TÍTULO DEL TRABAJO

Uso de las herramientas CalcMe de Wiris y Geogebra como recurso didáctico en enseñanza de Matemáticas de ESO y Bachillerato

Trabajo Fin de Máster

Máster Universitario en Formación del Profesorado

Especialidad de Matemáticas

Presentado por:

D. Nicolás Gómez Gómez

Dirigido por:

D. Carlos Hermoso Ortiz

Alcalá de Henares, a 20 de Junio de 2019

Universidad de Alcalá

1. Índice

Contenido

2. Resumen

En este trabajo se analizan dos herramientas de uso cada vez más frecuente en la enseñanza de las matemáticas, se trata de CalcMe de Wiris y Geogebra. Estas aplicaciones que actualmente son gratuitas, están orientadas al cálculo simbólico y permiten cubrir la mayor parte de los aspectos formativos incluidos en el currículo a nivel de ESO y Bachillerato. Son dos recursos tecnológicos especialmente útiles para cálculo, representación gráfica de funciones y geometría tanto en el plano como en el espacio. Más que entrar en valoraciones subjetivas sobre cuál de ellas es mejor, lo que se pretende en el trabajo es mostrar el potencial que tienen como herramientas auxiliares de apoyo tanto para el educador como para el alumnado. El uso de las TIC en el aula ya es una realidad que no podemos ignorar, por eso la tarea que nos proponemos es mostrar que tanto CalcMe como Geogebra están en condiciones de ser utilizadas en clase con garantías para mejorar el aprendizaje y optimizar el tiempo de trabajo en el aula.

El estudio abarca varias unidades didácticas relacionadas con las funciones y la geometría tratadas desde 2º a 4º de ESO y 1º de Bachillerato. Las actividades que se proponen van a ayudar al alumno a asentar contenidos y al mismo tiempo pueden servir al profesor a la hora de evaluar trabajos.

Palabras clave:

Recursos didácticos, software matemático, CalcMe, Geogebra, lenguaje simbólico

3. Introducción

Cuando en 1944 se construyó ENIAC, la que se considera primera computadora digital, muy pocos pensarían que la enseñanza y los ordenadores terminarían por acercarse tanto, sin embargo hoy es una realidad. El área de matemáticas es probablemente una de las que más se pueden beneficiar de las posibilidades de esta tecnología aunque tal vez quedaría más correcto decir, de las aplicaciones informáticas que corren gracias a esta tecnología. De las muchas aplicaciones gratuitas orientadas a las matemáticas, este trabajo se centra en dos de las más conocidas en educación secundaria.

- Geogebra es una aplicación software orientada a las matemáticas que ha conseguido gran difusión gracias a la cantidad de trabajos publicados en internet, se utiliza en los libros de texto (Anaya) sobre todo como referente tecnológico para consolidar el aprendizaje.
- CalcMe es una aplicación desarrollada por Wiris, basada inicialmente en el cálculo simbólico que va evolucionando para potenciar su interface gráfica. Es también muy referenciada en los textos sobre todo bajo el nombre de Wiris (Santillana, SM).

Estas herramientas son adecuadas para cubrir casi todos los contenidos curriculares como álgebra, cálculo, geometría, etc. de modo que se ha intentado valorar dónde su uso puede aportar más valor añadido respecto a métodos de trabajo tradicionales.

Si Geogebra destaca por su facilidad para trabajar sobre la representación gráfica, CalcMe podríamos decir que también destaca por su extensa librería de funciones que además se adaptan a la simbología matemática que estamos acostumbrados a utilizar (por ejemplo en la presentación de sistemas de ecuaciones, definición de rectas, límites, integrales, etc.). Por tanto, durante el desarrollo de las unidades didácticas, trataremos de usar la herramienta más adecuada al problema planteado, tratando de acompañarlo con representaciones gráficas, con la idea de explorar nuevas vías de mejora en el campo educativo.

4. Objetivo

Teniendo en cuenta que el uso de recursos tecnológicos es un aspecto de la enseñanza recogido en el RD1105/2014, se plantea como objetivo hacer una propuesta que ayude a los alumnos a mejorar la comprensión de diferentes áreas o ramas matemáticas. Para conseguirlo se propone el uso de dos herramientas, CalcMe de Wiris y Geogebra, como recursos didácticos. Se pretende mostrar de forma práctica aquellos aspectos que favorecen el uso en el aula de estas aplicaciones informáticas y destacar mediante actividades, ejercicios o explicaciones, la utilidad de las mismas. Elegimos varios bloques de contenidos sobre los que desarrollar las unidades didácticas usando indistintamente Wiris, CalcMe o Geogebra, según se adapten mejor al escenario propuesto. Pensemos en el potencial que tienen en temas como geometría para facilitar la visión espacial y forma de poliedros o para representación de funciones por ejemplo. En todo caso supone otro instrumento al alcance de profesores y alumnos que permite dar a las exposiciones nuevos enfoques y mayor variedad.

Estas herramientas de trabajo, se pueden adaptar a diferentes metodologías de enseñanza como aprendizaje basado en problemas, aprendizaje cooperativo, aprendizaje orientado a proyectos o métodos expositivos tradicionales. Por otro lado una vez que los usuarios están familiarizados con su uso, es adecuada en trabajos individuales pero también en grupos de dos o tres alumnos para que sean instrumentos que agilicen la clase en lugar de dificultarla.

5. Descripción del trabajo

El trabajo se desglosa en varios bloques, por un lado se explica cómo son los interfaces de usuario de ambas aplicaciones sin pretender ser demasiado exhaustivos en los detalles para posteriormente realizar algunos ejercicios prácticos que son resueltos indistintamente con Wiris o Geogebra. Se elijen dos bloques de contenidos, “Funciones” y “Geometría” sobre los que vamos a desarrollar las unidades didácticas para 3º y 4º de E.S.O.

En relación al bloque de funciones, se comienza con la recta definida como punto pendiente para llegar a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y su representación gráfica.

Respecto al bloque de geometría comenzamos con las semejanzas de triángulos para llegar al teorema de la altura y teorema del cateto. Me ha parecido adecuado encadenarlo con la introducción a la trigonometría que se imparte en 4º curso ESO.

5.1. Puesta en práctica en el aula

Esta sección plantea cómo introducir en el aula estas herramientas que aunque sencillas, requieren un aprendizaje y práctica para manejarlas. El uso de herramientas tecnológicas en matemáticas, está contemplado en el RD 1105-2014 tanto para ESO como Bachillerato, por tanto está más que justificado trabajar con ellas, más aún si suponen una mejora para el aprendizaje. Hay muchos estudios que demuestran que en la medida en que el profesor acepte, utilice y se sienta cómodo en el empleo de herramientas tecnológicas, las va a usar con mayor garantía de éxito en el aula. En general los alumnos no van a suponer un problema para aceptar estas novedades ya que en su mayoría son nativos digitales.

He tratado de considerar diferentes aspectos a tener en cuenta.

- Cómo trabajar con los alumnos.
    - Desde el inicio de curso debe tomarse el uso de estas herramientas como una actividad más de clase, no como algo esporádico.
        - Clase inicial de introducción y manejo de CalcMe y Geogebra.
    - Los trabajos en el aula de informática se llevan a cabo en grupos (dos/tres) para realizar actividades basadas en problemas o proyectos tecnológicos como los planteados en este documento.
        - Reserva de un día al mes para preparación de proyectos en grupo.
    - El trabajo diario del aula debe incluir también resolución de problemas basados en las técnicas de Cálculo Simbólico (CAS).
        - Simultanear corrección y trabajo con CAS y otros métodos.
- Cómo evaluar la utilización de estas herramientas.
    - Con la entrega de actividades planteadas como proyectos en grupo, al menos uno por bloque.
        - Se evalúan conjuntamente con el resto de estándares.
    - Corrección de tareas diarias usando CalcMe o Geogebra.
        - La resolución de ejercicios también es posible paso a paso.
- Cómo nos autoevaluamos en el uso de estas aplicaciones.
    - Mediante encuesta a los alumnos, atendiendo aquellas propuestas que permitan reforzar aspectos de uso de herramientas tecnológicas.
        - Determinar en qué medida las herramientas mejoran el proceso de aprendizaje para adaptar su uso dinámicamente.

- En función del grado de alcance de objetivos propuestos en cada bloque de contenidos.
    - Desarrollar al menos un proyecto en cada bloque de contenidos.

6. Conocer y analizar las herramientas

Estas dos aplicaciones han ido evolucionando y en cada versión incorporan alguna mejora que permite que cada vez sean más intuitivas. No requieren demasiada formación para manejarlas a nivel de usuario, además disponen de ayuda on-line y manuales descargables gratuitamente lo cual facilita que tengan una aceptación cada vez mayor en el ámbito de la enseñanza, no solo en matemáticas sino que también se hacen cada vez más adaptaciones a otras materias (Física, Química, Tecnología).

Tienen muchas cosas en común y podríamos decir que cualquiera de ellas va a superar nuestras necesidades y expectativas. Es importante no dejarnos llevar por las primeras impresiones sobre cuál es más atractiva, fácil de usar o es más completa, tal vez si seguimos ese impulso inicial, diríamos que Geogebra es la elección adecuada, sin embargo con el uso, CalcMe va ganando fuerza y finalmente esta última es la que se adapta mejor al lenguaje simbólico al que estamos acostumbrados.

Pero ¿por qué pensar en descartar una de ellas? Seamos prácticos y aprovechemos la suerte de disponer de dos aplicaciones que en ciertos aspectos son complementarias, más aún teniendo en cuenta que por el momento ambas son gratuitas y además, las dos cuentan con un gran volumen de ejemplos que podemos descargar de internet.

Como característica común, diremos que ambas tienen la opción on-line y la versión instalable o portable. La versión instalable, da independencia del acceso a internet que en muchos casos puede resultar un problema, utiliza los recursos del propio equipo y en general permite trabajar más rápido. Por poner algún inconveniente diremos que podría darse algún problema de compatibilidad con equipos antiguos.

Geogebra nos permite desde su página *https://www.Geogebra.org/*, el acceso a todo el dosier de soluciones matemáticas, incluidas las app. descargables en móviles. Encontramos la opción de "Descargar aplicaciones" que nos permite obtener el software instalable, *Geogebra clásico 6 para trabajo off-line*. Si preferimos trabajar sin instalación (on-line), elegimos la opción de "Aplicaciones clásicas → Geogebra Clásico". Realmente simple, rápido y fácil de iniciar.

CalcMe de Wiris ofrece la misma alternativa para la versión on-line, el acceso es sencillo con enlaces desde múltiples plataformas como *educa.madrid* o también desde su propia web *http://www.wiris.net/educa.madrid.org/wiris/es/*, *www.wiris.com/es/calc*, https://CalcMe.com/. Respecto a la versión instalable, conocida como *Wiris desktop*, tenemos que decir que Wiris ha discontinuado esta línea desde 2012 finalizando con la versión 2.3.4 que se puede obtener desde diferentes páginas de descarga gratuita, *https://calculadora-wiris-desktop.programas-gratis.net/* . Para nuestro propósito, cualquiera de las opciones es equivalente y de hecho vamos a utilizar ambas durante las distintas fases del trabajo.

Disponen de ayuda en línea y lo que es más importante, manuales de usuario con ejemplos, algo fundamental para aclarar dudas. Aunque son aplicaciones muy intuitivas y con escasos conocimientos previos se puede trabajar con ellas, es fundamental tener al alcance una buena documentación que haga de ellas algo más que simples calculadoras. A continuación se indican algunos de los enlaces oficiales donde podemos obtener la ayuda necesaria para familiarizarnos con ellas.

- http://www.wiris.net/demo/wiris/manual/es/ : donde accedemos a la ayuda online de Wiris desktop.
- https://docs.wiris.com/en/calc/commands/start#alphabetical_index : lista de comandos distribuidos por categorías.
- https://docs.wiris.com/es/calc/start : lista de comandos y menús de CalcMe.
- www.wiris.com/en/downloads/files/1625/manual_es.pdf : acceso directo al documento (.pdf) de manual de usuario para Wiris desktop.
- https://docs.wiris.com/es/calc/menu para la ayuda on-line de CalcMe.
- https://app.Geogebra.org/help/docues.pdf : documento oficial de Geogebra que describe la aplicación a nivel de usuario incluyendo lista de comandos.
- https://www.Geogebra.org/m/MqVqGRux : donde podemos consultar la ayuda on-line de Geogebra.

6.1. Descripción del entorno de trabajo en CalcMe

Vamos a comenzar describiendo el área de trabajo de CalcMe y Wiris desktop para después hacer lo mismo en relación a Geogebra.

En el caso de Wiris, hay una ligera diferencia en el escritorio de trabajo ofrecido en CalcMe (versión on-line) respecto al que se presenta en Wiris desktop, esto tiene su explicación en el hecho de que entre ellas hay seis años de desfase. Sin embargo es un aspecto más estético que de funcionalidad.

Si accedemos desde el explorador (Firefox, Crome, M. Edge) a https://CalcMe.com/a, se abre la aplicación como se muestra en la figura 1, con las diferentes áreas de trabajo.

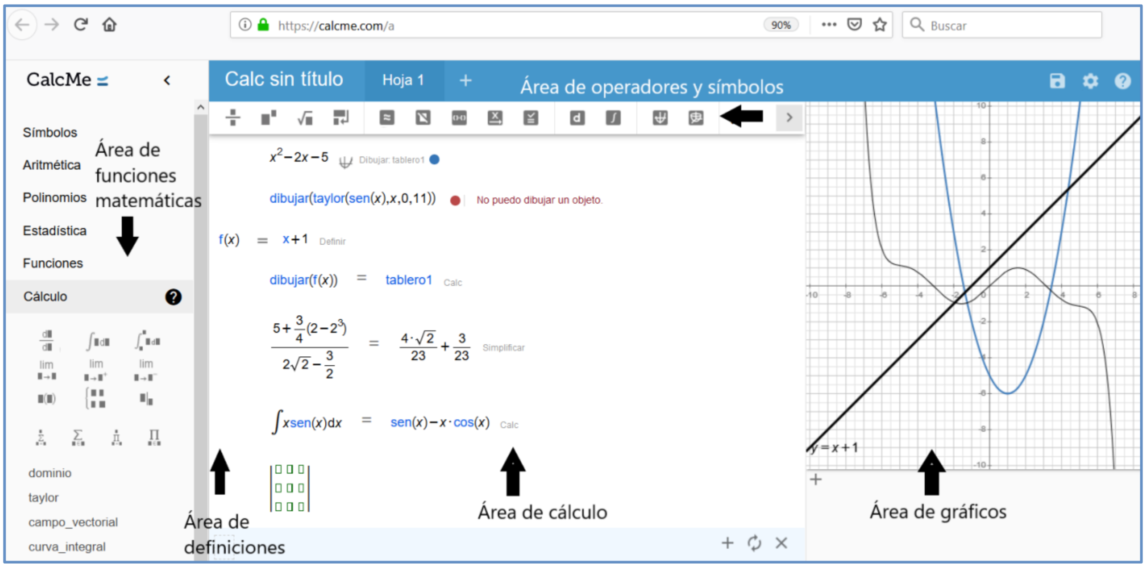
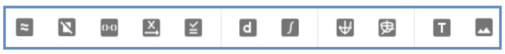


Figura 1.

6.1.1. Descripción de las áreas

Área de funciones matemáticas, también llamada menú de comandos, se agrupa en bloques afines que al desplegarlos nos muestran la lista de comandos accesibles. También contiene todo el conjunto de símbolos matemáticos.

Algunos ejemplos de comandos: factorizar(polinomio), grado(polinomio), función sen(x), resolver(ecuaciones), redondear().

Área de operadores y símbolos, es un modo de acceso rápido a símbolos de uso frecuente  (división, potencias, raíces) así como diferentes comandos  (aproximar, simplificar, factorizar, sustituir, verificar, generar gráficas, escribir texto o importar imágenes).

Área de definiciones, nos permite trabajar con variables que podrán ser utilizadas en cualquier momento.

Área de cálculo, es la zona de trabajo principal donde escribiremos los comandos, ecuaciones y expresiones matemáticas a resolver.

Área de gráficos, está en el lado derecho del escritorio y es donde se representan las gráficas o tableros en dos o tres dimensiones. En la misma sesión podemos tener varios tableros de forma que sea más fácil la interpretación de las funciones o comandos.

