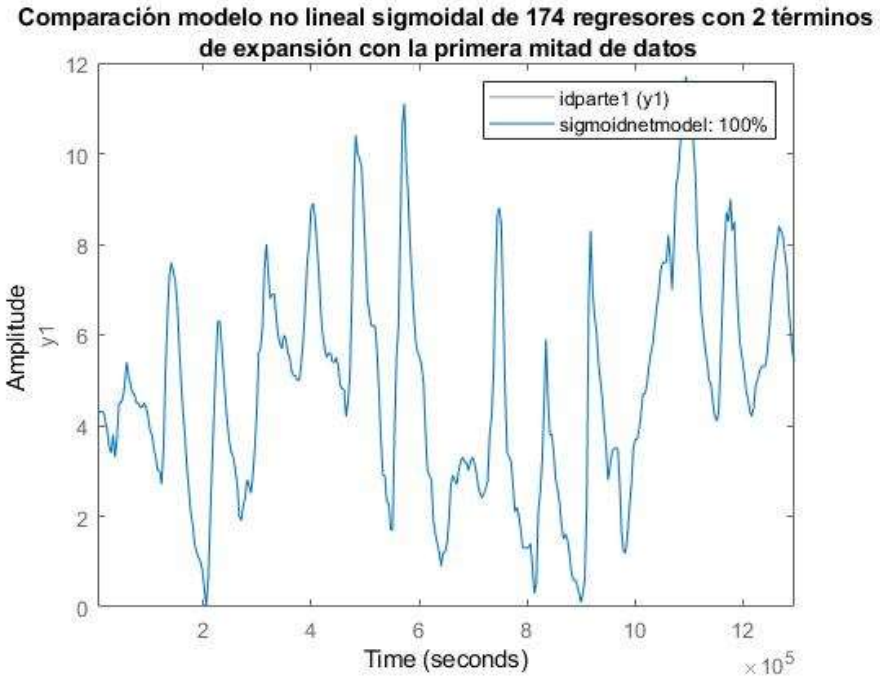

Figura 129. Comparación del modelo no lineal con estimador sigmoidal de 174 regresores y 2 términos de expansión respecto la primera mitad de datos de la temperatura.

A la hora de validar el modelo calculado anteriormente sobre los datos de la segunda quincena del mes de diciembre de 2019 de Madrid, los resultados obtenidos son los mostrados en la Figura 130. Como se puede apreciar, los resultados de validación inicial son muy buenos, pero a partir de la mitad del registro se vuelve inestable; por ello, se reduce la dimensión del vector de datos para analizar la parte en la que es estable (Figura 131).

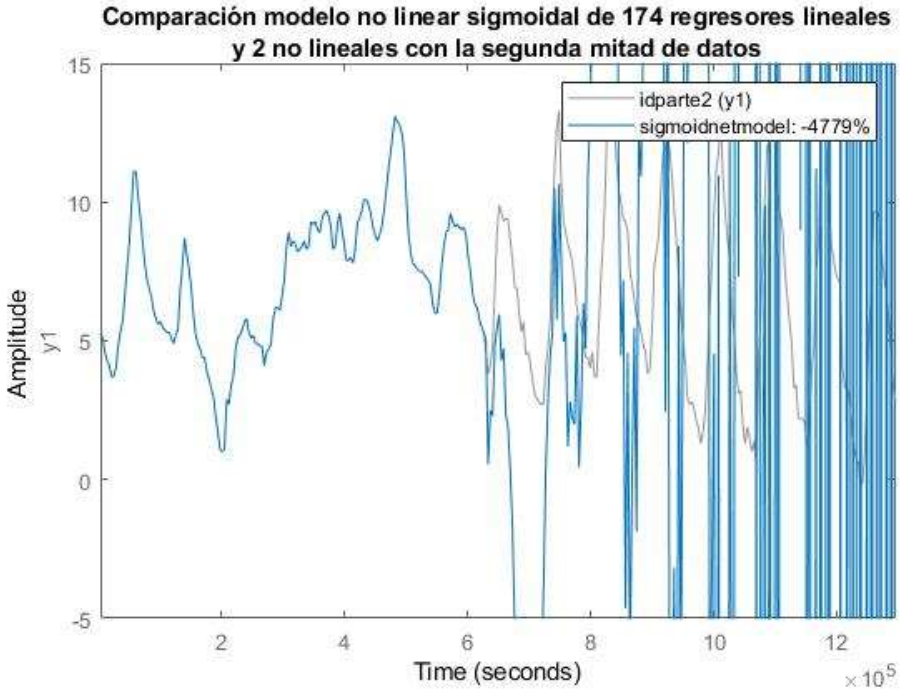

Figura 130. Comparación del modelo no lineal con estimador sigmoidal de 174 regresores y dos términos de expansión respecto la segunda mitad de datos de la temperatura.

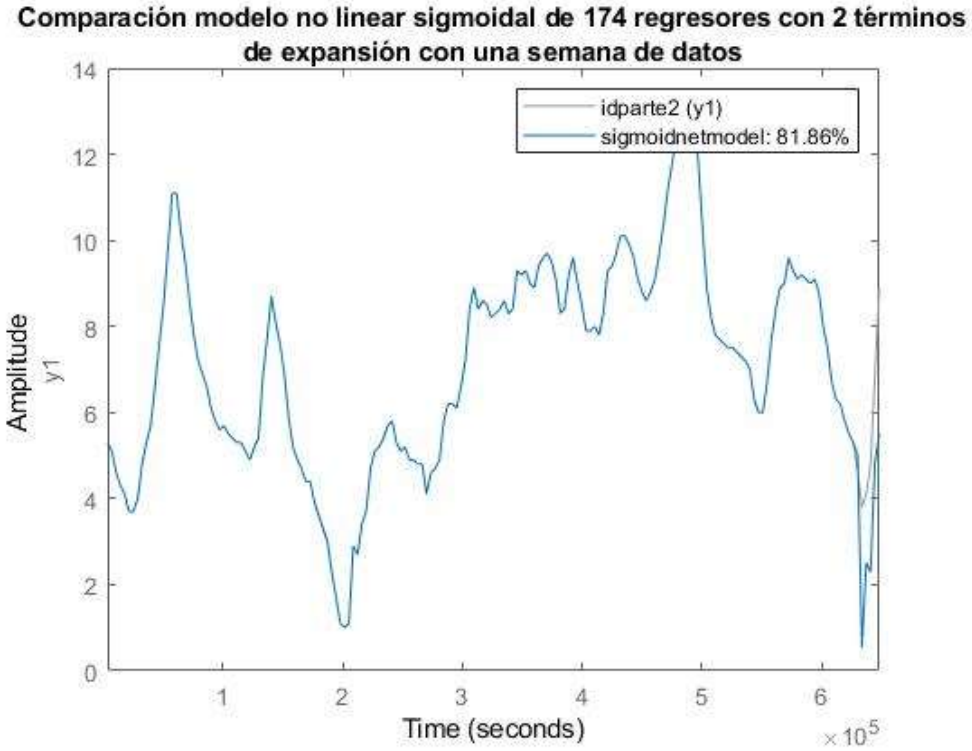

Figura 131. Comparación del modelo no lineal con estimador sigmoidal de 174 regresores y 2 términos de expansión respecto la segunda mitad de datos de la temperatura.

En un estudio de predicción con esta solución de modelo NLAR-sigmoidal, para un conjunto de datos distintos a los evaluados en identificación y validación. Para ello se computan las siguientes 24 muestras, equivalente a un día, y se comparan con los datos medidos. Los resultados se muestran en la Figura 132, obteniéndose un error cuadrático medio de 15,59 y un ajuste de -69,14% en la totalidad del periodo de predicción.

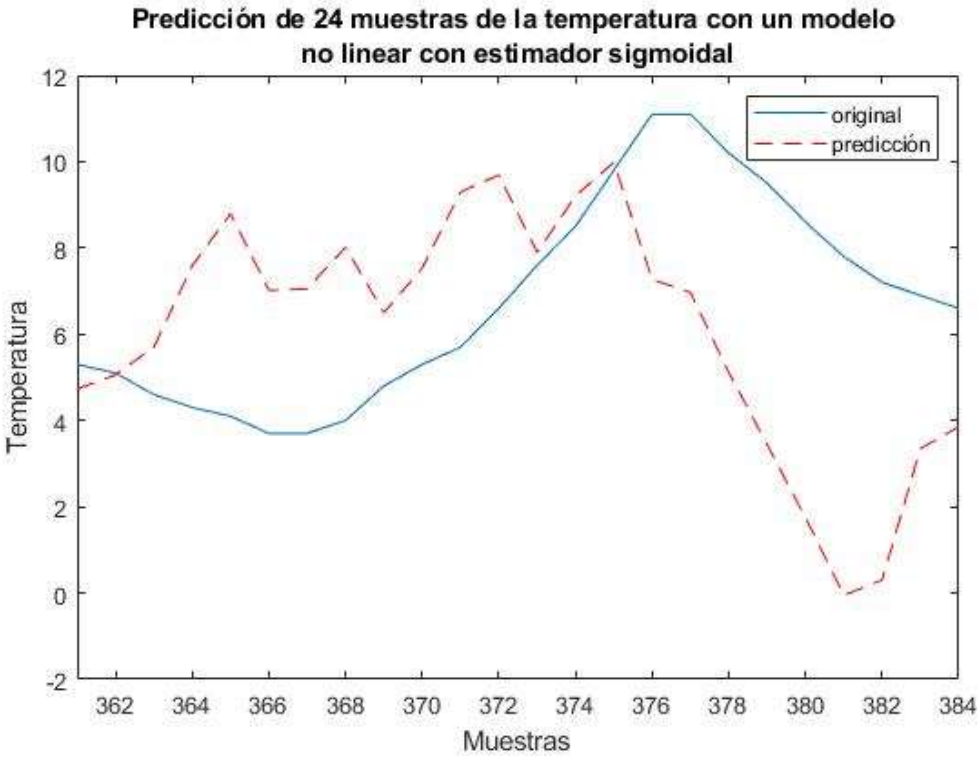

Figura 132. Representación de la predicción de 24 muestras de la serie de la temperatura, correspondiente a 1,5 días, con un modelo no linear con estimador sigmoidal de 174 regresores y 2 términos de expansión junto con los datos de la serie original.

Modelo	Número de regresores lineales	Términos de la expansión sigmoidal	Identificación		Validación (una semana)		Predicción 1 día	
			Ajuste (%)	Error (MSE)	Ajuste (%)	Error (MSE)	Ajuste (%)	Error (MSE)
Modelo no linear con estimador sigmoidal	174	2	100	$1{,}01*10^{-26}$	81,86	0,195	-69,14	15,59

Tabla 15. Resumen de los resultados obtenidos en el análisis del modelado no linear en la serie temporal de temperatura.

Respecto a los resultados conseguidos con la aplicación de la estructura NLAR a los datos de temperatura se concluye que esta propuesta permite modelar muy bien el comportamiento de los datos aportados, pero tiene sus limitaciones en la predicción del comportamiento futuro de la serie.

- Caso de aplicación: serie temporal de ozono.

En esta otra serie temporal, se actúa de la misma manera. Según la función de autocorrelación estudiada en la Figura 9 de este conjunto de datos, el número de regresores de referencia es de 167. En este apartado, de modelado no lineal, se incluyen 18 términos en la expansión sigmoidal. De esta manera, con un modelo de 167 regresores lineales y 18 términos sigmoidales se obtiene un resultado de 99,8% de ajuste y un tiempo de cálculos igual a 338 segundos.

