



Universidad
de Alcalá

COMISIÓN DE ESTUDIOS OFICIALES
DE POSGRADO Y DOCTORADO

ACTA DE EVALUACIÓN DE LA TESIS DOCTORAL

Año académico 2019/20

DOCTORANDO: **BÓGALO ROMÁN, JUAN VICENTE**

D.N.I./PASAPORTE: ****5045V

PROGRAMA DE DOCTORADO: **D432-ECONOMÍA Y GESTIÓN EMPRESARIAL**

DPTO. COORDINADOR DEL PROGRAMA: **ECONOMÍA Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS**

TITULACIÓN DE DOCTOR EN: **DOCTOR/A POR LA UNIVERSIDAD DE ALCALÁ**

En el día de hoy 11/10/19, reunido el tribunal de evaluación nombrado por la Comisión de Estudios Oficiales de Posgrado y Doctorado de la Universidad y constituido por los miembros que suscriben la presente Acta, el aspirante defendió su Tesis Doctoral, elaborada bajo la dirección de **EVA SENRA DÍAZ // MARIA DEL PILAR PONCELA BLANCO**.

Sobre el siguiente tema: *AVANCES EN LA AUTOMATIZACIÓN DE SSA Y SU APLICACIÓN AL ANÁLISIS ECONÓMICO*

Finalizada la defensa y discusión de la tesis, el tribunal acordó otorgar la CALIFICACIÓN GLOBAL¹ de (**no apto, aprobado, notable y sobresaliente**): **SOBRESALIENTE**

Alcalá de Henares, 11 de OCTUBRE de 2019

EL PRESIDENTE

Fdo.: JESUS MARIA ARTECHE GONZALEZ
ORTEGA

EL SECRETARIO

Fdo.: TOMÁS DEL BARRIO CASTRO

EL VOCAL

Fdo.: ESTHER RUIZ

Con fecha 28 de octubre de 2019 la Comisión Delegada de la Comisión de Estudios Oficiales de Posgrado, a la vista de los votos emitidos de manera anónima por el tribunal que ha juzgado la tesis, resuelve:

- Conceder la Mención de "Cum Laude"
 No conceder la Mención de "Cum Laude"

FIRMA DEL ALUMNO,

Fdo.: BÓGALO ROMÁN, JUAN VICENTE

La Secretaria de la Comisión Delegada

¹ La calificación podrá ser "no apto" "aprobado" "notable" y "sobresaliente". El tribunal podrá otorgar la mención de "cum laude" si la calificación global es de sobresaliente y se emite en tal sentido el voto secreto positivo por unanimidad.

INCIDENCIAS / OBSERVACIONES:



Universidad
de Alcalá

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN
Y TRANSFERENCIA

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ. PATRIMONIO DE LA HUMANIDAD

En aplicación del art. 14.7 del RD. 99/2011 y el art. 14 del Reglamento de Elaboración, Autorización y Defensa de la Tesis Doctoral, la Comisión Delegada de la Comisión de Estudios Oficiales de Posgrado y Doctorado, en sesión pública de fecha 28 de octubre, procedió al escrutinio de los votos emitidos por los miembros del tribunal de la tesis defendida por **BÓGALO ROMÁN, JUAN VICENTE**, el día 11 de octubre de 2019, titulada, **AVANCES EN LA AUTOMATIZACIÓN DE SSA Y SU APLICACIÓN AL ANÁLISIS ECONÓMICO** para determinar, si a la misma, se le concede la mención "cum laude", arrojando como resultado el voto favorable de todos los miembros del tribunal.

Por lo tanto, la Comisión de Estudios Oficiales de Posgrado y Doctorado **resuelve otorgar** a dicha tesis la

MENCIÓN "CUM LAUDE"

EL VICERRECTOR DE INVESTIGACIÓN Y TRANSFERENCIA
F. Javier de la Mata de la Mata
Documento fechado y firmado digitalmente

Copia por e-mail a:

Doctorando: BÓGALO ROMÁN, JUAN VICENTE

Secretario del Tribunal: TOMÁS DEL BARRIO CASTRO

Directores de Tesis: EVA SENRA DÍAZ // MARIA DEL PILAR PONCELA BLANCO

Código Seguro De Verificación:	aw9WjaCy5zRyKf/Ip6aPgA==	Estado	Fecha y hora
Firmado Por	Francisco Javier De La Mata De La Mata - Vicerrector de Investigación Y Transferencia	Firmado	30/10/2019 10:16:41
Observaciones		Página	1/29
Url De Verificación	https://vfirma.uah.es/vfirma/code/aw9WjaCy5zRyKf/Ip6aPgA==		



Código Seguro De Verificación:	aw9WjaCy5zRyKE/Ip6aPgA==	Estado	Fecha y hora	
Firmado Por	Francisco Javier De La Mata De La Mata - Vicerrector de Investigación Y Transferencia	Firmado	30/10/2019 10:16:41	
Observaciones		Página	2/29	
Url De Verificación	https://vfirma.uah.es/vfirma/code/aw9WjaCy5zRyKE/Ip6aPgA==			



Universidad
de Alcalá

ESCUELA DE DOCTORADO
Servicio de Estudios Oficiales de
Posgrado

DILIGENCIA DE DEPÓSITO DE TESIS.

Comprobado que el expediente académico de D./D^a _____
reúne los requisitos exigidos para la presentación de la Tesis, de acuerdo a la normativa vigente, y habiendo
presentado la misma en formato: soporte electrónico impreso en papel, para el depósito de la
misma, en el Servicio de Estudios Oficiales de Posgrado, con el nº de páginas: _____ se procede, con
fecha de hoy a registrar el depósito de la tesis.

Alcalá de Henares a _____ de _____ de 20 _____



Fdo. El Funcionario



Universidad de Alcalá

Programa de Doctorado en Economía y Gestión Empresarial

**AVANCES EN LA AUTOMATIZACIÓN DE
“SINGULAR SPECTRUM ANALYSIS” Y SU
APLICACIÓN AL ANÁLISIS ECONÓMICO**

Tesis Doctoral presentada por

JUAN VICENTE BÓGALO ROMÁN

Directoras: Dra. PILAR PONCELA BLANCO - Dra. EVA SENRA DÍAZ

Alcalá de Henares, 2019



Universidad
de Alcalá

Olga CANTÓ SÁNCHEZ, Coordinadora de la Comisión Académica del Programa de Doctorado en Economía y Gestión Empresarial

INFORMA que la Tesis Doctoral titulada (Avances en la automatización de “Singular Spectrum Analysis” y su aplicación al análisis económico), presentada por D. Juan Vicente Bógalo Román cumple los requisitos científicos de originalidad y rigor metodológicos para ser defendida ante un tribunal. Esta Comisión ha tenido también en cuenta la evaluación positiva anual del doctorando, tras los informes preceptivos y la presentación de los resultados en el Seminario que tuvo lugar en la Facultad de Económicas el 26 de junio de 2019, habiendo obtenido las correspondientes competencias establecidas en el Programa.

Para que así conste y surta los efectos oportunos, se firma el presente informe en Alcalá de Henares a veintiséis de junio de dos mil diecinueve.

Fdo.: Olga CANTÓ SÁNCHEZ



Universidad
de Alcalá

Pilar PONCELA BLANCO, Profesora Titular del Departamento de Economía de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Autónoma de Madrid, tiene a bien

CERTIFICAR

Que: la tesis doctoral con el título “Avances en la automatización de “Singular Spectrum Analysis” y su aplicación al análisis económico”, realizada por D. Juan Vicente Bógalo Román ha sido dirigida por mí y doy mi conformidad a la presentación de la misma para depósito y para proceder con las gestiones necesarias para su lectura y defensa, de acuerdo a la normativa vigente.

Para que así conste y surta los efectos oportunos, se firma la presente en Alcalá de Henares a uno de febrero de 2019.

Fdo.: Pilar PONCELA BLANCO



Universidad
de Alcalá

Eva SENRA DÍAZ, Profesora Titular del Departamento de Economía de la Facultad de Ciencias Económicas, Empresariales y Turismo de la Universidad de Alcalá, tiene a bien

CERTIFICAR

Que: la tesis doctoral con el título “Avances en la automatización de “Singular Spectrum Analysis” y su aplicación al análisis económico”, realizada por D. Juan Vicente Bógalo Román ha sido dirigida por mí y doy mi conformidad a la presentación de la misma para depósito y para proceder con las gestiones necesarias para su lectura y defensa, de acuerdo a la normativa vigente.

Para que así conste y surta los efectos oportunos, se firma la presente en Alcalá de Henares a uno de febrero de 2019.

Fdo.: Eva SENRA DÍAZ

A Feli, mi madre, in memóriam.

A mi querida Loli, por su apoyo y comprensión.

*A mis estimadas directoras, Eva y Pilar, Pilar y Eva,
por su interés y rigor académico.*

*Dentro de nosotros existe algo que no tiene nombre
y eso es lo que realmente somos.*

José Saramago
Ensayo sobre la ceguera

Contenido

0	Introducción	1
0.1	Antecedentes y motivación	1
0.2	Hipótesis y objetivos	7
0.3	Estructura de la investigación	8
	Referencias	13
1	Circulant SSA	19
1.1	Introducción	19
1.2	Metodología de SSA	23
1.2.1	Descripción del algoritmo de SSA	23
1.2.2	Algunas variantes del algoritmo	27
1.2.3	Parámetros óptimos en SSA	29
1.2.4	Tabla-resumen de la literatura revisada en SSA	33
1.3	Algoritmo de Circulant SSA	36
1.3.1	Propiedades asintóticas de la matriz de covarianzas retardadas	37
1.3.2	Descripción del algoritmo Circulant SSA	41
1.3.3	Equivalencia asintótica de las tres versiones de SSA	45
1.3.4	Series no estacionarias	49
1.4	Separabilidad en Circulant SSA	56
1.5	Aplicación real	62
1.6	Conclusiones	71
	Referencias	73
2	Propiedades estadísticas de SSA	77
2.1	Introducción	77
2.2	Propiedades estadísticas en muestras finitas	81

2.2.1	Modelo lineal	81
2.2.2	Modelo no lineal	92
2.3	Estimaciones fiables con CSSA en tiempo real	99
2.3.1	Revisiones: concepto y método de análisis	100
2.3.2	Simulaciones y resultados	103
2.4	Aplicación real	109
2.5	Conclusiones	115
	Referencias	117
3	Multivariate Circulant SSA	121
3.1	Introducción	121
3.2	Metodología de SSA multivariante	127
3.2.1	Descripción del algoritmo	127
3.2.2	Algunas variantes del algoritmo	131
3.2.3	Análisis del algoritmo	133
3.2.4	Tabla-resumen de la literatura revisada en M-SSA	137
3.3	Algoritmo de Multivariate Circulant SSA	140
3.3.1	Nueva matriz de trayectorias multivariante	140
3.3.2	Propiedades asintóticas de la matriz de covarianzas cruzadas retardadas	142
3.3.3	Diagonalización de las matrices circulantes por bloques	153
3.3.4	Descripción del algoritmo Multivariate Circulant SSA	156
3.3.5	Unicidad entre CSSA y M-CSSA	161
3.3.6	Equivalencia asintótica de las tres versiones de Multivariate SSA	163
3.3.7	Series no estacionarias	168
3.4	Índices compuestos en el dominio de la frecuencia	169
3.4.1	Matrices de covarianzas de las componentes oscilatorias	169
3.4.2	Modelo factorial	175
3.4.3	Índice compuesto: estimación de los factores comunes	179
3.5	Aplicación real	182
3.5.1	Sector económico	182
3.5.2	Zona geográfica	191
3.6	Conclusiones	203
	Referencias	205

4 Conclusiones	209
4.1 Conclusiones	209
4.2 Líneas de futuro	211
4.3 Difusión de resultados	213

0

Introducción

0.1 Antecedentes y motivación

Una serie temporal es una sucesión de valores observados de un fenómeno que se ordenan cronológicamente. En economía nos encontramos con series temporales como resultado de calcular rentas, consumo, empleo, producción, inflación y un largo etcétera de periodicidad anual, trimestral, mensual, incluso, semanal, diaria o de mayor frecuencia. Los diferentes valores de una serie temporal pueden ser consecuencia de la acción conjunta de cuatro componentes: tendencia, variación cíclica, variación estacional y ruido. En el análisis económico, tiene un gran interés extraer cada una de esas componentes, bien la tendencia para conocer los movimientos a largo plazo, bien la variación cíclica porque está asociada con los periodos alternos de expansión y recesión, es decir, con el ciclo económico o de negocios, o bien la variación estacional para obtener series libres de oscilaciones infra anuales.

Los ciclos económicos son fluctuaciones que están presentes en las actividades humanas y cuyo impacto social preocupa a los gobernantes desde tiempos remotos. Así, en el antiguo Egipto (Gn 41, 1-8), el faraón se sentía turbado por el significado de su sueño en el que siete vacas gordas son sustituidas por otras tantas flacas o que siete espigas repletas son reemplazadas de nuevo por otras tantas menudas. El National Bureau of Economic Research, NBER, dice que “tales oscilaciones son recurrentes y sistemáticas aunque con patrones variables de amplitud y duración”.

Siguiendo a Kydland y Prescott (1990), se puede señalar que el concepto clásico sobre los ciclos económicos se debe a Mitchell (1927) y Burns y Mitchell (1946) que

consideran el ciclo económico como una sucesión de cuatro fases: prosperidad, crisis, depresión y recuperación que se repiten en este orden dando lugar a las fluctuaciones económicas. Esta teoría, basada en leyes de movimientos cíclicos deterministas, no tiene en cuenta los cambios tecnológicos ni las preferencias de las personas tanto en un comportamiento de equilibrio como de maximización económica. Sin embargo, Friedman y Schwartz (1963) consideran las perturbaciones monetarias como la principal fuente de las oscilaciones del ciclo económico. Posteriormente, el concepto de Lucas (1977) define el ciclo económico como las desviaciones de un agregado real respecto de su tendencia. Aunque no precisa tendencia, esta teoría permite un análisis cuantitativo que incorpora los cambios tecnológicos, fiscales o comerciales, además de los monetarios, como factores explicativos de las fluctuaciones observadas en los agregados reales. Además, dicho enfoque posibilita estudiar los comovimientos de las series de diferentes agregados económicos, es decir, la caracterización (procíclica, anticíclica o acíclica) y la posición (coincidente, adelantada o retrasada) respecto a una serie de referencia que para Lucas es el producto nacional bruto.

Por otro lado, en la literatura contemporánea sobre ciclos económicos se pueden encontrar oscilaciones de diferente duración: desde los subciclos de Mack con una duración de 24 meses, Granger y Hatanaka (1964), hasta las ondas de Kondratiev (1935) de entre 40 y 60 años, pasando por los ciclos de Kitchin (1923) de 40 meses o las oscilaciones de Juglar (1862) de 8 años de promedio. Esto pone de manifiesto que los ciclos económicos son una combinación de oscilaciones de diferente duración que se solapan en el tiempo como observa Elliott (1938) cuando analiza los precios del mercado financiero. Por tanto, el ciclo económico está asociado a una banda de frecuencias relativamente amplia. En la literatura especializada se consensua que engloba las oscilaciones cuyo periodo está comprendido entre año y medio y ocho años.

Es evidente que las definiciones de tendencia y componente cíclica deben ser estadísticas. Por ello, varios son los métodos diseñados para extraer las diferentes componentes de una serie temporal. Dentro de los más conocidos destacan:

- El método de Holt-Winters pertenece a la familia del alisado exponencial, Holt (1957), y consiste en una media móvil ponderada cuyos pesos tienen una estructura de decaimiento exponencial que determina el tipo de señal extraída.

- El filtro de Hodrick-Prescott (1997) es un caso particular de los filtros de Butterworth de paso bajo de estructura lineal y racional que se usa para extraer la tendencia. La componente cíclica se obtiene de trayendo a la serie original la tendencia.
- Los modelos estructurales de series temporales, Harvey (1989), especifican un modelo para cada componente no observada en el espacio de los estados y se estiman con el filtro de Kalman.
- Los filtros basados en modelos ARIMA, Maravall (1987), son filtros de Wiener-Kolmogorov, simétricos y centrados, que, adaptándose al modelo ARIMA de la serie temporal, se construyen de forma específica para cada componente.
- La regresión armónica dinámica construye modelos de componentes no observadas y los formula en el espacio de los estados desde un enfoque espectral, Young et al. (1999) y Bujosa et al. (2007).

A modo de resumen, se presenta la siguiente tabla que compara las características de los métodos enunciados y el propuesto en esta tesis, *Circulant SSA*.

Método	Carácter	Componentes extraídas	Tipo de filtro	Univariante / Multivariante
Método de Holt-Winters	Semiparamétrico	Tendencia y estacionalidad.	Fijo con parámetros derivados de los datos.	Univariante
Filtro de Hodrick-Prescott	No paramétrico	Tendencia.	Fijo, tipo Butterworth de paso bajo.	Univariante
Modelos estructurales	Paramétrico	Tendencia y oscilaciones asociadas a un grupo de frecuencias.	Derivado de los modelos especificados y estimado con el filtro de Kalman.	Ambos
Modelos ARIMA	Paramétrico	Ciclo-tendencia y estacionalidad.	Derivado del modelo ARIMA estimado para la serie. Tipo Wiener-Kolmogorov.	Univariante
Regresión armónica dinámica	Paramétrico	Tendencia y oscilaciones asociadas a un grupo de frecuencias.	Derivado de los modelos especificados y estimado con la información espectral de los datos.	Ambos
Circulant SSA	No paramétrico	Cualquier oscilación asociada a una frecuencia de interés	Adaptado a los datos según la longitud de la ventana.	Ambos

En este contexto, tanto los filtros fijos como los basados en modelos, o una combinación de ambos como en Kaiser y Maravall (2005), estiman las oscilaciones asociadas a la banda de frecuencias del ciclo económico como una única señal, no son capaces de obtener por separado la componente oscilatoria correspondiente a una determinada frecuencia o periodo. No obstante, según Melis (2003), los filtros “notch” permiten obtener la señal en un entorno de una frecuencia, tan reducido como se desee, pero se necesitan, además, otros métodos para conocer el peso de la señal extraída.

En el ámbito de las técnicas no paramétricas, el *análisis espectral singular*, SSA, es un procedimiento joven, que se basa en subespacios, cuyo nacimiento se asocia con los trabajos de Broomhead y King (1986a), sobre problemas de dinámica de sistemas no lineales, y de Fraedrich (1986) que inaugura la aplicación de SSA a la climatología y la geofísica. Investigaciones contemporáneas pero independientes a estas, efectuadas en la Universidad Estatal de San Petersburgo, en la antigua URSS, produjeron la técnica denominada *Caterpillar* que es una versión de SSA, como señalan Danilov y Zhigljavsky (1997). No obstante, las principales ideas de los procedimientos de extracción de señales basados en subespacios se remontan al siglo XVIII con la publicación de Prony (1795), según señalan Golyandina y Zhigljavsky (2013).

SSA es un procedimiento de extracción de señales no paramétrico y adaptable a los datos cuya tarea principal es descomponer una serie temporal como suma de un pequeño número de componentes subyacentes que sean interpretables tales como tendencia, componentes oscilatorias y ruido “sin estructura” según indican Golyandina et al. (2001). Esta técnica lineal construye una matriz de trayectorias donde sus columnas son los vectores retardados, obtenidos de la serie temporal original, cuyo tamaño se denomina longitud de la ventana. Las componentes oscilatorias subyacentes se obtienen a partir de la proyección de la matriz de trayectorias sobre los subespacios generados por los vectores singulares de dicha matriz o por los autovectores de la matriz de covarianzas retardadas que se obtienen, respectivamente, mediante la descomposición del valor singular, versión Basic SSA, o la descomposición ortogonal, Vautard y Ghil (1989), versión Toeplitz SSA. SSA es más robusto que la especificación de un modelo porque se adapta con enorme facilidad a los datos al ser una técnica no paramétrica. Por tanto, como indican Allen y Smith (1996), SSA detecta oscilaciones moduladas en amplitud y fase. De este modo, la serie original no es descompuesta en

funciones sinusoidales sino más bien en ondas adaptadas a los datos con amplitud modulada y/o fase no constante. Esto representa una gran ventaja cuando se trabaja con sistemas dinámicos complejos como en economía. Otra ventaja de SSA, tal y como indican Vautard et al. (1992), es que se adapta muy bien a series temporales cortas y ruidosas convirtiéndose en un método muy atractivo para el análisis de series temporales de carácter económico. Además, la extensión de SSA al campo multivariante, Broomhead y King (1986b), permite extraer patrones temporales y espaciales al mismo tiempo sobre un conjunto de series, Plaut y Vautard (1994).

La asociación tradicional de SSA con la climatología y la geofísica se debe a su aplicación inicial y continuada en estas ciencias como se evidencia en Ghil et al. (2002). Sin embargo, SSA es empleado en otros campos como la biometría, Safi et al. (2018), la geolocalización, Gruszczynska et al. (2017), o la econometría.

La introducción de SSA en la econometría es bastante reciente aunque en Golyandina et al. (2001) se encuentran algunos ejemplos con series de desempleo e inversión. El uso de SSA para analizar series económicas se ha hecho cada vez más popular produciéndose una verdadera explosión en los últimos años como lo prueba la literatura sobre el tema. SSA se ha usado con series cortas y ruidosas como son las del PIB, Sella et al. (2008) y Hassani y Zhigljavsky (2009); para realizar predicciones de la producción industrial europea, Hassani et al. (2009); para estudiar el ciclo económico de EE.UU., Carvalho et al. (2012); para extraer señales y predecir las series temporales de los ingresos por turismo en Reino Unido, Beneki et al. (2012); para analizar la crisis económica de 2008 en el Reino Unido, Hassani et al. (2013c); para evaluar el consumo y disponibilidad de la energía en la Unión Europea, Beneki y Silva (2013); para estudiar los procesos de raíces unitarias, Thomakos et al. (2013); para predecir los tipos de cambio, Ghodsi y Yarmohammadi (2014); para pronosticar datos de energía con atípicos presentes, Ghodsi y Omer (2014); para predecir la entrada de turistas en EE.UU., Hassani et al. (2015); para analizar la volatilidad en series de alta frecuencia como los índices Dow Jones Industrial e IBEX 35, Artech y García-Enríquez (2017); y para efectuar pronósticos sobre diferentes series trimestrales de las Cuentas Nacionales de EE.UU., Papailias y Thomakos (2017). Todos estos trabajos constituyen una muestra exhaustiva de la aplicación econométrica de SSA en el campo univariante. En el campo multivariante las aplicaciones econométricas son más recientes siendo un conjunto

representativo de investigaciones el detallado a continuación. Patterson et al. (2011) analizan el efecto de las revisiones en las predicciones de la producción industrial del Reino Unido; Hassani et al. (2013a y 2013b) realizan pronósticos del Índice de Producción Industrial y la inflación, también del Reino Unido, respectivamente; Zhang et al. (2014) elaboran un índice compuesto para la economía de varios países asiáticos; Groth et al. (2015) estudian el ciclo económico de EE.UU.; Sella et al. (2016) examinan las oscilaciones macroeconómicas en tres países de la Unión Europea; Carvalho y Rua (2017) investigan las revisiones del ciclo económico de EE.UU.; y Silva et al. (2018) encuentran indicadores adelantados de la producción industrial de la Unión Europea.

Cada una de las componentes oscilatorias extraídas de una serie temporal utilizando SSA está asociada a un periodo representativo de una banda de frecuencias. La literatura ha prestado más atención a la posición relativa dentro del ciclo económico, recesión o expansión, que a las duraciones y amplitudes de las diferentes oscilaciones que abarca. No obstante, es el conocimiento de estas o, mejor dicho, la extracción y análisis de las oscilaciones correspondientes a diferentes periodos o frecuencias lo que permite conocer con mayor detalle la posición relativa dentro del ciclo económico y evitar confusiones por el solapamiento de las ondas de diferentes periodos. La técnica SSA permite extraer todas las componentes oscilatorias de diferente amplitud y frecuencia que subyacen en una serie temporal, tanto de manera individual para una sola serie en el caso univariante, como de forma conjunta para un grupo de series en el caso multivariante en el que pueden existir oscilaciones comunes. Sin embargo, SSA posee un verdadero inconveniente para ser usado con carácter masivo sobre grandes bases de datos de series temporales en los servicios de análisis económico o departamentos de econometría: la asignación de frecuencias a las componentes oscilatorias extraídas se realiza a posteriori. Con carácter previo no están identificadas las frecuencias de las oscilaciones extraídas mediante SSA por lo que es necesaria la interacción del analista con el ordenador para realizar esta caracterización. La automatización de SSA, entendida como el diseño de un procedimiento en el que no sea necesaria la participación del analista en la identificación de los periodos de las componentes oscilatorias extraídas con SSA, está presente desde sus comienzos, Ghil y Mo (1991), hasta nuestros días, Carvalho y Rua (2017), con diferentes propuestas. Sin embargo, en todas ellas, la automatización se efectúa a posteriori introduciendo un grado de

incertidumbre y cierta subjetividad. Por ello, resulta muy sugerente diseñar algún algoritmo que identifique de forma automática pero de antemano las frecuencias de las fluctuaciones extraídas mediante SSA, es decir, que se conozcan a priori las correspondientes frecuencias representativas de las diferentes componentes oscilatorias obtenidas. Determinar *ex-ante* la frecuencia o periodo asociado a una oscilación extraída mediante SSA reduce la incertidumbre y el tiempo de computación haciendo posible el uso de esta técnica con conjuntos masivos de series.

0.2 Hipótesis y objetivos

El trabajo de investigación asume el reto de implementar las potencialidades de SSA para el análisis del ciclo económico en un grupo de series desde la siguiente pregunta. ¿Es posible diseñar un algoritmo para SSA que identifique de manera previa o *ex-ante* el periodo o frecuencia asociada a cada una de las componentes oscilatorias que van a ser extraídas? Esta cuestión permite plantear las sucesivas hipótesis:

1. Es factible conocer con carácter previo y automático en SSA, tanto univariante como multivariante, la componente oscilatoria asociada a una frecuencia de interés.
2. La posible metodología derivada de la hipótesis anterior se puede aplicar a series temporales no estacionarias.

La naturaleza teórico-práctica de la investigación, si es probada la certeza de las hipótesis establecidas, concreta los objetivos que se desean alcanzar en esta Tesis:

1. Diseñar un algoritmo para SSA univariante que identifique de modo automático la frecuencia de toda componente oscilatoria antes de ser extraída con SSA.
2. Extender, de manera justificada, el uso del algoritmo diseñado sobre series temporales no estacionarias.
3. Probar analíticamente que la nueva versión de SSA, que se denominará *Circulant SSA*, es equivalente asintóticamente a las ya existentes, Basic SSA y Toeplitz SSA, cuando se opera con datos muestrales.
4. Aplicar el algoritmo a la extracción del ciclo económico y al ajuste estacional como de efectos de calendario en series económicas reales.

5. Comprobar mediante simulaciones que las tres versiones de SSA (Basic, Toeplitz y Circulant) estiman componentes oscilatorias no sesgadas y que Circulant SSA es, al menos, tan eficiente como las otras dos versiones, Basic SSA y Toeplitz SSA.
6. Acreditar, también con simulaciones, que la nueva versión de SSA revisa menos la estimación del ciclo económico que otros métodos basados en modelos ARIMA, como Tramo-Seats, cuando se dispone de nuevas observaciones de la serie.
7. Extender el nuevo algoritmo al campo multivariante para identificar *ex-ante* y de manera automática las frecuencias de las componentes oscilatorias que con SSA multivariante van a ser extraídas de un vector de series.
8. Verificar la unicidad de las componentes oscilatorias estimadas tanto en el campo univariante como multivariante con la nueva versión de SSA.
9. Demostrar analíticamente que, también en el campo multivariante, la nueva versión es equivalente a las ya existentes, Basic SSA y Toeplitz SSA, cuando se opera con datos muestrales.
10. Construir índices sintéticos para una componente oscilatoria de un conjunto de series mediante un análisis factorial en la frecuencia.
11. Identificar, mediante el nuevo algoritmo extendido al campo multivariante en SSA, los shocks sufridos por cada serie univariante.
12. Emplear la extensión al campo multivariante de la nueva versión de SSA sobre diferentes conjuntos de series económicas reales para construir un índice sintético del ciclo económico mediante un análisis factorial en la frecuencia.

0.3 Estructura de la investigación

La metodología utilizada en la investigación para lograr los objetivos propuestos se ha basado en una pedagogía de acción-reflexión y se materializa, además de una Introducción y Conclusiones, en tres capítulos: *Circulant SSA*, Propiedades estadísticas de SSA y Multivariate *Circulant SSA*.

El primer capítulo se dedica a la forma univariante de SSA en el que se propone la nueva versión *Circulant SSA*. Se comienza describiendo el algoritmo de SSA, tanto la versión primigenia de Broomhead y King (1986a), conocida como Basic SSA, como la versión Toeplitz SSA debida a Vautard y Ghil (1989) en la que se asume

estacionariedad para la serie estudiada. También se analizan algunas modificaciones introducidas en el algoritmo y se revisan las contribuciones sobre la elección óptima de los parámetros del mismo: la longitud de la ventana y el rango de la señal. A continuación se describen las propiedades de la matriz de covarianzas retardadas de la serie estudiada, que es una matriz Toeplitz, así como su equivalencia asintótica con las matrices circulantes. Estas últimas matrices se caracterizan porque cada una de sus filas es la anterior desplazada un elemento hacia la derecha y dan nombre a la versión propuesta, *Circulant SSA*. Cada autovector y su correspondiente autovalor de una matriz circulante están asociados *ex-ante* con una frecuencia. Ello significa que se conoce de antemano el periodo de la oscilación que todo autovector extrae de la serie. Pero existe un inconveniente. Los autovectores de las matrices circulantes pertenecen al campo de los números complejos y, en consecuencia, también las proyecciones de la matriz de trayectorias. No obstante, gracias a una propiedad de las matrices circulantes, se propone el modo de obtener autovectores dentro del campo de los números reales. En consecuencia, sobre estas bases, se diseña y detallan los pasos del algoritmo de la versión *Circulant SSA* que obtiene *ex-ante* las frecuencias asociadas a las componentes oscilatorias extraídas de una serie temporal. Además, se prueba analíticamente que las tres versiones de SSA, Basic, Toeplitz y Circulant, son asintóticamente equivalentes, es decir, obtienen resultados similares al extraer componentes oscilatorias de series reales y tanto más similares cuanto más largas son. Esta nueva versión, *Circulant SSA*, al igual que la versión Toeplitz SSA, asume estacionariedad en las series. No obstante, se presenta una generalización del teorema de Gray (1974) de inversas de matrices Toeplitz para cualquier función continua que justifica el uso de *Circulant SSA* con series no estacionarias. La extracción de componentes en SSA se realiza bajo el supuesto de separabilidad, es decir, no se mezclan ondas de diferentes frecuencias en una componente oscilatoria extraída. Por tanto, se analiza este supuesto en *Circulant SSA*. Se verifica que extrae componentes oscilatorias separables incluso, a diferencia de Basic SSA, en situaciones extremas cuando las frecuencias de las oscilaciones están muy próximas. Finalmente, se ilustra el funcionamiento de *Circulant SSA* con una aplicación real sobre el Índice de Producción Industrial de varios países. En ella se obtiene la componente cíclica con una clara interpretación económica y se comprueba que las series desestacionalizadas con *Circulant SSA* no contienen restos de estacionalidad.

El segundo capítulo profundiza en las propiedades estadísticas de las versiones de SSA, Basic, Toeplitz y Circulant, permitiendo la comparación entre ellas y, en consecuencia, se analiza el comportamiento estadístico de SSA no estudiado hasta el momento. En concreto, en este capítulo se van a estudiar las propiedades tanto en muestras finitas relativas a la ausencia de sesgo, eficiencia y separabilidad de las componentes estimadas, como la fiabilidad de las estimaciones en tiempo real, es decir, la consistencia y la magnitud de las revisiones de la estimación de una componente oscilatoria conforme se dispone de más observaciones de la serie original. Las propiedades de *Circulant SSA* y su comparación con las otras versiones se evalúan mediante simulaciones. En ellas se introducen modelos estocásticos complejos, lineales y no lineales, cuando hasta ahora, en la literatura de SSA, se hacía uso de sencillos modelos deterministas más un ruido blanco. Las series simuladas, lineales y no lineales, constan de una tendencia, componente cíclica, componente estacional y una perturbación o término de error. En primer lugar se examinan las propiedades estadísticas para muestras finitas en las tres versiones de SSA, Basic, Toeplitz y Circulant. Para ello, se comprueba que las componentes estimadas con las tres versiones no tienen sesgo, el error de estimación es pequeño, son separables y el error global es un ruido blanco gaussiano como la perturbación simulada. Se prueba que las tres versiones no tienen sesgo pero se verifica que *Circulant SSA* es más eficiente que las versiones clásicas porque obtiene menor error de estimación. En segundo lugar se estudia la fiabilidad de las estimaciones con *Circulant SSA* en tiempo real. Esta fiabilidad está asociada a las revisiones que sufre la estimación de una componente oscilatoria para cada instante temporal cuando aparecen más observaciones. La revisión es, por tanto, una característica subjetiva que adquiere entidad cuando se compara con otros procedimientos. La técnica seleccionada para contrastar la fiabilidad en tiempo real de *Circulant SSA* es Tramo-Seats, TS, Gómez y Maravall (1998), porque tiene un enfoque paramétrico, basado en los modelos ARIMA, y es utilizada ampliamente en los servicios de estudios econométricos. La comparación se efectúa sobre la primera diferencia de la componente de ciclo-tendencia porque es una estimación habitual del ciclo económico. Para evitar distorsiones, se introduce en SSA un nuevo concepto de estimación final, aquella que pasado un número fijo de instantes no sufre revisiones. Se comprueba que ambos procedimientos, *Circulant SSA* y TS, son consistentes en media

cuadrática, es decir, la distancia entre las estimaciones preliminares y la final se va reduciendo según se observan nuevos datos hasta hacerse nula. No obstante, *Circulant SSA* posee menor distancia para la estimación inicial y converge más rápido que TS. Esto se traduce en que *Circulant SSA* tiene más probabilidad que TS de revisar menos en toda la senda de estimación, desde la estimación inicial a la final, del ciclo económico para todo instante temporal. Este capítulo termina con una aplicación real de las revisiones del ciclo económico de los Índices de Producción Industrial del capítulo anterior para ilustrar la fiabilidad en tiempo real de *Circulant SSA*.

El tercer capítulo se ocupa de extender la metodología de *Circulant SSA* al campo multivariante, cuando se dispone de un conjunto de series. Se comienza con la descripción del algoritmo de Multivariate SSA, tanto la versión Basic SSA, Broomhead y King (1986b), como la versión Toeplitz SSA, Plaut y Vautard (1994), que asume estacionariedad en el conjunto de series. También se analizan los pasos del algoritmo y se describen sucintamente algunas variaciones del mismo. Seguidamente, se propone una nueva matriz de trayectorias multivariante. Esta nueva matriz de trayectorias da lugar a la matriz de covarianzas cruzadas retardadas de la serie vectorial, el conjunto de series, siendo una matriz Toeplitz por bloques. Se describen las propiedades de este tipo de matrices como la equivalencia asintótica con las matrices circulantes por bloques y el modo de obtener las matrices de densidad espectral cruzada. Asimismo se amplían al caso multivariante las aproximaciones de Pearl (1973) y Gray (2006) para la función de densidad espectral. Por otro lado, en el caso multivariante se obtienen tantos autovectores como series se analizan para una frecuencia. Es decir, para una frecuencia, de cada serie se obtienen tantas proyecciones como series se analizan dando lugar a las subcomponentes. Por tanto, al igual que en el caso univariante, se conoce *ex-ante* la frecuencia o periodo asociado a la subcomponente oscilatoria que extrae todo autovector. Y, al igual que en el caso univariante, los autovectores en el caso multivariante pertenecen al campo de los números complejos pero, asimismo, se propone una técnica para obtenerlos dentro del campo de los números reales. Sobre todas estas bases se describen los pasos del algoritmo Multivariate *Circulant SSA*. Seguidamente, se demuestra que la suma de las subcomponentes asociadas a una frecuencia en el campo multivariante coincide con la componente correspondiente a esa misma frecuencia en el caso univariante, es decir, se prueba la unicidad entre

Multivariate *Circulant SSA* y *Circulant SSA*. Este resultado permite desagregar de modo automático toda componente oscilatoria en señal más ruido y determinar los shocks por armónico siendo la señal la suma de las subcomponentes de mayor peso. Igualmente, se prueba analíticamente que las tres versiones de SSA multivariante, Basic, Toeplitz y *Circulant*, son asintóticamente equivalentes: obtienen resultados similares cuando extraen componentes oscilatorias de series reales. Además, aunque se ha supuesto estacionariedad como en la versión Toeplitz, la generalización del teorema de Gray (1974), que se realiza en el primer capítulo, justifica el uso de Multivariate *Circulant SSA* con series no estacionarias. A continuación, se aprovechan los resultados de Multivariate *Circulant SSA* para calcular índices compuestos de las componentes oscilatorias, estimadas para una serie vectorial, asociadas a una frecuencia o conjunto de frecuencias. Las matrices de densidad espectral cruzada que se han estimado, junto con las soluciones de Brillinger (1981), permiten aproximar las matrices de covarianzas cruzadas retardadas de las componentes oscilatorias asociadas a una frecuencia extraídas de un conjunto de series. Ello permite realizar un análisis factorial en la frecuencia para esas componentes oscilatorias sin necesidad de especificar modelos para el factor o factores comunes. Bajo determinados supuestos, las cargas factoriales se obtienen de forma directa como en Peña y Box (1987) y se diseña un algoritmo iterativo para obtener el predictor de Bartlett con el fin de estimar los factores comunes para las componentes oscilatorias referidas a una frecuencia. Uno de dichos factores comunes en la frecuencia constituye el índice compuesto buscado. Este tercer capítulo finaliza con una doble aplicación real: sobre un sector de actividad económica con las series por grupos de mercado del Índice de Producción Industrial de EE.UU. y sobre una zona geográfica con las series del Producto Interior Bruto de los países de la Europa de los 15. En ambos casos, se describen los shocks que afectan en cada serie a las oscilaciones de diferentes frecuencias. También se obtiene un índice compuesto del ciclo económico que es prácticamente idéntico al ciclo económico estimado con *Circulant SSA* para las respectivas series agregadas publicadas por los correspondientes organismos.

Por último, se señala que las tres versiones de SSA, Basic, Toeplitz y *Circulant*, tanto univariante como multivariante, se han programado como funciones de Matlab para realizar las aplicaciones de los tres capítulos. También, todas las simulaciones del segundo capítulo se han realizado en Matlab con programas escritos para la ocasión.

Referencias

1. Allen, M. & Smith, L. (1996). Monte Carlo SSA: detecting irregular oscillations in the presence of colored noise. *Journal of Climate*, 9, 3373-3404.
2. Arteche, J. & García-Enríquez, J. (2017). Singular Spectrum Analysis for signal extraction in Stochastic Volatility models. *Econometrics and statistics*, 1, 85-98.
3. Beneki, C., Eeckels, B. & Leon, C. (2012). Signal Extraction and Forecasting of the UK Tourism Income Time Series: A Singular Spectrum Analysis Approach. *Journal of Forecasting*, 31 (5), 391–400.
4. Beneki, C. & Silva, E.S. (2013). Analysing and Forecasting European Union Energy Data. *International Journal of Energy and Statistics*, 1 (2), 29–45.
5. Brillinger, D. R. (1981). *Time series: data analysis and theory*. Holden Day, Inc., San Francisco.
6. Broomhead, D. & King, G. (1986a). Extracting qualitative dynamics from experimental data. *Physica D*, 20, 217–236.
7. Broomhead, D. & King, G. (1986b). On the qualitative analysis of experimental dynamical systems. In *Nonlinear Phenomena and Chaos*, 113–144. A. Hilger ed., Bristol.
8. Bujosa, M., García-Ferrer, A. & Young, P.C. (2007). Linear dynamic harmonic regression. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52, 999–1024.
9. Burns, A. F. & Mitchell, W. C. (1946). *Measuring business cycles*. New York: National Bureau of Economic Research.
10. Carvalho, M. de, Rodrigues, P.C. & Rua, A. (2012). Tracking the US business cycle with a singular spectrum analysis. *Economics Letters*, 114 (1), 32–35.
11. Carvalho, M. de & Rua, A. (2017). Real-time nowcasting the US output gap: Singular spectrum analysis at work. *International Journal of Forecasting*, 33 (1), 185-198.
12. Danilov, D. & Zhigljavsky, A. (editors) (1997). *Principal components of time series: the “Caterpillar” method*. Saint Petersburg Press, Saint Petersburg.
13. Elliott, R.N. (1938). *The wave principle*. Ed. R.N. Elliott, New York.
14. Fraedrich, K. (1986). Estimating the dimension of weather and climate attractors. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 43 (5), 419–432.
15. Friedman, M. & Schwartz, A. J. (1963). *A monetary history of the United States, 1867–1960*. Princeton: Princeton University Press (for NBER).

16. Ghil M., Allen R.M., Dettinger M.D., Ide K., Kondrashov D., Mann M.E., Robertson A., Saunders A., Tian Y., Varadi F., & Yiou P. (2002). Advanced spectral methods for climatic time series. *Reviews of Geophysics*, 40 (1),1-41
17. Ghil, M. & Mo, K. (1991). Intraseasonal oscillations in the global atmosphere. Part I and Part II. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 48 (5), 752-790.
18. Ghodsi, Z. & Omer, H.N. (2014). Forecasting energy data using Singular Spectrum Analysis in the presence of outlier(s). *International Journal of Energy and Statistics*, 2 (2), 125-136.
19. Ghodsi, M. & Yarmohammadi, M. (2014). Exchange rate forecasting with optimum singular spectrum analysis. *Journal of Systems Science and Complexity*, 27 (1), 47-55.
20. Golyandina, N., Nekrutkin, V. & Zhigljavsky, A. (2001). *Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques*. Chapman & Hall/CRC.
21. Golyandina, N. & Zhigljavsky, A. (2013). *Singular Spectrum Analysis for Time Series*. Springer.
22. Gómez, V., & Maravall, A. (1998). Guide for Using the Programs TRAMO and SEATS. Banco de España.
23. Granger, C. W. J. & Hatanaka, M. (1964). *Spectral Analysis of Economic Time Series*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
24. Gray, R.M. (1974). On Unbounded Toeplitz Matrices and Nonstationary Time Series with an Application to Information Theory. *Information and Control*, 24, 181–196.
25. Gray, R.M. (2006). Toeplitz and Circulant Matrices: A review. *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, 2 (3), 155-239.
26. Groth, A., Ghil, M., Hallegatte, S. & Dumas, P. (2015). The role of oscillatory modes in US business cycles. *Journal of Business Cycle Measurement and Analysis*, 2015 (1), 63. OCDE.
27. Gruszczynska, M., Klos, A., Rosat, S. & Bogusz, J. (2017). Deriving common seasonal signals in GPS position time series by using multichannel singular spectrum analysis. *Acta Geodynamica et Geomaterialia*, 14 (3), 273-285.
28. Harvey, A.C. (1989). *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*. Cambridge University Press.
29. Hassani, H., Heravi, S., Brown, G. & Ayoubkhani, D. (2013). Forecasting before, during, and after recession with singular spectrum analysis. *Journal of Applied Statistics*, 40 (10), 2290-2302.

30. Hassani, H., Heravi, S. & Zhigljavsky, A. (2009). Forecasting European industrial production with singular spectrum analysis. *International Journal Forecast*, 25 (1), 424-438.
31. Hassani, H., Heravi, S. & Zhigljavsky, A. (2013a). Forecasting UK industrial production with multivariate singular spectrum analysis. *Journal of Forecasting*, 32 (5), 395-408.
32. Hassani, H., Soofi, A. S. & Zhigljavsky, A. (2013b). Predicting inflation dynamics with singular spectrum analysis. *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (Statistics in Society)*, 176 (3), 743-760.
33. Hassani, H., Heravi, S., Brown, G., & Ayoubkhani, D. (2013c). Forecasting before, during, and after recession with singular spectrum analysis. *Journal of Applied Statistics*, 40 (10), 2290-2302.
34. Hassani, H., Webster, A., Silva, E.S. & Heravi, S. (2015). Forecasting U.S. Tourist arrivals using optimal Singular Spectrum Analysis. *Tourism Management*, 46, 322–335.
35. Hassani, H., & Zhigljavsky, A. (2009). Singular spectrum analysis: methodology and application to economics data. *Journal of Systems Science and Complexity*, 22 (3), 372-394.
36. Hodrick, R.J. & Prescott, E.C. (1997). Postwar U.S. business cycles: an empirical investigation. *Journal of Money, Credit and Banking*, 29 (1), 1-16.
37. Holt, C.C. (1957). *Forecasting trends and seasonals by exponentially weighted averages*. Carnegie Institute of Technology, Pittsburg ONR Memorandum 52.
38. Juglar, C. (1862). *Des Crises Commerciales et de leur retour périodique en France, en Angleterre et aux États-Unis*. Paris: Guillaumin.
39. Kaiser, R., & Maravall, A. (2005). Combining filter design with model-based filtering (with an application to business-cycle estimation). *International Journal of Forecasting*, 21 (4), 691-710.
40. Kitchin, J. (1923). Cycles and Trends in Economic Factors. *Review of Economic Statistics*, 5, 10–16.
41. Kondratiev, N. D. (1935). The Long Waves in Economic Life. *The Review of Economic Statistics*, 17 (6), 105-115.
42. Kydland, F. E. & Prescott, E. C. (1990). Business cycles: Real facts and a monetary myth. *Real business cycles: a reader*, 383-398.
43. Lucas Jr, R. E. (1977). Understanding business cycles. In *Carnegie-Rochester conference series on public policy* (Vol. 5, pp. 7-29). North-Holland.
44. Maravall, A. (1987). Descomposición de series temporales: especificación, estimación e inferencia. *Estadística Española*, 29 (114), 11-68.

45. Melis, F. (2003). Un desestacionalizador ARMA para series económicas sin desfase temporal. *Boletín Trimestral de Coyuntura*, 87, 145-165.
46. Mitchell, W. C. (1927). *Business cycles: The problem and its setting*. New York: National Bureau of Economic Research.
47. Papailias, F. & Thomakos, D. (2017). EXSSA: SSA-based reconstruction of time series via exponential smoothing of covariance eigenvalues. *International Journal of Forecasting*, 33 (1), 214-229.
48. Patterson, K., Hassani, H., Heravi, S. & Zhigljavsky, A. (2011). Multivariate singular spectrum analysis for forecasting revisions to real-time data. *Journal of Applied Statistics*, 38 (10), 2183–2211.
49. Pearl, J. (1973). On coding and filtering stationary signals by discrete Fourier transforms (Corresp.). *IEEE Transactions on Information Theory*, 19 (2), 229-232.
50. Peña, D. & Box, G. E. (1987). Identifying a simplifying structure in time series. *Journal of the American Statistical Association*, 82 (399), 836-843.
51. Plaut, G. & Vautard, R. (1994). Spells of Low-Frequency Oscillations and Weather Regimes in the Northern Hemisphere. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 51 (2), 210-236.
52. Prony, G. de (1795). Essai expérimental et analytique sur les lois de la dilatabilité des fluides élastiques et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'eau et la vapeur de l'alcool à différentes températures. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 1 (2), 24–76.
53. Safi, S. M. M., Pooyan, M. & Nasrabadi, A. M. (2018). Improving the performance of the SSVEP-based BCI system using optimized singular spectrum analysis (OSSA). *Biomedical Signal Processing and Control*, 46, 46-58.
54. Sella, L., Vivaldo, G., Ghil, M. & Hallegatte, S. (2008). Economic cycles and their synchronization: spectral analysis of GDP time series from Italy, the Netherlands, and the UK. *Econophysics Colloquium 2008*, Kiel, Germany.
55. Sella, L., Vivaldo, G., Groth, A. & Ghil, M. (2016). Economic cycles and their synchronization: a comparison of cyclic modes in three European countries. *Journal of Business Cycle Research*, 12 (1), 25-48.
56. Silva, E. S., Hassani, H., & Heravi, S. (2018). Modeling European industrial production with multivariate singular spectrum analysis: A cross-industry analysis. *Journal of Forecasting*, 37 (3), 371-384.
57. Thomakos, D., Hassani, H., & Patterson, K. (2013). *Optimal Linear Filtering, Smoothing and Trend Extraction for the m-th Differences of a Unit Root Process: A Singular Spectrum Analysis Approach* (No. em-dp2013-04). Henley Business School, Reading University.

58. Vautard, R. & Ghil, M. (1989). Singular spectrum analysis in nonlinear dynamics, with applications to paleoclimatic time series. *Physica D*, 35, 395–424.
59. Vautard, R., Yiou, P. & Ghil, M. (1992). Singular spectrum analysis: A toolkit for short, noisy chaotic signals. *Physica D*, 58, 95–126.
60. Young, P. C., Pedregal, D. & Tych, W. (1999). Dynamic Harmonic Regression. *Journal of Forecasting*, 18, 369–394.
61. Zhang, J., Hassani, H., Xie, H. & Zhang, X. (2014). Estimating multi-country prosperity index: a two-dimensional singular spectrum analysis approach. *Journal of Systems Science and Complexity*, 27 (1), 56-74.

Circulant SSA

1.1 Introducción

La técnica denominada *análisis espectral singular* (SSA) es un procedimiento de análisis de series temporales, no paramétrico, adaptable a los datos, que permite extraer las componentes oscilatorias subyacentes en una serie temporal. SSA es un método basado en subespacios, calcula una base ortonormal de la matriz de trayectorias obtenida de la serie temporal original. Por ello, SSA está estrechamente relacionado con el análisis de componentes principales (PCA). No obstante, a diferencia de los métodos basados en modelos o de filtros fijos, no es un procedimiento automático sino que, por el contrario, es necesaria la interacción del analista con el ordenador para realizar la extracción de las componentes subyacentes.

La tarea principal de SSA es descomponer una serie temporal como suma de un pequeño número de componentes subyacentes que sean interpretables tales como tendencia, componentes oscilatorias y ruido “sin estructura” según indican Golyandina et al. (2001). SSA es una herramienta muy útil para resolver problemas como la extracción simultánea de tendencias y periodicidades complejas, Hassani (2007), y se puede aplicar a las más diversas áreas de investigación siendo Arteché y García-Enríquez (2017) y Papailias y Thomakos (2017) ejemplos recientes en econometría y Safi et al. (2018) en biometría y Yurova et al. (2018) en climatología.

Las ideas clave de los métodos de procesamiento de señales basados en subespacios se remontan al siglo XVIII con el trabajo de Prony (1795), como observan Golyandina y Zhigljavsky (2013). Sin embargo, el nacimiento de SSA se asocia con las publicaciones

de Broomhead y King (1986a, 1986b) donde se aplica SSA a problemas de dinámica de sistemas no lineales. Independientemente, SSA fue aplicado por Fraedrich (1986) a series temporales climáticas. Poco tiempo después, Vautard y Ghil (1989), bajo el supuesto de estacionariedad, desarrollan la versión *Toeplitz SSA* y Vautard et al. (1992) derivan un algoritmo para obtener las componentes reconstruidas. Por otro lado, trabajos e investigaciones, tanto previas como coetáneas pero independientes a las de Broomhead y King, desarrolladas en la Universidad Estatal de San Petersburgo, en la antigua URSS, dieron lugar a una metodología llamada *Caterpillar* que es una versión de SSA, como ponen de manifiesto Danilov y Zhigljavsky (1997). Una aproximación sencilla a SSA se puede encontrar en el libro de Elsner y Tsonis (1996) y una descripción más detallada de sus aspectos teóricos y prácticos se puede encontrar en los libros ya mencionados de Golyandina et al. (2001) y Golyandina y Zhigljavsky (2013). Además, en este último se localizan decenas de referencias relacionadas con la teoría y aplicaciones prácticas de SSA producidas desde su origen. Recientemente, en Hassani et al. (2014) se encuentra un estudio práctico sobre la influencia de los atípicos en SSA y Khan y Poskitt (2017) exponen resultados teóricos para las predicciones con SSA.

La automatización de SSA, entendida como el diseño de un procedimiento en el que no sea necesaria la participación del analista en la identificación de las frecuencias de los armónicos de las componentes oscilatorias de SSA, está presente desde sus comienzos. Así, Ghil y Mo (1991) utilizan las correlaciones cruzadas retardadas del par de autovectores asociados a un par de autovalores muy próximos entre sí para contrastar si dichos autovectores se encuentran en cuadratura. Vautard et al. (1992) sugieren un test basado en el periodograma combinado con el método de entropía máxima para establecer si ese par de autovectores están asociados al mismo armónico. Posteriormente, Alexandrov y Golyandina (2005) perfeccionan el test anterior para la extracción automática de armónicos y Alexandrov (2009) lo extiende a la tendencia estableciendo umbrales de ajuste en ambos casos. Recientemente, se ha utilizado la matriz de w -correlaciones, correlaciones ponderadas, en el análisis de conglomerados para agrupar armónicos y construir componentes oscilatorias. Alonso y Salgado (2008) utilizan el algoritmo de k-medias y Bilancia y Campobasso (2010) consideran un método jerárquico con enlace completo. Últimamente, Arteche y García-Enríquez (2017) agrupan los autovectores cuya contribución espectral relativa, obtenida de su

periodograma, es mayor que para la serie analizada en un intervalo de frecuencias y Carvalho y Rúa (2017) proponen el uso del estadístico g de Fisher sobre el periodograma de la componente principal para asignar una frecuencia a cada serie reconstruida elemental. No obstante, sea cual sea el procedimiento utilizado en la automatización, el proceso se realiza *ex-post* y con un nivel de incertidumbre. Estos inconvenientes se solucionarían calculando *ex-ante* los autovalores y autovectores en función de las frecuencias con la teoría de Szegő y no *ex-post* para los autovalores como realizan Bozzo et al. (2010). Ello permitiría conocer de forma previa los armónicos asociados a las pertinentes componentes oscilatorias. Bajo el supuesto de estacionariedad, la matriz de covarianzas retardadas es Toeplitz simétrica. No obstante, hasta ahora solo se ha conseguido derivar de forma analítica los autovalores para matrices Toeplitz simétricas heptadiagonales, Solary (2013), lo que limita bastante su uso en la automatización de SSA.