Barra de menú, donde definimos las características de presentación y almacenamiento del proyecto (fig. 2). Un detalle que cada vez es más frecuente de estas aplicaciones on-line es la posibilidad de definir un área de almacenamiento en la nube que facilita poder compartir los documentos. (por ejemplo google drive).

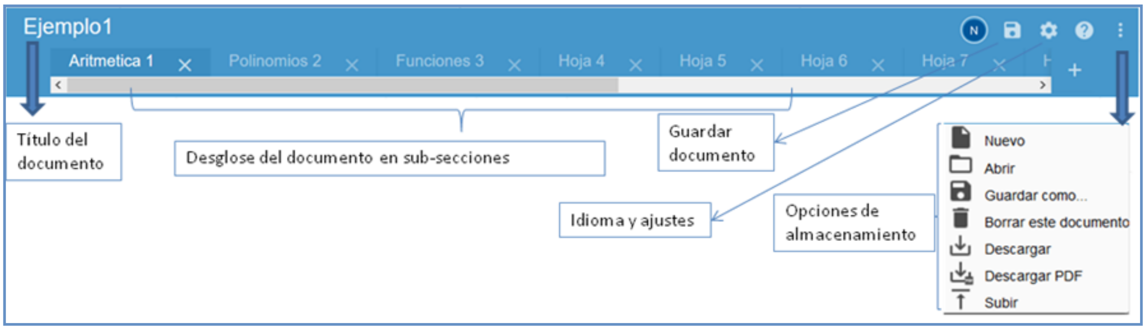


Figura 2.

6.2. Descripción y simbología de CalcMe

En la siguiente sección pasamos a describir algunos de los símbolos y comandos que pueden tener cierta relevancia.

6.2.1. Símbolos

Es uno de los aspectos clave de la aplicación. Para el usuario tiene mucha importancia conservar la misma simbología que utiliza cotidianamente cuando escribe en cuaderno o pizarra. A nivel de ESO o Bachiller parece aconsejable que las aplicaciones se adapten al usuario en lugar de que sea este el que deba someterse al lenguaje específico de la herramienta. Afortunadamente en este punto, Wiris ha conseguido un nivel de adaptación a la simbología matemática creo que por encima del resto de aplicaciones. Como muestra, indicamos parte de los iconos representativos así como ejemplos de expresiones matemáticas.

: Números irracionales, variable compleja, infinito y constantes matemáticas.

- $e^{i\pi}+1 = 0$: La identidad de Euler.

$(\blacksquare)$ $[\blacksquare]$ $\{\blacksquare\}$ $|\blacksquare|$ $\|\blacksquare\|$: Paréntesis, corchetes, llaves, valor absoluto, módulo.

- $\text{mcm}\left(\left\{2,3,2^3,5,\frac{3}{4},10\right\}\right) = 120$: Listas de números combinados.

 : Fracción, raíces, potencias, subíndices.

- $\dfrac{\left(-\frac{3}{5}\right)+3^2\left(\frac{3^3}{9}-\sqrt{5}\right)}{2-\sqrt{5}} = -\dfrac{42\cdot\sqrt{5}}{5}-\dfrac{39}{5}$: Combinación de símbolos en cálculos con operadores variados.

$>$ $<$ $\geq$ $\leq$ $\neq$: Símbolos de desigualdades.

- $\text{resolver\_inecuacion}(x^2-2x-3\geq 0) = x\leqslant -1 \vee x\geqslant 3$: Resolución de inecuaciones.

6.2.2. Aritmética

$|-2.3| = 2.3$: Valor absoluto del número.

$\lfloor -2.3\pi \rfloor = -8$: Redondeo a entero inferior más cercano.

$\lceil -2.8 \rceil = -2$: Redondeo a entero superior más cercano.

$\left.\begin{array}{l}\text{redondear}(5.5) = 6\\ \text{redondear}(-e) = -3\end{array}\right\}$: Redondeo a entero más próximo.

$\left.\begin{array}{l}\text{signo}(-2) = -1\\ \text{signo}(3.4) = 1\end{array}\right\}$: Devuelve 1 si signo positivo y -1 si signo negativo.

$\left.\begin{array}{l}\text{aleatorio}(\{1,3,4,5,6,8,9\}) = 9\\ \text{aleatorio}(1,100) = 47\end{array}\right\}$ Genera número aleatorio de una lista o intervalo.

$\text{mcm}(\{2,3,4,5,6,10\}) = 60$: Proporciona el m.c.m de la lista.

$\text{factorizar}(\text{mcm}(\{3,4,5,6\})) = 2^2\cdot 3\cdot 5$: Factoriza el número obtenido después de realizar la operación de m.cm en el paréntesis.

6.2.3. Polinomios

$\text{grado}(2x^3y+3x^2z^3) = 5$: Proporciona el grado del mayor de los monomios.

$\text{n\_términos}(2x^3y+3x^2z^3) = 2$: Devuelve el número de términos del polinomio.

$\text{raíces}(x^2+2x-3) = \{-3,1\}$: Da la lista de raíces del polinomio.

$\text{mcd}(x^2+2x-3, x-1) = x-1$: Obtiene el m.c.d de los dos polinomios.

$\text{factorizar}(x^2+2x-3) = (x-1)\cdot(x+3)$: Descompone el polinomio en factores.

6.2.4. Funciones

Este bloque está orientado principalmente a las funciones trigonométricas pero también a las logarítmicas y exponenciales. En general, la herramienta CalcMe no maneja las propiedades de los logaritmos sino que se limita a hacer cálculos, esto es un problema ya que no ayuda mucho a trabajar en la simplificación del logaritmo de un producto como suma de logaritmos por ejemplo. A su favor diremos que casi no hay ninguna aplicación que sea capaz de aplicar estas propiedades.

Algunas funciones trigonométricas disponibles en la aplicación son : *sen(), cos(), tan(), arcsen(), arccos(), arctan(), sec(), cot()* así como las hiperbólicas.

6.2.5. Cálculo

$\frac{d\square}{d\square}$: Derivada de la función del numerador con respecto a la variable del denominador.

- $f(x) = 3x^2+5x$ Definir

  $\frac{df(x)}{dx} = 6\cdot x+5$

  Definimos la función *f(x)* y posteriormente calculamos su derivada respecto de la variable *x.*

$\int \square\, d\square \quad \int_{\square}^{\square} \square\, d\square$: Integral indefinida y definida. Según el caso, tendremos que indicar los límites de integración así como la variable utilizada para la integral.

- $f(x) = 3x^2+5x$ Definir

  $\int f(x)dx = x^3+\frac{5}{2}\cdot x^2$

  $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2$ Calc

  Definimos la función *f(x)* y posteriormente calculamos su integral indefinida o definida entre los límites (-1,1) con respecto a la variable *x.*

$\lim_{\square \to \square} \quad \lim_{\square \to \square^+} \quad \lim_{\square \to \square^-}$: Límite de una función cuando la variable tiende a un valor y cuando la tendencia es por la derecha o por la izquierda.

- $$g(x) = \operatorname{sen}(x) \quad \text{Definir}$$ $$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = 1$$

: Definimos la función *g(x)* y calculamos el límite de la expresión cuando *x* tiende a 0.

: Definición de función a trozos, CalcMe permite la definición de la función en dos trozos.

- $$p(x) = \begin{cases} x & x>0 \\ -x & x<-1 \end{cases}$$

6.2.6. Álgebra lineal

: Representación de vectores, matrices y determinantes cuya dimensión se determina antes de utilizarlos. Sobre ellos se pueden realizar una serie de operaciones que describimos seguidamente.

: **Producto escalar** de vectores, es un escalar suma de los productos de cada una de las componentes de los vectores. $u \cdot v = |u||v|\cos\theta$

- $$u = [x,y,z] \quad \text{Definir}$$ $$v = [a,b,c] \quad \text{Definir}$$ $$\langle u,v\rangle = a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z$$

: Definimos previamente los dos vectores **u, v** y los multiplico escalarmente.

- $$\langle [x,y,z],[a,b,c]\rangle = a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z$$

Utilizamos el operador sobre los vectores directamente.

: **Producto vectorial** de dos vectores **u, v** es un vector cuyo módulo es $u\times v = |u||v| sen\theta$ y su dirección es perpendicular a los dos vectores.

- $$u = [x,y,z] \quad \text{Definir}$$ $$v = [p,q,r] \quad \text{Definir}$$ $$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = (-z\cdot q+y\cdot r)\cdot i+(z\cdot p-x\cdot r)\cdot j+(-y\cdot p+x\cdot q)\cdot k$$ $$u\times v = [-q\cdot z+r\cdot y, p\cdot z-r\cdot x, -p\cdot y+q\cdot x] \quad \text{Calc}$$

$\|\blacksquare\|$: **Norma o módulo** de un vector se calcula como la suma de los cuadrados de cada una de las componentes del vector.

- $u = [x,y,z]$

  $\|u\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

  Si tenemos un vector cuyas componentes son *x, y, z*, el módulo será la raíz de la suma de los cuadrados de estas componentes.

$\blacksquare^{-1}$ $\blacksquare^{T}$ $I_{\blacksquare}$: Símbolos que se utilizan para el cálculo de la matriz inversa, transpuesta y para crear una matriz identidad de la dimensión deseada.

dimensiones(matriz) : Par formado por el nº de filas seguido del nº de columnas.

rango(matriz) : El máximo nº de filas y de columnas linealmente independientes.

- $n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ Definir

  rango(n) = 3

  Sobre la matriz de dim (3,4), se puede encontrar una columna que es combinación lineal de las otras tres que son linealmente independientes.

ángulo(vector,vector) : Determina el ángulo que forman los dos vectores, puede obtenerse del producto escalar de los mismos.

- $m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ Definir

  ángulo(m_2,m_3) = 0.3757

  m_2 y m_3 representan los vectores de la segunda y tercera fila de la matriz. También podemos encontrar el ángulo usando el producto escalar.

  $u \cdot v = |u||v|\cos\theta$

Resolver

resolver(ecuaciones) : Encuentra las soluciones que satisface la ecuación o el sistema de ecuaciones.

- resolver(x^2+3x+2) = $\{\{x=-2\},\{x=-1\}\}$ Calc

  resolver$((x^2+2x+1)(x-3)(x^2-1))$ = $\{\{x=-1\},\{x=1\},\{x=3\}\}$

  resolver$\left(\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+y-z=0 \\ 2x-y+z=3 \end{cases}\right)$ = $\{\{x=1,y=2,z=3\}\}$ Calc

resolver_numéricamente(ecuaciones) : Encuentra una única solución real de la ecuación o del sistema de ecuaciones.

- resolver_numéricamente$\left(\begin{cases} x+y+z=5 \\ x+y-z=0 \\ 2x-y+z=3 \end{cases}\right)$ = $\{x=1.,y=1.5,z=2.5\}$

resolver_inecuación(ecuaciones : Resuelve inecuaciones o sistemas de inecuaciones con una sola variable.

- resolver_inecuación$\left(\begin{cases} x^2\leq 5 \\ x^2\geq 2 \end{cases}\right)$ = $x\geqslant\sqrt{2}\wedge x\leqslant\sqrt{5}\vee x\geqslant-\sqrt{5}\wedge x\leqslant-\sqrt{2}$

sustituir(expresión,variable,valor) : Equivale al símbolo, sustituye la variable y calcula la expresión.

sustituir$(2^x+x,x,2)$ = 6 : Al reemplazar *x* por *2* en la expresión, se obtiene *6*.

6.3. Descripción y simbología de Geogebra

Geogebra es una aplicación muy depurada en casi todos sus aspectos, tiene muchos módulos de trabajo incluyendo una hoja de cálculo, CAS, cálculos de probabilidad y algunas más. Otra característica importante es la cantidad de trabajos y desarrollos publicados en internet que cubren todos los contenidos del currículo de E.S.O y Bachillerato. La aplicación es muy utilizada debido sobre todo a la sencillez para crear gráficos y animaciones con sus deslizadores. Si a todo lo anterior, añadimos que los trabajos se pueden compartir como públicos o mantenerlos privados, tenemos un producto excelente. Pero esta sencillez conseguida para representar gráficas no se ha cuidado con tanto esmero en el módulo de CAS por lo que resulta más complicado su manejo y tampoco la ayuda es especialmente intuitiva.

Es compatible con los navegadores más comunes (Firefox, Crome, M. Edge) y el acceso se hace por el enlace https://www.Geogebra.org/classic#cas .

El área de trabajo está dividida en dos mitades, comandos o lenguaje simbólico (CAS) a la izquierda y área gráfica a la derecha.

Si nos centramos en lo que es el CAS, la presentación es como se muestra a continuación (fig.3):

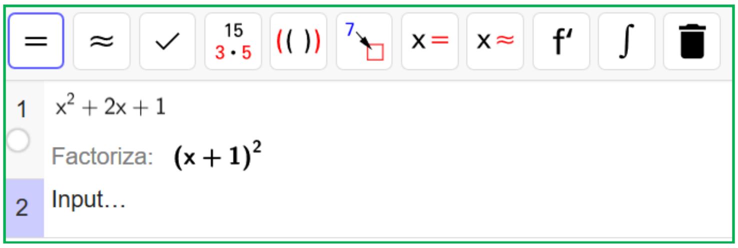


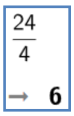
Figura 3.

En la parte inferior del área CAS (fig. 4) encontramos el acceso a los símbolos y operadores que soporta la aplicación.

Figura 4.

El uso de los botones de operación es el siguiente:

Cálculo simbólico, realiza el cálculo exacto de la expresión o simplifica.

- 

Valor numérico, realiza el cálculo numérico más aproximado de la expresión.

- $\frac{3}{4}$ ≈ $\mathbf{0.75}$

Conserva la entrada : No realiza ningún cálculo, mantiene la expresión tal cual.

- $\frac{24}{4}$ ✓ $\mathbf{\frac{24}{4}}$

Factorización de la expresión.

- 1 x^2+2x+1
  Factoriza: $\mathbf{(x+1)^2}$

Desarrolla los paréntesis de la expresión.

- $\frac{2(a+b)-(3(a-(b-4)))}{2(4a-2b)}$
  → $\mathbf{\frac{-a+5b-12}{8a-4b}}$

Sustituye temporalmente en la expresión.

- $\frac{2(a+b)-3(a-(b-4))}{2(4a-2b)}$
  Sustituye, a=-1,b=-2: $\mathbf{\frac{2(-1-2)-3(-1-(-2-4))}{2(4(-1)-2(-2))}}$

Resuelve la ecuación en la variable.

- x^2-2
  Resuelve: $\{x=-\sqrt{2}, x=\sqrt{2}\}$

Resuelve la ecuación en la variable numéricamente.

- x^2-2
  ResoluciónN: $\{x=-1.41, x=1.41\}$

7. Propuesta didáctica

7.1. Funciones

Complementos informáticos en el aprendizaje de funciones lineales

En el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la ***Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato,*** encontramos en el área de matemáticas el "Bloque 4: Funciones". Para varios niveles de secundaria (desde 2º ESO) se presentan contenidos relacionados con las ecuaciones y funciones lineales. Concretamente, en este apartado del proyecto queremos cubrir los contenidos relacionados con las rectas para llegar hasta la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. La idea es desarrollar actividades donde podamos incorporar las dos herramientas que estamos valorando como una alternativa más de apoyo en el aula. Nos servimos del entorno gráfico y simbólico que ambas aplicaciones nos brindan para ir encadenando paso a paso los contenidos que nos exige el currículo.

Para facilitar el manejo de CalcMe a nivel de lenguaje simbólico y gráfico (CAS), incluimos una lista de los comandos que usaremos durante el desarrollo de esta unidad.

- *punto(x,y)* : define las coordenadas de un punto en el plano.
- *recta(punto(x,y),punto(x,y))* : determina la recta que pasa por dos puntos.
- *perpendiculares(función, punto(x,y))* : determina una recta perpendicular que pasa por el punto indicado.
- *escribir("texto",punto(x,y),{color=rojo})* : escribe un texto comenzando en el punto indicado con el color de la opción.
- *pendiente(recta(punto(x,y),punto(x,y)))* : da el valor de la pendiente de la recta indicada por los puntos.
- *dibujar(función,{opciones})*: dibuja en el tablero la función indicada según las opciones.
- *representar(función,{opciones})*: En caso de funciones lineales es equivalente a dibujar.
- *resolver({función / sistema ecuaciones})*: Permite obtener el valor de las variables que satisfacen la ecuación.