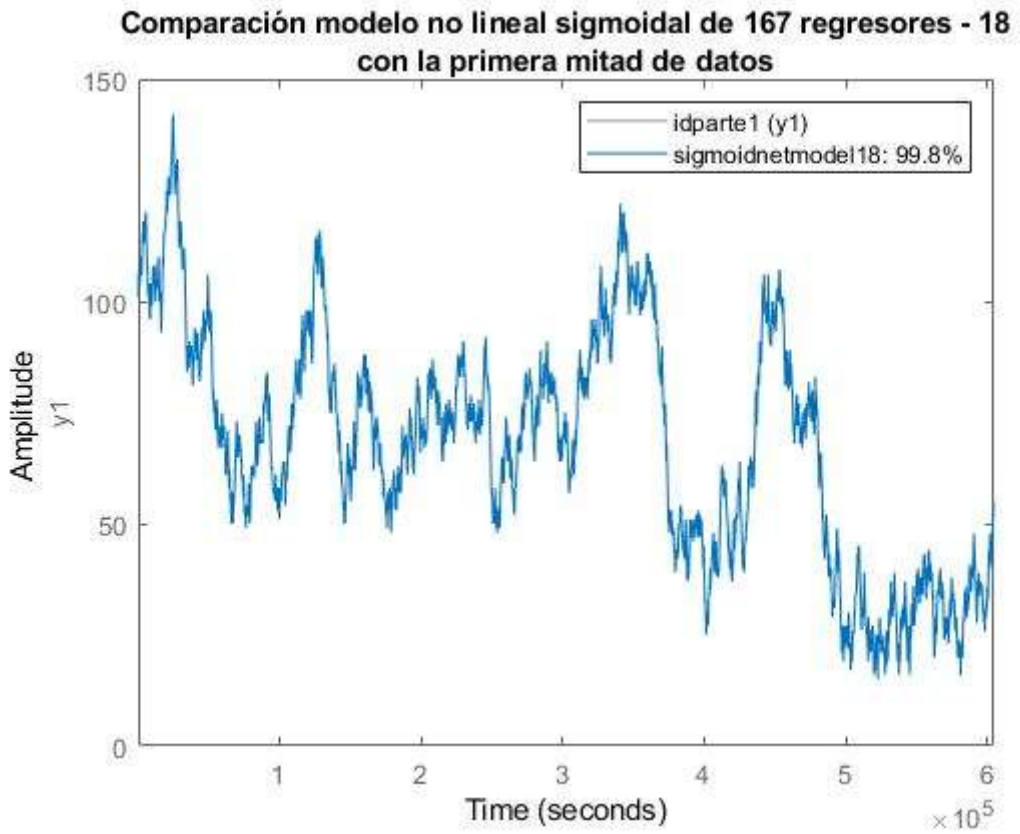

Figura 133. Comparación del modelo no lineal con estimador sigmoidal de 167 regresores y 18 términos de expansión respecto la primera mitad de datos del ozono.

En la etapa de validación, para este modelo, se representar en la Figura 134, la cual ofrece un ajuste de -44,6%.

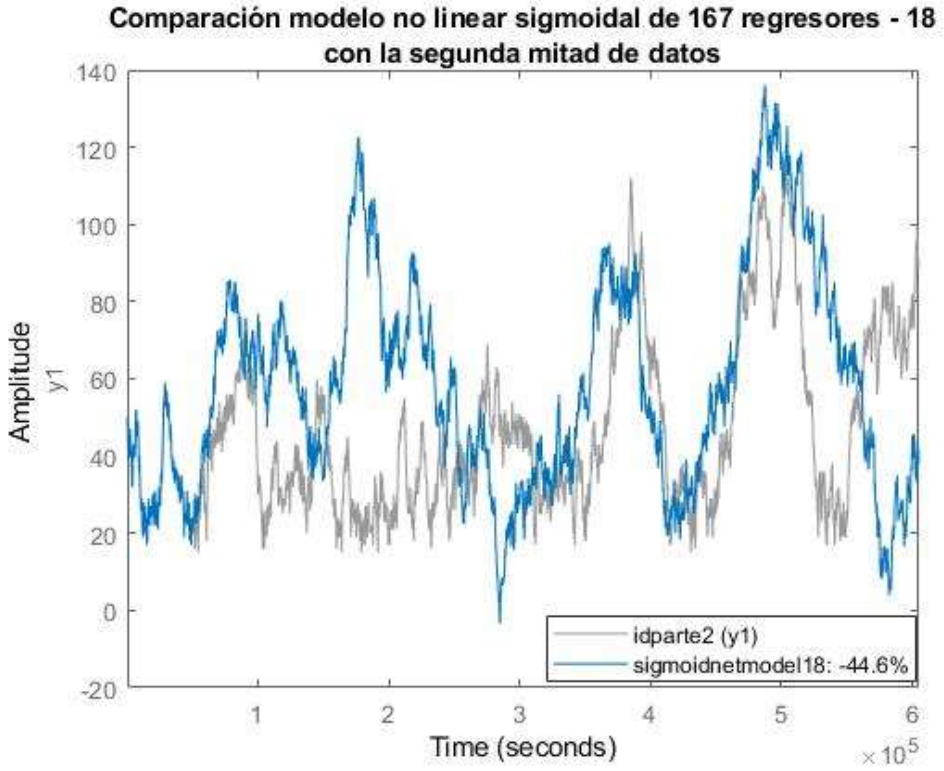

Figura 134. Comparación del modelo no lineal con estimador sigmoidal de 167 regresores y 18 términos de expansión respecto la segunda mitad de datos del ozono.

Concluyendo, se realiza una predicción a corto plazo aplicando el modelo calculado. Se calculan los siguientes 288 valores correspondientes a un día, representados en la siguiente Figura, y se obtienen los siguientes valores de estudio. Un ajuste del -169,6% y un error MSE de $1{,}07*10^3$

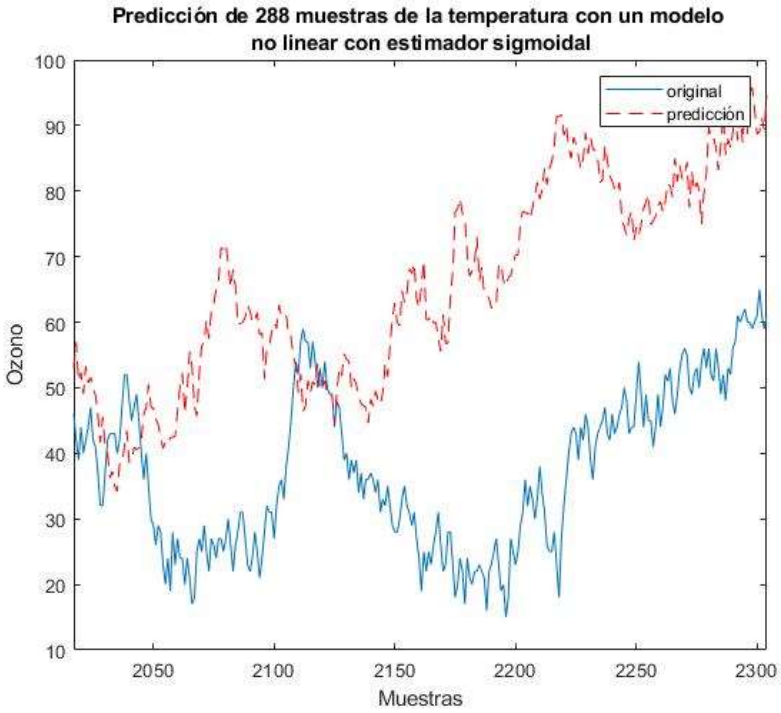

Figura 135. Representación de la predicción de 288 muestras de la serie del ozono, correspondiente a 1 día, con un modelo no linear con estimador sigmoidal de 167 regresores y 18 términos de expansión junto con los datos de la serie original.

Modelo	Número de regresores lineales	Términos de la expansión sigmoidal	Identificación	Validación	Predicción 1 día
			Ajuste (%)	Ajuste (%)	Ajuste (%)
Modelo no linear con estimador sigmoidal	167	18	99,8	-44,6	-169,6

Tabla 16. Resumen de los resultados obtenidos en el análisis del modelado no linear en la serie temporal de ozono.

En la creación de un modelo no lineal para la serie temporal de la concentración de ozono, si se compara con los resultados obtenidos en el modelado lineal, se aprecia que el modelo en general mejora considerablemente. En la etapa de identificación es donde se produce un mejor rendimiento, con un 100% de ajuste, mientras que en la validación y predicción los resultados sin ser los esperados mejoran con respecto a los obtenidos con parametrización lineal. Por otra parte, al introducir un estimador no lineal, la complejidad de los cálculos aumenta considerablemente, necesitando más recursos computacionales, lo que provoca que el tiempo de ejecución se eleve hasta los 338 segundos.

Conclusión

Una vez justificado el interés del modelado de series temporales para la optimización de redes de sensores inalámbricos, en este Trabajo de Fin de Grado se han abordado distintas cuestiones relativas al modelado de las mismas. El objetivo planteado ha sido evaluar la aplicación de estructuras paramétricas sencillas, frente a las soluciones de redes neuronales, para el modelado de series temporales no lineales y variantes en el tiempo.

En primer lugar, cabe destacar la diferencia entre el proceso de identificación y validación. La primera usada para el estudio de la serie temporal (análisis de comportamiento, características, hipótesis y suposiciones…) y la creación del modelo idóneo; y la segunda para verificar el grado de confianza en el modelo obtenido anteriormente para el fin que se destina. Este proceso es de gran importancia, para así poder comprobar que la totalidad de la serie temporal se adapta al modelo calculado y facilita la etapa de predicción.

El primer reto es determinar el número de regresores a utilizar en la creación de un modelo. Para ello es útil la Función de Autocorrelación (ACF) de la señal registrada y el umbral de confianza establecido.

El siguiente reto es determinar la estructura paramétrica. En el caso de modelos lineales, en este TFG se han estudiado las soluciones AR, ARI y ARIMA. Una vez fijada la estructura, se puede evaluar cómo es el ajuste del modelo a la señal original para diferente número de regresores, lo que permite elegir mejor este valor frente a la aproximación hecha con ACF.

Para comparar las diferentes estructuras paramétricas no recursivas se ha utilizado como criterio el porcentaje de ajuste y el error MSE, tanto en la fase de identificación como en la de validación, y el tiempo de cómputo requerido para la obtención de resultados.

Se han utilizado dos series temporales reales, la temperatura registrada en la ciudad de Madrid en diciembre de 2019 y la concentración de ozono registrada en la ciudad danesa de Aarhus entre agosto y octubre de 2014.

La experiencia con las estructuras lineales no recursivas (off-line) AR, ARI y ARIMA ha resultado que, para un mismo número de regresores, AR proporciona un mejor ajuste y con un menor tiempo de cómputo en la fase de identificación, siendo ARIMA ligeramente mejor que ARI. Por otra parte, la herramienta Matlab es más restrictiva en la evaluación de estructuras con integradores (ARI, ARIMA) para muchos regresores proporcionando salidas inestables.

Independientemente de la estructura planteada se comprueba que:

- en la medida en que el número de datos utilizados en el ensayo crece con respecto al número de regresores los resultados del modelado empeoran: menor porcentaje de ajuste y mayor error MSE
- el submuestreo de los datos originales (Ts=5, 15 y 60 minutos) no contribuye a mejorar el porcentaje de ajuste y por tanto el error de modelado.
- la reordenación de datos puede facilitar la detección de tendencias menos variantes temporalmente, por ejemplo, agrupando datos registrados en una misma hora de los días de un mes en lugar de secuencialmente como corresponde al registro original, contribuyendo a mejorar los resultados de modelado.

- el filtrado paso bajo de la señal original proporciona modelos con menos coeficientes y menor tiempo de cálculo, pero con despreciables mejoras en el error de modelado.

En cuanto a las estructuras paramétricas recursivas (on-line), la solución con factor de olvido simplifica el estudio. El diseñador fija el factor de olvido, directamente relacionado con el horizonte de memoria que, a su vez, sirve como referencia para fijar la dimensión del vector de parámetros a identificar. En el caso del Filtro de Kalman, está gobernado por los parámetros de matriz de covarianza del ruido de medida (R2 depende de la señal registrada) y matriz de covarianza del error de estimación de parámetros (R1 a fijar por el diseñador).

La experiencia con los ejemplos utilizados lleva a concluir que el modelado recursivo de series temporales:

- Reduce drásticamente el número de regresores y por tanto el tiempo de cómputo.
- Además de lo anterior, se consiguen importantes mejoras en el ajuste de la fase de identificación (próximo al 80% frente al 20% en el caso off-line) dimensión del vector de parámetros).
- la penalización asociada al bajo número de regresores está en el horizonte de predicción de estos modelos
- Dado que Matlab normaliza el valor de la matriz de covarianza del ruido de medida R2, resulta más intuitivo la utilización de la técnica de factor de olvido. Con todo, en el FK, cuanto menor es la relación R1/R2 mejor ajuste se consigue.

