Universidad de Alcalá

DISEÑO DE ACTIVIDADES EN EL MARCO CONCEPTUAL DE ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA DEL MODELO DE VAN HIELE

Trabajo Fin de Máster

Máster Universitario en Formación del Profesorado

Presentado por:
D. Daniel Lechón Pérez

Dirigido por:
Dra. Dª Blanca Arteaga Martínez

Alcalá de Henares, a 17 de Junio de 2019

Resumen

Lo que se propone como objetivo general del trabajo es el diseño de actividades para la práctica docente de la enseñanza de la geometría, inspiradas en el marco conceptual de enseñanza de la geometría de Van Hiele. Presentamos dinámicas de aprendizaje eficaz, en las que el proceso de aprendizaje debe permitir que el alumno aprenda a aprender, para que de esta manera sea cada vez más independiente y competente para su desarrollo integral, tanto personal como profesional. La idea que nos guía es la de que el alumno participe de forma activa en su proceso de aprendizaje, tanto de forma individual como cooperativa, por ello, es necesario elegir las metodologías adecuadas que favorezcan la enseñanza activa y participativa. Como aprendizaje más relevante querríamos destacar el hallazgo de la metodología del descubrimiento guiado y la constatación de que los alumnos, motivados por actividades bien diseñadas, son capaces de formar razonamientos elaborados si se tiene la paciencia suficiente para que surja ese momento de descubrimiento, del que hablaba Van Hiele, en el que el alumno descubre algo que siempre ha estado ahí, que ha sido una verdad antes de ser descubierta y que se fija mejor en su mente cuando se obtiene por este mecanismo. Debemos confiar en la intuición natural de las personas para encontrar esos descubrimientos en cada actividad que les propongamos.

Palabras clave:

Alumno, Niveles de razonamiento, Geometría, Aprendizaje, Educación secundaria

Abstract

What is proposed as the general objective of the work is to design a series of activities for the teaching practice of geometry education inspired by the Van Hiele conceptual framework. We present dynamics of effective learning, in which the learning process must allow the student to learn to learn so that in this way he is more and more independent and competent for his integral development, both personal and professional. The idea that guides us is that the student must participate actively in their learning process, both individually and cooperatively, therefore, it is necessary to choose the appropriate methodologies that favour active and participatory teaching. As the most relevant learning, we would highlight the discovery of the methodology of guided discovery and the observation that students, motivated by well-designed activities, are capable of forming elaborate reasoning if we have enough patience for that moment of discovery to arise, of which Van Hiele spoke, in which the student discovers something that has always been there, that has been a truth before being discovered and that is better fixed in his mind when it is obtained by this mechanism. We must rely on the natural intuition of people to find these discoveries in each activity that we propose.

Keywords:

Pupil, Thinking's Levels, Geometry, Learning, Secondary education

“The mediocre teacher tells.

The good teacher explains.

The superior teacher demonstrates.

The great teacher inspires.”

William Arthur Ward

Índice

Índice de tablas

Índice de figuras

Introducción

En todo aquello donde ponemos nuestra mirada encontramos relaciones y modelos geométricos, la Geometría modela el espacio que percibimos, pero su presencia en el entorno no es la única razón para aprender y enseñar Geometría. La Geometría nos permite acceder a formas superiores de pensamiento si la aprendemos y también si la enseñamos, tal y como escribe Platón "la geometría atraerá el alma hacia la verdad y formará mentes filosóficas que dirijan hacia arriba aquello que ahora dirigimos indebidamente hacia abajo" (Platón, trad. en 1969).

Para la enseñanza de la geometría, las conclusiones del *National Research Council*, en su informe sobre como aprendemos, nos señalan tres principios básicos sobre los que descansan el proceso de aprendizaje y el de construcción de significados, que pueden servirnos de guía y que pueden resumirse como sigue (Bressan, Bogisic y Crego, 2000, pp. 14-18).

1. Los alumnos llegan a la clase con preconcepciones sobre cómo funciona el mundo, si este entendimiento inicial no se tiene en cuenta, es posible que no logren captar los nuevos conocimientos que se pretenden enseñar, o bien pueden aprenderlos para los fines de una prueba y volver luego a sus ideas preconcebidas.
2. Para desarrollar competencias en una determinada área de estudio los estudiantes deben tener una amplia base de conocimiento fáctico, entender los hechos e ideas en un marco conceptual y organizar los conocimientos de forma que sean fácilmente accesibles para su aplicación.
3. Un enfoque "metacognitivo" de la instrucción (enseñar a aprender cómo se aprende) ayudará a los alumnos a tomar control de su propio proceso de aprendizaje fijando objetivos de aprendizaje y realizando un seguimiento de su progreso.

Como afirma Coll (2010), la enseñanza, desde el punto de vista del constructivismo, se entiende como la actividad que, siguiendo un plan meticuloso bien definido, ayuda en los procesos de construcción de significados y de atribución de sentido a los contenidos escolares, además, esta ayuda puede ser de dos tipos, las que componen el primer tipo son ayudas relativamente lejanas, como la selección y organización de los contenidos curriculares, las formas de llevarlo a cabo, los materiales, recursos, etcétera, y las que componen el segundo tipo son las ayudas más cercanas, que son las interacciones entre alumnos y profesores , las formas de actuar y los guiones de preguntas y respuestas, las repreguntas, instrucciones, explicaciones, demostraciones, valoraciones, incitaciones y las instancias a la acción, etc. A estas últimas se dirige este trabajo.

Objetivos

Se propone como objetivo general del trabajo el diseño de actividades para la práctica docente de la enseñanza de la geometría inspirada en el marco conceptual de enseñanza de la geometría de Van Hiele.

Para ello nos plantearemos las actividades basándonos en la creación de zonas de desarrollo próximo entre los docentes y los estudiantes, y actuar ayudando a los alumnos en ellas. La idea de zona de desarrollo próximo (ZDP) fue propuesta en su origen por Vygotsky (1979) y con ella se conoce a la distancia, en sentido figurado, que existe entre lo que una persona puede hacer o aprender por si sola y lo que puede hacer o aprender con la ayuda y apoyo de otras personas con las que se relaciona. Su objetivo final es que el alumno pueda otorgar significados por sí mismo y de dar un sentido a los contenidos de aprendizaje que en un principio solo podían dar con el apoyo del profesor o de los compañeros.

Los objetivos específicos del diseño que facilitarán la consecución del objetivo general se plantean como:

- Crear tareas que permitan trabajar contenidos de Geometría de manera significativa.
- Implicar a los alumnos en el aprendizaje haciéndoles experimentar los contenidos que conocen, propiciando las conexiones y relaciones con lo que ya conocen con anterioridad.
- Diagnosticar la comprensión para ir construyendo paso a paso su aprendizaje.
- Evaluar continuamente y adaptar la enseñanza a sus necesidades
- Estimular el pensamiento estratégico.

Marco teórico

Antes de centrarnos en el modelo de Van Hiele para la enseñanza de la geometría hagamos un repaso a lo que en los últimos años se ha estudiado sobre la forma y los procedimientos mediante los cuales los docentes ayudan a la construcción de significados y a la atribución de sentido que los alumnos realizan.

Siguiendo lo indicado por Coll (2010), hay dos grandes mecanismos de influencia educativa: la formación de estructuras y redes de significados compartidos entre profesor y alumnos, que cada vez serán de mayor valor, más intrincados y adaptados a los que son aceptados mayoritariamente por la comunidad educativa, otros prescriptores relacionados y la sociedad en general, y la cesión progresiva del control y la responsabilidad desde los docentes a los estudiantes en la praxis y desenvolvimiento de las actividades y tareas de enseñanza y aprendizaje.

Esto surge en la tarea simultánea de profesores y alumnos, que no se limitan a actuaciones o comportamientos esporádicos sino a esquemas de actuación y comportamiento, que se desarrollan durante un tiempo y como tal actividad persistente aparecen paulatinamente.

El mecanismo de construcción de estructuras y redes de significados compartidos hace referencia a la forma como profesores y alumnos expresan sus representaciones de los contenidos. Cuando se inicia una nueva tarea, profesores y alumnos se acercan a ella con imágenes bien distintas, comparten parcelas muy limitadas; en cambio al final de la actividad, las representaciones de ambos serán mucho más compartidas, tanto los significados como su organización.

Como afirma Itzcovich (2005), lo que un alumno es capaz de ver al observar, por ejemplo, el dibujo de una figura no tiene por qué ser siempre lo mismo que lo que el docente desea que vea. Y que se puede caer en la ilusión de dar por hecho que se reconocerán las propiedades que se suponen allí representadas. Debemos entonces evitar las prácticas ostensivas, debemos aprender a enseñar a “ver mejor” a nuestros alumnos.

El esfuerzo se ha de dirigir a estudiar cómo poner en común las imágenes de profesores y alumnos, la clave puede estar en ver la manera en la que se ordenen las actividades que se hacen en común y también en lo que se dice mientras se está en las tareas de aprendizaje. Si se trabaja, se actúa y se habla conjuntamente de lo que se hace, por qué y para que, se hace primordial el uso que profesores y alumnos hacen del lenguaje, que posibilitan el manejo, la representación, la comunicación y la interrelación de los significados.

Para todo ello necesitamos comunicarnos, tanto mediante la comunicación verbal como la no verbal. Son importantes elementos de ellas como son las descripciones del proceso que se lleva a cabo o lo que se va a hacer, hacer recopilaciones, recordar lo que se ha hecho, considerar la opinión de los demás, replicando a lo que dice otro, la repetición literal con reelaboración de lo que dice otro alumno, la relación con otras experiencias externas, la síntesis de lo realizado hasta el momento, etcétera son estrategias a seguir para conseguir el objetivo.

El segundo mecanismo de influencia es el de cesión del control y de la responsabilidad desde los profesores a los alumnos, aumentando los estudiantes su autonomía y su capacidad de decisión en cuanto a su aprendizaje y así las ayudas que da el docente, van desapareciendo progresivamente o van siendo sustituidas por otras menores conforme los alumnos van asumiendo el control.

El modelo de Van Hiele

Nos centramos ahora en la teoría de Van Hiele, que constituye el ámbito principal de este trabajo. Esta supone una evolución del constructivismo puro por descubrimiento, que está más centrado en el aprendiz, al del descubrimiento dirigido, en la que se presta igualmente atención a la aportación de los otros, en especial al papel del profesorado. Este modelo, de los años cincuenta del pasado siglo, se ha ido actualizando de forma adecuada a la práctica docente. El trabajo fue desarrollado por el matrimonio Van Hiele, Dina y Pierre, aunque Pierre es quien escribe el libro *Structure and Insight* (1986) en el que recopila sus artículos previos y las tesis doctorales de ambos. La idea de partida del modelo es que el aprendizaje de la Geometría se realiza transitando por unos niveles de razonamiento o pensamiento, que son independientes de la edad y que han de completarse cada uno para llegar al siguiente.

Cuando se presenta un nuevo contenido geométrico, todas las personas pasan por todos los niveles, y además estos niveles de razonamiento geométrico tienen una estructura recursiva, en cada nivel de pensamiento hay determinadas habilidades que están siendo usadas de forma intuitiva por los estudiantes, y cuyo uso de forma voluntaria se aprende en el siguiente nivel, así pues, las actividades que se realicen deben estar encaminadas a hacerles conscientes de esa habilidad implícita, y ello será posible desarrollando actividades que hagan uso de esas habilidades, para que mediante la repetición se desarrolle esa forma de pensamiento. Van Hiele concreta que “se puede decir que alguien ha alcanzado un nivel más alto de pensamiento cuando un nuevo orden de pensamiento le permite, con respecto a ciertas operaciones, aplicar estas operaciones en nuevos objetos” (Van Hiele, 1986, p. 39)

Y en línea con lo anteriormente indicado, en el estudio de la Geometría, hay dos conceptos clave, el lenguaje que se utiliza y el hecho de que los contenidos sean significativos. Esto quiere decir que los niveles y el hecho de adquirirlos, van muy unidos al uso adecuado del lenguaje necesario y que solo se entenderá lo que esté al nivel del alumno y de su forma de razonar y si no es así, es más importante conseguir esto que pretender avanzar. Finalmente indica Van Hiele que no hay un método idílico para alcanzar un nivel nuevo, y sin embargo si indica que diseñando unas actividades con un proceso didáctico adecuado se puede predisponer a su adquisición.

Los niveles de Van Hiele se numeran habitualmente del 1 a 5, que es como el propio Van Hiele los nombró en su artículo de 1955, sin embargo, es más utilizada la notación del 0 al 4 como el mismo autor indica en su libro de 1986, esta última numeración es la que se presenta en la tabla 1.

Tabla 1. Niveles de Van Hiele

Nivel 0: Visualización o reconocimiento.
Nivel 1: Análisis.
Nivel 2: Ordenación o clasificación.
Nivel 3: Deducción formal.
Nivel 4: Rigor

Fuente: Fouz (2005, p.68)

Utilizando los trabajos de Van Hiele (1986), de Fouz (2005) y de Vargas y Gamboa (2013), mostramos a continuación una caracterización de los niveles.

Nivel 0: Visualización o reconocimiento.

Los objetos se conciben e identifican como un todo, no se reconocen ni las partes de las que está constituido ni sus propiedades. Se pueden reproducir copias de la figura, se describen por su forma y por comparación con elementos conocidos. No se posee un lenguaje geométrico básico.

Nivel 1: Análisis.

Se distinguen las partes y las propiedades de las figuras, se consigue observando y experimentando. Pueden hacerse descripciones de las figuras por sus propiedades, pero no se relacionan unas propiedades con otras ni unas figuras con otras. Como no hay propiedades y en Geometría son necesarias para las definiciones, no pueden elaborarlas. Se pueden establecer nuevas propiedades por experimentación, pero no realizan clasificaciones de objetos y figuras por sus propiedades.

Nivel 2: Ordenación o clasificación.

Se entiende el significado de las definiciones, se describen detalladamente respetando la forma. Realizan clasificaciones lógicas, se inicia el razonamiento matemático. Se establecen relaciones entre propiedades y como unas derivan de otras y como se influyen entre sí. Siguen las pruebas y demostraciones, pero sin entender el conjunto, sí que se entiende cuando se limita al entendimiento de los pasos individuales, los escalones de los razonamientos formales.

Nivel 3: Deducción formal.

Se realizan deducciones lógicas y teóricas. Se comprenden y manejan las relaciones entre propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos. Se entiende cómo y por qué se puede llegar, aun partiendo de premisas o puntos de partida distintos, al mismo resultado. Se tiene una visión completa de la Geometría.

Nivel 4: Rigor.

Se sabe de diferentes sistemas de axiomas y se es capaz de comprender diferentes geometrías. Se trabaja la Geometría sin necesidad de objetos, de manera abstracta, este nivel se alcanza en grados superiores de la educación de los estudiantes, incluso solo en universitarios.

En resumen, en primer lugar, los niveles se caracterizan por la necesidad de tener que pasar uno tras otro por todos ellos y tienen un orden, además forman parte de un ciclo que se va repitiendo y afianzando en cada nivel, lo que es intuitivo en un nivel, se convierte en explícito y voluntario en el siguiente. Este esquema se resume en la tabla 2 tomada de Fouz (2005).

Tabla 2. Esquema recursivo de los niveles

	ELEMENTOS EXPLICITOS	ELEMENTOS IMPLICITOS
NIVEL 0	Figuras y objetos	Partes y propiedades de las figuras y objetos
NIVEL 1	Partes y propiedades de las figuras y objetos	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos
NIVEL 2	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos	Deducción formal de teoremas
NIVEL 3	Deducción formal de teoremas	Relación entre los teoremas (sistemas axiomáticos)

Fuente: Fouz (2005, p. 71)

En segundo lugar, cada nivel necesita del conocimiento del lenguaje preciso y la evolución en ese nivel y el paso al siguiente depende mucho del dominio del lenguaje matemático asociado.

En tercer lugar, se pasa de un nivel a otro de forma paulatina y gradual o mediante pequeños escalones, el progreso depende de cómo se realiza la acción conjunta de docentes y estudiantes. Y es claro que estará basada en las actividades que se desarrollen y así el paso de un nivel a otro depende más de la enseñanza recibida y de lo que se haya trabajado que de la edad o madurez. Para definir las actividades a realizar se establecen cinco fases que se presentan en la tabla 3.

Tabla 3. Fases según el modelo de Van Hiele

Fases
Fase 1ª. Información.
Fase 2ª. Orientación dirigida.
Fase 3ª. Explicitación.
Fase 4ª. Orientación libre.
Fase 5ª. Integración.

Fuente: Fouz (2005, p.72)

Para comprender cada una de estas fases, hacemos un recorrido de cuál es su significado.

Información: Se trata de conocer el nivel de conocimientos previos de los alumnos/as. Está fase se puede realizar normalmente en forma de diálogo con los alumnos y así mediante preguntas adecuadas se recaba la información y se determina cual debe ser el nivel de partida de las actividades. También puede hacerse alguna prueba escrita basada en actividades que puedan ser respondidas en diferentes niveles de conocimientos, de forma que así se gradúen, teniendo en cuenta que estos quedan determinados más por las respuestas que por las preguntas.

Orientación dirigida: En esta fase el papel del profesor es el fundamental y es donde debemos centrar toda la atención, es él o ella, el o la que mediante, en primer lugar, la elección de la actividad o actividades y después en la forma en las que las va introduciendo, guiando y estableciendo hitos parciales, puede conseguir el avance en el razonamiento y la construcción de significados. A través de la experimentación deducen y descubren propiedades, relaciones, ideas y conceptos de ese nivel, los problemas propuestos deben llevar a las soluciones, resultados y propiedades que tienen que entender y aprender. Una planificación de los hitos parciales permite conseguir pequeños éxitos que generen autoestima, confianza y favorezcan una actitud positiva hacia la materia.

Explicitación: Es una fase en la que lo que prima es la interacción, el diálogo entre alumnos, donde el docente se limita a corregir el lenguaje y moderar, permitiendo que se ordenen las ideas, se analicen y expresen de forma correcta y que pueda ser entendida por los demás. Pueden plantearse actividades de discusión, explicación de la forma en la que se han resuelto las actividades o problemas de la fase anterior y a que propiedades y relaciones se ha llegado y por qué.

Orientación libre: En esta fase se deben proponer actividades abiertas, el objetivo es aplicar los conocimientos que se han adquirido a nuevas situaciones y problemas, donde puedan plantearse soluciones diferentes, donde más de una respuesta o planteamiento de solución puedan ser igualmente válidos. Como es necesaria una interpretación del enunciado, la solución requiere de una explicación detallada de lo que se ha interpretado y con qué premisas se inicia la resolución, para lo cual el lenguaje necesario se hace más rico y complejo, así como el razonamiento más potente. La intervención del profesor se reduce al mínimo.

Integración: Como en esta fase no hay contenidos nuevos, lo que se pretende es que se concluya la creación de los nuevos conocimientos, es la fase final del aprendizaje significativo donde hemos mejorado o sustituido los conocimientos previos que tenían los alumnos, sintetizando todo lo que se ha adquirido en las fases anteriores. Es interesante hacerlo con alguna actividad que resuma lo aprendido con un afán integrador.

La evaluación en el modelo de Van Hiele

Es conveniente ahora abordar la cuestión de la determinación del nivel de razonamiento de una persona. Si queremos basarnos en el modelo de Van Hiele para el diseño y el desarrollo de las sesiones, tendremos que tener una idea lo más exacta posible del nivel de razonamiento de los alumnos, y esto es fundamental para elegir el lenguaje adecuado para trasmitir nuestras ideas y el tipo de actividades que fomenten el paso de un nivel al siguiente.

Debemos tener en cuenta que el nivel de razonamiento puede ser diferente en un mismo alumno para los diferentes contenidos geométricos y esto puede observarse proponiéndole actividades en esos contenidos, hay conceptos en la geometría que requieren por su complejidad mayor trabajo cognitivo, además siempre que se comienza un nuevo contenido desconocido hasta el momento, se empiezan a recorrer los niveles de Van Hiele comenzando por el primero.

Los profesores e investigadores que trabajan sobre el modelo de Van Hiele utilizan generalmente dos métodos para determinar el nivel de razonamiento (Jaime y Gutierrez, 1990), uno de los métodos consiste en la realización de entrevistas individuales entre el profesor y cada estudiante, durante las cuales plantea diversas actividades y dialoga con el alumno. El otro método consiste en la realización de un ejercicio escrito formado por actividades similares.

Estas actividades deben contener preguntas abiertas que permitan expresar las ideas de los alumnos y su forma de razonar y no tanto evaluar si las respuestas son o no correctas. Y cada una de las actividades puede responderse de forma diferente según el nivel en el que se encuentre el alumno.

La evaluación en este modelo, de acuerdo con Fouz (2005), es el punto clave. En el marco del modelo de Van Hiele es interesante valorar a un individuo tomando en cuenta las razones por las que dio cada respuesta, que es la que determinará realmente el nivel, razón por la que la combinación con la entrevista es recomendable. Además, se ha de tener en cuenta que el nivel de razonamiento será diferente en diferentes áreas y en diferentes contenidos y en el paso de un nivel a otro es difícil discriminar en qué nivel se hallan.

En el apartado de evaluación de este trabajo se desarrolla el método que hemos seguido para evaluar, tanto a los alumnos como al propio proyecto en sí mismo. Para los alumnos se propusieron pruebas escritas y entrevistas cuando fuera necesario. También se relacionan los indicadores para efectuarlas y la propia evaluación y sus conclusiones. Los estudiantes también contribuyeron a la evaluación de este trabajo.