- *sustituir(función,variable,valor)*: resuelve la función según el valor asignado a la variable.

7.1.1. La recta.

Comenzaremos viendo situaciones de nuestro entorno que dan lugar a líneas rectas: una hoja de papel doblada por la mitad, la esquina de un edificio, la cuerda de una guitarra, la línea de horizonte entre el cielo y el mar …
En las gráficas normalmente incluimos los ejes de coordenadas que utilizamos como líneas de referencia. Aprovechamos alguna fotografía que tengamos para importar al área gráfica de Geogebra. Es un gran acierto incorporar esta funcionalidad en la aplicación de cara a que los alumnos puedan trabajar sobre contenidos próximos a la vida real utilizando herramientas tecnológicas. Como ejemplo podemos utilizar esta imagen de un aeropuerto (fig. 5), sobre ella se pueden trabajar aspectos como trazado de rectas paralelas , secantes, medida de ángulos que forman las diferentes pistas , longitudes o escalas.
En el caso de CalcMe, la importación de imágenes solo es posible a nivel del área de comandos que realmente no aporta demasiado como objetivo didáctico.

Figura 5.

A continuación podríamos iniciar CalcMe para ver algunas características que presentan las rectas (https://CalcMe.com/a), por el momento nos limitamos a trabajar sobre el plano y por tanto utilizamos la zona gráfica .
Podemos señalar algunas propiedades que caracterizan a las rectas sobre la figura 6:

- Señalamos dos puntos y apuntamos sus coordenadas. Podemos determinar que dados dos puntos sobre un plano, existe una única recta que pasa por ellos.

- Si tenemos dos rectas en un plano, se pueden dar las siguientes condiciones:
  - Rectas paralelas, las pendientes son iguales y no tienen ningún punto en común.
  - Rectas secantes son aquellas que tienen un punto común.
  - Rectas coincidentes tienen todos sus puntos comunes.

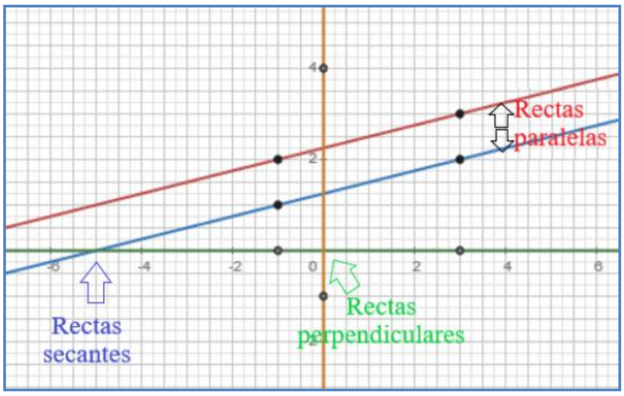


Figura 6.

Si queremos dibujar paralelas o perpendiculares a una recta, podemos seguir la secuencia siguiente. Partimos de la recta ***y* = - 6*x* + 8** de la figura 7.

```
A  =  punto(1,2)  Definir
B  =  punto(2,−4)  Definir
      dibujar (A)  =  tablero1  Calc
      dibujar(B)  =  tablero1  Calc
      dibujar(recta(A,B))  =  tablero1  Calc
      dibujar({perpendiculares(y = −6x+8,punto(1,2))},{color = azul})  =  tablero1  Calc
      escribir("recta perpendicular",punto(1,3),{color = azul})  =  tablero1  Calc
      escribir("recta paralela",punto(−2,−2),{color = rojo})  =  tablero1  Calc
      dibujar({paralelas(recta(y = −6x+8),punto(0,0))},{color = rojo})  =  tablero1  Calc
```

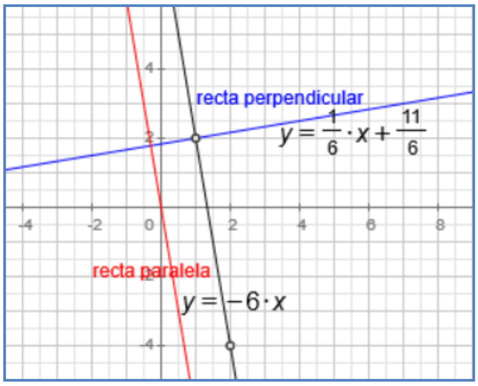
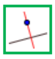
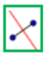
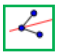
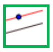


Figura 7.

El repertorio gráfico de Geogebra es mucho más amplio pues incluye varios iconos de acceso a funciones predefinidas que son aplicables al manejo de rectas (perpendicular  , mediatriz  , bisectriz  , paralelas ). Pero igual que ocurre con CalcMe, lo que se construye desde la vista gráfica o algebraica no se refleja como cálculo simbólico, por tanto no se puede utilizar en el CAS. En ambas aplicaciones, la formulación simbólica y repertorio de comandos son similares y en todo caso en las dos se tiene acceso a la ayuda en línea para resolver las dudas. A modo de comparativa, para crear las rectas anteriores desde Geogebra, el proceso sería el siguiente (ver fig. 8):

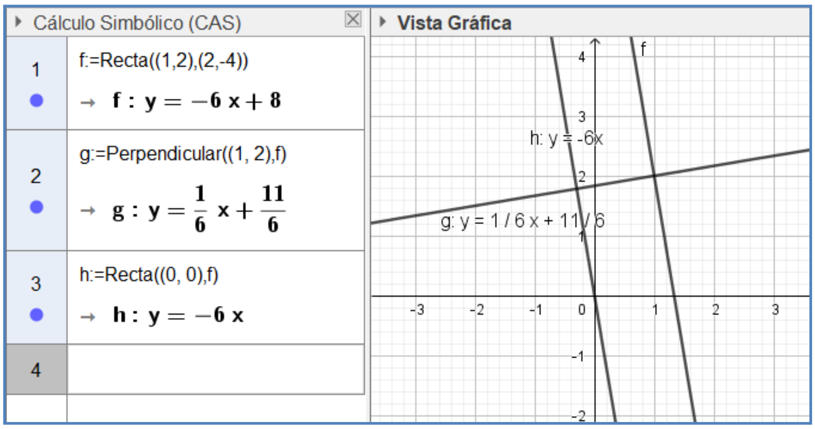


Figura 8.

Función de proporcionalidad directa o función lineal

Comenzamos planteando una situación en la que tenemos un grifo que llena una cisterna. Si el grifo aporta 1 litro de agua cada minuto, queremos conocer los litros que tiene la cisterna después de cierto tiempo. Podemos crear una tabla en la que indicamos por un lado el tiempo y por otro los litros suministrados. Si representamos en una gráfica los datos de la tabla, poniendo en el eje X (abscisas) el tiempo transcurrido y en el eje Y (ordenadas) los litros, obtenemos la recta azul.

Tiempo (minutos) (X)	0	1	2	3	…	6	x
Volumen agua (l) (Y)	0	1	2	3		6	x

Ahora reducimos el caudal del grifo a la mitad, la tabla resultante dará la recta verde

Tiempo (minutos) (X)	0	1	2	3	…	6	x
Volumen agua (l) (Y)	0	0,5	1	1,5		3	0,5 x

Por último si triplicásemos el número de grifos, la nueva tabla se podría representar con la recta roja.

Tiempo (minutos) (X)	0	1	2	3	…	6	x
Volumen agua (l) (Y)	0	3	6	9		18	3 x

La representación gráfica del problema mediante CalcMe se muestra en la figura 9.

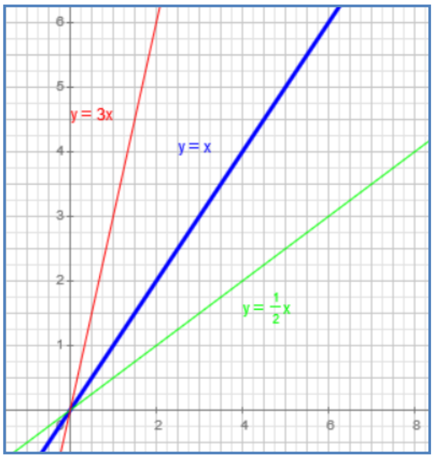


Figura 9.

Trazado de rectas usando CalcMe:

Puntos y funciones :

$L_1 = \{punto(0,0), punto(1,1), punto(2,2)\}$

$L_2 = \{punto(0,0), punto(1,\frac{1}{2}), punto(2,1)\}$

$L_2 = \{punto(0,0), punto(1,3), punto(2,6)\}$

$f(x) = x$

$g(x) = \frac{1}{2}x$

$h(x) = 3x$

dibujar(f(x), {color=azul})

escribir("y=x",punto(2.5,4),{color=azul})

dibujar(g(x), {color=verde})

escribir("y=$\frac{1}{2}$x",punto(4,1.5),{color=verde})

dibujar(h(x), {color=rojo})

escribir("y=3x",punto(0,4.5),{color=rojo})

Las tres rectas tienen una inclinación respecto al eje X (horizontal) que llamamos pendiente (m) y las representamos de forma genérica como

$$y = m \cdot x$$

En nuestra gráfica las pendientes de las rectas son: $m_1 = 3$ (recta roja), $m_2 = 1$(recta azul) y $m_3 = \frac{1}{2}$ (recta verde).

Los alumnos pueden extraer varias conclusiones sobre estas rectas:

- Todas ellas pasan por el punto *(0,0)* llamado origen de coordenadas.
- Todas ellas crecen al aumentar el valor de *x* (*m* > *0*).
- Cuanto mayor es el valor de *m* más rápido crecen.
- Se puede averiguar la cantidad de agua del depósito en cualquier otro momento que no aparezca en la tabla, basta con utilizar la gráfica.

El siguiente paso sería modificar el enunciado del problema, partiendo de la cisterna llena de agua, se va vaciando a un ritmo constante de 1 litro cada minuto (azul) o 2 litros cada minuto (rojo) o $\frac{1}{2}$ litro cada minuto (verde). El resultado de las gráficas mostraría que ahora las funciones son rectas en las que el valor de la pendiente ***m*** que multiplica a la variable independiente *x* es negativo (ver fig. 10).

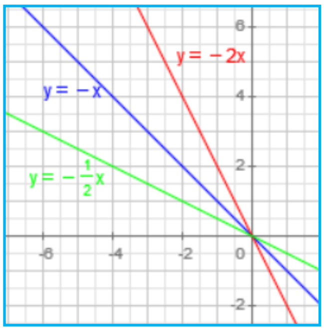


Figura 10.

dibujar$(y=-x,\{color=azul\})$ = tablero1 Calc

dibujar$(y=-2x,\{color=rojo\})$ = tablero1 Calc

dibujar$\left(y=-\frac{1}{2}x,\{color=verde\}\right)$ = tablero1 Calc

Finalmente haremos ver que en general la pendiente ***m*** se puede obtener de las tablas o de las gráficas según se muestra a continuación.

$$m=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\,; \quad m=\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}\,; \quad m=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$$

Para asentar los conocimientos proponemos algunos ejercicios.

Ejercicio 1.

Se hace un experimento aleatorio lanzando palillos sobre una hoja cuadriculada como se muestra en la figura 11, indicar la pendiente de los palillos.

(Utilizamos el comando *pendiente*)

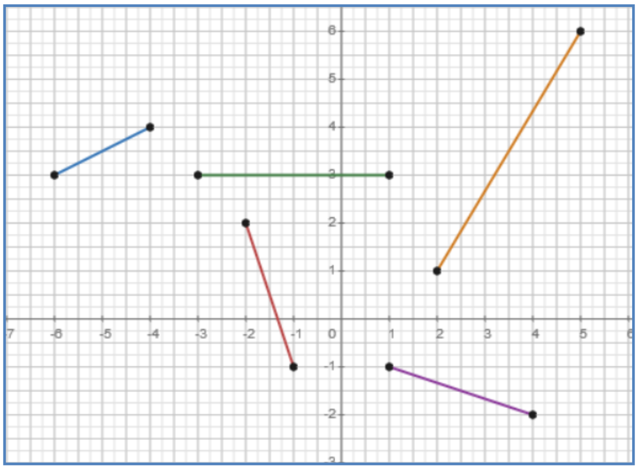


Figura 11.

Ejercicio 2.

Utilizando la herramienta CalcMe, dibuja las rectas que pasen por el origen de coordenadas y tengan las pendientes: $m_1 = 0$, $m_2 = 4$, $m_3 = -3$, $m_4 = \frac{2}{3}$, $m_1 = -\frac{2}{5}$

Escribe la función correspondiente a cada recta en forma explícita $\boldsymbol{y = m\,x}$.

(Bastará con utilizar el comando: *dibujar(*$y=m_n\,x$*)*)

Ejercicio 3.

Dibuja las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos (x_i,y_i) y determina la pendiente.

r: (1,0), (3,-2) s: (0,0), (-3,-2) t: (2,2), (-1,2) u: (1,0), (3,0)

Utiliza el comando ***pendiente(recta(punto(***$\boldsymbol{x_1,y_1}$***),punto(***$\boldsymbol{x_2,y_2}$***)))*** que nos da la pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_1,y_1), (x_2,y_2), para verificar que los resultados son correctos.

Función afín

Proponemos a continuación la siguiente variación sobre el problema de llenar una cisterna. Supongamos que tenemos dos grifos con caudal 1 litro por minuto cada grifo pero partimos de que el recipiente tiene inicialmente 4 litros de agua. Representar la gráfica.

Configuremos la tabla de tiempo y volumen de agua en la cisterna.

Tiempo (minutos) (X)	0	1	2	3	…	6	x
Volumen agua (l) (Y)	4	6	8	10		16	$2\,x + 4$

Al Representar los puntos en la gráfica 12 , tenemos:

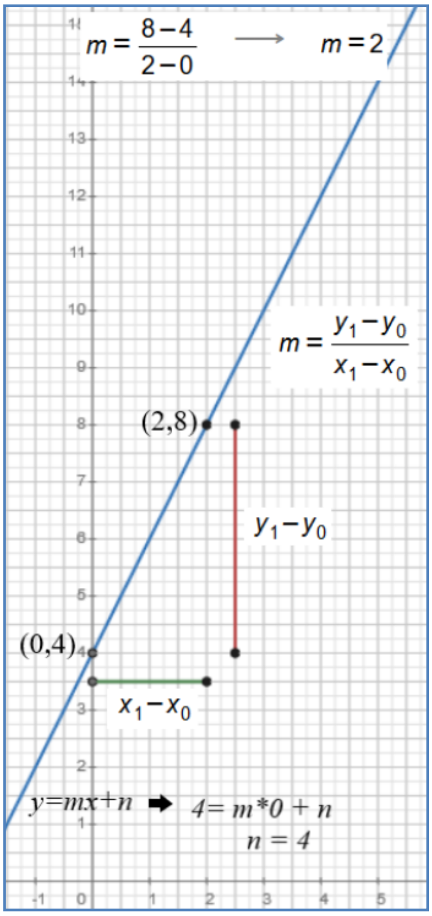


Figura 12.

Observamos que la pendiente de la recta es :

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \rightarrow m = 2$$

Teniendo en cuenta que la ecuación de la recta es de la forma : $y = m\,x + n$, y ha de pasar por el punto (0,4) $\rightarrow \boldsymbol{4} = 2 \cdot 0 + \boldsymbol{n},$

De modo que la ecuación de la recta es:

$$\boldsymbol{y = 2 \cdot x + 4}$$

Desde CalcMe, podemos obtener la ecuación:

Directamente:

recta(punto(0,4),punto(2,8)) $\rightarrow y = 2 \cdot x + 4$

O también paso a paso:

pendiente(recta(punto(0,4),punto(2,8))) $\rightarrow 2$

$y = 2x + n \xrightarrow[y=4]{x=0} 4 = n$ usando

La expresión que determina la función afín es:

$$\boldsymbol{y = m \cdot x + n}$$

Siendo m el valor de la pendiente y n la ordenada en el origen es decir, el valor que toma la función cuando $x=0$

Clasificación de las rectas

Según hemos visto las rectas son:

- Funciones lineales cuando pasan por el origen de coordenadas y su expresión es $\boldsymbol{y = m\,x}$
- Funciones afines cuando no pasan por el origen de coordenadas y su expresión es $\boldsymbol{y = m\,x + n}$, siendo m la pendiente.