El objetivo de este capítulo es hacer realidad la idea anterior: obtener los autovalores y autovectores asociados a una frecuencia dada. Para ello, se hace uso de los resultados de la equivalencia asintótica aplicada a la familia de matrices Toeplitz. Dentro de esta familia destacan las matrices circulantes que dan nombre a la variante de SSA propuesta, *Circulant SSA*. En esta tesis se usa la equivalencia asintótica de las secuencias de matrices Toeplitz y circulantes para conocer *ex-ante* el armónico correspondiente al par autovalor-autovector de la matriz de covarianzas retardadas. Y, por tanto, se consigue clasificar de forma previa la componente oscilatoria asociada. Esto permite desvincular completamente al analista de la etapa de identificación de las componentes oscilatorias con sus armónicos y, consecuentemente, aumenta de forma considerable la automatización de SSA. También, para las distintas frecuencias, se obtienen componentes oscilatorias fuertemente separables lo que permite su agrupamiento claro y preciso. En la metodología de *Circulant SSA* el supuesto de estacionariedad está implícito porque trabaja con matrices de covarianzas retardadas con forma Toeplitz simétrica. No obstante, ello no implica que dicha técnica no se pueda extender a series temporales no estacionarias. Como se mostrará, el teorema de Gray (1974) sobre inversas de matrices Toeplitz permite el uso de la versión propuesta con series temporales no estacionarias. Además, la generalización que se presenta de dicho teorema justifica el empleo del periodograma o método de Fourier como estimador del

espectro de una serie temporal no estacionaria. En definitiva, el método *Circulant SSA* es capaz de identificar *ex-ante* y de forma automática los armónicos de las componentes oscilatorias sin imponer la condición previa de estacionariedad sobre la serie temporal.

Seguidamente, la exposición previa permite señalar las contribuciones del capítulo:

1. Se presenta una nueva versión de SSA, *Circulant SSA*, que identifica *ex-ante* y de forma automática los armónicos de las componentes oscilatorias subyacentes porque los autovectores de las matrices circulantes son siempre conocidos, expresados en función de las frecuencias, y sus autovalores asociados estiman la densidad espectral de la serie.
2. Se construye una base ortonormal real para la diagonalización ortogonal de matrices circulantes permitiendo obtener matrices elementales reales.
3. Se demuestra la equivalencia asintótica de las tres versiones de SSA (Basic, Toeplitz y Circulant) cuando se opera con datos muestrales aprobando los resultados que se obtienen con *Circulant SSA*.
4. Se generaliza el teorema de Gray (1974) que permite justificar el empleo de la versión *Circulant SSA* con series no estacionarias.
5. Se verifica que las componentes oscilatorias obtenidas con *Circulant SSA* son fuertemente separables obteniendo un agrupamiento preciso sin incertidumbre.
6. Se comprueba la gran utilidad de *Circulant SSA* en las series de actividad económica, como el IPI, donde se conocen de antemano las frecuencias asociadas a las componentes de interés: tendencia, estacionalidad y ciclo económico.

El esquema del capítulo se detalla a continuación. En primer lugar, en la Sección 2 se describe sucintamente la técnica SSA. Seguidamente, en la Sección 3 se propone la variante *Circulant SSA*, se demuestra la equivalencia con las otras versiones y se justifica su uso directo con series no estacionarias. A continuación, en la Sección 4 se verifica la fuerte separabilidad de las componentes estimadas y en la Sección 5 se realiza una aplicación a un caso de estudio real donde se evidencian las buenas propiedades del método propuesto. Finalmente, la Sección 6 muestra las conclusiones.

1.2 Metodología de SSA

La tarea principal de SSA es descomponer la serie temporal observada en suma de componentes interpretables. En esta sección se describen los pasos del algoritmo de SSA, algunas variaciones del mismo destinadas a mejorar su funcionamiento o resolver problemas derivados de su aplicación sobre series reales y se revisan las reglas para seleccionar los parámetros de SSA y obtener una descomposición óptima.

1.2.1 Descripción del algoritmo de SSA

Se considera la serie temporal x_t de valores reales de longitud T organizada en un vector $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_T)^\top$ y sea el parámetro L un entero que se corresponde con la longitud de la ventana tal que $1 < L < T/2$.

Paso 1: Matriz de trayectorias.

La serie unidimensional \mathbf{x} se transforma en una serie multidimensional llamada matriz de trayectorias. Esta matriz está formada por $N = T - L + 1$ columnas de vectores retardados $\mathbf{x}_j = (x_j, \dots, x_{j+L-1})^\top \in \mathbb{R}^L$, $j = 1, \dots, N$ con $L < N$, cuya apariencia es

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 | \dots | \mathbf{x}_N] = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_N \\ x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_L & x_{L+1} & x_{L+2} & \cdots & x_T \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Se observa que tanto las filas como las columnas de la matriz de trayectorias son subseries de la serie original. Además, la matriz de trayectorias es tipo Hankel, es decir, los elementos en las antidiagonales (las diagonales de derecha a izquierda) son iguales.

Paso 2: Descomposición.

Sea la matriz real simétrica definida no negativa \mathbf{S} cuyos elementos son estimaciones de los momentos de segundo orden de la serie multidimensional \mathbf{x}_j , es decir, $\mathbf{S} = \hat{\Gamma}$ donde $\Gamma = E(\mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^\top)$. Se efectúa la diagonalización ortogonal $\mathbf{S} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^\top$ con $\mathbf{D} = \text{diag}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_L)$ siendo $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau_L \geq 0$ los autovalores de \mathbf{S} y \mathbf{U} es

una matriz ortogonal cuyas columnas son los autovectores asociados \mathbf{u}_k , es decir, $\mathbf{S}\mathbf{u}_k = \tau_k \mathbf{u}_k$ para $k=1, \dots, L$. De este modo, $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^L$ es una base ortonormal en \mathbb{R}^L . La diagonalización da lugar a la siguiente descomposición de la matriz de trayectorias

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^d \mathbf{X}_k = \sum_{k=1}^d \mathbf{u}_k \mathbf{w}_k^\top, \quad (1.2)$$

donde $d = \max\{k / \tau_k > 0\} = \text{rank}(\mathbf{X})$ y $\mathbf{w}_k = \mathbf{X}^\top \mathbf{u}_k$, $k=1, \dots, d$, son las llamadas “componentes principales”, las proyecciones de la serie multidimensional \mathbf{X} sobre las direcciones de cada uno de los autovectores \mathbf{u}_k . Las matrices \mathbf{X}_k tienen rango 1 y se denominan matrices elementales.

Las opciones clásicas para calcular la matriz de momentos de segundo orden son:

I. *Basic SSA o Broomhead-King (BK):*

$$\mathbf{S} = \mathbf{X}\mathbf{X}^\top.$$

Esta versión se debe a Broomhead y King (1986a) y corresponde a la descomposición del valor singular (SVD) de la matriz \mathbf{X} , es decir, $\mathbf{X} = \sum_{k=1}^d \sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^\top$. Los autovectores \mathbf{u}_k son los vectores singulares izquierdos de \mathbf{X} , los vectores ortogonales $\mathbf{v}_k = \mathbf{w}_k / \sqrt{\tau_k}$ los vectores singulares derechos y $\sigma_k = \sqrt{\tau_k}$ los valores singulares.

II. *Toeplitz SSA o Vautard-Ghil (VG):*

Esta versión la conciben Vautard y Ghil (1989). Bajo el supuesto de que la serie x_t es estacionaria de media cero, se define la matriz \mathbf{S}_T donde sus elementos están dados por:

$$s_{jk} = \hat{\gamma}_{|j-k|} = \frac{1}{T-|j-k|} \sum_{t=1}^{T-|j-k|} x_t x_{t+|j-k|}, \quad 1 \leq j, k \leq L. \quad (1.3)$$

Así, la matriz \mathbf{S}_T es la matriz de covarianzas retardadas donde $s_{jk} = \hat{\gamma}_{|j-k|}$ converge en probabilidad a $\gamma_{|j-k|}$ cuando $T \rightarrow \infty$, siendo $\gamma_m = \text{cov}(x_t, x_{t-m}) = \gamma_{-m}$ el término de retardo m de la función de covarianzas de la serie y $\hat{\gamma}_m$ su estimador. Por tanto, esta matriz es simétrica y tiene estructura Toeplitz, es decir, los elementos en las diagonales

son iguales. Además, por ser Toeplitz, los elementos de sus autovectores son simétricos o antisimétricos respecto a la posición $\frac{1}{2}L$.

Finalmente, dado que $\|\mathbf{X}\|_F^2 = \sum_{k=1}^d \tau_k$ y $\|\mathbf{X}_k\|_F^2 = \|\mathbf{w}_k\|^2 = \tau_k$, la ratio $\tau_k / \sum_{k=1}^d \tau_k$ se puede considerar como la contribución de la matriz elemental \mathbf{X}_k en la expansión (1.2), donde $\|\cdot\|_F$ denota la norma de Frobenius y $\|\cdot\|$ la norma vectorial euclídea. El conjunto $(\tau_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k)$ se denomina k -ésima autoterna de la diagonalización.

Paso 3: Agrupamiento.

Este paso se efectúa bajo el supuesto de separabilidad, Golyandina et al (2001). El concepto de separabilidad se analizará con detalle en una sección posterior pero se adelanta una breve definición para entender el propósito del agrupamiento. Se dice que cualquier par de las componentes aditivas en las que se quiere desagregar la serie original son débilmente separables si sus matrices de trayectorias asociadas pertenecen a subespacios ortogonales y si, además, las bases de dichos subespacios no tienen algún vector en común, entonces son fuertemente separables o simplemente separables.

El conjunto de índices $\{1, \dots, d\}$, una vez obtenida la descomposición (1.2), se divide en G grupos disjuntos I_1, \dots, I_G . Sea $I_j = \{k_{j_1}, \dots, k_{j_p}\}$, $j = 1, \dots, G$, cada grupo disjunto de k_{j_p} ($1 \leq k_{j_p} \leq d$) índices correspondiente al conjunto de autovectores $\{\mathbf{u}_{k_{j_1}}, \dots, \mathbf{u}_{k_{j_p}}\}$. Entonces, la matriz \mathbf{X}_{I_j} asociada a cada grupo I_j , $j = 1, \dots, G$, se define como $\mathbf{X}_{I_j} = \mathbf{X}_{k_{j_1}} + \dots + \mathbf{X}_{k_{j_p}}$ y pertenece al subespacio generado por los autovectores del grupo I_j . Por ello, la expansión dada en (1.2) se puede escribir como

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{I_1} + \dots + \mathbf{X}_{I_G} . \quad (1.4)$$

Cada posible grupo de un solo índice, $I_k = \{k\}$ para $k = 1, \dots, d$, correspondiente a un único autovector \mathbf{u}_k se denomina grupo elemental.

En el caso de separabilidad, la contribución de la componente procedente de la matriz \mathbf{X}_{I_j} en la expansión (1.4) se mide por la proporción de sus autovalores correspondientes, $\sum_{k \in I_j} \tau_k / \sum_{k=1}^d \tau_k$.

Paso 4: Reconstrucción.

En el último paso, si las componentes de la serie original son separables, toda matriz \mathbf{X}_{I_j} en la descomposición (1.4) es de tipo Hankel y su correspondiente serie $\tilde{\mathbf{x}}_{I_j} = (\tilde{x}_{I_j,1}, \dots, \tilde{x}_{I_j,T})^\top$ serían los elementos de las antidiagonales. Sin embargo, no es un escenario realista. Por ello, cada matriz \mathbf{X}_{I_j} en la descomposición (1.4) se debe transformar en una nueva serie temporal $\tilde{\mathbf{x}}_{I_j} = (\tilde{x}_{I_j,1}, \dots, \tilde{x}_{I_j,T})^\top$ de longitud T , llamada serie reconstruida, mediante el promedio diagonal que se define como la media de los elementos de las antidiagonales de la matriz \mathbf{X}_{I_j} , es decir, se “hankeliza” dicha matriz.

Si $x_{i,k}^{I_j}$ son los elementos de la matriz \mathbf{X}_{I_j} , los valores $\tilde{x}_{I_j,t}$ de la serie reconstruida $\tilde{\mathbf{x}}_{I_j}$ están dados por la fórmula del promedio diagonal de Vautard et al. (1992)

$$\tilde{x}_{I_j,t} = \begin{cases} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t x_{i,t-i+1}^{I_j} & 1 \leq t < L \\ \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L x_{i,t-i+1}^{I_j} & L \leq t \leq N \\ \frac{1}{T-t+1} \sum_{i=t-T+L}^L x_{i,t-i+1}^{I_j} & N < t \leq T \end{cases} \quad (1.5)$$

En la reconstrucción de las componentes mediante el promedio diagonal no existe pérdida de información porque la serie inicial $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_T)^\top$ queda desagregada como la suma de G series reconstruidas

$$x_t = \sum_{j=1}^G \tilde{x}_{I_j,t}, \quad t = 1, \dots, T \quad (1.6)$$

Las series reconstruidas a partir de los grupos elementales se llamarán series reconstruidas elementales.

1.2.2 Algunas variantes del algoritmo

A continuación se presentan algunas variaciones del algoritmo destinadas a solventar problemas derivados de las características de las series como puede ser la existencia de una tendencia determinista, presencia de ruido con estructura o falta de separabilidad, o bien a mejorar la computación de la SVD.

Las modificaciones más inmediatas son la transformación logarítmica y la detección de la media global. Tal y como se ha descrito el algoritmo, se puede pensar que solo trabaja con series cuyas componentes sean aditivas. Sin embargo, Golyandina y Zhigljavsky (2013) demuestran que ello no es así porque un modelo multiplicativo se puede transformar en uno aditivo con componentes oscilatorias moduladas y sólo aconsejan la transformación logarítmica si la señal de la serie transformada tiene menor rango o mejora la separabilidad. Por otro lado, la sustracción de la media global no afecta a la versión Toeplitz SSA porque trabaja con autocovarianzas pero puede alterar el rango de la matriz de trayectorias influyendo directamente en la SVD de la versión Basic SSA. Para solventar este problema, Golyandina et al. (2001) proponen el centrado simple y doble para la versión Basic SSA. El centrado simple consiste en restar de cada elemento de la matriz de trayectorias la media de su fila y lo proponen cuando la media de la serie es distinta de cero. El centrado doble sustrae de cada elemento de la matriz de trayectorias tanto la media de su fila como de su columna y le añade la media global. El centrado doble lo recomiendan cuando está presente una componente lineal determinista o cuasi-determinista.

La descomposición que realiza SSA supone que el ruido que existe en las series no tiene estructura. Sin embargo, desde los orígenes, Vautard y Ghil (1989) alertan que es posible la presencia de ruido rojo, aquel que en su espectro dominan las bajas frecuencias. Allen y Smith (1996) proponen la variante llamada Monte Carlo SSA para no confundir el ruido rojo con otra componente. Este procedimiento, mediante Toeplitz SSA, separa posibles componentes que forman la señal de un ruido que se supone rojo. A continuación, se realizan simulaciones del supuesto ruido rojo proyectando su matriz de autocovarianzas de cada simulación sobre los autovectores de la serie original para obtener unos autovalores como los elementos de la diagonal de $\mathbf{D}_R = \mathbf{U}^T \mathbf{S}_R \mathbf{U}$ donde \mathbf{U} es la matriz ortogonal con los autovectores de la matriz de autocovarianzas \mathbf{S}_T de la

serie original y \mathbf{S}_R es la matriz de autocovarianzas en cada simulación del supuesto ruido rojo obtenidos sus elementos según (1.3). Por ello, se pueden determinar intervalos de los autovalores de la serie calculados con Toeplitz SSA para contrastar la presencia de ruido rojo. Si un autovalor original está por encima del intervalo correspondiente se asocia con una componente oscilatoria, si permanece dentro del intervalo se considera ruido rojo y si se sitúa por debajo del intervalo no es informativo. Debido a la laboriosidad del procedimiento, los mismos autores, Allen y Smith (1997), proponen, como solución a la presencia de ruido rojo, realizar un “preblanqueo” de la serie de forma que el ruido que permanezca sea blanco. El preblanqueo consiste en rotar los autovectores para maximizar la ratio señal-ruido en lugar de la varianza. Ello requiere el conocimiento de una matriz de autocovarianzas del ruido que, bien se estima como parte del problema a resolver, o bien se especifica como un modelo de control.

El paso del agrupamiento se efectúa bajo el supuesto de separabilidad de las componentes. Sin embargo, desde los inicios de SSA se ha observado que en numerosas ocasiones las series reconstruidas elementales son mezcla de oscilaciones de diferentes frecuencias dificultando el agrupamiento. Golyandina et al. (2001) formulan la variante Sequential SSA que consta de dos fases. Primero, se extrae la tendencia mediante Basic SSA con una longitud de ventana pequeña. Y, después, se aplica Basic SSA a los residuos de la tendencia con una longitud de ventana lo mayor posible para extraer diferentes componentes oscilatorias. No obstante, este método no garantiza la fuerte separabilidad en la que se sustenta SSA. Por ello, Golyandina y Shlemov (2015) proponen dos procedimientos para aproximar las condiciones de fuerte separabilidad. El primero lo denominan Oblique SSA y consiste en realizar una SVD en un sistema de coordenadas no ortogonales para obtener componentes no correlacionadas pero con contribuciones distintas a las originales. Es un método iterativo que trabaja muy bien con tendencias complejas. El segundo lo designan DerivSSA y se basa en que la derivada de una senoide tiene igual frecuencia pero diferente amplitud que la senoide original. También modifica las contribuciones de las componentes pero no su estructura. Es más eficiente que Oblique SSA cuando la separabilidad débil se debe a componentes oscilatorias de igual amplitud aunque distinta frecuencia. Sin embargo, para una correcta interpretación de las componentes es conveniente que sus contribuciones no se alteren. Con esta idea y con el fin de obtener fuerte separabilidad,

Golyandina y Zhigljavsky (2013) plantean realizar un Análisis de Componentes Independientes, ICA, Hyvarinën et al. (2001), después de efectuar Basic SSA utilizando el algoritmo FastICA, Hyvarinën (1999), sobre el conjunto de series reconstruidas elementales asociadas a un grupo I y obtener componentes separables. No obstante, Golyandina y Lomtev (2016) sustituyen el algoritmo FastICA por el método AMUSE, Tong et al. (1990), porque es más apropiado para series temporales dando lugar al algoritmo SSA-AMUSE. Este algoritmo tiene como entrada la matriz $L \times N$ asociada al grupo I obtenida con Basic SSA sobre la que aplica la expansión de la SVD usada en AMUSE para estimar componentes oscilatorias independientes.

Finalmente, se repasan las variaciones destinadas a realizar un cálculo más eficiente de la SVD. SSA consume gran cantidad de tiempo en la computación de los vectores singulares con el producto de una matriz Hankel por un vector y en el promedio diagonal con el operador Hankel. Korobeynikov (2009) propone realizar estas operaciones con la Transformada Rápida de Fourier para facilitar la SVD de la matriz de trayectorias mediante el algoritmo Lanczos e invertir un tiempo menor. También Hassani y Thomakos (2010) introducen dos modificaciones en SSA para agilizar la SVD de la matriz de trayectorias; una modificación está basada en el estimador de mínima varianza y otra en la teoría de la información.

1.2.3 Parámetros óptimos en SSA

En el algoritmo de SSA descrito existen dos parámetros. Uno es la longitud de la ventana L . El otro es el rango de la señal que se define como la dimensión del subespacio al que pertenece su matriz de trayectorias y que está estrechamente relacionado con el agrupamiento. En este apartado se revisan las aportaciones existentes en la literatura sobre la selección óptima de estos parámetros.

1) Longitud de la ventana

La longitud de la ventana L es el principal parámetro de SSA cualquiera que sea la versión elegida. Las componentes reconstruidas elementales se obtienen a partir de la proyección de la matriz de trayectorias y, por ello, una inapropiada selección de L puede originar una errónea descomposición de la serie. La incorrecta descomposición de la serie está asociada con la falta de separabilidad. Como señalan Golyandina y

Zhigljavsky (2013), diferentes valores de L pueden influir en las diversas formas de separabilidad que se definirán en la sección cuarta.

La única regla universal que existe sobre la longitud de la ventana es $L \leq T/2$ porque la SVD de las matrices de trayectorias con longitudes de ventana igual a L y $N = T - L + 1$ son equivalentes debido a que los vectores singulares por la izquierda de una matriz de trayectorias son los vectores singulares por la derecha de la otra, es decir, los vectores singulares por la izquierda de \mathbf{X} son los vectores singulares por la derecha de \mathbf{X}^T y viceversa. Hassani et al. (2011) demuestran analíticamente que el valor óptimo de la longitud de la ventana, bajo el supuesto de separabilidad, es $L \leq \lfloor \frac{T+1}{2} \rfloor$ siendo $\lfloor \cdot \rfloor$ el operador parte entera. Este resultado es coherente con la recomendación empírica de que en la mayoría de las ocasiones el valor más apropiado de la ventana es $L \approx T/2$, Golyandina (2010). Sin embargo, desde los inicios de SSA, tanto Vautard et al. (1992) como Elsner y Tsonis (1996), observan que a mayor longitud de la ventana se extraen componentes con armónicos de periodo más elevado pero disminuye la fiabilidad porque los errores estadísticos se trasladan a las autocovarianzas. Para prevenir ese efecto, los primeros proponen una ventana de $L = T/3$ y los segundos de $L = T/4$.

En la literatura existe consenso en que la longitud óptima de la ventana vendrá dada por el objetivo de la descomposición efectuada con SSA. Para valores elevados de la ventana se garantiza una mayor separabilidad por ser esta una propiedad asintótica y se obtiene un mayor número de componentes reconstruidas asociadas a bajas frecuencias o periodos elevados. Sin embargo, como describen Golyandina y Zhigljavsky (2013), si la tendencia o las oscilaciones de periodos elevados tienen una estructura compleja, para describirlas, puede ser necesario usar un número elevado de autovectores asociados con autovalores relativamente pequeños y próximos a los correspondientes a oscilaciones de periodos pequeños y/o ruido. Por el contrario, si se elige una longitud de ventana pequeña, se corre el riesgo de obtener series reconstruidas elementales que sean una mezcla de oscilaciones de muy diferentes periodos. Por ello, estos autores recomiendan analizar el periodograma de la serie para seleccionar la longitud de la ventana. En consecuencia, cuando la tendencia es predominante y el objetivo de la descomposición es suavizar o extraer solo la tendencia de la serie, no es necesario utilizar una longitud de ventana elevada. Si la serie presenta estacionalidad, será conveniente que la longitud

de la ventana sea múltiplo del periodo estacional para poder extraer la componente estacional de forma adecuada. En general, si existe una componente periódica, se aconseja que la longitud de la ventana sea proporcional a su periodo y si dos componentes oscilatorias tienen periodos próximos entonces, además, la longitud de la ventana debe ser lo mayor posible. En cualquier caso, Golyandina y Zhigljavsky (2013) sugieren realizar SSA con diferentes longitudes de ventana. La recomendación previa cuando existe una componente periódica es avalada teóricamente en el trabajo de Yang et al. (2016) porque, basados en la teoría de Szegö, establecen que la longitud de la ventana para la componente oscilatoria que se desea extraer en un electrocardiograma debe ser mayor que el cociente entre su periodo y el periodo de muestreo.

Independiente de estas reglas de carácter general, en los últimos años se han establecido diferentes criterios estadísticos para seleccionar la longitud de la ventana en función de la serie analizada. Así, el trabajo de Khan y Poskit (2013) determina la longitud de la ventana en función de la convergencia de la función de autocovarianzas según tres contrastes estadísticos para los que derivan su distribución asintótica. Uno de ellos está basado en el clásico estadístico tipo “portmanteau” de series temporales y los otros dos resultan del principio de momento condicional. Wang et al. (2015) utilizan la función de autocorrelación para determinar el valor óptimo de la ventana. Para diferentes longitudes de ventana entre 20 y $T/2$ hallan el retardo donde se anula la función de autocorrelación y la media de esos retardos es la longitud óptima de la ventana. Sin embargo, recientemente, Xu et al. (2018) utilizan un criterio espectral. Calculan la traza de la matriz Toeplitz de covarianzas mediante la suma de los autovalores asintóticos, es decir, la suma de las estimaciones de la densidad espectral, para diferentes valores consecutivos de L . Entonces, el valor óptimo será aquel para el que dicha traza experimente un incremento pequeño por primera vez.

2) Rango de la señal: Agrupamiento

El número de autovalores o valores singulares no nulos es el rango de la matriz de trayectorias de la serie, $d = \text{rank}(\mathbf{X}) \leq L$. Si el valor de d permanece fijo cuando aumenta L con $L < T/2$, se dice que la serie es de rango finito d , Golyandina et al. (2001). La descomposición de la serie en señal más ruido con SSA permite afirmar que el rango de la señal, r , será menor que d . Las propiedades de la SVD garantizan que

de todas las matrices $\tilde{\mathbf{X}}_r$ de rango r con dimensión $L \times N$, la matriz $\sum_{i=1}^r \mathbf{X}_i$ proporciona la mejor aproximación a la matriz de trayectorias \mathbf{X} , es decir, minimiza $\|\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}_r\|_F$. Por tanto, los primeros r autovectores que mejor aproximan la matriz de trayectorias generan el subespacio de dimensión r de \mathbb{R}^L relativo a la señal. El siguiente ejemplo ayuda a comprender mejor estos conceptos. Sean dos series temporales $x_t^{(1)} = \exp(t/100)$ y $x_t^{(2)} = 0.2 \sin(2\pi t/5)$. La primera es una serie exponencial con rango 1, el rango de su matriz de trayectorias, la segunda es una serie sinusoidal de periodo 5 con rango 2 y la serie suma $x_t = x_t^{(1)} + x_t^{(2)}$ tiene rango 3. Se genera la serie suma, por ejemplo, para una longitud de $T = 200$ y se realiza Basic SSA con $L = 40$ resultando tres autovalores no nulos, así $d = 3$. De las tres componentes reconstruidas elementales resulta que la asociada al primer autovector es una exponencial y las asociadas al segundo y tercero son sinusoides. Por tanto, se obtienen dos conjuntos disjuntos de índices: $I_1 = \{1\}$ y $I_2 = \{2, 3\}$. La contribución de la matriz \mathbf{X}_{I_1} relativa a la exponencial es del 99.8% y se asocia a la señal con rango $r = 1$; la matriz \mathbf{X}_{I_2} se relaciona con el ruido, suma de las sinusoides, con rango $r = 2$.

Cuando el fin es realizar predicciones o eliminar el ruido de la serie, solo es necesario conocer el número r de los primeros autovectores que generan la señal. Un método sencillo consiste en seleccionar los primeros autovectores para los que la contribución acumulada de sus matrices elementales sea mayor que un valor establecido. No obstante, existen procedimientos estadísticos que reducen esa subjetividad. Vautard et al. (1992) proponen un método heurístico mediante simulaciones Monte Carlo bajo la hipótesis de ruido blanco para un número variable de componentes reconstruidas elementales asociadas a los menores autovalores. Un enfoque diferente es el utilizado por Ghodsi y Yarmohammadi (2014). Miden la precisión de las predicciones sobre un conjunto de datos observados en términos de la raíz del error cuadrático medio, RMSE, para diferentes valores de r . Y, recientemente, Papailias y Thomakos (2017) calculan la diferencia entre el peso teórico de un autovalor, obtenido mediante el suavizado exponencial, y su peso relativo sobre el mayor autovalor eligiendo los autovectores relativos a los primeros r autovalores que minimizan la suma de los cuadrados de esas diferencias.

Sin embargo, cuando se desea desagregar la señal en una tendencia más componentes oscilatorias de frecuencias de interés, es decir, formar varios grupos de autovectores, los procedimientos deben tener en cuenta cada autovector de forma individual o por pares si sus autovalores asociados están muy próximos. Los métodos más sencillos son la matriz de w -correlaciones, el gráfico de cada autovector considerado como una serie y el gráfico de dispersión de pares de autovectores, Golyandina et al. (2001), como se verá con más detalle en la sección cuarta. La matriz de w -correlaciones ayuda a agrupar las series reconstruidas elementales; si la w -correlación de dos series reconstruidas elementales está próxima a uno indica que comparten armónico, no son separables, y si su valor es casi nulo significa que son débilmente separables y no se pueden asociar a la misma frecuencia. Del examen de los gráficos individuales de los autovectores se puede obtener el periodo de oscilación de cada uno de ellos y entonces se procede a agrupar según el objetivo del análisis. Y, el gráfico de dispersión de pares de autovectores evidencia aquellos pares que corresponden a una misma componente oscilatoria de periodo p si forman un polígono de p vértices. Dichos métodos, aunque sencillos, requieren la intervención del analista con cierta subjetividad. Para eliminar esa subjetividad, se han definido procedimientos estadísticos que de forma automática identifican los periodos asociados a las series reconstruidas elementales facilitando el agrupamiento. Estos procedimientos se han reseñado y descrito sucintamente en la introducción estando la mayoría basados en una estimación de la densidad espectral. Pero, como ya se avanzó, la identificación de la frecuencia asociada a un autovector o serie reconstruida la efectúan ex-post y con incertidumbre.

1.2.4 Tabla-resumen de la literatura revisada en SSA

A continuación se presenta una tabla-resumen, en orden cronológico, con las contribuciones revisadas en la literatura sobre la metodología de SSA.

Autor(es)	Año	Contribución
Broomhead y King	1986	Dos de los creadores de SSA, versión Basic, como solución a problemas de dinámica de sistemas no lineales. La matriz de covarianzas es simétrica.
Fraedrich	1986	Otro de los creadores de SSA. Primera aplicación práctica, utiliza series temporales climáticas.

Vautard y Ghil	1989	Bajo el supuesto de estacionariedad desarrollan la versión Toeplitz para SSA donde la matriz de covarianzas es Toeplitz simétrica. Alertan de la posible presencia de ruido rojo.
Ghil y Mo	1991	Primera automatización ex-post de SSA. Usan las correlaciones cruzadas del par de autovectores relativos a un par de autovalores muy próximos para saber si están en cuadratura.
Vautard et al.	1992	Derivan el algoritmo del promedio diagonal para obtener las componentes reconstruidas de igual longitud que la serie original. Sugieren un test basado en el periodograma para establecer si el par de autovectores relativos a un par de autovalores muy próximos están asociados al mismo armónico. Mediante simulaciones Monte Carlo, bajo la hipótesis de ruido blanco, determinan el rango de la señal.
Allen y Smith	1996	Proponen la variante llamada Monte Carlo SSA para no confundir el ruido rojo con otra componente. Procedimiento muy laborioso.
Elsner y Tsonis	1996	Aproximación sencilla a SSA con la revisión de las aportaciones hasta el momento.
Allen y Smith	1997	Debido a la laboriosidad del método de 1996 para eliminar el ruido rojo, proponen rotar los autovectores para maximizar la ratio señal-ruido de forma que el ruido que permanezca sea blanco. Requiere conocer la matriz de autocovarianzas del ruido.
Danilov y Zhigljavsky	1997	Presentan la versión Caterpillar desarrollada en la URSS una década anterior.
Golyandina et al.	2001	Presentan una descripción detallada pero sencilla tanto de la metodología de SSA hasta el momento, como de la teoría matemática que la sustenta. Destacan, entre otros, el centrado simple y doble para no alterar el rango de la matriz de trayectorias en la versión Basic, los métodos gráficos para el agrupamiento y la variante Sequential SSA para evitar que las series reconstruidas elementales sean mezcla de oscilaciones de diferentes frecuencias.
Ghil et al.	2002	Comparan las versiones Basic y Toeplitz de SSA con series climáticas. Determinan que la versión Toeplitz reduce mejor el ruido pero tiene un sesgo levemente mayor que la versión Basic cuando la serie es fuertemente no estacionaria.
Alexandrov y Golyandina	2005	Perfeccionan el test de Vautard et al. (1992) para la extracción automática de armónicos estableciendo umbrales de ajuste.
Hassani	2007	Con casos prácticos demuestra, mediante el error absoluto medio, que SSA predice con mayor precisión que los modelos ARIMA y el método de Holt-Winters.
Alonso y Salgado	2008	Utilizan el algoritmo de k-medias en el análisis de conglomerados sobre la matriz de w-correlaciones para agrupar armónicos.

Alexandrov	2009	Extiende el test de Alexandrov y Golyandina (2005) para extraer la tendencia.
Korobeynikov	2009	Propone obtener los autovectores y realizar el promedio diagonal utilizando la Transformada Rápida de Fourier mediante el algoritmo Lanczos para invertir menor tiempo.
Bilancia y Campobasso	2010	Utilizan un método jerárquico con enlace completo en el análisis de conglomerados sobre la matriz de w-correlaciones para agrupar armónicos.
Bozzo et al.	2010	En la versión Toeplitz, a partir de la teoría de Szegő, asignan cada autovalor de forma ex-post con una frecuencia.
Golyandina	2010	Realiza diferentes recomendaciones sobre la longitud de la ventana para aumentar la precisión al descomponer una serie en señal más ruido.
Harris y Yuan	2010	A partir de la versión Toeplitz de SSA interpretan la obtención de las componentes principales y de las series reconstruidas como una operación de filtrado. También proporcionan una manera sencilla de obtener sus densidades espectrales.
Hassani y Thomakos	2010	Introducen dos modificaciones en SSA para agilizar la versión Basic; una modificación está basada en el estimador de mínima varianza y otra en la teoría de la información. Además, estudian el comportamiento de SSA en series con raíces unitarias y la forma de aplicar SSA para chequear la causalidad.
Usevich	2010	Estudia cómo afectan las raíces del polinomio característico de la serie a la separabilidad, predicción y obtención de la señal.
Hassani et al.	2011	Demuestran analíticamente el valor máximo de la longitud de la ventana bajo el supuesto de separabilidad.
Carvalho et al.	2012	Estiman el ciclo económico del PIB de EE.UU. mediante SSA y obtienen mejor resultado para la revisión en tiempo real que la obtenida con filtros paso en banda.
Kume	2012	Considera los autovectores como filtros. La función de ganancia de los filtros ayuda al agrupamiento y permite detectar un cambio estructural.
Golyandina y Zhigljavsky	2013	Describen de forma precisa la metodología sobre SSA hasta el momento con numerosos ejemplos prácticos. Prestan una atención especial a la separabilidad de forma que analizan los efectos que la longitud de la ventana tiene sobre ella y, para aumentar la separabilidad entre las componentes, proponen realizar un análisis de componentes independientes, ICA, con el algoritmo FastICA después de efectuar Basic SSA dando lugar al algoritmo SSA-ICA. También dedican un espacio a la identificación automática ex-post de las componentes.
Khan y Poskit	2013	Determinan la longitud óptima de la ventana, para cada serie, en función de la convergencia de la función de autocovarianzas según diferentes contrastes estadísticos.

Ghodsí y Yarmohammadi	2014	Determinan el número de autovectores que generan la señal midiendo la precisión con el error cuadrático medio de las predicciones sobre un conjunto de datos observados.
Hassani et al.	2014	Realizan un estudio práctico sobre la influencia de los atípicos en SSA deduciendo que afecta al rango de la matriz de trayectorias.
Golyandina y Shlemov	2015	Proponen dos procedimientos para aproximar las condiciones de fuerte separabilidad: Oblique SSA y DerivSSA.
Wang et al.	2015	Determinan la longitud óptima de la ventana, para cada serie, mediante la media de los retardos de la función de autocorrelación hasta el primer valor nulo.
Golyandina y Lomtev	2016	Sustituyen el método FastICA por AMUSE en el algoritmo SSA-ICA para aumentar la separabilidad de las componentes dando lugar al algoritmo SSA-AMUSE.
Yang et al.	2016	Basados en la teoría de Szegő, establecen que la longitud de la ventana para la componente oscilatoria que se desea extraer debe ser mayor que el cociente entre su periodo y el periodo de muestreo.
Arteche y García-Enríquez	2017	Aplican SSA a modelos de volatilidad estocástica y agrupan los autovectores cuya contribución espectral relativa es mayor que para la serie analizada en un intervalo de frecuencias.
Carvalho y Rúa	2017	Proponen el uso del estadístico g de Fisher sobre el periodograma de la componente principal para asignar una frecuencia a cada serie reconstruida elemental.
Khan y Poskitt	2017	Exponen resultados teóricos sobre los diferentes algoritmos de predicción con SSA.
Papailias y Thomakos	2017	Seleccionan los autovectores que generan la señal mediante el suavizado exponencial de los autovalores dando lugar al método EXSSA. Lo implementan sobre series macroeconómicas.
Safí et al.	2018	Emplean SSA para el análisis de series biométricas.
Xu et al.	2018	Determinan la longitud óptima de la ventana, para cada serie, mediante el mínimo incremento de la traza de la matriz de covarianzas en la versión Toeplitz.
Yurova et al.	2018	Aplicaciones recientes de SSA a la climatología.

1.3 Algoritmo de Circulant SSA

En esta sección se detalla el algoritmo que se propone, *Circulant SSA*, y para ello, primero, se revisan las propiedades asintóticas de las matrices Toeplitz. Además, se prueba su equivalencia con las otras versiones de SSA y se justifica el uso con series no estacionarias.

1.3.1 Propiedades asintóticas de la matriz de covarianzas retardadas

Sea x_t una serie temporal estacionaria de valores reales y media nula iniciada en $t = -\infty$. Ambas dimensiones de la matriz de trayectorias se pueden hacer tan grandes como se quiera y construir una secuencia de matrices de trayectorias en función de la longitud de la ventana L . En consecuencia, conocida la serie infinita, mediante la versión Toeplitz de SSA se puede disponer de la secuencia poblacional de matrices de covarianzas retardadas en función de L

$$\mathbf{T}_L = \left[\mathbf{T}_{jk} = \gamma_{|j-k|} ; \quad j, k = 1, \dots, L \right]. \quad (1.7)$$

La matriz definida en (1.7) es Toeplitz simétrica cuya apariencia es

$$\mathbf{T}_L = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{L-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \ddots & \vdots \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \ddots & \gamma_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \gamma_1 \\ \gamma_{L-1} & \cdots & \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 \end{pmatrix},$$

donde $\{\gamma_m\}_{m=0}^{\infty}$ es la función de autocovarianzas de la serie x_t . Además, las matrices \mathbf{T}_L son normales en sentido algebraico, $\mathbf{T}_L \mathbf{T}_L^T = \mathbf{T}_L^T \mathbf{T}_L$, por ser simétricas y definidas no negativas.

El supuesto de sumabilidad cuadrática para la secuencia infinita $\{\gamma_m\}$ que define las matrices \mathbf{T}_L , es decir,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |\gamma_m|^2 < \infty \Leftrightarrow \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m|^2 < \infty, \quad (1.8)$$

asegura la existencia y continuidad de la serie de Fourier $f(\omega)$ definida por

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m \exp(i2\pi m\omega) \\ &= \gamma_0 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \cos(2\pi m\omega) \end{aligned} \quad \omega \in [0, 1], \quad (1.9)$$

de forma que $f(\omega)$ es 2π -periódica y donde ω representa la frecuencia en ciclos por unidad de tiempo. En contraposición, las covarianzas γ_m se pueden recuperar con la inversa de Fourier

$$\gamma_m = \int_0^1 f(\omega) \exp(-i2\pi m\omega) d\omega, \quad m = 0, 1, \dots \quad (1.10)$$

Recíprocamente, a partir de una función $f(\omega)$ continua y 2π -periódica con (1.10) se puede obtener la secuencia (1.7) de matrices Toeplitz de dimensión $L \times L$ como

$$\mathbf{T}_L(f) = \left[\mathbf{T}_{jk} = \int_0^1 f(\omega) \exp(-i2\pi|j-k|\omega) d\omega, \quad j, k = 1, \dots, L \right], \quad (1.11)$$

donde la función $f(\omega)$ se denomina función generadora o símbolo de la secuencia $\{\mathbf{T}_L(f)\}$ de matrices Toeplitz.

La función f de (1.9) es real porque la matriz \mathbf{T}_L de (1.7) es simétrica, se corresponde con la densidad espectral de la serie x_t y es continua en $[0, 1]$. Así, la condición de Gutiérrez-Gutiérrez y Crespo (2012) que f sea continua relaja la exigencia de Gray (2006) que sea de clase Wiener.

La función real f , continua y 2π -periódica, es no negativa cuando las matrices Toeplitz simétricas de la secuencia definida por (1.11) son definidas no negativas, Grenander y Szegö (1958). Para evitar los problemas que surgen cuando dicha función tiene un máximo o mínimo en un punto aislado, Gray (2006) define el ínfimo esencial y el supremo esencial los cuales equivalen al ínfimo, $m_f = \inf(f)$, y al supremo, $M_f = \sup(f)$, respectivamente, exceptuando los puntos aislados x tales que $f(x) > m_f$ ó $f(x) < M_f$. Bajo las condiciones de continuidad y periodicidad de la función f , si $\tau_{L,k}$, $k = 1, \dots, L$, son los autovalores de la matriz $\mathbf{T}_L(f)$ se verifica el teorema fundamental de Szegö, Grenander y Szegö (1958), es decir,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L g(\tau_{L,k}) = \int_0^1 g(f(\omega)) d\omega \quad (1.12)$$

para cualquier función $g(x)$ continua en $[m_f, M_f]$. Como consecuencia del teorema de Szegö se deduce que los autovalores $\tau_{L,k}$ están acotados, $m_f \leq \tau_{L,k} \leq M_f$. Además, en este contexto, Gray (2006) demuestra que dichos autovalores son positivos, $0 < \tau_{L,k} \leq M_f$, incluso si $m_f = 0$ cuando f es no negativa y solo se anula en un conjunto numerable de puntos.

Un tipo especial de matrices Toeplitz son las matrices circulantes. Estas se caracterizan porque cada fila es un desplazamiento a la derecha de la fila superior. Es decir, para una matriz circulante \mathbf{C}_L de dimensión $L \times L$ sus elementos estarían dados por $c_{jk} = c_{(k-j) \bmod L}$ con la siguiente apariencia

$$\mathbf{C}_L = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{L-1} \\ c_{L-1} & c_0 & c_1 & \ddots & \vdots \\ c_{L-2} & c_{L-1} & c_0 & \ddots & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_1 \\ c_1 & \cdots & c_{L-2} & c_{L-1} & c_0 \end{pmatrix}.$$

Así, una matriz circulante queda definida por su primera fila. La función real f , continua y 2π -periódica, asociada con la matriz Toeplitz $\mathbf{T}_L(f)$ permite construir una secuencia de matrices circulantes $\mathbf{C}_L(f)$ con fila superior $\mathbf{c} = [c_0, c_1, \dots, c_{L-1}]$ donde

$$c_m = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} f(k/L) \exp(i2\pi m k/L), \quad m = 0, \dots, L-1. \quad (1.13)$$

Toda matriz circulante es diagonalizable unitariamente porque es una matriz normal en sentido algebraico. Una de las características más interesantes de las matrices circulantes es la facilidad con la que se derivan sus autovalores y autovectores correspondientes, Lancaster (1969).

Los autovalores $\lambda_{L,k}$ de la matriz $\mathbf{C}_L(f)$ están dados por

$$\lambda_{L,k} = \sum_{m=0}^{L-1} c_m \exp(-i2\pi m(k-1)/L) = f\left(\frac{k-1}{L}\right), \quad k = 1, \dots, L. \quad (1.14)$$

Es decir, los autovalores de la matriz circulante $\mathbf{C}_L(f)$ coinciden con la densidad espectral en las frecuencias igualmente espaciadas $\omega_k = \frac{k-1}{L}$ para $k=1, \dots, L$. Además, los correspondientes autovectores \mathbf{u}_k son iguales a

$$\mathbf{u}_k = L^{\frac{-1}{2}} \left[\exp(-i2\pi(j-1)(k-1)/L); j=1, \dots, L \right], \quad k=1, \dots, L. \quad (1.15)$$

La matriz \mathbf{U} con los autovectores \mathbf{u}_k por columnas es la matriz unitaria de Fourier que es igual para todas las matrices circulantes de tamaño $L \times L$. Si $\mathbf{\Psi} = \text{diag}(\lambda_{L,1}, \dots, \lambda_{L,L})$, la diagonalización de \mathbf{C}_L es $\mathbf{\Psi} = \mathbf{U}^* \mathbf{C}_L \mathbf{U} = L^{\frac{1}{2}} \text{diag}(\mathbf{Uc})$, donde \mathbf{U}^* denota transpuesta conjugada. Así, de forma sencilla se calculan los autovalores de \mathbf{C}_L , es decir, la densidad espectral de la serie x_t en las frecuencias $\omega_k = \frac{k-1}{L}$ para $k=1, \dots, L$.

Las secuencias de matrices $\{\mathbf{T}_L(f)\}$ y $\{\mathbf{C}_L(f)\}$ son asintóticamente equivalentes porque los autovalores de las matrices $\mathbf{T}_L(f)$ y $\mathbf{C}_L(f)$ están acotados y $\lim_{L \rightarrow \infty} L^{\frac{-1}{2}} \|\mathbf{T}_L(f) - \mathbf{C}_L(f)\|_F = 0$, se verifican las condiciones de la definición dada por Gray (1972). De forma abreviada, se dirá que las matrices $\mathbf{T}_L(f)$ y $\mathbf{C}_L(f)$ son asintóticamente equivalentes y se expresará como $\mathbf{T}_L(f) \sim \mathbf{C}_L(f)$. En esta situación, según el teorema de Szegő, los conjuntos $\{\tau_{L,k}\}$ y $\{f(\frac{k-1}{L})\}$ están asintóticamente igualmente distribuidos en sentido Weyl¹ como demuestra Trench (2003).

En la práctica existe una limitación porque la ecuación (1.13) requiere conocer o bien la función f , o bien la secuencia infinita $\{\gamma_m\}_{m=0}^{\infty}$ pero se dispone sólo del conjunto finito $\{\gamma_m\}_{m=0}^{L-1}$ que origina una aproximación de dicha función f . En este contexto, Pearl (1973) propone una aproximación \tilde{f} al definir la matriz circulante $\mathbf{C}_L(\tilde{f})$ cuyos elementos de su fila superior $\tilde{\mathbf{c}} = [\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{L-1}]$ están dados por

¹ Weyl define dos conjuntos de números reales $\{a_{n,k}\}_{k=1}^n$ y $\{b_{n,k}\}_{k=1}^n$ acotados en el intervalo $[-K, K]$ como asintóticamente igualmente distribuidos si para una función F continua en $[-K, K]$, se verifica que $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \sum_{k=1}^n (F(a_{n,k}) - F(b_{n,k})) = 0$.

$$\tilde{C}_m = \frac{L-m}{L} \gamma_m + \frac{m}{L} \gamma_{L-m} . \quad (1.16)$$

La opción de Pearl (1973) es más efectiva que truncar la serie de Fourier dada en (1.9) y sustituirla en (1.13), Gray (2006), porque garantiza teóricamente que la matriz circulante construida $C_L(\tilde{f})$ es simétrica y definida no negativa como $T_L(f)$.

Las matrices $T_L(f)$ y $C_L(\tilde{f})$ son asintóticamente equivalentes, $T_L(f) \sim C_L(\tilde{f})$, como demuestra Pearl (1973) y la propiedad transitiva de la equivalencia asintótica garantiza que las matrices $C_L(f)$ y $C_L(\tilde{f})$ también son asintóticamente equivalentes, $C_L(f) \sim C_L(\tilde{f})$. Por tanto, si $\tilde{\Psi} = U^* C_L U = L^{\frac{1}{2}} \text{diag}(U\tilde{c})$ es la diagonalización unitaria de $C_L(\tilde{f})$ donde U es la matriz unitaria de Fourier y $\tilde{\Psi} = \text{diag}(\tilde{\lambda}_{L,1}, \dots, \tilde{\lambda}_{L,L})$, según el teorema fundamental de Szegő, los conjuntos $\{\tau_{L,k}\}$ y $\{\tilde{\lambda}_{L,k}\}$ están asintóticamente igualmente distribuidos. A partir de (1.14) se obtienen los autovalores $\tilde{\lambda}_{L,k}$

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_{L,k} &= \sum_{m=0}^{L-1} \left(\frac{L-m}{L} \gamma_m + \frac{m}{L} \gamma_{L-m} \right) \exp(-i2\pi m(k-1)/L) \\ &= \sum_{m=1-L}^{L-1} \frac{L-|m|}{L} \gamma_m \exp(-i2\pi m(k-1)/L) = \tilde{f}\left(\frac{k-1}{L}\right), \quad (1.17) \\ &\approx \sum_{m=1-L}^{L-1} \gamma_m \exp(-i2\pi m(k-1)/L) \approx f\left(\frac{k-1}{L}\right) \end{aligned}$$

Dichos autovalores, para valores elevados de L , aproximan la función de densidad espectral de la serie x_t en las frecuencias $\omega_k = \frac{k-1}{L}$ para $k=1, \dots, L$ porque $\gamma_m \rightarrow 0$.

1.3.2 Descripción del algoritmo Circulant SSA

A partir de los resultados del apartado anterior, se diseña una nueva versión del algoritmo de SSA modificando los pasos 2 y 3 descritos en la Sección 2. Esta versión se denomina *Circulant SSA* porque hace uso de las propiedades de las matrices circulantes.

Sea x_t una serie temporal estacionaria de valores reales de media nula disponiendo de una muestra de longitud T organizada en un vector $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_T)^\top$ y sea L la longitud de la ventana. Los pasos reformados se describen a continuación.

Paso 2: Descomposición.

Se comienza estimando la función de autocovarianzas de dicha serie temporal mediante la fórmula dada en (1.3)

$$\hat{\gamma}_m = \frac{1}{T-m} \sum_{t=1}^{T-m} x_t x_{t+m}, \quad m = 0, 1, \dots, L-1.$$

A partir de la sucesión $\{\hat{\gamma}_m\}_{m=0}^{L-1}$ se construye una matriz simétrica circulante \mathbf{S}_C cuyos elementos de su primera fila $\hat{\mathbf{c}} = [\hat{c}_0, \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{L-1}]$ se calculan siguiendo (1.16) como

$$\hat{c}_m = \frac{L-m}{L} \hat{\gamma}_m + \frac{m}{L} \hat{\gamma}_{L-m}. \quad (1.18)$$

Así, al igual que las matrices $\mathbf{T}_L(f)$ y $\mathbf{C}_L(\tilde{f})$, la secuencia de matrices circulantes \mathbf{S}_C es asintóticamente equivalente a la secuencia de matrices Toeplitz \mathbf{S}_T de (1.3) y sus respectivos conjuntos de autovalores están asintóticamente igualmente distribuidos.

Si \mathbf{U} es la matriz unitaria de Fourier, los autovalores λ_k de la matriz \mathbf{S}_C se obtienen mediante la diagonalización ortogonal

$$\mathbf{\Psi} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_L) = \mathbf{U}^* \mathbf{S}_C \mathbf{U} = L^{\frac{1}{2}} \text{diag}(\mathbf{U}\hat{\mathbf{c}}). \quad (1.19)$$

Los autovalores λ_k , por (1.17), estiman la densidad espectral de la serie x_t en las frecuencias $\omega_k = \frac{k-1}{L}$ para $k=1, \dots, L$, es decir,

$$\hat{f}_x\left(\frac{k-1}{L}\right) = \lambda_k. \quad (1.20)$$

La densidad espectral es simétrica respecto de la frecuencia $\frac{1}{2}$ como se puede verificar en las ecuaciones (1.9) y (1.17). Por ello, los autovalores λ_k son iguales dos a dos (excepto para $k=1$) siendo los correspondientes pares $(\lambda_2, \lambda_L), (\lambda_3, \lambda_{L-1}), \dots, (\lambda_{\frac{L+1}{2}}, \lambda_{\frac{L+3}{2}})$ cuando L es impar y $(\lambda_2, \lambda_L), (\lambda_3, \lambda_{L-1}), \dots, (\lambda_{\frac{L}{2}}, \lambda_{\frac{L}{2}+2})$ cuando L es par.

Paso 3: Agrupamiento.

Los autovectores correspondientes a los autovalores λ_k , en la diagonalización unitaria de la matriz circulante definida por \mathbf{S}_C , son las columnas \mathbf{u}_k de la matriz unitaria de Fourier \mathbf{U} . De esta forma, los autovectores conjugados se corresponden con los pares de autovalores idénticos. De este modo, si $\bar{\mathbf{u}}$ indica conjugado, se tiene que $\mathbf{u}_k = \bar{\mathbf{u}}_{L+2-k}$ y sus autovalores correspondientes son iguales, $\lambda_k = \lambda_{L+2-k}$, para $k = 2, \dots, G$ donde $G = \lfloor \frac{L+1}{2} \rfloor$.

En esta situación, las proyecciones complejas de \mathbf{X} sobre las direcciones de los autovectores \mathbf{u}_k y \mathbf{u}_{L+2-k} , respectivamente $\mathbf{X}^\top \mathbf{u}_k$ y $\mathbf{X}^\top \mathbf{u}_{L+2-k}$, son oscilaciones de igual periodo, es decir, están asociadas a la misma frecuencia $\omega_k = \frac{k-1}{L}$. Ello motiva la formación de los grupos elementales por frecuencias $B_k = \{k, L+2-k\}$ para $k = 2, \dots, G$, con $B_1 = \{1\}$ y, ocasionalmente, $B_{\frac{L}{2}+1} = \{\frac{L}{2}+1\}$ si L es par. Las matrices elementales por frecuencias \mathbf{X}_{B_k} , correspondientes a los grupos B_k anteriores para $k = 2, \dots, G$, están dadas por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_{B_k} &= \mathbf{X}_k + \mathbf{X}_{L+2-k} \\
 &= \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^* \mathbf{X} + \mathbf{u}_{L+2-k} \mathbf{u}_{L+2-k}^* \mathbf{X} \\
 &= (\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^* + \bar{\mathbf{u}}_k \bar{\mathbf{u}}_k^*) \mathbf{X} \quad , \\
 &= 2(\mathcal{R}_{\mathbf{u}_k} \mathcal{R}_{\mathbf{u}_k}^\top + \mathcal{I}_{\mathbf{u}_k} \mathcal{I}_{\mathbf{u}_k}^\top) \mathbf{X}
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

donde $\mathcal{R}_{\mathbf{u}_k} = \text{real}(\mathbf{u}_k)$ y $\mathcal{I}_{\mathbf{u}_k} = \text{imag}(\mathbf{u}_k)$. De este modo, tanto la matriz elemental por frecuencias \mathbf{X}_{B_k} como la componente oscilatoria obtenida en su reconstrucción son reales y están asociadas a una determinada frecuencia conocida *ex-ante*.