De entre las diferentes soluciones de estructuras no lineales (wavelet, partición en árbol, sigmoidal, etc) para modelado de series temporales se ha ensayado la solución sigmoidal. Las conclusiones obtenidas de esta etapa son, que añadiendo unos pocos regresores no lineales a la estructura lineal estudiada anteriormente el resultado del proceso de identificación mejora considerablemente, mientras que en los periodos de validación y predicción al cambiar los datos de la serie temporal de estudio los resultados son peores, pero esperados al tratarse un de conjunto de datos con tendencia no lineal y cambiante en el tiempo. Por otro lado, al haber añadido estos regresores sigmoidales al cálculo, repercute bastante en el tiempo de ejecución, siendo este desde 6 a 25 veces mayor respecto al modelaje lineal.

Trabajos futuros

Como trabajos futuros se proponen dos líneas a explorar, una relativa al modelado y otra a la implementación en sensado basado en eventos.

Para el caso de estudio de registros reales del contaminante ambiental ozono, el mejor de los resultados obtenidos con estimación paramétrica es el que incluye funciones no lineales, concretamente NAR-sigmoidal. La contribución de las técnicas de estimación recursiva a NAR-sigmoidal es un campo claro de mejora a explorar que daría continuidad al trabajo realizado en este TFG.

Otra vía de mejora es el estudio con modelos multivariables, en los que se tengan en cuenta entradas de distintas variables para predecir cómo se comporta una determinada. En el caso de contaminantes ambientales su estimación está relacionada con variables ambientales como temperatura, humedad, intensidad y dirección del viento, radiación solar, etc.

Por otra parte, cabe analizar la aplicación de diferentes familias de redes neuronales (CNN, RNN, LSTM, etc), especialmente indicadas para series no lineales y variantes en el tiempo como las abordadas en este TFG.

Contando con un modelo de serie temporal, cabe plantear soluciones que demuestren las ventajas del sensado aperiódico, tanto en la etapa emisora (nodo sensorial) como en la receptora (centro de monitorización), tanto en la autonomía energética de los nodos como en las limitaciones del canal de comunicación de la red de sensores inalámbricos.

ANEXOS

ANEXO I

A(z) = 1 - 1.486 z^-1 + 0.7881 z^-2 - 0.357 z^-3 + 0.003078 z^-4 + 0.2874 z^-5 - 0.3825 z^-6 + 0.1866 z^-7 + 0.03938 z^-8 - 0.1712 z^-9 + 0.2432 z^-10 - 0.1833 z^-11 - 0.0224 z^-12 + 0.2185 z^-13 - 0.1788 z^-14 + 0.04694 z^-15 + 0.02092 z^-16 - 0.03519 z^-17 + 0.009686 z^-18 + 0.003519 z^-19 - 0.007057 z^-20 + 0.1058 z^-21 - 0.131 z^-22 - 0.07035 z^-23 + 0.2105 z^-24 - 0.2434 z^-25 + 0.2686 z^-26 - 0.04496 z^-27 - 0.1653 z^-28 + 0.1969 z^-29 - 0.1863 z^-30 + 0.01142 z^-31 + 0.08257 z^-32 - 0.07864 z^-33 - 0.0912 z^-34 + 0.3943 z^-35 - 0.4183 z^-36 + 0.3703 z^-37 - 0.3174 z^-38 + 0.05043 z^-39 + 0.151 z^-40 - 0.2455 z^-41 + 0.2906 z^-42 + 0.01647 z^-43 - 0.2086 z^-44 + 0.1107 z^-45 - 0.0885 z^-46 - 0.05071 z^-47 + 0.1189 z^-48 - 0.1987 z^-49 + 0.2519 z^-50 - 0.1217 z^-51 - 0.2268 z^-52 + 0.3935 z^-53 - 0.2225 z^-54 + 0.04301 z^-55 + 0.1946 z^-56 - 0.2339 z^-57 + 0.2423 z^-58 - 0.207 z^-59 - 0.03234 z^-60 + 0.1541 z^-61 - 0.05031 z^-62 - 0.08406 z^-63 + 0.1823 z^-64 - 0.1424 z^-65 + 0.04758 z^-66 - 0.03366 z^-67 - 0.04352 z^-68 + 0.134 z^-69 - 0.1165 z^-70 + 0.1039 z^-71 + 0.004979 z^-72 - 0.2739 z^-73 + 0.2287 z^-74 - 0.08063 z^-75 + 0.01455 z^-76 + 0.0863 z^-77 - 0.1107 z^-78 + 0.07498 z^-79 + 0.1215 z^-80 - 0.3615 z^-81 + 0.421 z^-82 - 0.2569 z^-83 + 0.1706 z^-84 - 0.02258 z^-85 - 0.06355 z^-86 + 0.03592 z^-87 - 0.1227 z^-88 + 0.1139 z^-89 - 0.07833 z^-90 + 0.02318 z^-91 - 0.02865 z^-92 + 0.1321 z^-93 - 0.1185 z^-94 - 0.1617 z^-95 + 0.1753 z^-96 - 0.18 z^-97 + 0.2721 z^-98 - 0.1304 z^-99 - 0.08721 z^-100 + 0.3524 z^-101 - 0.3327 z^-102 + 0.1637 z^-103 + 0.0512 z^-104 - 0.2205 z^-105 + 0.2041 z^-106 + 0.08497 z^-107 - 0.3607 z^-108 + 0.37 z^-109 - 0.4193 z^-110 + 0.2538 z^-111 + 0.0989 z^-112 - 0.1927 z^-113 + 0.2128 z^-114 - 0.1053 z^-115 - 0.2031 z^-116 + 0.2282 z^-117 - 0.08752 z^-118 + 0.1656 z^-119 - 0.07736 z^-120 - 0.2379 z^-121 + 0.3767 z^-122 - 0.2483 z^-123 - 0.06057 z^-124 + 0.2926 z^-125 - 0.343 z^-126 + 0.3398 z^-127 - 0.1745 z^-128 + 0.0339 z^-129 + 0.03043 z^-130 - 0.1844 z^-131 + 0.08941 z^-132 + 0.0295 z^-133 + 0.05117 z^-134 - 0.2081 z^-135 + 0.3181 z^-136 - 0.3411 z^-137 + 0.2667 z^-138 - 0.08035 z^-139 - 0.1089 z^-140 + 0.1531 z^-141 + 0.01808 z^-142 - 0.1119 z^-143 + 0.1784 z^-144 - 0.1744 z^-145 + 0.1009 z^-146 + 0.0457 z^-147 - 0.2251 z^-148 + 0.3678 z^-149 - 0.4468 z^-150 + 0.3641 z^-151 - 0.1982 z^-152 - 0.1133 z^-153 + 0.1077 z^-154 + 0.09807 z^-155 - 0.06469 z^-156 - 0.03225 z^-157 + 0.04268 z^-158 - 0.04227 z^-159 + 0.1201 z^-160 - 0.1603 z^-161 + 0.1346 z^-162 - 0.0485 z^-163 - 0.04865 z^-164 + 0.03863 z^-165 - 0.08421 z^-166 - 0.1039 z^-167 + 0.1509 z^-168 + 0.176 z^-169 - 0.3277 z^-170 + 0.2295 z^-171 - 0.02051 z^-172 + 0.07486 z^-173 - 0.1216 z^-174

ANEXO II.

A(z) = 1 - 0.5001 z^-1 + 0.3162 z^-2 - 0.1209 z^-3 - 0.06696 z^-4 + 0.2719 z^-5 - 0.115 z^-6 + 0.07101 z^-7 + 0.06452 z^-8 - 0.06281 z^-9 + 0.08679 z^-10 - 0.007837 z^-11 - 0.04541 z^-12 + 0.04695 z^-13 - 0.03165 z^-14 + 0.03297 z^-15 + 0.04739 z^-16 + 0.03038 z^-17 - 0.03891 z^-18 + 0.1141 z^-19 + 0.004019 z^-20 + 0.08484 z^-21 - 0.05592 z^-22 - 0.07752 z^-23 + 0.06538 z^-24 - 0.000987 z^-25 + 0.04519 z^-26 + 0.1294 z^-27 + 0.06666 z^-28 + 0.09646 z^-29 - 0.009063 z^-30 - 0.09159 z^-31 + 0.04888 z^-32 - 0.04154 z^-33 - 0.08374 z^-34 + 0.1279 z^-35 - 0.09469 z^-36 + 0.0726 z^-37 - 0.02317 z^-38 - 0.06677 z^-39 + 0.01576 z^-40 - 0.1147 z^-41 + 0.1439 z^-42 + 0.1208 z^-43 + 0.06205 z^-44 - 0.01583 z^-45 - 0.00267 z^-46 - 0.03888 z^-47 - 0.01655 z^-48 - 0.0103 z^-49 - 0.0672 z^-50 + 0.0844 z^-51 - 0.2155 z^-52 + 0.1469 z^-53 - 0.09926 z^-54 + 0.02637 z^-55+ 0.1805 z^-56 - 0.1619 z^-57 + 0.2053 z^-58 - 0.114 z^-59 - 0.02081 z^-60 + 0.07096 z^-61- 0.05549 z^-62 + 0.07805 z^-63 + 0.04344 z^-64 + 0.04762 z^-65 - 0.009552 z^-66 - 0.05098 z^-67 + 0.02454 z^-68 + 0.05486 z^-69 - 0.01581 z^-70 + 0.07442 z^-71 + 0.09798 z^-72 - 0.1482 z^ -73 + 0.08262 z^-74 - 0.03485 z^-75 + 0.1028 z^-76 + 0.03315 z^-77 + 0.03866 z^-78 - 0.04895 z^-79 + 0.1521 z^-80 - 0.1486 z^-81 + 0.241 z^-82 - 0.02974 z^-83 + 0.1863 z^-84 + 0.05248 z^-85 + 0.02885 z^-86 + 0.09361 z^-87 - 0.08872 z^-88 + 0.08899 z^-89 - 0.08324 z^-90 + 0.04929 z^-91 + 0.0166 z^-92 + 0.07977 z^-93 + 0.06248 z^-94 - 0.2627 z^-95 + 0.08454 z^-96 - 0.2508 z^-97 + 0.1216 z^-98 - 0.02116 z^-99 - 0.0784 z^-100 + 0.1792 z^-101 - 0.08627 z^-102 + 0.0965 z^-103 + 0.05273 z^-104 - 0.08851 z^-105 + 0.03593 z^-106 + 0.2502 z^-107 - 0.1896 z^-108 + 0.2163 z^-109 - 0.2017 z^-110 + 0.03352 z^-111 + 0.2176 z^-112 + 0.0002598 z^-113 + 0.2033 z^-114 - 0.02429 z^-115 - 0.227 z^-116 + 0.04294 z^-117 - 0.089 z^-118 + 0.2267 z^-119

ANEXO III

A(z) = 1 - 1.762 z^-1 + 1.059 z^-2 + 0.2352 z^-3 - 0.1643 z^-4 - 0.8978 z^-5 + 1.293 z^-6 - 0.5596 z^-7 - 0.04604 z^-8 - 0.4188 z^-9 + 0.6337 z^-10 + 0.1137 z^-11 - 0.7465 z^-12 + 0.4788 z^-13 - 0.2056 z^-14 + 0.5091 z^-15 - 0.5754 z^-16 + 0.2007 z^-17 - 0.1701 z^-18 + 0.9105 z^-19 - 1.396 z^-20 + 0.4923 z^-21 + 0.7419 z^-22 - 0.5047 z^-23 - 0.7702 z^-24 + 0.6363 z^-25 + 0.677 z^-26 - 0.9983 z^-27 + 0.4153 z^-28 - 0.4499 z^-29 + 1.04 z^-30 - 0.9113 z^-31 + 0.1639 z^-32 - 0.1923 z^-33 + 0.5596 z^-34 - 0.747 z^-35 + 0.1846 z^-36 - 0.08184 z^-37 + 0.6172 z^-38 - 0.4672 z^-39 - 0.2212 z^-40 + 0.727 z^-41 - 0.02333 z^-42 - 0.2406 z^-43 - 0.6425 z^-44 + 1.182 z^-45 - 0.9615 z^-46 + 0.4614 z^-47 - 0.4282 z^-48 + 0.499 z^-49 - 0.2389 z^-50 + 0.06009 z^-51 - 0.5941 z^-52 + 0.7618 z^-53 + 0.0546 z^-54 - 0.6886 z^-55 + 0.5258 z^-56 - 0.2273 z^-57 + 0.6786 z^-58 - 0.905 z^-59 + 0.4194 z^-60 + 0.1115 z^-61 + 0.4067 z^-62 - 1.233 z^-63 + 1.415 z^-64 - 0.4602 z^-65 - 0.005432 z^-66 - 0.2666 z^-67 + 0.3418 z^-68 + 0.2362 z^-69 - 0.5862 z^-70 + 0.3193 z^-71 - 0.02957 z^-72 + 0.03121 z^-73 - 0.2353 z^-74 + 0.4886 z^-75 - 0.445 z^-76 + 0.3632 z^-77 - 0.1097 z^-78 - 0.1469 z^-79 + 0.2563 z^-80 - 0.2018 z^-81 + 0.5499 z^-82 - 0.9221 z^-83 + 1.183 z^-84 - 0.8641 z^-85 + 0.2575 z^-86 - 0.2276 z^-87 + 0.2459 z^-88 - 0.3165 z^-89