Podemos hacer también una clasificación de las rectas según su pendiente obteniendo la siguiente gráfica:

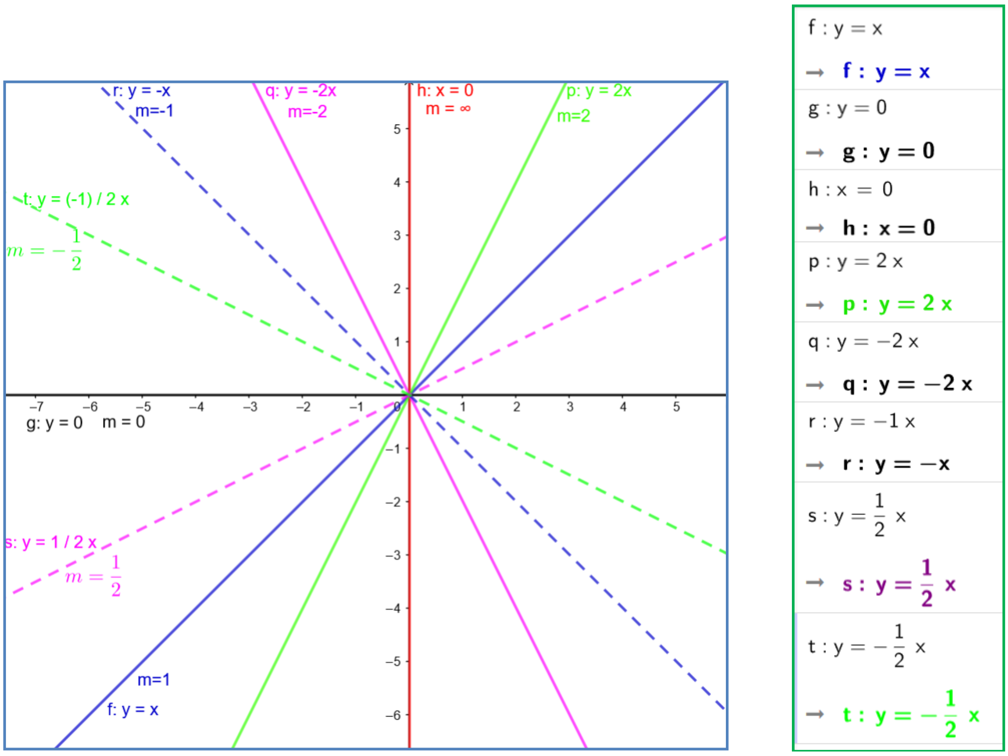


Figura 13.

A continuación proponemos algunos ejercicios de consolidación:

Ejercicio 1.

Los resultados económicos de dos empresas durante los últimos años se reflejan en la gráfica 14. Deduce las ecuaciones de las dos rectas y analiza de seguir así, ¿Cuál de las dos empresas será más rentable dentro de 5 años? ¿Y dentro de 2 años?

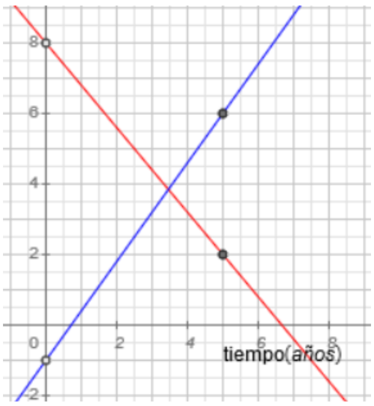


Figura 14.

Observamos que la recta roja está definida por los puntos *(0,8)* y *(5,2)* de modo que la pendiente de la recta será:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \rightarrow \ m = \frac{2-8}{5-0} \rightarrow \ \boldsymbol{m = -\frac{6}{5}}$$

Para que la recta $y = -\frac{6}{5}\ x\ + n$ pase por el punto *(0,8)* ha de cumplirse

$$8 = -\frac{6}{5} \cdot 0\ + n \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{n = 8}$$

Por tanto la función roja será : $\boldsymbol{y = -\frac{6}{5}\ x\ + 8}$

Siguiendo el mismo razonamiento, la recta azul pasa por *(0,-1)* y *(5,6)* de modo que su pendiente será:

$$m = \frac{6-(-1)}{5-0} \ \rightarrow \ \boldsymbol{m = \frac{7}{5}}$$

Mientras que el valor de *n* que obtenemos para $x = 0$ será:

$$-1 = \frac{7}{5} \cdot 0\ + n \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{n = -1}$$

La función azul será : $\boldsymbol{y = \frac{7}{5}\ x\ - 1}$

Por inspección podemos confirmar que dentro de 5 años ($x = 5$) la gráfica azul queda por encima de la roja y por tanto la empresa azul tendrá más beneficios que la roja. Sustituyendo en cada función para $x = 5$

Empresa roja : $y = -\frac{6}{5} \cdot 5\ + 8 \ \rightarrow \ y = 2$

Empresa azul : $y = \frac{7}{5} \cdot 5\ - 1 \ \rightarrow \ y = 6$

Usando la simbología de CalcMe, obtenemos las funciones:

Empresa roja: $recta\big(punto(0{,}8), punto(5{,}2)\big) \ \rightarrow \quad y = -\frac{6}{5} \cdot x + 8$

Empresa azul: $recta\big(punto(0,-1), punto(5{,}6)\big) \rightarrow \ y = \frac{7}{5} \cdot x - 1$

Ejercicio 2.

Un servicio de taxi tiene una tarifa de 0,6 € al inicio del trayecto y se incrementa en 30 céntimos por minuto de ocupación. Hallar la función que describe el coste del taxi, dibujar la gráfica y determinar el coste que supondría un trayecto de 15 minutos.

Podemos crear una tabla de valores:

X(minutos)	0	1	2	3	x
Y(coste)	0,6	0,9	1,2	1,5	$m \cdot x + n$

La función debe pasar por los puntos *(0, 0.6)* y por *(3, 1.5)*.

La pendiente de la función será : $m = \frac{1{,}5-0{,}6}{3-0} \rightarrow \boldsymbol{m = 0{,}3}$

Para hallar la ordenada en el origen *n* tomamos uno cualquiera de los puntos *(0, 0.6)*

$$y = 0{,}3 \cdot x + n \rightarrow 0{,}6 = 0{,}3 \cdot 0 + n \rightarrow n = 0{,}6$$

La función que define la tarifa del taxi es: $\boldsymbol{y = 0{,}3 \cdot x + 0{,}6}$

El coste de 15 minutos de ocupación de taxi sería : $y = 0{,}3 \cdot 15 + 0{,}6 \rightarrow \boldsymbol{y = 5{,}11}$ **€**

La figura 15 muestra la gráfica utilizando CalcMe.

recta(punto(0,0.6),(punto(1,0.9)) $\rightarrow y = 0.3 \cdot x + 0.6$

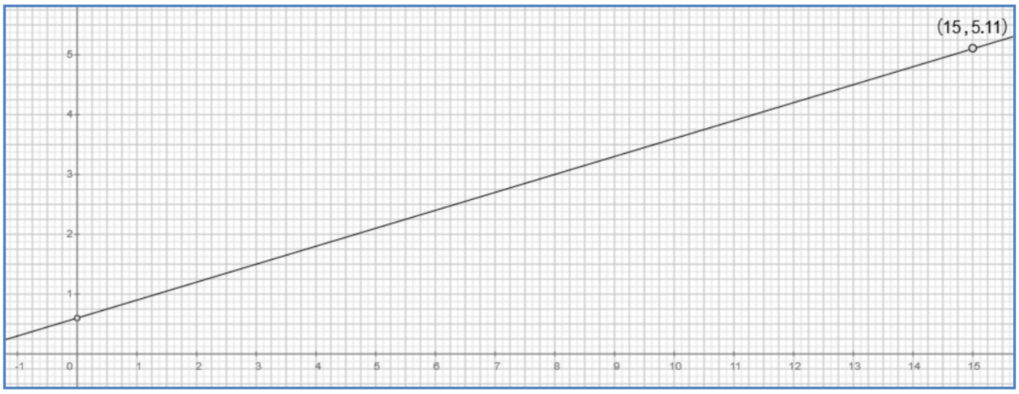


Figura 15.

$$y = 0.3\,x + 0.6 \xrightarrow{x=15} y = 5.1$$

Ejercicio 3.

Una compañía de coches ofrece tres modalidades de contrato de alquiler de vehículos. En el contrato verde se paga una cuota fija de 20 € al día y 10 céntimos por kilómetro. En el contrato azul se paga a 20 céntimos el kilómetro sin cuotas adicionales.

En el contrato rojo se paga a 15 céntimos el kilómetro con un consumo mínimo equivalente a 100 kilómetros.

Dibuja las diferentes gráficas de las ofertas y plantea las ecuaciones que determinan dichas ofertas.

Trabajamos con una tabla que nos permita ver el comportamiento de las tres ofertas.

Kilómetros (X)	50	100	150	200	250
Opción verde	20+5	20+10	20+15	20+20	20+25
Opción azul	50 · 0.2	100 · 0.2	150 · 0.2	200 · 0.2	250 · 0.2
Opción rojo	15	15	150 · 0.15	200 · 0.15	250 · 0.15

Contrato verde:

Puntos de la gráfica: *(50,25), (100,30), (150,35), (200,40)*

Pendiente : $m = \frac{30-25}{100-50} \rightarrow \boldsymbol{m} = \frac{5}{50} \rightarrow m = \frac{1}{10}$

Ordenada en el origen : $25 = \frac{1}{10} \cdot 50 + n \rightarrow n = 20$

Función de la recta: $y = \frac{1}{10} \cdot x + 20$

Contrato azul:

Puntos de la gráfica: *(50,10), (100,20), (150,30), (200,40)*

Pendiente : $m = \frac{30-20}{150-100} \rightarrow \boldsymbol{m} = \frac{10}{50} \rightarrow m = \frac{1}{5}$

Ordenada en el origen : $20 = \frac{1}{5} \cdot 100 + n \rightarrow n = 0$

Función de la recta: $y = \frac{1}{5} \cdot x$

Contrato rojo:

Puntos de la gráfica: *(50,15), (100,15), (150,22.5), (200,30)*

Pendiente : $m = \frac{22.5-15}{150-100} \rightarrow \boldsymbol{m} = \frac{7.5}{50} \rightarrow m = \frac{3}{20}$

Ordenada en el origen : $15 = \frac{3}{20} \cdot 100 + n \rightarrow n = 0$

Función de la recta: $y = \frac{3}{20} \cdot x \quad para\ x \geq 100$

$y = 15 \quad para\ x < 100$

Creación de la gráfica utilizando CalcMe.

dibujar(recta(punto(150,35),punto(200,40)), $\{color = verde\}) \rightarrow y = \frac{1}{10} \cdot x + 20$

dibujar(recta(punto(150,30),punto(200,40)), $\{color = azul\})) \rightarrow y = \frac{1}{5} \cdot x$

$dibujar\left(y = \frac{3}{20}x, x, 100..\infty, \{color = rojo\}\right) \rightarrow y = \frac{3}{20} \quad para\ x \geq 100$

$dibujar(y = 15, x, -\infty..100, \{color = rojo\}) \rightarrow y = 15 \quad para\ x < 100$

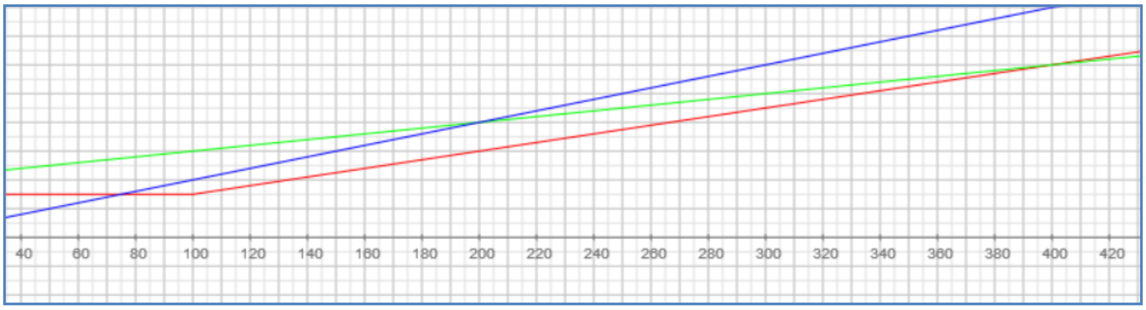


Figura 16.

Viendo la figura 16 se observa que para valores superiores de 400 km, la opción más rentable es la gráfica verde, para valores entre 80 y 400 km la más rentable es la roja y entre 0 y 80 km la mejor opción sería la azul.

7.1.2. Sistemas de ecuaciones como conjunto de funciones lineales

La resolución de sistemas de ecuaciones se contempla en los contenidos de 3º E.S.O. dentro del bloque 2 : "Números y álgebra" (Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones), pero también se ve en el bloque 4 "Funciones" (Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones de la vida cotidiana mediante la representación gráfica).

Un sistema lineal de ecuaciones es un conjunto de varias ecuaciones de primer grado. Resolver el sistema es buscar un valor de las variables que satisfaga todas las ecuaciones. En este caso trabajaremos con dos variables lo cual nos va a facilitar la representación de cada ecuación en un plano, de la misma forma que hicimos con las funciones lineales.

Al intentar resolver el sistema, nos podemos encontrar tres posibilidades.

- Que ningún valor de las variables satisfaga simultáneamente todas las ecuaciones (sistema incompatible, fig. 17):

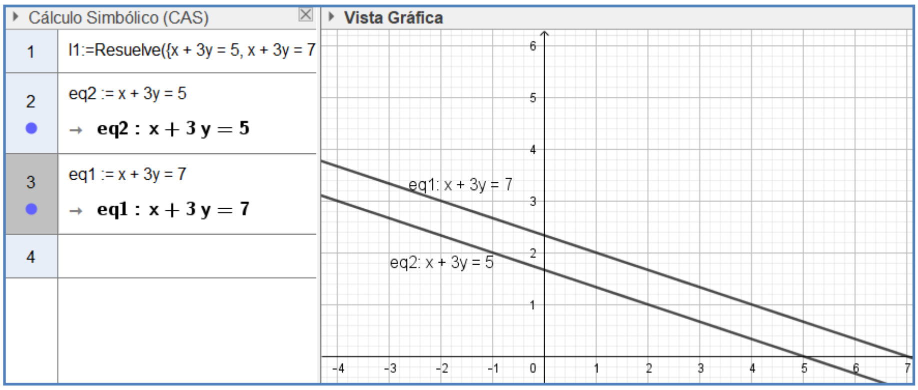


Figura 17.

(No hay ningún valor de *x*, *y* que cumple las dos ecuaciones simultáneamente, como se puede observar las dos ecuaciones representan rectas paralelas)

- Que haya infinitas soluciones (sistema indeterminado, fig.18):

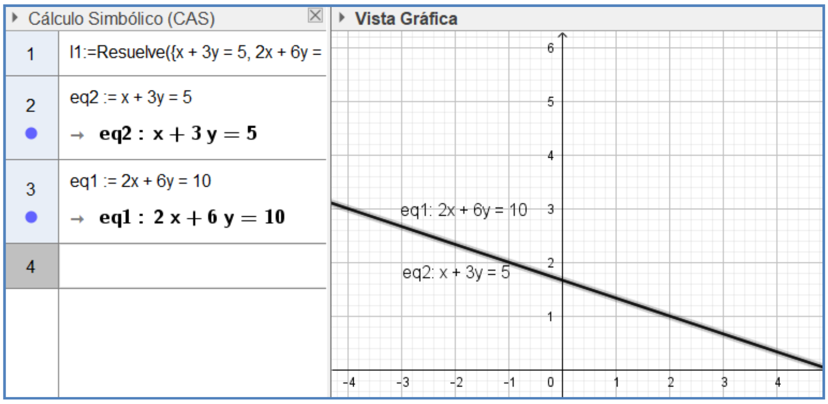


Figura 18.

(Cualquier valor de *x* nos da un valor de *y* que satisface ambas ecuaciones)

- Que exista una solución única (ver fig.19).