A continuación, las series reconstruidas a partir de las matrices elementales por frecuencias obtenidas según (1.21), identificadas cada una con un periodo, se agrupan en función del objetivo del análisis: extraer la tendencia y/o el ciclo económico, suavizar la serie o corregirla de estacionalidad. Este algoritmo agrupa las componentes *ex-ante* de forma automática. Así, si una serie temporal presenta estacionalidad y la longitud de la ventana coincide con el periodo estacional, la primera serie reconstruida,

asociada a la frecuencia cero, corresponde a la serie desestacionalizada. Por contra, si la longitud de la ventana es grande, las primeras series reconstruidas corresponden a las frecuencias asociadas a la tendencia y al ciclo económico que son conocidas *ex-ante*.

Por otro lado, (1.21) origina que las matrices elementales \mathbf{X}_k , asociadas a los grupos elementales $I_k = \{k\}$, $k = 1, \dots, L$, también sean reales debido a la siguiente proposición en la que se construye una base ortonormal para matrices circulantes.

Proposición 1.1. Sea $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_L]$ la matriz unitaria de Fourier. El conjunto de vectores formado por \mathbf{u}_1 , $\sqrt{2}\mathcal{R}_{\mathbf{u}_k}$ y $\sqrt{2}\mathcal{I}_{\mathbf{u}_k}$ para $k = 2, \dots, G$ y, ocasionalmente, $\mathbf{u}_{\frac{L+1}{2}}$ si L es par, constituyen una base ortonormal perteneciente a \mathbb{R}^L que diagonaliza ortogonalmente cualquier matriz circulante \mathbf{C} .

Demostración. Debido a que las soluciones de la ecuación $z^n = 1$, de incógnita z , sobre el círculo unidad suman cero y \mathbf{U} es una matriz unitaria se tiene que

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\mathcal{R}_{\mathbf{u}_j}^\top \sqrt{2}\mathcal{R}_{\mathbf{u}_k} &= \frac{1}{2}(\mathbf{u}_j + \bar{\mathbf{u}}_j)^\top (\mathbf{u}_k + \bar{\mathbf{u}}_k) = \frac{1}{2} \left[\mathbf{u}_j^\top \mathbf{u}_k + \mathbf{u}_j^* \mathbf{u}_k + \overline{(\mathbf{u}_j^* \mathbf{u}_k)} + \overline{(\mathbf{u}_j^\top \mathbf{u}_k)} \right] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}(0+0+0+0) = 0 & j \neq k \\ \frac{1}{2}(0+1+1+0) = 1 & j = k \end{cases}, \end{aligned}$$

que

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\mathcal{I}_{\mathbf{u}_j}^\top \sqrt{2}\mathcal{I}_{\mathbf{u}_k} &= \frac{-1}{2}(\mathbf{u}_j - \bar{\mathbf{u}}_j)^\top (\mathbf{u}_k - \bar{\mathbf{u}}_k) = \frac{-1}{2} \left[\mathbf{u}_j^\top \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_j^* \mathbf{u}_k - \overline{(\mathbf{u}_j^* \mathbf{u}_k)} + \overline{(\mathbf{u}_j^\top \mathbf{u}_k)} \right] \\ &= \begin{cases} \frac{-1}{2}(0-0-0+0) = 0 & j \neq k \\ \frac{-1}{2}(0-1-1+0) = 1 & j = k \end{cases} \end{aligned}$$

y también que

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\mathcal{R}_{\mathbf{u}_j}^\top \sqrt{2}\mathcal{I}_{\mathbf{u}_k} &= \frac{-i}{2}(\mathbf{u}_j + \bar{\mathbf{u}}_j)^\top (\mathbf{u}_k - \bar{\mathbf{u}}_k) = \frac{-i}{2} \left[\mathbf{u}_j^\top \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_j^* \mathbf{u}_k + \overline{(\mathbf{u}_j^* \mathbf{u}_k)} - \overline{(\mathbf{u}_j^\top \mathbf{u}_k)} \right] \\ &= \begin{cases} \frac{-i}{2}(0-0+0-0) = 0 & j \neq k \\ \frac{-i}{2}(0-1+1-0) = 0 & j = k \end{cases}. \end{aligned}$$

Además, puesto que para el par autovalor–autovector $(\lambda_k, \mathbf{u}_k)$ se verifica que

$$\mathbf{C}\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k \Leftrightarrow \mathbf{C}\mathcal{R}_{\mathbf{u}_k} + i\mathbf{C}\mathcal{I}_{\mathbf{u}_k} = \lambda_k \mathcal{R}_{\mathbf{u}_k} + i\lambda_k \mathcal{I}_{\mathbf{u}_k}, \quad \text{es decir, } \mathbf{C}\mathcal{R}_{\mathbf{u}_k} = \lambda_k \mathcal{R}_{\mathbf{u}_k} \quad \text{y}$$

$$\mathbf{C}\mathcal{I}_{\mathbf{u}_k} = \lambda_{L+2-k} \mathcal{I}_{\mathbf{u}_k} \quad \text{porque } \lambda_k = \lambda_{L+2-k}, \quad \text{queda demostrada la proposición.} \quad \blacksquare$$

1.3.3 Equivalencia asintótica de las tres versiones de SSA

Sea x_t una serie temporal estacionaria real de media nula. En los casos prácticos se desconocen las autocovarianzas poblacionales y deben ser sustituidas por estimaciones. Por ello, el objetivo de este apartado es demostrar que las tres versiones de SSA son asintóticamente equivalentes. Por construcción, según Pearl (1973), la secuencia de matrices circulantes $\{\mathbf{S}_C\}$ de (1.18) es asintóticamente equivalente a la secuencia de matrices Toeplitz $\{\mathbf{S}_T\}$ de (1.3), $\mathbf{S}_T \sim \mathbf{S}_C$. Para el objetivo del apartado es necesario demostrar que las secuencias de matrices Toeplitz $\{\mathbf{S}_T\}$ y $\{\mathbf{T}_L(f)\}$ son asintóticamente equivalentes, $\mathbf{S}_T \sim \mathbf{T}_L(f)$, siendo preciso probar primero el siguiente lema.

Lema 1.2. *Para una serie temporal estacionaria, la sucesión $S_L = \sum_{m=0}^{L-1} (\hat{\gamma}_m - \gamma_m)^2$ converge en probabilidad a cero cuando $L \rightarrow \infty$.*

Demostración. La suma S_L se puede descomponer como

$$S_L = \sum_{m=0}^{L-1} (\hat{\gamma}_m - \gamma_m)^2 = \sum_{m=0}^{L-1} \gamma_m^2 + \sum_{m=0}^{L-1} \hat{\gamma}_m^2 - 2 \sum_{m=0}^{L-1} \gamma_m \hat{\gamma}_m . \quad (1.22)$$

El teorema de Parseval dice que $\int_0^1 |f(\omega)|^2 d\omega = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\gamma_m|^2$. Por ello, el primer término de (1.22) es finito cuando $L \rightarrow \infty$, es decir, verifica la sumabilidad cuadrática, $\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m^2 = K < \infty$. Además, respetando $L < T/2$, T es una sucesión monótona estrictamente creciente en función de L y, así, $T \rightarrow \infty$ cuando $L \rightarrow \infty$. Por tanto, cuando $L \rightarrow \infty$, el segundo término es una suma de infinitos sumandos, que converge en probabilidad a K porque $\hat{\gamma}_m \rightarrow \gamma_m$ cuando $T \rightarrow \infty$. Y, usando el mismo razonamiento, el tercer término converge en probabilidad a $2K$ cuando $L \rightarrow \infty$. En consecuencia, la suma S_L converge en probabilidad a cero, $S_L \xrightarrow{P} K + K - 2K = 0$, cuando $L \rightarrow \infty$ como se quería probar. ■

Ahora se está en condiciones de demostrar, en la siguiente proposición, que $\mathbf{S}_T \sim \mathbf{T}_L(f)$ con el fin de avanzar hacia el resultado principal de este apartado.

Proposición 1.3. Sean $\{\mathbf{S}_T\}$ y $\{\mathbf{T}_L(f)\}$ las secuencias de matrices en función de la longitud L de la ventana definidas por (1.3) y (1.7), respectivamente. Entonces,

$$\mathbf{S}_T \sim \mathbf{T}_L(f).$$

Demostración. Se conoce que los autovalores de las matrices Toeplitz $\mathbf{T}_L(f)$ están acotados. Además, las matrices \mathbf{S}_T son Toeplitz simétricas y, por ello, sus autovalores reales también están acotados. Asimismo, se debe probar que $\lim_{L \rightarrow \infty} L^{\frac{-1}{2}} \|\mathbf{S}_T - \mathbf{T}_L(f)\|_F = 0$.

Se puede escribir

$$0 \leq \frac{1}{L} \|\mathbf{S}_T - \mathbf{T}_L(f)\|_F^2 = \frac{1}{L} \sum_{m=1-L}^{L-1} (L-m)(\hat{\gamma}_m - \gamma_m)^2 \leq 2 \sum_{m=0}^{L-1} \frac{L-m}{L} (\hat{\gamma}_m - \gamma_m)^2 \leq 2 \sum_{m=0}^{L-1} (\hat{\gamma}_m - \gamma_m)^2.$$

De este modo, utilizando el teorema del emparedado para el límite de sucesiones y el Lema 1.2, se obtiene que $\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \|\mathbf{S}_T - \mathbf{T}_L(f)\|_F^2 = 0$ y se demuestra que $\mathbf{S}_T \sim \mathbf{T}_L(f)$. ■

En la versión Basic, para cualquier serie, la matriz $\mathbf{S} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T$ se puede sustituir por la matriz $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T/N$ como indican Golyandina et al (2001). Las matrices \mathbf{S} y $\tilde{\mathbf{S}}$, de dimensión $L \times L$, poseen los mismos autovectores y los autovalores de $\tilde{\mathbf{S}}$ son los asociados a \mathbf{S} multiplicados por $1/N$. Los elementos de la matriz $\tilde{\mathbf{S}}$ están dados por

$$\tilde{s}_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{t=i}^{i+N-1} x_t x_{t+j-i} \quad (1.23)$$

y, si la serie es estacionaria de media nula, se verifica que \tilde{s}_{ij} converge en probabilidad a $\gamma_{|i-j|}$ cuando $N \rightarrow \infty$, es decir, cuando $T \rightarrow \infty$. La matriz $\tilde{\mathbf{S}}$ forma una secuencia de matrices simétricas $\{\tilde{\mathbf{S}}\}$ en función de la longitud L de la ventana. Ahora, se puede relacionar esta secuencia de matrices simétricas $\{\tilde{\mathbf{S}}\}$ con la secuencia de matrices Toeplitz simétricas $\{\mathbf{T}_L(f)\}$ pero, antes, es necesario probar el siguiente lema.

Lema 1.4. Para una serie temporal estacionaria de media nula, la sucesión

$$S_L = \sum_{m=0}^{L-1} \max_{\substack{1 \leq i, j \leq L \\ |i-j|=m}} \{(\tilde{s}_{ij} - \gamma_m)^2\} \text{ converge en probabilidad a cero cuando } L \rightarrow \infty .$$

Demostración. La suma S_L verifica que

$$0 \leq S_L \leq \sum_{m=0}^{L-1} \gamma_m^2 + \sum_{m=0}^{L-1} \max_{\substack{1 \leq i, j \leq L \\ |i-j|=m}} \{\tilde{s}_{ij}^2\} - 2 \sum_{m=0}^{L-1} \min_{\substack{1 \leq i, j \leq L \\ |i-j|=m}} \{\gamma_m \tilde{s}_{ij}\} . \quad (1.24)$$

Por el teorema de Parseval, el primer término del lado derecho de (1.24) es finito cuando $L \rightarrow \infty$, es decir, verifica la sumabilidad cuadrática, $\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m^2 = K < \infty$. Se sabe

que $N = T - L + 1$. Respetando $L < T/2$, N es una sucesión monótona estrictamente creciente en función de L porque $N > L + 1$ y, así, $N \rightarrow \infty$ cuando $L \rightarrow \infty$. Por ello, cuando $L \rightarrow \infty$, el segundo término es una suma de infinitos sumandos que converge en probabilidad a K porque $\tilde{s}_{ij} \rightarrow \gamma_{|i-j|}$, $\forall i, j$, cuando $N \rightarrow \infty$. Y, por el mismo razonamiento, el tercer término converge en probabilidad a $2K$ cuando $L \rightarrow \infty$. Así, el lado derecho de (1.24) converge en probabilidad a cero cuando $L \rightarrow \infty$. Entonces, por el teorema del emparedado, S_L converge en probabilidad a cero. ■

Ahora, se está en condiciones de probar que $\tilde{\mathbf{S}} \sim \mathbf{T}_L(f)$ en la siguiente proposición.

Proposición 1.5. Sean $\{\tilde{\mathbf{S}}\}$ y $\{\mathbf{T}_L(f)\}$ las secuencias de matrices en función de la longitud L de la ventana definidas por (1.23) y (1.7), respectivamente. Entonces,

$$\tilde{\mathbf{S}} \sim \mathbf{T}_L(f)$$

Demostración. La estacionariedad implica sumabilidad cuadrática lo que significa que los autovalores reales de las matrices $\tilde{\mathbf{S}}$ simétricas están acotados como los de las matrices $\mathbf{T}_L(f)$, resultado ya conocido. A continuación se debe probar que

$$\lim_{L \rightarrow \infty} L^{-1} \|\tilde{\mathbf{S}} - \mathbf{T}_L(f)\|_F = 0. \text{ Se puede escribir}$$

$$\begin{aligned}
 0 \leq \frac{1}{L} \left\| \tilde{\mathbf{S}} - \mathbf{T}_L(f) \right\|_F^2 &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \left(\tilde{s}_{ij} - \gamma_{|i-j|} \right)^2 \leq 2 \sum_{m=0}^{L-1} \frac{L-m}{L} \max_{\substack{1 \leq i, j \leq L \\ |i-j|=m}} \left\{ \left(\tilde{s}_{ij} - \gamma_m \right)^2 \right\} \\
 &\leq 2 \sum_{m=0}^{L-1} \max_{\substack{1 \leq i, j \leq L \\ |i-j|=m}} \left\{ \left(\tilde{s}_{ij} - \gamma_m \right)^2 \right\} .
 \end{aligned}$$

De este modo, utilizando el teorema del emparejado y el Lema 1.4, se verifica que $\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \left\| \tilde{\mathbf{S}} - \mathbf{T}_L(f) \right\|_F^2 = 0$ y $\tilde{\mathbf{S}} \sim \mathbf{T}_L(f)$ como se quería demostrar. ■

Las proposiciones 1.3 y 1.5 conducen al resultado central de este apartado expresado en el siguiente teorema.

Teorema 1.6. Sean $\{\tilde{\mathbf{S}}\}$, $\{\mathbf{S}_T\}$ y $\{\mathbf{S}_C\}$ las secuencias de matrices en función de la longitud L de la ventana definidas por (1.23), (1.3) y (1.18), respectivamente. Entonces

$$\tilde{\mathbf{S}} \sim \mathbf{S}_T \sim \mathbf{S}_C$$

Demostración. $\mathbf{S}_T \sim \mathbf{T}_L(f)$ y $\tilde{\mathbf{S}} \sim \mathbf{T}_L(f)$ por las proposiciones 1.3 y 1.5, respectivamente, que, junto con la propiedad transitiva, conducen a $\tilde{\mathbf{S}} \sim \mathbf{S}_T$. Este último resultado, más $\mathbf{S}_T \sim \mathbf{S}_C$ por construcción, según Pearl (1973), y, de nuevo, con la propiedad transitiva prueban que $\tilde{\mathbf{S}} \sim \mathbf{S}_C$ y queda demostrado el teorema. ■

Las implicaciones del teorema son evidentes. En cualquier caso real, los resultados obtenidos con las versiones Basic, Toeplitz y Circulant de SSA son equivalentes. La teoría del comportamiento asintótico de matrices de Gray (1972), ha servido para demostrar que las diferencias entre las versiones Basic y Toeplitz no son significativas como señalan, bajo el supuesto de estacionariedad y de forma empírica, Allen y Smith (1996) y Ghil et al (2002) entre otros autores que utilizan SSA para el estudio de series climáticas y geofísicas. Además, como consecuencia de este teorema, las diferencias entre los resultados de las versiones Basic y Circulant tenderán a reducirse cuanto más largas sean las series. Sin embargo, no se debe olvidar que Circulant identifica *ex-ante* las frecuencias asociadas a las diferentes componentes oscilatorias en las que se puede desagregar una serie temporal.

1.3.4 Series no estacionarias

Sea x_t una serie temporal estacionaria de valores reales y media nula sin componentes deterministas, entonces por el teorema de Wold (1938) se puede modelar como un proceso MA(∞)

$$x_t = \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_m a_{t-m}, \quad \Psi_0 = 1,$$

donde a_t es un proceso de ruido blanco con varianza σ^2 y $\sum_{m=0}^{\infty} \Psi_m^2 < \infty$ para garantizar la estabilidad del modelo. Alternativamente, el proceso dual es un proceso AR(∞),

$$\sum_{m=0}^{\infty} \phi_m x_{t-m} = a_t, \quad \phi_0 = 1, \tag{1.25}$$

bajo el supuesto de invertibilidad, $\sum_{m=0}^{\infty} \phi_m^2 < \infty$. El proceso dual AR(∞) se puede expresar

en función del operador de retardos B como $\phi(B)x_t = a_t$ donde

$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m B^m$. Para una muestra de tamaño L , el proceso AR

se puede escribir matricialmente $\Phi_L \mathbf{x} = \mathbf{a}$ siendo $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_L)^T$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_L)^T$ y

$$\Phi_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\phi_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\phi_2 & -\phi_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\phi_{L-1} & \dots & -\phi_2 & -\phi_1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.26}$$

La matriz Φ_L es Toeplitz triangular inferior y no singular porque su determinante es 1.

Por ello, la inversa de la matriz de covarianzas del vector \mathbf{x} está dada por la matriz Hermitiana

$$\Sigma_{\mathbf{x}}^{-1} = \sigma^{-2} \Phi_L^* \Phi_L. \tag{1.27}$$

Puesto que la serie $\{\phi_m\}$ es convergente, se puede definir la función continua

$$\phi(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m \exp(i2\pi m\omega), \quad \omega \in [0, 1]. \tag{1.28}$$

Así, se puede escribir $\Phi_L = \mathbf{T}_L(\phi)$ siendo la función ϕ el símbolo de la secuencia $\{\mathbf{T}_L(\phi)\}$ de matrices Toeplitz definidas en (1.26). Por tanto, la expresión (1.27) queda

$$\Sigma_x^{-1} = \sigma^{-2} \mathbf{T}_L^*(\phi) \mathbf{T}_L(\phi) . \quad (1.29)$$

Según las propiedades del producto de matrices Toeplitz, Gray (2006), la matriz Hermitiana Σ_x^{-1} es asintóticamente equivalente a la matriz Toeplitz $\mathbf{T}_L(s)$, donde $s(\omega) = \sigma^{-2} \phi(\omega) \bar{\phi}(\omega) = \sigma^{-2} |\phi(\omega)|^2$, y esta es asintóticamente equivalente a la matriz circulante $\mathbf{C}_L(s)$ definida por (1.13), es decir, $\Sigma_x^{-1} \sim \mathbf{T}_L(s) \sim \mathbf{C}_L(s)$. Además, como la serie x_t no posee ninguna raíz unitaria porque es estacionaria, la función $s(\omega)$ es estrictamente positiva, $s(\omega) = \sigma^{-2} |\phi(\omega)|^2 > 0$. Este hecho permite definir la función

$$f(\omega) = \frac{1}{s(\omega)} = \frac{\sigma^2}{|\phi(\omega)|^2} \quad (1.30)$$

que se corresponde con la densidad espectral de la serie temporal x_t . Teniendo esto en cuenta y las propiedades de la inversa de matrices Toeplitz, Gray (2006), se verifican las siguientes equivalencias asintóticas

$$\Sigma_x \sim \mathbf{T}_L(s)^{-1} \sim \mathbf{T}_L(f) \sim \mathbf{C}_L(f),$$

donde $\mathbf{T}_L(f)$ y $\mathbf{C}_L(f)$ son las matrices Toeplitz y circulante, respectivamente, asociadas a la función continua y 2π -periódica $f(\omega)$. Y, según el teorema fundamental de Szegő, si $\rho_{L,k}$ son los autovalores de $\mathbf{T}_L(s)^{-1}$, los conjuntos $\{\rho_{L,k}\}$ y $\{f(\frac{k-1}{L})\}$, $f(\frac{k-1}{L}) = 1/s(\frac{k-1}{L})$, están asintóticamente igualmente distribuidos en sentido Weyl.

No obstante, en numerosas ocasiones, y sobre todo en economía, la serie temporal x_t es no estacionaria. Esta situación va acompañada de la presencia de raíces unitarias de forma que la función $s(\omega)$ se anula en un conjunto numerable de puntos y la función $f(\omega)$ dada en (1.30) ni es continua ni integrable en $[0,1]$, Widom (1965). La matriz $\mathbf{T}_L(s)$ es no singular, Gray (2006), pero la matriz $\mathbf{T}_L(1/s)$ no está definida y los

conjuntos $\{\rho_{L,k}\}$ y $\{1/s(\frac{k-1}{L})\}$ pueden no estar asintóticamente igualmente distribuidos. Aunque los ceros de la función $s(\omega)$ generan las discontinuidades de la función $f(\omega)$, es útil usar $\sigma^2/|\phi(\omega)|^2$ como la densidad espectral de x_t . Además, el siguiente teorema, que generaliza el enunciado por Gray (1974), permite relacionar la función $f(\omega)$ con los autovalores de $\mathbf{T}_L(s)^{-1}$ o, equivalentemente, de Σ_x y justifica el empleo del algoritmo de *Circulant SSA* con series temporales no estacionarias.

Teorema 1.7. *Sea $\mathbf{T}_L(s)$ una secuencia de matrices Toeplitz siendo $s(\omega)$ una función real, continua y 2π -periódica, con $s(\omega) \geq 0$, donde la igualdad se alcanza en un conjunto numerable de puntos $\mathcal{H} = \{\omega_i^0, i \in \mathcal{B} \subset \mathbb{N}\}$. Dado un valor δ finito, sean los conjuntos disjuntos*

$$\Omega_i = \left\{ \omega \in \left[\omega_i^0 - a_i, \omega_i^0 + b_i \right] / s(\omega) \leq 1/\delta; \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}^+ \right\}, \quad i \in \mathcal{B} \subset \mathbb{N}$$

y sea la función $g(\omega)$ definida por

$$g(\omega) = \begin{cases} f(\omega) = 1/s(\omega) & \text{si } \omega \notin \bigcup_{i \in \mathcal{B}} \Omega_i \\ h_i(\omega) & \text{si } \omega \in \Omega_i \end{cases},$$

donde cada función real $h_i(\omega)$ es continua en Ω_i y está acotada con $M_{h_i} = \sup(h_i) = h_i(\omega_i^0) \leq \infty$ y $m_{h_i} = \inf(h_i) = h_i(\omega_i^0 - a_i) = h_i(\omega_i^0 + b_i) = \delta$.

Si $\rho_{L,k} = 1/\tau_{L,k}$ son los autovalores de $\mathbf{T}_L(s)^{-1}$ ordenados en sentido decreciente, donde $\tau_{L,k}$ son los autovalores de $\mathbf{T}_L(s)$, y $p(x)$ es una función continua en $\left[1/M_s, \max_{i \in \mathcal{B}} M_{h_i} \right]$ con $M_s = \sup(s)$, entonces

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L p\left(\min(\rho_{L,k}, \max(\tilde{g}_k, \delta))\right) = \int_0^1 p(g(\omega)) d\omega, \quad (1.31)$$

donde \tilde{g}_k son los valores de $g(\frac{k-1}{L})$ ordenados en sentido decreciente.

Demostración. Tal y como está definida, la función $g(\omega)$ es real, continua y 2π -periódica. Su imagen es $\left[1/M_s, \max_{i \in B} M_{h_i}\right]$ con lo cual no se anula en ningún punto. De este modo, las propiedades de la inversa de matrices Toeplitz garantizan que $\mathbf{T}_L(1/g)^{-1} \sim \mathbf{T}_L(g)$. Además, si $p(x)$ es continua en $\left[1/M_s, \max_{i \in B} M_{h_i}\right]$, entonces $p(1/x)$ es continua en $\left[1/\max_{i \in B} M_{h_i}, M_s\right]$ y, puesto que la función $g(\omega)$ es continua, el teorema fundamental de Szegő conduce a (1.31). ■

Este teorema, siguiendo a Gray (1974), indica que los autovalores de la secuencia de matrices $\mathbf{T}_L(s)^{-1}$ se distribuyen asintóticamente igual que los autovalores de la secuencia de matrices $\mathbf{T}_L(g)$ hasta un valor δ finito. Además, dadas esas condiciones, se tiene que $\mathbf{T}_L(g) \sim \mathbf{C}_L(g)$ donde $\mathbf{C}_L(g)$ es la matriz circulante obtenida según la expresión (1.13). Por tanto, según el teorema fundamental de Szegő, también los autovalores de $\mathbf{T}_L(s)^{-1}$ se distribuyen asintóticamente igual que los autovalores de $\mathbf{C}_L(g)$ hasta un valor δ finito. Las implicaciones del teorema están claras. Justifica la estimación de la densidad espectral de una serie temporal no estacionaria, incluso en las frecuencias donde presenta discontinuidad, mediante la ecuación (1.20) porque las autocovarianzas están calculadas sobre una serie no estacionaria pero suponiendo estacionariedad. No obstante, aunque el teorema permite estimar la densidad espectral de una serie no estacionaria utilizando *Circulant SSA*, esto no significa que dicha serie temporal sea asintóticamente estacionaria.

En consecuencia, para una serie no estacionaria, la unión de la estimación de la densidad espectral en una frecuencia de discontinuidad con las estimaciones, mayores que un valor δ finito, en las frecuencias adyacentes mediante segmentos de recta es una forma sencilla de construir las funciones h_i . Si todas las funciones h_i son constantes e iguales al valor δ finito, se obtiene el caso particular del teorema enunciado por Gray (1974). Por todo ello, la generalización de las funciones h_i permite al Teorema aproximarse mejor a la realidad de la estimación de la densidad espectral por cualquier procedimiento, en particular con los autovalores como se propone en (1.20), y, además,

mejorar su precisión al poder definir las funciones h_i de tal forma que los valores $M_{h_i} = \sup(h_i)$ sean tan elevados como así se desee. De este modo, aumentar en *Circulant SSA* la longitud de la ventana L hace posible elevar el valor δ finito y, por tanto, mejorar la precisión de la estimación de la densidad espectral donde las funciones h_i serán los segmentos de recta definidos previamente.

Un ejemplo.

La forma más sencilla de comprender este teorema es con un ejemplo que de manera gráfica muestre su significado. Sea x_t una serie temporal que sigue el siguiente proceso autorregresivo de orden 2 no estacionario

$$x_t - x_{t-2} = \varepsilon_t \tag{1.32}$$

donde ε_t es un ruido blanco de media cero y varianza σ^2 . Para una muestra de tamaño L la matriz Toeplitz $\mathbf{T}_L(\phi) = \mathbf{\Phi}_L$ de (1.26) es

$$\mathbf{T}_L(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

siendo

$$\phi(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m \exp(i2\pi m\omega) = 1 - \cos(4\pi\omega) - i \sin(4\pi\omega), \quad \omega \in [0,1],$$

porque la serie $\{\phi_m\}$ es convergente, $\sum_{m=0}^{\infty} \phi_m^2 = 2 < \infty$. Además, según se ha visto, las propiedades del producto de matrices Toeplitz garantizan que $\Sigma_x^{-1} \sim \mathbf{T}_L(s) \sim \mathbf{C}_L(s)$, siendo la matriz Hermitiana Σ_x^{-1} la inversa de la matriz de covarianzas del vector \mathbf{x} y donde $s(\omega) = \sigma^{-2} |\phi(\omega)|^2 = 2 - 2 \cos(4\pi\omega)$, $\omega \in [0,1]$, con $\sigma^2 = 1$ para simplificar. La función $s(\omega)$ se anula en un conjunto numerable de puntos $\mathcal{H} = \{\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0\} = \{0, 0.5, 1\}$, según se aprecia en la Figura 1.1, que generan las discontinuidades de la función $f(\omega) = 1/s(\omega)$, la densidad espectral de x_t .

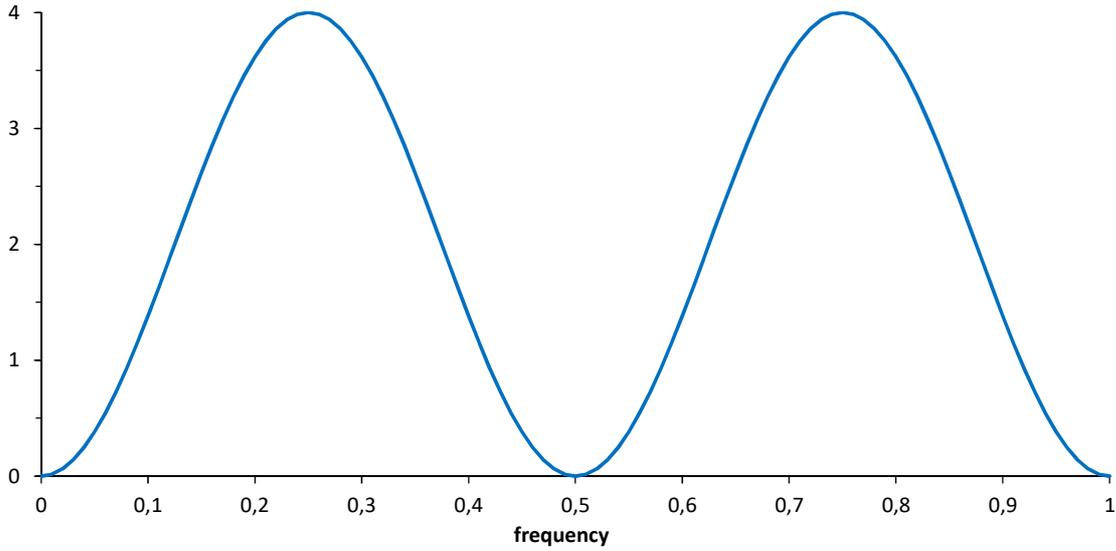


Figura 1.1 Gráfica de la función $s(\omega)$.

Aunque la matriz $\mathbf{T}_L(s)$ es no singular, el hecho de que $m_s = \inf(s) = 0$ significa que los conjuntos $\{\rho_{L,k}\}$ y $\{1/s(\frac{k-1}{L})\}$ pueden no estar asintóticamente igualmente distribuidos y es necesario utilizar el Teorema 1.7 para encontrar una aproximación asintótica de la distribución de los autovalores de $\mathbf{T}_L(s)^{-1}$ o, equivalentemente, de Σ_x . Debido a que $s(\omega)$ es periódica entre dos de sus ceros y simétrica respecto 0.5, se puede elegir $\alpha = a_i = b_i = 0.03 \forall i$ y los intervalos disjuntos del Teorema 1.7 son $\Omega_1 = [0, 0.03]$, $\Omega_2 = [0.47, 0.53]$ y $\Omega_3 = [0.97, 1]$ con lo cual se verifica que $1/\delta = s(0.03) = s(0.47) = s(0.53) = s(0.97)$. Por tanto, la función $g(\omega)$ es

$$g(\omega) = \begin{cases} f(\omega) = 1/s(\omega) & \text{si } \omega \notin \bigcup_{i=1}^3 \Omega_i \\ \delta(\omega - \omega_i^0 + 2\alpha)/\alpha & \text{si } \omega \in [\omega_i^0 - \alpha, \omega_i^0], i = 2 \text{ y } 3, \\ -\delta(\omega - \omega_i^0 - 2\alpha)/\alpha & \text{si } \omega \in [\omega_i^0, \omega_i^0 + \alpha], i = 1 \text{ y } 2 \end{cases}$$

cuya gráfica aparece en la Figura 1.2 y donde las funciones $h_i(\omega)$ son tramos de recta con pendiente positiva si pasan por los puntos $(\omega_i^0 - \alpha, \delta)$ y $(\omega_i^0, 2\delta)$, $i = 2$ y 3 , pero con pendiente negativa si pasan por los puntos $(\omega_i^0, 2\delta)$ y $(\omega_i^0 + \alpha, \delta)$, $i = 1$ y 2 .

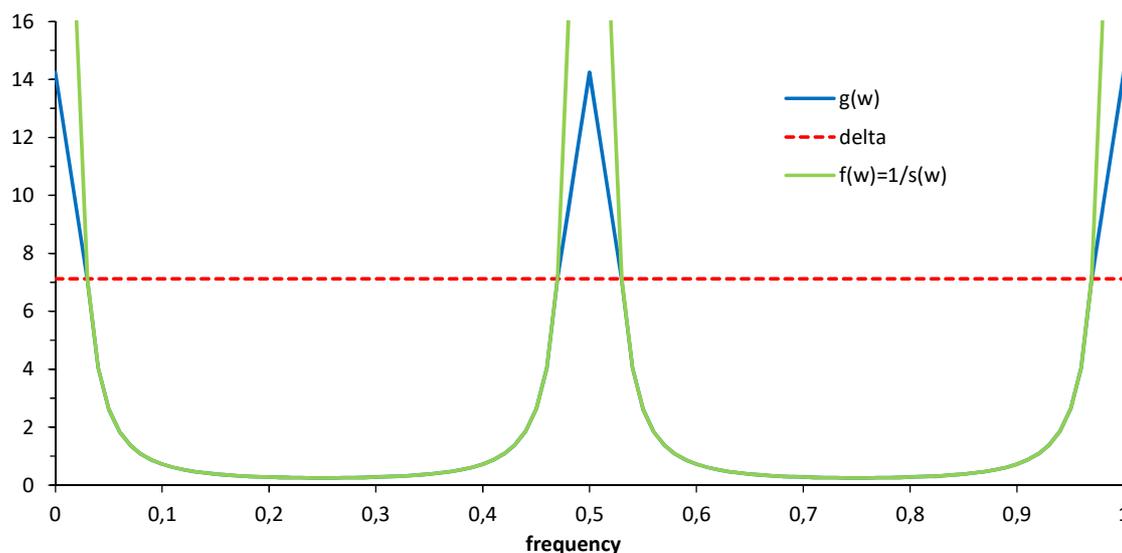


Figura 1.2 Gráfica de las funciones $g(\omega)$ y $f(\omega)$.

Los elementos t_m de la matriz Toeplitz $\mathbf{T}_L(g)$, donde $t_m = t_{-m}$ porque $g(\omega)$ es real, serían las autocovarianzas de la serie con función de densidad espectral $g(\omega)$. No obstante, ni la serie x_t se transforma en estacionaria ni se reemplazan sus autocovarianzas, solo se aproxima la función de densidad espectral f mediante g .

La Figura 1.3 muestra cómo funciona el lado izquierdo de (1.31). Por encima del valor δ finito los elementos que se seleccionan son los valores correspondientes a la función $g(\omega)$ y los autovalores $\rho_{L,k}$ en caso contrario. Por tanto, los autovalores de $\mathbf{T}_L(s)^{-1}$ se distribuyen asintóticamente igual que los autovalores de $\mathbf{T}_L(g)$ hasta el valor δ finito. Como ejemplo, el valor de la integral del lado derecho de (1.31) para $p(x) = x$ es 2.1159 y en la Tabla 1.1 se aprecia de forma empírica que, al aumentar L , la media del lado izquierdo de (1.31) se aproxima al valor de dicha integral.

Tabla 1.1 Media del lado izquierdo de (1.31) con $p(x) = x$ en función de L de la serie x_t de (1.32).

L	50	100	500	1000	5000	10000
$\frac{1}{L} \sum$	2.1847	2.1284	2,1187	2.1174	2.1162	2.1161

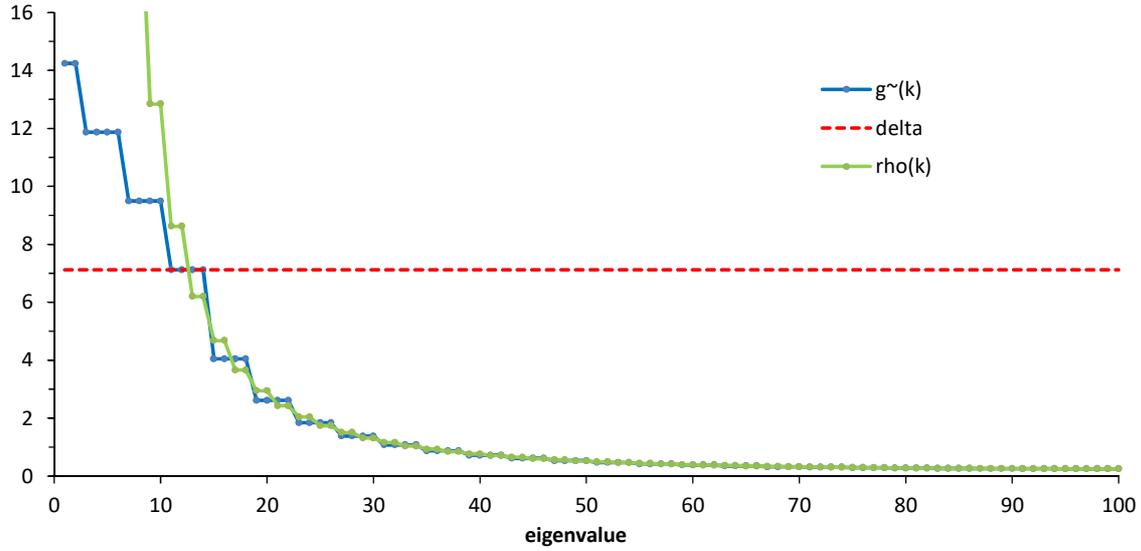


Figura 1.3 Elementos del lado izquierdo de (1.31) para $L = 100$ de la serie x_t de (1.32).

1.4 Separabilidad en Circulant SSA

La otra característica importante de *Circulant SSA* es la separabilidad que presentan las series reconstruidas elementales por frecuencias. Ello permite realizar las tareas enunciadas en el paso del agrupamiento sin problema alguno.

La separabilidad de dos series $x_t^{(1)}$ y $x_t^{(2)}$ significa que $x_t^{(1)}$ se puede extraer de la serie observada $x_t = x_t^{(1)} + x_t^{(2)}$, es decir, existe un grupo en el paso del agrupamiento tal que $\tilde{x}_t^{(n)} = x_t^{(n)}$, $n = 1, 2$. Dada una longitud de ventana, dos series $x_t^{(1)}$ y $x_t^{(2)}$ son débilmente separables si los subespacios de las filas y columnas de sus matrices de trayectorias son ortogonales, $\mathbf{X}^{(1)} (\mathbf{X}^{(2)})^T = \mathbf{0}_{L \times L}$ y $(\mathbf{X}^{(1)})^T \mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{0}_{N \times N}$. Dos series $x_t^{(1)}$ y $x_t^{(2)}$ son fuertemente separables si lo son débilmente y los dos conjuntos de los valores singulares de las matrices de trayectorias $\mathbf{X}^{(1)}$ y $\mathbf{X}^{(2)}$ son disjuntos, es decir, si todos los valores singulares de la matriz de trayectorias \mathbf{X} son distintos o, equivalentemente, cada serie elemental reconstruida pertenece a un solo armónico.

Sea $\langle \mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)} \rangle_w = (\mathbf{x}^{(i)})^T \mathbf{W} \mathbf{x}^{(j)}$ el w -producto escalar de dos series $x_t^{(i)}$ y $x_t^{(j)}$ donde $\mathbf{W} = \text{diag}(1, 2, \dots, \underbrace{L, \dots, L}_{T-2(L-1) \text{ veces}}, \dots, 2, 1)$. Si $\langle \mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)} \rangle_w = 0$ se dice que las series $x_t^{(i)}$ y $x_t^{(j)}$

son w -ortogonales. Por tanto, la separabilidad implica w -ortogonalidad. El grado de separabilidad entre dos series $x_t^{(i)}$ y $x_t^{(j)}$ se mide por la w -correlación

$$\rho_{ij}^w = \frac{\langle \mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)} \rangle_w}{\|\mathbf{x}^{(i)}\|_w \|\mathbf{x}^{(j)}\|_w}, \text{ con } -1 \leq \rho_{ij}^w \leq 1,$$

donde $\|\mathbf{x}^{(i)}\|_w = \sqrt{\langle \mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(i)} \rangle_w}$. Si $|\rho_{ij}^w| \approx 0$, entonces las series $x_t^{(i)}$ y $x_t^{(j)}$ son separables aproximadamente, Golyandina et al (2001). En caso contrario, si $|\rho_{ij}^w| \approx 1$, dichas series están lejos de ser w -ortogonales y no son separables. El paso del agrupamiento se facilita si para las series elementales reconstruidas se realiza el gráfico de la matriz de w -correlaciones, cuyo elemento (i, j) es ρ_{ij}^w , en una escala de grises del blanco al negro correspondiente a los valores absolutos de las w -correlaciones de 0 a 1.

Los autovectores reales $\sqrt{2}\mathcal{R}_{u_k}$ y $\sqrt{2}\mathcal{I}_{u_k}$, pertenecientes al par de autovalores λ_k y λ_{L+2-k} con $\lambda_k = \lambda_{L+2-k}$, son ortogonales y tienen la misma transformada de Fourier con información sólo en la frecuencia $(k-1)/L$ con fase $\pi/2$. Los autovectores pueden considerarse un conjunto de filtros, Kume (2012). Así, dicho par de autovectores extraen un par de series elementales de armónicos de frecuencia $(k-1)/L$ con fase cero sin mezclar con armónicos de otras frecuencias y correlación espectral igual a uno entre ellas e igual a cero con el resto de series elementales. En consecuencia, según los resultados de la Sección 3 de Usevich (2010), las componentes oscilatorias obtenidas con *Circulant SSA* asociadas a los grupos elementales por frecuencias B_k son débilmente separables. Además, cualquier clasificación de los grupos B_k es disjunta desde un punto de vista frecuencial al agrupar *Circulant SSA* directamente armónicos. Entonces, las componentes oscilatorias reconstruidas a partir de las matrices elementales por frecuencias \mathbf{X}_{B_k} serán fuertemente separables asintóticamente al aumentar L . Por todo ello, la diagonal del gráfico de la matriz de w -correlaciones de las series elementales, ordenados los autovalores en sentido decreciente, presenta de forma nítida cuadrados negros 2×2 y los gráficos de dispersión seno-coseno construidos con los autovectores $\sqrt{2}\mathcal{R}_{u_k}$ y $\sqrt{2}\mathcal{I}_{u_k}$ forman polígonos regulares de $L/\text{mcd}(L, k-1)$ lados.

La suma de dos sinusoides de diferentes frecuencias, $\omega_m \neq \omega_{m'}$, con igual amplitud produce autovalores similares porque son proporcionales al cuadrado de las amplitudes. No obstante, por los resultados del párrafo anterior, *Circulant SSA* es capaz de detectar estas sinusoides generando series reconstruidas por frecuencias fuertemente separables sin recurrir a otros algoritmos como Oblique SSA y DerivSSA, Golyandina y Shlemov (2015) o SSA-AMUSE, Golyandina y Lomtev (2016), comentados en el apartado 1.2.2. En el caso contrario, dos sinusoides con frecuencias próximas, $\omega_m \approx \omega_{m'}$, pero distinta amplitud, antes de utilizar Sequential SSA, Golyandina et al (2001), se puede optar por aumentar el valor de L para que los productos $L\omega_m$ y $L\omega_{m'}$ sean valores enteros y obtener series reconstruidas por frecuencias fuertemente separables con *Circulant SSA*.

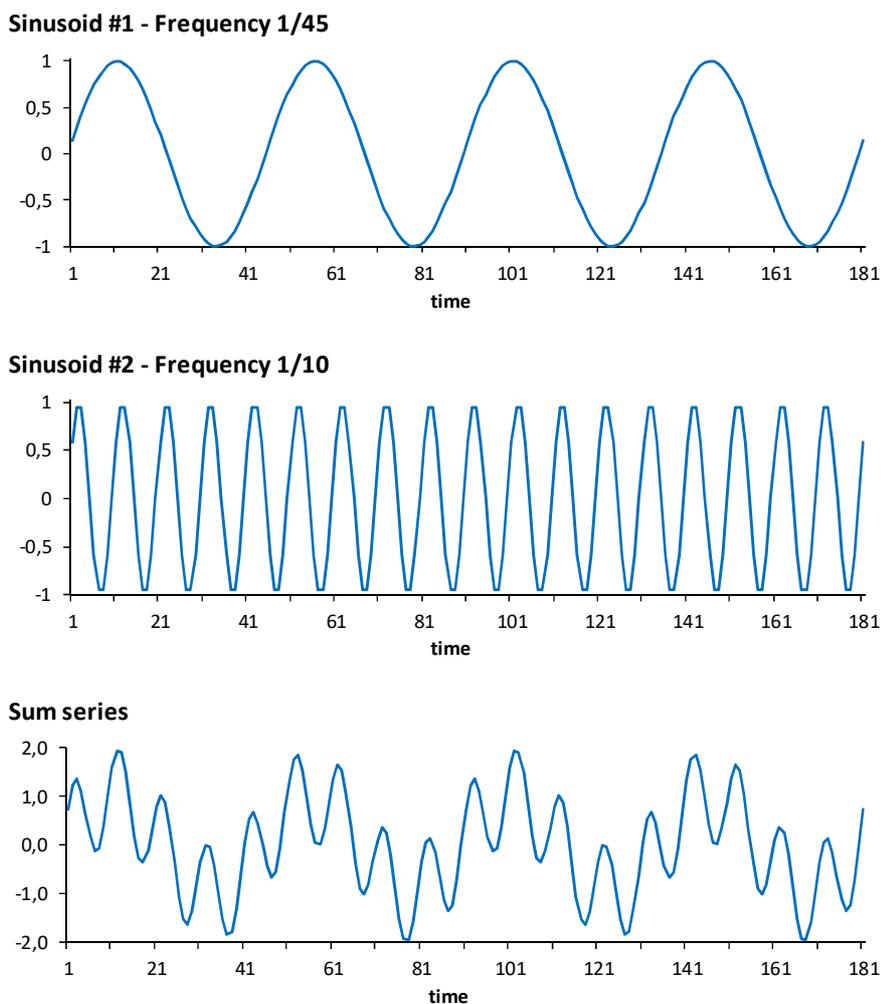


Figura 1.4 Suma de dos sinusoides de diferente frecuencia pero con igual amplitud.

Un ejemplo va a ilustrar la separabilidad con *Circulant SSA*. Se considera la serie x_t , donde $x_t = x_t^{(1)} + x_t^{(2)}$, $x_t^{(n)} = A_n \sin(2\pi\omega_n t)$, $n=1,2$ y la longitud $T=181$. Las componentes sinusoidales tienen distinta frecuencia, $\omega_1=1/45$ y $\omega_2=1/10$, pero igual amplitud, $A_1=A_2=1$. En la Figura 1.4 se representan las sinusoides y la serie suma.

Se realiza *Circulant SSA* y Basic SSA con una longitud de ventana $L=90$ que es múltiplo de 45 y 10. En los gráficos de los autovalores de la Figura 1.5 se observan, como era de esperar, cuatro autovalores casi idénticos en ambas versiones y el resto nulos o casi nulos. En Basic SSA los autovalores están ordenados en sentido decreciente pero en *Circulant SSA* se muestran en función de las frecuencias facilitando su identificación como estimación de la densidad espectral de la serie suma.

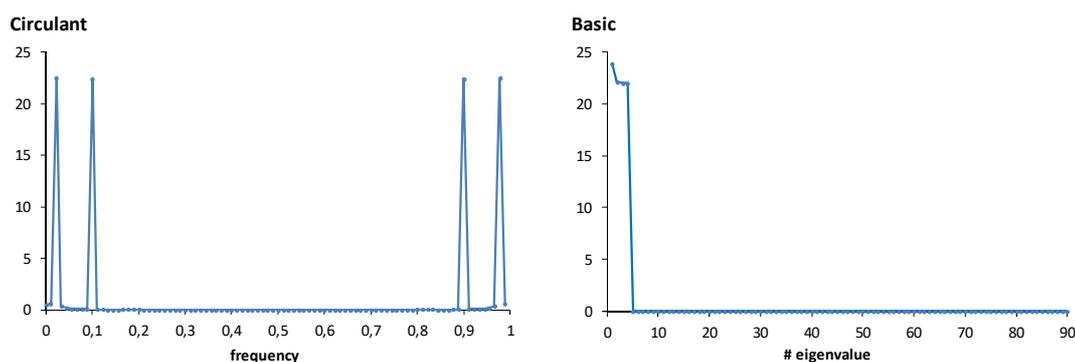


Figura 1.5 Gráficos de los autovalores de la suma de dos sinusoides.

Las Figuras 1.6 y 1.7 ponen de manifiesto la diferencia entre buena y mala separabilidad. La Figura 1.6 muestra las w -correlaciones de las cuatro series reconstruidas elementales, ordenados los autovalores en sentido decreciente, en una escala graduada de 20 grises del blanco al negro correspondiente a los valores absolutos de las w -correlaciones de 0 a 1. En *Circulant SSA* se observa que cada par de series reconstruidas elementales pertenecientes a un armónico tienen una w -correlación muy próxima a uno y son w -ortogonales al resto. Por otro lado, la Figura 1.7 muestra los gráficos de dispersión de los autovectores. En *Circulant SSA*, los pares de autovectores relativos a una frecuencia forman polígonos regulares indicando fuerte separación. Todo ello explica que las series reconstruidas elementales producidas por *Circulant SSA*

corresponden a un solo armónico permitiendo la separación de dichas sinusoides con su correspondiente reproducción (ver Figura 1.8). Por el contrario, en Basic SSA son una mezcla de armónicos (ver Figura 1.9) con lo cual no se pueden separar las sinusoides que originan la serie suma.

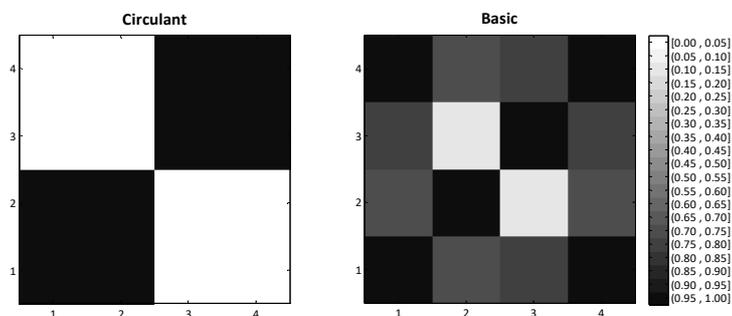


Figura 1.6 Matrices de w -correlaciones de las 4 series reconstruidas elementales de la suma de dos sinusoides. Muestra las w -correlaciones en una escala de grises del blanco al negro correspondiente a sus valores absolutos de 0 a 1.

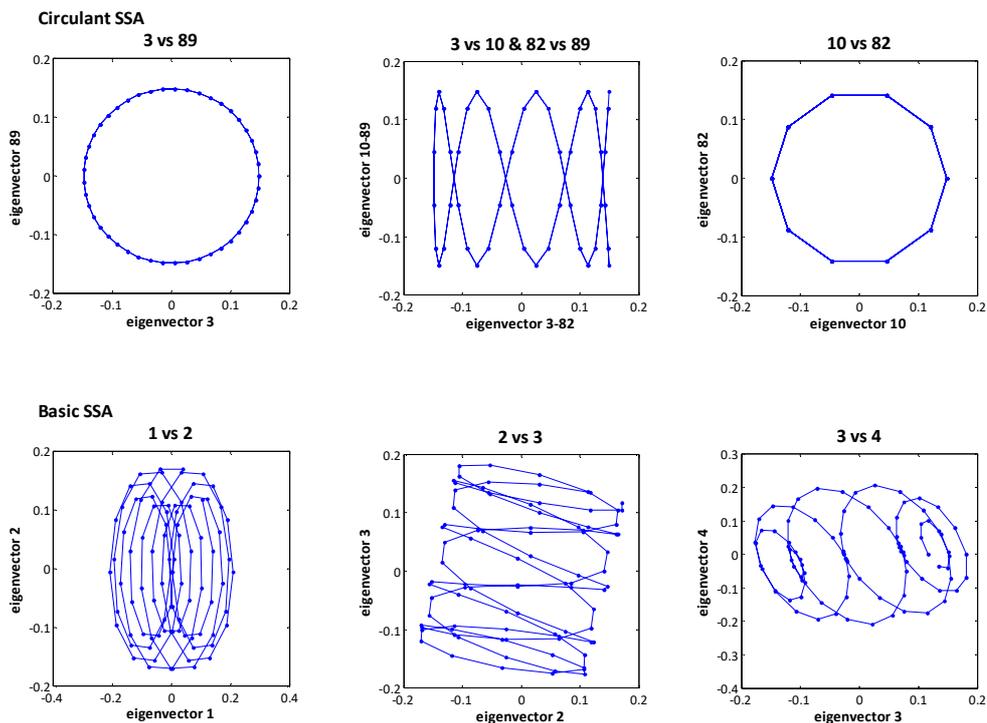


Figura 1.7 Gráficos de dispersión (scatterplot) de los autovectores de la suma de dos sinusoides.