Otras teorías y metodologías de enseñanza de la geometría

Hay otras teorías sobre la enseñanza de la geometría, muy relacionadas con el modelo de Van Hiele, que tienen sin embargo aportaciones muy interesantes y que tenemos intención de tener en cuenta en el diseño de las actividades. Por un lado, pretendemos utilizar metodologías activas que, siguiendo a Dienes (1977), se plantearán teniendo en cuenta los cuatro principios básicos siguientes:

- Principio dinámico. El aprendizaje se produce desde la experiencia hasta la categorización. Se produce en ciclos, desde el juego inicial hasta la formación de los conceptos pasando por una etapa constructiva más estructurada.
- Principio de construcción. La construcción se debe producir antes del análisis del concepto, el alumno contacta con la realidad matemática por la manipulación, la construcción y el juego.
- Principio de variabilidad perceptiva. Se abstrae lo esencial de las estructuras mediante la comparación entre varias, que permite percibir sus propiedades como estructura.
- Principio de variabilidad matemática. Es necesario comparar dando diferentes valores a todas las variables implicadas para detectar aquello que no varía, esto es lo que nos permitirá formular el concepto asegurando una generalización suficiente.

Según Dienes (1970) un concepto se puede presentar de formas tan diferentes como individuos diferentes haya y sea su manera de formar conceptos, y su capacidad de abstracción, y habrá que tener en cuenta en la organización del proceso de enseñanza de la matemática para que todo el alumnado tenga acceso a ella las seis etapas que se presentan en la tabla 4.

Tabla 4. Las seis etapas de aprendizaje en matemáticas.

• Primera etapa: Adaptación. A esta etapa corresponden los juegos libres o preliminares, como actividades "desordenadas". El alumno juega libremente, interactúa con los objetos y los explora.

- Segunda etapa: Estructuración. Se ofrece una actividad estructurada con muchas experiencias que llevan al mismo concepto, experimentando así las restricciones.
- Tercera etapa: Abstracción (Juego de isomorfismo). En ella el alumno es capaz de deducir la estructura común, desechando otros aspectos en la comparación entre objetos, se basa en juegos en los que bajo una apariencia diferente subyace la misma estructura.
- Cuarta etapa: Representación gráfica o esquemática de la estructura común como forma de visualización o manifestación de la misma.
- Quinta etapa: Descripción de las representaciones. Se nombran y se explican las propiedades de la representación, usando el lenguaje técnico y simbólico de las matemáticas.
- Sexta etapa. Formalización o demostración. El alumno expone lo aprendido de forma clara y explicando el proceso seguido.

Fuente: Dienes (1977, p. 125)

Y, por otro lado, especialmente en la fase de orientación dirigida, queremos hacer uso de las teorías de Jerome Bruner (1972) sobre el descubrimiento guiado. En la década de los 60 del siglo XX desarrolló una teoría del aprendizaje conocida como aprendizaje por descubrimiento o aprendizaje heurístico. Según esta teoría, se debe procurar que el alumno adquiera los conocimientos por sí mismo. Fomentando su curiosidad, los diferentes contenidos se van explorando y descubriendo, proporcionando si es necesario el material adecuado para realizarlo. No tenemos que dar los conceptos elaborados, evitando caer en la tentación de presentarlos ya resumidos en algo que pueda ser recordado o memorizado, en su lugar, la propia construcción, mediante el análisis de semejanzas y diferencias de cada alumno les servirá también para ese propósito. Y esa curiosidad innata que poseen, es movida por el asombro que provoca la realidad.

Marco legislativo. El currículo de Geometría en Educación Secundaria.

El Real Decreto 1105/2014, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, es la normativa de ámbito nacional que define el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y del Bachillerato. Además, inspirada en la Recomendación 2006/962/CE del Parlamento Europeo y del

Consejo, de 18 de diciembre de 2006, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente*,* este real decreto se basa en la potenciación del aprendizaje por competencias.

Y en este sentido, y entre otras, el estudio de la Geometría fomenta la adquisición de la competencia matemática. La relación de esta con aquella, así como los contenidos y los criterios de evaluación se explican y se regulan en la Orden ECD/65/2015, sobre los aspectos relativos a la competencia matemática y la geometría. En ella se expone…

> La competencia matemática implica la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto…y para su desarrollo resulta necesario abordar cuatro áreas relativas a los números, el álgebra, la geometría y la estadística, interrelacionadas de formas diversas (Orden ECD/65/2015, p. 6693).

una de las cuales es mediante el espacio y la forma:

> incluyen una amplia gama de fenómenos que se encuentran en nuestro mundo visual y físico: patrones, propiedades de los objetos, posiciones, direcciones y representaciones de ellos; descodificación y codificación de información visual, así como navegación e interacción dinámica con formas reales, o con representaciones. La competencia matemática en este sentido incluye una serie de actividades como la comprensión de la perspectiva, la elaboración y lectura de mapas, la transformación de las formas con y sin tecnología, la interpretación de vistas de escenas tridimensionales desde distintas perspectivas y la construcción de representaciones de formas (Orden ECD/65/2015, p. 6693).

En el anexo I de la orden, figuran a su vez los contenidos comunes, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables de las materias del bloque de asignaturas troncales. De ellos se ha seleccionado los que pertenecen al “Bloque 3. Geometría” de la asignatura Matemáticas de los cursos 1º y 2º de la ESO y que figuran en la tabla 5 y que son los que se abordarán en el desarrollo de este trabajo.

Tabla 5. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 3. Geometría		
Elementos básicos de la geometría del plano. Relaciones y propiedades de figuras en el plano: Paralelismo y perpendicularidad. Ángulos y sus relaciones. Construcciones geométricas sencillas: mediatriz, bisectriz. Propiedades. Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales. Clasificación de triángulos y cuadriláteros. Propiedades y relaciones. Medida y cálculo de ángulos de figuras planas. Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples. Circunferencia, círculo, arcos y sectores circulares. Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones. Semejanza: figuras semejantes. Criterios de semejanza. Razón de semejanza y escala. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Poliedros y cuerpos de revolución. Elementos característicos, clasificación. Áreas y volúmenes. Propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros. Cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico. Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.	1. Reconocer y describir figuras planas, sus elementos y propiedades características para clasificarlas, identificar situaciones, describir el contexto físico, y abordar problemas de la vida cotidiana. 2. Utilizar estrategias, herramientas tecnológicas y técnicas simples de la geometría analítica plana para la resolución de problemas de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas, utilizando el lenguaje matemático adecuado expresar el procedimiento seguido en la resolución. 3. Reconocer el significado aritmético del Teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el significado geométrico (áreas de cuadrados construidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos. 4. Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza y la razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. 5. Analizar distintos cuerpos geométricos (cubos, ortoedros, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas) e identificar sus elementos característicos (vértices, aristas, caras, desarrollos planos, secciones al cortar con planos, cuerpos obtenidos mediante secciones, simetrías, etc.). 6. Resolver problemas que conlleven el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico, utilizando propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros.	1.1. Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema, simetrías, etc. 1.2. Define los elementos característicos de los triángulos, trazando los mismos y conociendo la propiedad común a cada uno de ellos, y los clasifica atendiendo tanto a sus lados como a sus ángulos. 1.3. Clasifica los cuadriláteros y paralelogramos atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos y conociendo sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales. 1.4. Identifica las propiedades geométricas que caracterizan los puntos de la circunferencia y el círculo. 2.1. Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas. 2.2. Calcula la longitud de la circunferencia, el área del círculo, la longitud de un arco y el área de un sector circular, y las aplica para resolver problemas geométricos. 3.1. Comprende los significados aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema construyendo otros polígonos sobre los lados del triángulo rectángulo. 3.2. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contextos reales 4.1. Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes. 4.2. Utiliza la escala para resolver problemas de la vida cotidiana sobre planos, mapas y otros contextos de semejanza. 5.1. Analiza e identifica las características de distintos cuerpos geométricos, utilizando el lenguaje geométrico adecuado. 5.2. Construye secciones sencillas de los cuerpos geométricos, a partir de cortes con planos, mentalmente y utilizando los medios tecnológicos adecuados. 5.3. Identifica los cuerpos geométricos a partir de sus desarrollos planos y recíprocamente. 6.1. Resuelve problemas de la realidad mediante el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos,

Fuente: Real Decreto 1105 (2014, p. 412)

Respecto a la normativa que regula el currículo en las comunidades autónomas se cuenta en Castilla-La Mancha con el Decreto 40/2015, de 15/06/2015, por el que se establece el currículo de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Castilla-La Mancha. Conforme al mismo, los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables para el bloque Geometría de 1ªESO, son los que figuran en la tabla 6.

Tabla 6. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 3. Geometría		
Elementos básicos de la geometría del plano. Paralelismo y perpendicularidad. Relaciones y propiedades de figuras en el plano. Ángulos y sus relaciones. Construcciones geométricas sencillas: rectas y puntos notables del triángulo. Propiedades. Polígonos. Elementos y propiedades. Clasificación de triángulos y cuadriláteros. Propiedades y relaciones. Medida y cálculo de ángulos de figuras planas. Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples. Fórmula de Herón. Circunferencia, círculo, arcos y sectores circulares. Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones. Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas. Semejanza: Figuras semejantes. Razón	1. Reconocer y describir figuras planas, sus elementos y propiedades características para clasificarlas, identificar situaciones, describir el contexto físico, y abordar problemas de la vida cotidiana. 2. Utilizar estrategias, herramientas tecnológicas y técnicas simples de la geometría plana para la resolución de problemas de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas, utilizando el lenguaje matemático adecuado y expresar el procedimiento seguido en la resolución. 3. Reconocer el significado aritmético del Teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el significado geométrico (áreas de cuadrados construidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos. 4. Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza.	1.1. Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema, simetrías. 1.2. Clasifica los triángulos atendiendo tanto a sus ángulos como a sus lados 1.3. Define las rectas y puntos notables de un triángulo, conoce sus propiedades y los traza. 1.4. Clasifica los cuadriláteros y paralelogramos atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos y conociendo sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales. 1.5. Define círculo y circunferencia, e identifica las propiedades geométricas que caracterizan sus puntos. 2.1. Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas. 2.2. Calcula la longitud de la circunferencia, el área del círculo, la longitud de un arco y el área de un sector circular, y las aplica para resolver problemas geométricos. 3.1. Comprende los significados aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema construyendo otros polígonos sobre los lados del triángulo rectángulo. 3.2. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contextos reales. 4.1. Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza. de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos,

Fuente: Decreto 40 (2015, pp. 19104-19105)

Aunque la normativa autonómica deriva de la estatal, encontramos diferencias entre ambas, en la normativa nacional, el currículo de Matemáticas no está diferenciado para los cursos primero y segundo, en cambio en la normativa autonómica si se hace esta diferenciación, desarrollando nuevos estándares, diferentes para ambos cursos. Entre ellos destaca el hecho de que se deja, en la normativa autonómica, para el segundo curso los contenidos más complejos de los cuerpos geométricos, secciones, volúmenes, etcétera, se profundiza en la semejanza, escalas, áreas de figuras geométricas y se desarrolla la aplicación al cálculo en situaciones reales de estos conceptos.Recomendaciones internacionales.

NCTM

La *National Council of Teachers of* Mathematics (NCTM), propone una serie de recomendaciones referentes a la Geometría, especificando los estándares que deberían lograr los estudiantes desde que comienzan sus programas de instrucción desde *pre-kindergarten* hasta el grado 12 (preescolar hasta 2º de Bachillerato). (NCTM, 2000).

Para los grados 6 a 8, que equivalen a nuestros grados de 5º de primaria a 2º de ESO, especifica que los programas de instrucción deben permitir que todos y cada uno de los estudiantes logren los estándares que figuran en la tabla 7.

Tabla 7. Recomendaciones sobre estándares según la NCTM.

Expectativas de los grados 6–8 :(5 primaria a 2 ESO) todos y cada uno de los estudiantes deben	
Analice características y propiedades de formas geométricas de dos y tres dimensiones y desarrolle argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas	• describa, clasifique y comprenda con precisión las relaciones entre los tipos de objetos de dos y tres dimensiones utilizando sus propiedades definitorias; • comprender las relaciones entre los ángulos, longitudes laterales, perímetros, áreas y volúmenes de objetos similares; • cree y critique los argumentos inductivos y deductivos relacionados con ideas y relaciones geométricas, como la congruencia, la similitud y la relación pitagórica.
Especifique ubicaciones y describa relaciones espaciales usando geometría de coordenadas y otros sistemas de representación	• use la geometría de coordenadas para representar y examinar las propiedades de las formas geométricas; • use la geometría de coordenadas para examinar formas geométricas especiales, como polígonos regulares o aquellos con pares de lados paralelos o perpendiculares.
Aplicar transformaciones y usar simetría para analizar situaciones matemáticas.	• describa los tamaños, las posiciones y las orientaciones de las formas bajo transformaciones informales como giros, giros, diapositivas y escalamiento; • Examine la congruencia, similitud y simetría de línea o rotacional de objetos utilizando transformaciones
Utilice la visualización, el razonamiento espacial y el modelado geométrico para resolver problemas	• dibujar objetos geométricos con propiedades específicas, como longitudes laterales o medidas de ángulos; • use representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales para visualizar y resolver problemas como los que involucran área de superficie y volumen; • utilizar herramientas visuales como redes para representar y resolver problemas; • usar modelos geométricos para representar y explicar relaciones numéricas y algebraicas; • reconozca y aplique ideas y relaciones geométricas en áreas fuera del aula de matemáticas, como el arte, la ciencia y la vida cotidiana

Fuente: elaborada a partir de NCTM (2000)

Un primer análisis comparativo refleja el carácter más deductivo del currículo recomendado por la NCTM, también más orientado a la práctica manipulativa, al estudio y la deducción mediante procedimientos que permiten la comparación, como son las relaciones geométricas, las relaciones espaciales o el estudio de las transformaciones y simetrías o la visualización tridimensional. Prevalece este estudio, mediante procedimientos que permiten la deducción de las propiedades, sobre el más enfocado en los contenidos de nuestra normativa nacional y autonómica. También se destaca el énfasis que el NCTM hace en la utilización de los sistemas de coordenadas como herramientas de análisis y deducción de conceptos y propiedades.

Desarrollo de la propuesta de unidad didáctica

La unidad didáctica que se propone se llevó a cabo en un centro educativo. En los siguientes apartados vamos a describir el contexto de este, el diseño de la unidad, el cronograma establecido y el contenido de las sesiones.

El contexto

El centro donde se realizó la propuesta se encuentra localizado en un municipio de la provincia de Guadalajara, perteneciente a la comunidad autónoma de Castilla-La Mancha, está situado entre Alcalá de Henares y Guadalajara. Era un pequeño enclave de la campiña de Guadalajara que durante siglos tuvo pocas edificaciones hasta que en los años 90 comenzó una expansión a través de urbanizaciones. Desde 1990 ha visto su población multiplicarse por 60 pasando de 109 habitantes hasta más de 6500 en el último censo. Este crecimiento demográfico rapidísimo le confiere también un porcentaje de población joven muy elevado. Se ha convertido en un pequeño pueblo dormitorio, y en él conviven:

- Familias ligadas al pueblo desde generaciones. Son familias que se han dedicado a la agricultura durante siglos y que se han adaptado a la nueva estructura del pueblo convirtiendo su trabajo de agricultores a servicios. Son los dueños de los pequeños comercios, de los pequeños negocios. La mayoría tenía algunas tierras que se han recalificado y les ha permitido dar un salto en la calidad de vida. Son más o menos familias con recursos, pero sin estudios.
- Familias ligadas al pueblo y sus urbanizaciones desde los años 90. Las familias buscaban allí suelo barato para viviendas de precio reducido con servicios básicos y cercanos a sus lugares de trabajo y han formado en el pueblo la familia. Son familias más o menos con recursos, normalmente con estudios universitarios. La mayoría trabaja en Madrid, Alcalá o Guadalajara, va y vuelve todos los días, llegando normalmente más tarde de lo deseado a casa.
- Familias ligadas al pueblo desde la generación actual. La burbuja inmobiliaria, trajo consigo la expansión de empresas constructoras a todos los pueblos de los alrededores de Madrid. Son en su mayoría gente joven que busca mejores oportunidades de vivienda. En este caso hay también familias de procedencia extranjera, de zonas tan diversas como Rumanía, países sudamericanos, norteafricanos y subsaharianos.

Este crisol, cultural, social, étnico y de nacionalidades conviven en el pueblo y también en las aulas. En las que hay todo tipo de alumnos, con intereses, capacidades, necesidades y objetivos muy distintos.

El nivel cultural medio del pueblo no es muy elevado, este hecho junto con la falta de arraigo, el que los padres de los alumnos trabajen fuera y con jornadas que les obligan a estar mucho tiempo fuera de casa, condiciona la atención que reciben los alumnos fuera del centro educativo.

En el centro, la oferta educativa está compuesta por la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO), Bachillerato y FPB, asimismo se oferta el Programa de Mejora del Aprendizaje y del Rendimiento (PMAR), como medida de atención individualizada, para el alumnado de 2º y 3º de ESO, que es impartido por ámbitos. También dispone de un Proyecto Bilingüe que se va a ir implantando durante los próximos cursos. En cuanto a la Enseñanza de Bachillerato, el Centro oferta dos modalidades: Humanidades y Ciencias Sociales y Ciencias.

Los alumnos objeto de este estudio son los integrantes de dos grupos de primer curso de la ESO, con edades de 12 – 13 años con 26 alumnos en cada clase. Este estudio se realizó en la clase de Matemáticas durante los meses de febrero y marzo de 2019 durante las prácticas realizadas por el autor de este trabajo.

Diseño del proyecto

El proyecto de desarrollo de la unidad didáctica que se presenta, corresponde a los contenidos incluidos en el currículo de primer curso de Educación Secundaria Obligatoria según se define en la normativa de la comunidad autónoma de Castilla-La Mancha. Se han desarrollado las sesiones ordenando las mismas según el orden de elaboración conceptual, partiendo de las más sencillas y que son además necesarias para las siguientes, hasta llegar a las de mayor complejidad. Presentamos dinámicas de aprendizaje eficaz, en las que el proceso de aprendizaje debe permitir que el alumno aprenda a aprender, para que de esta manera sea cada vez más independiente y competente para su desarrollo integral tanto personal como profesional.

La idea que nos guía es la de que el alumno debe participar activamente en su proceso de aprendizaje, tanto de forma individual como cooperativa, por ello, es necesario elegir las metodologías adecuadas que favorezcan la enseñanza activa y participativa. En la preparación de las sesiones de clase, inevitablemente se deben hacer asunciones en cuanto al nivel de conocimientos de partida, que deberán ser corroboradas en las primeras fases de cada actividad, esto es, en las fases de información del modelo de Van Hiele, de tal forma que, siguiendo lo planteado por Vallejo, Garrido y Palomo (2002), se localicen las necesidades del alumnado, para así procurar la participación del mismo, proponiendo dinámicas indagadoras, activas y experienciales para que de esta manera construyan nuevos conocimientos.

Conscientes de que en el proceso de enseñanza-aprendizaje el elemento fundamental es la construcción de significados, es decir el aprendizaje significativo, trataremos de que el alumno asocie la información nueva con los conocimientos que ya posee, de esta manera se elaborarán nuevas conexiones que constituirán el nuevo aprendizaje.

En las sesiones pretendemos permitir que los alumnos, que de forma natural construyen intuitivamente conceptos y relaciones geométricas, avancen en el conocimiento del espacio donde los identifican, de forma que puedan prescindir de él y manejen mentalmente las imágenes de las figuras y relaciones geométricas haciendo uso de su capacidad de abstracción.

> En este espacio conceptualizado, la validez de las conjeturas que hagan sobre las figuras geométricas ya no se comprobará empíricamente, sino que tendrán que apoyarse en razonamientos que obedecen a las reglas de argumentación de las Matemáticas, en particular, en la deducción de nuevas propiedades a partir de las que ya se conocen. (García y López, 2008).

Los procesos de pensamiento que el alumno desarrolla con un adecuado tratamiento de la Geometría en clase, son tan importantes como el aprendizaje de los contenidos geométricos. Para guiar estos procesos, se ha de contar, entre los recursos didácticos, con la participación del enfoque del descubrimiento guiado, donde, en primer lugar se favorezca la intuición sobre conceptos y relaciones, después se conceptualice, es decir se construyan los conceptos geométricos, a continuación se investigue, es decir el alumno indaga acerca de características, propiedades y relaciones entre objetos geométricos con el propósito de dotarlas de significado y por último, se demuestre, explicando, probando o demostrando a través de argumentos que puedan convencer a otros de su veracidad. Lo que se consigue a través del diálogo en clase. En la figura 1 se esquematiza este proceso que debe repetirse para cada nuevo contenido introducido.