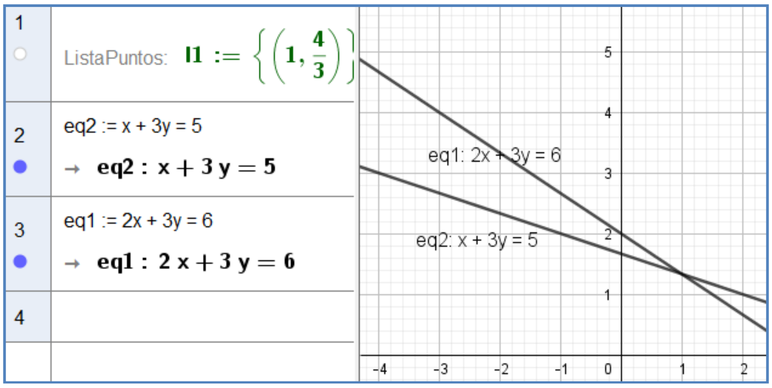


Figura 19.

(Existe un único punto en el que coinciden las dos rectas, solución del sistema)

Creo que la mejor forma de mostrar lo que significa resolver el sistema de ecuaciones es mediante su representación gráfica. El hecho de haber comenzado viendo las funciones lineales nos va a ser de utilidad a la hora de dibujar estas ecuaciones lineales. Tanto CalcMe como Geogebra, están diseñadas como herramientas de cálculo que nos van a resolver el sistema, pero esto no nos va a ayudar a entender el proceso intermedio de resolución. Sin embargo, ambas aplicaciones permiten despejar una de las variables de cada ecuación, esto nos será muy útil en el caso de resolución por el método de igualación o de sustitución.

Representación gráfica del sistema lineal de ecuaciones.

En Geogebra clásico podemos mostrar varias vistas simultáneamente: Cálculo Simbólico (CAS), Vista Algebraica y Vista Gráfica. Sobre la zona de comandos de CAS, escribimos el sistema lineal a resolver siguiendo el formato de la aplicación (*Resuelve({ecuación 1, ecuación 2})*). Como resultado obtenemos los valores de las dos variables. El proceso para dibujar las ecuaciones requiere el uso de la vista algebraica ya que el cálculo simbólico no incluye un comando para dibujar, pero es tan simple como escribir las ecuaciones. La ventaja es que se puede cambiar sobre el objeto varias opciones de color, mensajes a mostrar, hacerlo visible o invisible para que la gráfica sea más clara (ver fig.21). Para terminar la representación del sistema, habilitamos el valor obtenido como solución del sistema, el punto A representa el cruce de ambas rectas lo cual viene a confirmar que satisface las dos ecuaciones.

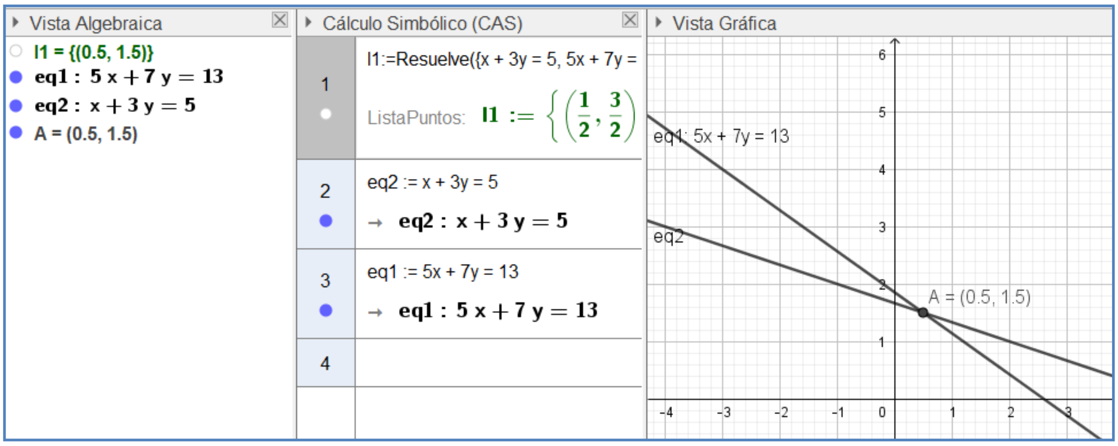
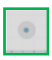


Figura 21.

El mismo proceso hecho desde CalcMe nos lleva primero a *resolver* el sistema, en este caso el simbolismo es más parecido al que estamos acostumbrados, dos líneas y el símbolo de llave que hace que la presentación sea más real. La función *dibujar* aplicada a las ecuaciones nos permite crear la gráfica sobre el tablero. Para ver los datos de la gráfica, basta con cambiar el cursor a la zona del tablero y allí seleccionar el símbolo

 tal como se aprecia en la figura 22.

$$\text{resolver}\left(\begin{cases} x+3y=5 \\ 5x+7y=13 \end{cases}\right) = \left\{\left\{x=\frac{1}{2}, y=\frac{3}{2}\right\}\right\} \quad \text{Simplificar}$$

$$\text{dibujar}\left(\begin{cases} \{x+3y=5\} \\ \{5x+7y=13\} \end{cases}, \{\text{color}=\text{rojo}\}\right) = \text{tablero1} \quad \text{Simplificar}$$

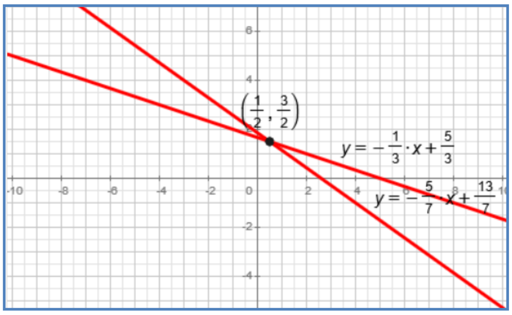


Figura 22.

Método de igualación

El método de igualación consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones de modo que podamos igualar los otros términos de la igualdad, con ello reducimos a una ecuación con una incógnita. Usando CalcMe, se puede ver que la función *resolver*, permite hacer este proceso, para ello trabajamos por separado cada ecuación e indicamos la variable que queremos despejar. En realidad es el mismo proceso que seguiríamos para hacerlo manualmente lo cual permite que se pueda utilizar como sistema corrector por el propio alumno.

Ejemplo 1

Resolver el sistema $\begin{Bmatrix} x-y=4 \\ x+2y=13 \end{Bmatrix}$ por el método de igualación (usando CalcMe).

$$\text{resolver}\left(\begin{cases} x-y=4 \\ x+2y=13 \end{cases}\right) = \{\{x=7, y=3\}\} \quad \text{Calc}$$

$$\text{dibujar}\left(\begin{cases} x-y=4 \\ x+2y=13 \end{cases}, \{\text{color}=\text{verde}\}\right) = \text{tablero1} \quad \text{Calc}$$

$$\text{resolver}(x-y=4, x) = \{\{x=y+4\}\} \quad \text{Calc}$$

$$\text{resolver}(x+2y=13, x) = \{\{x=-2\cdot y+13\}\} \quad \text{Calc}$$

$$\text{resolver}(y+4=-2y+13) = \{\{y=3\}\} \quad \text{Calc}$$

$$\text{resolver}(x=3+4) = \{\{x=7\}\} \quad \text{Calc}$$

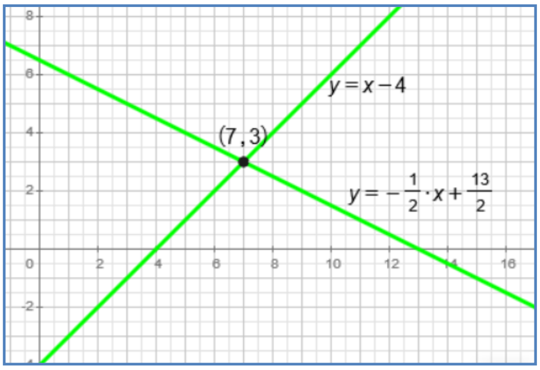


Figura 23.

Ejemplo 2

Resolver el sistema $\begin{Bmatrix} x-5y=11 \\ 2x+3y=-4 \end{Bmatrix}$ utilizando el método de igualación (con Geogebra CAS).

Primero se muestran las rectas sobre la figura 24, a continuación se resuelve cada ecuación respecto de la variable *x* para igualarlas y nuevamente resolver la ecuación lineal con una incógnita. El proceso finaliza sustituyendo el valor obtenido sobre una de las ecuaciones (En la última línea resolvamos el sistema directamente).

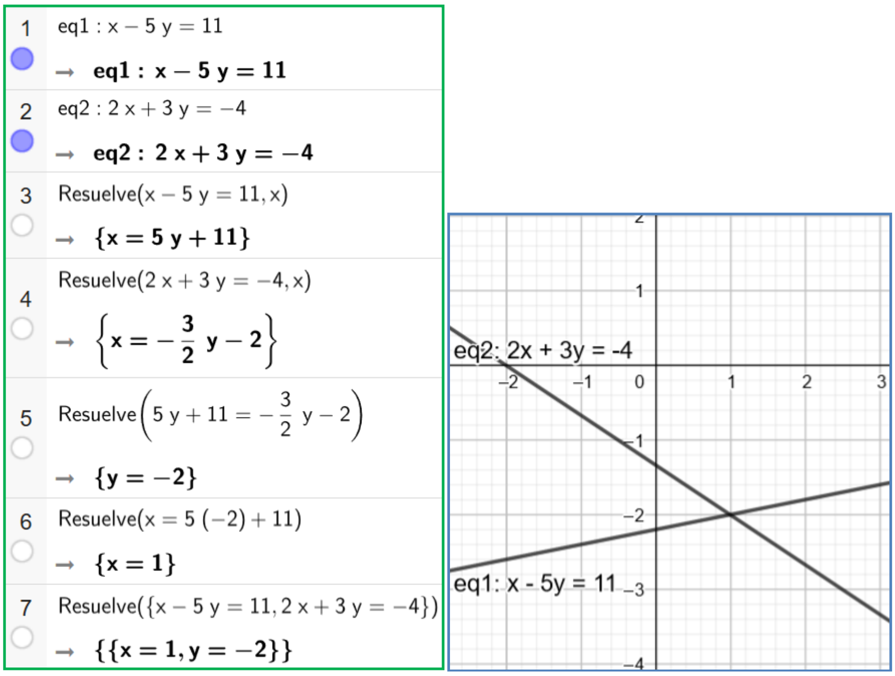


Figura 24.

Método de sustitución

En este método, despejamos una de las incógnitas de una de las ecuaciones para sustituirla en la otra ecuación reduciendo así el número de variables y quedando como una ecuación lineal con una incógnita. Como en el caso anterior, utilizamos la función resolver sobre una ecuación y una variable. El resultado lo llevamos a la segunda ecuación y nuevamente resolvemos.

Ejemplo 3

Resolver el sistema $\begin{cases} 2x + 3y = -5 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$ utilizando el método de sustitución.(CalcMe)

Procedemos a dibujar la gráfica del sistema indicado (ver fig. 25) para posteriormente, seguir los pasos descritos.

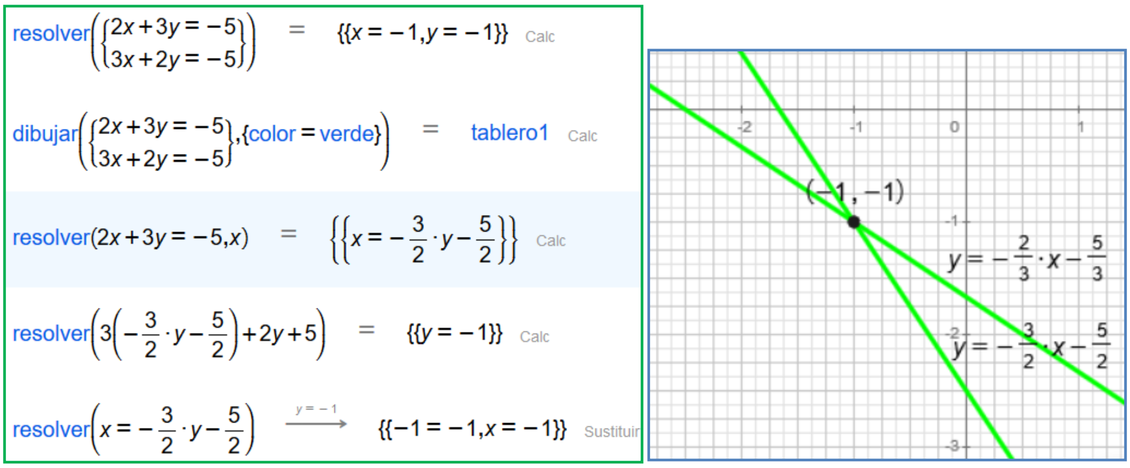


Figura 25.

Ejemplo 4

Resolver el sistema $\begin{Bmatrix} \frac{x+2y}{4} = -1 \\ 2(x+y) = 6y+8 \end{Bmatrix}$ utilizando el método de sustitución. (Geogebra)

Primero se resuelve el sistema, a continuación se representan las ecuaciones (fig.26), se despeja una de las incógnitas y se sustituye en la otra ecuación para obtener la variable $y = -2$, finalmente se sustituye en la ecuación inicial para hallar la variable $x = 0$.

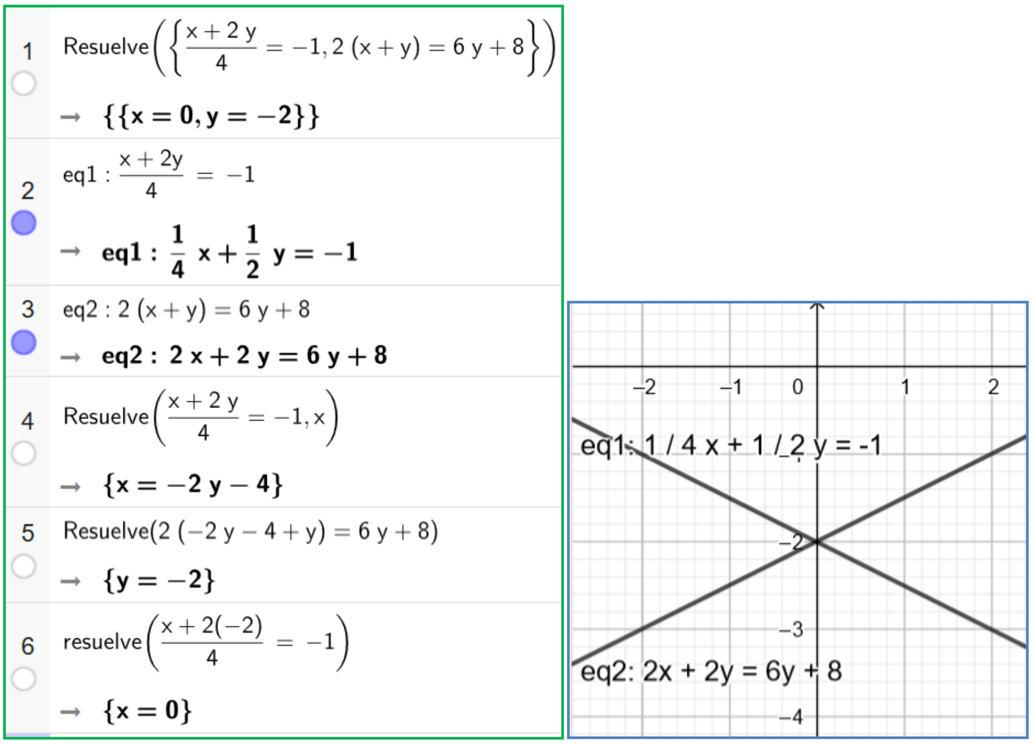


Figura 26.

7.2.Geometría

Al igual que se hizo en el bloque anterior, pasamos a indicar algunos comandos que se utilizarán durante el desarrollo de esta unidad.

- *triángulo(punto(x,y), punto(x,y), punto(x,y))* : Definición de un triángulo por las coordenadas de tres puntos.
- *semejantes?(figura1, figura2)*: devuelve verdadero si son semejantes.
- *pie_de_altura(ABC)*: devuelve las coordenadas de la altura relativa a B.
- *distancia(punto,punto)*: devuelve la distancia entre los dos puntos.
- *polígono(punto,punto…)*: define la zona que abarca el polígono.
- *polígono_regular(nº lados, lado)*: define un polígono regular de *n* lados de longitud *lado*.
- *longitud(segmento(punto,punto))*: devuelve la longitud del segmento
- *área(polígono)*: proporciona el área del polígono.
- *resolución(expresión)*: resuelve el valor numérico de la expresión.