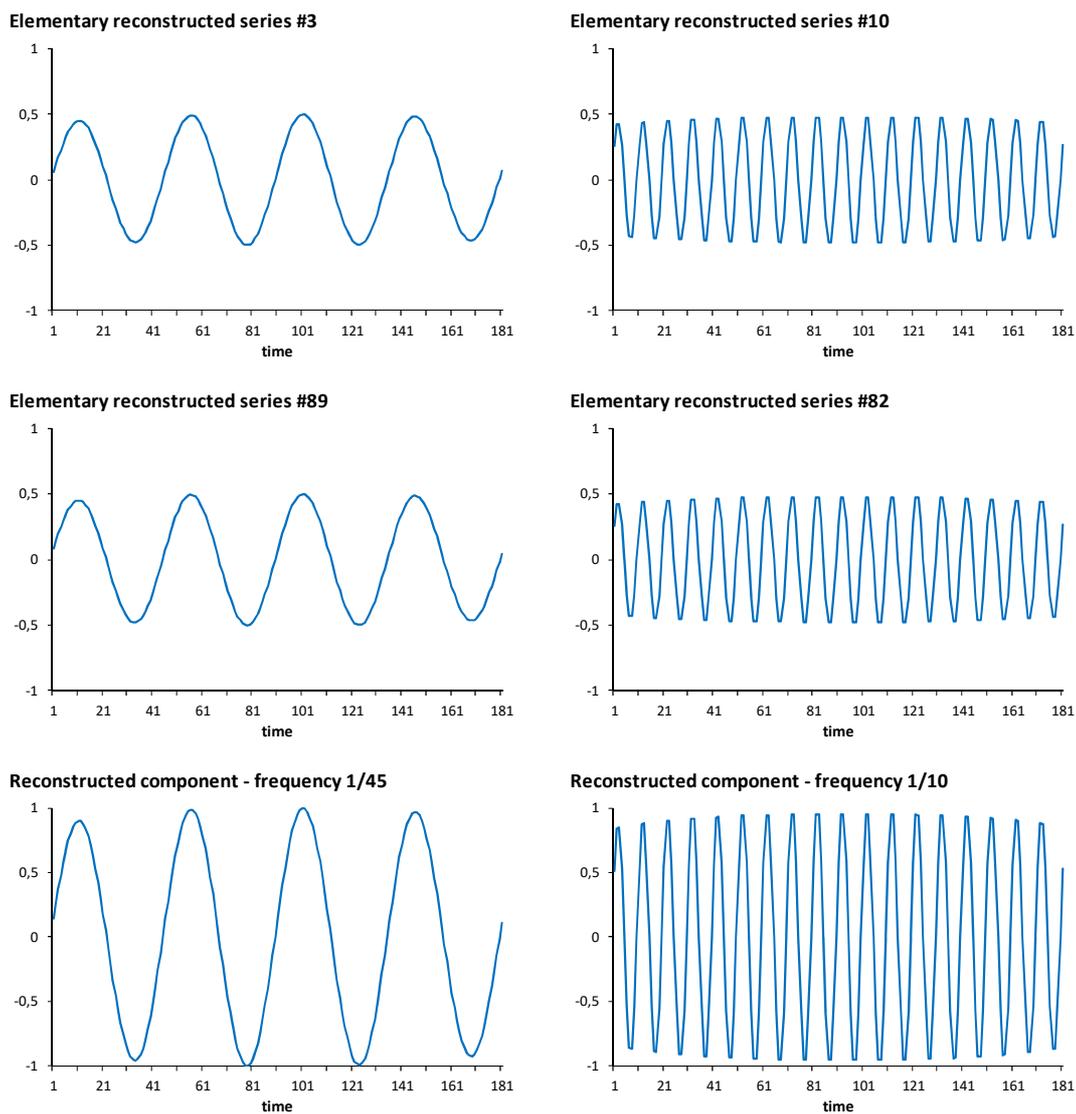


Figura 1.8 Series elementales y sinusoides reconstruidas producidas por *Circulant SSA* para la suma de dos sinusoides con igual amplitud.

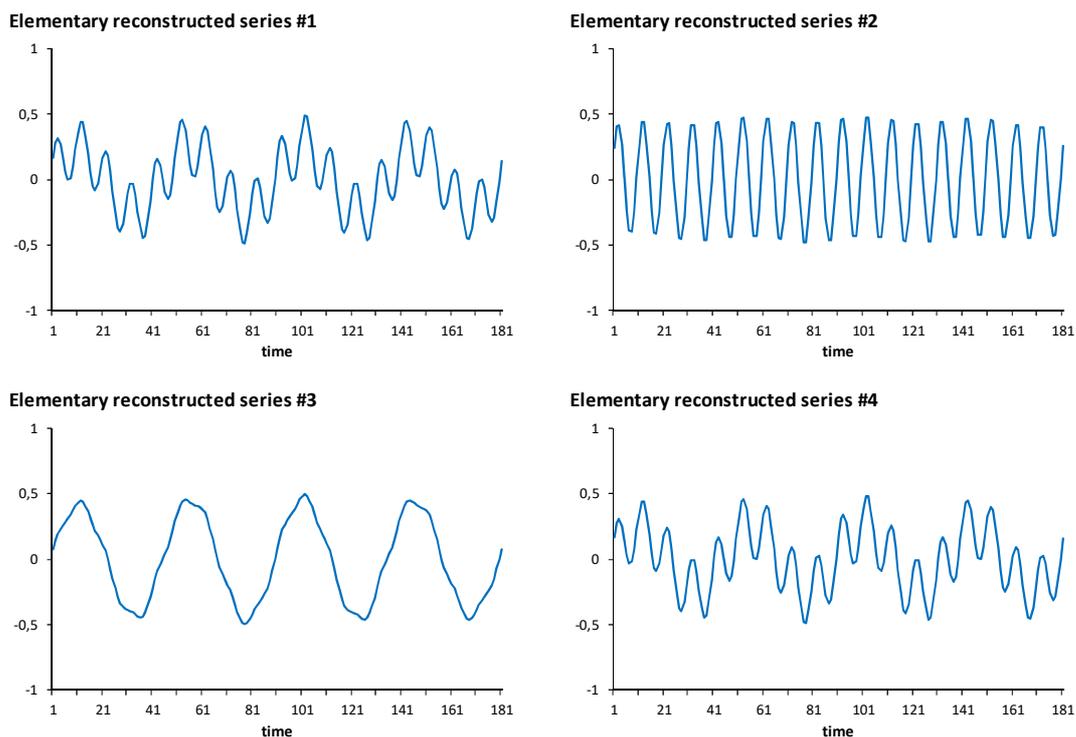


Figura 1.9 Series reconstruidas elementales producidas por Basic SSA en la suma de dos sinusoides con igual amplitud.

1.5 Aplicación real

Con el fin de ilustrar el funcionamiento de *Circulant SSA* con datos reales, se considera el Índice de Producción Industrial (IPI) (Base 2010=100) de seis países: Francia, Alemania, Italia, Japón, Reino Unido y EE.UU. Estas series, de longitud $T = 537$, abarcan desde enero de 1970 hasta septiembre de 2014 y se han obtenido de la base de datos del Fondo Monetario Internacional, FMI. El objetivo es extraer la tendencia, el ciclo y la componente estacional a partir de los datos originales no corregidos.

Primero hay que establecer la longitud de la ventana. Esta, debe ser múltiplo de 12 puesto que las series son mensuales y se aprecia una fuerte estacionalidad en general, Figura 1.10. Para recoger de forma adecuada todas las posibles oscilaciones la ventana tendrá una longitud lo mayor posible. La cota superior para $L < T/2$ es 268. Se considera el ciclo económico compuesto por las oscilaciones cuyo periodo está comprendido entre año y medio y ocho años. Por ello y porque el mayor periodo de oscilación coincide con la longitud de la ventana, esta debe ser múltiplo de ocho años. Así, las longitudes de ventana posibles son 96 y 192 meses pero se elige $L = 192$ por

generar una mayor desagregación de la densidad espectral. En esta situación, se obtiene una oscilación de periodo de 16 años que, debido a su duración, se asignará a la tendencia. Se descarta la posible longitud de ventana de 240 meses porque se obtiene una oscilación de periodo de 10 años difícil de clasificar.

Se realiza *Circulant SSA* con $L=192$ sobre las series originales para extraer las diferentes periodicidades. Las series no sufren ninguna transformación, ni se detrae la media ni se toman logaritmos, según lo expuesto en el apartado 1.2.2. Los autovalores son una estimación de la densidad espectral. La Figura 1.11, con los gráficos de los log-autovalores, muestra, con claridad para todos los países, una tendencia, una componente cíclica y otra componente estacional que es poco intensa en EE.UU. Con el algoritmo *Circulant SSA*, la tendencia se reconstruye con las autoternas 1, 2 y 192, con los grupos elementales por frecuencias B_1 y B_2 , asociadas con $\omega=0$ y $1/192$, respectivamente, porque $\omega_k = \frac{k-1}{L}$. Análogamente, la componente cíclica asociada al ciclo económico se reconstruye con las autoternas 3 a 11 y 183 a 191, con los grupos elementales por frecuencias del B_3 al B_{11} , asociados a $\omega=1/96, 1/64, 1/48, 5/192, 1/32, 7/192, 1/24, 3/64$ y $5/96$, respectivamente. Finalmente, la componente estacional se reconstruye con las autoternas 17, 33, 49, 65, 81, 97, 113, 129, 145, 161 y 177, con los grupos elementales por frecuencias $B_{17}, B_{33}, B_{49}, B_{65}, B_{81}$ y B_{97} , asociados con $\omega=1/12, 1/6, 1/4, 1/3, 5/12$ y $1/2$, respectivamente.

Las contribuciones de las componentes que aparecen en la Tabla 1.2 indican que en todos los países el ruido o componente irregular supone menos del 4% siendo en EE.UU. donde menos peso tiene. La mayor contribución de la tendencia se encuentra en EE.UU. y la menor en Italia. Sin embargo, en la componente estacional ocurre lo contrario, en Italia se encuentra el máximo peso, incluso mayor que el de su tendencia, y en EE.UU. el menor pudiendo prescindir de la componente estacional a la hora de reconstruir la serie. En la componente cíclica hay menos dispersión aunque es Japón el país con mayor contribución e Italia el país con menos peso.

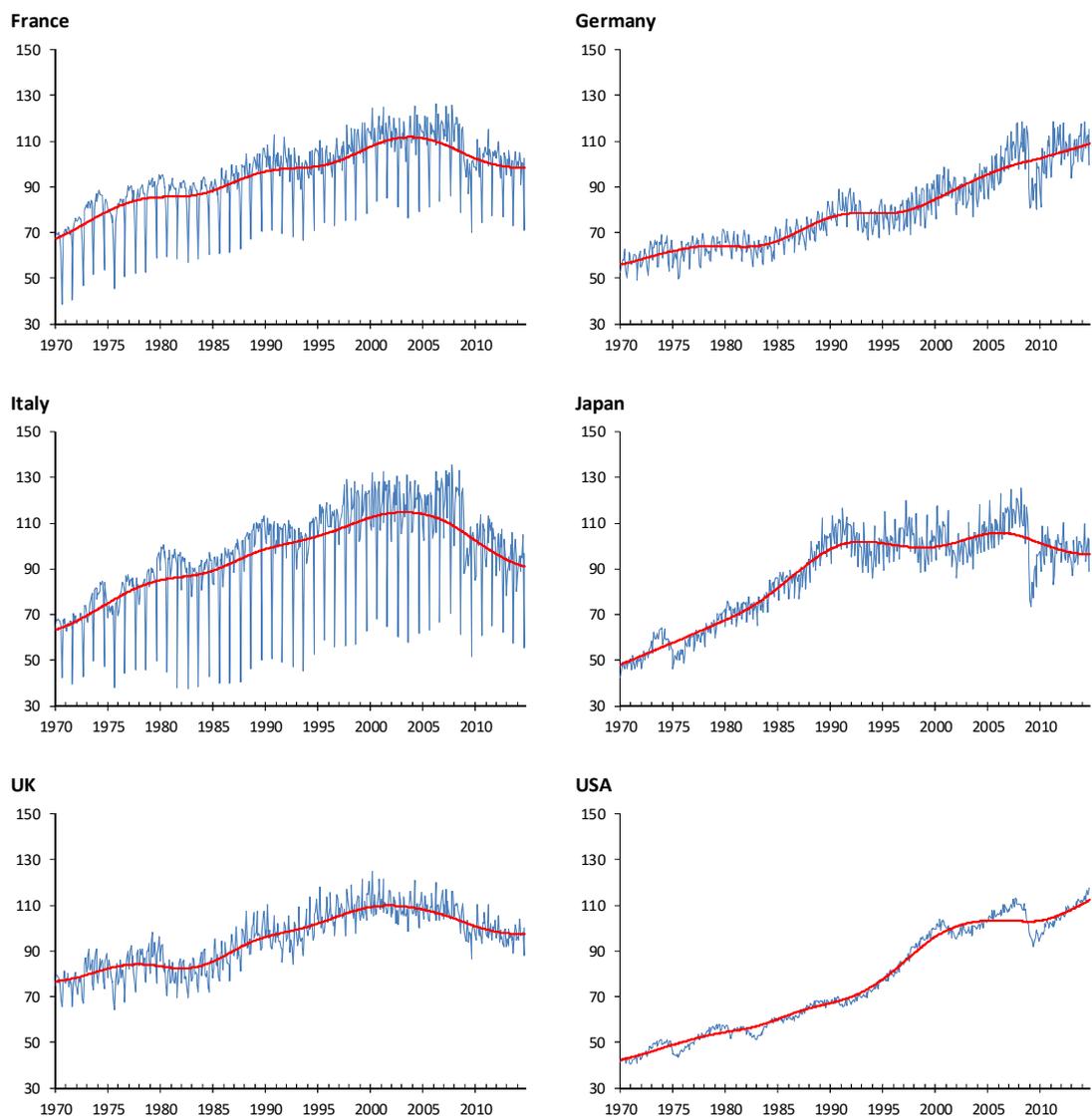


Figura 1.10 Series originales de los IPIs (azul) frente a sus tendencias (rojo).

Tabla 1.2 Contribuciones (%) de las componentes en los IPIs para cada uno de los países.

	Francia	Alemania	Italia	Japón	Reino Unido	EE.UU.
Tendencia	52.1	77.3	42.7	79.0	72.0	87.9
Componente cíclica	9.5	12.6	7.8	13.8	11.1	10.3
Componente estacional	35.6	6.7	47.3	5.1	13.5	0.3
TOTAL	97.3	96.6	97.9	97.9	96.6	98.5

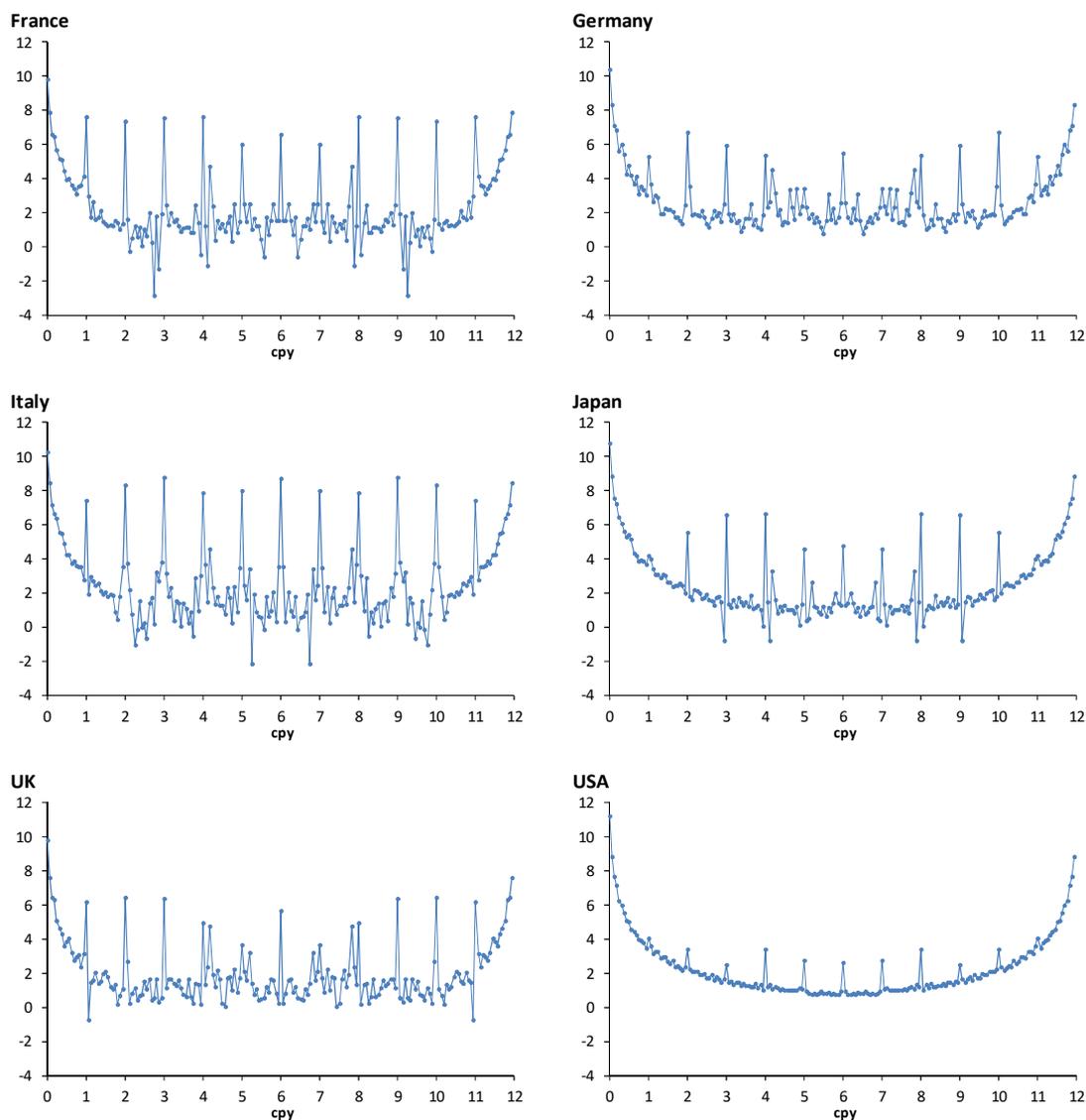


Figura 1.11 Densidad espectral estimada con los log-autovalores, en el eje de abscisas aparece la frecuencia expresada en ciclos por año (cpy).

Del análisis de los resultados de *Circulant SSA* sobre los IPIs de estos países se pueden destacar aspectos precisos sobre las componentes obtenidas. La tendencia es muy suave y cambia de sentido en la última década excepto en Alemania y EE.UU., véase la Figura 1.10. En la componente cíclica, Japón es el país con mayor amplitud de cresta a valle en la última crisis como se advierte en la Figura 1.12. Además, al final del periodo analizado, la componente cíclica es notoriamente creciente en EE.UU. mientras que en el resto oscila próxima a cero. La componente cíclica obtenida tiene una clara interpretación para la coyuntura económica. Al comparar la componente cíclica de cada

uno de los países con su indicador de recesión elaborado por la OCDE se observa una gran coincidencia entre los periodos decrecientes de las componentes cíclicas y las zonas sombreadas de la Figura 1.12 que se corresponden con las recesiones anunciadas por la OCDE.

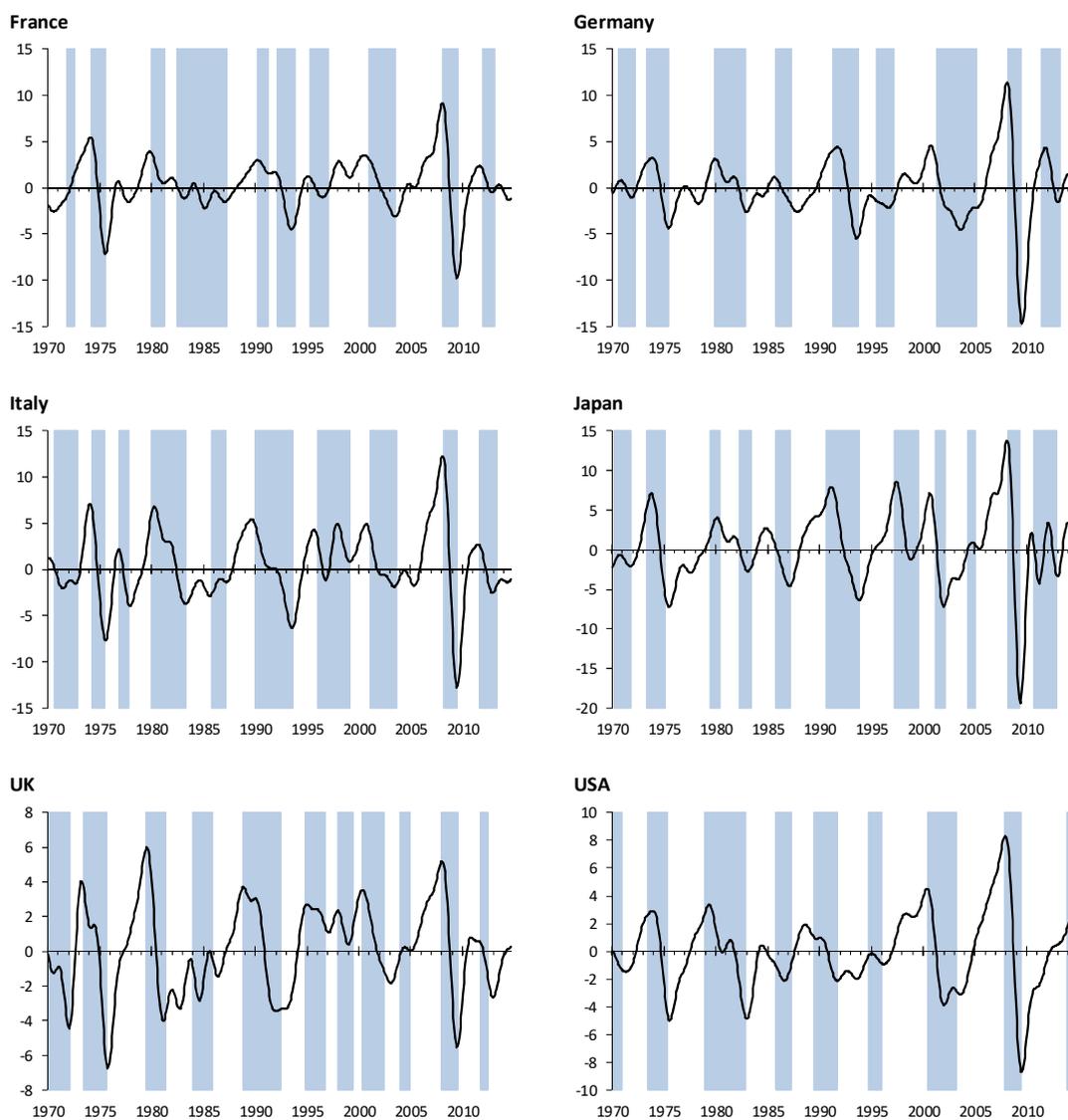


Figura 1.12 Componentes cíclicas de los IPIs junto con las recesiones anunciadas por la OCDE.

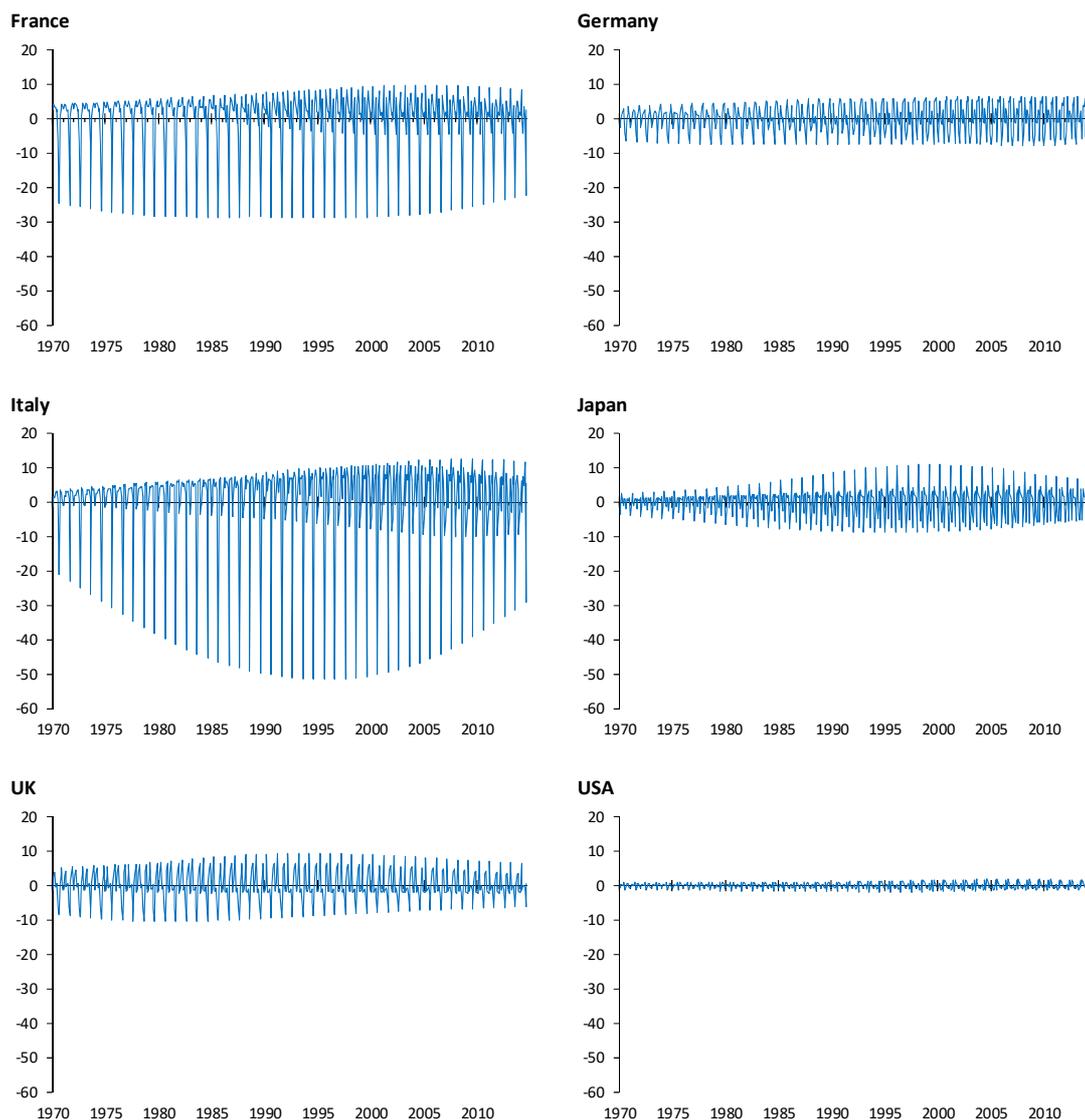


Figura 1.13 Componentes estacionales de los IPIs.

Según se observa en la Figura 1.13, la componente estacional tiene una amplitud modulada debido a cambios en la actividad industrial y, por ello, el patrón estacional anual puede mostrarse modificado con el tiempo. La estacionalidad es muy notable en Italia y Francia y, por contra, en EE.UU. es despreciable comparada con el resto de países. En *Circulant SSA*, la componente estacional es la suma de las series reconstruidas elementales por frecuencias correspondientes a las frecuencias esenciales estacionales. Así, la serie desestacionalizada se obtendría restando a la serie original la componente estacional. Pero, ¿corrige de estacionalidad correctamente *Circulant SSA*? Para determinar si en una serie cualquiera se puede identificar estacionalidad se utiliza

el test combinado de presencia de estacionalidad identificable utilizado en el programa X12-ARIMA, ver Lothian y Morry (1978). Este test, cuyo algoritmo se describe en la Figura 1.14, se realiza sobre las ratios de estacionalidad-ruido de la serie analizada. Dicho test se aplica tanto a las series originales de los IPIs como a las desestacionalizadas obtenidas con *Circulant SSA*. Los resultados aparecen en las Tablas 1.3 y 1.4, respectivamente. Sólo se muestran los estadísticos necesarios para la conclusión, en caso contrario sus posiciones aparecen sombreadas. La consecuencia es clara: las series originales presentan estacionalidad identificable y no así las corregidas de estacionalidad.

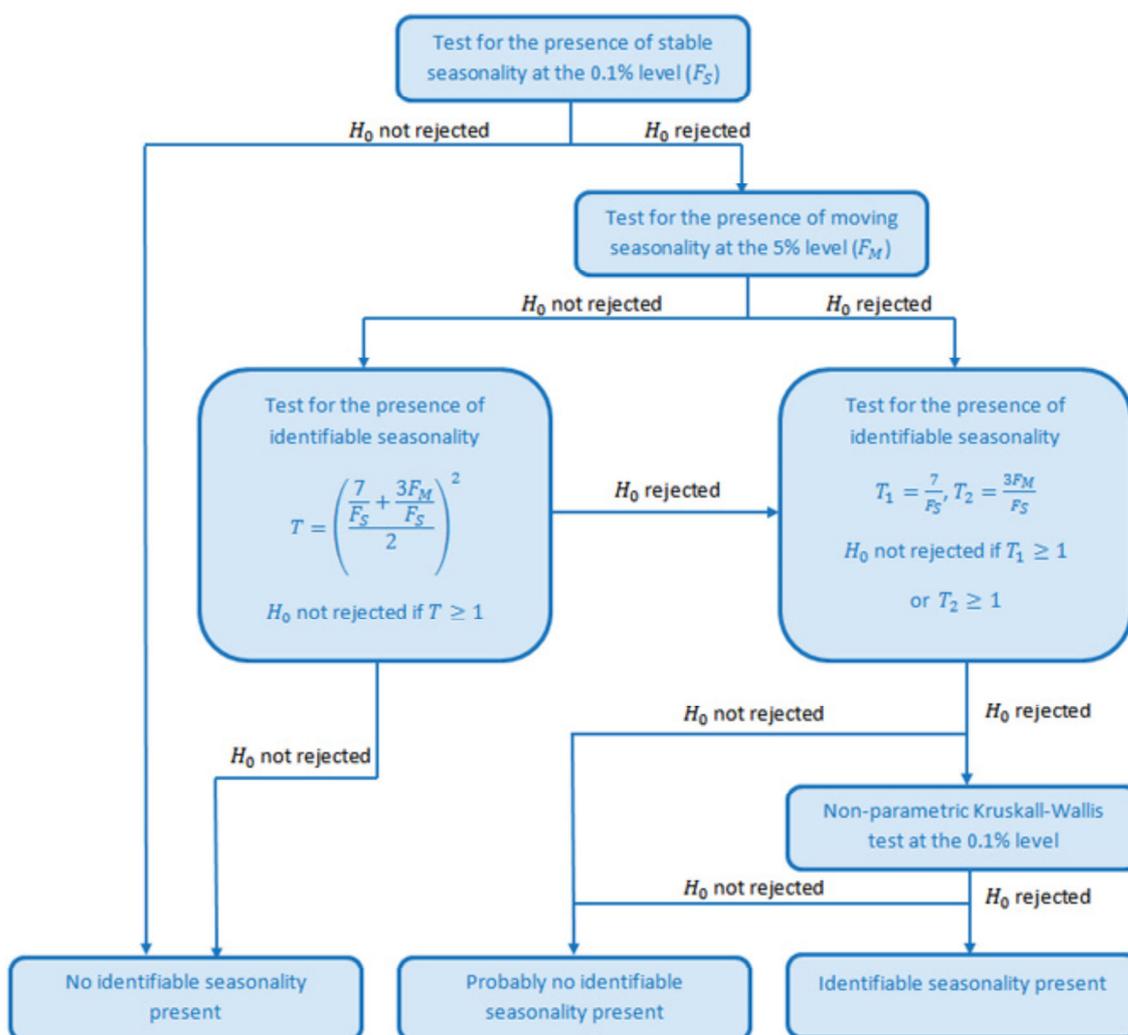


Figura 1.14 Test combinado de presencia de estacionalidad identificable.

Tabla 1.3 Test combinado de estacionalidad identificable sobre las series originales.

		Francia	Alemania	Italia	Japón	Reino Unido	EE.UU.
Estacionalidad estable	F _s	440,2284	82,6099	422,9980	103,7368	148,0124	38,6441
	p-valor	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Estacionalidad evolutiva	F _m	0,5352	0,8422	0,3798	2,2401	0,3833	3,4423
	p-valor	0,9935	0,7519	0,9999	0,0000	0,9999	0,0000
Estacionalidad identificable	T	0,0989	0,2401	0,0981		0,1659	
	T ₁	0,0159	0,0847	0,0165	0,0675	0,0473	0,1811
	T ₂	0,0036	0,0306	0,0027	0,0648	0,0078	0,2672
Kruskall Wallis	W	312,8881	356,2659	328,9401	385,0656	380,1140	264,7416
	p-valor	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Presencia de estacionalidad		Si	Si	Si	Si	Si	Si

Tabla 1.4 Test combinado de estacionalidad identificable sobre las series desestacionalizadas.

		Francia	Alemania	Italia	Japón	Reino Unido	EE.UU.
Estacionalidad estable	F _s	0,9915	0,3413	3,5467	0,4423	0,3338	0,1299
	p-valor	0,4528	0,9761	0,0001	0,9366	0,9781	0,9997
Estacionalidad evolutiva	F _m			1,2056			
	p-valor			0,1806			
Estacionalidad identificable	T			1,2234			
	T ₁						
	T ₂						
Kruskall Wallis	W						
	p-valor						
Presencia de estacionalidad		No	No	No	No	No	No

La identificación ex-ante en *Circulant SSA* de los armónicos de las componentes subyacentes posibilita también la extracción de los efectos de calendario (ciclo semanal, Pascua y año bisiesto) porque están asociados a unas determinadas frecuencias como calcularon Cleveland y Devlin (1980) para el ciclo semanal en series mensuales y Bógalo y Quilis (2006) para los diversos efectos de calendario en series mensuales y trimestrales. Se fija la atención en el ciclo semanal como aplicación práctica. Cleveland y Devlin (1980) derivan las frecuencias características del ciclo semanal, $\omega = 0.3482$ y $\omega = 0.4316$, que equivalen a 4.18 y 5.18 ciclos por año, respectivamente. Para obtener unos valores exactos del orden k de los grupos elementales por frecuencias, la longitud

de la ventana L debe ser de 28 años, es decir, $L=336$ para series mensuales. No obstante, para $L=192$ son adecuadas para k las aproximaciones de 68 y 84, respectivamente. En consecuencia, en los gráficos de la densidad espectral estimada de la Figura 1.11, el primer pico que se observa a la derecha de las frecuencias estacionales correspondientes a los 4 y 5 ciclos por año se asocia con las frecuencias relativas al ciclo semanal. Es evidente que para el IPI de estos países, excepto EE.UU., el efecto del ciclo semanal es significativo porque su densidad espectral es superior al valor medio existente entre las frecuencias estacionales adyacentes. Como muestra, en la Figura 1.15 se representa el efecto del ciclo semanal para el IPI de Italia y Reino Unido. En ambos países dicho efecto tiene una amplitud modulada, se hace notable a partir de la década de los años 80 del siglo pasado, aunque antes en Reino Unido, y en varias ocasiones representa una desviación absoluta de hasta 3 unidades sobre la tendencia del IPI.

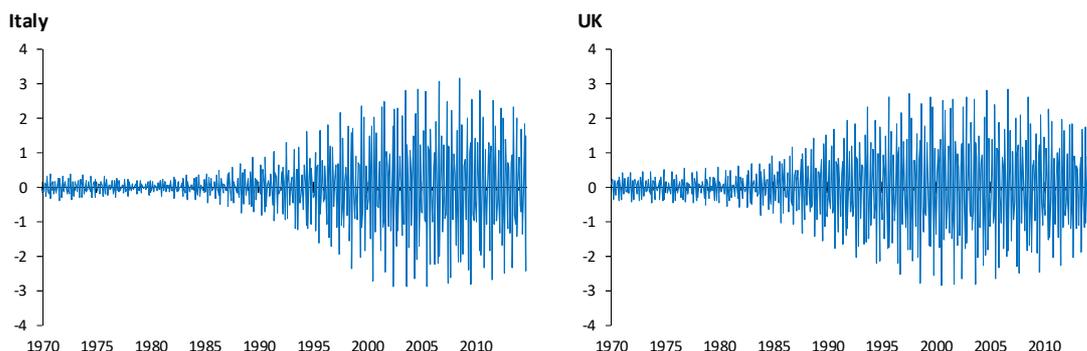


Figura 1.15 Efectos del ciclo semanal de los IPIs.

La Figura 1.16 muestra las gráficas, elaboradas como en la Figura 1.6, de las matrices de w -correlaciones para las series reconstruidas elementales. Según se espera, *Circulant SSA* produce componentes oscilatorias separables de forma que las series reconstruidas elementales se agrupan por pares para las oportunas frecuencias, excepto para $\omega=0$ y $\omega=1/2$, generando cuadrados negros de 2×2 . En los países para los cuales las series asociadas a los tres mayores autovalores tienen cierta w -correlación, estas se corresponden con las series elementales reconstruidas que forman parte de la tendencia de forma que se conserva la separabilidad de las componentes extraídas. Además, las w -correlaciones, en valor absoluto, entre las tres componentes estimadas

(tendencia, ciclo y estacionalidad) para los IPIs son bastante reducidas en los diferentes países como se observa en la Tabla 1.5. Ello indica que las componente oscilatorias subyacentes estimadas son muy separables entre sí.

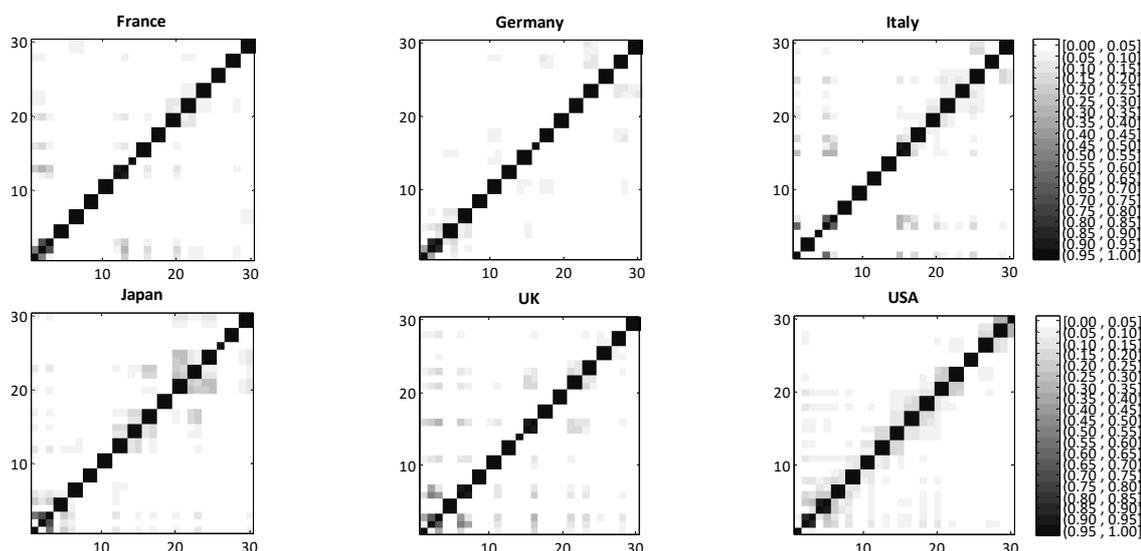


Figura 1.16 Matriz de w -correlaciones de las series reconstruidas elementales para los 30 mayores autovalores.

Tabla 1.5 w -correlaciones entre las componentes de los IPIs para cada uno de los países.

	Francia	Alemania	Italia	Japón	Reino Unido	EE.UU.
Tendencia – Ciclo	0.1673	-0.0540	0.1915	0.1501	0.1393	0.0068
Tendencia – Estacional	0.0005	-0.0004	0.0005	0.0017	0.0008	0.0002
Ciclo – Estacional	0.0013	0.0013	0.0020	0.0011	0.0019	0.0033

1.6 Conclusiones

SSA es una técnica no paramétrica que extrae componentes oscilatorias de una serie temporal siendo necesaria la intervención del analista para identificar las frecuencias asociadas a dichas componentes. En este capítulo se propone una nueva versión de SSA a partir de la equivalencia asintótica de las matrices Toeplitz con las matrices circulantes para series estacionarias. Las propiedades de las matrices circulantes permiten obtener una fórmula cerrada de sus autovectores en función de las frecuencias

siendo sus autovalores la expresión de la densidad espectral para las mismas y, en consecuencia, identificar *ex-ante* de forma automática las frecuencias de las series reconstruidas elementales que forman las componentes oscilatorias. *Circulant SSA* permite, por tanto, la automatización del proceso de extracción de señales cuando la frecuencia de las componentes se conoce de antemano como es el caso de series económicas en relación con su tendencia, estacionalidad y ciclo económico.

La generalización del teorema de Gray que se propone permite extender esta versión a las series no estacionarias sin ninguna dificultad y así se mantiene el espíritu original de SSA de poder aplicarlo sin restricción alguna sobre cualquier tipo de serie temporal.

Se deriva un conjunto de autovectores reales en la diagonalización de la matriz circulante que forman una base ortonormal para el subespacio de las columnas de la matriz de trayectorias. Como resultado de esto, las proyecciones de la matriz de trayectorias sobre las direcciones de dicha base ortonormal son reales y en consecuencia también son reales las series elementales reconstruidas lo que facilita su tratamiento. Además, se ha demostrado que las series reconstruidas elementales por frecuencias, obtenidas con esta nueva versión de SSA, son fuertemente separables. Esto posibilita realizar las tareas del paso del agrupamiento para obtener las diferentes componentes oscilatorias subyacentes de forma sencilla.

La equivalencia asintótica probada de las tres versiones (Basic, Toeplitz y Circulant) significa que, cuanto más largas sean las series, las diferencias entre las componentes estimadas con cada una de las versiones serán menores. Sin embargo, independiente de la longitud de las series, ha quedado patente que *Circulant SSA*, por la estructura de sus autovectores, garantiza componentes separables, incluso en condiciones extremas, al contrario que Basic SSA.

En el estudio del caso real de los IPI, se ha mostrado que la componente cíclica obtenida con *Circulant SSA* tiene una notoria interpretación económica. Además, *Circulant SSA* consigue series corregidas de estacionalidad que no contienen restos de componente estacional y permite extraer los efectos de calendario.

Referencias

1. Alexandrov, T. (2009). A method of trend extraction using singular spectrum analysis. *REVSTAT – Statistical Journal*, 7 (1),1–22.
2. Alexandrov, T. & Golyandina, N. (2005). Automatic extraction and forecast of time series cyclic components within the framework of SSA. *Proceedings of the Fifth Workshop on Simulation*, 45-50.
3. Allen, M. & Smith, L. (1996). Monte Carlo SSA: detecting irregular oscillations in the presence of colored noise. *Journal of Climate*, 9, 3373-3404.
4. Allen, M. R., & Smith, L. A. (1997). Optimal filtering in singular spectrum analysis. *Physics letters A*, 234 (6), 419-428.
5. Alonso, F.J. & Salgado, D.R. (2008). Analysis of the structure of vibration signals for tool wear detection. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22 (3), 735-748.
6. Arteche, J. & García-Enríquez, J. (2017). Singular Spectrum Analysis for signal extraction in Stochastic Volatility models. *Econometrics and Statistics*, 1, 85-98.
7. Bilancia, M. & Campobasso, F. (2010). Airborne particulate matter and adverse health events: robust estimation of timescale effects. In *Classification as a Tool for Research*, 481-489. Springer Berlin Heidelberg.
8. Bógalo, J. & Quilis, E. M. (2006). Los efectos de calendario desde una perspectiva frecuencial. *Estadística Española*, 161, 135-174.
9. Bozzo, E., Carniel, R. & Fasino, D. (2010). Relationship between Singular Spectrum Analysis and Fourier analysis: Theory and application to the monitoring of volcanic activity. *Computers and Mathematics with Applications*, 60, 812-820.
10. Broomhead, D. & King, G. (1986a). Extracting qualitative dynamics from experimental data. *Physica D*, 20, 217-236.
11. Broomhead, D. & King, G. (1986b). On the qualitative analysis of experimental dynamical systems. In *Nonlinear Phenomena and Chaos*, 113-144. A. Hilger ed., Bristol.
12. Carvalho, M. de & Rua, A. (2017). Real-time nowcasting the US output gap: Singular spectrum analysis at work. *International Journal of Forecasting*, 33(1), 185-198.
13. Cleveland, W. S. & Devlin, S. J. (1980). Calendar effects in monthly time series: detection by spectrum analysis and graphical methods. *Journal of the American Statistical Association*, 75 (371), 487-496.
14. Danilov, D. & Zhigljavsky, A. (editors) (1997). *Principal components of time series: the “Caterpillar” method*. Saint Petersburg Press, Saint Petersburg.

15. Elsner, J.B. & Tsonis, A.A. (1996). *Singular spectrum analysis: a new tool in time series analysis*. Plenum, New York.
16. Fraedrich, K. (1986). Estimating the dimension of weather and climate attractors. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 43 (5), 419-432.
17. Ghil, M. & Mo, K. (1991). Intraseasonal oscillations in the global atmosphere. Part I and Part II, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 48 (5), 752-790.
18. Ghil M., Allen R.M., Dettinger M.D., Ide K., Kondrashov D., Mann M.E., Robertson A., Saunders A., Tian Y., Varadi F., & Yiou P. (2002). Advanced spectral methods for climatic time series. *Reviews of Geophysics*, 40 (1),1-41.
19. Ghodsi, M., & Yarmohammadi, M. (2014). Exchange rate forecasting with optimum singular spectrum analysis. *Journal of Systems Science and Complexity*, 27 (1), 47-55.
20. Golyandina, N. (2010). On the choice of parameters in Singular Spectrum Analysis and related subspace-based methods. *Statistics and Its Interface*, 3 (3), 259-279.
21. Golyandina, N. E., & Lomtev, M. A. (2016). Improvement of separability of time series in singular spectrum analysis using the method of independent component analysis. *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*, 49 (1), 9-17.
22. Golyandina, N., Nekrutkin, V. & Zhigljavsky, A. (2001). *Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques*. Chapman & Hall/CRC.
23. Golyandina, N. & Shlemov, A. (2015). Variations of Singular Spectrum Analysis for separability improvement: non-orthogonal decompositions of time series. *Statistics and Its Interface*, 8 (3), 277-294.
24. Golyandina, N. & Zhigljavsky, A. (2013). *Singular Spectrum Analysis for Time Series*. Springer.
25. Gray, R.M. (1972). On the Asymptotic Eigenvalue Distribution of Toeplitz Matrices. *IEEE Transactions on Information Theory*, 18 (6), 725-730.
26. Gray, R.M. (1974). On Unbounded Toeplitz Matrices and Nonstationary Time Series with an Application to Information Theory. *Information and Control*, 24, 181-196.
27. Gray, R.M. (2006). Toeplitz and Circulant Matrices: A review. *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, 2 (3), 155-239.
28. Grenander, U. & Szegő, G. (1958). *Toeplitz Forms and Their Applications*. University of California Press, Berkeley and Los Angeles.
29. Gutiérrez-Gutiérrez, J. & Crespo, P. M. (2012). Block Toeplitz matrices: asymptotic results and applications. *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, 8 (3), 179-257.

30. Hassani, H. (2007). Singular spectrum analysis: Methodology and comparison. *Journal of Data Science*, 5 (2), 239-257.
31. Hassani, H., Mahmoudvand, R., Omer, H.N. & Silva, E.S. (2014). A Preliminary Investigation into the Effect of Outlier(s) on Singular Spectrum Analysis. *Fluctuation and Noise Letters*, 13 (4), 1450029 (23 pages).
32. Hassani, H., Mahmoudvand, R., & Zokaei, M. (2011). Separability and window length in singular spectrum analysis. *Comptes rendus mathématique*, 349 (17-18), 987-990.
33. Hassani, H. & Thomakos, D. (2010). A review on singular spectrum analysis for economic and financial time series. *Statistics and Its Interface*, 3, 377–397.
34. Hyvärinen, A. (1999). Fast and robust fixed-point algorithms for independent component analysis. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 10 (3), 626-634.
35. Hyvärinen, A., Karhunen, J. & Oja, E. (2001). *Independent Component Analysis*. John Wiley and Sons.
36. Khan, M. A. R. & Poskitt, D. S. (2013). Moment tests for window length selection in singular spectrum analysis of short–and long–memory processes. *Journal of Time Series Analysis*, 34 (2), 141-155.
37. Khan, M. A. R., & Poskitt, D. S. (2017). Forecasting stochastic processes using singular spectrum analysis: Aspects of the theory and application. *International Journal of Forecasting*, 33 (1), 199-213.
38. Korobeynikov, A. (2009). Computation and space-efficient implementation of SSA. *Statistics and Its Interface*, 3, 357–368.
39. Kume, K. (2012). Interpretation of singular spectrum analysis as complete eigenfilter decomposition. *Advances in Adaptive Data Analysis*, 4 (4), 1250023.
40. Lancaster, P. (1969). *Theory of Matrices*. Academic Press, NY.
41. Lothian, J. & Morry, M. (1978). A test for the presence of identifiable seasonality when using the X-11-Arima program. Research Paper, Seasonal Adjustment and Time Series Analysis Staff, Statistics Canada.
42. Papailias, F., & Thomakos, D. (2017). EXSSA: SSA-based reconstruction of time series via exponential smoothing of covariance eigenvalues. *International Journal of Forecasting*, 33 (1), 214-229.
43. Pearl, J. (1973). On Coding and Filtering Stationary Signals by Discrete Fourier Transform. *IEEE Trans. on Info. Theory*, IT-19, 229-232.
44. Prony, G. de (1795). Essai expérimental et analytique sur les lois de la dilatabilité des fluides élastiques et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'eau et la vapeur de l'alkool à différentes températures. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 1 (2), 24-76.

45. Safi, S. M. M., Pooyan, M. & Nasrabadi, A. M. (2018). Improving the performance of the SSVEP-based BCI system using optimized singular spectrum analysis (OSSA). *Biomedical Signal Processing and Control*, 46, 46-58.
46. Solary, M.S. (2013). Finding eigenvalues for heptadiagonal symmetric Toeplitz matrices. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 402, 719-730.
47. Tong, L., Soon, V. C., Huang, Y. F. & Liu, R. (1990). AMUSE: a new blind identification algorithm. *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, 3, 1784-1787.
48. Trench, W.F. (2003). Absolute equal distribution of the spectra of Hermitian matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 366, 417-431.
49. Usevich, K. (2010). On signal and extraneous roots in singular spectrum analysis. *Statistics and Its Interface*, 3 (3), 281-295.
50. Vautard, R. & Ghil, M. (1989). Singular spectrum analysis in nonlinear dynamics, with applications to paleoclimatic time series. *Physica D*, 35, 395-424.
51. Vautard, R., Yiou, P. & Ghil, M. (1992). Singular-spectrum analysis: A toolkit for short, noisy chaotic signal. *Physica D*, 58, 95-126.
52. Wang, R., Ma, H.G., Liu, G.Q. & Zuo, D.G. (2015). Selection of window length for singular spectrum analysis. *Journal of the Franklin Institute*, 352 (4), 1541-1560.
53. Widom, H. (1965). Toeplitz Matrices. In *Studies in Real and Complex Analysis*, 179-209. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
54. Wold, H. (1938). *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*. Almqvist and Wiksell, Uppsala, Sweden.
55. Xu, S., Hu, H., Ji, L., & Wang, P. (2018). Embedding Dimension Selection for Adaptive Singular Spectrum Analysis of EEG Signal. *Sensors*, 18 (3), 697.
56. Yang, B., Dong, Y., Yu, C., & Hou, Z. (2016). Singular spectrum analysis window length selection in processing capacitive captured biopotential signals. *IEEE Sensors Journal*, 16 (19), 7183-7193.
57. Yurova, A., Bobylev, L. P., Zhu, Y., Davy, R. & Korzhikov, A. Y. (2018). Atmospheric heat advection in the Kara Sea region under main synoptic processes. *International Journal of Climatology*, <https://doi.org/10.1002/joc.5811>.

2

Propiedades estadísticas de SSA

2.1 Introducción

Las propiedades estadísticas que posea todo estimador son las que garantizan la confianza de los analistas en sus estimaciones. El Análisis Espectral Singular, SSA, es un procedimiento no paramétrico de análisis de series temporales que estima componentes oscilatorias subyacentes en una serie temporal. En el Capítulo 1 se ha introducido la versión *Circulant SSA*, CSSA, que es un método automático de extracción de señales asintóticamente equivalente a las versiones clásicas de SSA. En el presente capítulo, mediante simulaciones, se profundiza en las propiedades estadísticas de las versiones de SSA, Basic, Toeplitz y *Circulant*, permitiendo la comparación entre ellas y, en consecuencia, se analiza el comportamiento estadístico de SSA no estudiado hasta la fecha. En concreto, en este capítulo se van a estudiar las propiedades tanto en muestras finitas relativas a la ausencia de sesgo, eficiencia y separabilidad de las componentes estimadas, como la fiabilidad de las estimaciones en tiempo real, es decir, la consistencia y la magnitud de las revisiones de la estimación de una componente oscilatoria conforme se dispone de más observaciones de la serie original.

La ausencia de sesgo, la eficiencia y la separabilidad nos permiten examinar las propiedades en muestras finitas de las componentes estimadas. Debido a que las verdaderas componentes son desconocidas en la vida real, es imposible determinar a posteriori las propiedades de un procedimiento no paramétrico. Los procedimientos basados en modelos, como las diversas metodologías ARIMA, realizan a posteriori un test sobre la bondad del ajuste de los datos observados al modelo especificado y estimado (ver Maravall, 2003, y Blakely y McElroy, 2016) del que se derivan los

modelos de las componentes subyacentes, Gómez y Maravall (2001a y 2001b). No obstante, aunque se desconozcan las componentes reales, es habitual validar un modelo estocástico que estima componentes subyacentes conteniendo un nivel de ruido.