C(z) = 1 - 0.8281 z^-1 - 0.1859 z^-2 + 0.6361 z^-3 + 0.1173 z^-4 - 1.08 z^-5 + 0.6206 z^-6 + 0.2567 z^-7 - 0.4059 z^-8 - 0.1819 z^-9 + 0.3007 z^-10 + 0.4578 z^-11 - 0.4821 z^-12 + 0.09564 z^-13 - 0.09444 z^-14 + 0.5301 z^-15 - 0.4064 z^-16 - 0.1678 z^-17 - 0.02127 z^-18 + 0.4929 z^-19 - 0.4523 z^-20 - 0.4495 z^-21 + 0.8113 z^-22 + 0.2824 z^-23 - 0.8276 z^-24 - 0.316 z^-25 + 1.343 z^-26 - 0.7488 z^-27 - 0.4354 z^-28 - 0.01694 z^-29 + 0.6634 z^-30 - 0.4146 z^-31 - 0.1031 z^-32 - 0.152 z^-33 + 0.6547 z^-34 - 0.1284 z^-35 - 0.632 z^-36 + 0.4228 z^-37 + 0.2685 z^-38 - 0.1364 z^-39 - 0.9199 z^-40 + 0.7549 z^-41 + 0.1876 z^-42 - 0.3813 z^-43 - 0.5977 z^-44 + 0.9864 z^-45 - 0.2679 z^-46 - 0.4073 z^-47 + 0.2609 z^-48 + 0.3094 z^-49 - 0.336 z^-50 - 0.256 z^-51 + 0.225 z^-52 - 0.1479 z^-53 + 0.4989 z^-54 - 0.5946 z^-55 + 0.09436 z^-56 + 0.2819 z^-57 + 0.2066 z^-58 - 0.6476 z^-59 + 0.3884 z^-60 + 0.01106 z^-61 - 0.09044 z^-62 - 0.183 z^-63 + 0.03198 z^-64 + 0.3859 z^-65 - 0.4289 z^-66 + 0.1061 z^-67 + 0.1881 z^-68 + 0.1203 z^-69 - 0.2411 z^-70 + 0.3608 z^-71 - 0.1116 z^-72 - 0.1399 z^-73 + 0.09195 z^-74 - 0.04697 z^-75 + 0.003936 z^-76 - 0.07973 z^-77 + 0.1726 z^-78 - 0.2288 z^-79 + 0.1529 z^-80 - 0.04586 z^-81 + 0.1312 z^-82 - 0.1881 z^-83 + 0.1572 z^-84 + 0.01099 z^-85 - 0.06679 z^-86 - 0.06505 z^-87 + 0.05432 z^-88 + 0.04644 z^-89

ANEXO IV.

A(z) = 1 - 0.1614 z^-1 - 0.1786 z^-2 - 0.08084 z^-3 - 0.2283 z^-4 + 0.06034 z^-5 + 0.03228 z^-6 - 0.06808 z^-7 - 0.005386 z^-8 - 0.008079 z^-9 - 0.07484 z^-10 + 0.04821 z^-11 - 0.02878 z^-12 - 0.05582 z^-13 + 0.0268 z^-14 - 0.06215 z^-15 - 0.0004616 z^-16 + 0.1653 z^-17 - 0.01751 z^-18 - 0.0962 z^-19 + 0.009743 z^-20 - 0.07291 z^-21 - 0.008714 z^-22 + 0.0002196 z^-23 - 0.08104 z^-24 + 0.0577 z^-25 - 0.03898 z^-26 + 0.001663 z^-27 + 0.09833 z^-28 - 0.08569 z^-29 - 0.2538 z^-30 - 1.009 z^-31 + 0.1145 z^-32 + 0.01223 z^-33 + 0.2084 z^-34 + 0.2853 z^-35 - 0.03751 z^-36 + 0.04782 z^-37 - 0.005979 z^-38 - 0.001842 z^-39 - 0.03724 z^-40 - 0.02803 z^-41 + 0.09429 z^-42 + 0.1006 z^-43 + 0.06288 z^-44 + 0.04425 z^-45 + 0.05753 z^-46 - 0.06559 z^-47 - 0.1549 z^-48 + 0.0654 z^-49 + 0.04455 z^-50 + 0.03523 z^-51 + 0.06675 z^-52 + 0.04804 z^-53 + 0.04457 z^-54 + 0.001925 z^-55 + 0.004565 z^-56 + 0.09299 z^-57 - 0.2022 z^-58 - 0.1637 z^-59 + 0.14 z^-60 + 0.2367 z^-61 + 0.2208 z^-62 + 0.1268 z^-63 + 0.153 z^-64 - 0.01415 z^-65 - 0.129 z^-66 - 0.05756 z^-67 - 0.09133 z^-68 + 0.008124 z^-69 + 0.05755 z^-70 + 0.1488 z^-71 + 0.007853 z^-72 - 0.1649 z^-73 - 0.0512 z^-74 - 0.1202 z^-75 - 0.1167 z^-76 + 0.08258 z^-77 + 0.1267 z^-78 - 0.03592 z^-79 - 0.08552 z^-80 + 0.005594 z^-81 - 0.03977 z^-82 + 0.05783 z^-83 - 0.05812 z^-84 - 0.07804 z^-85 + 0.01244 z^-86 - 0.1515 z^-87 + 0.187 z^-88 + 0.2395 z^-89 + 0.09383 z^-90 - 0.09464 z^-91 - 0.116 z^-92 - 0.08813 z^-93 - 0.07566 z^-94 - 0.07453 z^-95 - 0.09445 z^-96 - 0.02806 z^-97 - 0.01708 z^-98 + 0.1489 z^-99 + 0.02966 z^-100 - 0.07176 z^-101 - 0.1716 z^-102 + 0.05915 z^-103 + 0.04761 z^-104 + 0.0856 z^-105 + 0.1869 z^-106 + 0.01352 z^-107 - 0.1966 z^-108 - 0.01605 z^-109 + 0.09888 z^-110 - 0.04081 z^-111 + 0.1067 z^-112 - 0.02167 z^-113 - 0.1004 z^-114 + 0.09991 z^-115 - 0.00534 z^-116 + 0.0399 z^-117 + 0.1062 z^-118 - 0.2449 z^-119 - 0.06258 z^-120 + 0.01212 z^-121 + 0.04865 z^-122 + 0.0474 z^-123 - 0.0004806 z^-124 - 0.07059 z^-125 + 0.08802 z^-126 + 0.03446 z^-127 + 0.03698 z^-128 + 0.08479 z^-129 - 0.1518 z^-130 + 0.02471 z^-131 + 0.0513 z^-132 + 0.05277 z^-133 - 0.009109 z^-134 + 0.04317 z^-135 - 0.1463 z^-136 - 0.08021 z^-137 + 0.09347 z^-138

ANEXO V.

A(z) = 1 + 0.7818 z^-1 + 0.5941 z^-2 + 0.4639 z^-3 + 0.218 z^-4 + 0.2828 z^-5 + 0.2866 z^-6 + 0.2501 z^-7 + 0.2973 z^-8 + 0.3169 z^-9 + 0.215 z^-10 + 0.1992 z^-11 + 0.2813 z^-12 + 0.2825 z^-13 + 0.3188 z^-14 + 0.1652 z^-15 + 0.0478 z^-16 + 0.2052 z^-17 + 0.3006 z^-18 + 0.2915 z^-19 + 0.194 z^-20 + 0.1657 z^-21 + 0.07098 z^-22 + 0.09828 z^-23 + 0.08262 z^-24 + 0.1653 z^-25 + 0.1268 z^-26 + 0.1057 z^-27 + 0.1132 z^-28 - 0.02067 z^-29 - 0.2024 z^-30 - 1.148 z^-31 - 0.9406 z^-32 - 0.9378 z^-33 - 0.6627 z^-34 - 0.3656 z^-35 - 0.3381 z^-36 - 0.1886 z^-37 - 0.3104 z^-38 - 0.3786 z^-39 - 0.524 z^-40 - 0.5355 z^-41 - 0.3739 z^-42 - 0.4059 z^-43 - 0.3855 z^-44 - 0.4111 z^-45 - 0.2378 z^-46 - 0.1609 z^-47 - 0.2471 z^-48 - 0.1767 z^-49 - 0.2805 z^-50 - 0.1535 z^-51 - 0.1792 z^-52 - 0.04397 z^-53 - 0.1372 z^-54 - 0.2 z^-55 - 0.2573 z^-56 - 0.2023 z^-57 - 0.4115 z^-58 - 0.5316 z^-59 - 0.2859 z^-60 + 0.0128 z^-61 + 0.2924 z^-62 + 0.5045 z^-63 + 0.6769 z^-64 + 0.6094 z^-65 + 0.4903 z^-66 + 0.3446 z^-67 + 0.1901 z^-68 + 0.1015 z^-69 + 0.09995 z^-70 + 0.2382 z^-71 + 0.2853 z^-72 + 0.2059 z^-73 + 0.1866 z^-74 + 0.1545 z^-75 + 0.05577 z^-76 + 0.1381 z^-77 + 0.3283 z^-78 + 0.2782 z^-79 + 0.1798 z^-80 + 0.149 z^-81 + 0.003456 z^-82 + 0.09987 z^-83 - 0.09254 z^-84 - 0.09757 z^-85 - 0.1189 z^-86 - 0.243 z^-87 + 0.1006 z^-88 + 0.382 z^-89 + 0.5454 z^-90 + 0.4263 z^-91 + 0.193 z^-92 - 0.007478 z^-93 - 0.3067 z^-94 - 0.3303 z^-95 - 0.3156 z^-96 - 0.3011 z^-97 - 0.1871 z^-98 - 0.2004 z^-99 + 0.02254 z^-100 + 0.09232 z^-101 + 0.08462 z^-102 + 0.1158 z^-103 + 0.07865 z^-104 + 0.001911 z^-105 + 0.02365 z^-106 + 0.1621 z^-107 - 0.07262 z^-108 - 0.1728 z^-109 - 0.121 z^-110 - 0.2468 z^-111 - 0.02737 z^-112 + 0.01464 z^-113 - 0.0299 z^-114 + 0.2213 z^-115 + 0.2569 z^-116 + 0.3337 z^-117 + 0.4012 z^-118 + 0.0862 z^-119

ANEXO VI.