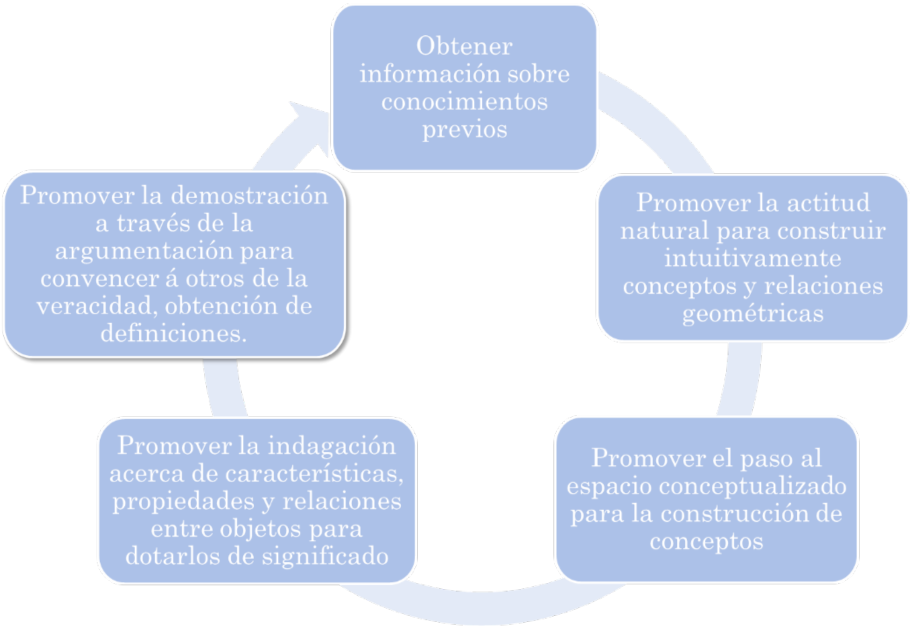


Figura 1. Proceso seguido para cada contenido introducido. Fuente: Elaboración propia.

Este enfoque se corresponde con el de la fase de orientación dirigida del modelo de Van Hiele. En las siguientes fases, para la consecución de cada nuevo nivel de pensamiento, se deben obtener nuevas habilidades de razonamiento que permitan el paso de un nivel al superior. Pero, ¿cómo se produce el aprendizaje de nuevas habilidades de razonamiento? y por otra parte, ¿hay alguna manera de favorecer este proceso de aprendizaje?

Es lógico pensar que en este proceso deben producirse modificaciones en la estructura mental, haciéndose más complejas y podemos representar estas estructuras como redes de relaciones en las que los vértices son los diferentes conceptos asimilados y las líneas de conexión son las relaciones establecidas entre estos conceptos (Jaime y Gutierrez, 1990). Y según esta representación, en el paso de un nivel a otro se incorporan nuevos conceptos y relaciones.

Para Van Hiele, la acumulación en la cantidad suficiente de experiencias adecuadas lleva al alumno de un nivel a otro superior. Y estas actividades estan graduadas y organizadas según las fases de aprendizaje de su modelo, a lo largo de las cuales el profesor debe procurar que sus alumnos construyan la red de relaciones creando primero los vértices, (conceptos) y después las conexiones entre ellos. Es decir, primero adquirirán los conocimientos previos necesarios, conceptos, vocabulario, propiedades y después se centrarán en aprender a utilizarlos y combinarlos.

Los niveles no representan rupturas en el proceso de aprendizaje, por lo que, una vez completado el trabajo de la última fase de un nivel, se debe iniciar el trabajo de la primera fase del nivel siguiente. (Jaime y Gutierrez, 1990)

En la figura 2 tomada de Jaime y Gutierrez (1990) se trata de representar este proceso continuo que puede abarcar varios años académicos.

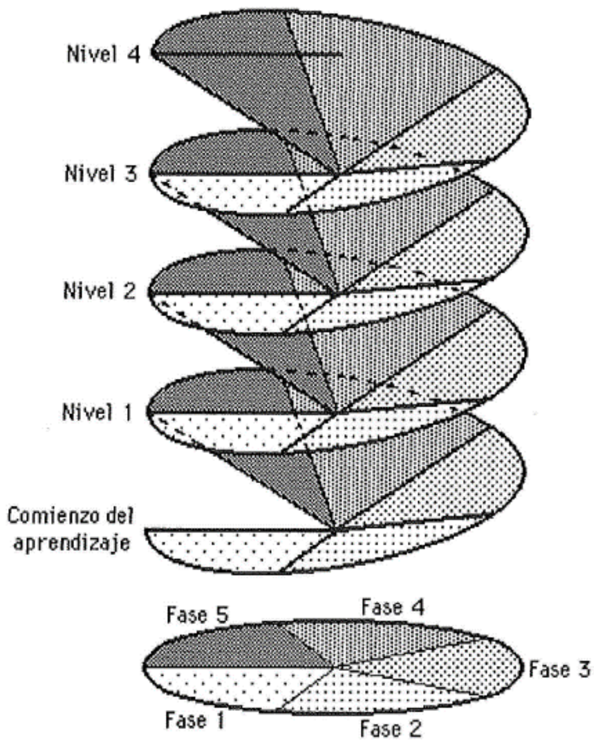


Figura 2. Las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele. Fuente: Jaime y Gutiérrez (1990, p. 339)

En este trabajo partiremos de la consideración, como es habitual para el primer curso de ESO, de que nuestros alumnos se encuentren en el nivel 0 de pensamiento para la mayoría de los contenidos, esto se corroborará en las primeras fases para adaptarse a la nueva situación en otro caso.

Por último, antes de comenzar con el desarrollo de las sesiones quisiéramos recoger las ideas de Fernandez Bravo (2000), sobre las metodologías para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático y que nos inspirarán en la tarea (tabla 8).

Tabla 8. Deberes del profesor y del alumno

El/la profesor/a tiene que... • Observar las respuestas de los niños sin esperar la respuesta deseada. • Permitir, mediante ejemplos y contraejemplos, que el niño corrija sus errores. • Evitar la información verbal y las palabras correctivas: "Bien", "Mal", o formulaciones con la misma finalidad. • Respetar las respuestas, conduciendo, mediante preguntas, el camino de investigación que ha propuesto el sujeto. • Enunciar y/o simbolizar la relación, estrategia, estructura lingüística o procedimiento que se estén trabajando con la nomenclatura correcta, después, y sólo después, de su comprensión. El/la niño/a tiene que... • Ver su trabajo como un juego. • Dudar sobre lo que está aprendiendo. • Jugar con las respuestas antes de escoger una de ellas. • Tener la completa seguridad de que no importa equivocarse. • Conquistar el concepto; luchar por su comprensión. • Dar explicaciones razonadas. • Trabajar lógica y matemáticamente. • Transferir los conocimientos adquiridos a otras nuevas situaciones.

Fuente: Fernández-Bravo (2000, pp.7-8)

Cronograma

Para el desarrollo de este trabajo hemos diseñado una unidad didáctica de Geometría con las sesiones que figuran en la tabla 9. En la misma se aprecia el decalaje de cada una de las sesiones entre los dos grupos en los que se plantea realizar.

Las actividades se han diseñado para ser impartidas en sesiones de 55 minutos, en total se han diseñado 7 sesiones:

- Línea poligonal, polígono, vértice, lado, ángulo.
- Polígonos regulares, clasificación, apotema.
- Clasificación de triángulos. Suma de ángulos de un polígono

- Clasificación de cuadriláteros
- Circunferencia, círculo, elementos característicos.
- Longitud, superficie, volumen. Medidas.
- Teorema Pitágoras.

De las cuales se desarrollarán en el presente trabajo las siguientes:

- Polígonos regulares, clasificación, apotema.
- Clasificación de cuadriláteros.
- Circunferencia, círculo, elementos característicos.

Tabla 9. Cronograma de las sesiones de la unidad didáctica de Geometría de 1º ESO

	1ºB	1ºC
LUNES 18	EAE 311 LÍNEA POLIGONAL, POLÍGONO, VÉRTICE, LADO, ÁNGULO	
MARTES 19		
MIÉRCOLES 20	RESTO EAE 311 POLÍGONOS REGULARES, CLASIFICACIÓN Y APOTEMA	EAE 311 LÍNEA POLIGONAL, POLÍGONO, VÉRTICE, LADO, ÁNGULO
JUEVES 21	EAE 312 CLASIFICACIÓN TRIÁNGULOS Y SUMA DE ÁNGULOS DE UN POLÍGONO CUALQUIERA	RESTO EAE 311 POLÍGONOS REGULARES, CLASIFICACIÓN Y APOTEMA
VIERNES 22	EAE 314 CLASIFICACIÓN CUADRILÁTEROS	EAE 312 CLASIFICACIÓN TRIÁNGULOS Y SUMA DE ÁNGULOS DE UN POLÍGONO CUALQUIERA
LUNES 25	EAE 315 CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO, ELEMENTOS	
MARTES 26		EAE 314 CLASIFICACIÓN CUADRILÁTEROS
MIÉRCOLES 27	Preparamos ejercicios del libro parecidos a los del examen	
JUEVES 28	EJERCICIOS	EAE 315 CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO, ELEMENTOS
VIERNES 1	DUDAS O EJERCICIOS	EJERCICIOS
LUNES 4	NO LECTIVO	
MARTES 5		DUDAS O EJERCICIOS
MIÉRCOLES 6	PE EAE 311 312 314 315 ENVIO FLIP EAE 312	PE EAE 311 312 314 315 ENVIO FLIP EAE 313
JUEVES 7	DUDAS FLIP	DUDAS FLIP
VIERNES 8	A PARTIR DE AQUÍ EMPIEZA PITÁGORAS Y ÁREAS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS	

Desarrollo de las sesiones

Vamos a presentar las tres sesiones diseñadas, el esquema que seguiremos será el siguiente: en primer lugar, se indicará el estándar de aprendizaje evaluable que se ve involucrado de los que se indican en el Decreto 40/2015, de 15/06/2015, por el que se establece el currículo de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Castilla-La Mancha y en segundo lugar se describirán las actividades que componen cada sesión, haciendo en cada una de ellas una breve descripción de cada fase de las que componen el modelo de Van Hiele y que tienen lugar en ellas.

Polígonos regulares, clasificación, apotema.

El estándar del currículo involucrado es el siguiente: Estándar 3.1.1. Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema, simetrías. Decreto 40/2015 CLM

Fase de información y Fase de orientación dirigida. Clasificación de polígonos: En la sesión anterior se han tratado los polígonos, para comenzar ésta, las preguntas y respuestas sugeridas son:

- Repasando definición de polígono: Línea poligonal cerrada y simple.
- ¿Cómo pensáis que podemos clasificar los polígonos? ¿Por el número de lados?
- ¿Qué significa la palabra POLÍGONO? Es una palabra formada por POLI y GONO. Poli significa varios y gono significa ángulo.
- A los polígonos se les asigna el nombre según el número de ángulos que tengan. ¿Coinciden con el número de lados?
- Dibujando polígonos con cualquier número de lados, contaremos los lados y ángulos de esos polígonos.

Fase de orientación libre e Integración. Ejercicio: Se pretende que lleguen a la clasificación según el número de ángulos, que coincide con el número de lados. Se suministra una ficha en la que deben nombrar los polígonos. Se espera que lleguen a nombrar cada polígono asociando el prefijo numeral a la desinencia -gono, activando y relacionando conocimientos de otras materias como el dibujo o geometría de cursos anteriores donde ya han oído los prefijos en las palabras *triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono, heptágono, octógono, eneágono, decágono, endecágono, dodecágono, tridecágono, tetradecágono, pentadecágono…*

Se les pide que realicen la actividad que se presenta en la figura 3, donde tienen que poner el nombre del polígono que corresponda y entre paréntesis el número de lados.

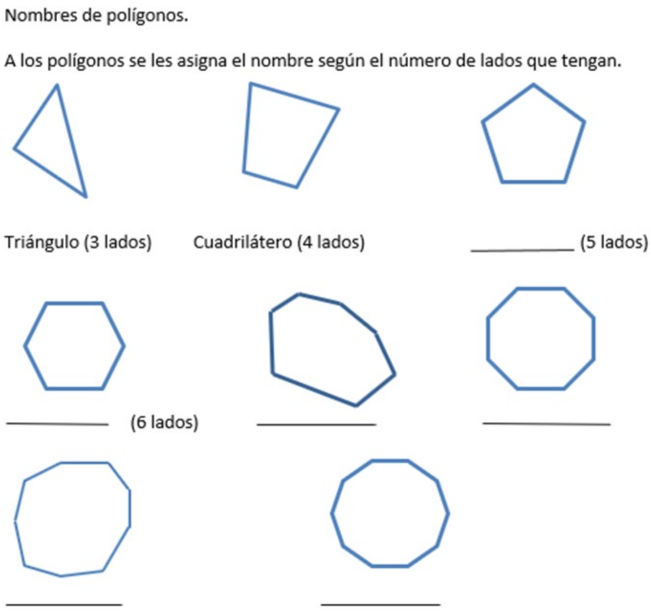


Figura 3. Ficha para rellenar y fijar nombres. Integración.

<u>Nueva fase de orientación dirigida y orientación libre. Polígonos regulares. Preguntas y respuestas sugeridas:</u>

- Pregunta: Un polígono regular es aquel con todos los lados iguales y con todos los ángulos iguales. ¿Cuál de los polígonos anteriores es regular?
- ¿Es posible que un polígono tenga todos los lados iguales, sin ser un polígono regular?¿Por ejemplo, cuál es el nombre de un cuadrilátero no regular con todos los lados iguales?
- Formamos un hexágono no regular con los lados iguales a partir de un hexágono regular. Dibuja otro hexágono no regular con los lados iguales, pero de diferente forma del que aparece en la figura 4.

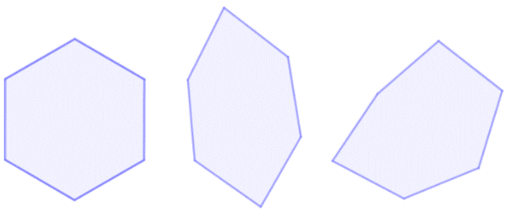


Figura 4. Hexágonos con lados iguales

- ¿Es posible que un polígono tenga todos los ángulos iguales, sin ser un polígono regular? Intenta dibujar dos hexágonos no regulares con los ángulos iguales.

Como es una actividad de la fase de orientación libre, se muestra un ejemplo posible en la figura 5 para ayudar al docente.

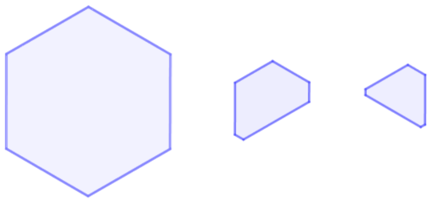


Figura 5. Hexágonos con ángulos iguales

Fase de explicitación e integración: Pedimos la definición de sus propiedades después de la clasificación.

- Los polígonos regulares son polígonos equiláteros, puesto que todos sus lados son de la misma longitud.
- Los polígonos regulares son equiangulares, puesto que todos sus ángulos interiores tienen la misma amplitud.
- Los polígonos regulares se pueden inscribir en una circunferencia. Figura 6.
- Cualquier polígono regular se puede circunscribir a una circunferencia. Es decir, se puede dibujar una circunferencia dentro de ellos, de tal forma que el punto medio de cada lado forma parte de la circunferencia, como se muestra en la figura 6.

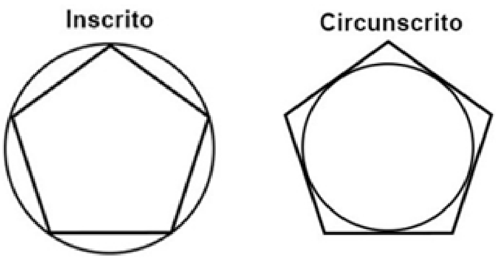


Figura 6. Polígonos inscrito y circunscrito a una circunferencia

Nueva fase de orientación dirigida. Preguntas y respuestas sugeridas Partes de un polígono regular. Son las mismas que las partes de un polígono cualquiera (lados, vértices, diagonales y ángulos), pero además tienen apotema.

- ¿Qué es la apotema? No pueden saberlo, se les orienta para que visualicen cuál sería la distancia mínima entre el centro y un lado. Partimos de la idea de hacerles ver cuál sería la distancia más pequeña entre el punto de la pizarra en el que estemos y la pared del fondo del aula. Se sugiere que piensen que camino tomarían ellos para llegar antes. De ahí se traslada a la distancia del centro al lado del polígono.

Explicitación: Se trata de que expliciten la definición:

- La apotema es el segmento de menor longitud, o que representa la menor distancia, que une el punto central de un polígono regular y cualquiera de sus respectivos lados. Por lo tanto, se trata de cada uno de los segmentos que unen el centro del polígono regular con el centro de cada uno de sus lados. Consecuentemente, la apotema es perpendicular al lado. Existen tantas apotemas como lados tiene el polígono regular y todas ellas tienen la misma longitud. Se presenta un esquema en la figura 7.

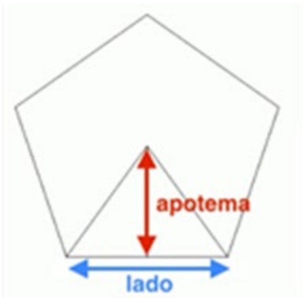


Figura 7. Apotema y lado de un polígono

Nueva fase de orientación dirigida y explicitación. Propiedades de la apotema, Angulo central Simetrías

- Se trata de partir del triángulo formado por la apotema, el lado y el radio del polígono circunscrito. En la figura 8 se pueden observar las apotemas de los cuatro primeros polígonos regulares ordenados por el número de lados, de nuevo se pretende deducir una nueva propiedad, en este caso la que poseen entre sí la apotema, el radio de la circunferencia circunscrita y el semi lado. Se les pide que observen la figura que forman. Es un triángulo y que además tiene un ángulo recto, ya que la apotema hemos visto que es perpendicular al lado, a continuación se explicita la propiedad. En un polígono regular, el radio de la circunferencia circunscrita que pasa por un vértice, la apotema de uno de los lados contiguos y la mitad de ese lado forman siempre un triángulo rectángulo.

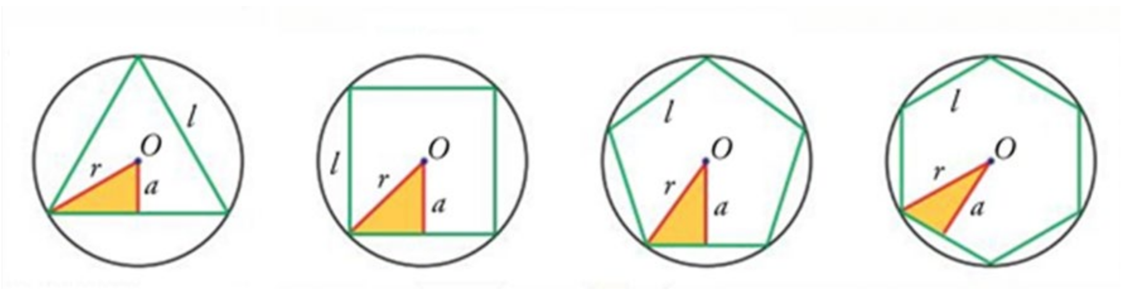


Figura 8. Triángulo rectángulo que forman la apotema, el radio y el semi lado

- Ángulo central: Es el formado por dos radios consecutivos. La suma de todos los ángulos centrales de un polígono suma 360º. Por tanto, cada uno de los ángulos centrales de un polígono regular tiene una amplitud igual al resultado de dividir el ángulo de 360 grados entre el número de lados, como se aprecia en la figura 9.

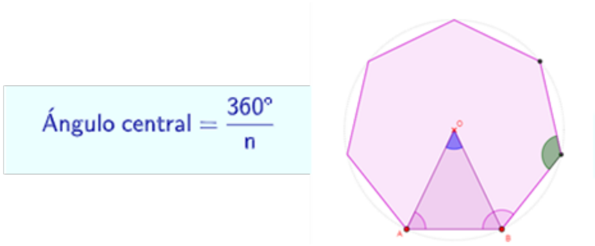


Figura 9. Ángulo central

- Simetrías. Para esta actividad, se suministra a cada grupo de alumnos un juego de polígonos regulares como los que se observan en la figura 10 de goma EVA, para que mediante el doblado de los mismos, comprueben la simetría.

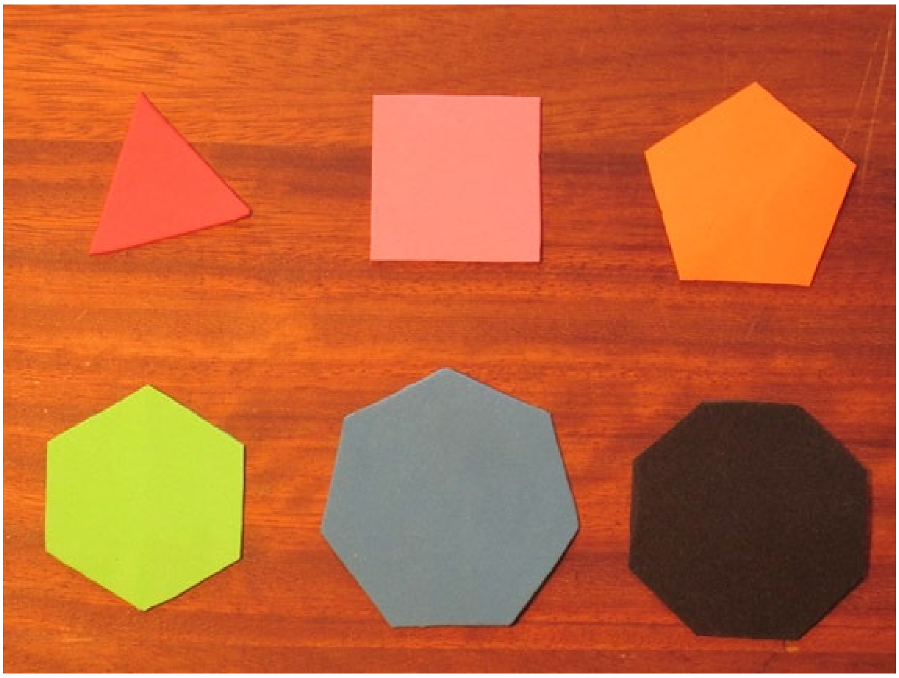


Figura 10. Conjunto de polígonos regulares de goma EVA.