7.2.1. Semejanza aplicada a figuras geométricas

Tal como se establece en los contenidos de 4º de E.S.O en matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, bloque 3. Geometría, vamos a utilizar las aplicaciones informáticas para facilitar la comprensión de conceptos y propiedades geométricas. Para ello comenzaremos con la semejanza, diciendo que dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma y las medidas son proporcionales. A esta relación entre las medidas de las figuras la llamamos ***razón de semejanza***.
Como ya he indicado con anterioridad *Wiris desktop* es la aplicación portable de Wiris que incluye las mismas funcionalidades que CalcMe. Aunque necesita activarse con licencia, esta es gratuita por lo que no supone un problema su uso. Tiene la ventaja respecto a la versión on-line de no necesitar la conexión a internet. He considerado también de interés presentarla en el caso de la geometría.

Ejemplo 1

Indicar en la figura 27, los triángulos que son semejantes

```
T=triángulo(punto(0,0),punto(1,2),punto(2,0))
  → (0,0)−(1,2)−(2,0)
dibujar(T) → tablero1
U=triángulo(punto(3,0),punto(5,4),punto(7,0))
  → (3,0)−(5,4)−(7,0)
dibujar(U) → tablero1
V=triángulo(punto(−5,1),punto(−13,1),punto(−9,−7))
  → (−5,1)−(−13,1)−(−9,−7)
dibujar(V) → tablero1
semejantes?(triángulo(punto(3,0),punto(5,−4),punto(7,0)),T)
  → cierto
semejantes?(V,T) → cierto
W=triángulo(punto(−4,−2),punto(−2,−2),punto(−3,1))
  → (−4,−2)−(−2,−2)−(−3,1)
dibujar(W) → tablero1
semejantes?(V,W) → falso
```

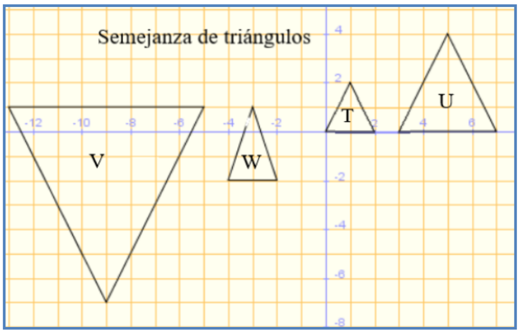


Figura 27.

Usamos la función *triángulo(punto(a,b),punto(c,d),punto(e,f))* para definir el triángulo por sus vértices, la función *semejante?(A,B)* devuelve un valor *cierto* o *falso* según los polígonos comparados sean o no semejantes.

En Geogebra, no se dispone de esta posibilidad de comparación, por tanto para determinar si los triángulos son semejantes es necesario verificar que los lados son proporcionales : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ y sus ángulos iguales.

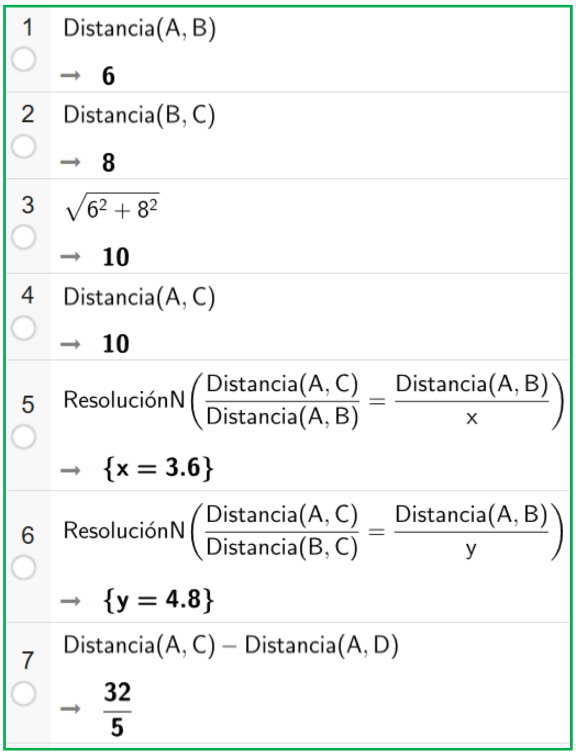
Proponemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1

Dividir un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 y 8 cm de modo que los triángulos resultantes sean semejantes al inicial.

Así lo haríamos desde Geogebra:

En el área gráfica (ver fig.28), podemos ubicar los puntos de forma que las medidas de los catetos se ajusten al problema. Aplicando el T. Pitágoras hallamos la longitud de la hipotenusa y trazamos la altura de este triángulo sobre la hipotenusa. Este segmento nos divide el triángulo en dos que son semejantes al inicial. Finalmente resolvemos la relación de semejanza para hallar los datos solicitados.



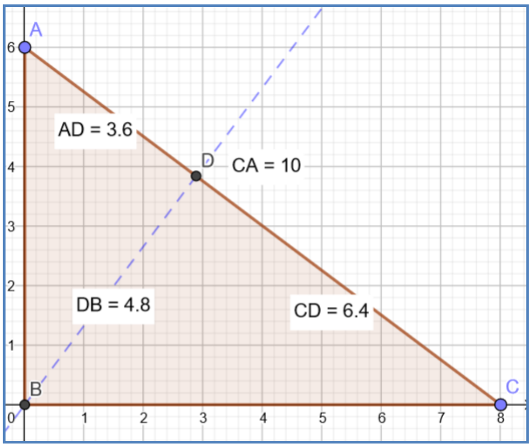
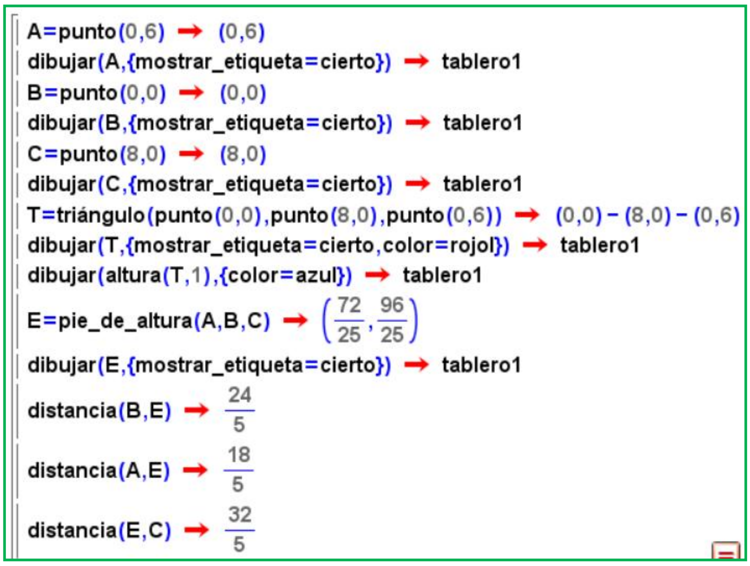


Figura 28.

Observamos que los triángulos ABC, ADB y BDC son semejantes siendo la razón de semejanza $\frac{AB}{AD}=\frac{5}{3}$ para los triángulos ABC y ADB.

Así lo haríamos con Wiris o CalcMe indistintamente (fig. 29)



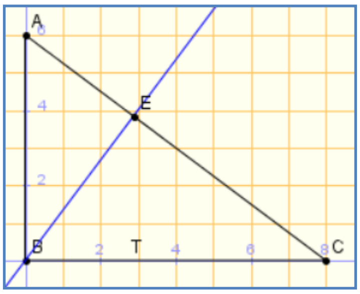


Figura 29.

En la resolución con Wiris, hemos posicionado los vértices para poder asignarles las letras correspondientes. Seguidamente dibujamos el triángulo usando estos puntos y la función *altura(triángulo, vértice)* nos permite trazar la altura. El punto de intersección con la hipotenusa, se obtiene con la función *pie_de_altura(triángulo)*. El resto es utilizar la función *distancia(punto,punto)* para obtener los segmentos pedidos. Realmente ambas formas de resolución son similares y no tiene mucha dificultad de cara a ser mostradas en el aula o como actividad.

Del problema se puede extraer como conclusión que en un triángulo rectángulo, la altura que trazamos sobre la hipotenusa, nos genera dos triángulos semejantes y de esta semejanza se deducen dos teoremas:

Teorema del cateto dice que el cuadrado de un cateto es igual a la hipotenusa por la proyección de este cateto sobre ella.

$$b^2 = a \cdot n$$

y de la misma forma para el otro cateto

$$c^2 = a \cdot m$$

Esto se ha deducido de las semejanzas

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{c}$$

así mismo

$$\frac{b}{a} = \frac{n}{b}$$

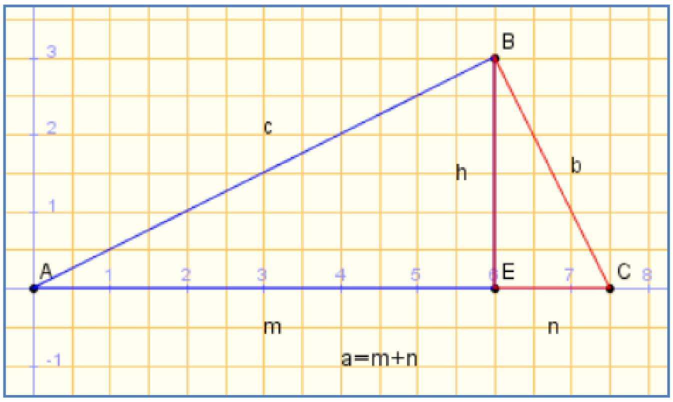


Figura 30.

Teorema de la altura dice que el cuadrado de la altura equivale al producto de las dos proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

$$h^2 = m \cdot n$$

Que igualmente se deduce de $\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$

En la figura 30 podemos comprobar visualmente este teorema.

$$h = 3, \quad m = 6 \quad y \quad n = 1.5 \ \rightarrow \ 3^2 = 6 \cdot 1.5$$

Hemos visto que la razón de semejanza relaciona las dimensiones y la forma de dos figuras geométricas pero esta semejanza también es aplicable a otras propiedades como la superficie y el volumen.

Tomemos por ejemplo un cuadrado de lado unidad y construyamos otro semejante siendo la *razón de semejanza =3*.

La longitud de cada lado será ahora 3 es decir se ha multiplicado por 3. ¿qué ocurre con su superficie? La superficie de este cuadrado es $3 \cdot 3$ es decir la superficie inicial se ha multiplicado por la razón al cuadrado. ¿Y si construyésemos un cubo, cuál sería su volumen? Pues el volumen será $3 \cdot 3 \cdot 3$ es decir, que el volumen inicial se ha multiplicado por la razón al cubo.

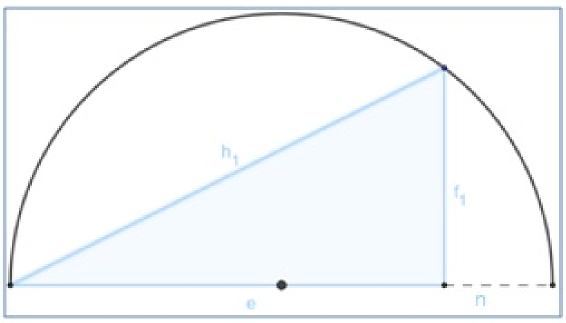
Similar razonamiento se puede aplicar para esferas con *razón de semejanza = 3*:

- La superficie de la esfera $S = 4\pi r^2$ quedaría multiplicada por 3^2
- El volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ quedaría multiplicado por 3^3.

Seguidamente se proponen algunos ejercicios de semejanzas y teoremas.

Ejercicio 1

Hallar la longitud del radio de esta semicircunferencia sabiendo que $h_1 = 3\sqrt{5}$ y $f_1 = 3$.



Para resolver el ejercicio, debemos determinar el diámetro de la semicircunferencia que será la suma de $e + n$

e : se puede hallar utilizando el T. de Pitágoras:

$$e^2 = h_1^{\ 2} - f_1^{\ 2} \rightarrow \ e^2 = 45 - 9 \ \rightarrow \ e = 6$$

Ahora construimos un triángulo rectángulo inscrito en la circunferencia tomando como hipotenusa su diámetro (fig.31).

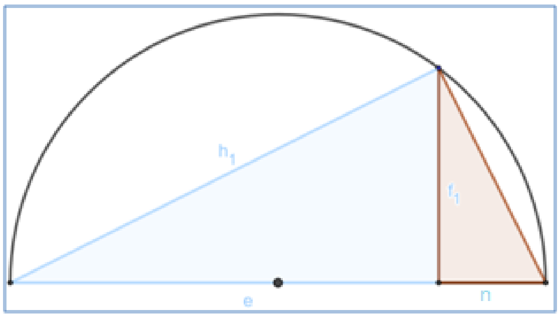


Figura 31.

Aplicamos el Teorema de la altura: $f_1^{\ 2} = \mathrm{e} \cdot n \ \rightarrow \ n = 1.5$

El diámetro es : $e + n = 7.5$ y por tanto el radio pedido es 3.75 cm

Ejercicio 2

En el siguiente ejercicio (ver fig. 32), se propone obtener polígonos semejantes a los modelos destacados y hallar la razón de semejanza y las superficies. Verificar si se cumple dicha proporcionalidad tanto para longitudes como superficies.

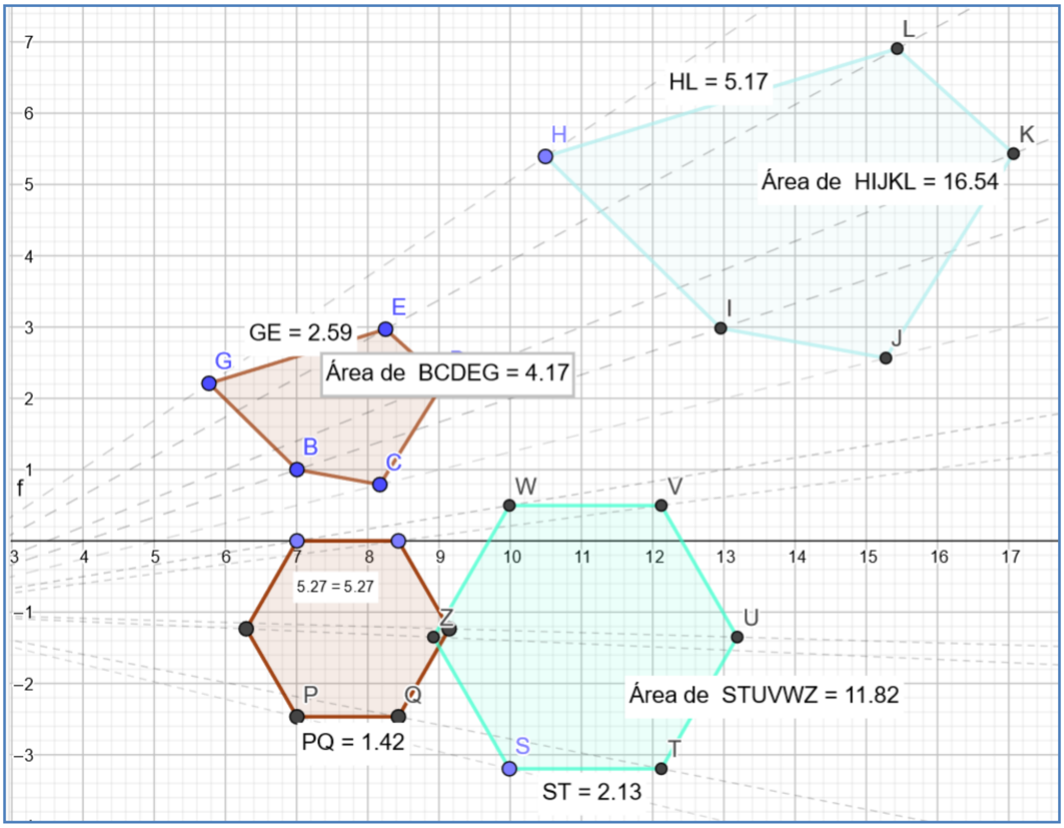


Figura 32.