A(z) = 1 - 0.5015 z^-1 + 2.059 z^-2 - 2.046 z^-3 + 2.367 z^-4 - 2.091 z^-5 + 1.289 z^-6 - 0.3674 z^-7 - 0.8613 z^-8 + 1.651 z^-9 - 2.533 z^-10 + 2.587 z^-11 - 2.315 z^-12 + 2.071 z^-13 - 1.182 z^-14 + 0.2794 z^-15 + 0.3567 z^-16 - 0.8806 z^-17 + 1.394 z^-18 - 1.553 z^-19 + 1.379 z^-20 - 1.331 z^-21 + 0.8783 z^-22 - 0.725 z^-23 - 0.03094 z^-24 + 0.00494 z^-25 - 0.365 z^-26 + 0.2712 z^-27 - 0.3151 z^-28 + 0.1663 z^-29 - 0.1287 z^-30 - 0.9975 z^-31 + 0.515 z^-32 - 2.216 z^-33 + 2.227 z^-34 - 2.644 z^-35 + 2.502 z^-36 - 1.77 z^-37 + 0.7315 z^-38 + 0.3398 z^-39 - 1.658 z^-40 + 2.432 z^-41 - 2.896 z^-42 + 2.889 z^-43 - 2.632 z^-44 + 1.873 z^-45 - 0.9338 z^-46 + 0.5656 z^-47 + 0.3843 z^-48 - 0.7262 z^-49 + 1.102 z^-50 - 1.105 z^-51 + 1.198 z^-52 - 0.7789 z^-53 + 0.7216 z^-54 - 0.1561 z^-55 + 0.157 z^-56 + 0.2065 z^-57 - 0.1657 z^-58 + 0.295 z^-59 - 0.173 z^-60 + 0.2748 z^-61 - 0.03952 z^-62 + 0.01705 z^-63 + 0.3049 z^-64 - 0.3986 z^-65 + 0.6294 z^-66 - 0.7722 z^-67 + 0.6819 z^-68 - 0.3996 z^-69 + 0.3947 z^-70 + 0.2945 z^-71 - 0.3889 z^-72 + 0.7526 z^-73 - 0.9362 z^-74 + 0.8542 z^-75 - 0.8744 z^-76 + 0.6333 z^-77 - 0.7427 z^-78 + 0.3661 z^-79 - 0.3848 z^-80 + 0.1907 z^-81 - 0.01661 z^-82

C(z) = 1 - 1.959 z^-1 + 3.37 z^-2 - 4.878 z^-3 + 5.724 z^-4 - 5.746 z^-5 + 4.435 z^-6 - 2.304 z^-7 - 0.6908 z^-8 + 3.62 z^-9 - 6.068 z^-10 + 7.523 z^-11 - 7.568 z^-12 + 6.475 z^-13 - 4.402 z^-14 + 1.842 z^-15 + 0.8958 z^-16 - 3.244 z^-17 + 4.85 z^-18 - 5.834 z^-19 + 5.739 z^-20 - 4.832 z^-21 + 3.339 z^-22 - 1.756 z^-23 + 0.1558 z^-24 + 0.993 z^-25 - 1.547 z^-26 + 1.662 z^-27 - 1.214 z^-28 + 0.5557 z^-29 + 0.3003 z^-30 - 1.025 z^-31 + 1.555 z^-32 - 1.771 z^-33 + 1.816 z^-34 - 1.642 z^-35 + 1.311 z^-36 - 1.152 z^-37 + 0.8791 z^-38 - 0.6423 z^-39 + 0.3821 z^-40 - 0.0575 z^-41 - 0.4888 z^-42 + 1.257 z^-43 - 2.129 z^-44 + 3.161 z^-45 - 3.961 z^-46 + 4.443 z^-47 - 4.265 z^-48 + 3.422 z^-49 - 1.819 z^-50 - 0.2206 z^-51 + 2.262 z^-52 - 4.284 z^-53 + 5.548 z^-54 - 5.988 z^-55 + 5.577 z^-56 - 4.468 z^-57 + 2.783 z^-58 - 0.7848 z^-59 - 1.171 z^-60 + 2.949 z^-61 - 4.307 z^-62 + 4.953 z^-63 - 4.981 z^-64 + 4.203 z^-65 - 2.756 z^-66 + 0.9294 z^-67 + 0.9371 z^-68 - 2.44 z^-69 + 3.256 z^-70 - 3.347 z^-71 + 2.673 z^-72 - 1.569 z^-73 + 0.4154 z^-74 + 0.6701 z^-75 - 1.318 z^-76 + 1.557 z^-77 - 1.431 z^-78 + 1.108 z^-79 - 0.6737 z^-80 + 0.3543 z^-81 - 0.1428 z^-82

ANEXO VII

A(z) = 1 + 0.04718 z^-1 + 0.01927 z^-2 - 0.01087 z^-3 + 0.01059 z^-4 + 0.001081 z^-5 + 0.0207 z^-6 + 0.02146 z^-7 - 0.02323 z^-8 + 0.02599 z^-9 - 0.01272 z^-10 - 1.324e-05 z^-11 - 0.008018 z^-12 - 0.02521 z^-13 + 0.02838 z^-14 - 0.007816 z^-15 + 0.01822 z^-16 + 0.0008319 z^-17 - 0.01053 z^-18 + 0.01118 z^-19 + 0.04206 z^-20 + 0.02557 z^-21 + 0.0006526 z^-22 - 0.006264 z^-23 - 0.001362 z^-24 - 0.004056 z^-25 - 0.03528 z^-26 + 0.00275 z^-27 - 0.008279 z^-28 - 0.0149 z^-29 + 0.01159 z^-30 - 0.01063 z^-31 - 0.03705 z^-32 + 0.03322 z^-33 - 0.008692 z^-34 - 0.01103 z^-35 + 0.04313 z^-36 + 0.004915 z^-37 + 0.02089 z^-38 + 0.03789 z^-39 - 0.02985 z^-40 + 0.006723 z^-41 - 0.009029 z^-42 + 0.01503 z^-43 - 0.002988 z^-44 + 0.002504 z^-45 - 0.01527 z^-46 - 0.01606 z^-47 + 0.01856 z^-48 + 0.0237 z^-49 + 0.02701 z^-50 + 0.01018 z^-51 - 0.01438 z^-52 + 0.0268 z^-53 + 9.706e-06 z^-54 - 0.0005335 z^-55 - 0.03038 z^-56 - 0.04758 z^-57 - 0.00336 z^-58 + 0.001322 z^-59 + 0.03515 z^-60 - 0.01929 z^-61 - 0.01051 z^-62 - 0.01036 z^-63 - 0.03869 z^-64 + 0.007057 z^-65 + 0.01416 z^-66 - 0.0217 z^-67 + 0.005806 z^-68 + 0.02148 z^-69 + 0.005984 z^-70 + 0.006246 z^-71 + 0.01418 z^-72 + 0.001655 z^-73 + 0.02996 z^-74 + 0.01833 z^-75 - 0.02615 z^-76 + 0.01022 z^-77 - 0.01495 z^-78 + 0.05639 z^-79 - 0.009465 z^-80 + 0.00375 z^-81 + 0.002426 z^-82 + 0.008465 z^-83 - 0.03196 z^-84 + 0.01503 z^-85 + 0.02495 z^-86 + 0.01962 z^-87 + 0.01892 z^-88 - 0.02279 z^-89 - 0.01161 z^-90 - 0.02189 z^-91 + 0.009507 z^-92 - 0.004596 z^-93 - 0.0108 z^-94 - 0.03027 z^-95 - 0.008764 z^-96 - 0.01084 z^-97 - 0.006224 z^-98 - 0.02448 z^-99 + 0.005319 z^-100 + 0.006131 z^-101 + 0.009955 z^-102 - 0.007995 z^-103 + 0.01444 z^-104 - 0.01551 z^-105 - 0.01517 z^-106 + 0.02945 z^-107 + 0.04404 z^-108 - 0.02879 z^-109 - 0.02842 z^-110 + 0.01002 z^-111 + 0.01174 z^-112 - 0.03139 z^-113 - 0.002633 z^-114 + 0.02295 z^-115 + 0.003877 z^-116 + 0.005382 z^-117 + 0.06538 z^-118 - 0.006178 z^-119 - 0.000597 z^-120 + 0.025 z^-121 - 0.004157 z^-122 - 0.01216 z^-123 + 0.01123 z^-124 - 0.0009427 z^-125 + 0.02482 z^-126 - 0.01367 z^-127 - 0.0003742 z^-128 + 0.0126 z^-129 + 0.02453 z^-130 - 0.02355 z^-131 - 0.01572 z^-132 - 0.03498 z^-133 - 0.01956 z^-134 + 0.03069 z^-135 - 0.02134 z^-136 - 0.01118 z^-137 - 0.005234 z^-138 - 0.02347 z^-139 - 0.02711 z^-140 + 0.02606 z^-141 - 0.004814 z^-142 + 0.002525 z^-143 - 0.03894 z^-144 + 0.03536 z^-145 + 0.02522 z^-146 + 0.02203 z^-147 + 0.01518 z^-148 + 0.01051 z^-149 - 0.01541 z^-150 + 0.03735 z^-151 + 0.03393 z^-152 - 0.009647 z^-153 - 0.006458 z^-154 + 0.00107 z^-155 + 0.006971 z^-156 + 0.02177 z^-157 - 0.02864 z^-158 + 0.02246 z^-159 - 0.006482 z^-160 + 0.002561 z^-161 + 0.009897 z^-162 + 0.01046 z^-163 - 0.03806 z^-164 - 0.001581 z^-165 + 0.04318 z^-166 + 0.02147 z^-167

ANEXO VIII

A(z) = 1 - 0.9573 z^-1 - 0.02221 z^-2 - 0.02558 z^-3 + 0.01384 z^-4 - 0.01274 z^-5 + 0.02638 z^-6 + 0.005305 z^-7 - 0.06095 z^-8 + 0.0545 z^-9 - 0.03738 z^-10 + 0.01994 z^-11 - 0.01223 z^-12 - 0.02203 z^-13 + 0.05364 z^-14 - 0.02943 z^-15 + 0.0242 z^-16 - 0.01395 z^-17 - 0.01755 z^-18 + 0.02338 z^-19 + 0.03468 z^-20 - 0.0157 z^-21 - 0.02394 z^-22 - 0.01361 z^-23 + 0.006948 z^-24 - 0.005499 z^-25 - 0.02648 z^-26 + 0.04286 z^-27 - 0.02047 z^-28 - 0.01221 z^-29 + 0.03587 z^-30 - 0.02194 z^-31 - 0.03124 z^-32 + 0.07664 z^-33 - 0.04131 z^-34 + 0.001022 z^-35 + 0.05504 z^-36 - 0.03665 z^-37 + 0.01292 z^-38 + 0.01997 z^-39 - 0.07595 z^-40 + 0.03159 z^-41 - 0.01371 z^-42 + 0.01794 z^-43 + 8.08e-05 z^-44 - 0.0025 z^-45 - 0.02004 z^-46 + 0.0003133 z^-47 + 0.03601 z^-48 + 0.007861 z^-49 + 0.0004833 z^-50 - 0.01387 z^-51 - 0.03539 z^-52 + 0.05206 z^-53 - 0.02501 z^-54 - 0.005482 z^-55 - 0.02655 z^-56 - 0.01179 z^-57 + 0.03642 z^-58 - 0.003704 z^-59 + 0.04364 z^-60 - 0.05753 z^-61 + 0.006689 z^-62 - 0.00551 z^-63 - 0.01917 z^-64 + 0.04441 z^-65 + 0.009643 z^-66 - 0.03804 z^-67 + 0.02802 z^-68 + 0.01405 z^-69 - 0.01858 z^-70 + 0.0009546 z^-71 + 0.003062 z^-72 - 0.008726 z^-73 + 0.03209 z^-74 - 0.01124 z^-75 - 0.04105 z^-76 + 0.03352 z^-77 - 0.02406 z^-78 + 0.06283 z^-79 - 0.05361 z^-80 + 0.009159 z^-81 - 0.009451 z^-82 + 0.004482 z^-83 - 0.02584 z^-84 + 0.04345 z^-85 + 0.009249 z^-86 - 0.009183 z^-87 - 0.006977 z^-88 - 0.03343 z^-89 + 0.0121 z^-90 - 0.02062 z^-91 + 0.03496 z^-92 - 0.01541 z^-93 - 0.001894 z^-94 - 0.01733 z^-95 + 0.02193 z^-96 + 0.0009794 z^-97 + 0.003896 z^-98 - 0.01753 z^-99 + 0.03082 z^-100 - 8.719e-05 z^-101 + 0.0001817 z^-102 - 0.01681 z^-103 + 0.02145 z^-104 - 0.02783 z^-105 - 0.004605 z^-106 + 0.04833 z^-107 + 0.01163 z^-108 - 0.06973 z^-109 + 0.003334 z^-110 + 0.03714 z^-111 - 0.00553 z^-112 - 0.03848 z^-113 + 0.03022 z^-114 + 0.01668 z^-115 - 0.01303 z^-116 + 0.005032 z^-117 + 0.05777 z^-118 - 0.06789 z^-119 + 0.004759 z^-120 + 0.02379 z^-121 - 0.03179 z^-122 - 0.006914 z^-123 + 0.02156 z^-124 - 0.01139 z^-125 + 0.02845 z^-126 - 0.0371 z^-127 + 0.0105 z^-128 + 0.008843 z^-129 + 0.01357 z^-130 - 0.04766 z^-131 + 0.00934 z^-132 - 0.0165 z^-133 + 0.01379 z^-134 + 0.05254 z^-135 - 0.0518 z^-136 + 0.01252 z^-137 - 0.0003021 z^-138 - 0.01906 z^-139 - 0.003077 z^-140 + 0.05639 z^-141 - 0.03669 z^-142 + 0.01095 z^-143 - 0.04248 z^-144 + 0.07517 z^-145 - 0.01147 z^-146 - 0.003118 z^-147 - 0.008382 z^-148 - 0.003841 z^-149 - 0.02371 z^-150 + 0.05161 z^-151 - 0.002422 z^-152 - 0.0438 z^-153 + 0.002719 z^-154 + 0.01185 z^-155 + 0.007324 z^-156 + 0.01149 z^-157 - 0.05275 z^-158 + 0.05106 z^-159 - 0.02988 z^-160 + 0.01049 z^-161 + 0.006673 z^-162 + 0.0004355 z^-163 - 0.04676 z^-164 + 0.03661 z^-165 + 0.04532 z^-166 - 0.04411 z^-167