El docente con un juego de polígonos regulares, si fuera necesario, muestra la forma de hacer los dobleces para ir consiguiendo los ejes. Una vez que se acostumbran a la obtención de los ejes de simetría se les orienta para que deduzcan la nueva propiedad.

Una figura plana es simétrica respecto a un eje (una recta), si al doblarla por dicho eje las dos mitades coinciden. Esto es lo que se llama simetría axial. Si pensamos en los polígonos regulares y les pedimos que tomen los de número impar de lados, les preguntaremos que nos digan cuantos ejes encuentran. Se pretende que relacionen que hay tantos como vértices, punto por el que tienen que pasar obligatoriamente.

Después les pedimos que se fijen en los de número de lados par, en ellos aplicando la regla anterior llegarán a la misma conclusión, pero en este caso les hacemos ver que los ejes que pasan por los vértices pasan por dos vértices opuestos y de ahí que los ejes que pasan por vértices se reducen a la mitad. Y sin embargo serán capaces de contar otros ejes que pasarán por los centros de los lados opuestos. También análogamente habrá la mitad de ejes que de lados. Sumando ambas categorías de ejes, los que pasan por los vértices y los que pasan por los lados, llegarán a la conclusión que en total tienen los mismos ejes que vértices o lados. Luego tienen el mismo número de ejes que los polígonos regulares de número impar de lados y ese número es igual finalmente al número de vértices o de lados luego ya se puede explicitar e integrar la definición:

Todos los polígonos regulares tienen tantos ejes de simetría como lados. Se muestra en la figura 11.

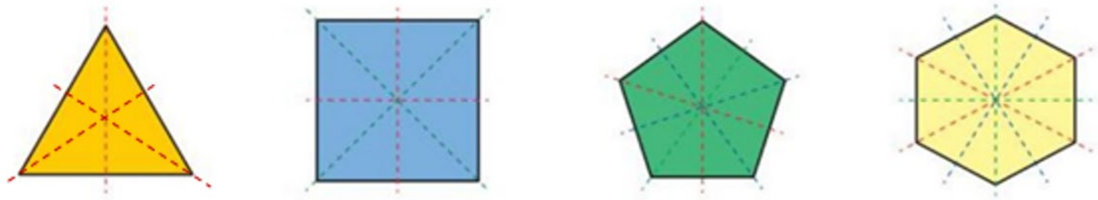


Figura 11. Ejes de simetría de los polígonos regulares

<u>*Orientación libre.*</u> Además, como propiedad adicional se puede sugerir que piensen cual sería el ángulo que formarán esos ejes entre sí. Se deduce del dibujo. Cada dos ejes de simetría contiguos se forma un ángulo cuya medida se puede calcular con la siguiente fórmula:

$$Angulo\ entre\ ejes = \frac{360\,^{\circ}}{2 \cdot numero\ de\ lados\ o\ de\ vertices}$$

Clasificación de cuadriláteros

El estándar del currículo involucrado es el siguiente: EAE 3.1.4. Clasifica los cuadriláteros atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos y conociendo sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales. Decreto 40/2015 CLM

<u>*Fase de información: Preguntas para recordar*</u>

- ¿Qué son los cuadriláteros? Se pretende que recuerden que son polígonos de cuatro lados.
- ¿Cómo podríamos dar una definición completa? Se pretende que recuerden que un polígono es la región del plano limitada por una línea poligonal cerrada simple y que en este caso además tienen cuatro lados.
- ¿Cuánto suman los cuatro ángulos interiores de un cuadrilátero? Se pretende que recuerden del día anterior que sus cuatro ángulos suman 360 grados
- ¿Y cuantas diagonales? Se pretende que recuerden que tienen dos diagonales.

<u>*Fases de orientación dirigida y explicitación: Clasificación de los cuadriláteros.*</u>

Se proporciona a cada grupo de cuatro alumnos un conjunto de cuadriláteros de goma EVA compuesto de:

- 1 cuadrado

- 1 rectángulo no cuadrado
- 1 rombo no cuadrado
- 1 romboide
- 3 trapecios, (1 recto, 1 escaleno, y 1 isósceles)
- 3 trapezoides (1 cometa y 2 trapezoides)

En la figura 12 se observa el conjunto a suministrar a cada grupo, una vez que todos se han familiarizado con los cuadriláteros, comienza la orientación dirigida, se les pide que agrupen y clasifiquen los cuadriláteros en la forma que quieran.

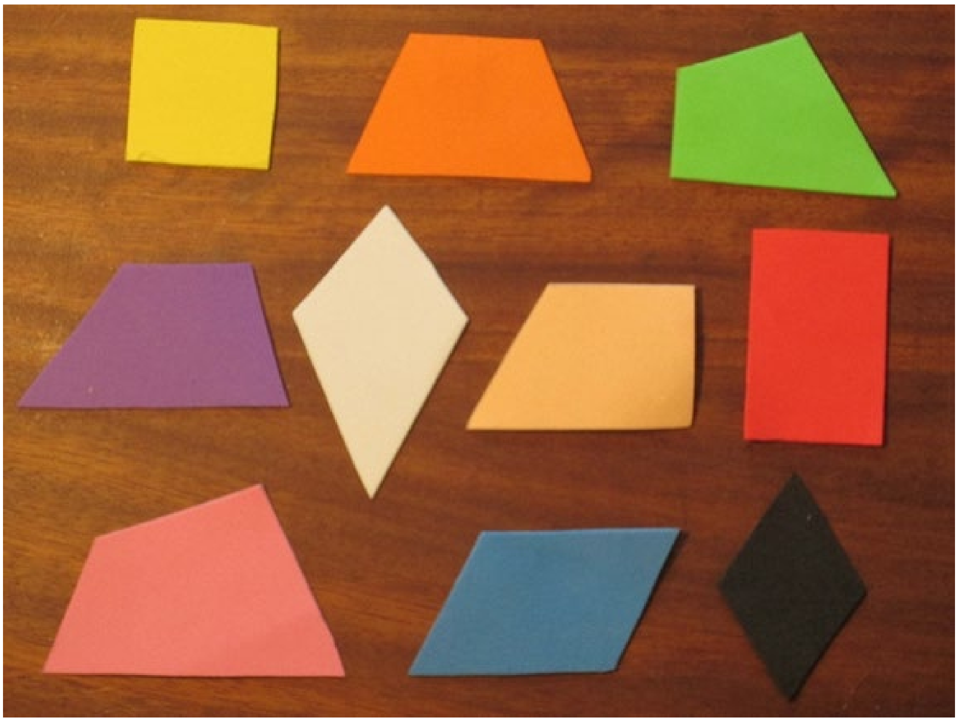


Figura 12. Conjunto de cuadriláteros de goma EVA

Cuando los grupos van teniendo ya ideas de agrupación se les pide que expongan al gran grupo, como han clasificado y por qué lo han hecho así. Esto supone también completar la fase de explicitación según el modelo de Van Hiele. Con ello se pretende que lleguen a una clasificación por paralelismo de lados y por igualdad o desigualdad de lados y ángulos.

Las ideas que constituyen el guion de la actividad para interactuar son:

- Podemos clasificar los cuadriláteros según la disposición que tengan sus lados entre sí en:

- Paralelogramos. Son cuadriláteros con los lados opuestos paralelos dos a dos. Son los cuadrados, rectángulos, rombos y romboides
- No paralelogramos. O bien solo tienen dos lados opuestos paralelos y entonces se llaman trapecios, o bien, ninguno de ellos es paralelo y en este caso se llaman trapezoides.

En la figura 13 se detalla la clasificación completa a la que se tiene que ir llegando y que sirve de guía al docente.

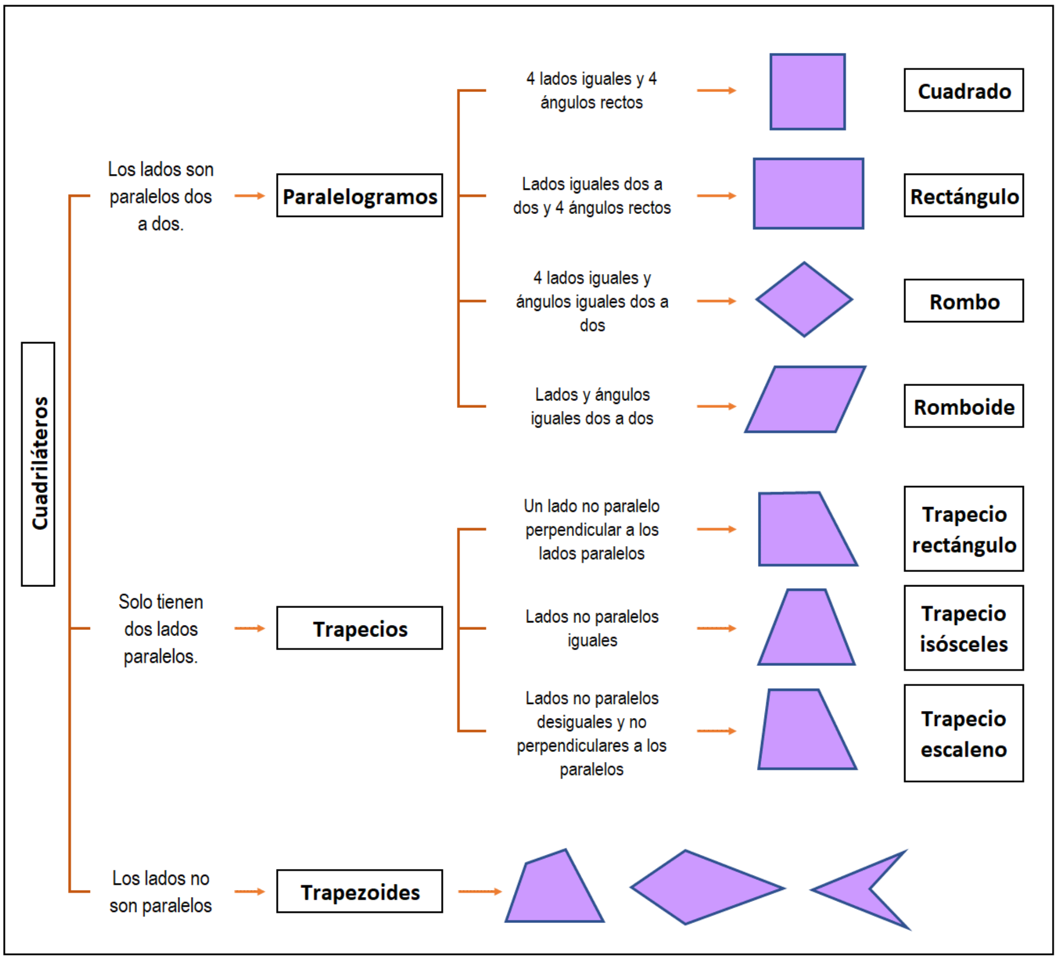


Figura 13. Clasificación de cuadriláteros

- Los cuadrados son rectángulos porque tienen los ángulos rectos, y también son rombos porque tienen los cuatro lados iguales, y para poder decir que un cuadrilátero es un cuadrado, se tienen que dar ambas características, es decir, sus cuatro ángulos son rectos y sus cuatro lados son iguales. En la figura 14 se detallan estas características.

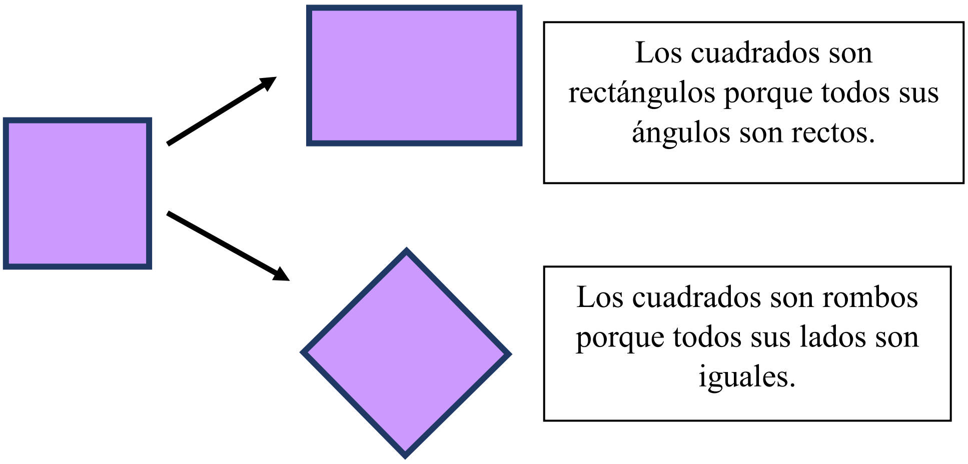


Figura 14. Cuadrados, rectángulos y rombos

- Las diagonales de los paralelogramos se cortan en sus puntos medios. En la figura 15 se muestra la característica.

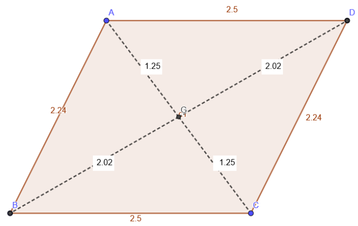


Figura 15. Propiedades de los paralelogramos. Las diagonales se cortan en sus puntos medios.

- En el cuadrado y en el rombo además las diagonales son perpendiculares. En la figura 16 se muestra la propiedad.

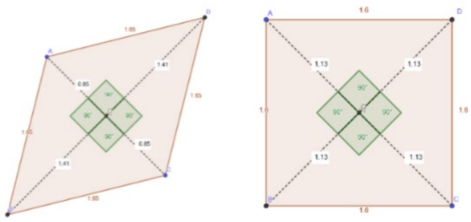


Figura 16. Propiedades de rombos y cuadrados

- En el cuadrado y el rectángulo además las diagonales son de igual longitud, lo que se detalla en la figura 17.

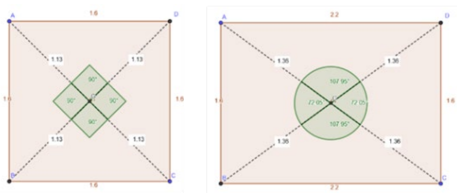


Figura 17. Propiedades de rectángulos y cuadrados

- Los romboides no tienen ejes de simetría, el rectángulo y rombo tiene dos y el cuadrado cuatro. En la figura 18 se muestran las características citadas.

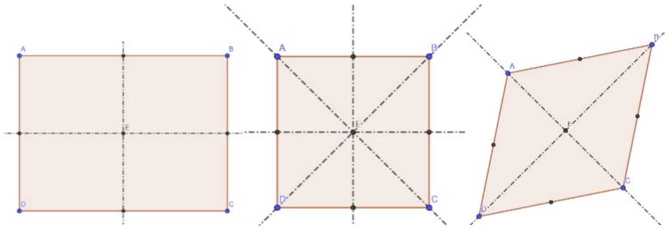


Figura 18. Ejes de simetría

- Los trapecios tienen dos lados paralelos, que son las bases y otros dos no paralelos, la altura de un trapecio es el segmento perpendicular y de mínima distancia entre las bases.
- ¿Puede un trapecio tener dos ángulos rectos?, Si, el trapecio rectángulo.
- Si un trapecio tiene los dos lados no paralelos iguales se llama: trapecio isósceles y tiene los ángulos iguales dos a dos, pero contiguos.
- Si tiene los lados no paralelos diferentes y no tiene ángulos rectos es escaleno.
- Los trapezoides, ningún par de lados paralelos

Para el desarrollo de toda esta fase se utilizará GeoGebra con construcciones realizadas previamente cuando solo haya un docente en el aula y no sea posible construir sobre la marcha las figuras, lo que sería más recomendable.

Fases de orientación libre e integración. Se propondrá a los alumnos dos actividades a realizar en casa. La primera actividad es la identificación de la forma de los cuadriláteros señalando en un entramado de cuadriláteros con un color diferente cada uno identificándolo con su nombre, la segunda, pretende que sobre un cuadro en blanco expliciten la clasificación y las propiedades involucradas en la misma, se muestran en las figuras 19 y 20.

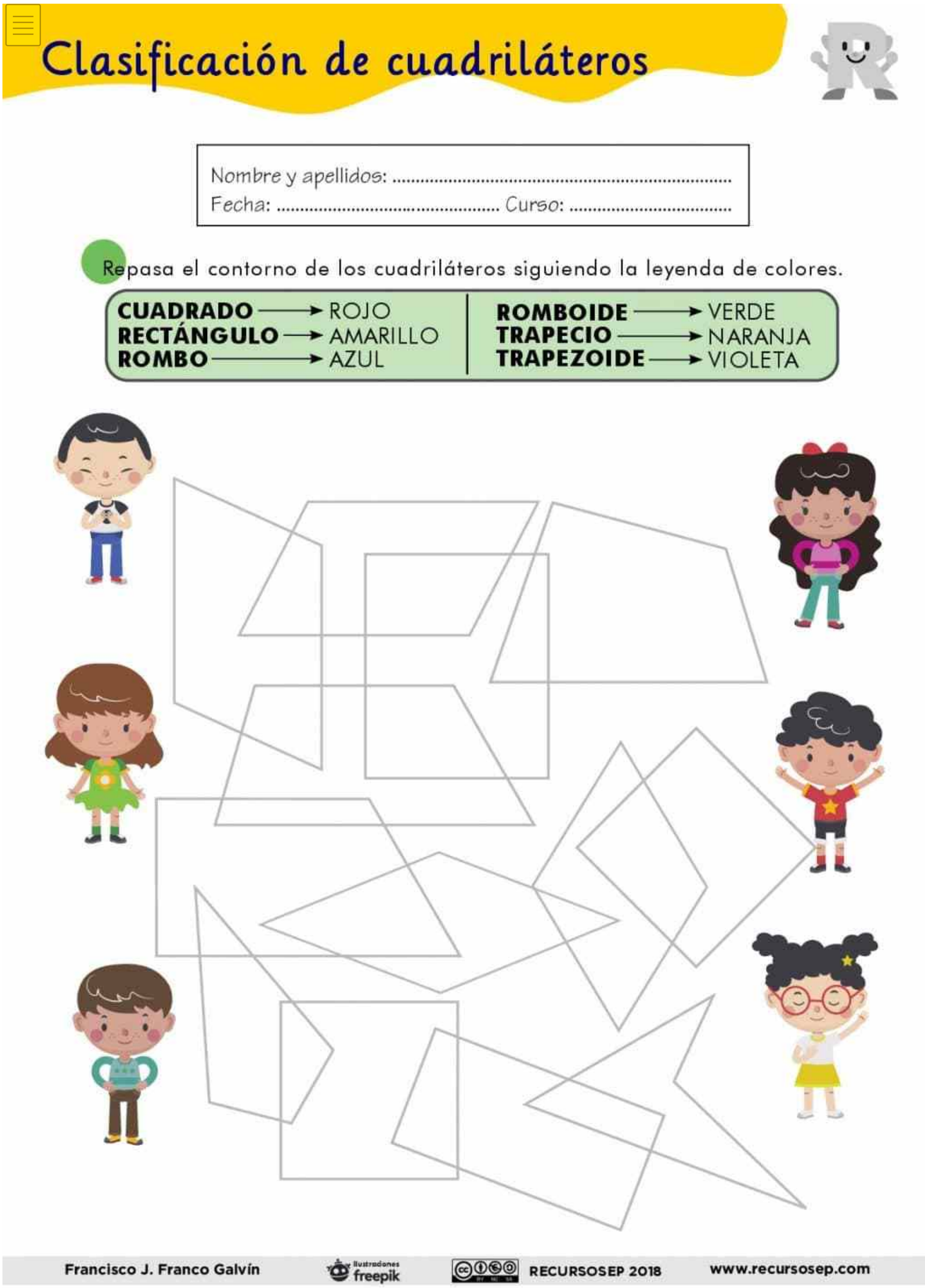


Figura 19. Actividad orientación libre. Identificación y clasificación de cuadriláteros (Galvin, 2019)

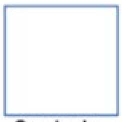
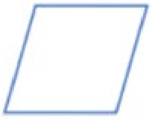
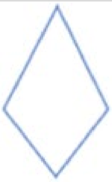
Cuadriláteros.	Lados paralelos.	Lados iguales.	Ángulos interiores.	Diagonales.
 Rectángulo	Lados opuestos paralelos	Lados opuestos iguales	Todos los ángulos son rectos	Dos diagonales iguales y se cortan en su punto medio. No son perpendiculares.
 Cuadrado	Lados opuestos paralelos	Todos los lados iguales	Todos los ángulos son rectos	Dos diagonales iguales, se cortan en su punto medio en ángulo recto y las diagonales son bisectrices de los ángulos
 Romboide	Lados opuestos paralelos	Lados opuestos iguales	Ángulos opuestos iguales	Las diagonales se cortan en su punto medio. Pero no son de la misma medida
 Rombo	Lados opuestos paralelos	Los cuatro lados iguales	Ángulos opuestos iguales	Diagonales se cortan en el punto medio y ángulo recto y además son las bisectrices de los ángulos. No tienen la misma medida
 Trapecio	Solo dos lados paralelos	Lados no paralelos iguales (isósceles)	Dos pares de ángulos iguales	Dos diagonales que no se cortan en su punto medio. No son perpendiculares, pero sí tienen la misma medida.
 Cometa trapezoide	Ningún lado paralelo. Lados consecutivos iguales	Dos pares de lados adyacentes paralelos	Un par de ángulos iguales	Diagonales se cortan en ángulos rectos y una diagonal es bisectriz. No son de la misma medida y no se cortan en el punto medio de ambas.
 Trapezoide	Ningún lado paralelo	Ningún lado igual	Ningún ángulo igual	Diagonales no perpendiculares. No de la misma medida y no se cortan en sus puntos medios.