El método para evaluar las propiedades estadísticas de un procedimiento no paramétrico es mediante simulación Monte Carlo como se ha efectuado para cualquier innovación en SSA. Por ejemplo, Vautard et al. (1992) usan las realizaciones Monte Carlo para validar su algoritmo que separa la señal de un ruido blanco al igual que Allen y Smith (1996) con la presencia de ruido rojo. Recientemente, Carvalho y Rua (2017) utilizan la simulación Monte Carlo para examinar su propuesta de extracción de la componente cíclica. Por ello, las propiedades de *Circulant SSA* y su comparación con las otras versiones se evalúan mediante simulaciones. No obstante, frente al uso habitual de señales deterministas más un ruido estocástico en la literatura de SSA, como en los ejemplos previos, se parte de modelos estructurales, lineales y no lineales, con tres componentes: tendencia, ciclo y estacionalidad, que son modeladas explícitamente como en Harvey y Shepard (1993), a las que se añade un término de ruido. En consecuencia, ello permite una evaluación más exhaustiva de las propiedades al considerar modelos más amplios logrando una calificación muy favorable.

La fiabilidad en tiempo real es un tema ampliamente estudiado por sus consecuencias económicas y sociales. Las autoridades responsables de la política económica deben basar sus decisiones sobre datos en tiempo real sujetos a incertidumbre pudiendo adoptar medidas en el sentido incorrecto según muestra Orphanides (2001). Ello ha motivado el interés de los bancos centrales según lo atestiguan los trabajos de Ashley et al. (2005) del Banco de Inglaterra, Damia y Picón Aguilar (2006) del Banco Central Europeo o Fixler y Nalewaik (2007) de la Reserva Federal. La revisión a posteriori de las estimaciones de las componentes subyacentes en una serie temporal se debe, bien a la actualización de los datos ya publicados por disponer de nueva información, bien a los recálculos por la aparición de datos adicionales en los periodos siguientes. La mayoría de los trabajos, entre los que se encuentran referencias recientes como Patterson et al. (2011) y Jacobs y van Norden (2011) o más tempranas como Conrad y Corrado (1979), Harvey et al. (1983), Patterson y Heravi (1991) y Patterson (1995), se centran en la primera causa de revisión. Además, esta gran variedad de trabajos demuestra que las revisiones se producen con todas las metodologías. No obstante,

Kaiser y Maravall (1999), con la estimación del ciclo en un modelo ARIMA de líneas aéreas, y Orphanides y van Norden (2002), con la llamada estimación quasi-real del ciclo, son referencias para estudiar las revisiones debidas a la segunda causa citada.

El objetivo de la técnica no paramétrica SSA es descomponer una serie temporal como suma de un pequeño número de componentes subyacentes que sean interpretables, Golyandina et al. (2001), entre las que se encuentra el ciclo. Ello motiva el estudio de las revisiones en SSA para analizar la fiabilidad de la estimación del ciclo económico en tiempo real. No obstante, desde el origen de SSA con el trabajo de Broomhead y King (1986) transcurren veinticinco años hasta el primer estudio sobre las revisiones en el marco de SSA con Patterson et al. (2011). En este trabajo, se analizan las revisiones de una componente estimada, debidas a la primera causa señalada, desde un aspecto multivariante donde las sucesivas oleadas de publicaciones de los datos son consideradas como las diferentes series en un sistema multivariante, véase Patterson y Heravi (2004). El segundo trabajo sobre las revisiones en el marco de SSA, Carvalho et al. (2012), se centra en la segunda causa indicada contrastando las revisiones en el ciclo del PIB de EE.UU. producidas por SSA con las obtenidas mediante filtros, comparando la estimación quasi-real de Orphanides y van Norden (2002) con la estimación final. Posteriormente, Carvalho y Rua (2017) también contrastan las revisiones en el ciclo del PIB de EE.UU. generadas por SSA, desde una perspectiva multivariante junto con el IPI de EE.UU., donde analizan conjuntamente ambas causas de revisión comparando la estimación real de Orphanides y van Norden (2002) con la estimación final.

El sesgo y la separabilidad son características objetivas contrastables directamente. Sin embargo, la revisión, como la eficiencia, es una característica relativa que adquiere su especificidad a partir de la comparación con otros procedimientos, es decir, se podrá enunciar que la versión propuesta, CSSA, produce revisiones de mayor o menor cuantía que otras técnicas. El procedimiento elegido para comparar la fiabilidad en tiempo real es Tramo-Seats, TS, Gómez y Maravall (1998), por dos motivos. Uno, la descomposición tiene un enfoque paramétrico basada en modelos ARIMA y, dos, es ampliamente usado por los servicios de estudios y departamentos de econometría. La evaluación comparativa también se efectúa con simulaciones de modelos estructurales. Con tal fin y para evitar distorsiones, siguiendo a Kaiser y Maravall (1999), se introduce en SSA un concepto de estimación final diferente al definido por Orphanides y van

Norden (2002) porque, según este último, el tiempo que transcurre desde la primera estimación a la actual, que denominan final, no es el mismo para todos los datos publicados influyendo sobre todo en los últimos registros. El resultado del examen de la comparación es concluyente. Las estimaciones del ciclo económico realizadas con la metodología ARIMA sufren mayores revisiones y son más sensibles a cualquier shock que las obtenidas con CSSA. Así mismo, la comparación empírica se aplica al estudio de un caso real como es el análisis de la evolución de las revisiones de la estimación del ciclo de la producción industrial del grupo de países investigados en el primer capítulo.

En consecuencia, según lo expuesto, las contribuciones de este capítulo son la demostración mediante simulaciones de las propiedades estadísticas de SSA:

1. Las estimaciones producidas por Basic SSA, Toeplitz SSA y CSSA no tienen sesgo en muestras finitas.
2. Las estimaciones de las componentes realizadas con CSSA son más eficientes que las obtenidas con las otras dos versiones.
3. Las tres versiones de SSA obtienen estimaciones separables siendo el grado de separabilidad mayor con CSSA.
4. Se verifica que CSSA es consistente para el ciclo económico porque sus estimaciones convergen a un estimador final no sesgado al disponer de más datos.
5. Se evidencia que CSSA produce revisiones de menor magnitud para el ciclo económico, en sentido de error cuadrático medio, que el método Tramo-Seats.
6. Se corrobora todo lo anterior para modelos estocásticos complejos, introducidos por primera vez en la literatura de SSA, tanto lineales como no lineales.

El esquema del capítulo se detalla a continuación. En primer lugar, en la Sección 2 se comparan las propiedades estadísticas en muestras finitas de las tres versiones de SSA, *Circulant*, Basic y Toeplitz, mediante un conjunto de simulaciones para la tendencia y componentes cíclica y estacional. Seguidamente, en la Sección 3, para el ciclo económico, se examina de forma comparada la fiabilidad en tiempo real entre *Circulant SSA* y Tramo-Seats mediante nuevas simulaciones para analizar sus revisiones. En la Sección 4 se efectúa una aplicación a un caso de estudio real para evaluar la evolución de las revisiones y, para terminar, en la Sección 5 se ofrecen las conclusiones.

2.2 Propiedades estadísticas en muestras finitas

Dada una serie de longitud finita, las propiedades estadísticas que se consideran para sus componentes estimadas son la ausencia de sesgo, la eficiencia y la separabilidad. Además, es deseable que el error global de estimación posea unas características similares al término de error presente en la serie tal como ruido blanco gaussiano.

La verificación de dichas propiedades para las estimaciones obtenidas con el algoritmo *Circulant SSA* se efectúa empíricamente mediante simulaciones, tanto para una forma lineal como otra no lineal, de modelos estructurales de series temporales. Además, con las simulaciones realizadas, para cada modelo se obtienen estimaciones con las otras versiones de SSA, Basic y Toeplitz, con el fin de comparar sus propiedades con CSSA y determinar qué versión obtiene estimaciones menos sesgadas, más eficientes y con mayor grado de separabilidad.

2.2.1 Modelo lineal

Se considera el siguiente modelo estructural lineal para una serie temporal x_t

$$x_t = \mu_t + c_t + \gamma_t + \varepsilon_t \quad (2.1)$$

donde μ_t es la tendencia, c_t representa la componente cíclica, γ_t la componente estacional y ε_t es un término de error. Dentro del modelo de tendencia lineal local, el modelo seleccionado para la tendencia es un paseo aleatorio integrado, como en Young (1984), definido por

$$\begin{aligned} \mu_t &= \mu_{t-1} + v_{t-1} \\ v_t &= v_{t-1} + \xi_{t-1} \quad \xi_t \sim N(0, \sigma_\xi^2) \end{aligned} \quad (2.2)$$

siendo v_t la pendiente añadida al nivel de la tendencia. Así, se obtiene una tendencia bastante suave. Los modelos de las componentes cíclica y estacional se establecen siguiendo a Durbin y Koopman (2012). La componente cíclica es la primera serie de un modelo VAR(1) bivalente especificado por

$$\begin{pmatrix} c_t \\ \tilde{c}_t \end{pmatrix} = \rho_c \begin{pmatrix} \cos(2\pi\omega^c) & \sin(2\pi\omega^c) \\ -\sin(2\pi\omega^c) & \cos(2\pi\omega^c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{t-1} \\ \tilde{c}_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_t \\ \tilde{\zeta}_t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \zeta_t \\ \tilde{\zeta}_t \end{pmatrix} \sim N(\mathbf{0}, \sigma_\zeta^2 \mathbf{I}_2), \quad (2.3)$$

donde la frecuencia $\omega^c \in [0,1]$ y el periodo es $1/\omega^c$. La componente estacional de periodo s es una forma trigonométrica estocástica dada por la siguiente ecuación

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{\lfloor s/2 \rfloor} \left(\eta_{j,t} \cos(2\pi\omega_j^c t) + \tilde{\eta}_{j,t} \sin(2\pi\omega_j^c t) \right), \quad \omega_j^c = \frac{j}{s}, \quad j=1, \dots, \lfloor s/2 \rfloor, \quad (2.4)$$

donde $\lfloor \cdot \rfloor$ indica la parte entera y los coeficientes $\eta_{j,t}$ y $\tilde{\eta}_{j,t}$ son paseos aleatorios

$$\eta_{j,t} = \eta_{j,t-1} + \zeta_{j,t}, \quad \tilde{\eta}_{j,t} = \tilde{\eta}_{j,t-1} + \tilde{\zeta}_{j,t}, \quad j=1, \dots, \lfloor s/2 \rfloor, \quad (2.5)$$

siendo $\zeta_{j,t}$ y $\tilde{\zeta}_{j,t}$ variables independientes $N(0, \sigma_\zeta^2)$. Finalmente, el término de error ε_t es un proceso de ruido blanco $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$. De este modo, la serie x_t está formada por señal, la suma de las tres componentes, más ruido.

La suavidad de la tendencia origina que sea una línea polinómica de grado desconocido con lo cual se ignora su rango. Ello se debe a que la innovación de un periodo afecta al nivel de la tendencia de periodos posteriores por ser un proceso estocástico. También, aunque el rango de una senoide es dos, tanto la componente cíclica como estacional, por ser procesos estocásticos, tienen amplitud modulada y rango desconocido.

La tendencia posee al menos una raíz unitaria y, así, tanto ella como la serie x_t que conforma son no estacionarias. Las series simuladas se consideran mensuales con un periodo cíclico de $1/\omega^c = 48$ meses y un periodo estacional de $s = 12$ meses. Se establece $\rho_c = 1$ de forma que la componente cíclica tampoco es estacionaria al igual que la componente estacional por tener una raíz unitaria estacional. Se generan 10000 series simuladas de longitud $T = 193$. Las varianzas de las innovaciones correspondientes a los modelos de las componentes anteriores se establecen en $\sigma_\xi^2 = 0.0006^2$, $\sigma_\zeta^2 = 0.0080^2$ y $\sigma_{\tilde{\zeta}}^2 = 0.0040^2$ para la tendencia, componente cíclica y estacional, respectivamente, y $\sigma_\varepsilon^2 = 0.0600^2$ para el ruido blanco. Estos valores son similares a los estimados para diferentes modelos estructurales aplicados a datos reales como en Durbin y Koopman (2012). Una vez simuladas las 10000 series, para cada una de ellas se estiman las tres componentes mediante *Circulant SSA* con una longitud de ventana $L = 48$. Esta longitud de ventana cumple los requisitos enunciados en

Golyandina y Zhigljavsky (2013). En particular, es múltiplo del periodo estacional, igual al periodo del ciclo y divisor de $T-1$. Con *Circulant SSA* se conoce *ex-ante* la frecuencia asociada a cada autovector según detalla su algoritmo en el primer capítulo. Así, la tendencia, identificada con la frecuencia $\omega=0$, se reconstruye con la autoterna 1, con el grupo elemental por frecuencias B_1 . De igual modo, para todas las series simuladas, la componente cíclica, emparejada con la frecuencia $\omega=1/48$, se reconstruye con las autoternas 2 y 48, con el grupo elemental por frecuencias B_2 . Finalmente, para todas las series simuladas, la componente estacional, relacionada con las frecuencias $\omega=1/12, 1/6, 1/4, 1/3, 5/12, 1/2$, se reconstruye con las autoternas 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41 y 45, con los grupos elementales por frecuencias $B_5, B_9, B_{13}, B_{17}, B_{21}$ y B_{25} ; todo ello, según se deriva de la descripción pormenorizada del algoritmo *Circulant SSA* efectuada en el Capítulo 1.

Finalizada la extracción de las componentes de las series simuladas, se comienza midiendo el posible sesgo de dichas estimaciones. Para ello, se supone que toda componente simulada, y_t , se puede descomponer en señal, la componente estimada \hat{y}_t , más ruido, el error de estimación e_t , es decir, $y_t = \hat{y}_t + e_t$. Las componentes estimadas serán no sesgadas, $E(\hat{y}_t) = y_t$, si en la regresión lineal $y_t = \alpha + \beta \hat{y}_t + e_t$ se aceptan las hipótesis $\alpha = 0$ (no hay traslación) y $\beta = 1$ (no hay cambio de escala). Los percentiles de las distribuciones de los estadísticos, $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$, de las 10000 simulaciones se recogen en la Tabla 2.1. Del análisis de esos percentiles se verifica que la mediana de las estimaciones de la constante α se puede considerar nula para las tres componentes y que la mediana de las estimaciones del coeficiente de regresión β es prácticamente la unidad para dichas componentes aunque con menor concentración en la distribución del ciclo. La diferente concentración en la distribución del estadístico $\hat{\beta}$ en las tres componentes se explica por la varianza de la innovación correspondiente, a mayor varianza menor concentración. Por tanto, se puede concluir que $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ con lo cual CSSA aplicado a modelos estructurales lineales estima componentes no sesgadas y, por tanto, la media del error de estimación es nula para las tres componentes.

Tabla 2.1 Percentiles de las distribuciones de los estadísticos para estudiar el sesgo de las componentes extraídas con *Circulant SSA* de 10000 simulaciones del modelo lineal.

		Percentiles				
Estadístico	Componente	5	25	50	75	95
$\hat{\alpha}$	Tendencia	-0.0613	-0.0209	-0.0006	0.0194	0.0600
	Ciclo	-0.0109	-0.0043	0.0000	0.0045	0.0108
	Estacional	-0.0015	-0.0006	0.0000	0.0006	0.0015
$\hat{\beta}$	Tendencia	0.9748	0.9951	1.0032	1.0143	1.0651
	Ciclo	0.8481	0.9569	1.0029	1.0476	1.1338
	Estacional	0.9451	0.9819	1.0049	1.0277	1.0629

A continuación, es necesario analizar el Error Cuadrático Medio de la estimación de cada componente \hat{y}_t , $ECM(\hat{y}_t)$. Debido a que las estimaciones de las componentes no son sesgadas, el $ECM(\hat{y}_t)$ coincide con la varianza del error de estimación, $Var(e_t)$, donde $e_t = y_t - \hat{y}_t$. Los percentiles de la distribución de las estimaciones de la desviación típica del error de estimación de las tres componentes de las 10000 simulaciones se recogen en la Tabla 2.2. Del estudio de esos percentiles se desprende que la mediana de las estimaciones de la desviación típica del error de estimación es pequeña en relación con la desviación típica del ruido blanco incluido en las series simuladas. Además, se observa que sus distribuciones están bastante concentradas sobre todo para la componente estacional. No obstante, la posible mayor eficiencia o precisión de CSSA, es decir, su menor $Var(e_t)$, se comprobará cuando después se realice la comparación con las estimaciones obtenidas por las otras versiones, Basic y Toeplitz.

Tabla 2.2 Percentiles de la distribución de las estimaciones de la desviación típica del error de estimación de las componentes extraídas con *Circulant SSA* de 10000 simulaciones del modelo lineal.

		Percentiles				
Componente		5	25	50	75	95
Tendencia		0.0143	0.0195	0.0241	0.0296	0.0394
Ciclo		0.0193	0.0230	0.0261	0.0298	0.0365
Estacional		0.0295	0.0318	0.0334	0.0351	0.0377

Por otro lado, el error global estimado dado por $\hat{\varepsilon}_t = x_t - \hat{\mu}_t - \hat{c}_t - \hat{\gamma}_t$, donde $\hat{\mu}_t$, \hat{c}_t y $\hat{\gamma}_t$ son, respectivamente, las componentes estimadas de tendencia, ciclo y estacionalidad debe ser estacionario, en concreto, un proceso de ruido blanco gaussiano como el término de error añadido a las componentes simuladas. Por tanto, en la estimación del error global $\hat{\varepsilon}_t$ se deben verificar las siguientes hipótesis: su media es nula; su varianza es similar al valor de σ_ε^2 utilizado en el ruido blanco de las simulaciones; que no está autocorrelacionado, es decir, en la estimación del modelo autorregresivo $\hat{\varepsilon}_t = \rho \hat{\varepsilon}_{t-1} + a_t$, siendo a_t ruido blanco, no se rechaza la hipótesis $\rho = 0$; y que su distribución es gaussiana. Los percentiles de las distribuciones de la media muestral $\bar{\varepsilon}$, desviación estándar $\hat{\sigma}_\varepsilon$, coeficiente de autorregresión $\hat{\rho}$ y estadístico de Jarque-Bera del contraste de normalidad para el error global de las 10000 simulaciones se presentan en la Tabla 2.3. De su observación se desprende que la mediana es nula para la media, similar al valor σ_ε para la desviación estándar del ruido blanco de las simulaciones con una distribución muy concentrada y prácticamente cero para el coeficiente de autorregresión. Además, al menos el 95% de los valores del estadístico de Jarque-Bera es inferior a 5.99, el percentil 95 de la Chi-cuadrado con 2 grados de libertad. Por todo ello, no se rechaza la hipótesis de que el error global estimado es un proceso de ruido blanco gaussiano.

Por último, debido a que el error global es suma de los errores de estimación de las componentes, se podría pensar que unos errores se compensan con otros. Si ello fuera cierto, existiría alguna correlación entre las componentes estimadas de forma que no serían separables. No obstante, del análisis de las distribuciones de las w -correlaciones muestrales entre las componentes estimadas, que aparecen en la Tabla 2.4, se deriva que tales componentes son w -ortogonales y, por ello, separables. En consecuencia, los resultados derivados de las Tablas 2.3 y 2.4 junto con la ausencia de sesgo y un error de estimación pequeño en las componentes estimadas, permiten colegir de forma empírica que *Circulant SSA* verifica las propiedades estadísticas exigidas en muestras finitas para las estimaciones de las componentes con modelos estructurales lineales.

Tabla 2.3 Percentiles de las distribuciones de los estadísticos del error global con *Circulant SSA* de 10000 simulaciones del modelo lineal.

Estadístico	Percentiles				
	5	25	50	75	95
$\bar{\epsilon}$	-0.0033	-0.0012	0.0000	0.0011	0.0033
$\hat{\sigma}_{\epsilon}$	0.0478	0.0508	0.0529	0.0551	0.0581
$\hat{\rho}$	-0.1693	-0.0870	-0.0313	0.0285	0.1074
JB	0.1003	0.5192	1.1860	2.2912	5.6074

Tabla 2.4 Percentiles de las distribuciones de las w -correlaciones muestrales entre las componentes estimadas con *Circulant SSA* de 10000 simulaciones del modelo lineal.

Componentes	Percentiles				
	5	25	50	75	95
Trend – Cycle	-0,1063	-0,0267	0,0103	0,0494	0,1334
Trend – Seas.	-0,0053	-0,0015	0,0007	0,0030	0,0066
Cycle – Seas.	0,0013	0,0022	0,0030	0,0043	0,0069

Los resultados de las simulaciones ilustran las propiedades para muestras finitas de *Circulant SSA*. No obstante, la cuestión de sus propiedades comparadas con las otras versiones de SSA, Basic y Toeplitz, está presente. Para contrastar estas propiedades de la versión *Circulant* con las otras versiones es necesario la elección de un método *ex-post* para la identificación automática de las frecuencias asociadas a las componentes estimadas con las otras versiones. Entre los procedimientos *ex-post* se encuentran los diseñados por Ghil y Mo (1991), Vautard et al. (1992), Alexandrov y Golyandina (2005), Alexandrov (2009) y Carvalho y Rua (2017) como algunos de los más citados en la literatura. No obstante, dado que las series a tratar son simulaciones, se conoce en qué frecuencias del espectro las series pueden presentar información y, por ello, se ha optado por diseñar un procedimiento heurístico para la ocasión. Según los modelos estructurales simulados, el conjunto de frecuencias en el que existe información es $\Omega = \{0, 1/48, 1/12, 1/6, 1/4, 1/3, 5/12, 1/2\}$ y la longitud de la ventana, $L = 48$, coincide con el periodo del ciclo y es múltiplo de los periodos de las frecuencias estacionales características de una serie mensual. Además, cada autovector genera un subespacio lineal asociado a una frecuencia. Así, se calcula el periodograma para cada autovector y,

fácilmente, se obtiene la frecuencia correspondiente al máximo de dicho periodograma. Si dicha frecuencia pertenece a Ω , la oscilación estimada asociada a ese autovector pasa a formar parte de la tendencia, ciclo o estacionalidad según corresponda. En caso contrario se desecha y forma parte del ruido.

La primera comparación entre las tres versiones de SSA se efectúa con los estadísticos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ de la regresión entre las componentes simuladas y las estimadas ya que determinan el sesgo de la estimación. Basic SSA y Toeplitz SSA utilizan las mismas series simuladas que *Circulant SSA* para obtener las respectivas distribuciones de esos estadísticos a partir de las componentes estimadas mediante el método *ex-post* descrito en el párrafo anterior. Los percentiles de las distribuciones de esos dos estadísticos obtenidos con Basic SSA y Toeplitz SSA de las 10000 simulaciones lineales se recogen en las Tablas 2.5 y 2.6, respectivamente. Del análisis de los percentiles de estas dos tablas se verifica que la mediana de las estimaciones de la constante α se puede considerar nula de forma que para ambas versiones, Basic y Toeplitz, no se rechaza la hipótesis de ausencia de traslación, $\alpha = 0$, en las componentes que estiman. No obstante, comparando estos resultados con la Tabla 2.1 se observa que *Circulant SSA* produce en el ciclo una distribución más concentrada para el estadístico relacionado con el sesgo de posición. Así mismo, de este análisis se verifica que la mediana de las estimaciones del coeficiente de regresión β es prácticamente la unidad para ambas versiones, Basic y Toeplitz. Por tanto, no se rechaza la hipótesis de mantenimiento de la escala, $\beta = 1$, en las componentes estimadas. Y, comparando estos resultados con la Tabla 2.1, se observa que *Circulant SSA* también produce en el ciclo una distribución más concentrada para el estadístico asociado con el sesgo de escala.

En consecuencia, las versiones Basic y Toeplitz de SSA producen, al igual que *Circulant SSA*, componentes estimadas no sesgadas. De forma empírica se ha comprobado que las tres versiones son equivalentes, incluso sin el supuesto de estacionariedad en las series temporales simuladas. Esto complementa los resultados analíticos del primer capítulo. Sin embargo, las medianas de las estimaciones del coeficiente de regresión β son algo superiores a la unidad en las versiones Basic y Toeplitz: algo más de un 1.5% en Basic para las tres componentes y entre casi un 1% para la tendencia y algo más del 5% para el ciclo en Toeplitz. Esto, unido a que los

rangos intercuartiles son más amplios para este estadístico en las versiones Basic y Toeplitz de SSA, supone que *Circulant SSA* tiene mejor comportamiento en la ausencia de sesgo que las otras dos versiones bajo modelos estructurales lineales.

Tabla 2.5 Percentiles de las distribuciones de los estadísticos para estudiar el sesgo de las componentes extraídas con Basic SSA de 10000 simulaciones del modelo lineal.

		Percentiles				
Estadístico	Componente	5	25	50	75	95
$\hat{\alpha}$	Tendencia	-0.0610	-0.0206	-0.0006	0.0191	0.0597
	Ciclo	-0.0165	-0.0066	0.0001	0.0065	0.0167
	Estacional	-0.0033	-0.0010	0.0000	0.0010	0.0033
$\hat{\beta}$	Tendencia	0.9881	1.0063	1.0153	1.0326	1.1290
	Ciclo	0.7896	0.9618	1.0177	1.0794	1.2792
	Estacional	0.9471	0.9911	1.0166	1.0431	1.0867

Tabla 2.6 Percentiles de las distribuciones de los estadísticos para estudiar el sesgo de las componentes extraídas con Toeplitz SSA de 10000 simulaciones del modelo lineal.

		Percentiles				
Estadístico	Componente	5	25	50	75	95
$\hat{\alpha}$	Tendencia	-0.0588	-0.0203	-0.0007	0.0186	0.0565
	Ciclo	-0.0178	-0.0061	0.0001	0.0062	0.0170
	Estacional	-0.0017	-0.0007	0.0000	0.0007	0.0018
$\hat{\beta}$	Tendencia	0.9821	1.0003	1.0088	1.0264	1.1415
	Ciclo	0.7854	0.9863	1.0537	1.1310	1.2754
	Estacional	0.9554	0.9982	1.0273	1.0605	1.1207

A continuación, se compara la mayor o menor eficiencia de *Circulant SSA* respecto a las otras versiones de SSA mediante las ratios entre las estimaciones de las desviaciones típicas del error de estimación de las versiones Basic y Toeplitz y las correspondientes a CSSA. Una ratio mayor que la unidad indicará que CSSA es más eficiente que las otras versiones y menos eficiente si la ratio es menor que la unidad. Los percentiles de las distribuciones de esas ratios aparecen para las versiones Basic y Toeplitz en las Tablas 2.7 y 2.8, respectivamente. En ambas se observa que la mediana para las tres componentes es mayor que la unidad, es decir, CSSA es más eficiente que las otras

versiones en más del 50% de las veces. En concreto, para Basic SSA, CSSA es más eficiente en el 74, 88 y 91% de las simulaciones para las componentes de tendencia, ciclo y estacional, respectivamente. Asimismo, para Toeplitz SSA, CSSA es más eficiente en el 59, 92 y 91% de las ocasiones, respectivamente, para las componentes de tendencia, ciclo y estacional. La eficiencia más similar entre CSSA y Toeplitz SSA para la tendencia, con notable diferencia respecto a Basic SSA, se debe al tratamiento que esas versiones dan a esta componente como consecuencia de trabajar ambas con series no estacionarias bajo el supuesto de estacionariedad. En cualquier caso, se ha verificado empíricamente que *Circulant SSA* es más eficiente o preciso que las otras versiones de SSA bajo modelos estructurales lineales.

Tabla 2.7 Percentiles de las distribuciones de los ratios de las desviaciones típicas muestrales del error de estimación entre Basic SSA y *Circulant SSA* de 10000 simulaciones del modelo lineal.

Componente	Percentiles				
	5	25	50	75	95
Tendencia	0,8843	0,9992	1,0747	1,2716	1,7269
Ciclo	0,9667	1,0282	1,1138	1,2791	1,7086
Estacional	0,9945	1,0148	1,0373	1,0771	1,2461

Tabla 2.8 Percentiles de las distribuciones de los ratios de las desviaciones típicas muestrales del error de estimación entre Toeplitz SSA y *Circulant SSA* de 10000 simulaciones del modelo lineal.

Componente	Percentiles				
	5	25	50	75	95
Tendencia	0,8941	0,9756	1,0109	1,0676	1,6522
Ciclo	0,9910	1,0642	1,1545	1,2696	1,6522
Estacional	0,9942	1,0206	1,0514	1,0985	1,2222

Por otro lado, es provechoso investigar si el error global estimado con las versiones Basic y Toeplitz es un proceso de ruido blanco gaussiano. Para ello, al igual que con *Circulant SSA*, se calculan los percentiles de las distribuciones de la media muestral $\bar{\epsilon}$, desviación estándar $\hat{\sigma}_{\epsilon}$, coeficiente de autorregresión $\hat{\rho}$ y estadístico de Jarque-Bera del contraste de normalidad para el error global de las 10000 simulaciones. Dichos percentiles se presentan en las Tablas 2.9 y 2.10 para las versiones Basic y Toeplitz,

respectivamente. De su examen, para ambas versiones, se deduce que la mediana es cero para la media, próxima al valor σ_ε para la desviación estándar del ruido blanco de las simulaciones con una distribución muy concentrada y prácticamente nulo para el coeficiente de autorregresión. También, al menos el 95% de los valores del estadístico de Jarque-Bera es inferior al percentil 95 de la Chi-cuadrado con 2 grados de libertad. Por todo ello, no se rechaza la hipótesis de que el error global estimado es un proceso de ruido blanco gaussiano en las versiones Basic y Toeplitz como ocurre en CSSA.

Tabla 2.9 Percentiles de las distribuciones de los estadísticos del error global con Basic SSA de 10000 simulaciones del modelo lineal.

Estadístico	Percentiles				
	5	25	50	75	95
$\bar{\varepsilon}$	-0,0026	-0,0007	0,0000	0,0007	0,0026
$\hat{\sigma}_\varepsilon$	0,0466	0,0498	0,0519	0,0542	0,0572
$\hat{\rho}$	-0,1867	-0,1070	-0,0481	0,0113	0,0920
JB	0,0980	0,5267	1,1948	2,2841	5,6140

Tabla 2.10 Percentiles de las distribuciones de los estadísticos del error global con Toeplitz SSA de 10000 simulaciones del modelo lineal.

Estadístico	Percentiles				
	5	25	50	75	95
$\bar{\varepsilon}$	-0,0014	-0,0005	0,0000	0,0005	0,0014
$\hat{\sigma}_\varepsilon$	0,0470	0,0504	0,0528	0,0553	0,0594
$\hat{\rho}$	-0,1899	-0,0979	-0,0334	0,0334	0,1339
JB	0,0949	0,5186	1,1926	2,2868	5,4874

Finalmente, es conveniente comparar el grado de separabilidad de las componentes estimadas por las tres versiones de SSA. Con este objetivo, al igual que para *Circulant SSA*, se calculan las w -correlaciones muestrales entre las componentes estimadas mediante las versiones Basic SSA y Toeplitz SSA. En las Tablas 2.11 y 2.12 se encuentran las distribuciones de dichas w -correlaciones muestrales para Basic SSA y Toeplitz SSA, respectivamente. De su examen se desprende que para los pares de componentes próximas frecuentemente, tanto tendencia y ciclo como ciclo y

estacionalidad, la distribución de la w -correlación muestral está escorada hacia valores positivos y de forma más notable para el par tendencia y ciclo sobre todo en la versión Basic. Asimismo, sin llegar a ser unos valores preocupantes, la mediana de la w -correlación muestral para estos dos pares de componentes es claramente superior a la obtenida con CSSA (ver Tabla 2.4) y, de nuevo, es mayor en la versión Basic SSA. Sin embargo, para el par de componentes más separadas frecuentemente, tendencia y estacionalidad, la distribución de la w -correlación muestral está algo desplazada hacia valores positivos tanto para Basic como para Toeplitz, aunque esta última es más similar a la obtenida con CSSA. Posee unos valores medianos casi nulos en ambas versiones, Basic y Toeplitz, si bien más elevado en Basic SSA. Por consiguiente, teniendo presente, además, que *Circulant SSA* obtiene mejores resultados que Basic y Toeplitz para el sesgo de las componentes estimadas y que *Circulant SSA* es más eficiente o preciso que las otras dos versiones de SSA porque tiene menor error de estimación, se puede concluir que la versión *Circulant SSA* posee mejores propiedades estadísticas en muestras finitas que las otras versiones, Basic y Toeplitz, bajo modelos estructurales lineales.

Tabla 2.11 Percentiles de las distribuciones de las w -correlaciones muestrales entre las componentes estimadas con Basic SSA de 10000 simulaciones del modelo lineal.

Componentes	Percentiles				
	5	25	50	75	95
Trend – Cycle	-0,0027	0,0422	0,0940	0,1819	0,4133
Trend – Seas.	0,0002	0,0031	0,0075	0,0172	0,0451
Cycle – Seas.	0,0035	0,0101	0,0282	0,0769	0,2470

Tabla 2.12 Percentiles de las distribuciones de las w -correlaciones muestrales entre las componentes estimadas con Toeplitz SSA de 10000 simulaciones del modelo lineal.

Componentes	Percentiles				
	5	25	50	75	95
Trend – Cycle	-0,1011	0,0018	0,0571	0,1423	0,3994
Trend – Seas.	-0,0017	0,0001	0,0006	0,0028	0,0181
Cycle – Seas.	0,0029	0,0080	0,0189	0,0529	0,1414

2.2.2 Modelo no lineal

El modelo estructural no lineal que se considera para una serie temporal x_t es el propuesto por Durbin y Koopman (2012) para los viajes al extranjero de los residentes en Reino Unido. Dicho modelo está dado por

$$x_t = \mu_t + c_t + \exp(a_0 + a_1\mu_t)\gamma_t + \varepsilon_t, \quad (2.6)$$

donde μ_t es la tendencia, c_t representa la componente cíclica, γ_t es un efecto estacional y ε_t es un término de error. La constante a_0 escala el efecto estacional y la constante a_1 determina el signo y cuantía de la variación cuando ocurre un cambio positivo en la tendencia. Por ello, la amplitud de la componente estacional está modulada por la tendencia a través del efecto combinado de $a_0 + a_1\mu_t$. Los modelos de las componentes están dados por las ecuaciones (2.2), (2.3) y (2.4)-(2.5), para la tendencia, componente cíclica y componente estacional, respectivamente.

Al igual que en el caso lineal, se simulan 10000 series de $T = 193$ observaciones cada una con los mismos parámetros y varianzas. Las constantes a_0 y a_1 se determinan para cada serie simulada de forma que $0.5 \leq \exp(a_0 + a_1\mu_t) \leq 1.5$ con $a_1 > 0$. De nuevo, se utiliza *Circulant SSA* para estimar las componentes con $L = 48$. La Tabla 2.13 recoge los percentiles de las distribuciones de los estadísticos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ de la regresión entre las componentes simuladas y las estimadas. De su análisis se deriva que se no se rechazan las hipótesis de ausencia de traslación, $\alpha = 0$, y de mantenimiento de la escala, $\beta = 1$, en las componentes estimadas. Es decir, *Circulant SSA* estima componentes no sesgadas con modelos estructurales no lineales.

Por otro lado, en la Tabla 2.14 se muestran los percentiles de la distribución de las estimaciones de la desviación típica del error de estimación de las tres componentes de las 10000 simulaciones del modelo no lineal. Del análisis de estos percentiles se concluye que la mediana de las estimaciones de la desviación típica del error de estimación es pequeña en comparación con la desviación típica del ruido blanco incluido en las series simuladas. Al igual que para el modelo lineal, se observa que dichas distribuciones están bastante concentradas sobre todo para la componente

estacional. Ahora bien, la mayor eficiencia de CSSA se determinará cuando después se efectúe la comparación con las otras versiones, Basic y Toeplitz.

Tabla 2.13 Percentiles de las distribuciones de los estadísticos para estudiar el sesgo de las componentes extraídas con *Circulant SSA* de 10000 simulaciones del modelo no lineal.

		Percentiles				
Estadístico	Componente	5	25	50	75	95
$\hat{\alpha}$	Tendencia	-0.0603	-0.0199	0.0004	0.0202	0.0608
	Ciclo	-0.0111	-0.0045	-0.0001	0.0043	0.0112
	Estacional	-0.0015	-0.0006	0.0000	0.0006	0.0015
$\hat{\beta}$	Tendencia	0.9742	0.9951	1.0037	1.0154	1.0682
	Ciclo	0.8442	0.9567	1.0029	1.0475	1.1353
	Estacional	0.9241	0.9779	1.0072	1.0335	1.0719

Tabla 2.14 Percentiles de la distribución de las estimaciones de la desviación típica del error de estimación de las componentes extraídas con *Circulant SSA* de 10000 simulaciones del modelo no lineal.

		Percentiles				
Componente		5	25	50	75	95
Tendencia		0,0144	0,0197	0,0244	0,0299	0,0405
Ciclo		0,0193	0,0231	0,0262	0,0300	0,0372
Estacional		0,0280	0,0313	0,0337	0,0362	0,0396

La hipótesis de que el error global estimado es un proceso de ruido blanco gaussiano no se rechaza según se deriva del estudio de los percentiles de las distribuciones de los estadísticos obtenidos sobre él, computados como en el modelo lineal, y que aparecen en la Tabla 2.15. Se debe señalar que los valores de las medianas son similares al modelo lineal aunque en este caso el 92% de los valores del estadístico de Jarque-Bera es inferior al percentil 95 de la Chi-cuadrado con 2 grados de libertad.

Por último, del examen de las distribuciones de las w -correlaciones muestrales entre las componentes estimadas, que se disponen en la Tabla 2.16, se deduce que las tres componentes estimadas son w -ortogonales y, por tanto, separables. Estos dos resultados, junto con la ausencia de sesgo y un error de estimación pequeño en las componentes estimadas, permiten concluir de forma empírica que *Circulant SSA* verifica las

propiedades estadísticas exigidas en muestras finitas para las estimaciones de las componentes con modelos estructurales no lineales.

Tabla 2.15 Percentiles de las distribuciones de los estadísticos del error global con *Circulant SSA* de 10000 simulaciones del modelo no lineal.

Estadístico	Percentiles				
	5	25	50	75	95
$\bar{\epsilon}$	-0,0034	-0,0011	0,0000	0,0012	0,0033
$\hat{\sigma}_{\epsilon}$	0,0476	0,0508	0,0531	0,0554	0,0590
$\hat{\rho}$	-0,1727	-0,0899	-0,0339	0,0249	0,1066
JB	0,1022	0,5668	1,3260	2,5953	7,8665

Tabla 2.16 Percentiles de las distribuciones de las w -correlaciones muestrales entre las componentes estimadas con *Circulant SSA* de 10000 simulaciones del modelo no lineal.

Componentes	Percentiles				
	5	25	50	75	95
Trend – Cycle	-0,1060	-0,0253	0,0121	0,0503	0,1390
Trend – Seas.	-0,0057	-0,0016	0,0009	0,0033	0,0080
Cycle – Seas.	0,0014	0,0024	0,0033	0,0047	0,0078

A continuación, se contrastan las propiedades en muestras finitas de *Circulant SSA* con las otras versiones, Basic y Toeplitz, para los modelos estructurales no lineales. De nuevo, la primera comparación entre las tres versiones de SSA se efectúa con los estadísticos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ de la regresión entre las componentes simuladas y las estimadas pues establecen el sesgo de la estimación. Basic SSA y Toeplitz SSA estiman las componentes con el método *ex-post* descrito en el caso lineal. Los percentiles de las distribuciones de esos dos estadísticos obtenidos con Basic SSA y Toeplitz SSA para las 10000 simulaciones no lineales se recogen en las Tablas 2.17 y 2.18, respectivamente. Del examen de dichos percentiles se deduce que para ambas versiones, Basic y Toeplitz, no se rechazan las hipótesis de ausencia de traslación, $\alpha = 0$, ni de mantenimiento de la escala, $\beta = 1$. Sin embargo, comparando estos resultados con la Tabla 2.13, *Circulant SSA* produce en el ciclo una distribución más concentrada para estos dos estadísticos.

Consecuentemente, las versiones Basic y Toeplitz de SSA producen, al igual que *Circulant SSA*, componentes estimadas no sesgadas. Así, de nuevo para el caso no lineal, se comprueba de forma empírica que las tres versiones producen estimaciones equivalentes. También en este caso, las medianas de las estimaciones del coeficiente de regresión β son superiores a la unidad en las versiones Basic y Toeplitz: entre un 1.6% para la tendencia y el ciclo y un 2.4% para la componente estacional en Basic y entre un 1% para la tendencia y un 5.1% para el ciclo en Toeplitz. Ello, junto a que los rangos intercuartiles son más amplios para este estadístico en las versiones Basic y Toeplitz de SSA, verifica que la versión *Circulant SSA* se comporta mejor en el posible sesgo de estimación que las otras dos versiones de SSA bajo modelos estructurales no lineales.

Tabla 2.17 Percentiles de las distribuciones de los estadísticos para estudiar el sesgo de las componentes extraídas con Basic SSA de 10000 simulaciones del modelo no lineal.

		Percentiles				
Estadístico	Componente	5	25	50	75	95
$\hat{\alpha}$	Tendencia	-0.0601	-0.0198	0.0005	0.0198	0.0605
	Ciclo	-0.0167	-0.0065	0.0000	0.0066	0.0163
	Estacional	-0.0035	-0.0010	0.0000	0.0009	0.0030
$\hat{\beta}$	Tendencia	0.9881	1.0064	1.0158	1.0337	1.1284
	Ciclo	0.7626	0.9588	1.0158	1.0763	1.2660
	Estacional	0.9269	0.9888	1.0236	1.0561	1.1084

Tabla 2.18 Percentiles de las distribuciones de los estadísticos para estudiar el sesgo de las componentes extraídas con Toeplitz SSA de 10000 simulaciones del modelo no lineal.

		Percentiles				
Estadístico	Componente	5	25	50	75	95
$\hat{\alpha}$	Tendencia	-0.0580	-0.0191	0.0002	0.0195	0.0602
	Ciclo	-0.0176	-0.0063	-0.0001	0.0064	0.0185
	Estacional	-0.0019	-0.0007	-0.0001	0.0006	0.0016
$\hat{\beta}$	Tendencia	0.9814	1.0004	1.0093	1.0284	1.1424
	Ciclo	0.7612	0.9812	1.0513	1.1279	1.2767
	Estacional	0.9352	0.9977	1.0315	1.0667	1.1315

Ahora, para el caso no lineal, se procede a comprobar la mayor o menor eficiencia de CSSA respecto a las otras versiones de SSA mediante el examen de las ratios de las desviaciones típicas del error de estimación ya definidas en el caso lineal. Los percentiles de esas ratios se muestran en las Tablas 2.19 y 2.20 para las versiones Basic y Toeplitz, respectivamente. En ambas tablas se aprecia que la mediana para las tres componentes es mayor que la unidad, es decir, CSSA es más eficiente que las otras versiones en más del 50% de las veces. En concreto, para Basic SSA, CSSA es más eficiente en el 73, 87 y 92% de las simulaciones para las componentes de tendencia, ciclo y estacional, respectivamente. Asimismo, para Toeplitz SSA, CSSA es más eficiente en el 58, 92 y 90% de las ocasiones, respectivamente, para las componentes de tendencia, ciclo y estacional. Cifras muy similares al modelo lineal. Por tanto, se ha comprobado empíricamente que *Circulant SSA* es más eficiente o preciso que las otras dos versiones de SSA también bajo modelos estructurales no lineales.

Tabla 2.19 Percentiles de las distribuciones de las ratios de las desviaciones típicas muestrales del error de estimación entre Basic SSA y *Circulant SSA* de 10000 simulaciones del modelo no lineal.

Componente	Percentiles				
	5	25	50	75	95
Tendencia	0,8724	0,9992	1,0708	1,2637	1,7131
Ciclo	0,9652	1,0286	1,1129	1,2698	1,6951
Estacional	0,9951	1,0190	1,0452	1,0881	1,2316

Tabla 2.20 Percentiles de las distribuciones de las ratios de las desviaciones típicas muestrales del error de estimación entre Toeplitz SSA y *Circulant SSA* de 10000 simulaciones del modelo no lineal.

Componente	Percentiles				
	5	25	50	75	95
Tendencia	0,8952	0,9766	1,0102	1,0699	1,8108
Ciclo	0,9921	1,0644	1,1566	1,2715	1,7144
Estacional	0,9908	1,0192	1,0510	1,1014	1,2298

Asimismo, es útil estudiar si el error global estimado con las versiones Basic y Toeplitz es un proceso de ruido blanco gaussiano. Con este objetivo, de igual forma al caso lineal, se procede a calcular los percentiles de las distribuciones de la media

muestral $\bar{\epsilon}$, desviación estándar $\hat{\sigma}_{\epsilon}$, coeficiente de autorregresión $\hat{\rho}$ y estadístico de Jarque-Bera del contraste de normalidad para el error global de las 10000 simulaciones del modelo no lineal obtenidos con las versiones Basic y Toeplitz de SSA. En las Tablas 2.21 y 2.22 se muestran dichos percentiles, respectivamente, para las versiones Basic y Toeplitz de SSA. Los valores de las medianas son equivalentes al modelo no lineal para estas dos versiones de SSA. Por tanto, aunque en este caso el 90 y el 91% de los valores del estadístico de Jarque-Bera es inferior al percentil 95 de la Chi-cuadrado con 2 grados de libertad para Basic SSA y Toeplitz SSA, respectivamente, no se puede rechazar la hipótesis de ruido blanco gaussiano para el error global en estas versiones con el modelo no lineal al igual que para la versión *Circulant SSA*.

Tabla 2.21 Percentiles de las distribuciones de los estadísticos del error global con Basic SSA de 10000 simulaciones del modelo no lineal.

Estadístico	Percentiles				
	5	25	50	75	95
$\bar{\epsilon}$	-0,0025	-0,0006	0,0000	0,0007	0,0025
$\hat{\sigma}_{\epsilon}$	0,0461	0,0495	0,0521	0,0546	0,0584
$\hat{\rho}$	-0,1909	-0,1116	-0,0532	0,0048	0,0905
JB	0,1020	0,5804	1,3789	2,7836	9,8648

Tabla 2.22 Percentiles de las distribuciones de los estadísticos del error global con Toeplitz SSA de 10000 simulaciones del modelo no lineal.

Estadístico	Percentiles				
	5	25	50	75	95
$\bar{\epsilon}$	-0,0014	-0,0005	0,0000	0,0005	0,0014
$\hat{\sigma}_{\epsilon}$	0,0465	0,0502	0,0529	0,0557	0,0601
$\hat{\rho}$	-0,1878	-0,0988	-0,0334	0,0328	0,1372
JB	0,1011	0,5664	1,3599	2,7429	9,1949

Finalmente, se compara el grado de separabilidad de las componentes estimadas por las tres versiones de SSA. En las Tablas 2.23 y 2.24 se encuentran para Basic SSA y Toeplitz SSA, respectivamente, las w -correlaciones muestrales entre las componentes estimadas. De su examen se derivan las mismas conclusiones que para el caso lineal.

Así, para los pares de componentes frecuentemente próximas, la mediana es claramente superior a la obtenida con *Circulant SSA* y la distribución está desplazada notablemente hacia valores positivos. Y para el par frecuentemente distante, la distribución está menos escorada y la mediana es casi nula. En consecuencia, teniendo presente, además, como sucede en el caso lineal, que *Circulant SSA* obtiene mejores resultados que Basic y Toeplitz para el sesgo de las componentes estimadas y que *Circulant SSA* es más eficiente o preciso que las otras dos versiones de SSA porque tiene menor error de estimación, se puede colegir que la versión *Circulant SSA* posee mejores propiedades estadísticas en muestras finitas que las otras versiones, Basic y Toeplitz, bajo modelos estructurales no lineales.

Tabla 2.23 Percentiles de las distribuciones de las w -correlaciones muestrales entre las componentes estimadas con Basic SSA de 10000 simulaciones del modelo no lineal.

Componentes	Percentiles				
	5	25	50	75	95
Trend – Cycle	-0,0029	0,0436	0,0932	0,1829	0,4193
Trend – Seas.	0,0003	0,0031	0,0079	0,0185	0,0494
Cycle – Seas.	0,0038	0,0104	0,0283	0,0730	0,2423

Tabla 2.24 Percentiles de las distribuciones de las w -correlaciones muestrales entre las componentes estimadas con Toeplitz SSA de 10000 simulaciones del modelo no lineal.

Componentes	Percentiles				
	5	25	50	75	95
Trend – Cycle	-0,1051	0,0020	0,0566	0,1449	0,4192
Trend – Seas.	-0,0017	0,0001	0,0006	0,0027	0,0186
Cycle – Seas.	0,0025	0,0070	0,0166	0,0507	0,1354

2.3 Estimaciones fiables con CSSA en tiempo real

La fiabilidad en tiempo real se centra en las revisiones que sufre la estimación de una componente debidas a los recálculos por la publicación de nuevos datos para periodos posteriores. Todos los métodos de extracción de señales producen revisiones hasta alcanzar la estimación definitiva pero unas técnicas son más fiables que otras, es decir, generan revisiones que convergen al verdadero valor de forma más rápida y dichas revisiones son de menor cuantía. El estudio de las revisiones en CSSA se realiza de forma comparada con Tramo-Seats, TS, porque es un método paramétrico y ampliamente utilizado en los servicios de estudio. El análisis comparado de las revisiones se efectúa sobre la componente cíclica de una serie temporal ya que es la componente utilizada en el análisis de la coyuntura económica. En la literatura especializada se considera al ciclo económico como la componente que engloba todas aquellas oscilaciones cuyo periodo está comprendido entre año y medio y ocho años.

Mientras que CSSA, en función de la longitud de la ventana, puede obtener directamente el ciclo, TS solo permite la estimación de la componente de ciclo-tendencia, la componente cíclica sumada a la tendencia. Por tanto, para realizar comparaciones es necesario armonizar la estimación del ciclo en ambos procedimientos. CSSA también puede extraer la componente de ciclo-tendencia entendida como aquella componente que comprende todas las oscilaciones cuyo periodo es superior al año y medio. Puesto que las series de ciclo-tendencia son bastante suaves, una aproximación al ciclo económico es la estimación del ritmo de variación mediante la primera diferencia de la componente de ciclo-tendencia, Melis (1991). Este camino es una forma de eliminar la tendencia y aislar el ciclo, Canova (1998), es decir,

$$\hat{c}_t = y_t - y_{t-1}$$

donde y_t es la componente de ciclo-tendencia, \hat{c}_t es la estimación del ciclo económico y la tendencia se define como $\mu_t = y_{t-1}$. Por tanto, este método supone que la tendencia es un paseo aleatorio y que ambas componentes, tendencia y ciclo, no están correlacionadas. El primer supuesto es explícito en los modelos estructurales de la sección anterior que se van a utilizar de nuevo en las simulaciones de esta sección y el segundo está garantizado en CSSA por la separabilidad de sus componentes estimadas.

2.3.1 Revisiones: Conceptos y método de análisis

Sea x_t una serie temporal siendo t el último periodo observado. La estimación inicial o concurrente del ciclo económico c_t para dicho periodo es $\hat{c}_{t|t}$ y cuando nuevos periodos son observados la estimación es recalculada como $\hat{c}_{t|t+1}, \hat{c}_{t|t+2}, \dots$ hasta que estas estimaciones preliminares convergen a la estimación final \hat{c}_t después de K periodos, es decir, $\hat{c}_t = \hat{c}_{t|t+K}$ donde K representa la duración del proceso de revisión. El conjunto formado por la estimación inicial, estimaciones preliminares y estimación final es la senda de estimación de la componente para cada observación.

En CSSA, dada una longitud de ventana L , los autovectores son fijos con lo cual las proyecciones de la serie original para el periodo final no varían cuando se publican nuevos datos en periodos posteriores. Sin embargo, para el periodo final, el dato reconstruido mediante el promedio diagonal varía hasta que no se publiquen al menos $L-1$ nuevos datos posteriores. Por ello, la estimación inicial en CSSA converge a la estimación final después de $K=L-1$ periodos. Así, dada una serie de longitud T , respetando la condición de que $L < T/2$ en CSSA, el primer periodo para el que se garantiza la senda completa de estimación es $t_0 = 2L+1$ y el último es $t_1 = T-K = T-L+1$. Y, por tanto, se dispone de un número P de estimaciones preliminares j periodos posteriores a la estimación inicial, $j = 0, 1, \dots, K-1$, igual a $P = T - 3L + 1$. Este valor de K será tomado también en Tramo-Seats para poder efectuar las comparaciones entre ambas metodologías. Dicha elección no origina ningún problema en Tramo-Seats siempre que L sea mayor de cinco años porque los modelos ARIMA convergen entre dos y cinco años como observan Kaiser y Maravall (1999).

En la Figura 2.1 se muestra un ejemplo del esquema de cálculo de las estimaciones preliminares para $T=16$ y $L=4$. Para cada periodo aparecen las estimaciones preliminares disponibles en función del último periodo publicado. La diagonal de color gris oscuro contiene las $P = T - 3L + 1 = 5$ estimaciones concurrentes y en cada diagonal de color gris más claro se encuentran las $P=5$ estimaciones preliminares con $j \geq 1$ periodos posteriores hasta llegar a la diagonal con fondo tramado correspondiente a las $P=5$ estimaciones finales disponibles.

		Último periodo publicado							
Periodo	9	10	11	12	13	14	15	16	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
9	$\hat{c}_{9 9}$	$\hat{c}_{9 10}$	$\hat{c}_{9 11}$	$\hat{c}_{9 12}$	\hat{c}_9	\hat{c}_9	\hat{c}_9	\hat{c}_9	
10		$\hat{c}_{10 10}$	$\hat{c}_{10 11}$	$\hat{c}_{10 12}$	\hat{c}_{10}	\hat{c}_{10}	\hat{c}_{10}	\hat{c}_{10}	
11			$\hat{c}_{11 11}$	$\hat{c}_{11 12}$	$\hat{c}_{11 13}$	\hat{c}_{11}	\hat{c}_{11}	\hat{c}_{11}	
12				$\hat{c}_{12 12}$	$\hat{c}_{12 13}$	$\hat{c}_{12 14}$	\hat{c}_{12}	\hat{c}_{12}	
13					$\hat{c}_{13 13}$	$\hat{c}_{13 14}$	$\hat{c}_{13 15}$	\hat{c}_{13}	
14						$\hat{c}_{14 14}$	$\hat{c}_{14 15}$	$\hat{c}_{14 16}$	
15							$\hat{c}_{15 15}$	$\hat{c}_{15 16}$	
16								$\hat{c}_{16 16}$	

Figura 2.1 Esquema del recálculo de las estimaciones desde la inicial hasta la final para $T=16$ y $L=4$.