ANEXO IX

- ARIMA:

A(z) = 1 + 0.7751 z^-1 + 0.6174 z^-2 + 0.3405 z^-3 + 0.1757 z^-4 + 0.2012 z^-5 0.07807 z^-6 - 0.2963 z^-7 - 0.3568 z^-8 - 0.2807 z^-9 - 0.3691 z^-10 - 0.2967 z^-11 - 0.249 z^-12 - 0.1463 z^-13 - 0.05181 z^-14 - 0.1762 z^-15 - 0.1192 z^-16 - 0.03263 z^-17 + 0.04043 z^-18 + 0.005708 z^-19 - 0.043 z^-20 - 0.04839 z^-21 - 0.01629 z^-22 - 0.02468 z^-23 - 0.0186 z^-24 + 0.09205 z^-25 + 0.08676 z^-26 + 0.1412 z^-27 + 0.07505 z^-28 + 0.03683 z^-29 - 0.1875 z^-30 - 0.05497 z^-31 - 0.05209 z^-32 - 0.1346 z^-33 + 0.1934 z^-34 + 0.1706 z^-35 + 0.294 z^-36 + 0.09689 z^-37 - 0.05351 z^-38 + 0.1207 z^-39 + 0.2324 z^-40 + 0.1765 z^-41 + 0.03524 z^-42 + 0.01418 z^-43 - 0.1643 z^-44 - 0.04484 z^-45 - 0.2642 z^-46 - 0.212 z^-47 - 0.1963 z^-48 - 0.08626 z^-49 + 0.01565 z^-50 - 0.01847 z^-51 + 0.03428 z^-52 + 0.2464 z^-53 + 0.2089 z^-54 + 0.05469 z^-55

C(z) = 1 + 0.7607 z^-1 + 0.5078 z^-2 + 0.2956 z^-3 + 0.1534 z^-4 + 0.1649 z^-5 - 0.1865 z^-6 - 0.4201 z^-7 - 0.3835 z^-8 - 0.2371 z^-9 - 0.3252 z^-10 - 0.289 z^-11 - 0.2524 z^-12 - 0.1662 z^-13 - 0.05269 z^-14 - 0.2277 z^-15 - 0.2095 z^-16 - 0.07454 z^-17 + 0.02921 z^-18 + 0.04459 z^-19 - 0.005306 z^-20 - 0.007999 z^-21 + 0.02672 z^-22 + 0.02597 z^-23 - 0.08448 z^-24 + 0.007451 z^-25 - 0.05247 z^-26 + 0.0104 z^-27 + 0.01782 z^-28 - 0.04387 z^-29 - 0.2266 z^-30 + 0.0002389 z^-31 + 0.1188 z^-32 - 0.005625 z^-33 + 0.3096 z^-34 + 0.291 z^-35 + 0.3835 z^-36 + 0.1579 z^-37 - 0.1271 z^-38 + 0.08578 z^-39 + 0.1215 z^-40 + 0.1007 z^-41 - 0.05553 z^-42 - 0.07518 z^-43 - 0.1687 z^-44 - 0.09887 z^-45 - 0.311 z^-46 - 0.2497 z^-47 - 0.1718 z^-48 - 0.09438 z^-49 - 0.01959 z^-50 - 0.08998 z^-51 - 0.01373 z^-52 + 0.2888 z^-53 + 0.1864 z^-54 + 0.05489 z^-55

ANEXO X

- AR:

A(z) = 1 - 0.9845 z^-1 + 0.02772 z^-2 - 0.05929 z^-3 - 0.01871 z^-4 + 0.05869 z^-5 + 0.0101 z^-6 + 0.01842 z^-7 - 0.07178 z^-8 - 0.01381 z^-9 - 0.0117 z^-10 + 0.06757 z^-11 + 0.02736 z^-12 + 0.01114 z^-13 - 0.07786 z^-14 + 0.02421 z^-15 + 0.0129 z^-16 + 0.02225 z^-17 - 0.0487 z^-18 - 0.03767 z^-19 + 0.06652 z^-20 - 0.0695 z^-21 + 0.05562 z^-22 - 0.02522 z^-23 + 0.04191 z^-24 - 0.000449 z^-25 + 0.02774 z^-26 - 0.049 z^-27 + 0.001683 z^-28 + 0.008815 z^-29 - 0.05942 z^-30 - 0.005496 z^-31 + 0.02152 z^-32 + 0.04135 z^-33 + 0.04976 z^-34 - 0.1006 z^-35 + 0.03149 z^-36 + 0.004639 z^-37 + 0.005593 z^-38 + 0.06616 z^-39 - 0.004391 z^-40 - 0.0987 z^-41 + 0.05771 z^-42 - 0.02262 z^-43 - 0.07094 z^-44 + 0.1115 z^-45 - 0.08794 z^-46 + 0.0409 z^-47 - 0.005602 z^-48 + 0.04011 z^-49 + 0.01674 z^-50 - 0.03207 z^-51 - 0.0009749 z^-52 - 0.004277 z^-53 + 0.02346 z^-54 - 0.03033 z^-55

- ARI:

A(z) = 1 + 0.009118 z^-1 + 0.04415 z^-2 - 0.006916 z^-3 - 0.02853 z^-4 + 0.02866 z^-5 + 0.04345 z^-6 + 0.03808 z^-7 - 0.01638 z^-8 - 0.03101 z^-9 - 0.04162 z^-10 + 0.01739 z^-11 + 0.03274 z^-12 + 0.0474 z^-13 - 0.01803 z^-14 + 0.01233 z^-15 + 0.01426 z^-16 + 0.03151 z^-17 - 0.002872 z^-18 - 0.05788 z^-19 + 0.01561 z^-20 - 0.03575 z^-21 + 0.0004878 z^-22 - 0.01618 z^-23 + 0.04848 z^-24 + 0.02476 z^-25 + 0.04645 z^-26 + 0.009314 z^-27 + 0.001333 z^-28 + 0.01135 z^-29 - 0.04009 z^-30 - 0.03767 z^-31 - 0.0355 z^-32 + 0.004686 z^-33 + 0.05013 z^-34 - 0.0352 z^-35 - 0.008079 z^-36 - 0.009289 z^-37 + 0.005348 z^-38 + 0.06648 z^-39 + 0.06188 z^-40 - 0.03561 z^-41 + 0.02562 z^-42 + 0.007237 z^-43 - 0.07385 z^-44 + 0.03615 z^-45 - 0.04355 z^-46 - 0.006968 z^-47 - 0.009945 z^-48 + 0.03488 z^-49 + 0.04077 z^-50 + 0.01411 z^-51 + 0.004968 z^-52 + 0.00842 z^-53 + 0.02971 z^-54 - 0.003087 z^-55

ANEXO XI.

- ARIMA:

A(z) = 1 + 0.8214 z^-1 + 0.6582 z^-2 + 0.4802 z^-3 + 0.2351 z^-4 + 0.3447 z^-5 + 0.1583 z^-6 + 0.2143 z^-7 - 0.1382 z^-8 - 0.0849 z^-9 - 0.08948 z^-10 - 0.638 z^-11 - 0.387 z^-12 - 0.3381 z^-13

C(z) = 1 + 0.7476 z^-1 + 0.6615 z^-2 + 0.4216 z^-3 + 0.246 z^-4 + 0.4017 z^-5 - 0.166 z^-6 - 0.09082 z^-7 - 0.45 z^-8 - 0.2305 z^-9 - 0.2806 z^-10 - 0.8913 z^-11 - 0.616 z^-12 - 0.5619 z^-13

- AR:

A(z) = 1 - 0.978 z^-1 - 0.112 z^-2 + 0.2205 z^-3 - 0.1156 z^-4 - 0.07371 z^-5 + 0.2106 z^-6 - 0.1668 z^-7 - 0.0888 z^-8 + 0.2189 z^-9 - 0.06656 z^-10 - 0.2031 z^-11 + 0.2084 z^-12 - 0.04693 z^-13

- ARI:

A(z) = 1 + 0.02766 z^-1 - 0.09033 z^-2 + 0.1226 z^-3 - 0.01686 z^-4 - 0.08039 z^-5 + 0.1745 z^-6 - 0.02413 z^-7 - 0.1048 z^-8 + 0.1161 z^-9 + 0.05248 z^-10 - 0.1692 z^-11 + 0.05464 z^-12 + 0.03316 z^-13

ANEXO XII:

A(z) = 1 - 7.72 z^-1 + 25.86 z^-2 - 50.67 z^-3 + 71.1 z^-4 - 90.38 z^-5 + 113.6 z^-6 - 127.5 z^-7 + 134.1 z^-8 - 152 z^-9 + 168.1 z^-10 - 173.4 z^-11 + 192.4 z^-12 - 214.2 z^-13 + 216 z^-14 - 225.8 z^-15 + 245.2 z^-16 - 244.9 z^-17 + 249.5 z^-18 - 271.4 z^-19 + 274.7 z^-20 - 273.1 z^-21 + 291.6 z^-22 - 295.3 z^-23 + 285.4 z^-24 - 300.2 z^-25 + 311.6 z^-26 - 302.9 z^-27 + 316.6 z^-28 - 333.4 z^-29 + 320.8 z^-30 - 324.2 z^-31 + 340.3 z^-32 - 327.7 z^-33 + 325.5 z^-34 - 344.3 z^-35 + 333.6 z^-36 - 320.4 z^-37 + 333.3 z^-38 - 322.8 z^-39 + 301 z^-40 - 313.7 z^-41 + 316.2 z^-42 - 297.8 z^-43 + 311.1 z^-44 - 320.1 z^-45 + 296.2 z^-46 - 298.4 z^-47 + 310.3 z^-48 - 288.2 z^-49 + 286.3 z^-50 - 308 z^-51 + 294.7 z^-52 - 284.9 z^-53 + 302.6 z^-54 - 287.2 z^-55 + 264 z^-56 - 279.1 z^-57 + 274.1 z^-58 - 252.2 z^-59 + 269.1 z^-60 - 275.1 z^-61 + 250.9 z^-62 - 257.8 z^-63 + 267.7 z^-64 - 244.5 z^-65 + 245.3 z^-66 - 262.7 z^-67 + 245.4 z^-68 - 238.3 z^-69 + 255.7 z^-70 - 240 z^-71 + 221.9 z^-72 - 236.5 z^-73 + 229.5 z^-74 - 211.8 z^-75 + 227.9 z^-76 - 230.5 z^-77 + 211.2 z^-78 - 220.5 z^-79 + 227.2 z^-80 - 208.4 z^-81 + 215.3 z^-82 - 233.5 z^-83 + 224.3 z^-84 - 229.6 z^-85 + 251.5 z^-86 - 245.4 z^-87 + 242.3 z^-88 - 260.8 z^-89 + 258.2 z^-90 - 250 z^-91 + 265.7 z^-92 - 268.8 z^-93 + 257.3 z^-94 - 266.1 z^-95 + 272.4 z^-96 - 262.7 z^-97 + 270.6 z^-98 - 284.1 z^-99 + 280.9 z^-100 - 285.8 z^-101 + 295.4 z^-102 - 287.2 z^-103 + 282 z^-104 - 287.1 z^-105 + 282.5 z^-106 - 278.9 z^-107 + 285.2 z^-108 - 282.1 z^-109 + 271.8 z^-110 - 267.4 z^-111 + 258.5 z^-112 - 244.6 z^-113 + 240.1 z^-114 - 238.3 z^-115 + 230.9 z^-116 - 226.9 z^-117 + 223.5 z^-118 - 212.5 z^-119 + 202.7 z^-120 - 196.3 z^-121 + 187 z^-122 - 182.1 z^-123 + 183.1 z^-124 - 179 z^-125 + 172.1 z^-126 - 166.5 z^-127 + 155.9 z^-128 - 143.2 z^-129 + 135.1 z^-130 - 127.8 z^-131 + 120.1 z^-132 - 115.8 z^-133 + 112 z^-134 - 105.5 z^-135 + 100.6 z^-136 - 98.31 z^-137 + 95.21 z^-138 - 93.47 z^-139 + 94.05 z^-140 - 91.7 z^-141+ 86.55 z^-142 - 83.1 z^-143 + 80.72 z^-144 - 77.66 z^-145 + 76.28 z^-146 - 77.76 z^-147 + 77.91 z^-148 - 74.5 z^-149 + 70.33 z^-150 - 63.77 z^-151 + 52.29 z^-152 - 41.9 z^-153 + 35.88 z^-154 - 29.35 z^-155 + 22.07 z^-156 - 16.84 z^-157 + 11.49 z^-158 - 5.276 z^-159 + 0.6837 z^-160 + 2.371 z^-161 - 4.484 z^-162 + 4.348 z^-163 - 2.326 z^-164 + 0.6152 z^-165 - 0.03962 z^-166 - 0.009236 z^-167