Figura 20. Actividad orientación libre. Explicitación de propiedades y clasificación de cuadriláteros

Para que puedan familiarizarse con los cuadriláteros se le facilita también una plantilla para que puedan recortar en papel, cartulina o goma eva y fabricarse su propio conjunto de cuadriláteros. Se adjunta en la figura 21.

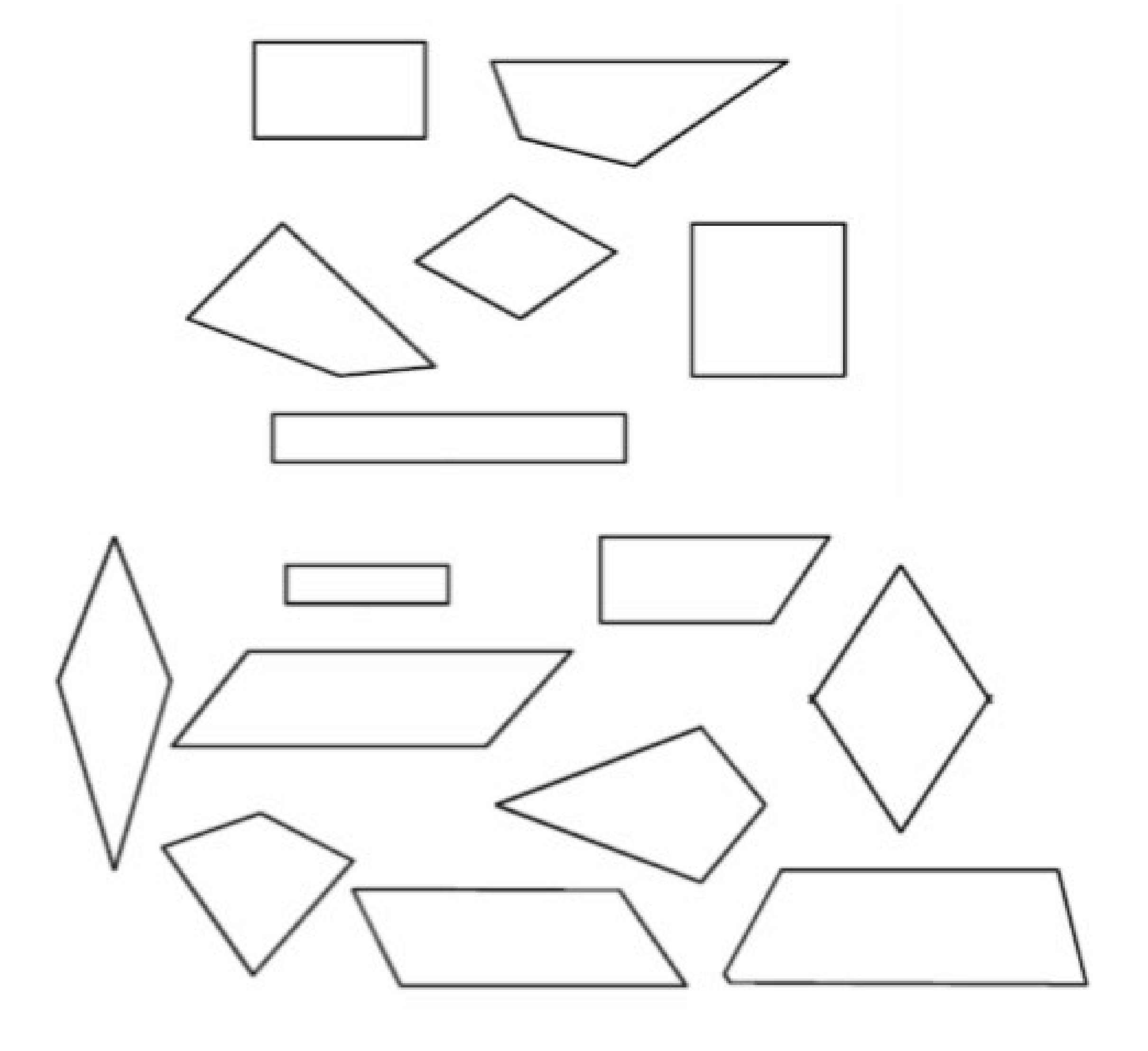


Figura 21. Plantilla para recortar

Circunferencia, círculo, elementos característicos

El estándar del currículo involucrado es el siguiente: EAE 3.1.5. Define círculo y circunferencia, e identifica propiedades geométricas que caracterizan sus puntos. Decreto 40/2015 CLM

Fases de información y orientación dirigida. La circunferencia. Comenzaremos recabando información sobre la circunferencia, para ello podemos dibujar una línea curva abierta y preguntar qué tipo de línea es. Después dibujamos una linea curva y cerrada y repetimos la pregunta, si comparan ambas verán que la diferencia entre ambas es justamente la cualidad de que una de ellas no tiene principio ni fin, queremos conseguir que nos digan que la segunda es una línea curva y cerrada. Nos estamos aproximando a una de las características de la circunferencia.

- Bien utilizando GeoGebra o un compás de pizarra trazamos una circunferencia y les sugerimos que observen el centro.
- ¿Qué pasa con las distancias de los puntos de la circunferencia al centro? Si lo hemos dibujado con el compás de pizarra podremos, explicando el uso como transportador de distancias del compás, llegar al concepto de equidistancia al centro, segunda condición para llegar a la definición.

Explicitación. La circunferencia es una curva plana y cerrada cuyos puntos están a igual distancia del centro o mejor: Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de otro punto interior y fijo llamado centro.

Fases de información y orientación dirigida. El círculo. Si la circunferencia es figuradamente solo el *borde* del círculo, es decir la línea de puntos que está a la misma distancia del centro, entonces:

- ¿Qué pasa con el interior de la circunferencia?¿También forman parte de la circunferencia los puntos interiores a ella? Puede que digan que sí, pero en ese caso les preguntaremos acerca de la distancia desde ese punto interior al centro, para que se den cuenta de que no cumple con la definición de la circunferencia.
- Entonces, ¿cómo se llama esa parte?

Explicitación. Tras varias preguntas y distintas respuestas llegarán a la conclusión de que el círculo es la región del plano delimitado por una circunferencia.

Nueva fase de orientación dirigida: Elementos de la circunferencia y el circulo . El segmento que une cada punto de la circunferencia con el centro ¿Cómo se llama? Es el radio. ¿Cuántos radios hay? ¿Cuántos puntos tiene la circunferencia? Se trata de conseguir que piensen que los puntos que hay en la circunferencia son infinitos y por tanto infinitos los radios.

Con la ayuda del recurso dinámico de GeoGebra y de figuras de goma EVA (figura 22) tratamos de definir los elementos característicos de la circunferencia y el circulo:

- Centro: Punto interior de la circunferencia que se encuentra a la misma distancia de todos y cada uno de los puntos de la circunferencia.
- Radio: Segmento que une el centro de la circunferencia con cualquiera de sus puntos. Hay infinitos radios.
- Diámetro: Segmento que une dos puntos opuestos de la circunferencia y que pasa por el centro de la misma. La longitud del diámetro es igual a la de dos radios.
- Cuerda: Segmento que une dos puntos de la circunferencia. La cuerda de mayor longitud es el diámetro.
- Arco: Es una porción de circunferencia que queda definida a partir de dos puntos sobre dicha circunferencia.
- Sector circular: Región del círculo delimitada por dos radios y el arco correspondiente.
- Segmento circular: Región del círculo delimitada por una cuerda y su arco correspondiente

Figura 22. Conjunto de círculos y circunferencia de goma EVA

Implementación

En este apartado indicaremos las sesiones que se realizaron, la forma en la que evaluaremos tanto a los alumnos como al proyecto en sí y los resultados de ambas evaluaciones realizadas.

Sesiones realizadas

Todas las sesiones que se han desarrollado en los apartados anteriores se han llevado a la práctica, según fueron diseñadas, durante el periodo de prácticas en el IES. Fueron impartidas en las aulas de primero de ESO con los alumnos de dos grupos de 26 alumnos en cada uno de ellos.

Las aulas están dotadas de pizarra tradicional, pizarra de rotuladores y pantalla con proyector y ordenador para poder impartir contenidos y presentaciones informáticas y especialmente actividades preparadas para GeoGebra. Estas actividades permitieron la realización de metodologías de Geometría dinámica para la investigación y deducción de propiedades y conceptos geométricos.

Como las sesiones se realizaron en los dos grupos, pudieron ser mejoradas una vez realizadas en un grupo y antes de hacerlo en el segundo, siempre que lo permitiera el tiempo disponible entre ambas clases. Los resultados que figuran en la evaluación fueron obtenidos de las pruebas escritas y entrevistas que se realizaron sobre una muestra compuesta por 26 alumnos.

Evaluación de los alumnos

Ya se ha indicado anteriormente que la evaluación inicial de los alumnos, en cuanto a la dilucidación de cuál era su nivel según el modelo de Van Hiele se llevó a cabo de manera grupal y al principio de cada una de las sesiones y se hizo con la idea de que fuera una corroboración de la suposición de partida de que el nivel inicial sería, en general, por ser alumno de primer curso de la ESO, el nivel 0. La necesidad de conocer este nivel viene dada por el hecho de que la planificación de las actividades requiere saber cuáles son el nivel de adquisición de conocimientos previos necesarios y la capacidad de elaborar razonamientos.

Por otro lado, se podría objetar que un conocimiento individualizado de cada estudiante pudiera ser necesario, sin embargo, creemos que por el dinamismo y el carácter local de adquisición de los niveles esto se hace difícil, esto es, cada alumno puede estar en niveles distintos para conceptos diferentes y puede en determinados momentos transitar de uno a otro en determinadas tareas.

Podemos, no obstante, dar una serie de indicadores o características, que hemos tomado de Corberán, Huerta, Margarit, Peñas y Ruiz (1989) y que nos pueden ayudar a efectuar el diagnóstico y que indicamos en la tabla 10.

Tabla 10. Indicadores de nivel

Nivel 0

1. Utilizar cualidades, y no propiedades, en tareas de comparar, clasificar y caracterizar formas geométricas.
2. Caracterizar formas geométricas mediante prototipos visuales.
3. Incluir atributos irrelevantes -posición de la figura, "línea horizontal", etcétera.- al identificar o describir formas
4. Incapacidad de concebir una variedad infinita de formas pertenecientes a una determinada familia.
5. Efectuar clasificaciones inconsistentes utilizando propiedades que no pertenecen a las formas clasificadas.
6. Incapacidad de usar propiedades como condiciones necesarias para determinar una figura

Nivel 1

1. Comparar claramente las formas geométricas mediante las propiedades de sus componentes.
2. Clasificar atendiendo a atributos simples, como la longitud de los lados, sin considerar otros como ángulos, diagonales, simetría, etc.…
3. Vetar la inclusión de una clase de formas geométricas en otras clases más generales.
4. En tareas de identificación de formas o descripción de figuras, aplicar una larga lista de propiedades necesarias en lugar de propiedades suficientes. Incluso en la descripción de la figura, omitir el nombre de la misma que posiblemente conocen.
5. Repulsa explícita a definiciones formales en favor de caracterizaciones personales.

6. En tareas de comprobar la validez de una proposición, fiarse de una variedad de dibujos haciendo consideraciones sobre ellos.
7. Incomprensión de la demostración formal.

Nivel 2

1. Construir definiciones completas de formas geométricas.
2. Hacer referencias explícitas a definiciones.
3. Capacidad de aceptar definiciones equivalentes de un mismo concepto.
4. Aceptar la ordenación parcial entre clases distintas de formas geométricas; clasificaciones por inclusión.
5. Efectuar clasificaciones atendiendo a una variedad de atributos matemáticos precisos.
6. Uso explícito del "si… entonces… ".
7. Capacidad de construir argumentos deductivos utilizando formas lógicas como si p implica q y q implica r, entonces p implica r o la ley del modus ponens
8. Confundir las funciones del axioma y del teorema.

Nivel 3

1. Conjeturar frecuentemente e intentar, deductivamente, concluir demostraciones.
2. Confiar en la demostración como autoridad final para decidir la veracidad de una proposición matemática.
3. Comprensión de la utilidad en matemáticas de los axiomas, las definiciones, los teoremas y las demostraciones.

Fuente: Elaborado a partir de Corberán, Huerta, Margarit, Peñas y Ruiz (1989)

Al efectuar el diagnóstico inicial de las actividades pudimos constatar que los alumnos se encontraban en su práctica totalidad en el nivel 0 de partida y solo durante el desarrollo de las sesiones mostraron algunos de los indicadores mencionados anteriormente correspondientes a los niveles 1 y 2.

La gran mayoría no conocía los conceptos más básicos sobre las formas geométricas y sus propiedades y tenían algunas nociones memorizadas sobre propiedades, aunque no entendieran por qué y eso motivó que a menudo fueran erróneas.

Se efectuaron, durante las sesiones, dos actividades de evaluación, una preliminar, formativa, realizada una vez iniciada las sesiones, incluida en el anexo 1, dando retroalimentación a los alumnos sobre su progreso y una final incluida en el anexo 2, para evaluar el logro de consecución de los estándares de aprendizaje evaluables según la normativa vigente. En ambos casos se trataba de una prueba escrita con preguntas cuya respuesta era abierta, que buscaban también recabar información adicional de cuales habían sido los razonamientos seguidos por los alumnos y no solamente la comprobación de la corrección de los resultados o respuestas. Estos cuestionarios, con sus respuestas correctas, se pueden consultar en los anexos. Además, se realizaron entrevistas cuando así lo requería la necesidad de conocer un poco más sobre las razones que habían llevado a las respuestas.

Resultados

En las respuestas que los alumnos dieron a la prueba escrita que se adjunta en el anexo 2 y entrevista posterior realizada en los casos dudosos, se destacan los siguientes resultados:

<u>La importancia que en la caracterización de las formas geométricas tienen los prototipos visuales, que es característico del nivel 0:</u>

Las figuras geométricas, que aparecen en la figura 23 correspondientes a la pregunta 5, con un prototipo más claro como son, los rectángulos, cuadrados, rombos y romboides, se identificaron correctamente por el 85%, 77%, 73% y 62 % respectivamente de los alumnos, mientras que los trapecios y trapezoides solo lo fueron en un 45% y 37% de media respectivamente, es curioso destacar que entre los trapecios el más reconocido fue el isósceles que es el arquetipo de trapecio (figura 24; tabla 11).

<u>La importancia que los estudiantes dan a los atributos irrelevantes, para identificar y describir figuras geométricas, como por ejemplo, la posición de las figuras, característico del nivel 0:</u>

Quedó de manifiesto ya que, en la misma pregunta 5 (figura 23; tabla 11), el 55% de los alumnos que contestaron correctamente que el cuadrado numerado con un 9 en la figura 23 era un cuadrado, además dijeron que era un rombo porque está dibujado apoyado sobre un vértice, lo cual es correcto, pero lo que se les pedía era la definición más precisa, nos referimos aquí a que un cuadrado es una definición más precisa; todos los cuadrados son rombos, pero no todos los rombos son cuadrados y por otra parte el 30% de los que respondieron sobre ese cuadrado identificado con un 9 ni siquiera lo consideraron un cuadrado por estar sobre el vértice.

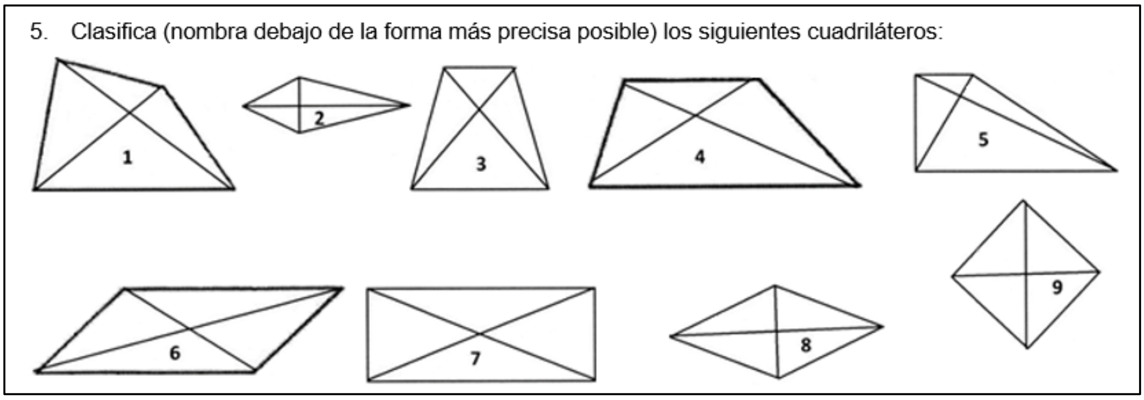


Figura 23. Enunciado de la pregunta 5

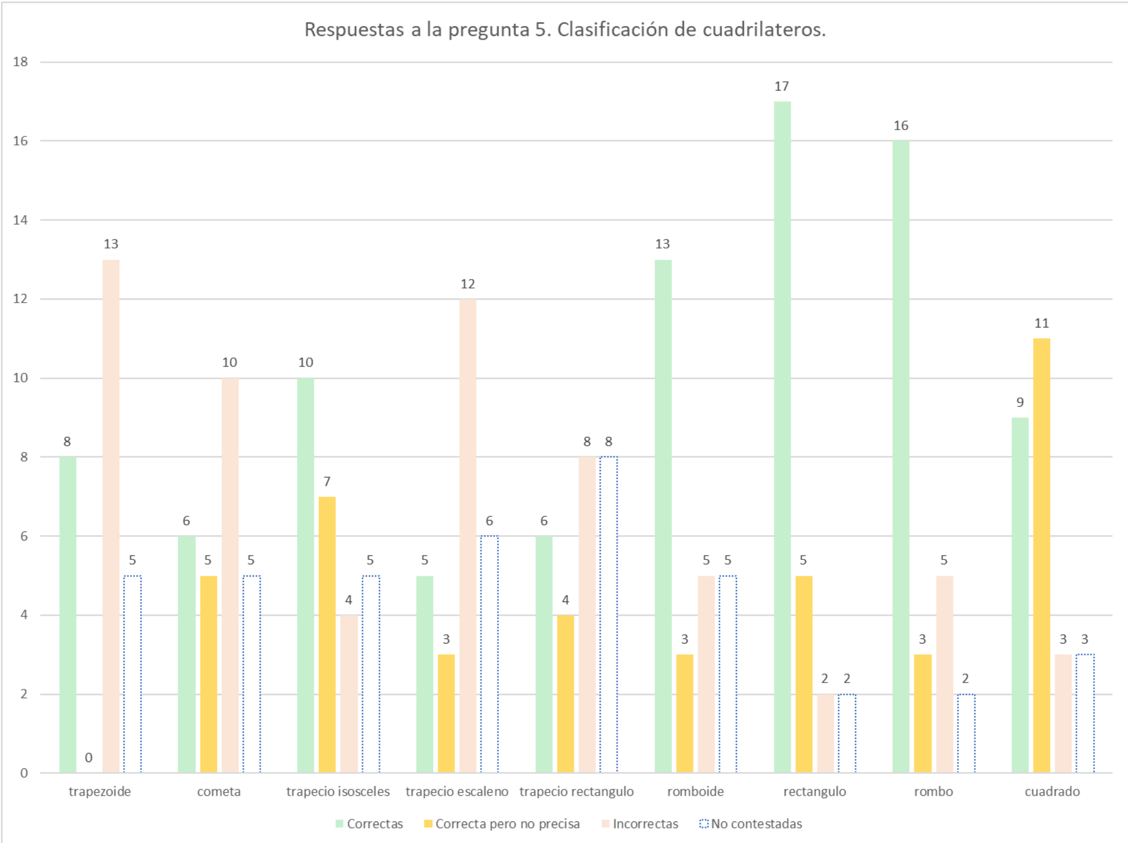


Figura 24. Respuestas a la pregunta 5. Clasificación de los cuadriláteros.

Tabla 11. Respuestas a la pregunta 5. Clasificación de los cuadriláteros.

	trapezoide	cometa	trapecio isosceles	trapecio escaleno	trapecio rectangulo	romboide	rectangulo	rombo	cuadrado
Correctas	8	6	10	5	6	13	17	16	9
38,46%	30,77%	23,08%	38,46%	19,23%	23,08%	50,00%	65,38%	61,54%	34,62%
Correcta pero no precisa	0	5	7	3	4	3	5	3	11
17,52%	0,00%	19,23%	26,92%	11,54%	15,38%	11,54%	19,23%	11,54%	42,31%
Total correctas	8	11	17	8	10	16	22	19	20
55,98%	**30,77%**	**42,31%**	**65,38%**	**30,77%**	**38,46%**	**61,54%**	**84,62%**	**73,08%**	**76,92%**
Incorrectas	13	10	4	12	8	5	2	5	3
26,50%	50,00%	38,46%	15,38%	46,15%	30,77%	19,23%	7,69%	19,23%	11,54%
No contestadas	5	5	5	6	8	5	2	2	3
17,52%	19,23%	19,23%	19,23%	23,08%	30,77%	19,23%	7,69%	7,69%	11,54%
Total incorrectas	18	15	9	18	16	10	4	7	6
44,02%	**69,23%**	**57,69%**	**34,62%**	**69,23%**	**61,54%**	**38,46%**	**15,38%**	**26,92%**	**23,08%**
Total de los totales	26	26	26	26	26	26	26	26	26
	100,00%	**100,00%**	**100,00%**	**100,00%**	**100,00%**	**100,00%**	**100,00%**	**100,00%**	**100,00%**

La importancia de comparar claramente las formas geométricas mediante las propiedades de sus componentes.