La definición de estimación final utilizada hace referencia al periodo a partir del cual la estimación de una componente no sufre revisiones (Kaiser y Maravall, 1999) en oposición a la estimación final usada por Orphanides y van Norden (2002) y Carvalho et al. (2012) que se refiere a la estimación última o más actual por lo que estos autores no utilizan verdaderas estimaciones finales. En el ejemplo de la Figura 2.1, dichos autores compararían la columna cuyo último periodo publicado se corresponde con el 16 (para ellos estimación final) con la diagonal gris oscura extendida porque comprende desde el periodo 9 al 16 (para ellos estimación cuasi-real). Eso es equivalente a comparar la estimación inicial (diagonal gris oscura) con la estimación final aquí definida (diagonal tramada) pero con una discrepancia. Ellos también incluyen las últimas $K = L - 1$ observaciones aun cuando para estas no se ha alcanzado la definición de estimación final aquí utilizada. Esta discrepancia genera una distorsión en el análisis ya que el número de periodos transcurridos entre la estimación inicial (su estimación cuasi-real) y la estimación actual (su estimación final) es inferior a la longitud L de la ventana y diferente para cada una de las observaciones extendidas.

La diferencia, para un periodo dado t , entre una estimación preliminar del ciclo y su estimación final mide la revisión que experimenta dicha estimación preliminar. La revisión es el error de medida de una estimación preliminar, es decir,

$$r_{t|t+j} = \hat{c}_{t|t+j} - \hat{c}_t \tag{2.7}$$

y su conjunto para $j = 0, 1, \dots, K - 1$ representa la evolución de las revisiones desde la estimación inicial a la final del ciclo.

Las revisiones para una serie temporal x_t de longitud T se obtienen mediante un proceso recursivo a partir del periodo t_0 hasta el final. Tomando la serie hasta el periodo t_0 se estima el ciclo obteniendo la estimación inicial para la observación t_0 ; se añade un periodo más, $t_0 + 1$, y se estima el ciclo obteniendo la estimación inicial para la observación $t_0 + 1$ y la primera estimación preliminar para t_0 ; se vuelve a añadir otro periodo más, $t_0 + 2$, y se estima el ciclo obteniendo la estimación inicial para la observación $t_0 + 2$, la primera estimación preliminar para $t_0 + 1$ y la segunda estimación preliminar para t_0 ; así, sucesivamente se añaden periodos hasta llegar a la última observación disponible. Por ello, para un j dado, se dispone de una muestra de tamaño $P = t_1 - t_0 + 1$ para cada estimación preliminar j periodos posteriores a la estimación inicial que genera el conjunto de revisiones $\{r_{t|t+j}\}_{t=t_0}^{t_1}$ para $j = 0, 1, \dots, K - 1$.

Debido a que ambos procedimientos, para una serie de longitud dada, son no sesgados¹, la magnitud de la revisión j periodos posteriores se mide por su desviación típica, $\sigma_j = \sigma(r_{t|t+j})$. En consecuencia, la fiabilidad en tiempo real de las revisiones del ciclo económico con las metodologías CSSA y TS se puede comparar mediante la ratio de la magnitud de la revisión para cada estimación preliminar dada por

$$RMR_j = \frac{\sigma_{CSSA,j}}{\sigma_{TS,j}} = \frac{\sigma(r_{t|t+j}^{CSSA})}{\sigma(r_{t|t+j}^{TS})}, \quad j = 0, 1, \dots, K - 1, \quad (2.8)$$

donde $r_{t|t+j}^{CSSA}$ y $r_{t|t+j}^{TS}$ son las revisiones j periodos posteriores generadas por CSSA y TS, respectivamente. Si, para un j dado, RMR_j es menor que 1 entonces, CSSA revisa menos que TS en la estimación preliminar j periodos posteriores a la estimación inicial. Esto es equivalente a afirmar que la metodología CSSA posee mayor fiabilidad en tiempo real porque es más precisa, $\sigma(r_{t|t+j}^{CSSA}) < \sigma(r_{t|t+j}^{TS})$.

¹ En la sección anterior se comprobó que, para muestras finitas, CSSA estima componentes no sesgadas al igual que Tramo-Seats según demuestran Gómez y Maravall (2001b).

2.3.2 Simulaciones y resultados

La realización de simulaciones permite conocer la distribución de probabilidad de RMR_j y, por tanto, extraer conclusiones de la comparación entre las revisiones obtenidas con las metodologías CSSA y TS. Se generan simulaciones tanto para el caso lineal como no lineal de los modelos estructurales establecidos en los apartados 2.2.1 y 2.2.2, respectivamente, de la sección anterior para las diferentes componentes. En ambos casos se hará uso de dos longitudes de ventana proporcionales al periodo del ciclo simulado, $L = 96$ y $L = 192$. En esta ocasión se efectúan 1000 simulaciones por modelo, lineal y no lineal, y longitud de ventana debido al enorme tiempo de computación requerido en el proceso de cálculo recursivo que se realiza para cada serie simulada con cada una de las metodologías según lo indicado en el apartado anterior.

La longitud de cada serie simulada es $T = 3L + P - 1$, donde P es el número de observaciones disponibles de $r_{t|t+j}$ para un j dado. Se toma² $P = 100$ para $L = 96$ y $P = 25$ con $L = 192$. La duración del proceso de revisión es $K = L - 1$ para CSSA al igual que para TS según se indicó anteriormente. En CSSA, la estimación de la componente de ciclo-tendencia incluye todas las oscilaciones de periodo mayor a 18 meses, es decir, la componente de ciclo-tendencia es la suma de las 6 y 11 primeras componentes elementales por frecuencias para $L = 96$ y $L = 192$, respectivamente. En TS, la estimación del modelo ARIMA y, por tanto, de la componente de ciclo-tendencia se realizan de forma automática con corrección de atípicos aditivos y transitorios (ver Gómez y Maravall, 1996). Posteriormente, para ambos métodos, CSSA y TS, se estima el ciclo económico como la primera diferencia de la componente de ciclo-tendencia.

Antes de comparar la precisión entre CSSA y TS es necesario comprobar que sus respectivas sendas de estimación convergen al verdadero valor, es decir, que ambos métodos son consistentes en media cuadrática. Esta condición implica que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E \left[\left(\hat{c}_{t|t+j} - c_t \right)^2 \right] = E \left[\left(\hat{c}_{t|t+K} - c_t \right)^2 \right] = 0 ,$$

esto es, el límite del error cuadrático medio de las estimaciones preliminares tiende a cero. La comprobación se efectúa de forma empírica. Debido a que ambas

² La implementación actual de Tramo-Seats limita $T = 600$.

metodologías, CSSA y TS, estiman componentes no sesgadas en muestras finitas, $E(\hat{c}_{t|t+j}) = c_t$, la consistencia en media cuadrática equivale a

$$\lim_{j \rightarrow \infty} Var(\hat{c}_{t|t+j}) = Var(\hat{c}_{t|t+K}) = 0.$$

Por tanto, dicha ausencia de sesgo en las componentes estimadas permite que la desviación típica muestral de la revisión j periodos posteriores definida por

$$\hat{\sigma}_j = \left[\frac{1}{P} \sum_{t=2L+1}^{2L+P} r_{t|t+j}^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{P} \sum_{t=2L+1}^{2L+P} (\hat{c}_{t|t+j} - \hat{c}_t)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad j = 0, 1, \dots, K-1, \quad (2.9)$$

sea un estimador de la raíz del error cuadrático medio, una distancia de las estimaciones preliminares a la estimación final. Y, en consecuencia, para el conjunto de las 1000 simulaciones, ambas técnicas, CSSA y TS, serán consistentes en media cuadrática si se verifica que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} Median(\hat{\sigma}_j) = Median(\hat{\sigma}_K) = 0.$$

La Figura 2.2 y la Figura 2.3 muestran las medianas de la distribución de las estimaciones desviaciones típicas $\hat{\sigma}_j$ para las simulaciones del modelo lineal y no lineal, respectivamente, calculadas a partir de las revisiones del ciclo obtenidas con CSSA y TS para $L = 96$ y $L = 192$. En ambas figuras se observa que dichas medianas convergen a cero, tanto las obtenidas con CSSA como con TS, y, por ello, ambos métodos son consistentes en media cuadrática. No obstante, se aprecia que la longitud de la ventana L no es tiempo suficiente para la convergencia total en TS necesitando más periodos para converger que CSSA. Además, se debe resaltar que las medianas de $\hat{\sigma}_j$ para CSSA son menores que para TS en todas las estimaciones preliminares, sobre todo en la estimación inicial, la más importante para la fiabilidad en tiempo real. Es relevante para la predicción del ciclo económico que la mediana de $\hat{\sigma}_j$ para la estimación inicial es al menos un 68% mayor en TS que en CSSA porque implica que TS introduce un 68% más de incertidumbre en las estimaciones en tiempo real. Y, también, se señala que las medianas de $\hat{\sigma}_j$ obtenidas con CSSA convergen más rápido a cero que las estimadas con TS en el conjunto de la senda de estimación.

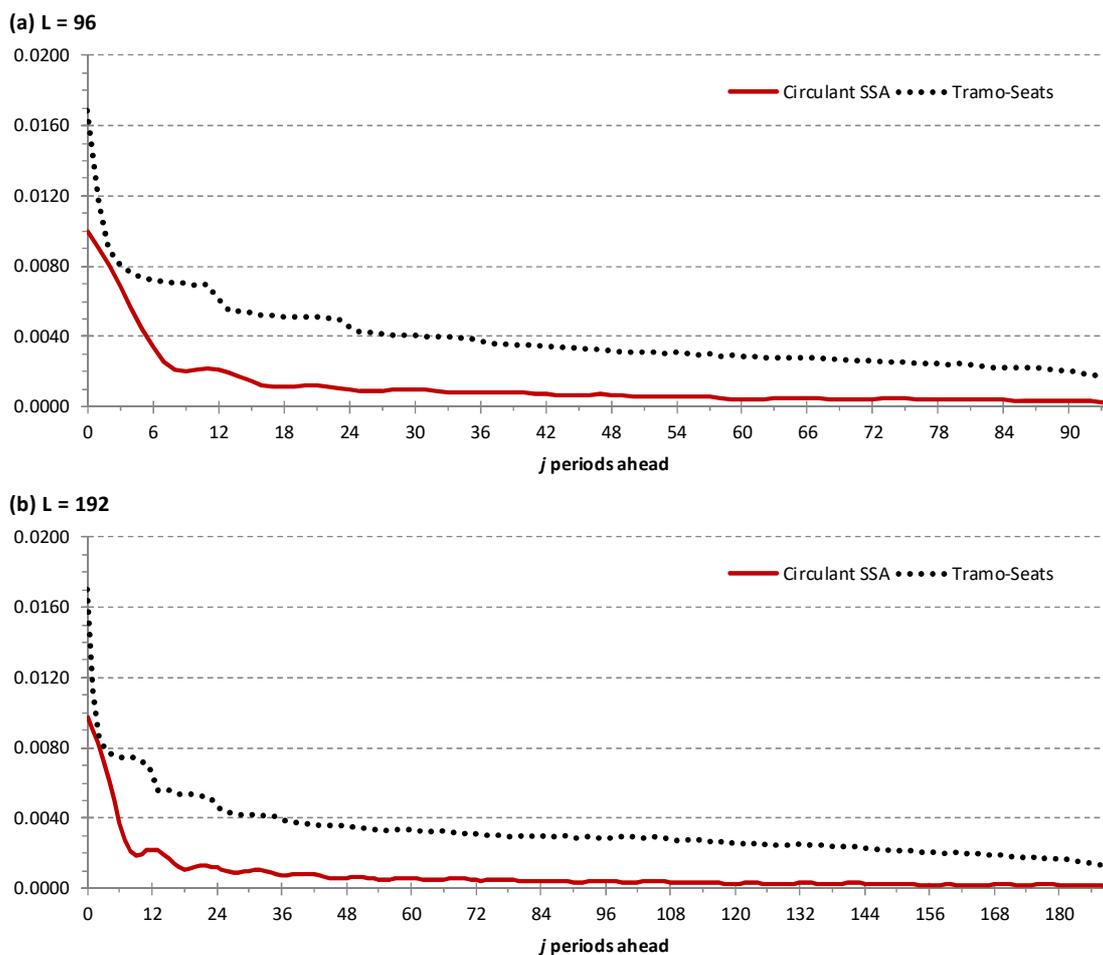


Figura 2.2 Mediana de las distancias $\hat{\sigma}_j$ de 1000 simulaciones del modelo lineal calculada con las estimaciones de CSSA y TS para las longitudes de ventana $L=96$ (a) y $L=192$ (b).

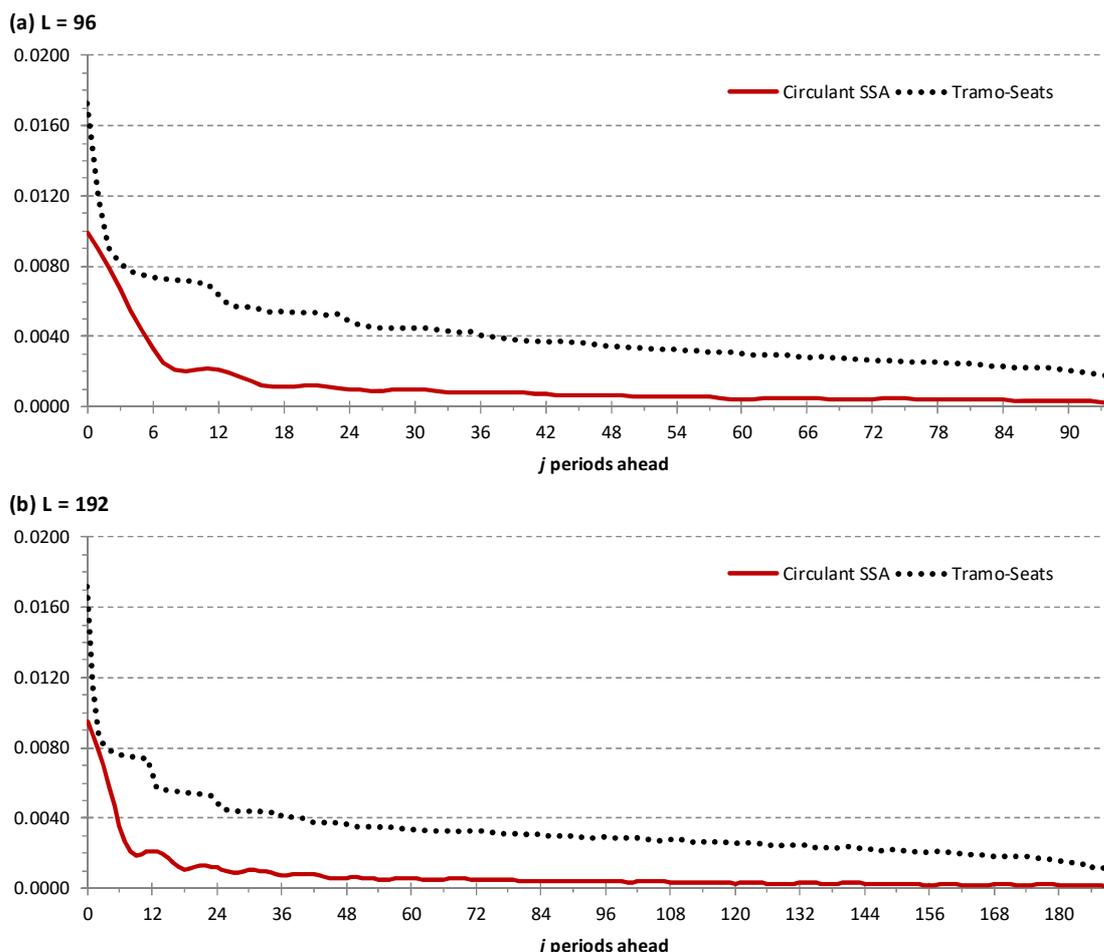


Figura 2.3 Mediana de las distancias $\hat{\sigma}_j$ de 1000 simulaciones del modelo no lineal calculada con las estimaciones de CSSA y TS para las longitudes de ventana $L=96$ (a) y $L=192$ (b).

Las simulaciones permiten obtener la distribución de las estimaciones de la ratio RMR_j . Por tanto, se puede calcular la probabilidad

$$P_j = \Pr(RMR_j < 1), \quad j = 0, 1, \dots, K-1. \quad (2.10)$$

para comparar la fiabilidad en tiempo real entre CSSA y TS. Entonces, para un j dado, si $P_j > 0.5$ se afirmará que CSSA tiene mayor probabilidad de sufrir menor revisión que TS en la estimación preliminar j periodos posteriores a la estimación inicial. Por consiguiente, si $P_j > 0.5 \quad \forall j \geq 0$ la metodología CSSA originará una senda de estimación más estable y de menor revisión que la metodología TS.

La Figura 2.4 y la Figura 2.5 muestran las probabilidades de que la ratio RMR_j sea menor que la unidad para las simulaciones del modelo lineal y del modelo no lineal, respectivamente, para las revisiones del ciclo obtenidas mediante CSSA y TS con las longitudes de ventana $L=96$ y $L=192$. En los cuatro gráficos se observa que, aun cuando la probabilidad para las revisiones preliminares 2 y 3 periodos posteriores es inferior a 0.75, la probabilidad en toda la senda de revisión es claramente superior a 0.50 destacando que para la revisión inicial es igual o superior a 0.90 en todos los casos. Por ello, CSSA genera sendas de estimación del ciclo más estables y de menor revisión que TS. Esto es, CSSA es más fiable en general y, en particular, en la estimación inicial y primeras preliminares que marcan el futuro de las decisiones económicas por su efecto directo sobre la incertidumbre de las previsiones del ciclo económico.

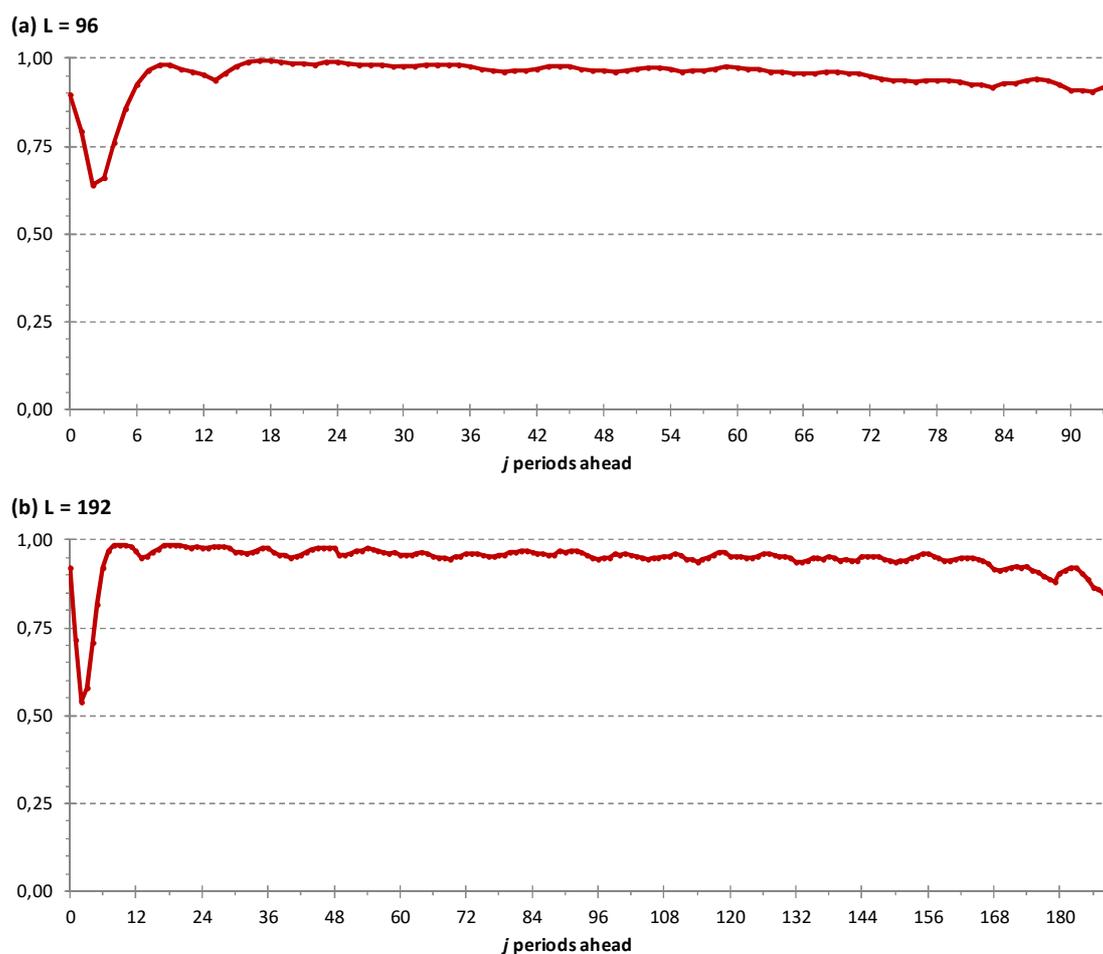


Figura 2.4 Probabilidad de que la ratio RMR_j sea menor que 1 en 1000 simulaciones del modelo lineal para las estimaciones de CSSA y TS con las longitudes de ventana $L=96$ (a) y $L=192$ (b).

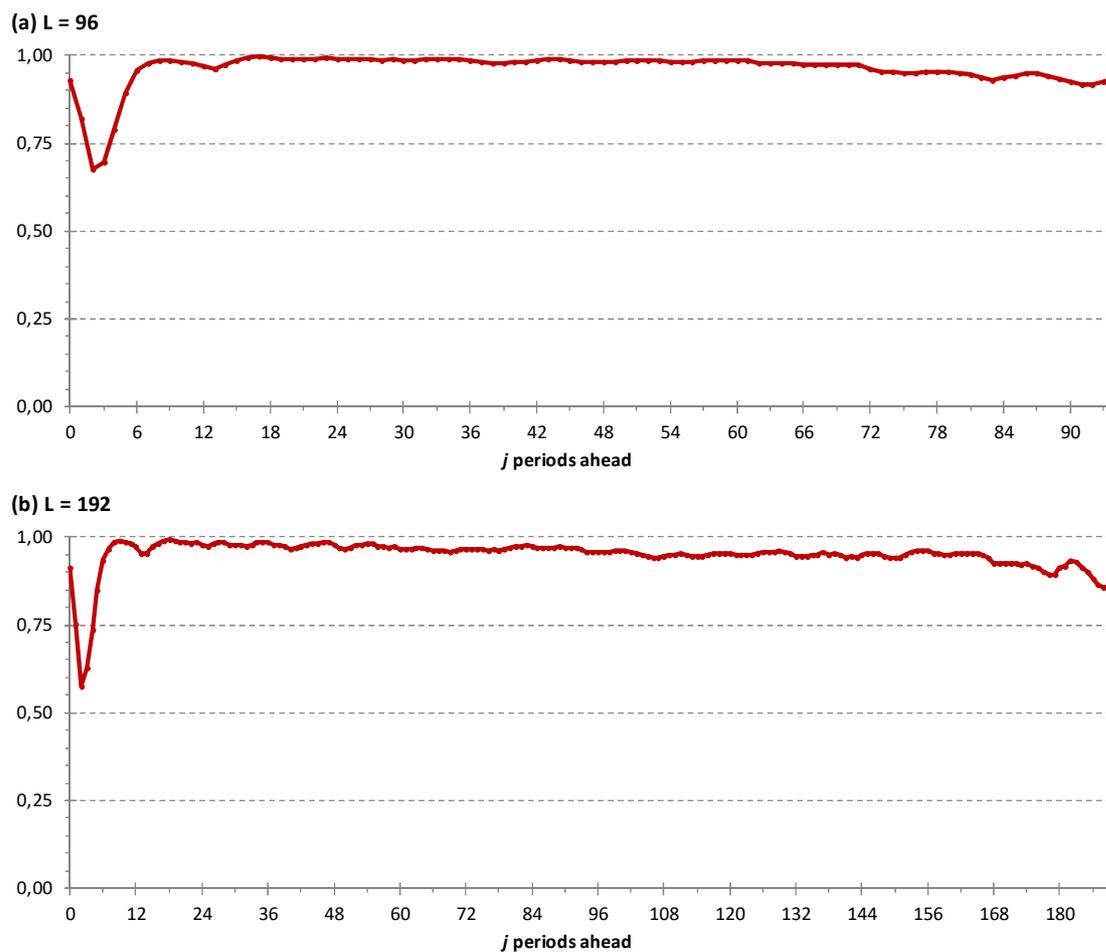


Figura 2.5 Probabilidad de que la ratio RMR_j sea menor que 1 en 1000 simulaciones del modelo no lineal para las estimaciones de CSSA y TS con las longitudes de ventana $L=96$ (a) y $L=192$ (b).

2.4 Aplicación real

El Índice de Producción Industrial (IPI) (Base 2010=100) de seis países: Francia, Alemania, Italia, Japón, Reino Unido y EE.UU. va a ilustrar la comparación entre las revisiones de *Circulant SSA* y Tramo-Seats con datos reales. Estas series, de longitud $T = 552$, abarcan desde enero de 1970 hasta diciembre de 2015 y, como en el primer capítulo, se han obtenido de la base de datos del FMI. El objetivo es estimar el ciclo y comparar sus revisiones sucesivas con ambas metodologías.

La longitud de la ventana debe ser múltiplo de 12 porque que las series son mensuales y, en general, poseen una fuerte estacionalidad como se apreció en el primer capítulo. Además, teniendo en cuenta que el ciclo económico abarca las oscilaciones cuyo periodo está comprendido entre año y medio y ocho años, en dicho capítulo se determinó que las longitudes de ventana posibles eran de 96 y 192 meses. En aquella ocasión se eligió $L = 192$. Sin embargo, ahora se selecciona $L = 96$ para que el número de observaciones P para cada estimación preliminar j periodos posteriores sea positivo, en este caso es $P = T - 3L + 1 = 265$. Por el contrario, para $L = 192$, respetando que $L < T/2$ en CSSA, el valor de P sería negativo de forma que para ningún periodo desde t_0 existe una senda completa de estimación. Por ello, en CSSA se alcanza la estimación final para $K = L - 1 = 95$ y, este valor, se aplicará también para TS. La estimación del ciclo es la primera diferencia de la componente de ciclo-tendencia. En CSSA la componente de ciclo-tendencia incluye todas las oscilaciones cuyo periodo es superior a 18 meses. TS se ejecuta en modo automático con corrección de atípicos³.

Cuando se trata de datos reales solo se dispone de una realización por serie. Entonces, siguiendo el esquema representado en la Figura 2.1, se pueden calcular estimaciones de los estadísticos, para un j dado, de las revisiones j periodos posteriores pero no es posible la obtención de distribuciones de probabilidad de dichos estadísticos. Así, para un j dado, se obtiene una estimación de la ratio de la magnitud de la revisión j periodos posteriores, RMR_j , definida en (2.8). La evolución de la ratio RMR_j según el número de periodos posteriores a la estimación inicial para el ciclo del IPI en cada uno de esos seis países se muestra en la Figura 2.6.

³ La presencia de atípicos no afecta a los autovectores de CSSA. Su corrección es una ventaja para la estimación con TS que, como se verá, no impide que CSSA revise menos que TS ante su presencia.

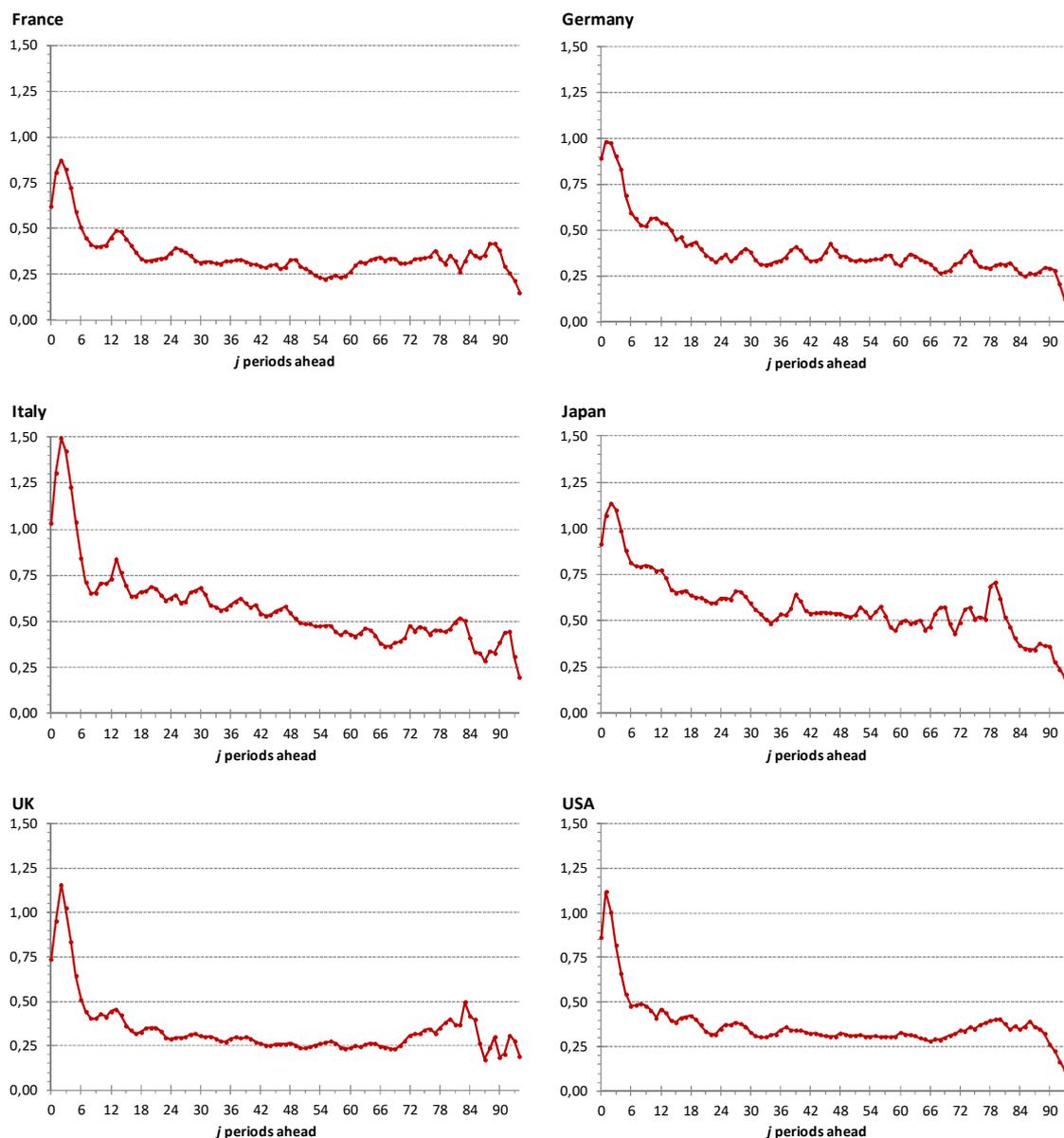


Figura 2.6 Ratio RMR_j según el número de periodos posteriores a la estimación inicial para las revisiones de las estimaciones del ciclo del IPI obtenidas con CSSA y TS para $L=96$.

Seguidamente se exponen los resultados del análisis de los gráficos de la Figura 2.6. En primer lugar, la ratio RMR_j para la estimación inicial, $j=0$, es menor que la unidad en todos los países excepto en Italia con un valor de 1.03, es decir, CSSA revisa menos que TS en la estimación inicial excepto en Italia. En segundo lugar, se observa un repunte de la ratio entre las estimaciones preliminares de uno a cuatro periodos posteriores según los países. Cuando el repunte supera la unidad no sobrepasa el valor

de 1.20 excepto el llamativo caso de Italia que alcanza casi un 1.50. A continuación se produce un descenso acusado de la ratio para permanecer claramente por debajo de la unidad en el resto de estimaciones preliminares. Finalmente, se destaca que, el valor medio de la ratio se sitúa entre un 0.34 para Reino Unido y un 0.58 para Japón. Esto significa que la magnitud de la revisión para CSSA representa, en media, menos del 60% que la magnitud de la revisión para TS, es decir, CSSA revisa, como mínimo, un 40% menos que TS en el conjunto de la senda de estimación.

Aunque se dispone de una sola realización del IPI de cada país, sin embargo, este conjunto de países pertenecen al grupo de primeras economías del mundo y poseen un grado de desarrollo y una estructura económica bastante similar. Por tanto, estos países se pueden considerar como una muestra de la misma población de IPIs, aunque una muestra pequeña con solo seis series. A partir de sus ratios RMR_j , se puede construir la Tabla 2.25 donde, para cada país y estimaciones inicial y nueve primeras preliminares, aparece la metodología con menor magnitud de revisión para el ciclo del IPI. Con toda esa información se obtiene el porcentaje de veces que CSSA revisa menos que TS. Este porcentaje, que también aparece en dicha tabla, es una aproximación a la probabilidad P_j de la ecuación (2.10). Los valores de estos porcentajes y su perfil, en función del número de periodos posteriores, son coherentes con las probabilidades de las Figuras 2.4 y 2.5 obtenidas en la simulación de la Sección 3 para $L = 96$.

Tabla 2.25 Metodología con menor magnitud de revisión en el ciclo del IPI por país para las primeras estimaciones preliminares junto con el porcentaje de veces que CSSA revisa menos que TS.

País	Número de periodos posteriores									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
France	CSSA	CSSA	CSSA	CSSA	CSSA	CSSA	CSSA	CSSA	CSSA	CSSA
Germany	CSSA	CSSA	CSSA	CSSA	CSSA	CSSA	CSSA	CSSA	CSSA	CSSA
Italy	TS	TS	TS	TS	TS	TS	CSSA	CSSA	CSSA	CSSA
Japan	CSSA	TS	TS	TS	CSSA	CSSA	CSSA	CSSA	CSSA	CSSA
UK	CSSA	CSSA	TS	TS	CSSA	CSSA	CSSA	CSSA	CSSA	CSSA
EE.UU.	CSSA	TS	CSSA							
Apariciones CSSA (%)	83	50	50	50	83	83	100	100	100	100

Además de comparar la magnitud de la revisión, es oportuno analizar la convergencia de las revisiones con $\hat{\sigma}_j$ definida en la ecuación (2.9) que coincide con la raíz del error cuadrático medio de las estimaciones preliminares del ciclo porque las estimaciones de las componentes no tienen sesgo. La Figura 2.7 representa, para los seis países, la distancia $\hat{\sigma}_j$ obtenida con CSSA y TS. Se observa que CSSA produce una estimación inicial del ciclo más próxima a la final que la obtenida con TS excepto en Italia con una diferencia de una sola centésima a favor de TS. A continuación, en las dos primeras estimaciones preliminares, TS reduce la distancia a la estimación final más rápidamente que CSSA. Eso implica que, para algunos países, la distancia generada por TS sea inferior a la de CSSA en algunas de las cuatro primeras estimaciones preliminares. En cualquier caso, a partir de la quinta estimación preliminar, CSSA siempre produce estimaciones más próximas a la estimación final que TS con el añadido de que entre 2 y 3 años la distancia en CSSA se estabiliza bastante con un valor próximo a cero. En estas series, la distancia media obtenida con CSSA está entre 0.0225 y 0.0646, claramente inferior a la obtenida con TS que se sitúa entre 0.0522 y 0.1076.

Analizadas de forma conjunta las estimaciones preliminares mediante sus estadísticos RMR_j y $\hat{\sigma}_j$, se estudia la evolución de la estimación del ciclo para un periodo concreto, desde su estimación inicial hasta alcanzar su estimación final. El significado práctico de los resultados de esos estadísticos se observa al comparar las sendas de estimación de un periodo concreto obtenidas con ambos métodos, CSSA y TS. Para este ejercicio, de las P sendas de estimación disponibles, se selecciona la última, es decir, la correspondiente al mes de enero de 2008. Dicha senda, producida por ambos métodos, se representa en la Figura 2.8 para los seis países. Ahí se observa que el shock que supone la crisis de 2008 no tiene incidencia adicional en las sendas obtenidas con CSSA puesto que en todos los países alcanzan una situación de relativa estabilidad a los dos años mientras que TS necesita más de dos, incluso cuatro años en algunos casos. Además, las sendas de CSSA, a partir de esos dos años, muestran una línea con pequeños dientes de sierra pero paralela al eje de abscisas y, sin embargo, las sendas de TS presentan, en varias ocasiones, cambios de nivel o picos muy significativos que reflejan un método ciertamente dubitativo. En el caso de Japón se mantiene el patrón

descrito para ambos métodos pero sus sendas presentan una suave pendiente descendente hasta alcanzar la estimación final.

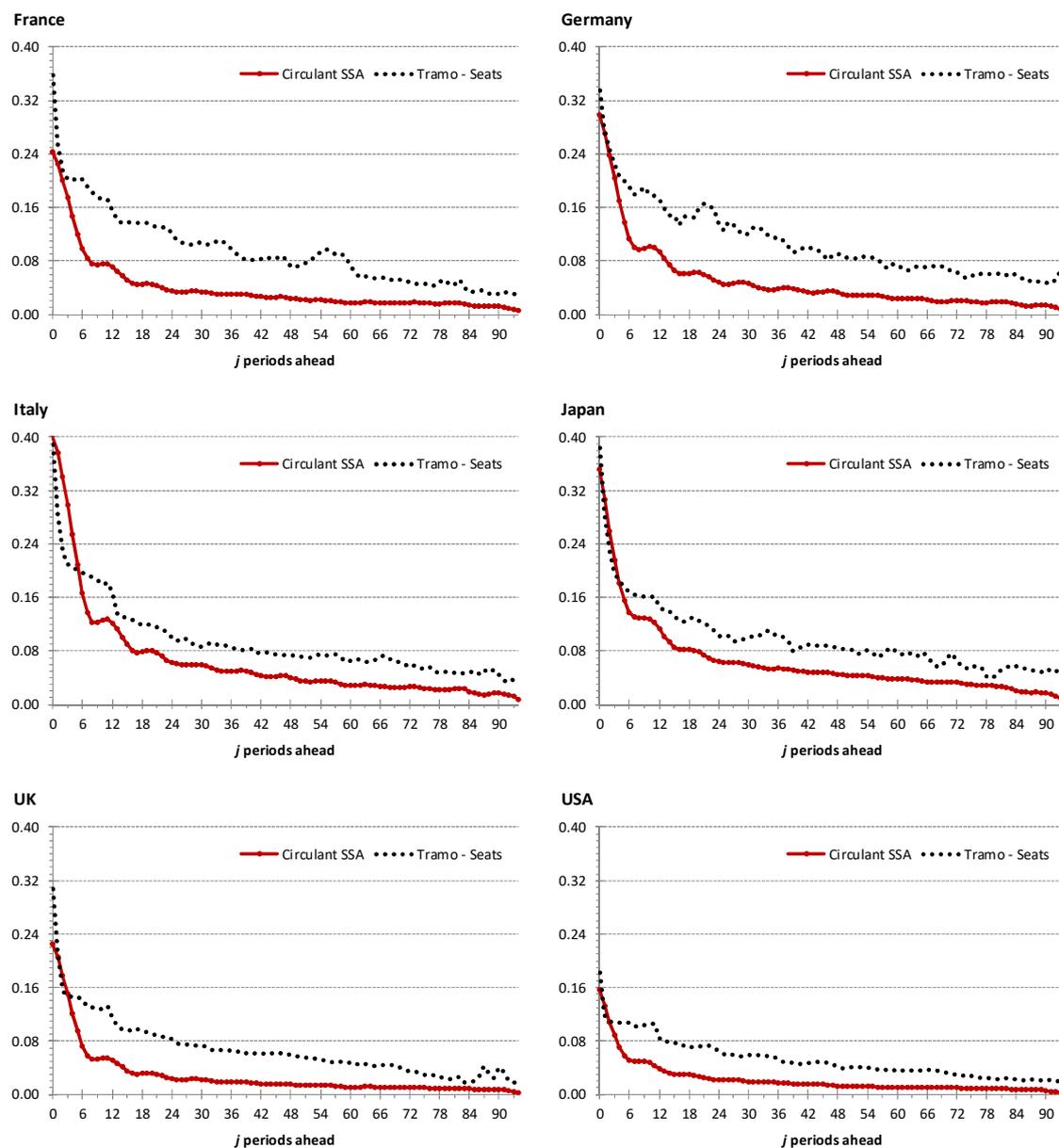


Figura 2.7 Distancias $\hat{\sigma}_j$ para el ciclo del IPI obtenidas con CSSA y TS para $L=96$ según el número de periodos posteriores a la estimación inicial para cada uno de los países.

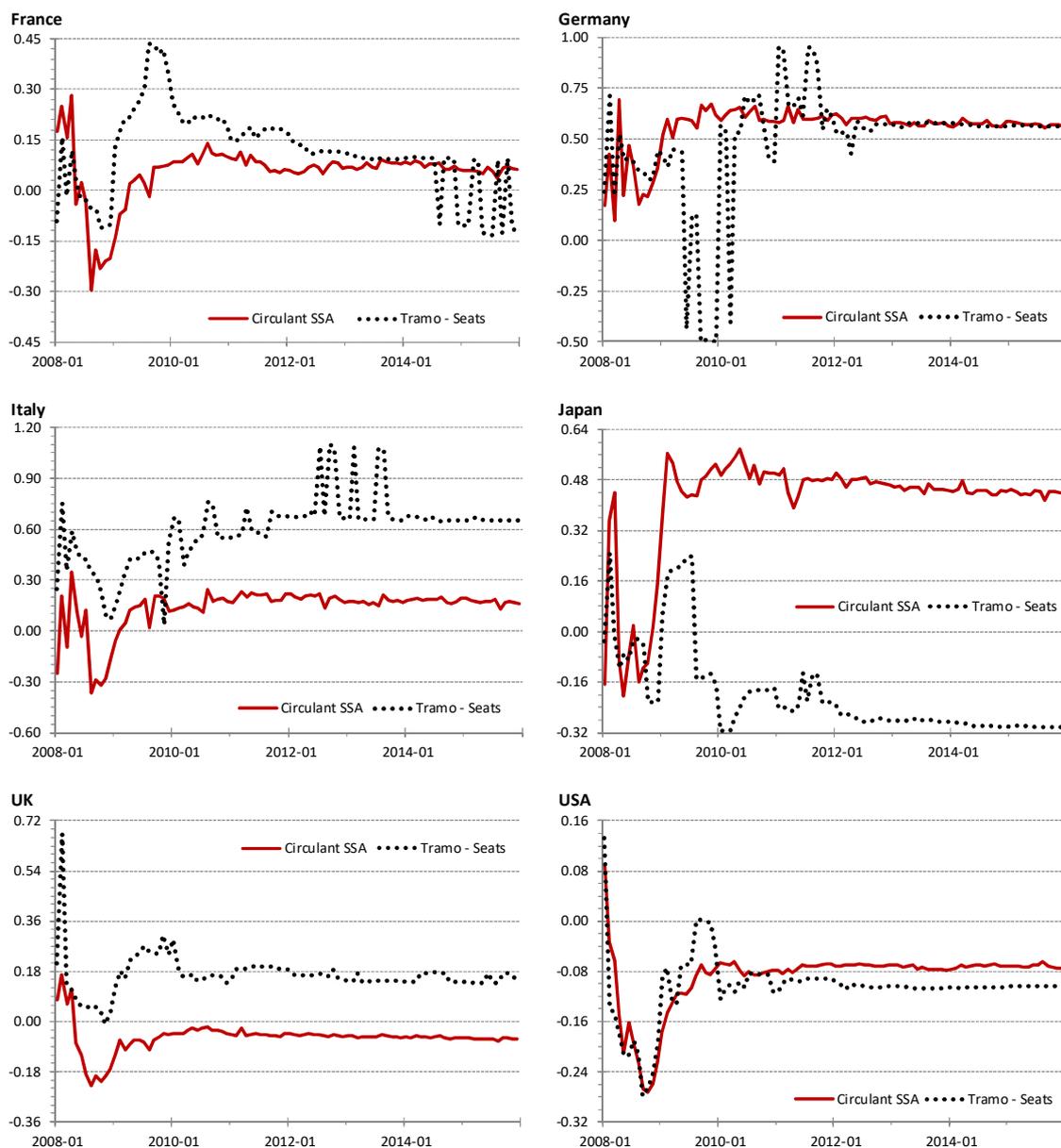


Figura 2.8 Sendas de la estimación del ciclo del IPI para el mes de enero de 2008 obtenidas con CSSA y TS para $L=96$ en cada uno de los países.

2.5 Conclusiones

Circulant SSA es una técnica no paramétrica que identifica *ex-ante* los armónicos de las componentes oscilatorias que extrae de una serie temporal. Estas estimaciones poseen unas propiedades estadísticas tanto en muestras finitas como en tiempo real. Para muestras finitas, las simulaciones realizadas de modelos estructurales complejos, tanto para el caso lineal como no lineal, han puesto de manifiesto que *Circulant SSA* estima componentes no sesgadas, con pequeño error de estimación y separables donde el error global es ruido blanco gaussiano como el término de error incluido en las series simuladas. También, se ha corroborado que las otras dos versiones, Basic y Toeplitz, verifican las mismas propiedades que *Circulant SSA*. Sin embargo, aunque esas propiedades son características objetivas, la comparación de las componentes de las series simuladas que han sido estimadas mediante cada una de estas tres versiones de SSA (Basic, Toeplitz y Circulant) concluye, empíricamente, que *Circulant SSA* posee mejores propiedades estadísticas en muestras finitas por tres motivos. Primero, la ausencia de sesgo es más evidente en *Circulant SSA* porque, si bien la distribución para el estadístico de la traslación es similar, tiene una distribución mucho más concentrada para el estadístico del cambio de escala. Segundo, *Circulant SSA* es más eficiente que las otras dos versiones porque tiene una menor varianza del error de estimación. Y, tercero, las distribuciones muestrales de las w -correlaciones, que miden el grado de separabilidad entre las componentes estimadas, están más concentradas alrededor de cero en *Circulant SSA* mientras que en las otras dos versiones se encuentran desplazadas hacia valores positivos. Es decir, ante la estimación del ciclo económico, *Circulant SSA* tiene menor margen de error al predecir los puntos de giro, los máximos y mínimos de esa componente oscilatoria. Además, la distribución de los parámetros de la regresión para medir la ausencia de sesgo en las tres versiones de SSA verifica de forma empírica la equivalencia en muestras finitas de las mismas demostrada analíticamente para muestras infinitas en el primer capítulo.

Por otro lado, se encuentran las revisiones de las estimaciones de las componentes debidas a la publicación de datos adicionales para los periodos siguientes, es decir, la fiabilidad de la estimación en tiempo real. La nueva definición de estimación final en SSA introducida a partir de Kaiser y Maravall (1999) permite analizar de forma

homogénea la senda de estimación sin la distorsión de los datos actuales. Ello posibilita la comparación de las revisiones de la componente cíclica, componente fundamental en el análisis de la coyuntura económica, de las series simuladas estimadas con dos metodologías muy diferentes: *Circulant SSA* y Tramo-Seats; la primera es una técnica no paramétrica y la segunda está basada en modelos ARIMA. Del análisis de las simulaciones, se desprende que, en toda la senda de estimación, *Circulant SSA* tiene una mayor probabilidad de que la magnitud de revisión sea menor. En particular, la estimación más importante para el análisis en tiempo real, es decir, la estimación inicial, está más próxima a la estimación final y con una distribución más concentrada en *Circulant SSA*. Además, la senda de estimación en el marco de *Circulant SSA* es mucho más estable que la producida por Tramo-Seats. Por ello, *Circulant SSA* generará predicciones del ciclo económico más fiables en tiempo real ya que dependen de las estimaciones de los periodos más recientes, es decir, de la última estimación inicial y de las primeras preliminares. En consecuencia, la toma de decisiones con *Circulant SSA* se efectúa con menor incertidumbre a partir de la estimación inicial de la componente cíclica en tiempo real.

Finalmente, el estudio de las revisiones del ciclo en el caso de real de los IPI, aunque sea una muestra pequeña de tan solo seis series, corrobora las buenas propiedades de *Circulant SSA* en las revisiones de la estimación de la componente cíclica. Específicamente se destaca que la estimación inicial obtenida con *Circulant SSA* está más próxima a la estimación final que la producida con Tramo-Seats y que la senda de estimación alcanza la estabilidad en un plazo de dos años con *Circulant SSA* mientras que dicho plazo es superior con Tramo-Seats.

Referencias

1. Alexandrov, T. (2009). A method of trend extraction using Singular Spectrum Analysis. *Statistical Journal*, 7(1), 1-22.
2. Alexandrov, T. & Golyandina, N. (2005). Automatic extraction and forecast of time series cyclic components within the framework of SSA. *Proceedings of the Fifth Workshop on Simulation*, 45-50.
3. Allen, M. & Smith, L. (1996). Monte Carlo SSA: detecting irregular oscillations in the presence of colored noise. *Journal of Climate*, 9, 3373-3404.
4. Ashley, J., Driver, R., Hayes, S. & Jeffery, C. (2005). Dealing with data uncertainty. *Bank of England Quarterly Bulletin*, Spring.
5. Blakely, C., & McElroy, T. (2016). Signal extraction goodness-of-fit diagnostic tests under model parameter uncertainty: Formulations and empirical evaluation. *Econometric Reviews*, 1-16.
6. Broomhead, D. & King, G. (1986). Extracting qualitative dynamics from experimental data. *Physica D*, 20, 217-236.
7. Canova, F. (1998). Detrending and business cycle facts: A user's guide. *Journal of Monetary Economics*, 41 (3), 533-540.
8. Carvalho, M. de, Rodrigues, P. C. & Rua, A. (2012). Tracking the US business cycle with a singular spectrum analysis. *Economics Letters*, 114(1), 32-35.
9. Carvalho, M. de & Rua, A. (2017). Real-time nowcasting the US output gap: Singular spectrum analysis at work. *International Journal of Forecasting*, 33(1), 185-198.
10. Conrad, W. & Corrado, C. (1979). Application of the Kalman filter to revisions in monthly retail sales estimates. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 1(2), 177-198.
11. Damia, V. & Picón Aguilar, C. (2006). *Quantitative Quality Indicators for Statistics-An Application to Euro Area Balance of Payment Statistics*. Occasional paper series #54, European Central Bank.
12. Durbin, J. & Koopman, S. J. (2012). *Time Series Analysis by State Space Methods*. Second edition. Oxford University Press.
13. Fixler, D. J. & Nalewaik, J. (2007). *News, Noise, and Estimates of the "true" Unobserved State of the Economy*. Divisions of Research & Statistics and Monetary Affairs, Federal Reserve Board.
14. Ghil, M. & Mo, K. (1991). Intraseasonal oscillations in the global atmosphere. Part I and Part II, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 48 (5), 752-790.

15. Golyandina, N., Nekrutkin, V. & Zhigljavsky, A. (2001). *Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques*. Chapman & Hall/CRC.
16. Golyandina, N. & Zhigljavsky, A. (2013). *Singular Spectrum Analysis for Time Series*. Springer.
17. Gómez, V., & Maravall, A. (1998). *Guide for Using the Programs TRAMO and SEATS*. Banco de España.
18. Gómez, V. & Maravall, A. (2001a). Automatic modeling methods for univariate series. *A course in time series analysis*, 171-201.
19. Gómez, V. & Maravall, A. (2001b). Seasonal adjustment and signal extraction in economic time series. *A course in time series analysis*, 202-246.
20. Harvey, A. C., McKenzie, C. R., Blake, D. P. C. & Desai, M. J. (1983). Irregular data revisions. *Applied time series analysis of economic data*, 329-347.
21. Harvey, A. C., & Shephard, N. (1993). Structural time series models. *Handbook of statistics*, 11, 261-302.
22. Jacobs, J. P. & van Norden, S. (2011). Modeling data revisions: Measurement error and dynamics of “true” values. *Journal of Econometrics*, 161(2), 101-109.
23. Kaiser, R. & Maravall, A. (1999). Estimation of the business cycle: A modified Hodrick-Prescott filter. *Spanish Economic Review*, 1(2), 175-206.
24. Maravall, A. (2003). A class of diagnostics in the ARIMA-model-based decomposition of a time series. *Seasonal Adjustment*, 23-36.
25. Melis Maynar, F. (1991). The estimation of the rate of variation in economic time series. *Estadística Española*, 33, 7-56. In Spanish.
26. Orphanides, A. (2001). Monetary policy rules based on real-time data. *American Economic Review*, 91(4), 964-985.
27. Orphanides, A. & van Norden, S. (2002). The unreliability of output-gap estimates in real time. *Review of economics and statistics*, 84(4), 569-583.
28. Patterson, K. D. (1995). A state space approach to forecasting the final vintage of revised data with an application to the index of industrial production. *Journal of Forecasting*, 14(4), 337-350.
29. Patterson, K., Hassani, H., Heravi, S. & Zhigljavsky, A. (2011). Multivariate singular spectrum analysis for forecasting revisions to real-time data. *Journal of Applied Statistics*, 38(10), 2183-2211.
30. Patterson, K. D. & Heravi, S. M. (1991). Data revisions and the expenditure components of GDP. *The Economic Journal*, 101(407), 887-901.

31. Patterson, K. D. & Heravi, S. M. (2004). Revisions to official data on US GNP: a multivariate assessment of different vintages. *Journal of Official Statistics*, 20(4), 573-602.
32. Vautard, R. & Ghil, M. (1989). Singular spectrum analysis in nonlinear dynamics, with applications to paleoclimatic time series. *Physica D*, 35, 395-424.
33. Vautard, R., Yiou, P. & Ghil, M. (1992). Singular-spectrum analysis: A toolkit for short, noisy chaotic signal. *Physica D*, 58, 95-126.
34. Young, P.C. (1984). *Recursive Estimation and Time Series Analysis: An Introduction*. Springer Verlag, Berlin.