ANEXO XIII

A(z) = 1 - 6.261 z^-1 + 16.35 z^-2 - 24.61 z^-3 + 29.76 z^-4 - 39.11 z^-5 + 46.82 z^-6 - 46.26 z^-7 + 51.79 z^-8 - 61.58 z^-9 + 59.87 z^-10 - 62.63 z^-11 + 74.46 z^-12 - 72.38 z^-13 + 70.62 z^-14 - 82.65 z^-15 + 82.34 z^-16 - 76.9 z^-17 + 87.88 z^-18 - 90.48 z^-19 + 80.83 z^-20 - 88.11 z^-21 + 94.78 z^-22 - 83.17 z^-23 + 86.38 z^-24 - 98.24 z^-25 + 87.88 z^-26 - 86.21 z^-27 + 100.1 z^-28 - 91.7 z^-29 + 84.8 z^-30 - 98.45 z^-31 + 94.14 z^-32 - 83.84 z^-33 + 95.98 z^-34 - 96.15 z^-35 + 81.48 z^-36 - 88.85 z^-37 + 93.43 z^-38 - 76.98 z^-39 + 80.34 z^-40 - 90.08 z^-41 + 75.04 z^-42 - 74.62 z^-43 + 87.55 z^-44 - 74.82 z^-45 + 69.41 z^-46 - 83.76 z^-47 + 75.7 z^-48 - 65.03 z^-49 + 78.15 z^-50 - 75.07 z^-51 + 58.73 z^-52 - 67.14 z^-53 + 67.43 z^-54 - 46.77 z^-55 + 50.56 z^-56 - 56.82 z^-57 + 39.06 z^-58 - 40.82 z^-59 + 52.37 z^-60 - 38.13 z^-61 + 33.76 z^-62 - 45.57 z^-63 + 35.25 z^-64 - 25.38 z^-65 + 36.36 z^-66 - 30.71 z^-67 + 16.49 z^-68 - 25.53 z^-69 + 24.96 z^-70 - 8.153 z^-71 + 13.04 z^-72 - 16.95 z^-73 + 1.817 z^-74 - 3.708 z^-75 + 11.55 z^-76 + 0.6109 z^-77 - 2.965 z^-78 - 6.414 z^-79 - 1.899 z^-80 + 7.037 z^-81 + 4.161 z^-82 - 1.765 z^-83 - 4.494 z^-84 - 6.061 z^-85 + 7.647 z^-86 + 0.1673 z^-87 + 6.571 z^-88 - 9.91 z^-89 + 1.001 z^-90 - 2.653 z^-91 + 6.89 z^-92 + 0.7627 z^-93 - 2.765 z^-94 - 2.34 z^-95 - 1.005 z^-96 + 2.467 z^-97 + 4.293 z^-98 - 5.113 z^-99 + 3.963 z^-100 - 8.825 z^-101 + 9.428 z^-102 - 6.575 z^-103 + 8.572 z^-104 - 9.687 z^-105 + 8.27 z^-106 - 9.55 z^-107 + 10.21 z^-108 - 7.671 z^-109 + 5.362 z^-110 - 3.475 z^-111 + 0.9587 z^-112 + 0.528 z^-113 - 0.4582 z^-114 + 0.09591 z^-115

ANEXO XIV

A(z) = 1 - 6.469 z^-1 + 17.86 z^-2 - 29.16 z^-3 + 37.53 z^-4 - 49.14 z^-5 + 60.72 z^-6 - 64.38 z^-7 + 68.69 z^-8 - 75.96 z^-9 + 74.36 z^-10 - 69.48 z^-11 + 68.18 z^-12 - 61.17 z^-13 + 52.66 z^-14 - 49.61 z^-15 + 42.41 z^-16 - 32.68 z^-17 + 28.54 z^-18 - 20.99 z^-19 + 7.385 z^-20 + 2.053 z^-21 - 12.65 z^-22 + 31.42 z^-23 - 47.65 z^-24 + 61.44 z^-25 - 81.44 z^-26 + 98.83 z^-27 - 110.8 z^-28 + 125.1 z^-29 - 136 z^-30 + 141.2 z^-31 - 147.6 z^-32 + 151.9 z^-33 - 150 z^-34 + 147.9 z^-35 - 145.9 z^-36 + 138.2 z^-37 - 128.5 z^-38 + 121.3 z^-39 - 109.6 z^-40 + 96.09 z^-41 - 86.69 z^-42 + 73.63 z^-43 - 58.79 z^-44 + 50.35 z^-45 - 41.32 z^-46 + 30.13 z^-47 - 25.48 z^-48 + 24.13 z^-49 - 20.87 z^-50 + 23.46 z^-51 - 32.43 z^-52 + 38.38 z^-53 - 47.23 z^-54 + 62.7 z^-55 - 72.13 z^-56 + 78.8 z^-57 - 90.26 z^-58 + 95.75 z^-59 - 96.4 z^-60 + 101.1 z^-61 - 102.8 z^-62 + 100.7 z^-63 - 103.3 z^-64 + 106 z^-65 - 105.2 z^-66 + 108.3 z^-67 - 112.6 z^-68 + 112.3 z^-69 - 113.7 z^-70 + 116.3 z^-71 - 113.1 z^-72 + 108.2 z^-73 - 102.6 z^-74 + 91.1 z^-75 - 78.34 z^-76 + 67.18 z^-77 - 53.98 z^-78 + 41.49 z^-79 - 31.71 z^-80 + 21.97 z^-81 - 13.66 z^-82 + 8.496 z^-83 - 4.653 z^-84 + 1.625 z^-85 - 0.2472 z^-86

C(z) = 1 - 0.3726 z^-1 + 0.3742 z^-2 - 0.06564 z^-3 + 0.06952 z^-4 - 0.4137 z^-5 - 0.2847 z^-6 - 0.1275 z^-7 - 0.2823 z^-8 + 0.02126 z^-9 - 0.292 z^-10 + 0.3367 z^-11 + 0.15 z^-12 + 0.2233 z^-13 + 0.1073 z^-14 + 0.1827 z^-15 + 0.06293 z^-16 + 0.02897 z^-17 + 0.008322 z^-18 + 0.01047 z^-19 - 0.03569 z^-20 - 0.1456 z^-21 - 0.3501 z^-22 + 0.01018 z^-23 - 0.3718 z^-24 + 0.05617 z^-25 - 0.1829 z^-26 - 0.04332 z^-27 + 0.08128 z^-28 + 0.05955 z^-29 + 0.2408 z^-30 + 0.145 z^-31 + 0.2566 z^-32 + 0.03922 z^-33 + 0.0972 z^-34 - 0.1181 z^-35 - 0.09812 z^-36 - 0.1744 z^-37 - 0.2242 z^-38 - 0.1338 z^-39 - 0.2547 z^-40 - 0.09489 z^-41 - 0.07676 z^-42 - 0.06475 z^-43 + 0.1072 z^-44 + 0.08241 z^-45 + 0.08966 z^-46 + 0.1169 z^-47 + 0.2442 z^-48 + 0.1861 z^-49 - 0.01371 z^-50 - 0.08715 z^-51 - 0.03698 z^-52 - 0.0949 z^-53 - 0.1652 z^-54 - 0.2144 z^-55 - 0.009326 z^-56 - 0.08294 z^-57 - 0.2436 z^-58 + 0.04509 z^-59 + 0.1146 z^-60 + 0.142 z^-61 + 0.1347 z^-62 + 0.2422 z^-63 + 0.06567 z^-64 + 0.1026 z^-65 + 0.05799 z^-66 - 0.07429 z^-67 - 0.08149 z^-68 - 0.06917 z^-69 - 0.2074 z^-70 - 0.1796 z^-71 + 1.748e-05 z^-72 + 0.09902 z^-73 + 0.06042 z^-74 + 0.1286 z^-75 - 0.04228 z^-76 + 0.1857 z^-77 + 0.2364 z^-78 + 0.07061 z^-79 + 0.08198 z^-80 + 0.0299 z^-81 - 0.03945 z^-82 - 0.04291 z^-83 - 0.2098 z^-84 - 0.005227 z^-85 - 0.04284 z^-86

ANEXO XV.

A(z) = 1 - 4.159 z^-1 + 4.393 z^-2 + 1.963 z^-3 - 2.145 z^-4 - 4.483 z^-5 - 1.99 z^-6 + 7.083 z^-7 + 5.848 z^-8 - 4.135 z^-9 - 8.965 z^-10 - 2.921 z^-11 + 8.939 z^-12 + 9.757 z^-13 - 3.913 z^-14 - 12.37 z^-15 - 5.703 z^-16 + 9.528 z^-17 + 13.43 z^-18 - 0.5716 z^-19 - 14.99 z^-20 - 9.304 z^-21 + 7.972 z^-22 + 16.71 z^-23 + 3.138 z^-24 - 15.95 z^-25 - 13.67 z^-26 + 5.383 z^-27 + 18.67 z^-28 + 8.395 z^-29 - 14.13 z^-30 - 17.57 z^-31 + 1.263 z^-32 + 18.34 z^-33 + 12.96 z^-34 - 9.226 z^-35 - 20.85 z^-36 - 4.614 z^-37 + 16.23 z^-38 + 17.49 z^-39 - 3.862 z^-40 - 21.77 z^-41 - 10 z^-42 + 13.17 z^-43 + 20.55 z^-44 + 2.263 z^-45 - 19.53 z^-46 - 16.01 z^-47 + 7.441 z^-48 + 20.9 z^-49 + 8.841 z^-50 - 15.68 z^-51 - 19.82 z^-52 + 1.719 z^-53 + 19.13 z^-54 + 14.19 z^-55 - 9.032 z^-56 - 20.95 z^-57 - 4.895 z^-58 + 15.22 z^-59 + 17.36 z^-60 - 2.63 z^-61 - 20.01 z^-62 - 11.46 z^-63 + 11.11 z^-64 + 19.11 z^-65 + 3.748 z^-66 - 16.4 z^-67 - 15.9 z^-68 + 5.24 z^-69 + 18.34 z^-70 + 10.26 z^-71 - 11.68 z^-72 - 19.18 z^-73 - 1.278 z^-74 + 16.17 z^-75 + 14.33 z^-76 - 5.929 z^-77 - 18.79 z^-78 - 7.021 z^-79 + 12.93 z^-80 + 15.88 z^-81 + 0.6074 z^-82 - 17.16 z^-83 - 11.68 z^-84 + 7.736 z^-85 + 17.06 z^-86 + 5.392 z^-87 - 14.1 z^-88 - 14.78 z^-89 + 2.774 z^-90 + 16.64 z^-91 + 9.865 z^-92 - 9.375 z^-93 - 16.79 z^-94 - 2.54 z^-95 + 15.17 z^-96 + 12.2 z^-97 - 5.102 z^-98 - 17.14 z^-99 - 6.247 z^-100 + 13.11 z^-101 + 13.32 z^-102 - 1.138 z^-103 - 15.22 z^-104 - 9.042 z^-105 + 8.967 z^-106 + 14.25 z^-107 + 1.29 z^-108 - 11.63 z^-109 - 11.33 z^-110 + 4.878 z^-111 + 13.08 z^-112 + 4.197 z^-113 - 7.799 z^-114 - 11.03 z^-115 + 0.6318 z^-116 + 11.09 z^-117 + 5.835 z^-118 - 5.007 z^-119 - 9.993 z^-120 - 1.602 z^-121 + 9.189 z^-122 + 5.568 z^-123 - 3.543 z^-124 - 7.563 z^-125 - 2.684 z^-126 + 6.962 z^-127 + 5.354 z^-128 - 1.986 z^-129 - 5.961 z^-130 - 2.879 z^-131 + 4.596 z^-132 + 4.862 z^-133 - 1.244 z^-134 - 4.939 z^-135 - 1.67 z^-136 + 2.747 z^-137 + 4.024 z^-138 - 0.9845 z^-139 - 3.769 z^-140 - 0.5509 z^-141 + 2.055 z^-142 + 1.902 z^-143 - 0.5387 z^-144 - 2.528 z^-145 + 0.1804 z^-146 + 1.232 z^-147 + 0.5175 z^-148 + 0.07024 z^-149 - 1.774 z^-150 + 1.35 z^-151 - 0.3024 z^-152

ANEXO XVI.