En la respuesta a la pregunta numero 6 (figuras 25 y 26; tabla 12) se muestra que la mitad de los alumnos responde correcta y precisamente cuando se les pide nombrar “todos” los cuadriláteros que cumplen determinadas propiedades, y un 30 % adicional lo hace de forma correcta, pero dejando de nombrar algún tipo.

Cuando las propiedades no están claramente asimiladas, los resultados descienden claramente, como se ve en los datos de los dos últimos apartados.

6. Nombra los siguientes polígonos (puede haber más de una respuesta).
   a) Cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos.
   b) Cuadrilátero que tiene los cuatro lados de la misma medida.
   c) Cuadrilátero cuyas diagonales se cortan perpendicularmente.
   d) Cuadrilátero paralelogramo cuyos ángulos no son rectos.

Figura 25. Enunciado de la pregunta 6

Tabla 12. Respuestas a la pregunta 6. Propiedades de los cuadriláteros.

	Cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos	Cuadrilátero que tiene los cuatro lados de la misma medida	Cuadrilátero cuyas diagonales se cortan perpendicularmente	Cuadrilátero paralelogramo cuyos ángulos no son rectos
Correctas	13	13	4	6
33,69%	50,00%	50,00%	15,38%	23,08%
Correcta pero no precisa	8	7	4	7
20,62%	30,77%	26,92%	15,38%	26,92%
Total correctas	21	20	8	13
54,31%	**80,77%**	**76,92%**	**30,77%**	**50,00%**
Incorrectas	1	2	9	9
33,92%	3,85%	7,69%	34,62%	34,62%
No contestadas	4	4	9	4
11,77%	15,38%	15,38%	34,62%	15,38%
Total incorrectas	5	6	18	13
45,69%	**19,23%**	**23,08%**	**69,23%**	**50,00%**
Total de los totales	26	26	26	26
	100,00%	**100,00%**	**100,00%**	**100,00%**

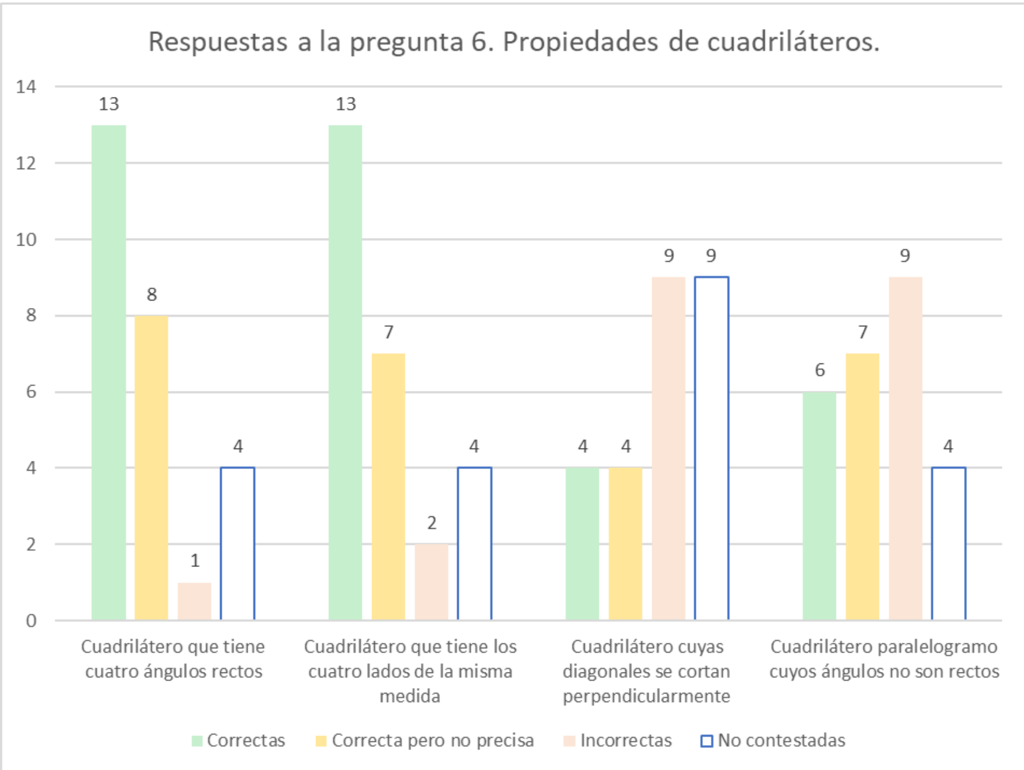


Figura 26. Respuestas a la pregunta 6. Propiedades de los cuadriláteros.

En la pregunta 7, apartado a) (figura 27), vuelve a ponerse de manifiesto que <u>la posición de las figuras cambia la percepción sobre la identidad de la figura</u>, como se deduce del dato de que el 54% de los alumnos hayan interpretado erróneamente que si un rombo se apoya en uno de sus lados se convierte en romboide. (figura 28; tabla 13).

En las respuestas a los apartados c) y d) más del 65% de los alumnos demuestra la asimilación de las condiciones necesarias para los paralelogramos y las propiedades de los cuadrados. Y_también se detectan carencias en los trapezoides y diagonales en las respuestas a los apartados b) y e) que se comentan más adelante. (Figura 27 y 28; tabla13)

7. ¿Verdadero o falso? Razona la respuesta.
   a) Un romboide es un rombo apoyado sobre uno de sus lados.
   b) Las diagonales de todos los cuadriláteros se cortan siempre en su punto medio.
   c) Un trapecio rectángulo es un cuadrilátero paralelogramo.
   d) Los cuadrados son los únicos cuadriláteros con los cuatro lados de la misma medida.
   e) Una “cometa” es un rombo.

Figura 27. Enunciado de la pregunta 7

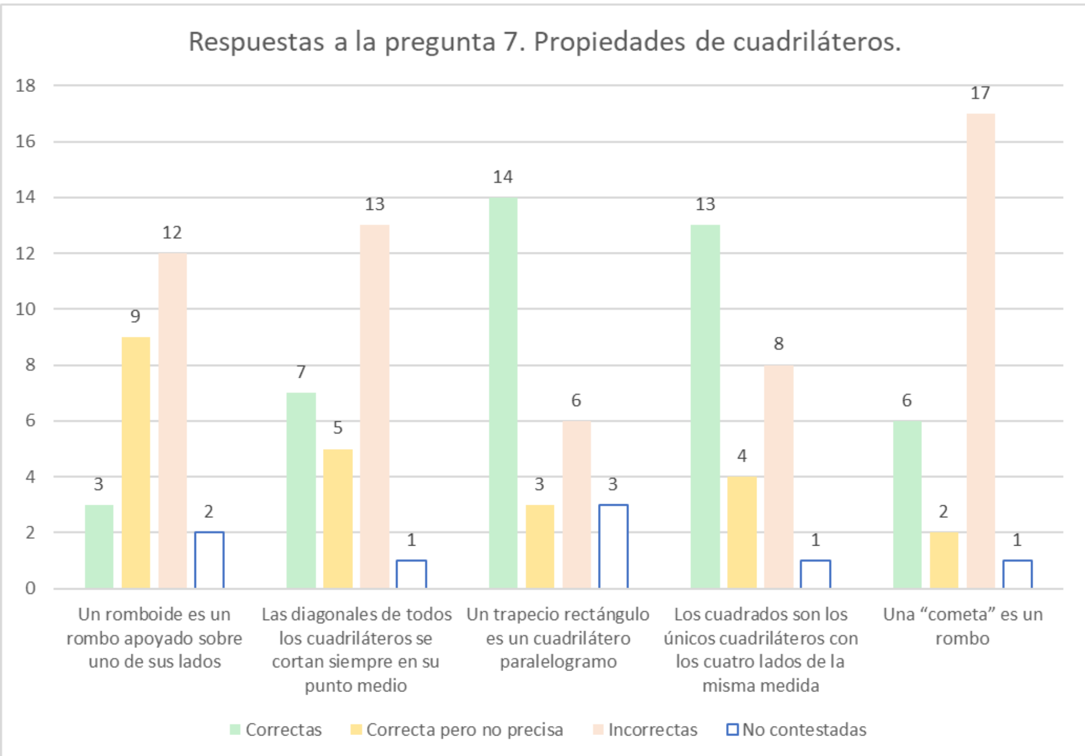


Figura 28. Respuestas a la pregunta 7. Propiedades de los cuadriláteros

Tabla 13. Respuestas a la pregunta 7. Propiedades de los cuadriláteros

	Un romboide es un rombo apoyado sobre uno de sus lados	Las diagonales de todos los cuadriláteros se cortan siempre en su punto medio	Un trapecio rectángulo es un cuadrilátero paralelogramo	Los cuadrados son los únicos cuadriláteros con los cuatro lados de la misma medida	Una "cometa" es un rombo
Correctas	3	7	14	13	6
33,08%	11,54%	26,92%	53,85%	50,00%	23,08%
Correcta pero no precisa	9	5	3	4	2
17,69%	34,62%	19,23%	11,54%	15,38%	7,69%
Total correctas	12	12	17	17	8
50,77%	**46,15%**	**46,15%**	**65,38%**	**65,38%**	**30,77%**
Incorrectas	12	13	6	8	17
43,08%	46,15%	50,00%	23,08%	30,77%	65,38%
No contestadas	2	1	3	1	1
6,15%	7,69%	3,85%	11,54%	3,85%	3,85%
Total incorrectas	14	14	9	9	18
49,23%	**53,85%**	**53,85%**	**34,62%**	**34,62%**	**69,23%**
Total de los totales	26	26	26	26	26
	100,00%	**100,00%**	**100,00%**	**100,00%**	**100,00%**

El siguiente resultado resalta la importancia que le dan a la comparación de las formas geométricas mediante las propiedades de sus componentes, característica del nivel 1:

Se pone de manifiesto en las respuestas a la pregunta 1 sobre las propiedades de los polígonos regulares con un porcentaje muy elevado de respuestas correctas (92%, 80%, 69% y 85% en los diferentes apartados). (figuras 29 y 30; tabla 14)

1. Indica si las siguientes definiciones son correctas (y precisas). En caso negativo, explica por qué o realiza un dibujo que sirva de contraejemplo (muestre las carencias o imprecisiones de la definición).
   a) Un polígono regular es el polígono que tiene todos sus lados iguales.
   b) Un polígono regular es el polígono que tiene todos sus ángulos iguales.
   c) Apotema de un polígono regular es el segmento que une el centro del polígono con cualquiera de sus vértices.
   d) Diagonal de un polígono regular es el segmento que une dos vértices cualesquiera.

Figura 29. Enunciado de la pregunta 1

Tabla 14. Respuestas a la pregunta 1. Polígonos regulares

	Un polígono regular es el polígono que tiene todos sus lados iguales.	Un polígono regular es el polígono que tiene todos sus ángulos iguales.	Apotema de un polígono regular es el segmento que une el centro del polígono con cualquiera de sus vértices.	Diagonal de un polígono regular es el segmento que une dos vértices cualesquiera.
Correctas	14	14	15	5
46,15%	53,85%	53,85%	57,69%	19,23%
Correcta pero no precisa	10	7	3	17
35,58%	38,46%	26,92%	11,54%	65,38%
Total correctas	24	21	18	22
81,73%	**92,31%**	**80,77%**	**69,23%**	**84,62%**
Incorrectas	1	4	5	1
10,58%	3,85%	15,38%	19,23%	3,85%
No contestadas	1	1	3	3
7,69%	3,85%	3,85%	11,54%	11,54%
Total incorrectas	2	5	8	4
18,27%	**7,69%**	**19,23%**	**30,77%**	**15,38%**
Total de los totales	26	26	26	26
	100,00%	**100,00%**	**100,00%**	**100,00%**

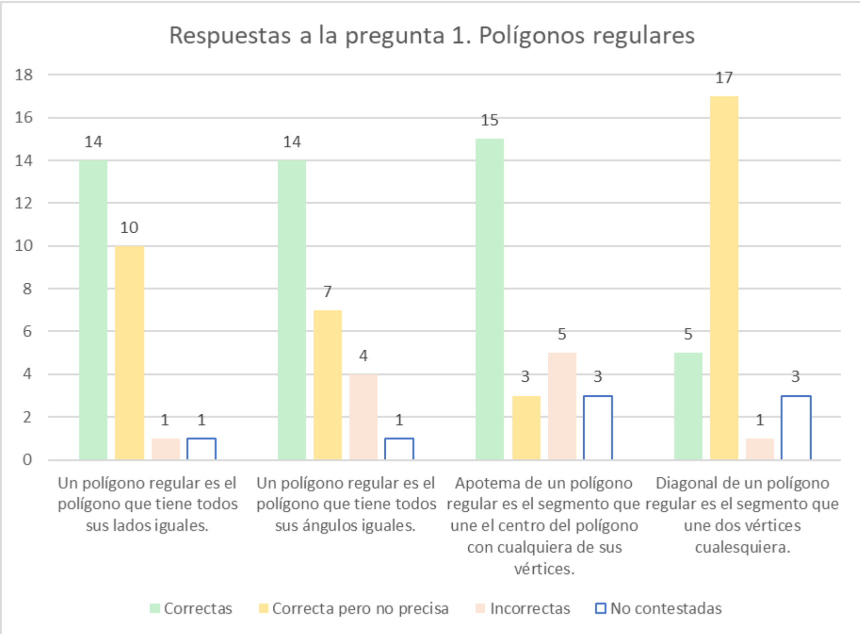


Figura 30. Respuestas a la pregunta 1. Polígonos regulares

Los siguientes resultados que señalamos nos servirán para evaluar posteriormente el objetivo general, que llevaremos a cabo evaluando nuestro desempeño como diseñadores y como docentes de forma indirecta, comprobando el de los alumnos en su comprensión de los contenidos y así podemos destacar, como puntos fuertes en los que se ha destacado como excepcional los resultados, los siguientes contenidos:

- Polígonos regulares y sus propiedades, con más de un 80% de acierto en las respuestas a la pregunta 1 y en el apartado c de la pregunta 2. (figuras 29, 30, 31 y 32; tablas 14 y 15)
- Clasificación de los cuadriláteros y sus propiedades como se vio en el apartado anterior en las preguntas 5, 6 y 7. (Figuras 23, 24, 25 y 26; tablas 11, 12 y 13)

- Definición de propiedades de la circunferencia y sus elementos, con más del 50% de respuestas correctas a la pregunta 8. (figura 33 y 34; tabla 16)

Y como puntos débiles a mejorar:

- Diagonales, apotemas y simetrías en los polígonos regulares, con un porcentaje cercano al 80% de respuestas incorrectas. (figuras 31 y 32; tabla 15)
- Trapecios y trapezoides y sus propiedades, con porcentaje de respuestas incorrectas entre el 60% y el 70%. Respuestas a las preguntas 5, 6 y 7. (Figuras 23, 24, 25 y 26; tablas 11, 12 y 13)
- Diferencias entre circunferencia y círculo, respuestas incorrectas entre un 40% y un 60% en la pregunta 8. (figuras 33 y 34; tabla 16).

2. ¿Verdadero o falso? Razona tu respuesta.

   a) Un cuadrilátero regular tiene dos ejes de simetría y un pentágono regular tiene 5.

   .

   b) La suma de los ángulos interiores de un pentágono regular es de 540º.

   c) Todos los polígonos regulares tienen siempre un vértice más que el número de lados.

   d) Un hexágono regular tiene 10 diagonales.

   e) Sólo los polígonos regulares tienen apotemas y diagonales.

Figura 31. Enunciado de la pregunta 2

Tabla 15. Respuestas a la pregunta 2. Polígonos regulares

	Un cuadrilátero regular tiene dos ejes de simetría y un pentágono regular tiene 5.	La suma de los ángulos interiores de un pentágono regular es de 540º.	Todos los polígonos regulares tienen siempre un vértice más que el número de lados.	Un hexágono regular tiene 10 diagonales.	Sólo los polígonos regulares tienen apotemas y diagonales.
Correctas	6	6	17	0	3
24,62%	23,08%	23,08%	65,38%	0,00%	11,54%
Correcta pero no precisa	6	9	3	4	3
19,23%	23,08%	34,62%	11,54%	15,38%	11,54%
Total correctas	12	15	20	4	6
43,85%	**46,15%**	**57,69%**	**76,92%**	**15,38%**	**23,08%**
Incorrectas	12	8	5	19	18
47,69%	46,15%	30,77%	19,23%	73,08%	69,23%
No contestadas	2	3	1	3	2
8,46%	7,69%	11,54%	3,85%	11,54%	7,69%
Total incorrectas	14	11	6	22	20
56,15%	**53,85%**	**42,31%**	**23,08%**	**84,62%**	**76,92%**
Total de los totales	26	26	26	26	26
	100,00%	**100,00%**	**100,00%**	**100,00%**	**100,00%**

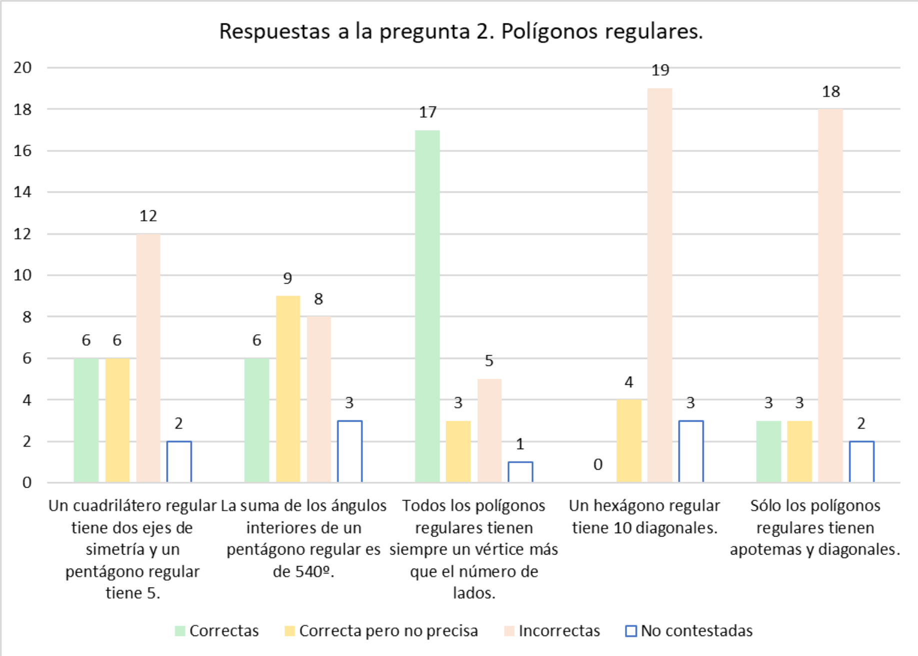


Figura 32. Respuestas a la pregunta 2. Polígonos regulares

8. ¿Son correctas las siguientes definiciones? En caso negativo, explica por qué o realiza un dibujo que sirva de contraejemplo (muestre las carencias o imprecisiones de la definición).
   a) Una circunferencia es una línea curva cerrada sin principio ni fin.
   b) Un círculo es una línea curva cerrada cuyos puntos equidistan de uno fijo llamado centro que está dentro de él.
   c) Una circunferencia es un círculo.
   d) Todos los puntos de un círculo están a la misma distancia del centro.
   e) Las circunferencias tienen sólo un radio.

Figura 33. Enunciado de la pregunta 8

Tabla 16. Respuestas a la pregunta 8. Circunferencia y circulo

	Una circunferencia es una línea curva cerrada sin principio ni fin.	Un círculo es una línea curva cerrada cuyos puntos equidistan de uno fijo llamado centro que está dentro de él.	Una circunferencia es un círculo.	Todos los puntos de un círculo están a la misma distancia del centro.	Las circunferencias tienen sólo un radio.
Correctas	11	8	9	8	17
40,77%	42,31%	30,77%	34,62%	30,77%	65,38%
Correcta pero no precisa	3	2	6	4	5
15,38%	11,54%	7,69%	23,08%	15,38%	19,23%
Total correctas	14	10	15	12	22
56,15%	**53,85%**	**38,46%**	**57,69%**	**46,15%**	**84,62%**
Incorrectas	8	14	9	12	4
36,15%	30,77%	53,85%	34,62%	46,15%	15,38%
No contestadas	4	2	2	2	
7,69%	15,38%	7,69%	7,69%	7,69%	0,00%
Total incorrectas	12	16	11	14	4
43,85%	**46,15%**	**61,54%**	**42,31%**	**53,85%**	**15,38%**
Total de los totales	26	26	26	26	26
	100,00%	**100,00%**	**100,00%**	**100,00%**	**100,00%**

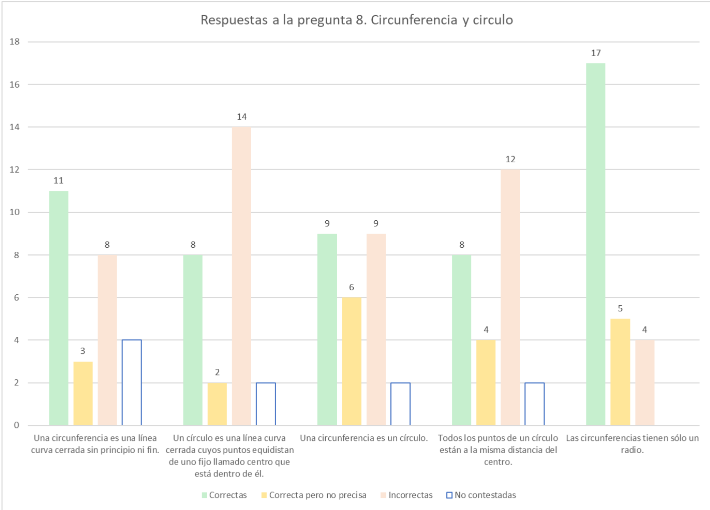


Figura 34. Respuestas a la pregunta 8. Circunferencia y circulo

Para terminar, señalamos los resultados de una última evaluación de cuál ha sido el nivel de logro que hemos alcanzado y esa no es otra que la evaluación que el grupo de alumnos ha hecho de nuestro trabajo. Al concluir las sesiones se pidió a los alumnos que evaluaran nuestro trabajo dando dos ejemplos de cosas que se habían hecho bien y otras dos que se deberían mejorar.