Las razones son:

$$r_{pentágono} = \frac{5.17}{2.59}$$

$$r_{hexágono} = \frac{2.13}{1.42}$$

Y para las superficies la proporción es: r^2 (se pedirá a los alumnos que lo verifiquen)

Otras actividades propuestas con CalcMe.

Ejercicio 3

Determinar la razón de semejanza de los pentágonos (fig.33) respecto al de color negro.

P = poligono(punto(0,0),punto(3,0),punto(3.9,2.85),punto(1.5,4.6),punto(−0.9,2.85))

dibujar(P,{color = verde}) = tablero1 Calc

Q = polígono_regular(5,segmento(punto(0,0),punto(4,0))) Definir

dibujar(Q,{color = azul}) = tablero1 Calc

R = polígono_regular(5,segmento(punto(0,0),punto(2,0))) Definir

dibujar(R) = tablero1 Calc

S = polígono_regular(5,segmento(punto(0,0),punto(1,0))) Definir

dibujar(S,{color = rojo}) = tablero1 Calc

$$r = \frac{\text{longitud(segmento(punto(0,0),punto(4,0)))}}{\text{longitud(segmento(punto(0,0),punto(2,0)))}}$$

area(S) = 1.7205 Calc

area(Q) = 27.528 Calc

area(R) = 6.8819 Calc

$$\frac{\text{area(Q)}}{\text{area(R)}} = r^2 \quad = \quad \text{cierto} \quad \text{Verificar}$$

$$\frac{\text{area(S)}}{\text{area(R)}} = 0.25 \quad \text{Calc}$$

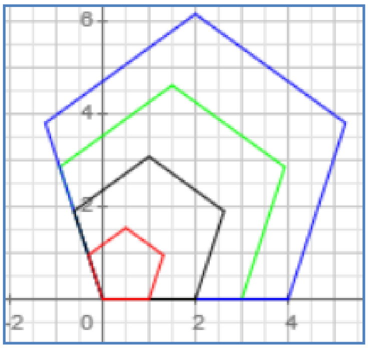


Figura 33.

En CalcMe, se pueden definir polígonos regulares según el número de lados que queramos, $poligono\_regular\left(5, segmento\left(punto(0,0), punto(2,0)\right)\right)$, como parámetros, utilizamos el número de lados y la función segmento con los dos puntos que representa la base del polígono, pero también se puede definir el centro del polígono y el radio. Otra forma alternativa de definir polígonos es indicando los puntos que determinan los vértices, en este caso la función es:

$poligono\left(punto(0,0), punto(3,0), punto(3.9,2.8), punto(1.5,4.6), punto(-0.9,2.8)\right)$

Para hallar la razón de semejanza ***r*** usamos la función *longitud (segmento(punto,punto))*

$$r = \frac{longitud\ \left(segmento\ \left(punto\ (0,0), punto\ (4,0)\right)\right)}{longitud\ \left(segmento\ \left(punto\ (0,0), punto\ (2,0)\right)\right)} = 2$$

Y para verificar que se cumple en el caso de las superficies

$\frac{area\ (Q)}{area\ (R)} = r^2$ muestra el mensaje → ***cierto***

7.2.2. Trigonometría

Es uno de los contenidos que se comienza a tratar en 4º E.S.O en la opción de "Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas" pero no en la opción de enseñanzas aplicadas. Me ha parecido de interés tratar de ver lo que las herramientas tecnológicas pueden aportar para mejorar el aprendizaje de la trigonometría. Creo que es uno de los aspectos de las matemáticas donde inicialmente más se utiliza la representación gráfica de modo que sobre el papel tanto Geogebra como CalcMe deberían ser de utilidad como un complemento más de ayuda.

7.2.3. Razones trigonométricas de ángulos

En un triángulo rectángulo, podemos establecer relaciones entre sus lados que sólo dependen de los ángulos del triángulo. Según los lados elegidos para estas relaciones, los nombres que utilizamos son:

Seno del ángulo α → $\boldsymbol{sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto\ al\ ángulo\ \alpha}{hipotenusa}}$

Coseno del ángulo α → $\boldsymbol{cos\ \alpha = \frac{cateto\ contiguo\ al\ ángulo\ \alpha}{hipotenusa}}$

Tangente del ángulo α → $\boldsymbol{tg\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto\ al\ ángulo\ \alpha}{cateto\ contiguo\ al\ ángulo\ \alpha}}$

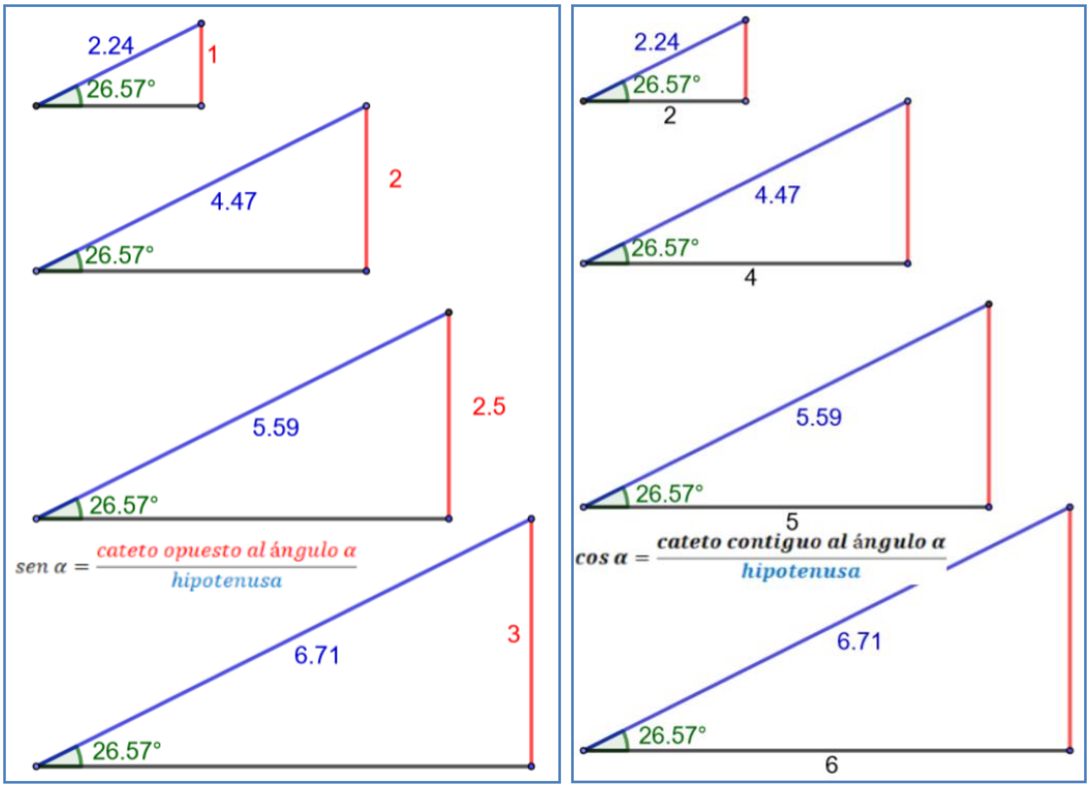


Figura 34.

$$\boldsymbol{sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto\ al\ ángulo\ \alpha}{hipotenusa}} \qquad \boldsymbol{cos\ \alpha = \frac{cateto\ contiguo\ al\ ángulo\ \alpha}{hipotenusa}}$$

Como vemos en las figura 34, las razones trigonométricas indicadas, no dependen del triángulo que hayamos elegido, sólo dependen del valor del ángulo.

Si además combinamos estas razones con el teorema de Pitágoras llegamos a la conclusión de que todas ellas están relacionadas y además no aparece ninguna dependencia con la longitud de los lados del triángulo (fig. 35).

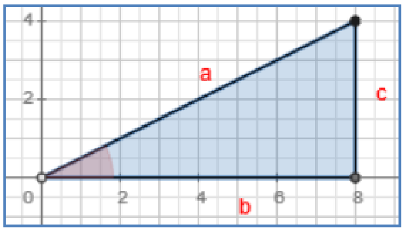


Figura 35.

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

$$\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2 + b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

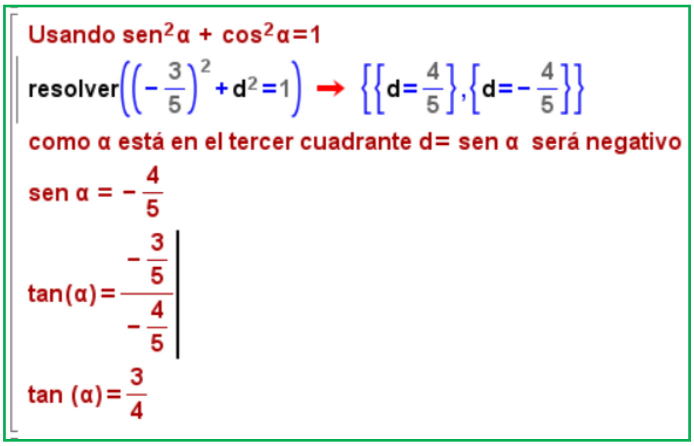
Por tanto, $\boldsymbol{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$

Igualmente podemos expresar la $tg\ \alpha = \frac{c}{b} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} \rightarrow \boldsymbol{tg\ \alpha} = \frac{\mathbf{sen}\ \boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\alpha}}$

De esta forma, hemos relacionado las razones trigonométricas mediante la tangente.

Ejemplo

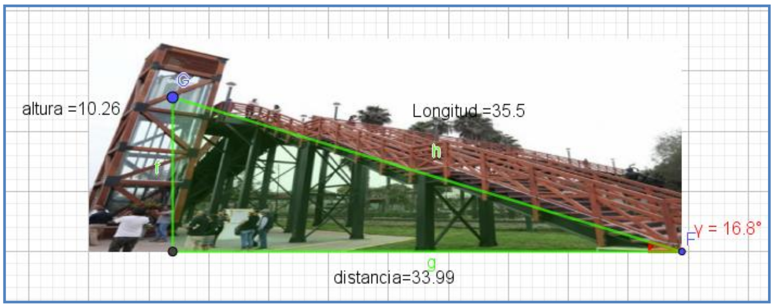
Utiliza Wiris para hallar las razones trigonométricas sabiendo que $\cos(\alpha) = -\frac{3}{5}$ y α está en el tercer cuadrante.



Ejemplo 1

Se propone el siguiente ejemplo para utilizar Geogebra.

Para llegar a un mirador situado a 10,26 m de altura (fig.36), se puede utilizar un ascensor que sube verticalmente desde la base o una rampa para subir caminando. El ángulo de inclinación de la rampa es de 16,8º. ¿A qué distancia desde el ascensor se inicia la rampa? ¿Qué longitud tiene la rampa? ¿Cuál será el desnivel en %? (el desnivel es la relación entre la componente vertical y horizontal del triángulo rectángulo).



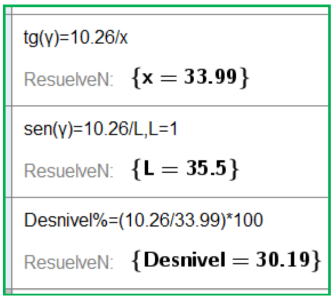
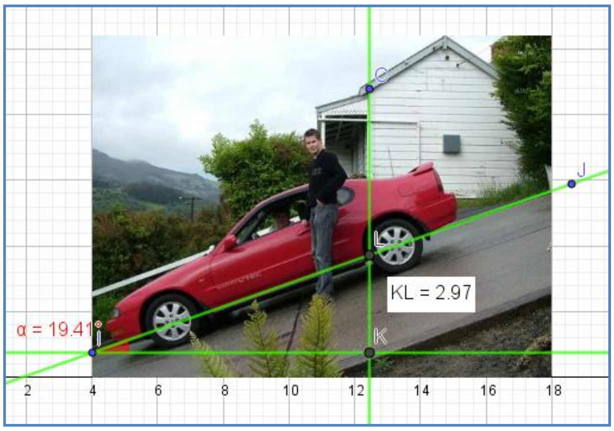


Figura 36.

Como curiosidad, en las carreteras aparece en ocasiones la indicación de la pendiente en %. En casos muy excepcionales (carreras ciclistas) aparecen rampas con pendientes que llegan al 20%, que corresponde a un ángulo de 11,3º. (Tengamos en cuenta que una pendiente del 100% correspondería a un ángulo de 45º).
No debemos confundir que esta medida de pendiente es la propia tangente del ángulo. Podríamos pensar que es la distancia que se asciende entre la distancia recorrida, pero esto en realidad sería hallar el seno del ángulo.

Ejemplo 2

Dados los datos de la figura 37, hallar la longitud de los lados del triángulo y las razones trigonométricas utilizando Geogebra y reconocer la pendiente en %.



$\tan(19.41°) = 0.3524$

$\tan(19.41°) = \dfrac{2.97}{x} \longrightarrow x = 8.429$

$\operatorname{sen}(19.41) = \dfrac{2.97}{h} \longrightarrow h = 8.937$

$\cos(19.41) = 0.9432$

$\operatorname{sen}(19.41) = 0.3323$

$\operatorname{sen}^2(19.41) + \cos^2(19.41) = 1 \quad = \quad \text{cierto}$

$0.9432^2 + 0.3323^2 = 1.$

Figura 37.

Conociendo el ángulo α y el cateto opuesto, podemos utilizar la tangente para hallar la componente horizontal *x*. Si utilizamos el seno, podremos obtener la hipotenusa *h*.

Al hablar de las razones trigonométricas hemos utilizado triángulos rectángulos que tienen dos ángulos agudos y uno recto, ahora se plantea la siguiente cuestión. ¿Se pueden usar las razones trigonométricas para cualquier ángulo? Efectivamente se puede y para verlo, vamos a utilizar una circunferencia de radio unidad (circunferencia goniométrica) donde dibujaremos nuestros ángulos y triángulos rectángulos.
Las reglas son:

- Un cateto del triángulo está sobre el eje X
- La hipotenusa irá desde el origen de coordenadas a un punto de la circunferencia, por tanto su valor es la unidad.
- El ángulo se medirá desde el eje X en sentido anti-horario.

Utilizando Wiris, creamos esta secuencia para mostrar los valores del seno y coseno en función del ángulo que vamos seleccionando.

En este caso, me ha parecido más acertado utilizar Wiris ya que al crear la secuencia de comandos, se va viendo el proceso con más claridad. Además se puede ir cambiando el ángulo "c" fácilmente para ver como se modifica el seno y coseno que quedan representados directamente sobre los ejes de coordinadas. También me ha parecido muy útil a la hora de entender las relaciones de los ángulos en cualquier cuadrante con respecto al primer cuadrante.

```
tablero(punto(0,0),2.1,2.1) → tablero1
defino el tamaño del area de gráfica
r:=x²+y²=1 → x²+y²=1
dibujar(r,{color=azul}) → tablero1
Dibujamos la circunferencia de radio 1
c:=40° → 40 °
Angulo a estudiar
a:=cos(c) → cos(c)
b:=sen(c) → sen(c)
Cálculo de seno y coseno del ángulo
s:=segmento(punto(0,0),punto(a,b))
  → segmento(punto(0,0),punto(a,b))
dibujar(s) → tablero1
Q:=intersecar(r,s) → r∩s
dibujar(Q) → tablero1
Corte de la hipotenusa con la circunferencia
dibujar(segmento(punto(a,b),punto(0,b))) → tablero1
dibujar(segmento(punto(0,0),punto(0,b)),{color=azul}) → tablero1
dibujar(segmento(punto(a,b),punto(a,0))) → tablero1
dibujar(segmento(punto(0,0),punto(a,0)),{color=rojo}) → tablero1
valores del seno y coseno sobre los ejes X,Y
escribir(b,punto_medio(punto(0,0),punto(0,b))) → tablero1
escribir(a,punto_medio(punto(0,0),punto(a,−0.2))) → tablero1
dibujar(arco(punto(0,0),0.2,0,c)) → tablero1
escribir(c,punto(0.1,0.01)) → tablero1
```

El resultado de la secuencia es un segmento de magnitud unidad con un extremo en el origen de coordenadas que al girar sobre dicho punto forma un ángulo α con el eje X. La proyección de este segmento sobre los ejes X e Y, proporciona directamente los valores del coseno y el seno del ángulo α respectivamente. La figura 38 presenta la evolución de seno y coseno para ángulos comprendidos entre 0º y 360º.