Multivariate Circulant SSA

3.1 Introducción

La extensión del Análisis Espectral Singular, SSA, al caso multivariante para dar lugar al procedimiento no paramétrico SSA multivariante, M-SSA, tal y como se describe en Broomhead y King (1986b) es simultánea a la aparición de SSA con los trabajos de Broomhead y King (1986a) y Fraedrich (1986) originando la versión Basic de M-SSA. Esto indica la vocación multivariante de SSA, no solo por su formulación como un método basado en subespacios sino por su uso con un grupo de series de forma conjunta. Sin embargo, deben transcurrir ocho años hasta la publicación del siguiente artículo relativo a M-SSA donde se establece su versión Toeplitz debida a Plaut y Vautard (1994). Estos autores ponen de manifiesto el gran potencial que tiene M-SSA porque extrae patrones espaciales y temporales al mismo tiempo debido a que los autovectores están formados por M secuencias, tantas como series se analizan, de tamaño L que es la longitud de la ventana. Ello significa que tanto el Análisis de Componentes Principales, PCA, como SSA son casos particulares de M-SSA. Como resaltan Plaut y Vautard (1994), PCA puede ser derivado desde M-SSA tomando la longitud de la ventana de una unidad y SSA trabajando con una única serie. Allen y Robertson (1996) generalizan el algoritmo Monte Carlo SSA con un contraste para la existencia de oscilaciones moduladas en datos multivariantes con presencia de ruido de color. Sin embargo, con el trabajo de Ghil et al. (2002), donde se revisan las dos versiones de M-SSA, Basic y Toeplitz, esta técnica recibe un impulso definitivo y comienzan a publicarse estudios sobre la aplicación de M-SSA a diferentes disciplinas mientras que hasta ese momento se habían limitado a la climatología. Así, entre otras

materias, en el campo de la biometría se encuentra el trabajo de Lee et al. (2014); en el procesamiento de imágenes se halla la publicación de Golyandina y Usevich (2010) y en la geolocalización se puede citar a Gruszczynska et al. (2017). Dentro del análisis económico se localizan distintas investigaciones. Por ejemplo, Groth et al. (2015) analizan el ciclo económico de EE.UU.; Hassani et al. (2013a y 2013b) predicen el Índice de Producción Industrial y la inflación, respectivamente; Zhang et al. (2014) desarrollan un índice compuesto para la economía de varios países asiáticos; Sella et al. (2016) estudian las fluctuaciones macroeconómicas en tres países de la Unión Europea y Silva et al. (2018) hallan indicadores adelantados de la producción industrial europea.

Referidos a los aspectos metodológicos de M-SSA se pueden distinguir dos grupos de trabajos. Por un lado, se ubican los que modifican el algoritmo para mejorar las estimaciones en diferentes sentidos. Golyandina y Stepanov (2005) introducen la forma horizontal en la versión Basic de M-SSA con el fin de reducir el número de autovectores y simplificar el análisis. En otras investigaciones se pretende mejorar la separabilidad introduciendo procedimientos de rotación *varimax* o criterios *ortomax* por Groth y Ghil (2011) y Portes y Aguirre (2016), respectivamente. También, tanto Golyandina y Usevich (2010) como Kume y Nose-Togawa (2014) extienden SSA a datos bidimensionales con respectivos algoritmos, 2D-SSA y filtrado simétrico en dos pasos, que pueden ser considerados métodos multivariantes. Igualmente, Viljoen y Nel (2010) con el enfoque SSA Común basado en las Componentes Principales Comunes desean mejorar la estimación de los patrones colectivos. Asimismo, Groth y Ghil (2015) comparan los estimadores de los momentos de segundo orden de las dos versiones clásicas de M-SSA, Basic y Toeplitz, proponiendo una modificación del estimador de la autocovarianza cruzada en la versión Toeplitz. Se introduce el análisis Bayesiano por Launonen y Holström (2017) para analizar la credibilidad de las componentes estimadas y Pukenas (2014) determina la estructura de correlaciones cruzadas de un conjunto de series calculando un índice de sincronización sobre un espectro truncado obtenido con la transformada rápida de Fourier. No obstante, los trabajos más interesantes para esta investigación son los dedicados a la automatización porque M-SSA, como SSA, adolece de falta de automatismo al ser necesaria la intervención del analista para asignar las componentes extraídas a un armónico. El trabajo de Groth y Ghil (2011) incluye la rotación *varimax* en M-SSA para identificar de forma óptima los grupos de autovectores

sincronizados con la misma frecuencia. Y, Carvalho y Rua (2017) aplican el test g de Fisher sobre el periodograma de las componentes principales para asignar una frecuencia a las componentes reconstruidas. Sin embargo, ambas propuestas asignan *ex-post* la frecuencia a dichas componentes, después de ser estimadas. Por ello, en este capítulo, se extiende la versión *Circulant SSA*, CSSA, al caso multivariante para desarrollar el llamado *Multivariate Circulant SSA*, M-CSSA, con el objetivo de asignar *ex-ante* una frecuencia a toda componente reconstruida de una serie temporal vectorial. Con este fin, se presenta una nueva matriz de trayectorias para M-SSA. Esta nueva matriz de trayectorias no apila las matrices de trayectorias individuales, sino que los escalares de la matriz de trayectorias univariante son sustituidos por vectores. Por tanto, la matriz de momentos de segundo orden es una matriz Toeplitz por bloques y se construirá una matriz circulante por bloques que sea asintóticamente equivalente a la primera. Se amplía al caso multivariante las matrices circulantes definidas por Pearl (1973) y Gray (2006) para el caso univariante. La teoría expuesta en Gutiérrez-Gutiérrez y Crespo (2012) sobre matrices Toeplitz por bloques permite diagonalizar las matrices circulantes por bloques que se han calculado y asociar *ex-ante* las componentes reconstruidas con sus respectivas frecuencias. Además, se construye una base ortonormal que posibilita realizar los cálculos anteriores en el campo de los números reales. No obstante, en el caso multivariante, para toda frecuencia, aparecen tantos autovectores y, por ello, tantas componentes reconstruidas, llamadas subcomponentes, como series se analizan. Esto permite separar toda componente oscilatoria subyacente en señal más ruido según lo observado empíricamente por Plaut y Vautard (1994) pero de una forma sencilla y precisa. Sin embargo, para toda serie se demuestra que la suma de las subcomponentes asociadas a una frecuencia coincide con la componente reconstruida obtenida con CSSA para dicha frecuencia, es decir, se prueba la unicidad de las componentes subyacentes de una serie temporal. También, como en el caso univariante, se verifica, utilizando una matriz de permutación sobre las matrices de trayectorias de las versiones clásicas, la equivalencia asintótica de las tres versiones multivariantes (Basic, Toeplitz y Circulant) cuando se opera con datos muestrales.

El otro grupo de trabajos sobre M-SSA se centra en sus aplicaciones estadísticas. Zhigljavsky et al. (2009) y Hassani et al. (2013a) caracterizan la causalidad entre dos series mediante un test basado en la precisión de las predicciones generadas con M-

SSA. Hassani y Mahmoudvand (2013) mejoran las técnicas de predicción con M-SSA y Patterson et al. (2011) estudian las revisiones en M-SSA. Ahora bien, la aplicación estadística más interesante para el análisis económico es la obtención de índices compuestos de un conjunto de series temporales o de algunas de sus componentes como la señal cíclica o ciclo económico que estimen la fuerza dinámica subyacente común de la economía con el fin de realizar un seguimiento de la coyuntura económica. Dado un armónico, las tres versiones de M-SSA pueden considerarse como índice compuesto la componente principal asociada, es decir, la proyección de la matriz de trayectorias sobre el subespacio generado por el correspondiente autovector. No obstante, esta elección presenta dos problemas. Primero, la longitud de la proyección es inferior al tamaño de las series originales y, segundo, para un grupo de frecuencias no se pueden sumar directamente las proyecciones debiendo trabajar con las componentes reconstruidas. Una opción es utilizar un esquema de ponderación sobre el grupo de componentes reconstruidas donde los pesos estarían dados por los índices de participación definidos por Groth y Ghil (2011). Zhang et al. (2014) evitan la controversia de la ponderación al considerar como índice compuesto la componente reconstruida asociada al primer autovector de una serie síntesis de la economía o indicador de referencia, p.ej. el PIB, analizada junto con un grupo de series correlacionadas. No obstante, aparte de cuáles y cuántas series acompañen al indicador de referencia para obtener el índice compuesto, M-SSA tiene la suficiente capacidad de estimar la fuerza dinámica subyacente común a un conjunto de series sin incluir entre ellas una que recopile la información del resto. La versión propuesta, M-CSSA, facilita todos los elementos necesarios para obtener las componentes principales en el dominio de la frecuencia. A pesar de que el procedimiento descrito en Brillinger (1981) y Shumway y Stoffer (2000) puede ser utilizado con series no estacionarias, no está garantizado un error cuadrático medio mínimo para las series reconstruidas originales como describen Peña y Yohai (2016). En cualquier caso, el objetivo no es reducir la dimensión explicando varianzas sino extraer la información subyacente común a un conjunto de series explicando covarianzas, es decir, encontrar un factor común en el dominio de la frecuencia como en Geweke (1977). Obtenida la componente vectorial reconstruida para un grupo de frecuencias, se puede estimar un modelo factorial dinámico en el espacio de los estados por máxima verosimilitud como proponen Engle y Watson (1981). En dicho modelo, se

puede identificar el número de factores según el método de Peña y Box (1987) o introducir factores no estacionarios como detallan Peña y Poncela (2006). No obstante, es necesario especificar de forma previa la dinámica de los factores comunes mediante un modelo VARMA. M-CSSA permite pasar de forma sencilla del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo porque las matrices de covarianzas retardadas de la componente vectorial reconstruida son función de la matriz de densidad espectral cruzada de la serie vectorial original evaluada en la frecuencia asociada a la componente reconstruida. Por ello, se elige estimar los factores comunes de dicha componente mediante el análisis factorial clásico aplicado a series temporales, sin especificar la dinámica de los factores, según exponen Gilbert y Meijer (2005) y Bai y Ng (2008) pero en el dominio de la frecuencia con la información espectral obtenida. En el análisis factorial de series temporales existe dependencia serial en los factores comunes aunque no están mutuamente correlacionados con los idiosincráticos. Esto, junto con otros supuestos que se añaden sobre las matrices de covarianzas retardadas, permite calcular la matriz de cargas factoriales de forma directa como Peña y Box (1987) y diseñar un algoritmo iterativo para obtener el predictor de Bartlett con el fin de estimar el factor o los factores comunes de la componente vectorial reconstruida referida a un grupo de frecuencias como el ciclo económico o la estacionalidad.

En conclusión, según los párrafos previos, se reseñan las contribuciones del capítulo:

1. Se diseña una nueva matriz de trayectorias para el vector de series temporales sustituyendo los escalares por vectores en la matriz de trayectorias univariante logrando que la matriz de momentos de segundo orden sea Toeplitz por bloques.
2. Se construye una matriz circulante por bloques asintóticamente equivalente a la anterior matriz Toeplitz por bloques ampliando al caso multivariante las propuestas de Pearl (1973) y Gray (2006) de matrices circulantes para el caso univariante.
3. Se elabora una base ortonormal para la diagonalización ortogonal de las matrices circulantes por bloques permitiendo realizar los cálculos y las estimaciones en el campo de los números reales.
4. Se extiende, con las contribuciones anteriores, la versión *Circulant SSA* al caso multivariante, M-CSSA, posibilitando identificar *ex-ante* y de forma automática las frecuencias de las componentes oscilatorias subyacentes de un vector de series.

5. Se determina de forma precisa la formación de las componentes oscilatorias subyacentes, posición y caracterización cíclica, gracias a que M-CSSA produce, para toda frecuencia, tantas subcomponentes reconstruidas como series analizadas.
6. Se demuestra la unicidad de las componentes oscilatorias subyacentes estimadas tanto con CSSA como con M-CSSA.
7. Se presenta una nueva forma de identificar los shocks¹ sufridos por cada serie mediante M-CSSA porque este método es capaz de determinar la contribución de cada subcomponente dentro de toda componente oscilatoria para cada serie.
8. Se verifica la equivalencia asintótica de las tres versiones de M-SSA (Basic, Toeplitz y Circulant) cuando se opera con datos muestrales.
9. Se introduce el análisis factorial en el dominio de la frecuencia.
10. Se propone un nuevo método de estimación de la matriz de cargas factoriales de forma directa en el dominio de la frecuencia a partir de los resultados de M-CSSA.
11. Se diseña un algoritmo iterativo que permite calcular el predictor de Bartlett para estimar el factor o factores comunes en el dominio de la frecuencia de una componente vectorial subyacente como puede ser el ciclo económico.
12. En la aplicación real sobre una zona geográfica, se demuestra la existencia de un ciclo común para EU-15 a pesar de los diferentes shocks sufridos por los diversos Estados miembros dentro de la UE-15.

Las contribuciones anteriores se desarrollan en este capítulo organizado como sigue. En la Sección 2 se describe y analiza la técnica M-SSA y algunas variaciones. A continuación, en la Sección 3 se propone la nueva matriz de trayectorias, se presenta M-CSSA como extensión de CSSA al caso multivariante, se construye la base ortonormal, se verifica la equivalencia asintótica de M-CSSA con las otras versiones y se demuestra la unicidad de las componentes extraídas. Seguidamente, en la Sección 4 se detalla la obtención de los factores comunes en el dominio de la frecuencia de una componente vectorial subyacente. En la Sección 5 se aplica M-CSSA a dos casos reales: sobre un sector de actividad económica y sobre una zona geográfica. Finalmente, en la Sección 6 se exponen las conclusiones.

¹ Se entiende por shocks las desviaciones respecto al comportamiento medio o esperado.

3.2 Metodología de SSA multivariante

En esta sección se describe y analizan los pasos del algoritmo M-SSA cuya tarea principal es descomponer un conjunto de series temporales observadas en suma de componentes interpretables con información espacio-temporal común.

3.2.1 Descripción del algoritmo

Se considera una serie temporal vectorial M -dimensional $\mathbf{x}_t = (x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(M)})^T$ de longitud T . Por simplicidad, se supone que todas las series $x_t^{(m)}$ son reales de media nula. Sea L un entero positivo que se corresponde con la longitud de la ventana tal que $1 < L < T/2$. El algoritmo consta de los siguientes cuatro pasos.

Paso 1: Matriz de trayectorias.

Para cada serie temporal $x_t^{(m)}$ del vector \mathbf{x}_t se construye su matriz de trayectorias incrustando dicha serie en un subespacio L -dimensional de $N = T - L + 1$ vectores retardados

$$\mathbf{X}^{(m)} = \begin{pmatrix} x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & \cdots & x_N^{(m)} \\ x_2^{(m)} & x_3^{(m)} & \cdots & x_{N+1}^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_L^{(m)} & x_{L+1}^{(m)} & \cdots & x_T^{(m)} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

A partir de ellas se forma la matriz de trayectorias global o multivariante

$$\mathbf{X}_V = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}^{(M)} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

que es una matriz de dimensión $ML \times N$. Cada matriz de trayectorias individual es una matriz Hankel y la matriz de trayectorias global es una matriz de bloques Hankel.

Paso 2: Descomposición.

Se diagonaliza la gran matriz de covarianzas cruzadas retardadas \mathbf{S} . Las opciones clásicas para obtener esta matriz son:

I. Basic M-SSA o Broomhead-King (BK):

Esta versión fue propuesta por Broomhead y King (1986b) y calcula:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{BK} = \mathbf{X}_V \mathbf{X}_V^T / N = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{1,1} & \mathbf{S}_{1,2} & \cdots & \mathbf{S}_{1,M} \\ \mathbf{S}_{2,1} & \mathbf{S}_{2,2} & \cdots & \mathbf{S}_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{S}_{M,1} & \mathbf{S}_{M,2} & \cdots & \mathbf{S}_{M,M} \end{pmatrix}.$$

La matriz \mathbf{S}_{BK} tiene dimensión $ML \times ML$ y es simétrica puesto que $\mathbf{S}_{i,j} = \mathbf{S}_{j,i}^T$ donde los bloques $\mathbf{S}_{i,j}$ representan la matriz de covarianzas retardadas estimadas entre la serie (i) y la serie (j) y están dados por

$$\mathbf{S}_{i,j} = \mathbf{X}^{(i)} \left(\mathbf{X}^{(j)} \right)^T / N.$$

II. Toeplitz M-SSA o Plaut-Vautard (PV):

Esta versión concebida por Plaut y Vautard (1994) extiende el enfoque de Vautard y Ghil (1989) al caso multivariante. Se construye una matriz $M \times M$ de bloques Toeplitz de dimensión $ML \times ML$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{PV} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{1,1} & \mathbf{T}_{1,2} & \cdots & \mathbf{T}_{1,M} \\ \mathbf{T}_{2,1} & \mathbf{T}_{2,2} & \cdots & \mathbf{T}_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{T}_{M,1} & \mathbf{T}_{M,2} & \cdots & \mathbf{T}_{M,M} \end{pmatrix}.$$

Cada bloque $\mathbf{T}_{i,j}$ es una matriz Toeplitz de dimensión $L \times L$ que contiene las covarianzas retardadas estimadas entre la serie (i) y la serie (j) donde el elemento (r,s) de $\mathbf{T}_{i,j}$ está dado por

$$\left[\mathbf{T}_{i,j} \right]_{r,s} = \hat{\gamma}_{r-s}^{(i,j)} = \frac{1}{T-|r-s|} \sum_{t=\max(1,1-r+s)}^{\min(T,T-r+s)} x_t^{(i)} x_{t+r-s}^{(j)}. \quad (3.3)$$

Los bloques $\mathbf{T}_{i,j}$ verifican que $\mathbf{T}_{i,j} = \mathbf{T}_{j,i}^\top$ y, por tanto, la matriz \mathbf{S}_{pV} es simétrica. Los elementos $\hat{\gamma}_{r-s}^{(i,j)}$ convergen en probabilidad a $\gamma_{r-s}^{(i,j)}$ cuando $T \rightarrow \infty$, donde $\gamma_k^{(i,j)} = \text{cov}(x_t^{(i)}, x_{t+k}^{(j)})$ representa el término de retardo k , $k \in \mathbb{Z}$, de la función de covarianzas cruzadas entre la serie (i) y la serie (j) siendo $\hat{\gamma}_k^{(i,j)}$ su estimador.

En cualquier caso, se realiza la diagonalización ortogonal $\mathbf{S} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^\top$ donde $\mathbf{D} = \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_{LM})$ siendo $\tau_1 \geq \dots \geq \tau_{LM} \geq 0$ los autovalores de \mathbf{S} y \mathbf{U} es una matriz ortogonal $ML \times ML$ cuyas columnas son los correspondientes autovectores \mathbf{u}_k , $\mathbf{S}\mathbf{u}_k = \tau_k \mathbf{u}_k$ para $k = 1, \dots, LM$, y, por tanto, $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^{LM}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^{LM} . Cada autovector \mathbf{u}_k consta de M fragmentos consecutivos de longitud L , es decir, $\mathbf{u}_k = [\mathbf{u}_k^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_k^{(M)}]^\top$ con $\mathbf{u}_k^{(m)} = (u_{k,1}^{(m)}, \dots, u_{k,L}^{(m)})^\top$ donde la porción $\mathbf{u}_k^{(m)}$ se corresponde con la serie (m) . La diagonalización da lugar a la siguiente descomposición de la matriz de trayectorias global

$$\mathbf{X}_V = \sum_{k=1}^d \mathbf{X}_k = \sum_{k=1}^d \begin{bmatrix} \mathbf{X}_k^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_k^{(M)} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^d \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_k^{(M)} \end{bmatrix} \mathbf{w}_k^\top, \quad (3.4)$$

siendo $d = \text{rank}(\mathbf{X}_V)$ y $\mathbf{w}_k = \mathbf{X}_V^\top \mathbf{u}_k$, $k = 1, \dots, d$, las componentes principales o proyecciones de la matriz de trayectorias multivariante sobre los autovectores \mathbf{u}_k . Las matrices elementales por bloques \mathbf{X}_k tienen rango uno. Las componentes principales $\mathbf{w}_k = (w_{k,1}, \dots, w_{k,N})^\top$ contienen información común a todas las series mientras que los autovectores \mathbf{u}_k poseen información particular de cada serie sobre la componente oscilatoria asociada a un armónico.

La ratio $\tau_k / \sum_{k=1}^d \tau_k$ se puede considerar como la contribución de la matriz elemental por bloques \mathbf{X}_k en la expansión (3.4). Además, puesto que los autovectores tienen norma uno, el índice de participación introducido en M-SSA por Groth y Ghil (2011),

$$\boldsymbol{\pi}_k^{(m)} = \boldsymbol{\tau}_k \left(\mathbf{u}_k^{(m)} \right)^\top \mathbf{u}_k^{(m)} ,$$

cuantifica la contribución de la serie (m) a la varianza de la k -ésima componente principal.

Paso 3: Agrupamiento.

Ahora, las matrices elementales por bloques \mathbf{X}_k se agrupan en G conjuntos disjuntos y se suman las matrices de cada grupo bajo el supuesto de separabilidad, Golyandina et al. (2001). Sea $I_j = \{k_{j_1}, \dots, k_{j_p}\}$, $j = 1, \dots, G$, cada grupo disjunto de k_{j_p} ($1 \leq k_{j_p} \leq d$) índices correspondiente al conjunto de autovectores $\{\mathbf{u}_{k_{j_1}}, \dots, \mathbf{u}_{k_{j_p}}\}$. Entonces, la matriz por bloques \mathbf{X}_{I_j} asociada al grupo I_j es definida como $\mathbf{X}_{I_j} = \mathbf{X}_{k_{j_1}} + \dots + \mathbf{X}_{k_{j_p}}$. Por tanto, la descomposición (3.4) se puede escribir como la expansión

$$\mathbf{X}_V = \mathbf{X}_{I_1} + \dots + \mathbf{X}_{I_G} .$$

Cada posible grupo elemental de un solo índice $I_k = \{k\}$, $k = 1, \dots, d$, se corresponde con un único autovector \mathbf{u}_k .

Paso 4: Reconstrucción.

Finalmente, cada bloque de toda matriz elemental \mathbf{X}_k , descomposición (3.4), se transforma en una nueva serie temporal de longitud T mediante el promedio diagonal adaptado al caso multivariante por Plaut y Vautard (1994). Esta transformación produce la componente o serie reconstruida elemental $\tilde{x}_{k,t}^{(m)}$ para toda serie original (m) , $m = 1, \dots, M$, dada por

$$\tilde{x}_{k,t}^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \mathbf{u}_{k,i}^{(m)} \mathbf{w}_{k,t-i+1} & 1 \leq t < L \\ \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{u}_{k,i}^{(m)} \mathbf{w}_{k,t-i+1} & L \leq t \leq N \\ \frac{1}{T-t+1} \sum_{i=t-T+L}^L \mathbf{u}_{k,i}^{(m)} \mathbf{w}_{k,t-i+1} & N < t \leq T \end{cases} .$$

De este modo, bajo el supuesto de separabilidad, la componente reconstruida de cada serie (m) correspondiente al grupo disjunto I_j se puede descomponer en una suma de series reconstruidas elementales

$$\tilde{x}_{I_j,t}^{(m)} = \sum_{k \in I_j} \tilde{x}_{k,t}^{(m)} .$$

En consecuencia, la información no se pierde y toda serie inicial (m) se puede expresar como la suma de G componentes reconstruidas

$$x_t^{(m)} = \sum_{j=1}^G \tilde{x}_{I_j,t}^{(m)} .$$

3.2.2 Algunas variantes del algoritmo

En este apartado se describen las modificaciones del anterior algoritmo que afectan a su núcleo, bien a la construcción de la matriz de trayectorias multivariante, bien a la matriz de covarianzas cruzadas. Las variaciones que suponen una mejora de diferentes aspectos del mismo solo se reseñan. Dentro de estas últimas, entre otras referencias, se encuentran Allen y Robertson (1996) que introducen un test Monte Carlo en M-SSA para detectar la presencia de componentes oscilatorias con baja ratio señal-ruido bajo la hipótesis de ruido de color; Portes y Aguirre (2016) que generalizan la rotación *varimax* introducida en M-SSA por Groth y Ghil (2011) para establecer una familia completa de criterios de rotación *ortomax* estructurados; y Launonen y Holström (2017) que incorporan el modelado posterior Bayesiano en M-SSA para analizar la fiabilidad de las componentes oscilatorias extraídas.

La modificación más inmediata consiste en disponer las matrices de trayectorias individuales en forma horizontal para formar la matriz de trayectorias global, según describen Golyandina y Stepanov (2005), cuya apariencia es

$$\mathbf{X}_H = \left[\mathbf{X}^{(1)} \dots \mathbf{X}^{(M)} \right] .$$

Es una matriz de bloques Hankel donde $\mathbf{X}^{(m)}$ es la matriz de trayectorias de la serie (m) con una longitud de ventana L . La matriz de covarianzas cruzadas retardadas en la versión Basic para la forma horizontal de M-SSA será

$$\mathbf{S}_H = \mathbf{X}_H \mathbf{X}_H^T / MN = \left[\mathbf{X}^{(1)} (\mathbf{X}^{(1)})^T + \dots + \mathbf{X}^{(M)} (\mathbf{X}^{(M)})^T \right] / MN .$$

La diagonalización de la matriz \mathbf{S}_H produce, en esta ocasión, L autovectores \mathbf{u}_k que forman una base ortonormal de \mathbb{R}^L y las componentes principales $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^{MN}$ constan cada una de M segmentos consecutivos de longitud N . Los autovectores reflejan los patrones comunes de las series y las componentes principales muestran como dichos patrones aparecen en cada serie.

El enfoque denominado 2D-SSA por Golyandina y Usevich (2010) extiende SSA para analizar tablas bidimensionales. Aunque esta técnica está orientada al procesamiento de imágenes, puede ser aplicada a un conjunto de M series de longitud T suponiendo que están dispuestas en una tabla bidimensional $T \times M$. En este método se establece la habitual longitud de ventana para el tamaño de las series L_T y una longitud de ventana para el número de series L_M con $N_T = T - L_T + 1$ y $N_M = T - L_M + 1$, respectivamente, tal que $1 < L_T L_M < TM$. La matriz de trayectorias global en una matriz Hankel por bloques, también Hankel, de dimensión $L_T L_M \times N_T N_M$ cuya apariencia es

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(1)} & \mathbf{X}^{(2)} & \dots & \mathbf{X}^{(N_M)} \\ \mathbf{X}^{(2)} & \mathbf{X}^{(3)} & \dots & \mathbf{X}^{(N_M+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{X}^{(L_M)} & \mathbf{X}^{(L_M+1)} & \dots & \mathbf{X}^{(M)} \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{X}^{(m)}$ es la matriz de trayectorias de la serie (m) con longitud de ventana L_T y, a continuación, se procede con el resto de pasos del algoritmo M-SSA descrito. Recientemente, Golyandina et al. (2013) desarrollan la extensión Shaped 2D-SSA para imágenes de formas arbitrarias. Además, Shlemov y Golyandina (2014) proponen la versión Circular 2D-SSA para analizar los datos obtenidos en la proyección cilíndrica de superficies tridimensionales como los datos genéticos.

La última modificación que se presenta, diseñada por Viljoen y Nel (2010), introduce la técnica de Componentes Principales Comunes dando lugar al Análisis Espectral Singular Común, Common SSA. Este procedimiento no genera una matriz global de trayectorias. Dada una longitud de ventana L , se analizan las M matrices de

autocovarianzas $\mathbf{S}_{(m)} = \mathbf{X}^{(m)} (\mathbf{X}^{(m)})^T / N$, $m = 1, \dots, M$, de forma conjunta mediante Componentes Principales Comunes para obtener los autovectores comunes a todas ellas donde $\mathbf{X}^{(m)}$ es la matriz de trayectorias de la serie (m) . Esto es, se calcula una única matriz ortogonal $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_L]$ tal que $\mathbf{U}^T \mathbf{S}_{(m)} \mathbf{U} = \text{diag}(\lambda_1^{(m)}, \dots, \lambda_L^{(m)}) \forall m$. El resto de su algoritmo es similar al algoritmo M-SSA previo.

3.2.3 Análisis del algoritmo

En este apartado se analizan con cierto detalle algunos aspectos del algoritmo previo M-SSA descrito en el primer apartado de esta sección y, mientras no se indique lo contrario, se efectúa el análisis sobre la forma vertical.

1) Descomposición del valor singular

La versión Basic de M-SSA se corresponde con la descomposición del valor singular, SVD, de la matriz \mathbf{X}_V / \sqrt{N} . La SVD de esta matriz puede ser escrita como

$$\mathbf{X}_V / \sqrt{N} = \sum_{k=1}^{LM} \sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T .$$

Los autovectores \mathbf{u}_k de la diagonalización ortogonal de la matriz $\mathbf{X}_V \mathbf{X}_V^T / N$ son los vectores singulares por la izquierda, los vectores ortogonales dados por $\mathbf{v}_k = \mathbf{w}_k / \sqrt{\tau_k} = \mathbf{X}_V^T \mathbf{u}_k / \sqrt{\tau_k}$ son los vectores singulares por la derecha y $\sigma_k = \sqrt{\tau_k}$, $k = 1, \dots, LM$, se corresponden con los valores singulares.

2) Relación con el Análisis de Componentes Principales clásico, PCA

La longitud de la ventana L y el número de series M tienen una gran importancia en M-SSA ya que determinan sus capacidades. Como ya se ha mencionado, PCA es un caso particular de M-SSA con $L = 1$ y SSA es otro tanto con $M = 1$. Por ello, M-SSA es una combinación de estas dos técnicas estadísticas, PCA y SSA. M-SSA determina, por un lado, las principales direcciones del sistema generado por la serie multivariante, es decir, extrae los patrones dominantes de la variabilidad y, por otro lado, estima las

componentes espectrales más importantes usando filtros adaptados a los datos como señalan Groth et al. (2011).

La covarianza nula entre dos diferentes componentes principales y la ortogonalidad entre los autovectores asociados, es decir, la doble ortogonalidad tanto en el tiempo como en el espacio, significa que el autovalor τ_k es la varianza de la correspondiente componente principal \mathbf{w}_k y que las M secuencias consecutivas de longitud L de su autovector asociado \mathbf{u}_k describen los patrones espacio-tiempo, Plaut y Vautard (1994). Por ello, en M-SSA la separabilidad actúa tanto en el tiempo como en el espacio: es capaz de distinguir dos oscilaciones con el mismo patrón espacial pero con diferentes periodos y, también, dos oscilaciones de igual periodo pero con distintos patrones espaciales. Consecuentemente, como indican Groth y Ghil (2011), la principal ventaja de los autovectores de M-SSA sobre los autovectores de PCA es la capacidad de separar distintas componentes espectrales mediante pares oscilatorios, es decir, mediante pares de autovectores con el mismo periodo pero en cuadratura siendo casi iguales sus correspondientes autovalores y estando en cuadratura sus componentes principales asociadas, Plaut y Vautard (1994).

Los valores de los parámetros M y L también caracterizan la diferencia de M-SSA con el análisis de funciones ortogonales empíricas extendidas, conocido por sus siglas en inglés como EEOF. Ghil et al. (2002) reseñan que en la literatura meteorológica se asume con frecuencia que el análisis EEOF es sinónimo de M-SSA como identifican Von Storch y Zwiers (1999). Los dos procedimientos son extensiones de PCA pero, a diferencia de M-SSA, el análisis EEOF utiliza un número de series M muy superior a la longitud de la ventana L lo cual limita la información temporal y espectral obtenida.

3) Repercusión del número de autovectores

SSA genera igual número de autovectores que la longitud de la ventana L mientras que M-SSA produce un número de autovectores igual al producto de la longitud de la ventana por el número de series LM . Esto significa que en M-SSA varios patrones espaciales pueden responder a la misma frecuencia, es decir, mientras en SSA un par oscilatorio explica sobre el 100% de la varianza de la frecuencia asociada, en M-SSA el primer par oscilatorio asociado a una frecuencia solo explica una parte de su varianza

porque existen otros pares oscilatorios asociados a la misma frecuencia. De este modo, una gran ventaja de M-SSA reside en su capacidad de distinguir, para una frecuencia dada, los patrones espaciales originados por la señal de los causados por un ruido superpuesto, Plaut y Vautard (1994). Además, Groth et al. (2011) resaltan que M-SSA puede estimar componentes espectrales comunes junto con los comovimientos de las series. Ello significa que, para una frecuencia dada, existe un conjunto de pares de autovectores o patrones espaciales, asociados a diferentes autovalores, que extraen por separado una señal oscilatoria común donde cada una de sus M porciones, además de representar la amplitud de dicha señal en cada serie, obtiene los comovimientos de las series de forma que cada uno de esos M tramos evidencia tanto la caracterización temporal como la posición cíclica de cada serie respecto de la señal común.

4) Tamaño de las series

El procedimiento M-SSA hace uso de una serie temporal vectorial con lo cual todas las series tienen la misma longitud. No obstante, en ocasiones puede suceder que se disponga de un conjunto de series con diferentes tamaños T_m . En esta situación, para poder realizar el producto matricial $\mathbf{X}_V \mathbf{X}_V^T$ se permite que las longitudes de ventana L_m sean diferentes siempre y cuando el valor $N_m = T_m - L_m + 1 = N$ sea igual para todas las series. Las dimensiones de las matrices de trayectorias individuales son $L_m \times N$ y la dimensión de la matriz de trayectorias global es $(\sum_{m=1}^M L_m) \times N$. En esta situación, los autovectores \mathbf{u}_k están formados por M tramos consecutivos de longitudes L_1, L_2, \dots, L_M .

En el caso de la forma horizontal del algoritmo, cuando las series tienen diferentes longitudes T_m , para poder efectuar el producto matricial $\mathbf{X}_H \mathbf{X}_H^T$ los valores $N_m = T_m - L_m + 1$ pueden ser distintos pero la longitud de la ventana debe ser la misma para todas las series, $L_1 = L_2 = \dots = L_M = L$. Las dimensiones de las matrices de trayectorias individuales son $L \times N_m$ y la dimensión de la matriz de trayectorias global es $L \times (\sum_{m=1}^M N_m)$. Ahora, las componentes principales \mathbf{w}_k están formadas por M porciones consecutivas de longitudes N_1, N_2, \dots, N_M .

La presencia de series temporales de longitudes diferentes es de interés en ciertas ocasiones como es el análisis de las revisiones de las estimaciones de una componente subyacente de una serie temporal desde una perspectiva multivariante al disponer de oleadas sucesivas de publicaciones de dicha serie temporal, Patterson et al. (2011).

5) Longitud de la ventana

Como se vio en el Capítulo 1, el valor óptimo de la longitud de la ventana en SSA es $L \leq T/2$ porque las componentes reconstruidas elementales obtenidas con la matriz de trayectorias $\mathbf{X}_{L \times N}$ son las mismas que utilizando la matriz de trayectorias $\mathbf{X}_{L \times N}^T = \mathbf{X}_{N \times L}$. En M-SSA ocurre algo similar y es conveniente determinar el valor óptimo de la longitud de la ventana L . Hassani y Mahmoudvand (2013) demuestran que en M-SSA el valor óptimo de la longitud de la ventana L , según el rango de la matriz de trayectorias, debe ser $L \leq \frac{T+1}{M+1}$ y $L \leq \frac{M(T+1)}{M+1}$ para las formas vertical y horizontal, respectivamente. Se observa que, para un tamaño fijo T , la longitud de la ventana L decrece más rápido para la forma vertical que horizontal cuando aumenta el número de series M que intervienen. Además, estos autores comprueban de forma empírica que la separabilidad en las versiones clásicas de M-SSA mejora con valores elevados de L . Asimismo, al igual que en SSA, resulta beneficioso para la estimación de las componentes que la longitud de la ventana sea múltiplo de los periodos de las oscilaciones subyacentes.

6) Agrupamiento

Finalmente, sobre el agrupamiento e identificación de la frecuencia asociada a cada autovector o a cada componente reconstruida, se destaca todo lo enumerado en el Capítulo 1. En particular, se resalta que cualquier procedimiento utilizado en la identificación de esa frecuencia en las versiones clásicas de SSA, Basic y Toeplitz, se realiza *ex-post* introduciendo un cierto grado de incertidumbre. No obstante, según se prueba en la siguiente sección, se extiende CSSA al caso multivariante para identificar *ex-ante* las frecuencias asociadas a los autovectores y, por tanto, a las componentes reconstruidas cuando se trabaja con una serie temporal vectorial.

3.2.4 Tabla-resumen de la literatura revisada en M-SSA

Se muestra seguidamente una tabla-resumen, en orden cronológico, con las contribuciones revisadas en la literatura sobre la metodología de M-SSA.

Autor(es)	Año	Contribución
Broomhead y King	1986	Los creadores de SSA multivariante, M-SSA, versión Basic en la forma vertical, como solución a problemas de dinámica de sistemas no lineales. La matriz de covarianzas es simétrica.
Plaut y Vautard	1994	Establecen la versión Toeplitz de M-SSA bajo el supuesto de estacionariedad donde la matriz de covarianzas es simétrica de bloques Toeplitz. Observan que los autovectores son M secuencias de vectores de longitud L permitiendo describir patrones espacio-temporales, es decir, M-SSA es capaz de distinguir, para una frecuencia dada, los patrones espaciales de la señal y de un ruido superpuesto. Definen la fracción de varianza local. Adaptan el promedio diagonal al caso multivariante. Detectan que en M-SSA un par de autovectores en cuadratura no explica el cien por cien de la varianza debida a un armónico.
Allen y Robertson	1996	Generalizan el algoritmo Monte Carlo SSA al caso multivariante, Monte Carlo M-SSA, para detectar la presencia de componentes oscilatorias con baja ratio señal-ruido bajo la hipótesis de ruido de color.
Von Storch y Zwiers	1999	Asumen que el análisis de funciones ortogonales empíricas extendidas, EEOF, es sinónimo de M-SSA aunque EEOF utiliza un número de series M muy superior a la longitud de la ventana L.
Ghil et al.	2002	Revisan las dos versiones de M-SSA, Basic y Toeplitz. Estudian las oscilaciones en un contexto espacio-temporal de un conjunto de series climáticas.
Golyandina y Stepanov	2005	Introducen la forma horizontal en la versión Basic de M-SSA con el fin de reducir el número de autovectores y simplificar el análisis.
Zhigljavsky et al.	2009	Comparan las predicciones del IPI europeo realizadas con M-SSA y modelos ARIMA y VAR. Las obtenidas con M-SSA tienen menor error cuadrático medio. Desarrollan un test de causalidad utilizando M-SSA.
Golyandina y Usevich	2010	Extienden SSA para analizar tablas bidimensionales dando lugar al enfoque denominado 2D-SSA con el fin de procesar imágenes.
Viljoen y Nel	2010	Introducen la técnica de Componentes Principales Comunes dando lugar al Análisis Espectral Singular Común con el fin de mejorar la estimación de los patrones colectivos.

Groth et al.	2011	Resaltan con casos reales que M-SSA puede estimar componentes espectrales comunes junto con los comovimientos de las series. Analizan el PIB de EE.UU. junto con otras ocho variables macroeconómicas correlacionadas para fechar los puntos de giro del ciclo económico.
Groth y Ghil	2011	Introducen la rotación varimax en la estimación de los autovectores de M-SSA para mejorar la separabilidad de las componentes e identificar grupos de osciladores sincronizados. Definen el índice de participación que permite obtener componentes reconstruidas combinadas.
Patterson et al.	2011	Estudian las revisiones de las estimaciones de las componentes en M-SSA con la versión Basic en su forma horizontal.
Golyandina et al.	2013	Desarrollan la extensión Shaped 2D-SSA para poder procesar imágenes de formas arbitrarias.
Hassani y Mahmoudvand	2013	Presentan un nuevo algoritmo de predicción con M-SSA. Además, establecen de forma analítica el valor máximo de la longitud de la ventana tanto en la forma vertical como horizontal de M-SSA.
Hassani et al.	2013a	Realizan predicciones con ocho series del IPI de Reino Unido con SSA, M-SSA, modelos ARIMA y VAR. Concluyen que las obtenidas con M-SSA son más precisas. Desarrollan un contraste para comprobar la causalidad entre dos series con ayuda de las predicciones con M-SSA.
Hassani et al.	2013b	Utilizan M-SSA para predecir la tasa de inflación de EE. UU. y su dirección con el IPC y el deflactor del PIB. Comparan los resultados con los obtenidos con otras técnicas y concluyen que M-SSA obtiene menor error cuadrático medio.
Kume y Nose-Togawa	2014	Presentan un algoritmo de filtrado simétrico en dos pasos para el análisis de series de datos multidimensionales con dimensión arbitraria. Muestran ejemplos de descomposición de imágenes bidimensionales y tridimensionales.
Lee et al.	2014	Utilizan M-SSA con datos biométricos que implican movimientos de varias dimensiones. La componente de la frecuencia más significativa se usa como variable biométrica para distinguir entre varios tipos de movimientos humanos.
Pukenas	2014	Determina la estructura de correlaciones cruzadas de un conjunto de series calculando un índice de sincronización sobre un espectro truncado obtenido con la transformada rápida de Fourier.
Shlemov y Golyandina	2014	Proponen la versión Circular 2D-SSA para analizar los datos obtenidos en la proyección cilíndrica de superficies tridimensionales como los datos genéticos.
Zhang et al.	2014	Construyen un índice compuesto coincidente para la economía de varios países asiáticos mediante M-SSA.

Groth et al.	2015	Aplican M-SSA a un conjunto de nueve indicadores macroeconómicos de EE.UU., entre ellos el PIB, para estudiar cambios en la dinámica del ciclo económico mediante la fracción de varianza local. Revisan el método Monte Carlo M-SSA para extraer oscilaciones significativas no espurias.
Groth y Ghil	2015	Refinan el método Monte Carlo M-SSA introduciendo una transformación ortogonal. Comparan los estimadores de los momentos de segundo orden de las versiones Basic y Toeplitz de M-SSA proponiendo una modificación del estimador de la autocovarianza cruzada en la versión Toeplitz.
Portes y Aguirre	2016	Generalizan la rotación varimax introducida en M-SSA por Groth y Ghil (2011) para establecer una familia completa de criterios de rotación ortomax estructurados y mejorar la separabilidad de las componentes extraídas.
Sella et al.	2016	Aplicación real de M-SSA para estudiar las fluctuaciones macroeconómicas en tres países a través de cinco indicadores analizando el comportamiento individual y común de los países.
Carvalho y Rua	2017	Además del test g de Fisher para asignar frecuencias, también contrastan las revisiones en tiempo real del ciclo del PIB de EE.UU. generadas por SSA con las obtenidas con M-SSA junto al IPI. La revisión multivariante es más fiable que la univariante.
Groth y Ghil	2017	Comparan las formas vertical y horizontal de M-SSA sobre un conjunto de series anuales macroeconómicas. Concluyen que la forma horizontal obtiene mejores resultados porque en la vertical no se recogen, por su contribución, todos los autovectores relativos a un armónico.
Gruszczynska et al.	2017	Demuestran la utilidad de M-SSA en la geolocalización al estimar la señal estacional común de las series de posición vertical del GPS de 24 estaciones.
Launonen y Holström	2017	Incorporan el modelado posterior Bayesiano en M-SSA para analizar la fiabilidad de las componentes oscilatorias extraídas.
Silva et al.	2018	Hallan indicadores adelantados de la producción industrial europea con M-SSA.

3.3 Algoritmo de Multivariate Circulant SSA

3.3.1 Nueva matriz de trayectorias multivariante

Sea una serie temporal vectorial estacionaria M -dimensional $\mathbf{x}_t = (x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(M)})^\top$ de longitud T , donde todas las series son reales de media nula. La nueva matriz de trayectorias multivariante se construye sustituyendo en la matriz de trayectorias univariante los escalares por vectores. Para la longitud de ventana L con $N = T - L + 1$, la dimensión de esta nueva matriz de trayectorias es $LM \times N$ cuya apariencia es:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \cdots & \mathbf{x}_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{x}_L & \mathbf{x}_{L+1} & \cdots & \mathbf{x}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots & x_N^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(M)} & x_2^{(M)} & \cdots & x_N^{(M)} \\ x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & \cdots & x_{N+1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{(M)} & x_3^{(M)} & \cdots & x_{N+1}^{(M)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_L^{(1)} & x_{L+1}^{(1)} & \cdots & x_T^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_L^{(M)} & x_{L+1}^{(M)} & \cdots & x_T^{(M)} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

El vector de columna de esta nueva matriz de trayectorias es

$$\mathbf{y}_t = \left[x_t^{(1)} \quad x_t^{(2)} \quad \cdots \quad x_t^{(M)} \quad x_{t+1}^{(1)} \quad x_{t+1}^{(2)} \quad \cdots \quad x_{t+1}^{(M)} \quad \cdots \quad x_{t+L-1}^{(1)} \quad x_{t+L-1}^{(2)} \quad \cdots \quad x_{t+L-1}^{(M)} \right]^\top$$

y el correspondiente a la forma vertical de M-SSA está dado por

$$\mathbf{z}_t = \left[x_t^{(1)} \quad x_{t+1}^{(1)} \quad \cdots \quad x_{t+L-1}^{(1)} \quad x_t^{(2)} \quad x_{t+1}^{(2)} \quad \cdots \quad x_{t+L-1}^{(2)} \quad \cdots \quad x_t^{(M)} \quad x_{t+1}^{(M)} \quad \cdots \quad x_{t+L-1}^{(M)} \right]^\top.$$

La matriz poblacional de covarianzas cruzadas retardadas del vector \mathbf{y}_t es

$$\Gamma_{\mathbf{y}} = E(\mathbf{y}_t \mathbf{y}_t^\top) = \begin{pmatrix} \Gamma_0 & \Gamma_{-1} & \cdots & \Gamma_{1-L} \\ \Gamma_1 & \Gamma_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \Gamma_{-1} \\ \Gamma_{L-1} & \cdots & \Gamma_1 & \Gamma_0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Los elementos de las matrices Γ_k , $k=0,\pm 1,\dots,\pm(L-1)$, son las covarianzas cruzadas retardadas $[\Gamma_k]_{r,s} = \gamma_k^{(r,s)} = E(x_{t+k}^{(r)} x_t^{(s)}) = \gamma_{-k}^{(s,r)}$ y, por ello, $\Gamma_k = \Gamma_{-k}^\top$. Resulta que Γ_y es una matriz simétrica $L \times L$ Toeplitz por bloques $M \times M$ con dimensión $LM \times LM$. La matriz poblacional de covarianzas cruzadas retardadas correspondiente al vector \mathbf{z}_t es

$$\Gamma_z = E(\mathbf{z}_t \mathbf{z}_t^\top) = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \cdots & \Gamma_{1M} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \cdots & \Gamma_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{M1} & \Gamma_{M2} & \cdots & \Gamma_{MM} \end{pmatrix}.$$

Los elementos de las matrices Γ_{ij} , $i,j=1,\dots,M$, son las covarianzas retardadas $[\Gamma_{ij}]_{r,s} = \gamma_{r-s}^{(i,j)} = E(x_{t+r-s}^{(i)} x_t^{(j)}) = \gamma_{s-r}^{(j,i)}$ con lo cual $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}^\top$ y las matrices Γ_{ij} son Toeplitz. Por ello, se verifica que Γ_z es una matriz simétrica $M \times M$ de bloques Toeplitz $L \times L$ con dimensión $LM \times LM$.

Los vectores \mathbf{y}_t y \mathbf{z}_t están relacionados mediante la transformación $\mathbf{y}_t = \mathbf{P} \mathbf{z}_t$, donde \mathbf{P} es la matriz de permutación, $\mathbf{P} \mathbf{P}^\top = \mathbf{P}^\top \mathbf{P} = \mathbf{I}$, de dimensión $LM \times LM$ dada por

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_M \otimes \mathbf{1}_{L,1}^\top \\ \mathbf{I}_M \otimes \mathbf{1}_{L,2}^\top \\ \vdots \\ \mathbf{I}_M \otimes \mathbf{1}_{L,L}^\top \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

\mathbf{I}_M es la matriz identidad de orden M , $\mathbf{1}_{L,j}$ es un vector columna de longitud L con un 1 en la posición j -ésima y 0 en el resto y \otimes representa el producto de Kronecker. Entonces, la correspondencia entre las matrices de covarianzas cruzadas retardadas, Γ_y y Γ_z , viene dada por

$$\Gamma_y = E(\mathbf{y}_t \mathbf{y}_t^\top) = E(\mathbf{P} \mathbf{z}_t \mathbf{z}_t^\top \mathbf{P}^\top) = \mathbf{P} E(\mathbf{z}_t \mathbf{z}_t^\top) \mathbf{P}^\top = \mathbf{P} \Gamma_z \mathbf{P}^\top,$$

de forma que las matrices Γ_y y Γ_z son semejantes y poseen los mismos autovalores con las mismas multiplicidades.

3.3.2 Propiedades asintóticas de la matriz de covarianzas cruzadas retardadas

Sea una serie temporal vectorial estacionaria M -dimensional $\mathbf{x}_t = (x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(M)})^\top$ iniciada en $t = -\infty$. Se supone que todas las series son complejas² de media nula. Ambas dimensiones de la matriz de trayectorias definida en (3.5) pueden ser tan grandes como se quiera. Por ello, se dispone de la secuencia poblacional de matrices de covarianzas cruzadas retardadas en función de la longitud de la ventana L . Cada matriz de esa secuencia es una matriz Hermitiana $L \times L$ Toeplitz por bloques $M \times M$ con dimensión $LM \times LM$

$$\mathbf{T}_L = [\Gamma_{ij} = \Gamma_{i-j}; i, j = 1, \dots, L], \quad (3.8)$$

donde $\Gamma_k \in \mathbb{C}^{M \times M}$, $k = 0, \pm 1, \dots, \pm(L-1)$, con $\Gamma_k = \Gamma_{-k}^*$. La matriz definida en (3.6) es generalizada por \mathbf{T}_L porque esta puede ser compleja.

La sucesión $\{\Gamma_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ contiene las matrices de covarianzas cruzadas retardadas de la serie temporal vectorial estacionaria \mathbf{x}_t . Dicha secuencia puede ser generada por una función matricial cuadrada³ de variable real $\mathbf{F}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^{M \times M}$. Bajo el supuesto de que la función matricial \mathbf{F} es continua y 2π -periódica, es decir, cada función $[\mathbf{F}(\omega)]_{r,s} = \mathbf{F}_{r,s}(\omega)$ es continua y 2π -periódica para todo $r, s = 1, \dots, M$ donde $\omega \in [0, 1]$ representa la frecuencia en ciclos por unidad de tiempo, se tiene que

$$\Gamma_k = \int_0^1 \mathbf{F}(\omega) \exp(-i2\pi k\omega) d\omega, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, $\{\Gamma_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es la secuencia de coeficientes de Fourier de la función matricial \mathbf{F} , es decir, $\{[\Gamma_k]_{r,s}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es la secuencia de coeficientes de Fourier de $[\mathbf{F}(\omega)]_{r,s}$ para todo $r, s = 1, \dots, M$. La función matricial \mathbf{F} es la función generadora de la sucesión de

² Se establece este supuesto para obtener resultados más generales. No obstante, en economía las series son reales. Bastaría con hacer nula la parte imaginaria para obtener la demostración de todos los resultados de este apartado con series reales.

³ Gutiérrez-Gutiérrez y Crespo (2012) ofrecen resultados más generales cuando la función matricial generadora es rectangular.

matrices Hermitianas Toeplitz por bloques $\{\mathbf{T}_L(\mathbf{F})\}_{L \in \mathbb{N}}$, donde $\mathbf{T}_L(\mathbf{F})$ es la matriz definida en (3.8). En estas condiciones, el teorema de Parseval verifica que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |[\Gamma_k]_{r,s}|^2 = \int_0^1 |[\mathbf{F}(\omega)]_{r,s}|^2 d\omega < \infty, \quad \forall r, s = 1, \dots, M.$$

Recíprocamente, si la secuencia $\{\Gamma_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es cuadráticamente sumable, esto es, si la secuencia $\{[\Gamma_k]_{r,s}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ cumple que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |[\Gamma_k]_{r,s}|^2 < \infty, \quad \forall r, s = 1, \dots, M$, se asegura la existencia y continuidad de la serie de Fourier matricial $\mathbf{F}(\omega)$ definida por

$$\mathbf{F}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Gamma_k \exp(i2\pi k\omega), \quad \omega \in [0, 1], \quad (3.9)$$

de forma que $\mathbf{F}(\omega)$ es 2π -periódica. La función matricial cuadrada $\mathbf{F}(\omega)$ representa la densidad espectral cruzada de la serie temporal vectorial estacionaria \mathbf{x}_t y, por ello, es una matriz Hermitiana.

Cuando la función matricial \mathbf{F} es Hermitiana⁴ las matrices de la secuencia $\{\mathbf{T}_L(\mathbf{F})\}$ son Hermitianas y viceversa. Los autovalores $\lambda_n(\mathbf{T}_L(\mathbf{F}))$ de la matriz $\mathbf{T}_L(\mathbf{F})$, que son reales, están acotados como demuestran Miranda y Tilli (2000), es decir,

$$m_{\mathbf{F}} \leq \lambda_n(\mathbf{T}_L(\mathbf{F})) \leq M_{\mathbf{F}}, \quad 1 \leq n \leq M, \quad (3.10)$$

siendo $m_{\mathbf{F}} = \inf(\mathbf{F}) = \inf_{\substack{1 \leq n \leq M \\ \omega \in [0, 1]}} \{\lambda_n(\mathbf{F}(\omega))\} > -\infty$ y $M_{\mathbf{F}} = \sup(\mathbf{F}) = \sup_{\substack{1 \leq n \leq M \\ \omega \in [0, 1]}} \{\lambda_n(\mathbf{F}(\omega))\} < \infty$,

donde $\lambda_n(\mathbf{A})$ es el n -ésimo autovalor de la matriz \mathbf{A} ordenado en sentido decreciente.