En las tablas 16 y 17 se relacionan las opiniones emitidas ordenadas de mayor a menor porcentaje de respuestas que emitieron los alumnos y el porcentaje acumulado.

Tabla 17. Cosas bien hechas en opinión de los alumnos

Cosas bien hechas	respuestas	%	% ac.
Explica muy bien los temas de matemáticas	17	19%	19%
Explica muy bien y te resuelve muy bien las dudas	11	12%	31%
Ayudar cuando no entendíamos algo	9	10%	41%
Es muy majo	8	9%	49%
Hace muy bien los métodos para explicar las cosas	7	8%	57%
Te repite todas las veces que quieras las cosas	4	4%	62%
Hace unos flipped classroom muy entendibles	4	4%	66%
Esforzarse mucho	4	4%	70%
Hace las clases menos pesadas	3	3%	74%
Se lleva muy bien con sus alumnos	3	3%	77%
Organiza la clase bien	2	2%	79%
Sabe percibir muy bien la ayuda cuando alguien la necesita	2	2%	81%
Explicarnos Pitagoras con ejemplos de ordenador	2	2%	84%
Prepararnos la clase especial	2	2%	86%
Tratarnos bien	1	1%	87%
Enseñarnos cosas nuevas	1	1%	88%
Admitir sus errores cuando se equivoca	1	1%	89%
Escucha a todos los alumnos cuando le hablan	1	1%	90%
Trae cuestiones que trabajar	1	1%	91%

Conseguir que hagas los deberes	1	1%	92%
Si no entiendes algo te los explica de distintas formas	1	1%	93%
La simpatía con la que entras en clase	1	1%	95%
Explica bien los triángulos y los llegue a entender a la primera	1	1%	96%
Explica muy bien las partes de la circunferencia, las del circulo	1	1%	97%
Se le ve a gusto enseñado	1	1%	98%
Corregir exámenes	1	1%	99%
Ayudarnos a los interrogantes	1	1%	100%

Tabla 18. Cosas a mejorar según la opinión de los alumnos

Cosas a mejorar	respuestas	%	% ac.
Que mande callar mas	8	13%	13%
Que se imponga	8	13%	26%
Explicar mejor	6	10%	36%
Debería hablar más alto	5	8%	44%
A veces eres muy serio	4	7%	51%
No controla de ordenadores	3	5%	56%
En los exámenes te ayuda con cosas que no deben	3	5%	61%
Demasiado exigente en los trabajos	3	5%	66%
Le cuesta explicarse y desarrollar el temario	2	3%	69%
Mandar deberes para casa de vez en cuando	2	3%	72%
A veces no les salen bien las explicaciones	2	3%	75%
Salir más a explicar a la pizarra	2	3%	79%
Tomar más nota de ciertas cosas	1	2%	80%
Que no se enrolle explicando y que vaya al grano	1	2%	82%
Cuando veas que te escuchan para y haz que te hagan caso	1	2%	84%
Cuando explica va muy rápido	1	2%	85%
Me gusta que seas del Madrid	1	2%	87%
Cuando pregunten interrogantes que den dos oportunidades	1	2%	89%
Que ayuden por individual	1	2%	90%
Hablar sin dar la espalda a nadie	1	2%	92%
Que explica más mientras hace GeoGebra	1	2%	93%
Informar todo por Edmodo	1	2%	95%
Cambiar de profesor durante la clase	1	2%	97%
No moverse mucho al explicar	1	2%	98%
Que habla mas	1	2%	100%

Conclusiones

Este trabajo se planteó con el objetivo general de diseñar una serie de actividades para la práctica docente de la enseñanza de la geometría inspirada en el marco conceptual de enseñanza de la geometría de Van Hiele. Y para ello nos planteábamos la necesidad de crear zonas de desarrollo próximo donde los alumnos evolucionaran en la atribución de significados a los contenidos de aprendizaje para ganar autonomía en el proceso y responsabilizarse de su propio aprendizaje.

Para ello nos apoyábamos en la construcción de significados a partir de los conocimientos previos mediante el aprendizaje significativo. Necesitábamos en este proceso contar con la participación activa de los alumnos y también elegir una serie de actividades que permitieran en cada fase de aprendizaje ir progresando en los niveles de razonamiento.

Para lo cual fijamos los objetivos específicos del diseño:

- Crear tareas significativas que reflejen como se utiliza el conocimiento en Geometría
- Implicar activamente a los alumnos en el aprendizaje haciéndoles probar y aplicar lo que saben, estableciendo conexiones y relaciones con los conocimientos previos.
- Diagnosticar la comprensión para ir construyendo paso a paso su aprendizaje.
- Evaluar continuamente y adaptar la enseñanza a sus necesidades
- Estimular el pensamiento estratégico

Evaluaremos el proyecto comprobando el grado de cumplimiento de estos objetivos, el general y los específicos. Vamos a comenzar evaluando los objetivos específicos. La evaluación de alguno de ellos no puede ser sino subjetiva, porque necesita de una valoración que no siempre es fácil de realizar. Tal es el caso del primero de los objetivos específicos, crear tareas significativas que reflejen cómo se utiliza el conocimiento en Geometría, objetivo que creemos cumplido, ya que hemos partido de los conocimientos previos de los alumnos, que hemos recabado en cada una de las fases de información de las actividades y sobre ellos y cumpliendo nuestro siguiente objetivo específico, que es, implicar activamente a los alumnos en el aprendizaje haciéndoles probar y aplicar lo que saben, estableciendo conexiones y relaciones con los conocimientos previos, hemos construido una nueva red de relaciones que nos lleva a la creación de los nuevos conocimientos, que es en definitiva lo que se pretende en el aprendizaje significativo.

Nuestro siguiente objetivo específico era diagnosticar la comprensión para ir construyendo paso a paso su aprendizaje, se ha cumplido mediante la realización de las pruebas escritas, las entrevistas cuando fueron necesarias y las propias actividades en las que durante las fases más autónomas de orientación libre y explicitación se monitorizó la comprensión que tenían de los conceptos los alumnos.

Lo mismo ocurre con los otros dos objetivos específicos restantes, el primero, que era evaluar continuamente y adaptar la enseñanza a sus necesidades se ha cumplido, dado que esa es la base del método utilizado, la evaluación es continua en cada fase y el segundo, estimular el pensamiento estratégico, se consiguió en las fases de orientación dirigida en la que se les enseñó a razonar estratégicamente y se aplicó en las fases de orientación libre donde a los alumnos se les animó a que utilizaran el pensamiento estratégico trabajado en las fases anteriores.

En los resultados que señalamos en el apartado anterior, que nos servirían para evaluar el objetivo general, nos sirven para evaluar el grado de cumplimiento de este, evaluando nuestra labor como diseñadores y como docentes de forma indirecta, comprobando los puntos fuertes donde los resultados han sido mejores y los débiles que constituirán nuestras áreas de mejora.

Entre los primeros destacábamos los aciertos en los resultados relativos a los polígonos regulares y sus propiedades, de igual forma resultaron relevantes los resultados relativos a la clasificación de los cuadriláteros y sus propiedades, y también a la definición de circunferencia, círculo y sus elementos, en todos ellos se confirma que los alumnos muestran formas de razonar que ya no pertenecen al nivel 0 sino más bien al nivel 1 y nivel 2.

Entre los segundos, los puntos débiles a mejorar que muestran que la mayoría de los alumnos permanecen aún en formas de pensamiento más relacionadas con el nivel 0 estan: las diagonales y otras propiedades de los polígonos regulares, la comprensión de las propiedades de trapecios y trapezoides y las de círculos y circunferencias y sus diferencias.

Como se ha dicho, se recabó la opinión de los alumnos acerca de nuestro desempeño como docentes y entre las cosas a las que dieron más valor y que opinan que se hicieron bien destaca que la explicación sea buena, que resuelvan las dudas y los métodos llevados a cabo para explicar las cosas. Y entre las cosas, que, en opinión de los alumnos, se necesitaría mejorar se destaca que se debe imponer el orden, que se mantenga el silencio, explicar mejor y hablar más alto.

El grado de cumplimiento de los objetivos planteados, no hace sino demostrar que es posible diseñar las sesiones de clase de geometría de modo que resulten atractivas para los estudiantes, formativas y motivadoras, utilizando materiales manipulativos, recursos informáticos como la utilización de GeoGebra y dirigiendo el aprendizaje mediante la metodología del descubrimiento guiado, permitiendo que los alumnos se asombren con la realidad y se produzca el conflicto cognitivo, previo a cualquier aprendizaje significativo.

Dado que es una experiencia nueva para nosotros es probable que se hayan cometido errores por desconocimiento de las dinámicas adecuadas, errores que se han detectado y se pueden corregir en las sucesivas actividades que se diseñen. Especialmente relevantes de la evaluación, son las carencias que se han detectado en contenidos puntuales, donde los malos resultados denotan una praxis pobre o errores en la elección del tiempo destinado a cada contenido, temas que se analizaron ya en el apartado de evaluación. Son de destacar las aportaciones que los alumnos han hecho evaluando nuestro desempeño y que también tendremos muy en cuenta para el futuro. Especialmente nos ha sorprendido la buena recepción que tiene entre ellos cualquier actividad que se presente como novedosa, con explicaciones dinámicas, aprovechando las nuevas tecnologías, las clases invertidas (*flipped classroom*), las actividades de gamificación utilizadas como motivación, en actividades de repaso de contenidos o de introducción de contenidos interesantes que quizá el currículo no desarrolla en la amplitud que puede obtenerse mediante su organización en juegos, etcétera.

Como aprendizaje más relevante nos gustaría destacar el descubrimiento de la metodología del descubrimiento guiado y la constatación de que los alumnos motivados por actividades bien diseñadas son capaces de formar razonamientos elaborados si se tiene la paciencia suficiente para que surja ese momento de descubrimiento, del que hablaba Van Hiele, en el que el alumno descubre algo que siempre ha estado ahí, que ha sido una verdad antes de ser descubierta y que se fija mejor en su mente cuando se obtiene por este mecanismo. Debemos confiar en la intuición natural de las personas en encontrar esos descubrimientos en cada actividad que les propongamos. Esto implica, claro está, no resignarse al empleo de los métodos de enseñanza tradicionales en Geometría, aunque lo pudiera aconsejar la escasez de tiempo para completar el currículo o la gran dedicación que se necesita para la preparación de las actividades. De hacerse así, los éxitos con los resultados conseguidos están asegurados y, además, en cualquier caso, obtendremos la íntima satisfacción del trabajo bien hecho.

En la medida que cada uno pueda, desde su aula, debe abogar por que el currículo cada vez más se diseñe para poder dedicar el tiempo necesario a cada contenido con la utilización de estas metodologías. Y para dar un paso más en la buena dirección, deberíamos, todos nosotros, diseñar y compartir actividades, sobre todo las que mayor éxito hayan tenido en nuestras aulas, y contribuir de esta forma a crear una base de actividades bien diseñadas y contribuir también a la generación de una nueva cultura, participativa, implicada con el éxito de nuestros alumnos y que también a nosotros nos reporte satisfacciones en el trabajo del día a día.

Y si lo hacemos así tal vez tengamos la sensación de que hemos conseguido que la Geometría como decía Platón forme mentes filosóficas, que haga diferentes a los alumnos que se acercan a ella y que podamos mantenerla como una de las disciplinas de gran importancia en su formación.

Referencias bibliográficas

Alsina, C. (diciembre de 2008). Geometría y reallidad. *Sigma, 33*, 165-179.

Andonegui, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento matemático. Cuaderno N° 12 Geometría: conceptos y construcciones elementales.* Caracas: Federación Internacional de la Fe y la Alegria.

Bransford, J., Brown, A., y Cocking, R. (2000). *How people learn:Brain, mind, experience and school: Expanded edition.* https://doi.org/10.17226/9853

Bressan, A., Bogisic, K., y Crego, K. (2000). *Razones para enseñar Geometría en la Educación Básica. Mirar, construir, decir y pensar.* Buenos Aires: Novedades Educativas.

Bruner, J. (1972). *El proceso de la educación.* Mexico: Hispanoamericana.

Castiblanco Paiba, A. C., Moreno Armella, L., Urquina Llanos, H., Camargo Uribe, L., Acosta Gempeler, M., y Rodriguez García, F. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Coll, C. (2010). *Desarrollo, aprendizaje y enseñanza en la educaión secundaria.* Barcelona: Graó.

Corberán, R. M., Huerta, P., Margarit, J., Peñas, A., y Ruiz, E. (1989). *Didáctica de la Geometría. Modelo de Van Hiele.* Valencia: Universidad de Valencia.

Decreto 40/2015, de 15/06/2015, por el que se establece el currículo de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Castilla-La Mancha. [2015/7558], *Diario Oficial de Castilla-La Mancha*, 120, 18872-20319

Dienes, Z. (1970). *La construcción de las matemáticas.* Barcelona: Vicens-Vives.

Dienes, Z. (1977). *Las seis etapas del aprendizaje en matemáticas.* Barcelona: Teide.

Fernandez Bravo, J. A. (2000). Las metodologías para el desarrollo del Pensamiento matemático. *Congreso Mundial de Lecto-Escritura.* Valencia.

Fouz, F. (2005). *Modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría. Un paseo por la geometría.* Recuperado el 22 de 4 de 2019, de http://www.xtec.cat/~rnolla/Sangaku/SangWEB/PDF/PG-04-05-fouz.pdf

Galvin, F. (s.f.). *https://www.recursosep.com*. Recuperado el 6 de mayo de 2019 de https://www.recursosep.com/2018/11/08/clasificacion-exclusiva-de-cuadrilateros/

Goncalves, R. (2006). ¿Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en Geometría? *Revista Ciencias de la Educación, 27*(1), 83-98.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la geometría. De las construcciones a las demostraciones.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Jaime, A., y Gutierrez, A. (1990). *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele, En S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds), Teoria y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Alfar.

Lopez, O. (2017). Modelo de Van Hiele aplicado en exploración de propiedades mediante construcción. *REXE. Revista de estudios y experiencias en educación*, 16, 129-136.

Lopez, O., y Garcia, P. (2008). *La eneseñanza de la Geometría.* Mexico D.F.: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, 25, 6986-7003

Plató, L. (1969). *La república.* Madrid: Instituto de estudios políticos.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, 3, 169-546.

Recomendación del parlamento europeo y del consejo de 18 de diciembre de 2006 sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente (2006/962/CE). *Diario Oficial de la Unión Europea*, 394, 10-18

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight.* London: Academic Press, Inc.

Vargas, G., y Gamboa, R. (2013). EL MODELO DE VAN HIELE Y LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA. *Uniciencia, 27*(1), 74-94.

Villani, V. (febrero de 2001). *Perspectivas en la enseñanza de la geometria para el siglo XXI. Documento de discusión para estudio ICMI. PMME-UNISON. Traducción del documento original*. Obtenido el 25 de Mayo de 2019 de www.euclides.org: http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm

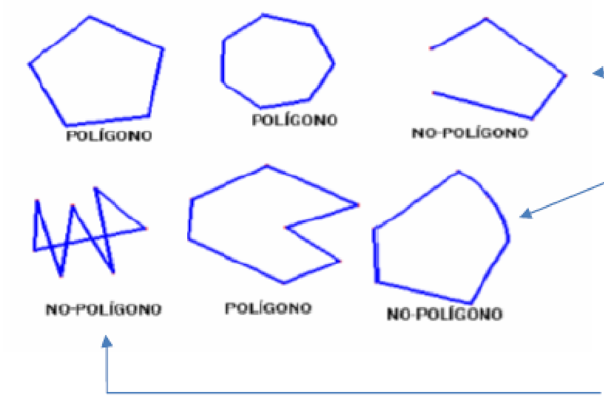
Vygotsky, L. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Barcelona: Crítica.

Anexos

A continuación, se adjuntan los anexos.

Anexo 1 Evaluación preliminar

1. Según se define en las figuras de abajo. ¿Qué es un polígono?



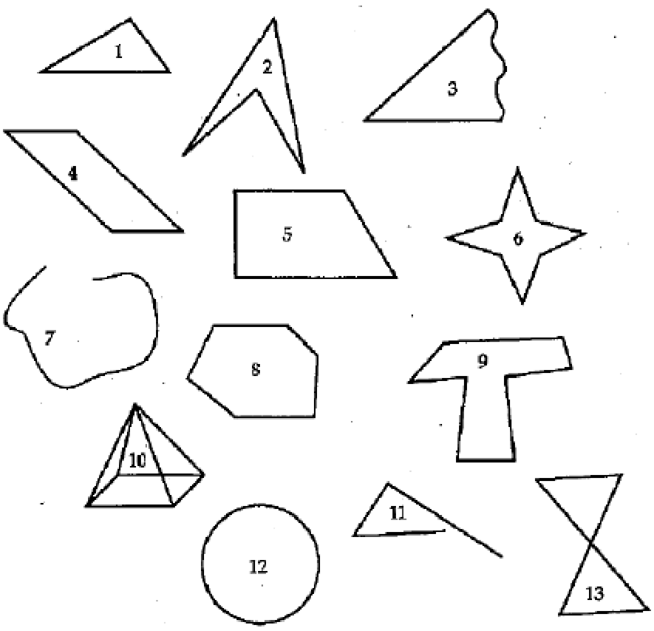
No es polígono porque la linea poligonal no es cerrada.

No es polígono porque tiene un tramo curvo.

No es polígono porque la linea poligonal no es simple (se cruza)

Un polígono es la región del plano limitada por una linea poligonal cerrada y simple.

2. Observa detenidamente las siguientes figuras e indica razonadamente cuales no son polígonos.



El 3 no es polígono porque tiene un lado que no es recto, tiene curvas.

El 7 no es polígono porque es una linea curva abierta.

El 10 no es polígono porque representa un cuerpo con volumen, una pirámide.

El 11 no es polígono por ser linea poligonal abierta

El 12 no es polígono porque es una circunferencia o un circulo.

El 13 no es polígono porque la linea poligonal se cruza, es compleja.

3. Indica si las siguientes definiciones son correctas (y precisas). En caso negativo, explica por qué o realiza un dibujo que sirva de contraejemplo (muestre las carencias o imprecisiones de la definición).

   a) Un polígono regular es el polígono que tiene todos sus lados iguales, pero sus angulos no.

1

Incorrecta, tiene que tener los lados iguales y los angulos también.

b) Un polígono regular es el polígono que tiene el mismo número de lados, vértices y angulos

Es impreciso, ademas de tener el mismo numero de lados, vértices y angulos, estos deben ser iguales, es decir lados de la misma longitud y angulos congruentes.

c) Radio de un polígono regular es el segmento que une el centro del polígono con cualquiera de sus lados.

No es correcto, es el segmento que une el centro del polígono con cualquiera de sus vértices.

d) Apotemas de un polígono son las líneas rectas que unen el centro del polígono con los lados.

No es correcto, son segmentos que unen el centro del polígono con el punto medio de cualquier lado.

4. ¿Verdadero o falso? Razona tu respuesta.

a) Todos los cuadriláteros son paralelogramos.

Falso, hay cuadriláteros que no son paralelogramos, los trapecios y trapezoides, que no tienen lados paralelos dos a dos.

b) Todos los cuadrados son rombos.

Verdadero, los cuadrados cumplen las condiciones para ser rombos, que son: tener los lados iguales y los angulos iguales dos a dos, en este caso todos rectos.

c) Todos los rombos son cuadrados.

Falso, los rombos no todos cumplen la propiedad de tener los cuatro angulos rectos.

d) Todos los cuadrados son rectángulos.

Verdadero, cumplen las propiedades de rectángulo que es tener los cuatro angulos rectos y los lados iguales dos a dos.

e) La suma de los ángulos interiores de un hexágono regular es de 720º.

Verdadero, un hexágono puede considerarse formado por 6-2 = 4 triangulos, la suma de los angulos interiores de esos triangulos es igual a la suma de los angulos interiores del hexágono:

$$(6-2) \cdot 180 = 4 \cdot 180\,° = 720\,°$$

f) Todos los polígonos regulares tienen siempre dos vértices menos que el número de lados, ya que cada lado comparte sus dos vértices con los lados adyacentes (consecutivos).

Falso, tienen el mismo número de lados que de vértices.

g) Un hexágono regular tiene tantas diagonales como vértices.

Falso, de cada vértice parten tres diagonales, estas diagonales comparten dos vértices por lo que al final hay 10 distintas.

h) En todos los polígonos regulares, la apotema, el radio y la mitad del lado forman un triángulo rectángulo.

Verdadero, como la apotema es perpendicular al lado por ser la mínima distancia, forma un triángulo rectángulo junto con el radio y la mitad del lado.

e) Los polígonos regulares tienen tantos ejes de simetría como vértices, ángulos o lados tengan.

Verdadero, en los polígonos con nº de lados impar, los ejes de simetría pasan por cada vértice y el punto medio del lado opuesto por lo que su número total es igual que el de vértices o el de lados y en los de nº par de lados la mitad de los ejes pasan por dos vértices opuestos por lo que su número es igual a la mitad de vértices (comparten dos) y la otra mitad por los puntos medios de los lados opuestos, luego su numero es la mitad del de lados, así, el total, sumando ambos es igual al número de lados o vértices.