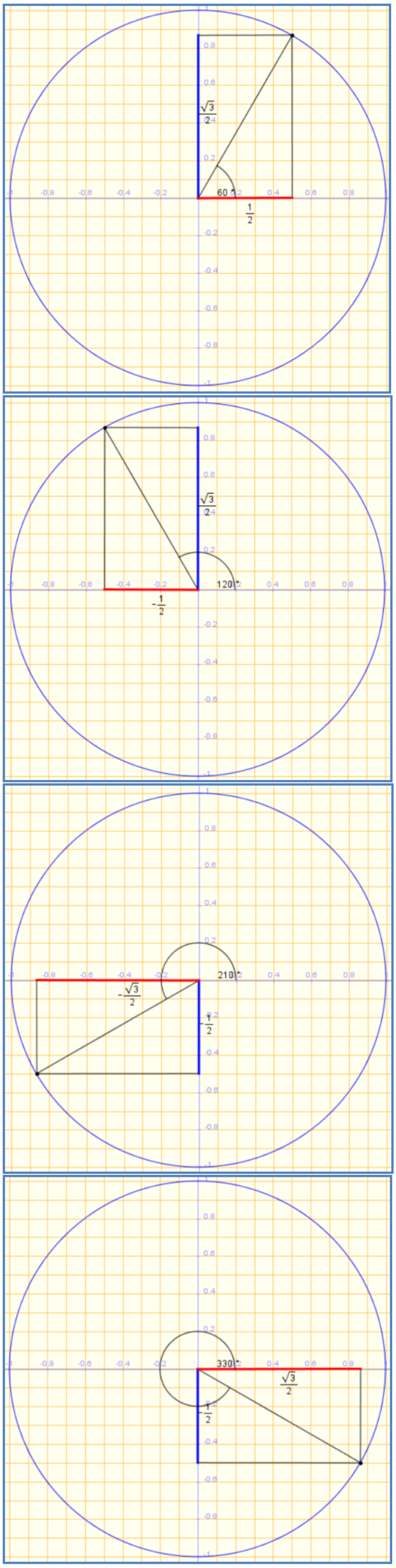


Figura 38.

Para ángulos comprendidos entre 0 y 90º (primer cuadrante), vemos que la proyección de la hipotenusa sobre el eje X ($cos\ \alpha$) y sobre el eje Y ($sen\ \alpha$) toman valores $\geq \mathbf{0}$ y $\leq \mathbf{1}$

Para ángulos comprendidos entre 90 y 180º (segundo cuadrante), vemos que la proyección de la hipotenusa sobre el eje X ($cos\ \alpha$) toma valores entre $\mathbf{0}$ y $\mathbf{-1}$ mientras que la proyección sobre el eje Y ($sen\ \alpha$) toman valores entre $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$

Para ángulos comprendidos entre 180 y 270º (tercer cuadrante), vemos que tanto la proyección de la hipotenusa sobre el eje X ($cos\ \alpha$) como sobre el eje Y ($sen\ \alpha$) toman valores entre $\mathbf{0}$ y $\mathbf{-1}$

Para ángulos comprendidos entre 270 y 360º (cuarto cuadrante), vemos que la proyección de la hipotenusa sobre el eje X ($cos\ \alpha$) toma valores entre $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ mientras que la proyección sobre el eje Y ($sen\ \alpha$) toman valores entre $\mathbf{0}$ y $\mathbf{-1}$

Las gráficas anteriores, no solo nos dan información de los signos que van a tener las razones trigonométricas, también nos van a ayudar a entender que cualquier ángulo se puede estudiar como si en realidad estuviera en el primer cuadrante, lo cual facilita los cálculos.

Relación de un ángulo β cualquiera con otro α del **primer cuadrante**.

- Si el ángulo β está en el **segundo cuadrante,** el seno de 180 - β será su equivalente en el primer cuadrante. (ver fig.39).

  Ejemplo 3:

  $$sen\ 120º = sen\ 60º \text{ ya que } 180º – 120º = 60º$$

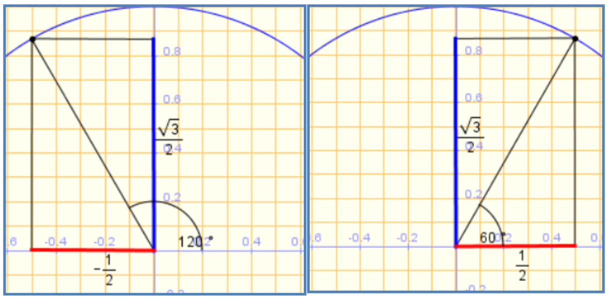
  $$sen\ 135º = sen\ 45º \text{ ya que } 180º – 135º = 45º$$

  Mientras que para el coseno, el valor trasladado al primer cuadrante tendrá signo contrario.

  Ejemplo 4:

  $$cos\ 120 = -\ cos\ 60$$

  $$cos\ 135º = -\ cos 45º$$



Seno: misma magnitud, mismo signo

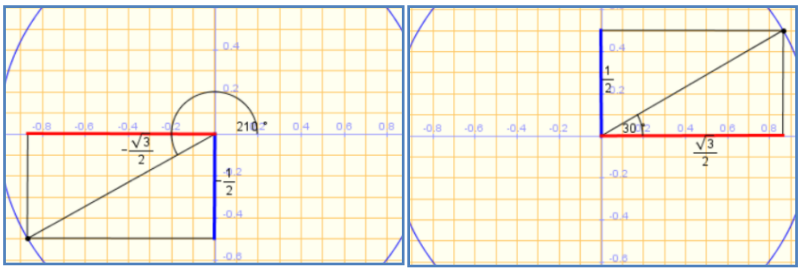
Coseno: misma magnitud, signo opuesto

Figura 39.

- Ángulos β en el **tercer cuadrante**, el ángulo correspondiente del primer cuadrante, se obtiene como $\beta - 180$ y tanto el seno como el coseno tendrían el signo cambiado.(fig.40)

  Ejemplo 5:

  $$sen\ 210 = -\ sen\ 30 \quad \text{y} \quad cos\ 210 = -\ cos\ 30$$



Seno: igual magnitud, signo opuesto

Coseno: misma magnitud, signo opuesto

Figura 40.

- Para ángulos β en el **cuarto cuadrante**, el ángulo en el primer cuadrante sería $360 - \beta$ y en este caso sólo el seno cambiaría de signo (fig.41).

  Ejemplo 6:

  $sen\ 330 = -\ sen\ 30$ y $cos\ 330 = cos\ 30$

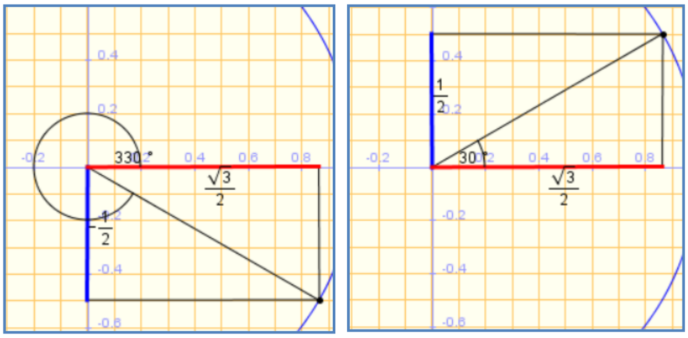


Figura 41.

Seno: misma magnitud, signo opuesto
Coseno: misma magnitud, mismo signo

Ejemplo 7

Expresar la razón trigonométrica referida al primer cuadrante para cada uno de los siguientes ángulos. Utiliza el icono para verificar.

$$sen(150) = sen(180 - 150) = sen(30) \rightarrow cierto$$
$$cos(150) = -cos(180 - 150) = -cos(30) \rightarrow cierto$$
$$tan(150) = -tan(180 - 150) = -tan(30) \rightarrow cierto$$
$$sen(240) = -sen(240 - 180) = -sen(60) \rightarrow cierto$$
$$cos(240) = -cos(240 - 180) = -cos(60) \rightarrow cierto$$
$$tan(240) = tan(240 - 180) = tan(60) \rightarrow cierto$$
$$sen(300) = -sen(360 - 300) = -sen(60) \rightarrow cierto$$
$$cos(300) = cos(360 - 300) = cos(60) \rightarrow cierto$$
$$tan(300) = -tan(360 - 300) = -tan(60) \rightarrow cierto$$

Ejemplo 8

Se quiere pintar una de las paredes exteriores del colegio de la que desconocemos la altura. Como no se puede medir directamente por no disponer de una escalera suficientemente larga, pedimos a los alumnos de 4º E.S.O que nos den una aproximación. Se han construido un teodolito para medir ángulos. Las medidas que han realizado con este instrumento desde dos puntos separados 15 m son 30º y 50º. Determinar gráficamente con Geogebra la altura de la pared y comprobarlo mediante las razones trigonométricas.

Utilizamos el área gráfica de Geogebra para hacer las rectas con los ángulos que indica el problema y usamos para las longitudes una escala de 1:200 de modo que cada cm en plano representan 2 m en la realidad. Para hacer las rectas usamos , para los segmentos , las perpendiculares , la medida de ángulos y de longitudes . En la figura 42, el dibujo resultante con las medidas, muestra la altura de 8,41 cm que corresponden a 16,82 m de altura real.

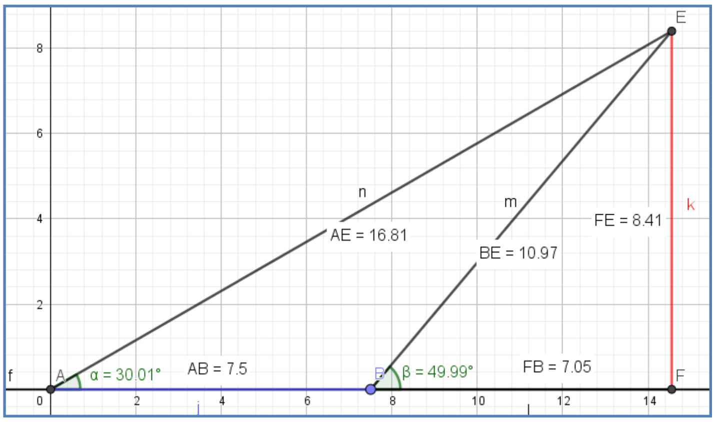


Figura 42.

Ahora vamos a utilizar Wiris para hacer los cálculos

Establecemos el sistema de ecuaciones

$$\text{resolver}\begin{cases}(15+x)\cdot\tan(30°)=y\\ x\cdot\tan(50°)=y\end{cases} \rightarrow \{\{x=14.095, y=16.798\}\}$$

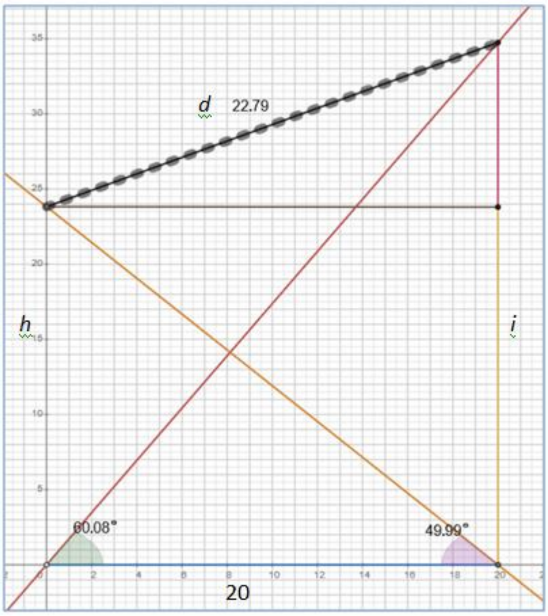
la primera ecuación corresponde al triángulo mayor y
la segunda ecuación al otro triángulo.
Utilizamos las tangentes que relacionan a los catetos.

Una vez calculada la altura y el cateto correspondiente al ángulo β, podemos hallar el resto de valores utilizando el *sen* β y el *sen* α o el teorema de Pitágoras.

Ejemplo 9

En un edificio se construyen dos paredes paralelas separadas 20 m. Desde la parte inferior de cada pared medimos el ángulo que forma el suelo con el extremo superior de la pared contraria y obtenemos 50º y 60º respectivamente. Hallar la longitud del tejado.

Utilizamos CalcMe en este caso para hacer la composición gráfica del problema y también el cálculo (ver figura 43).



$\tan(50°) = \frac{h}{20} \longrightarrow h = 23.835$ Solucionar

$\tan(60°) = \frac{i}{20} \longrightarrow i = 20 \cdot \sqrt{3}$ Solucionar

$20(\tan(60°) - \tan(50°)) \approx 10.806$ Aproximar

$d = \sqrt{20^2 + 10.806^2} \longrightarrow d = 22.733$ Solucionar

Figura 43.

8. Reflexión final

En este documento se ha tratado de mostrar la utilidad de CalcMe y Geogebra como herramientas de apoyo en el aula, no solo durante la exposición y desarrollo teórico de los temas sino también en la fase de resolución de problemas, utilizando tanto el cálculo simbólico como las funciones gráficas integradas que ayudan a entenderlos.

Creo que aplicar la tecnología al mundo matemático puede ayudar a hacer la asignatura más atractiva a los alumnos, favorecer el trabajo autónomo fuera de clase y al mismo tiempo mejorar su motivación. Parece lógico pensar que con ello se consiga hacer que las clases sean más dinámicas y participativas.

Para terminar con la valoración general de las herramientas, me gustaría señalar algunas dificultades encontradas a lo largo de la preparación del trabajo que están relacionadas con pequeñas deficiencias de diseño. Son detalles mejorables que obviamente quedan fuera de nuestro alcance como usuarios y que se detallan a continuación.

- En ocasiones la aplicación online, monopoliza demasiados recursos del ordenador teniendo que cerrarla y volverla a iniciar lo cual puede hacer que pierdas los trabajos si no estaban guardados.
- Un inconveniente de CalcMe es que no se pueden importar imágenes para incorporarlos en la gráfica. Es muy útil si tienes que trabajar sobre un plano.

- En Geogebra no se pueden copiar las líneas de comandos como texto, es necesario usar la captura de imagen por lo que no se puede llevar con facilidad a un documento.
- CalcMe no tiene la opción de protocolo de construcción de Geogebra que permite seguir los procesos de creación de las gráficas, es útil de cara a mostrar los pasos de construcción a los alumnos.
- Geogebra no permite crear dentro del mismo proyecto varios tableros como CalcMe, es útil poder separar gráficas para no complicar el análisis de las mismas.

9. Bibliografía

Adones, A.; Gallego, P.; Lineros, J.; Núñez, R.; Rodríguez, T. (2012). Geogebra en el aula. Disponible en : https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=YmVycmlnYXN0ZWl6LmNvbXxhcHJlbmRpZW5kb2Nvbmdlb2dlYnJhfGd4OjdiYmI2OGE4NzhlOWRiNzg

Alcaide, F.; Hernández, J.; Moreno, M.; Pérez, A.; Serrano, E. (2015). Matemáticas 3º ESO. Orientadas enseñanzas académicas. Ed. SM.

Colera, J.; Gaztelu, I. (2016). Matemáticas 2º ESO, aprender es crecer. Ed. Anaya digital.

Documentación de CalcMe, (2019). Disponible en : https://docs.wiris.com/es/calc/start

Educando con Wiris, (2013). Ediciones GEEP . Disponible en : http://eues.ugr.es/wiris/

Hohenwarter, M. y Hohenwarter, J. (2009). Documento de ayuda de GEOGEBRA. Disponible en : http://www.geogebra.org/help/docues.pdf

Manual de Geogebra, (2019). Disponible en : https://wiki.Geogebra.org/es/Manual

Manual Wiris 2.2, (2007). Disponible en: http://www.wiris.com/en/downloads/files/1625/manual_es.pdf

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre 2015, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. (2015). Disponible en : https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf

Rodríguez, M.; Rúa, C.; Saavedra, L.; Vila, A. (2016). Matemáticas 4º ESO. Proyecto los caminos del saber. Ed. Santillana.