A(z) = 1 - 2.915 z^-1 + 0.6696 z^-2 + 3.141 z^-3 + 1.449 z^-4 - 2.922 z^-5 - 5.069 z^-6 + 0.6779 z^-7 + 6.459 z^-8 + 3.613 z^-9 - 4.489 z^-10 - 7.276 z^-11 - 0.1387 z^-12 + 8.282 z^-13 + 5.874 z^-14 - 4.739 z^-15 - 9.849 z^-16 - 2.278 z^-17 + 8.388 z^-18 + 8.787 z^-19 - 2.827 z^-20 - 10.79 z^-21 - 4.754 z^-22 + 8.013 z^-23 + 11.18 z^-24 - 0.5959 z^-25 - 11.76 z^-26 - 7.881 z^-27 + 5.834 z^-28 + 12.01 z^-29 + 2.423 z^-30 - 10.24 z^-31 - 9.572 z^-32 + 3.029 z^-33 + 11.88 z^-34 + 6.363 z^-35 - 7.331 z^-36 - 11.06 z^-37 - 0.9363 z^-38 + 10.01 z^-39 + 8.203 z^-40 - 4.471 z^-41 - 11.32 z^-42 - 4.525 z^-43 + 7.567 z^-44 + 10.26 z^-45 + 0.8542 z^-46 - 9.295 z^-47 - 7.435 z^-48 + 3.816 z^-49 + 10.32 z^-50 + 4.183 z^-51 - 7.91 z^-52 - 9.583 z^-53 - 0.5338 z^-54 + 9.152 z^-55 + 7.265 z^-56 - 4.334 z^-57 - 9.144 z^-58 - 2.864 z^-59 + 7.641 z^-60 + 8.717 z^-61 - 1.215 z^-62 - 9.155 z^-63 - 5.598 z^-64 + 4.619 z^-65 + 8.234 z^-66 + 1.27 z^-67 - 7.107 z^-68 - 6.564 z^-69 + 2.002 z^-70 + 8.184 z^-71 + 4.199 z^-72 - 4.855 z^-73 - 6.529 z^-74 - 0.3294 z^-75 + 5.975 z^-76 + 4.145 z^-77 - 2.79 z^-78 - 6.014 z^-79 - 1.407 z^-80 + 3.6 z^-81 + 4.566 z^-82 - 0.7513 z^-83 - 3.953 z^-84 - 2.081 z^-85 + 2.451 z^-86 + 3.793 z^-87 + 0.1206 z^-88 - 3.008 z^-89 - 2.824 z^-90 + 0.9065 z^-91 + 2.814 z^-92 + 1.23 z^-93 - 1.778 z^-94 - 2.59 z^-95 + 0.8688 z^-96 + 2.251 z^-97 + 1.399 z^-98 - 1.655 z^-99 - 2.297 z^-100 + 0.4834 z^-101 + 1.673 z^-102 + 0.9367 z^-103 - 1.101 z^-104 - 1.727 z^-105 + 0.3347 z^-106 + 1.851 z^-107 + 0.003213 z^-108 - 0.3669 z^-109 - 1.043 z^-110 + 0.1714 z^-111 + 0.7486 z^-112 - 0.2393 z^-113 - 0.1397 z^-114 + 0.1321 z^-115 - 0.07903 z^-116 + 0.02192 z^-117

ANEXO XVII.

A(z) = 1 - 2.718 z^-1 - 0.01947 z^-2 + 3.288 z^-3 + 2.748 z^-4 - 2.512 z^-5 - 7.275 z^-6 - 1.254 z^-7 + 8.305 z^-8 + 7.152 z^-9 - 3.614 z^-10 - 11 z^-11 - 3.974 z^-12 + 10.42 z^-13 + 9.691 z^-14 - 3.171 z^-15 - 13.19 z^-16 - 6.267 z^-17 + 10.25 z^-18 + 12.82 z^-19 - 1.189 z^-20 - 13.39 z^-21 - 8.624 z^-22 + 8.502 z^-23 + 14.71 z^-24 + 0.8689 z^-25 - 14.12 z^-26 - 11.89 z^-27 + 6.962 z^-28 + 16.14 z^-29 + 4.782 z^-30 - 12.65 z^-31 - 13.71 z^-32 + 3.718 z^-33 + 15.22 z^-34 + 7.122 z^-35 - 9.469 z^-36 - 12.98 z^-37 + 0.1147 z^-38 + 11.44 z^-39 + 6.565 z^-40 - 5.67 z^-41 - 9.125 z^-42 - 0.6924 z^-43 + 8.184 z^-44 + 4.878 z^-45 - 3.113 z^-46 - 6.468 z^-47 - 1.265 z^-48 + 4.689 z^-49 + 3.615 z^-50 - 1.928 z^-51 - 4.161 z^-52 - 1.02 z^-53 + 2.64 z^-54 + 2.876 z^-55 - 0.3177 z^-56 - 2.209 z^-57 - 0.7942 z^-58 + 0.2945 z^-59 + 1.305 z^-60 + 0.4261 z^-61 - 0.5778 z^-62 - 0.9238 z^-63 - 0.6091 z^-64 + 0.5754 z^-65 + 1.346 z^-66 - 0.007103 z^-67 - 0.4694 z^-68 - 0.5144 z^-69 - 0.5316 z^-70 + 0.7343 z^-71 + 0.598 z^-72 - 0.2596 z^-73 - 0.3976 z^-74 - 0.3499 z^-75 + 0.0909 z^-76 + 0.4066 z^-77 + 0.1753 z^-78 + 0.0607 z^-79 - 0.1752 z^-80 - 0.4253 z^-81 + 0.1991 z^-82 - 0.01082 z^-83 + 0.3756 z^-84 - 0.299 z^-85 - 0.01066 z^-86+ 0.05688 z^-87 - 0.01024 z^-88

C(z) = 1 + 0.1264 z^-1 - 0.09633 z^-2 - 0.3331 z^-3 - 0.2346 z^-4 + 0.07573 z^-5 + 0.03563 z^-6 + 0.1703 z^-7 + 0.3661 z^-8 + 0.08069 z^-9 - 0.07161 z^-10 - 0.1471 z^-11 - 0.3039 z^-12 + 0.162 z^-13 - 0.1832 z^-14 + 0.02467 z^-15 - 0.05315 z^-16 - 0.1969 z^-17 - 0.03157 z^-18 - 0.09785 z^-19 + 0.003883 z^-20 + 0.05304 z^-21 - 0.01226 z^-22 - 0.02757 z^-23 - 0.1352 z^-24 - 0.1456 z^-25 + 0.01335 z^-26 - 0.257 z^-27 + 0.1732 z^-28 - 0.1286 z^-29 + 0.04455 z^-30 + 0.01815 z^-31 - 0.1944 z^-32 + 0.2467 z^-33 + 0.2645 z^-34 + 0.0226 z^-35 - 0.1751 z^-36 - 0.4024 z^-37 - 0.1296 z^-38 + 0.403 z^-39 + 0.233 z^-40 + 0.418 z^-41 + 0.01964 z^-42 - 0.316 z^-43 + 0.04317 z^-44 - 0.06212 z^-45 + 0.09155 z^-46 + 0.2073 z^-47 + 0.08435 z^-48 + 0.0393 z^-49 - 0.01278 z^-50 - 0.4322 z^-51 + 0.01375 z^-52 - 0.06252 z^-53 + 0.1069 z^-54 + 0.02056 z^-55 - 0.2271 z^-56 - 0.06857 z^-57 + 0.01553 z^-58 - 0.1397 z^-59 + 0.08158 z^-60 - 0.1924 z^-61 - 0.02017 z^-62 - 0.08731 z^-63 - 0.2222 z^-64 + 0.1373 z^-65 + 0.06969 z^-66 - 0.01083 z^-67 - 0.06608 z^-68 + 0.01398 z^-69 + 0.104 z^-70 - 0.2011 z^-71 + 0.1437 z^-72 + 0.1513 z^-73 + 0.05137 z^-74 + 0.123 z^-75 - 0.34 z^-76 - 0.2964 z^-77 + 0.1039 z^-78 + 0.2039 z^-79 + 0.2743 z^-80 + 0.1432 z^-81 - 0.05273 z^-82 + 0.1158 z^-83 - 0.2604 z^-84 - 0.172 z^-85 + 0.01101 z^-86 + 0.1134 z^-87 + 0.4108 z^-88

REFERENCIAS

[Ljung, 2018] Ljung, L. “System identification toolbox. User’s guide”. Mathworks, 2018.

[Makridakis, 2018] Makridakis, S.; Spiliotis2, E. and Assimakopoulos, V. “Statistical and Machine Learning forecasting methods: Concerns and ways forward”. Plos One. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0194889

[Box,1994] Box, G. E. P.; G. M. Jenkins, and G. C. Reinsel. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. 3rd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1994.

[Brockwell, 2016] P.J. Brockwell and R. A. Davis. “Introduction to Time Series and Forecasting”. 2016. ISSN 1431-875X ISSN 2197-4136. DOI 10.1007/978-3-319-29854-2.

[Ghoneim, 2017] Ghoneim, O.A.; Doreswamy, B.R. Manunatha. “Forecasting of ozone concentration in Smart city using Deep learning” 2017 International Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI). DOI: 10.1109/ICACCI.2017.8126024.

[Box, 2008] Box, G.E.P.; Reinsel, G.C. and Jenkins, G.M. “Time Series Analysis: Forecasting and Control, Fourth Edition”. Junio 2018. ISBN: 9780470272848.

[Shumway, 2011] Shumway, R.H. and Stoffer, D.S. “Time series analysis and its applications”. 2011. ISSN 1431-875X. ISBN 978-1-4419-7864-6. DOI 10.1007/978-1-4419-7865-3

[Ljung, 1999] Ljung, L. System Identification: Theory for the User. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall PTR, 1999, pp. 428–440.

[Simon, 2006] Simon, D. Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches. John Wiley and Sons Inc., 2006.

[Carlson, 1973] Carlson, N.A. "Fast triangular formulation of the square root filter." *AIAA Journal*, Vol. 11, Number 9, 1973, pp. 1259-1265.

[Hegeman, 2020] Rick Hegeman. "Predicting the air quality by combining model simulations with machine learning".

[Santos, 2019] Carlos Santos, José A. Jiménez, Felipe Espinosa. “Effect of event-based sensing on IoT node power efficiency. Case study: air quality monitoring in smart cities”. IEEE Access. ISSN: 2169-3536. September 2019. Doi: 10.1109/ACCESS.2019.2941371

Universidad de Alcalá
Escuela Politécnica Superior

ESCUELA POLITECNICA
SUPERIOR

Universidad
de Alcalá