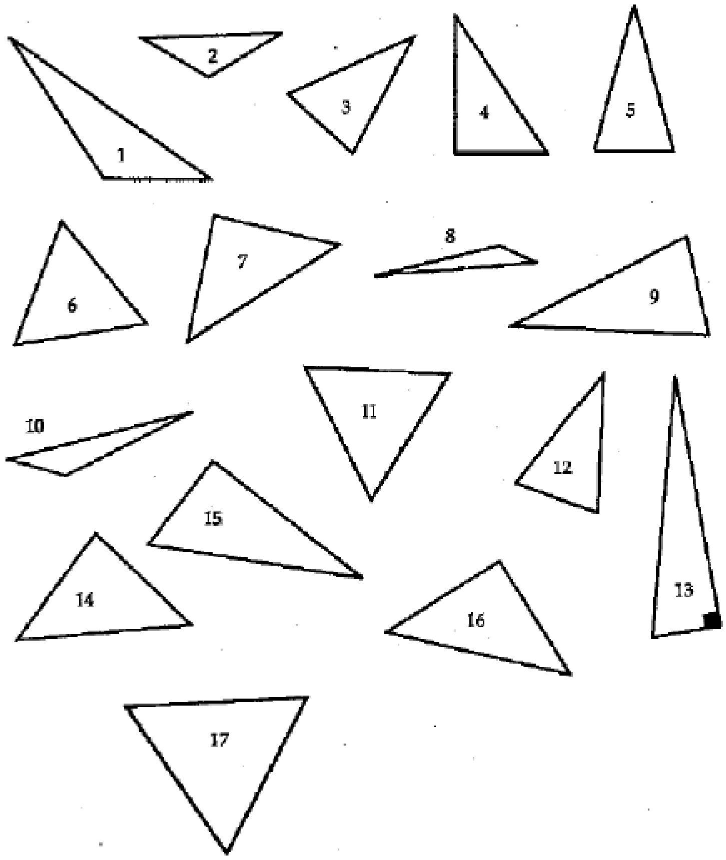
f) Todos los polígonos tienen apotema.

Falso, solo los regulares tienen apotemas.

g) Todos los polígonos tienen diagonales.

Falso, los triangulos no tienen diagonales porque todas las líneas que unen sus vértices son lados.

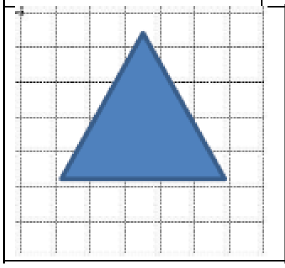
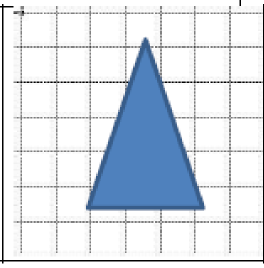
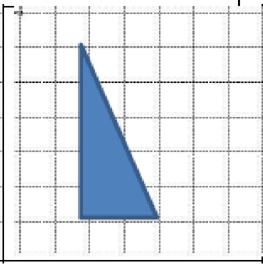
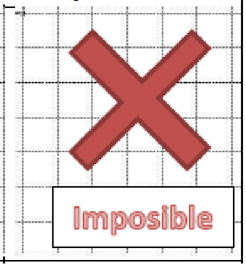
5. Clasifica (nombra) los siguientes triángulos <u>según sus lados</u> y <u>según sus ángulos</u>



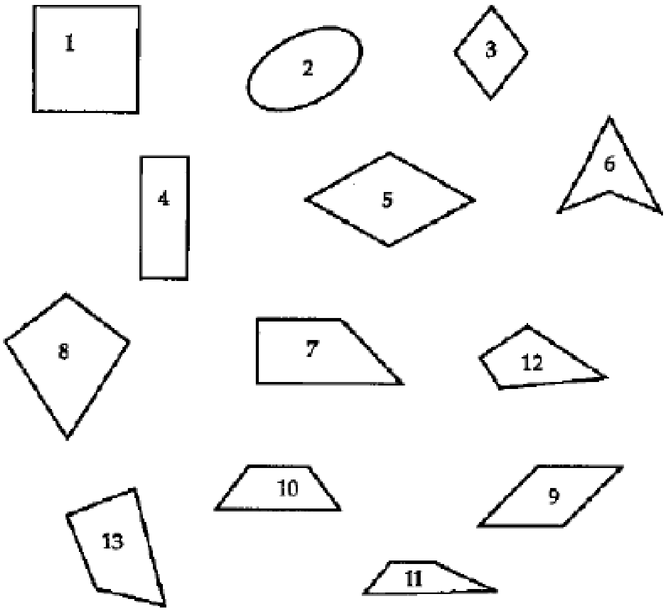
Numero	Según sus lados	Según sus ángulos
1	Escaleno	Obtusángulo
2	Isósceles	Obtusángulo
3	Escaleno	Acutángulo
4	Escaleno	Rectángulo
5	Isósceles	Acutángulo
6	Equilátero	Acutángulo
7	Isósceles	Rectángulo
8	Escaleno	Obtusángulo
9	Escaleno	Acutángulo
10	Escaleno	Obtusángulo
11	Equilátero	Acutángulo
12	Isósceles	Acutángulo
13	Escaleno	Rectángulo
14	Isósceles	Acutángulo
15	Escaleno	Rectángulo
16	Isósceles	Rectángulo
17	Equilátero	Acutángulo

6. Dibuja un triángulo que sea:

4

Polígono regular	Acutángulo e isósceles.	Rectángulo y escaleno.	Obtusángulo y equilátero.
			 Imposible

7. Clasifica (nombra de la forma más precisa posible) los cuadriláteros:



Numero	Nombre
1	Cuadrado
2	No es
3	Rombo
4	Rectángulo
5	Rombo
6	Cometa
7	Trapecio rectángulo
8	Cometa
9	Rombo
10	Trapecio isósceles
11	Trapecio escaleno
12	Trapezoide
13	Trapezoide

8. Nombra los siguientes polígonos (puede haber más de una respuesta correcta y has de escribir todas).
   a) Cuadrilátero cuyas diagonales se cortan en sus puntos medios.

      Rectángulos, Rombos, Cuadrados, Romboides

   b) Cuadrilátero que tiene los cuatro lados de la misma medida.

      Rombos, cuadrados

   c) Cuadrilátero cuyas diagonales no se cortan perpendicularmente.

      Romboide, Rectángulo, trapecios, algunos trapezoides (hay cometas que sus diagonales si se cortan perpendicularmente.

   d) Cuadrilátero paralelogramo cuyos ángulos son rectos.

      Rectángulo, Cuadrado, Rombos que sean cuadrados.

9. ¿Verdadero o falso? Razona la respuesta.
   a) El trapecio isósceles tiene los angulos adyacentes (consecutivos) iguales dos a dos.

      Verdadero, como los lados no paralelos son iguales, forman angulos iguales con los paralelos, por lo que los angulos adyacentes que comparten cada lado paralelo son iguales.

   b) Un trapezoide no tiene ningún lado de igual longitud ni tampoco paralelo a otro.

      Verdadero, esa es su definición.

   c) Un rombo puede tener los cuatro angulos iguales.

      Verdadero, entonces se llama cuadrado también

   d) Los cuadrados son los únicos cuadriláteros con los cuatro lados de la misma medida.

      Falso, también los rombos los tienen iguales.

   e) Una "cometa" es un rombo y por eso tiene ejes de simetría.

      Falso, es un trapezoide y tiene un solo eje de simetría.

10. ¿Son correctas las siguientes definiciones? En caso negativo, explica por qué o realiza un dibujo que sirva de contraejemplo (muestre las carencias o imprecisiones de la definición).
    a) Un sector circular es la región del plano comprendida entre dos radios de una circunferencia y el arco correspondiente.

       Verdadero

    b) La cuerda de una circunferencia es un segmento que corta a la misma en dos puntos.

Falso, la cuerda une dos puntos de la circunferencia, es decir empieza y acaba en un punto de la circunferencia.

c) Una circunferencia es un círculo que está hueco.

Falso, el circulo es la región limitada por una circunferencia.

d) El diámetro de una circunferencia es la cuerda de mayor longitud que puede tener una circunferencia.

Verdadero

e) Un círculo es el exterior de la circunferencia que tiene el mismo centro y radio.

Falso, es la circunferencia la que limita al círculo.

f) Un segmento circular es un trozo de círculo.

Verdadero, pero mas concretamente es la región del plano limitada por un arco de circunferencia y su cuerda correspondiente.

11. ¿Verdadero o falso? Razona la respuesta.

a) Todas las cuerdas son diámetros.

Falso, solo lo son las que pasan por el centro de la circunferencia.

b) Todos los diámetros de una circunferencia miden lo mismo.

Verdadero

c) Con dos radios unidos por el centro de la circunferencia siempre se forma un diámetro.

Falso, se forma siempre que ambos radios estén sobre la misma recta.

d) Existe un segmento circular que también es un sector circular.

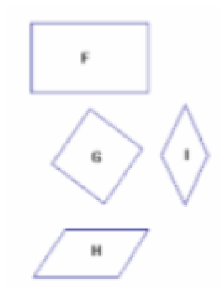
Verdadero, el semicírculo.

e) Todos los polígonos se pueden inscribir en una circunferencia.

Falso, solo los regulares.

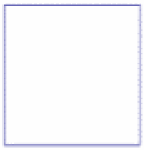
12. ¿Cuál de las siguientes figuras son cuadrados?

a) Ninguno es un cuadrado
b) Solo G
c) Solo F y G
d) Solo I y G
e) Todos son cuadrados



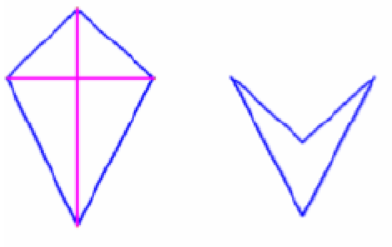
b) Solo G

13. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones, referidas a la figura de la derecha, no es correcta?
    a) Es un paralelogramo
    b) Es un rombo
    c) Es un cuadrado
    d) Es un cuadrilátero
    e) No puede ser todo loa anterior a la vez



La última, la e) no es correcta

14. Las figuras de abajo se llaman "cometas". Señala todas las propiedades que identifiques y da una definición precisa de un cometa.



Son cuadriláteros, (cuatro lados), tienen un eje de simetría, lados iguales dos a dos adyacentes, dos angulos opuestos iguales. ¿Vuelan?

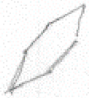
Anexo 2 Evaluación final

FECHA:________APELLIDOS______________________________NOMBRE________CURSO_____

1. Indica si las siguientes definiciones son correctas (y precisas). En caso negativo, explica por qué o realiza un dibujo que sirva de contraejemplo (muestre las carencias o imprecisiones de la definición).

   a) Un polígono regular es el polígono que tiene todos sus lados iguales.

   Correcto pero impreciso, ademas sus angulos deben ser iguales

   b) Un polígono regular es el polígono que tiene todos sus ángulos iguales.

   Correcto pero impreciso, ademas sus lados deben ser iguales.

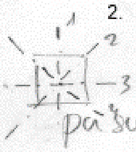
   c) Apotema de un polígono regular es el segmento que une el centro del polígono con cualquiera de sus vértices.

   Incorrecto, une el centro con el punto medio de sus lados.

   d) Diagonal de un polígono regular es el segmento que une dos vértices cualesquiera.

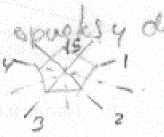
   Incorrecto. une dos vertices que no sean consecutivos

2. ¿Verdadero o falso? Razona tu respuesta.

   a) Un cuadrilátero regular tiene dos ejes de simetría y un pentágono regular tiene 5.

   El cuadrado tiene 4 ejes de simetria, dos por sus vertices opuestos y dos por sus puntos medios de lados. y el pentagono regular tiene 5. verdadero.

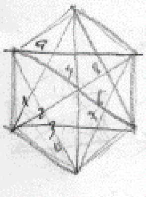
   

   b) La suma de los ángulos interiores de un pentágono regular es de 540°.

   Verdadero $(n-2)\cdot 180° = 3\cdot 180 = 540°$

   c) Todos los polígonos regulares tienen siempre un vértice más que el número de lados.

   Todos tienen tantos vertices como lados

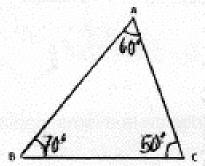
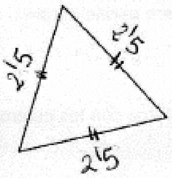
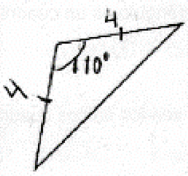
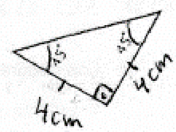
   d) Un hexágono regular tiene 10 diagonales.

   Falso, tiene 9 diagonales

   e) Sólo los polígonos regulares tienen apotemas y diagonales.

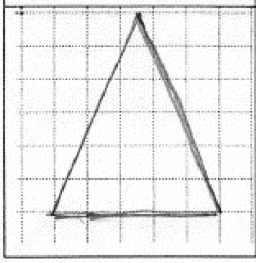
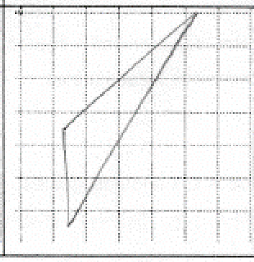
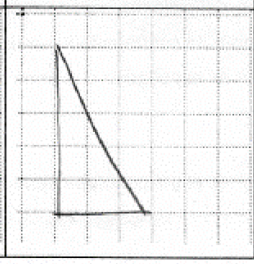
   Falso, los poligonos regulares son los unicos que tienen apotemas, pero diagonales tienen todos.

3. Clasifica (nombra) los siguientes triángulos <u>según sus lados</u> y <u>según sus ángulos</u>.

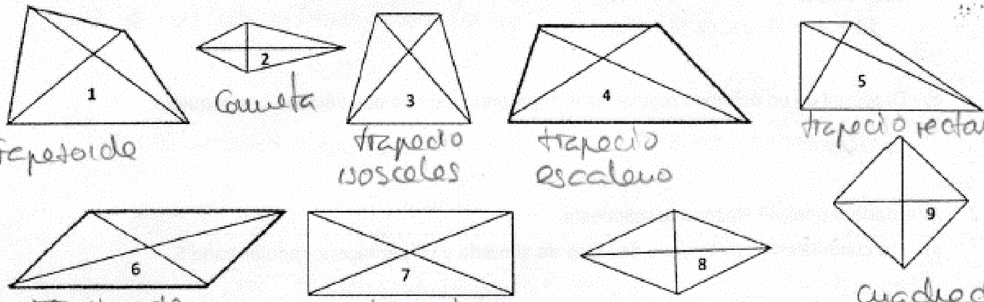
Clasificación				
Según lados	Escaleno	equilatero	isosceles	isosceles
Según ángulos	Acutangulo	acutangulo	obtusangulo	rectangulo

3

4. Dibuja un triángulo que sea:

Acutángulo e isósceles.	Obtusángulo y escaleno.	Rectángulo y escaleno.	Rectángulo y equilátero.
			 Imposible

5. Clasifica (nombra debajo de la forma más precisa posible) los siguientes cuadriláteros:



1. Trapezoide
2. Cometa
3. trapecio isosceles
4. trapecio escaleno
5. trapecio rectangulo
6. romboide
7. rectangulo
8. rombo
9. cuadrado

6. Nombra los siguientes polígonos (puede haber más de una respuesta).

a) Cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos. cuadrado, rectangulo, rombo?

b) Cuadrilátero que tiene los cuatro lados de la misma medida. cuadrado, rombo

c) Cuadrilátero cuyas diagonales se cortan perpendicularmente. cuadrado, rombo, cometa

d) Cuadrilátero paralelogramo cuyos ángulos no son rectos. romboide, rombo

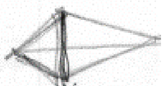
7. ¿Verdadero o falso? Razona la respuesta.

a) Un romboide es un rombo apoyado sobre uno de sus lados.
Falso, el romboide tiene lados paralelos dos a dos y angulos y lados iguales dos a dos, da igual como se apoye.

b) Las diagonales de todos los cuadriláteros se cortan siempre en su punto medio.
Falso, solo en cuadrado, rectangulos, romboide, rombos

c) Un trapecio rectángulo es un cuadrilátero paralelogramo.
Falso, No es paralelogramo, tiene solo dos lados paralelos.

d) Los cuadrados son los únicos cuadriláteros con los cuatro lados de la misma medida.
Falso, los rombos tambien los tienen iguales.



e) Una "cometa" es un rombo.
Falso, es un trapezoide con angulos opuestos iguales, y lados adyacentes iguales.

4

FECHA:________APELLIDOS______________________________NOMBRE________CURSO_____

8. ¿Son correctas las siguientes definiciones? En caso negativo, explica por qué o realiza un dibujo que sirva de contraejemplo (muestre las carencias o imprecisiones de la definición).

a) Una circunferencia es una línea curva cerrada sin principio ni fin.

Falso,  es así y no es circunferencia. tiene que equidistar de un pto fijo que llamamos centro.

b) Un círculo es una línea curva cerrada cuyos puntos equidistan de uno fijo llamado centro que está dentro de él.

Falso, eso es una circunferencia, el círculo incluye la región del plano interior a la circunferencia.

c) Una circunferencia es un círculo.

Falso la circunferencia limita al círculo.

d) Todos los puntos de un círculo están a la misma distancia del centro.

Falso, hay puntos a la misma distancia concéntricos y ptos a distinta distancia

e) Las circunferencias tienen sólo un radio.

Falso, tienen infinitos radios. une el centro con todos los ptos de la circunferencia

9. Dadas las siguientes ternas de números, determina si son o no ternas pitagóricas. Clasifica luego los triángulos que forman según sus ángulos.

a) 6 – 12 – 13 >

$36+144=180 \neq 169$

NO

acutángulo

Ellos no lo pueden saber?

b) 9 – 40 – 41

$81+1600=1681=41^2$

SI

rectángulo

c) 7 – 23 – 25 <

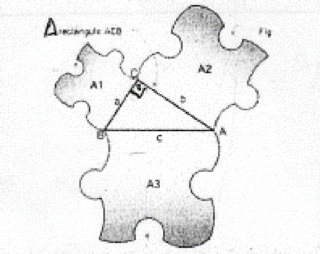
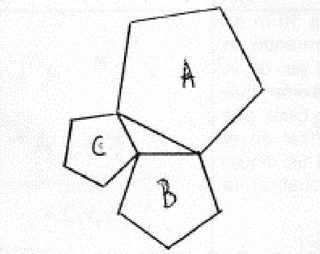
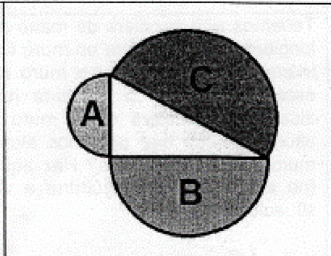
$49+529=578 \neq 625$

NO

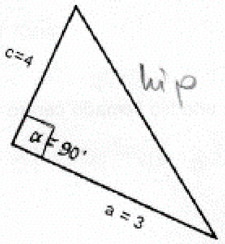
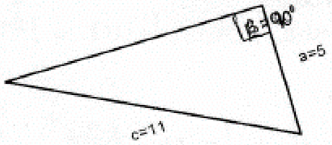
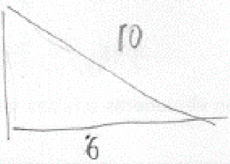
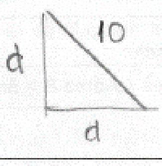
obtusángulo

Ellos no lo pueden saber?

10. Observando los dibujos y los datos, justifica razonadamente si son verdaderas o falsas las igualdades que se proponen en negrita:

		
Dato: A1, A2 y A3 son figuras semejantes	Dato: los pentágonos son regulares	Dato: el triángulo de la figura es rectángulo
Área 3=Área 1+Área 2	**A=B+C**	**área A+ área B > área C**
Si porque son figuras semejantes y se cumple el tª Pitágoras porque es triángulo rectángulo	No porque es un triángulo obtusángulo. y no se cumple tª Pitágoras	No luego se cumple es área A+área B = área C

11. Calcula en cada triángulo la longitud del o de los lados cuya medida se desconoce:

	$hip^2 = b^2 + a^2 = 16 + 9 = 25$ $hip = \sqrt{25} = 5$
	$hip^2 = a^2 + b^2$ $11^2 = 5^2 + b^2$ $121 - 25 = b^2$ $96 = b^2$ $\boxed{9{,}8 = b}$
Tenemos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 10 cm y uno de sus catetos mide 6 cm. Halla la medida del otro cateto. Haz aquí un dibujo (no a escala) para ayudarte a visualizar la situación. 	$h^2 = c_1^2 + c_2^2$ $100 = 36 + c_2^2$ $100 - 36 = c^2$ $64 = c^2$ $\boxed{8 = c}$
Tenemos una escalera de mano de 10 m de longitud apoyada sobre un muro formando un triángulo. La distancia del muro al pie de la escalera es igual a la altura máxima que alcanza la escalera en el muro ¿Cuál esa altura máxima que podemos alcanzar en el muro con esta escalera? Haz aquí un dibujo (no a escala) para ayudarte a visualizar la situación. 	$100^{\cancel{2}} = d^2 + d^2 = 2d^2$ $50 = d^2$ $\boxed{7{,}07 = d}$

6