Las matrices circulantes por bloques son un tipo especial de matrices Toeplitz por bloques. Una matriz $L \times L$ circulante por bloques $M \times M$ con dimensión $LM \times LM$ tiene la siguiente apariencia

⁴ En Tilli (1998) se encuentran propiedades de las matrices Toeplitz por bloques no Hermitianas.

$$\mathbf{C}_L = \begin{pmatrix} \mathbf{\Omega}_0 & \mathbf{\Omega}_1 & \mathbf{\Omega}_2 & \cdots & \mathbf{\Omega}_{L-1} \\ \mathbf{\Omega}_{L-1} & \mathbf{\Omega}_0 & \mathbf{\Omega}_1 & \ddots & \vdots \\ \mathbf{\Omega}_{L-2} & \mathbf{\Omega}_{L-1} & \mathbf{\Omega}_0 & \ddots & \mathbf{\Omega}_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{\Omega}_1 \\ \mathbf{\Omega}_1 & \cdots & \mathbf{\Omega}_{L-2} & \mathbf{\Omega}_{L-1} & \mathbf{\Omega}_0 \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{\Omega}_k \in \mathbb{C}^{M \times M}$, $k = 0, 1, \dots, L-1$. Así, cada fila de bloques es un desplazamiento a la derecha de la fila superior y toda matriz circulante por bloques queda definida por su primera fila de bloques. La función matricial cuadrada $\mathbf{F}(\omega)$ de variable real, continua y 2π -periódica, generadora de la secuencia $\{\mathbf{T}_L(\mathbf{F})\}$, permite construir una secuencia de matrices circulantes por bloques $\{\mathbf{C}_L(\mathbf{F})\}_{L \in \mathbb{N}}$ donde los bloques de la primera fila son

$$\mathbf{\Omega}_k = \frac{1}{L} \sum_{j=0}^{L-1} \mathbf{F}\left(\frac{j}{L}\right) \exp(i2\pi jk/L), \quad k = 0, \dots, L-1. \quad (3.11)$$

A partir de la caracterización de las matrices circulantes por bloques tomada de Gutiérrez-Gutiérrez y Crespo (2008), se puede escribir

$$\mathbf{C}_L(\mathbf{F}) = (\mathbf{U}_L \otimes \mathbf{I}_M) \text{diag}\left(\mathbf{F}(0), \mathbf{F}\left(\frac{1}{L}\right), \dots, \mathbf{F}\left(\frac{L-1}{L}\right)\right) (\mathbf{U}_L \otimes \mathbf{I}_M)^* \quad (3.12)$$

o, equivalentemente

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}(0) \\ \mathbf{F}\left(\frac{1}{L}\right) \\ \vdots \\ \mathbf{F}\left(\frac{L-1}{L}\right) \end{pmatrix} = L^{\frac{1}{2}} (\mathbf{U}_L \otimes \mathbf{I}_M)^* \begin{pmatrix} \mathbf{\Omega}_0 \\ \mathbf{\Omega}_{L-1} \\ \vdots \\ \mathbf{\Omega}_1 \end{pmatrix},$$

donde $\text{diag}\left(\mathbf{F}(0), \dots, \mathbf{F}\left(\frac{L-1}{L}\right)\right) = \left[\delta_{j,k} \mathbf{F}\left(\frac{k-1}{L}\right)\right]_{j,k=1}^L$ siendo $\delta_{j,k}$ la delta de Kronecker, \mathbf{I}_M es la matriz identidad de orden M y \mathbf{U}_L es la matriz unitaria de Fourier de orden L

$$\mathbf{U}_L = L^{\frac{1}{2}} \left[\exp(-i2\pi(j-1)(k-1)/L); j, k = 1, \dots, L \right].$$

De este modo, la matriz $\mathbf{C}_L(\mathbf{F})$ se diagonaliza por bloques siendo cada bloque $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}\left(\frac{k-1}{L}\right)$ la densidad espectral cruzada de la serie temporal vectorial estacionaria \mathbf{x}_t en las frecuencias igualmente espaciadas $\frac{k-1}{L}$ para $k = 1, \dots, L$.

La función matricial \mathbf{F} , la función de densidad espectral cruzada, es Hermitiana y las matrices circulantes por bloques que genera, $\mathbf{C}_L(\mathbf{F})$, son Toeplitz, entonces, por los resultados previos, se verifica que $\mathbf{C}_L(\mathbf{F})$ es una matriz Hermitiana y sus autovalores están acotados

$$m_{\mathbf{F}} \leq \lambda_n(\mathbf{C}_L(\mathbf{F})) \leq M_{\mathbf{F}}, \quad 1 \leq n \leq M. \quad (3.13)$$

Gutiérrez-Gutiérrez y Crespo (2008) demuestran que si la función matricial cuadrada⁵ \mathbf{F} es continua, 2π -periódica y Hermitiana, entonces, las secuencias de matrices $\{\mathbf{T}_L(\mathbf{F})\}$ y $\{\mathbf{C}_L(\mathbf{F})\}$ son asintóticamente equivalentes, $\mathbf{T}_L(\mathbf{F}) \sim \mathbf{C}_L(\mathbf{F})$, es decir, los autovalores de las matrices de ambas secuencias están acotados, como se ha visto, y $\lim_{L \rightarrow \infty} L^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{T}_L(\mathbf{F}) - \mathbf{C}_L(\mathbf{F})\|_F = 0$.

Varios autores, entre ellos Gazzah et al. (2001), han extendido el resultado del teorema de Szegő a las matrices Hermitianas Toeplitz por bloques. Ello significa que si la función matricial cuadrada \mathbf{F} es continua, 2π -periódica y Hermitiana, entonces,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{LM} \sum_{n=1}^{LM} g(\lambda_n(\mathbf{T}_L(\mathbf{F}))) = \int_0^1 \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M g(\lambda_n(\mathbf{F}(\omega))) d\omega, \quad (3.14)$$

para toda función g continua en $[m_{\mathbf{F}}, M_{\mathbf{F}}]$. Además, Gutiérrez-Gutiérrez y Crespo (2012) prueban que la ampliación del teorema de Szegő también es cierta si se sustituye la secuencia de matrices Hermitianas Toeplitz por bloques $\{\mathbf{T}_L(\mathbf{F})\}$ por una secuencia de matrices Hermitianas $\{\mathbf{A}_L\}$ tal que $\mathbf{A}_L \sim \mathbf{T}_L(\mathbf{F})$ donde la dimensión de \mathbf{A}_L es $LM \times LM$. Es decir, si la función matricial \mathbf{F} es la considerada hasta ahora, entonces,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{LM} \sum_{n=1}^{LM} g(\lambda_n(\mathbf{A}_L)) = \int_0^1 \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M g(\lambda_n(\mathbf{F}(\omega))) d\omega, \quad (3.15)$$

para toda función g continua en $[a, b]$ con $[m_{\mathbf{F}}, M_{\mathbf{F}}] \subseteq [a, b]$ y $a \leq \lambda_n(\mathbf{A}_L) \leq b$. Las expresiones (3.14) y (3.15) llevan al siguiente corolario como generalización de Gray (2006, Teorema 2.4) a las secuencias de matrices por bloques $\{\mathbf{T}_L(\mathbf{F})\}$ y $\{\mathbf{C}_L(\mathbf{F})\}$.

⁵ Este mismo resultado se alcanza cuando la función matricial \mathbf{F} no es cuadrada ni Hermitiana como demuestran Gutiérrez-Gutiérrez y Crespo (2012).

Corolario 3.1. Sea $\mathbf{F}: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}^{M \times M}$ una función matricial continua, 2π -periódica y Hermitiana. Entonces, las secuencias de autovalores $\{\lambda_n(\mathbf{T}_L(\mathbf{F}))\}$ y $\{\lambda_n(\mathbf{C}_L(\mathbf{F}))\}$ están asintóticamente igualmente distribuidas.

Demostración. Se afirma que dos secuencias de conjuntos de números reales están asintóticamente igualmente distribuidas, en sentido Weyl, si satisfacen dos condiciones. La primera es que dichos conjuntos estén acotados. En esta situación, se verifica tal condición por (3.10) y (3.13). La segunda condición establece que se cumpla la igualdad

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{LM} \sum_{n=1}^{LM} g(\lambda_n(\mathbf{T}_L(\mathbf{F}))) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{LM} \sum_{n=1}^{LM} g(\lambda_n(\mathbf{C}_L(\mathbf{F}))) \quad (3.16)$$

para toda función g continua en $[m_F, M_F]$. Debido a que $\mathbf{T}_L(\mathbf{F}) \sim \mathbf{C}_L(\mathbf{F})$, (3.15) se confirma para $\mathbf{A}_L = \mathbf{C}_L(\mathbf{F})$ y, después, comparando las expresiones (3.14) y (3.15) se llega a la igualdad (3.16). ■

La ecuación (3.11) tiene una limitación en su aplicación para construir la matriz $\mathbf{C}_L(\mathbf{F})$ asintóticamente equivalente a $\mathbf{T}_L(\mathbf{F})$, bien se debe conocer la función matricial \mathbf{F} , bien se requiere disponer de la secuencia infinita $\{\Gamma_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ para obtener \mathbf{F} mediante la ecuación (3.9). Esto puede causar problemas en la práctica porque solo se puede calcular el conjunto finito $\{\Gamma_k\}_{k=1-L}^{L-1}$ y es necesario aproximar la función matricial \mathbf{F} . Cuando dicha función es escalar, se cuenta con las aproximaciones de Gray (2006) y Pearl (1973). A continuación se extienden ambas ideas a la situación más general dada por una función matricial rectangular de variable real $\mathbf{F}: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}^{M \times N}$ que se supone continua y 2π -periódica sin necesidad de ser Hermitiana.

Se comienza extendiendo la propuesta de Gray (2006). Para ello se utiliza la versión truncada de la serie de Fourier matricial definida en (3.9) que da lugar a la aproximación

$$\tilde{\mathbf{F}}_G(\omega) = \sum_{k=1-L}^{L-1} \Gamma_k \exp(i2\pi k\omega), \quad \omega \in [0,1]. \quad (3.17)$$

Sustituyendo \mathbf{F} por $\tilde{\mathbf{F}}_G$ en la ecuación (3.11) es fácil obtener la matriz circulante por bloques $\mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_G)$ donde los bloques de su primera fila están dados por

$$\tilde{\Omega}_k = \sum_{m=1-L}^{L-1} \Gamma_m \delta_{(m+k) \bmod L} = \begin{cases} \Gamma_0 & k=0 \\ \Gamma_{-k} + \Gamma_{L-k} & k=1, \dots, L-1 \end{cases} \quad (3.18)$$

El siguiente teorema prueba que las secuencias $\{\mathbf{T}_L(\mathbf{F})\}$ y $\{\mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_G)\}$ son asintóticamente equivalentes.

Teorema 3.2. Sea $\mathbf{F}: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}^{M \times N}$ una función matricial continua y 2π -periódica y sea $\tilde{\mathbf{F}}_G$ la función matricial definida en (3.17) con los coeficientes de Fourier de la función matricial \mathbf{F} , entonces, $\mathbf{T}_L(\mathbf{F}) \sim \mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_G)$.

Demostración. $\tilde{\mathbf{F}}_G$ es una función matricial continua y $\mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_G)$ también es una matriz Toeplitz por bloques. Por tanto, aplicando el resultado de Tilli (1998, Teorema 4.1) se verifica que $\sigma_1(\mathbf{T}_L(\mathbf{F})) \leq \sigma_1(\mathbf{F}) < \infty$ y $\sigma_1(\mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_G)) \leq \sigma_1(\tilde{\mathbf{F}}_G) < \infty \quad \forall L \in \mathbb{N}$ donde $\sigma_1(\mathbf{F}) = \sup_{\omega \in [0,1]} (\sigma_1(\mathbf{F}(\omega)))$ siendo $\sigma_1(\mathbf{A})$ el mayor valor singular de la matriz \mathbf{A} .

Además, se debe probar que $\lim_{L \rightarrow \infty} L^{\frac{-1}{2}} \left\| \mathbf{T}_L(\mathbf{F}) - \mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_G) \right\|_F = 0$. A partir de (3.8) y (3.18) resulta que

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{T}_L(\mathbf{F}) - \mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_G) \right\|_F^2 &= \sum_{k=1-L}^{L-1} |k| \|\Gamma_k\|_F^2 = \sum_{k=1-L}^{L-1} |k| \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^N \left| [\Gamma_k]_{r,s} \right|^2 \\ &= \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^N \sum_{k=1}^{L-1} k \left(\left| [\Gamma_k]_{r,s} \right|^2 + \left| [\Gamma_{-k}]_{r,s} \right|^2 \right). \end{aligned}$$

El teorema de Parseval garantiza la sumabilidad cuadrática de $\left\{ [\Gamma_k]_{r,s} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ para todo $1 \leq r \leq M$ y $1 \leq s \leq N$. Por ello, dado $\varepsilon > 0$, se puede elegir un $P > 0$ suficientemente grande tal que $\sum_{k=P}^{\infty} \left(\left| [\Gamma_k]_{r,s} \right|^2 + \left| [\Gamma_{-k}]_{r,s} \right|^2 \right) \leq \varepsilon$. De este modo,

$$\begin{aligned} &\lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{L-1} \frac{k}{L} \left(\left| [\Gamma_k]_{r,s} \right|^2 + \left| [\Gamma_{-k}]_{r,s} \right|^2 \right) \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^{P-1} \frac{k}{L} \left(\left| [\Gamma_k]_{r,s} \right|^2 + \left| [\Gamma_{-k}]_{r,s} \right|^2 \right) + \sum_{k=P}^{L-1} \frac{k}{L} \left(\left| [\Gamma_k]_{r,s} \right|^2 + \left| [\Gamma_{-k}]_{r,s} \right|^2 \right) \right\} \\ &\leq \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{P-1} \frac{k}{L} \left(\left| [\Gamma_k]_{r,s} \right|^2 + \left| [\Gamma_{-k}]_{r,s} \right|^2 \right) + \sum_{k=P}^{\infty} \left(\left| [\Gamma_k]_{r,s} \right|^2 + \left| [\Gamma_{-k}]_{r,s} \right|^2 \right) \leq 0 + \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por todo ello,

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \left\| \mathbf{T}_L(\mathbf{F}) - \mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_G) \right\|_F^2 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^N \sum_{k=1}^{L-1} \frac{k}{L} \left(\left| [\Gamma_k]_{r,s} \right|^2 + \left| [\Gamma_{-k}]_{r,s} \right|^2 \right) \\ &= \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^N \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{L-1} \frac{k}{L} \left(\left| [\Gamma_k]_{r,s} \right|^2 + \left| [\Gamma_{-k}]_{r,s} \right|^2 \right) \\ &\leq MN\epsilon. \end{aligned}$$

Como ϵ es arbitrario,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} L^{\frac{1}{2}} \left\| \mathbf{T}_L(\mathbf{F}) - \mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_G) \right\|_F = 0$$

y, por tanto, $\mathbf{T}_L(\mathbf{F}) \sim \mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_G)$ como se quería demostrar. ■

Este teorema pone de manifiesto, además, que es posible sustituir la absoluta sumabilidad de los coeficientes de Fourier que exige Gray (2006) por la sumabilidad cuadrática, es decir, queda justificada la relajación de función de clase Wiener por función continua que se ha efectuado siguiendo a Gutiérrez-Gutiérrez y Crespo (2012).

Seguidamente se extiende la idea de Pearl (1973). Con este fin se comienza calculando una matriz diagonal por bloques $\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_L)$ donde $\mathbf{D}_k \in \mathbb{C}^{M \times N}$ es el bloque diagonal k -ésimo de $(\mathbf{U}_L \otimes \mathbf{I}_M)^* \mathbf{T}_L(\mathbf{F})(\mathbf{U}_L \otimes \mathbf{I}_N)$, es decir,

$$\mathbf{D}_k = \frac{1}{L} \sum_{m=1}^L \sum_{l=1}^L \Gamma_{l-m} \exp(i2\pi(l-m)(k-1)/L), \quad k=1, \dots, L, \quad (3.19)$$

siendo $\{\Gamma_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ la secuencia de coeficientes de Fourier de la función matricial \mathbf{F} . A partir de la caracterización de las matrices circulantes por bloques dada en (3.12) se construye una secuencia de ellas con término general

$$\mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_P) = (\mathbf{U}_L \otimes \mathbf{I}_M) \text{diag}(\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_L) (\mathbf{U}_L \otimes \mathbf{I}_N)^*,$$

donde, desarrollando los productos matriciales, los bloques de su primera fila están dados por la expresión

$$\tilde{\mathbf{\Omega}}_k = \frac{k}{L} \Gamma_{L-k} + \frac{L-k}{L} \Gamma_{-k}, \quad k=0, \dots, L-1. \quad (3.20)$$

La función matricial $\tilde{\mathbf{F}}_p$, generadora de la secuencia de matrices circulantes por bloques $\{\mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_p)\}$, se obtiene a partir de (3.19) como

$$\tilde{\mathbf{F}}_p(\omega) = \frac{1}{L} \sum_{m=1}^L \sum_{l=1}^L \Gamma_{l-m} \exp(i2\pi(l-m)\omega), \quad \omega \in [0,1], \quad (3.21)$$

siendo una aproximación de la función matricial \mathbf{F} .

El siguiente teorema muestra que las secuencias $\{\mathbf{T}_L(\mathbf{F})\}$ y $\{\mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_p)\}$ son asintóticamente equivalentes.

Teorema 3.3. Sea $\mathbf{F}: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}^{M \times N}$ una función matricial continua y 2π -periódica y sea $\tilde{\mathbf{F}}_p$ la función matricial definida en (3.21) con los coeficientes de Fourier de la función matricial \mathbf{F} , entonces, $\mathbf{T}_L(\mathbf{F}) \sim \mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_p)$.

Demostración. $\tilde{\mathbf{F}}_p$ es una función matricial continua y $\mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_p)$ también es una matriz Toeplitz por bloques. Por ello, aplicando de nuevo el resultado de Tilli (1998) se verifica que $\sigma_1(\mathbf{T}_L(\mathbf{F})) \leq \sigma_1(\mathbf{F}) < \infty$ y $\sigma_1(\mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_p)) \leq \sigma_1(\tilde{\mathbf{F}}_p) < \infty \quad \forall L \in \mathbb{N}$.

También se debe probar que $\lim_{L \rightarrow \infty} L^{\frac{-1}{2}} \|\mathbf{T}_L(\mathbf{F}) - \mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_p)\|_F = 0$. A partir de (3.8) y (3.20) resulta que

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \|\mathbf{T}_L(\mathbf{F}) - \mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_p)\|_F^2 &= \sum_{k=1}^{L-1} \frac{(L-k)k^2}{L^3} \left(\|\Gamma_k - \Gamma_{-L+k}\|_F^2 + \|\Gamma_{-k} - \Gamma_{L-k}\|_F^2 \right) \\ &= \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^N \sum_{k=1}^{L-1} \frac{(L-k)k^2}{L^3} \left(\left| [\Gamma_k]_{r,s} - [\Gamma_{-L+k}]_{r,s} \right|^2 + \left| [\Gamma_{-k}]_{r,s} - [\Gamma_{L-k}]_{r,s} \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Como $[\Gamma_k]_{r,s} \in \mathbb{C}$, se escribe $[\Gamma_k]_{r,s} = a_{k,r,s} + i \cdot b_{k,r,s}$ donde $a_{k,r,s}, b_{k,r,s} \in \mathbb{R}$. Por ello,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{L-1} \left| [\Gamma_k]_{r,s} - [\Gamma_{-L+k}]_{r,s} \right|^2 &= \sum_{k=1}^{L-1} (a_{k,r,s} - a_{-L+k,r,s})^2 + \sum_{k=1}^{L-1} (b_{k,r,s} - b_{-L+k,r,s})^2 \\ &= \sum_{k=1}^{L-1} a_{k,r,s}^2 + \sum_{k=1}^{L-1} a_{-L+k,r,s}^2 - 2 \sum_{k=1}^{L-1} a_{k,r,s} a_{-L+k,r,s} + \sum_{k=1}^{L-1} b_{k,r,s}^2 + \sum_{k=1}^{L-1} b_{-L+k,r,s}^2 - 2 \sum_{k=1}^{L-1} b_{k,r,s} b_{-L+k,r,s} \\ &= \sum_{k=1}^{L-1} \left| [\Gamma_k]_{r,s} \right|^2 + \sum_{k=1}^{L-1} \left| [\Gamma_{-L+k}]_{r,s} \right|^2 - 2 \sum_{k=1}^{L-1} a_{k,r,s} a_{-L+k,r,s} - 2 \sum_{k=1}^{L-1} b_{k,r,s} b_{-L+k,r,s} . \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $2|xy| \leq x^2 + y^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$, se llega a

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{L-1} \left| [\Gamma_k]_{r,s} - [\Gamma_{-L+k}]_{r,s} \right|^2 \\ & \leq \sum_{k=1}^{L-1} \left| [\Gamma_k]_{r,s} \right|^2 + \sum_{k=1}^{L-1} \left| [\Gamma_{-L+k}]_{r,s} \right|^2 + \sum_{k=1}^{L-1} (a_{k,r,s}^2 + a_{-L+k,r,s}^2) + \sum_{k=1}^{L-1} (b_{k,r,s}^2 + b_{-L+k,r,s}^2) \\ & = 2 \left(\sum_{k=1}^{L-1} \left| [\Gamma_k]_{r,s} \right|^2 + \sum_{k=1}^{L-1} \left| [\Gamma_{-L+k}]_{r,s} \right|^2 \right). \end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\sum_{k=1}^{L-1} \left| [\Gamma_{-k}]_{r,s} - [\Gamma_{L-k}]_{r,s} \right|^2 \leq 2 \left(\sum_{k=1}^{L-1} \left| [\Gamma_{-k}]_{r,s} \right|^2 + \sum_{k=1}^{L-1} \left| [\Gamma_{L-k}]_{r,s} \right|^2 \right).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{L-1} \left(\left| [\Gamma_k]_{r,s} - [\Gamma_{-L+k}]_{r,s} \right|^2 + \left| [\Gamma_{-k}]_{r,s} - [\Gamma_{L-k}]_{r,s} \right|^2 \right) \\ & \leq 2 \left(\sum_{k=1}^{L-1} \left| [\Gamma_k]_{r,s} \right|^2 + \sum_{k=1}^{L-1} \left| [\Gamma_{-L+k}]_{r,s} \right|^2 + \sum_{k=1}^{L-1} \left| [\Gamma_{-k}]_{r,s} \right|^2 + \sum_{k=1}^{L-1} \left| [\Gamma_{L-k}]_{r,s} \right|^2 \right) \\ & = 4 \left(\sum_{k=-L+1}^{L-1} \left| [\Gamma_k]_{r,s} \right|^2 - \left| [\Gamma_0]_{r,s} \right|^2 \right) \leq 4 \sum_{k=-L+1}^{L-1} \left| [\Gamma_k]_{r,s} \right|^2 \end{aligned}$$

y, consecuentemente,

$$\sum_{k=1}^{L-1} \frac{(L-k)k^2}{L^3} \left(\left| [\Gamma_k]_{r,s} - [\Gamma_{-L+k}]_{r,s} \right|^2 + \left| [\Gamma_{-k}]_{r,s} - [\Gamma_{L-k}]_{r,s} \right|^2 \right) \leq 4 \sum_{k=-L+1}^{L-1} \frac{(L-|k|)k^2}{L^3} \left| [\Gamma_k]_{r,s} \right|^2.$$

El teorema de Parseval garantiza la sumabilidad cuadrática de $\{[\Gamma_k]_{r,s}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ para todo

$1 \leq r \leq M$ y $1 \leq s \leq N$. Así, dado $\varepsilon > 0$, se puede elegir un $P > 0$ suficientemente

grande tal que $\sum_{k=P}^{\infty} \left(\left| [\Gamma_k]_{r,s} \right|^2 + \left| [\Gamma_{-k}]_{r,s} \right|^2 \right) \leq \varepsilon$. Entonces,

$$\begin{aligned} & \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{L-1} \frac{(L-k)k^2}{L^3} \left(\left| [\Gamma_k]_{r,s} - [\Gamma_{-L+k}]_{r,s} \right|^2 + \left| [\Gamma_{-k}]_{r,s} - [\Gamma_{L-k}]_{r,s} \right|^2 \right) \leq 4 \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{k=-L+1}^{L-1} \frac{(L-|k|)k^2}{L^3} \left| [\Gamma_k]_{r,s} \right|^2 \\ & = 4 \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=-P+1}^{P-1} \frac{(L-|k|)k^2}{L^3} \left| [\Gamma_k]_{r,s} \right|^2 + \sum_{k=P}^{L-1} \frac{(L-k)k^2}{L^3} \left(\left| [\Gamma_k]_{r,s} \right|^2 + \left| [\Gamma_{-k}]_{r,s} \right|^2 \right) \right\} \\ & \leq 4 \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{k=-P+1}^{P-1} \frac{(L-|k|)k^2}{L^3} \left| [\Gamma_k]_{r,s} \right|^2 + 4 \sum_{k=P}^{\infty} \left(\left| [\Gamma_k]_{r,s} \right|^2 + \left| [\Gamma_{-k}]_{r,s} \right|^2 \right) \leq 0 + 4\varepsilon = 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Por todo ello,

$$\begin{aligned}
 & \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \left\| \mathbf{T}_L(\mathbf{F}) - \mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_P) \right\|_F^2 \\
 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^N \sum_{k=1}^{L-1} \frac{(L-k)^2}{L^3} \left(\left| [\Gamma_k]_{r,s} - [\Gamma_{-L+k}]_{r,s} \right|^2 + \left| [\Gamma_{-k}]_{r,s} - [\Gamma_{L-k}]_{r,s} \right|^2 \right) \\
 &= \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^N \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{L-1} \frac{(L-k)^2}{L^3} \left(\left| [\Gamma_k]_{r,s} - [\Gamma_{-L+k}]_{r,s} \right|^2 + \left| [\Gamma_{-k}]_{r,s} - [\Gamma_{L-k}]_{r,s} \right|^2 \right) \\
 &\leq 4MN\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Como ε es arbitrario,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} L^{\frac{1}{2}} \left\| \mathbf{T}_L(\mathbf{F}) - \mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_P) \right\|_F = 0$$

y, por tanto, $\mathbf{T}_L(\mathbf{F}) \sim \mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_P)$ como se quería demostrar. \blacksquare

Este teorema extiende la propuesta de Pearl (1973) a la situación general para $M, N > 1$ y generaliza para el caso de matrices no Hermitianas cuando dicha aproximación exigía matrices Hermitianas con $M = N = 1$.

En el siguiente teorema se demuestra que las secuencias $\{\mathbf{C}_L(\mathbf{F})\}$, $\{\mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_G)\}$ y $\{\mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_P)\}$ son asintóticamente equivalentes con la repercusión práctica que significa.

Teorema 3.4. Sea $\mathbf{F}: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}^{M \times N}$ una función matricial continua y 2π -periódica y sean $\tilde{\mathbf{F}}_G$ y $\tilde{\mathbf{F}}_P$ las funciones matriciales definidas en (3.17) y (3.21), respectivamente, con los coeficientes de Fourier de la función matricial \mathbf{F} , entonces,

$$\mathbf{C}_L(\mathbf{F}) \sim \mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_G) \sim \mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_P).$$

Demostración. Bajo estas condiciones, Gutiérrez-Gutiérrez y Crespo (2012) prueban que $\mathbf{T}_L(\mathbf{F}) \sim \mathbf{C}_L(\mathbf{F})$ y $\mathbf{T}_L(\mathbf{F}) \sim \mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_G)$ por el Teorema 3.2. Por tanto, la propiedad transitiva de la equivalencia asintótica lleva a que $\mathbf{C}_L(\mathbf{F}) \sim \mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_G)$. Sustituyendo en el razonamiento anterior el Teorema 3.2 por el Teorema 3.3 se obtiene que $\mathbf{C}_L(\mathbf{F}) \sim \mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_P)$. Finalmente, los dos resultados anteriores con la propiedad transitiva conducen a que $\mathbf{C}_L(\mathbf{F}) \sim \mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_G) \sim \mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_P)$. \blacksquare

A partir de la caracterización de las matrices circulantes por bloques, las secuencias $\{\mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_G)\}$ y $\{\mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_P)\}$ se pueden diagonalizar por bloques dados por

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_1 \\ \tilde{\mathbf{F}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{F}}_L \end{pmatrix} = L^{\frac{1}{L}} (\mathbf{U}_L \otimes \mathbf{I}_M)^* \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{\Omega}}_0 \\ \tilde{\mathbf{\Omega}}_{L-1} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{\Omega}}_1 \end{pmatrix},$$

donde $\tilde{\mathbf{F}}_k = \tilde{\mathbf{F}}\left(\frac{k-1}{L}\right)$ siendo $\tilde{\mathbf{F}}$ cualquiera de las dos aproximaciones estudiadas. Si la sucesión de coeficientes de Fourier $\{\mathbf{\Gamma}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ se corresponde con las matrices de covarianzas cruzadas retardadas de la serie temporal vectorial estacionaria \mathbf{x}_t , entonces, $\tilde{\mathbf{F}}_k$ es una aproximación a su función matricial de densidad espectral cruzada \mathbf{F} en la frecuencia $\omega_k = \frac{k-1}{L}$, $k = 1, \dots, L$. En este contexto, la función matricial cuadrada $\mathbf{F}: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}^{M \times M}$ además de continua y 2π -periódica es Hermitiana y se prueba la igualdad asintótica de la distribución de los autovalores de las aproximaciones de \mathbf{F} .

Teorema 3.5. *Sea $\mathbf{F}: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}^{M \times M}$ una función matricial continua, 2π -periódica y Hermitiana y sean $\tilde{\mathbf{F}}_G$ y $\tilde{\mathbf{F}}_P$ las funciones matriciales definidas según (3.17) y (3.21), respectivamente, con los coeficientes de Fourier de la función matricial \mathbf{F} . Entonces, las secuencias de autovalores $\{\lambda_n(\mathbf{T}_L(\mathbf{F}))\}$, $\{\lambda_n(\mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_G))\}$ y $\{\lambda_n(\mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_P))\}$ están asintóticamente igualmente distribuidas.*

Demostración. La sucesión $\{\lambda_n(\mathbf{T}_L(\mathbf{F}))\}$ está acotada debido a (3.10). Las funciones $\tilde{\mathbf{F}}_G$ y $\tilde{\mathbf{F}}_P$ son continuas, 2π -periódicas y Hermitianas con lo cual las secuencias $\{\lambda_n(\mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_G))\}$ y $\{\lambda_n(\mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_P))\}$ están acotadas gracias a (3.13).

El resultado del Teorema 3.2, $\mathbf{T}_L(\mathbf{F}) \sim \mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_G)$, garantiza (3.15) para $\mathbf{A}_L = \mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_G)$ y comparando con (3.14) se obtiene que

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{LM} \sum_{n=1}^{LM} g(\lambda_n(\mathbf{T}_L(\mathbf{F}))) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{LM} \sum_{n=1}^{LM} g(\lambda_n(\mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_G))).$$

Con similar razonamiento, para el Teorema 3.3 se consigue la igualdad

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{LM} \sum_{n=1}^{LM} g(\lambda_n(\mathbf{T}_L(\mathbf{F}))) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{LM} \sum_{n=1}^{LM} g(\lambda_n(\mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_P))).$$

Finalmente, examinando las dos igualdades anteriores se tiene que

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{LM} \sum_{n=1}^{LM} g(\lambda_n(\mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_G))) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{LM} \sum_{n=1}^{LM} g(\lambda_n(\mathbf{C}_L(\tilde{\mathbf{F}}_P))).$$

En consecuencia, queda demostrada la igualdad asintótica, en sentido Weyl, de las distribuciones de las secuencias de los autovalores. ■

3.3.3 Diagonalización de las matrices circulantes por bloques

Sea $\mathbf{F}: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}^{M \times M}$ la función matricial continua, 2π -periódica y Hermitiana que corresponde a la función de densidad espectral cruzada de la serie temporal vectorial estacionaria M -dimensional $\mathbf{x}_t = (x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(M)})^\top$. Las matrices circulantes por bloques de la secuencia $\{\mathbf{C}_L(\mathbf{F})\}$ generada por la función \mathbf{F} quedan caracterizadas por (3.12) como una diagonalización por bloques, $\mathbf{C}_L(\mathbf{F}) = (\mathbf{U}_L \otimes \mathbf{I}_M) \text{diag}(\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_L) (\mathbf{U}_L \otimes \mathbf{I}_M)^*$. Ahora bien, cada bloque $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}(\frac{k-1}{L})$, $k = 1, \dots, L$, que representa la matriz de densidad espectral cruzada de la serie vectorial \mathbf{x}_t en la frecuencia $\omega_k = \frac{k-1}{L}$, se puede diagonalizar unitariamente por ser una matriz Hermitiana. De este modo se tiene que $\mathbf{F}_k = \mathbf{E}_k \mathbf{D}_k \mathbf{E}_k^*$ con $\mathbf{E}_k \in \mathbb{C}^{M \times M}$ y $\mathbf{E}_k \mathbf{E}_k^* = \mathbf{E}_k^* \mathbf{E}_k = \mathbf{I}_M$. La matriz $\mathbf{E}_k = [\mathbf{e}_{k,1} | \dots | \mathbf{e}_{k,M}]$ contiene los autovectores de \mathbf{F}_k y $\mathbf{D}_k = \text{diag}(\lambda_{k,1}, \dots, \lambda_{k,M})$ es la matriz diagonal con los autovalores asociados de \mathbf{F}_k ordenados en sentido decreciente $\lambda_{k,1} \geq \dots \geq \lambda_{k,M} \geq 0$. Por tanto, existen M autovectores adjuntos al armónico de frecuencia $\omega_k = \frac{k-1}{L}$. Si se escribe $\mathbf{E} = \text{diag}(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_L)$ y $\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_L)$, entonces, (3.12) se expresa como

$$\mathbf{C}_L(\mathbf{F}) = (\mathbf{U}_L \otimes \mathbf{I}_M) \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{E}^* (\mathbf{U}_L \otimes \mathbf{I}_M)^*. \quad (3.22)$$

En consecuencia, la diagonalización unitaria de la matriz Hermitiana $\mathbf{C}_L(\mathbf{F})$ viene dada por $\mathbf{C}_L(\mathbf{F}) = \mathbf{V} \mathbf{D} \mathbf{V}^*$ siendo

$$\mathbf{V} = (\mathbf{U}_L \otimes \mathbf{I}_M) \mathbf{E} \in \mathbb{C}^{LM \times LM} . \quad (3.23)$$

El autovector j -ésimo de la diagonalización unitaria de la matriz $\mathbf{C}_L(\mathbf{F})$ es

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{(k-1)M+m} = \mathbf{v}_{k,m} = \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{e}_{k,m}$$

con $j = 1, \dots, LM$ para $k = 1, \dots, L$ y $m = 1, \dots, M$ donde \mathbf{u}_k es la columna k -ésima de la matriz unitaria de Fourier \mathbf{U}_L de orden L y $\mathbf{e}_{k,m}$ es el autovector m -ésimo de la matriz de densidad espectral cruzada \mathbf{F}_k . Entonces, para un k dado se verifica que

$$\mathbf{v}_{k,m}^* \mathbf{v}_{k,d} = (\mathbf{u}_k \otimes \mathbf{e}_{k,m})^* (\mathbf{u}_k \otimes \mathbf{e}_{k,d}) = (\mathbf{u}_k^* \mathbf{u}_k) \otimes (\mathbf{e}_{k,m}^* \mathbf{e}_{k,d}) = \begin{cases} 1 & m = d \\ 0 & m \neq d \end{cases}$$

y para un m dado que

$$\mathbf{v}_{k,m}^* \mathbf{v}_{l,m} = (\mathbf{u}_k \otimes \mathbf{e}_{k,m})^* (\mathbf{u}_l \otimes \mathbf{e}_{l,m}) = (\mathbf{u}_k^* \mathbf{u}_l) \otimes (\mathbf{e}_{k,m}^* \mathbf{e}_{l,m}) = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} .$$

En definitiva, se obtiene que $\mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_j = 1$ cuando $i = j$ y $\mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_j = 0$ en caso contrario como era de esperar porque la matriz \mathbf{V} definida en (3.23) es unitaria.

La función matricial \mathbf{F} con la densidad espectral cruzada es simétrica respecto de la frecuencia $\frac{1}{2}$ según se deduce de la expresión (3.9), es decir, $\mathbf{F}(\omega) = \mathbf{F}^T(1-\omega)$ con $0 \leq \omega < \frac{1}{2}$. Esto significa que $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_{L+2-k}^T$ para $k = 2, \dots, \lfloor \frac{L+1}{2} \rfloor$. Por ello, se verifica que sus respectivos autovectores son conjugados, $\mathbf{E}_k = \overline{\mathbf{E}}_{L+2-k}$ y que sus autovalores asociados son iguales $\mathbf{D}_k = \mathbf{D}_{L+2-k}$.

A partir de estas condiciones, la siguiente proposición establece la forma de construir una base ortonormal que diagonaliza ortogonalmente la matriz $\mathbf{C}_L(\mathbf{F})$.

Proposición 3.6. Sea $\mathbf{C}_L(\mathbf{F})$ la matriz circulante por bloques caracterizada por (3.12) y sea \mathbf{V} la matriz unitaria obtenida según (3.23) que diagonaliza unitariamente a $\mathbf{C}_L(\mathbf{F})$. El conjunto de vectores $\{\tilde{\mathbf{v}}_{k,m}\}_{k,m=1}^{L,M}$ definido para todo $m = 1, \dots, M$ por

$$\tilde{\mathbf{v}}_{k,m} = \begin{cases} \mathbf{v}_{k,m} & k=1 \text{ y } \frac{L}{2}+1 \text{ si } L \text{ par} \\ \sqrt{2}\mathcal{R}_{\mathbf{v}_{k,m}} & k=2, \dots, \lfloor \frac{L+1}{2} \rfloor \\ \sqrt{2}\mathcal{I}_{\mathbf{v}_{L+2-k,m}} & k=\lfloor \frac{L+1}{2} \rfloor+1, \dots, L \end{cases}$$

es una base ortonormal de \mathbb{R}^{LM} que diagonaliza ortogonalmente la matriz $\mathbf{C}_L(\mathbf{F})$, $\mathbf{C}_L(\mathbf{F}) = \tilde{\mathbf{V}}\mathbf{D}\tilde{\mathbf{V}}^\top$, donde $\tilde{\mathbf{V}} = [\tilde{\mathbf{v}}_1 | \dots | \tilde{\mathbf{v}}_{LM}]$ siendo $\tilde{\mathbf{v}}_j = \tilde{\mathbf{v}}_{k,m}$ con $j = (k-1)M + m$ para $k=1, \dots, L$ y $m=1, \dots, M$.

Demostración. Las soluciones de la ecuación $z^n = 1$, de incógnita z , sobre el círculo unidad suman cero y \mathbf{V} es una matriz unitaria. Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\mathcal{R}_{\mathbf{v}_i}^\top \sqrt{2}\mathcal{R}_{\mathbf{v}_j} &= \frac{1}{2}(\mathbf{v}_i + \bar{\mathbf{v}}_i)^\top (\mathbf{v}_j + \bar{\mathbf{v}}_j) = \frac{1}{2} \left[\mathbf{v}_i^\top \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_j + \overline{(\mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_j)} + \overline{(\mathbf{v}_i^\top \mathbf{v}_j)} \right] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}(0+0+0+0) = 0 & i \neq j \\ \frac{1}{2}(0+1+1+0) = 1 & i = j \end{cases}, \end{aligned}$$

que

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\mathcal{I}_{\mathbf{v}_i}^\top \sqrt{2}\mathcal{I}_{\mathbf{v}_j} &= \frac{-1}{2}(\mathbf{v}_i - \bar{\mathbf{v}}_i)^\top (\mathbf{v}_j - \bar{\mathbf{v}}_j) = \frac{-1}{2} \left[\mathbf{v}_i^\top \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_j - \overline{(\mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_j)} + \overline{(\mathbf{v}_i^\top \mathbf{v}_j)} \right] \\ &= \begin{cases} \frac{-1}{2}(0-0-0+0) = 0 & i \neq j \\ \frac{-1}{2}(0-1-1+0) = 1 & i = j \end{cases} \end{aligned}$$

y también que

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\mathcal{R}_{\mathbf{v}_i}^\top \sqrt{2}\mathcal{I}_{\mathbf{v}_j} &= \frac{-i}{2}(\mathbf{v}_i + \bar{\mathbf{v}}_i)^\top (\mathbf{v}_j - \bar{\mathbf{v}}_j) = \frac{-i}{2} \left[\mathbf{v}_i^\top \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_j + \overline{(\mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_j)} - \overline{(\mathbf{v}_i^\top \mathbf{v}_j)} \right] \\ &= \begin{cases} \frac{-i}{2}(0-0+0-0) = 0 & i \neq j \\ \frac{-i}{2}(0-1+1-0) = 0 & i = j \end{cases}. \end{aligned}$$

Además, puesto que para el par autovalor–autovector $(\lambda_{k,m}, \mathbf{v}_{k,m})$ se verifica que $\mathbf{C}_L(\mathbf{F})\mathcal{R}_{\mathbf{v}_{k,m}} + i\mathbf{C}_L(\mathbf{F})\mathcal{I}_{\mathbf{v}_{k,m}} = \lambda_{k,m}\mathcal{R}_{\mathbf{v}_{k,m}} + i\lambda_{k,m}\mathcal{I}_{\mathbf{v}_{k,m}}$, es decir, $\mathbf{C}_L(\mathbf{F})\mathcal{R}_{\mathbf{v}_{k,m}} = \lambda_{k,m}\mathcal{R}_{\mathbf{v}_{k,m}}$ y $\mathbf{C}_L(\mathbf{F})\mathcal{I}_{\mathbf{v}_{k,m}} = \lambda_{L+2-k,m}\mathcal{I}_{\mathbf{v}_{k,m}}$ porque $\lambda_k = \lambda_{L+2-k}$, queda demostrada la proposición. ■

El proceso general de diagonalización unitaria y ortogonal descrito para las matrices circulantes por bloques es el mismo sean dichas matrices generadas por una función \mathbf{F} o por cualquiera de las aproximaciones descritas en el apartado anterior.

3.3.4 Descripción del algoritmo Multivariate Circulant SSA

El diseño de una nueva matriz de trayectorias multivariante, la extensión de ciertas propiedades asintóticas a las matrices Toeplitz y circulantes por bloques y la diagonalización ortogonal de estas últimas permite ampliar el uso de *Circulant SSA* a series temporales vectoriales.

Sea una serie temporal vectorial estacionaria M -dimensional $\mathbf{x}_t = (x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(M)})^T$ de longitud T con todas las series reales y, por simplicidad, de media nula y sea L un entero tal que $1 < L < T/2$ denominado longitud de la ventana con $N = T - L + 1$. *Multivariate Circulant SSA* es una técnica no paramétrica de extracción de componentes oscilatorias en series temporales vectoriales cuyo algoritmo, al igual que para las versiones clásicas Basic y Toeplitz, consta de cuatro pasos que se describen a continuación.

Paso 1: Matriz de trayectorias.

Se comienza construyendo la matriz de trayectorias de la serie vectorial \mathbf{x}_t a partir de N vectores $L \times 1$ retardados de bloques $M \times 1$ con dimensión $LM \times 1$,

$$\mathbf{y}_j = (\mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_{j+L-1})^T = (x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(M)}, \dots, x_{j+L-1}^{(1)}, \dots, x_{j+L-1}^{(M)})^T, \quad j = 1, \dots, N.$$

La matriz de trayectorias tiene la apariencia dada en la expresión (3.5)

$$\mathbf{X} = [\mathbf{y}_1 | \dots | \mathbf{y}_N] = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \dots & \mathbf{x}_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}_L & \mathbf{x}_{L+1} & \dots & \mathbf{x}_T \end{pmatrix}.$$

Se observa que la matriz de trayectorias \mathbf{X} es una matriz $L \times N$ Hankel por bloques $M \times 1$ de dimensión $LM \times N$.

Paso 2: Descomposición.

A continuación, se efectúa la descomposición espectral de la matriz de trayectorias \mathbf{X} mediante la diagonalización ortogonal de una matriz circulante por bloques. Esta matriz circulante por bloques, \mathbf{S}_C , será asintóticamente equivalente a la estimación de la matriz Toeplitz por bloques, \mathbf{S}_T , con las matrices de covarianzas cruzadas

retardadas, es decir, $\mathbf{S}_C \sim \mathbf{S}_T$ donde $\mathbf{S}_T = \hat{\Gamma}$ siendo $\Gamma = E(\mathbf{y}_j \mathbf{y}_j^T)$. La matriz \mathbf{S}_T es la estimación de la matriz definida en (3.6) como

$$\mathbf{S}_T = \begin{pmatrix} \hat{\Gamma}_0 & \hat{\Gamma}_{-1} & \cdots & \hat{\Gamma}_{1-L} \\ \hat{\Gamma}_1 & \hat{\Gamma}_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \hat{\Gamma}_{-1} \\ \hat{\Gamma}_{L+1} & \cdots & \hat{\Gamma}_1 & \hat{\Gamma}_0 \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

donde $[\hat{\Gamma}_k]_{r,s} = \hat{\gamma}_k^{(r,s)} = \frac{1}{T-|k|} \sum_{t=\max(1,1-k)}^{\min(T,T-k)} x_t^{(r)} x_{t+k}^{(s)}$ para $k = 0, \pm 1, \dots, \pm(L-1)$ y $r, s = 1, \dots, M$

es la estimación de la covarianza de retardo k entre las series (r) y (s) ,

$\gamma_k^{(r,s)} = E(x_{t+k}^{(r)} x_t^{(s)}) = \gamma_{-k}^{(s,r)}$, y, por tanto, $\hat{\Gamma}_k = \hat{\Gamma}_{-k}^T$ de forma que \mathbf{S}_T es simétrica.

Haciendo uso de la extensión de Pearl (1973) al caso multivariante dada por la expresión (3.20), para una muestra concreta se tiene que

$$\hat{\Omega}_k = \frac{k}{L} \hat{\Gamma}_{L-k} + \frac{L-k}{L} \hat{\Gamma}_{-k}, \quad k = 0, \dots, L-1,$$

con $\hat{\Omega}_k = \hat{\Omega}_{L-k}^T$ dando lugar a la matriz \mathbf{S}_C deseada

$$\mathbf{S}_C = \begin{pmatrix} \hat{\Omega}_0 & \hat{\Omega}_1 & \cdots & \hat{\Omega}_{L-1} \\ \hat{\Omega}_{L-1} & \hat{\Omega}_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \hat{\Omega}_1 \\ \hat{\Omega}_1 & \cdots & \hat{\Omega}_{L-1} & \hat{\Omega}_0 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

La matriz \mathbf{S}_C es simétrica circulante por bloques y, por la Proposición 3.6, se procede a una diagonalización ortogonal. En primer lugar, \mathbf{S}_C se diagonaliza por bloques

$$\mathbf{S}_C = (\mathbf{U}_L \otimes \mathbf{I}_M) \text{diag}(\hat{\mathbf{F}}_1, \dots, \hat{\mathbf{F}}_L) (\mathbf{U}_L \otimes \mathbf{I}_M)^*$$

donde \mathbf{U}_L es la matriz unitaria de Fourier de orden L , \mathbf{I}_M es la matriz identidad de orden M y $\hat{\mathbf{F}}_k \in \mathbb{C}^{M \times M}$ es la estimación de la matriz de densidad espectral cruzada de la serie vectorial \mathbf{x}_t en la frecuencia $\omega_k = \frac{k-1}{L}$, $k = 1, \dots, L$. Las matrices $\hat{\mathbf{F}}_k$ son Hermitianas por lo que admiten una diagonalización unitaria $\hat{\mathbf{F}}_k = \hat{\mathbf{E}}_k \hat{\mathbf{D}}_k \hat{\mathbf{E}}_k^*$, con

$\hat{\mathbf{E}}_k \hat{\mathbf{E}}_k^* = \hat{\mathbf{E}}_k^* \hat{\mathbf{E}}_k = \mathbf{I}_M$, donde $\hat{\mathbf{E}}_k = [\hat{\mathbf{e}}_{k,1} | \dots | \hat{\mathbf{e}}_{k,M}]$ contiene los autovectores de $\hat{\mathbf{F}}_k$ y $\hat{\mathbf{D}}_k = \text{diag}(\hat{\lambda}_{k,1}, \dots, \hat{\lambda}_{k,M})$ es una matriz diagonal con los correspondientes autovalores de $\hat{\mathbf{F}}_k$ ordenados en sentido decreciente $\hat{\lambda}_{k,1} \geq \dots \geq \hat{\lambda}_{k,M} \geq 0$. Si se escribe $\hat{\mathbf{E}} = \text{diag}(\hat{\mathbf{E}}_1, \dots, \hat{\mathbf{E}}_L)$ y $\hat{\mathbf{D}} = \text{diag}(\hat{\mathbf{D}}_1, \dots, \hat{\mathbf{D}}_L)$, entonces, la diagonalización unitaria de la matriz \mathbf{S}_C queda como

$$\mathbf{S}_C = (\mathbf{U}_L \otimes \mathbf{I}_M) \hat{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{E}}^* (\mathbf{U}_L \otimes \mathbf{I}_M)^* = \hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{V}}^*$$

donde $\hat{\mathbf{V}} = (\mathbf{U}_L \otimes \mathbf{I}_M) \hat{\mathbf{E}} = [\hat{\mathbf{v}}_1 | \dots | \hat{\mathbf{v}}_{LM}] \in \mathbb{C}^{LM \times LM}$ es una matriz unitaria. Finalmente, la diagonalización ortogonal de \mathbf{S}_C está dada por $\mathbf{S}_C = \tilde{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{V}}^T$ donde la matriz ortonormal $\tilde{\mathbf{V}} = [\tilde{\mathbf{v}}_1 | \dots | \tilde{\mathbf{v}}_{LM}] \in \mathbb{R}^{LM \times LM}$ se construye según se indica en la Proposición 3.6.

Para cada frecuencia ω_k existen M autovectores asociados. De este modo, la componente principal m -ésima asociada a la frecuencia ω_k será llamada subcomponente y está dada por

$$\mathbf{w}_{k,m} = \mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{v}}_{k,m} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$$

donde $\tilde{\mathbf{v}}_{k,m} = \tilde{\mathbf{v}}_{(k-1)M+m}$. La matriz elemental correspondiente a la m -ésima subcomponente de la frecuencia ω_k es

$$\mathbf{X}_{k,m} = \tilde{\mathbf{v}}_{k,m} \mathbf{w}_{k,m}^T = \tilde{\mathbf{v}}_{k,m} \tilde{\mathbf{v}}_{k,m}^T \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{LM \times N}.$$

La parte de $\tilde{\mathbf{v}}_{k,m}$ correspondiente a la serie (i) se denota por $\tilde{\mathbf{v}}_{k,m}^{(i)}$ y está dada por

$$\tilde{\mathbf{v}}_{k,m}^{(i)} = (\mathbf{I}_L \otimes \mathbf{1}_{M,i}^T) \tilde{\mathbf{v}}_{k,m} \quad (3.26)$$

donde $\mathbf{1}_{M,i}$ es un vector vertical de longitud M con un 1 en la posición i -ésima y 0 en el resto. Por tanto, la matriz elemental para la m -ésima subcomponente de la frecuencia ω_k para la serie (i) se obtiene como

$$\mathbf{X}_{k,m}^{(i)} = \tilde{\mathbf{v}}_{k,m}^{(i)} \mathbf{w}_{k,m}^T = \tilde{\mathbf{v}}_{k,m}^{(i)} \tilde{\mathbf{v}}_{k,m}^T \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times N}. \quad (3.27)$$

En consecuencia, la matriz de trayectorias \mathbf{X} se puede descomponer como

$$\mathbf{X} = \sum_{k,m} \mathbf{X}_{k,m} = \sum_{k,m} \mathbf{P} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{k,m}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{k,m}^{(M)} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

donde \mathbf{P} es la matriz de permutación definida en la fórmula (3.7).

Se observa que, en M-CSSA, la matriz elemental de la serie (i) para la frecuencia ω_k es la suma de las M matrices elementales de dicha frecuencia, $\sum_{m=1}^M \mathbf{X}_{k,m}^{(i)}$.

La contribución de la matriz elemental $\mathbf{X}_{k,m}$ en la descomposición dada en (3.28) es la ratio $\hat{\lambda}_{k,m} / \sum_{k,m} \hat{\lambda}_{k,m}$. Además, el índice de participación de la serie (i) dentro de la subcomponente m -ésima de la frecuencia ω_k está dado, a partir de (3.26), por la siguiente expresión

$$\pi_{k,m}^{(i)} = \hat{\lambda}_{k,m} \left(\tilde{\mathbf{v}}_{k,m}^{(i)} \right)^\top \tilde{\mathbf{v}}_{k,m}^{(i)}. \quad (3.29)$$

Paso 3: Agrupamiento.

La función de densidad espectral cruzada de la serie vectorial \mathbf{x}_t es simétrica y, por ello, $\hat{\mathbf{F}}_k = \hat{\mathbf{F}}_{L+2-k}^\top$ para $k = 2, \dots, G$ donde $G = \lfloor \frac{L+1}{2} \rfloor$. Entonces, $\hat{\mathbf{D}}_k = \hat{\mathbf{D}}_{L+2-k}$ y $\hat{\mathbf{E}}_k = \overline{\hat{\mathbf{E}}}_{L+2-k}$ y, en consecuencia, las subcomponentes $\mathbf{w}_{k,m} = \mathbf{X}^\top \tilde{\mathbf{v}}_{k,m}$ y $\mathbf{w}_{L+2-k,m} = \mathbf{X}^\top \tilde{\mathbf{v}}_{L+2-k,m}$ son armónicos de igual frecuencia. Esto motiva la formación de los pares elementales por subcomponente y frecuencia $B_{k,m} = \{(k,m), (L+2-k,m)\}$ para $k = 2, \dots, G$ excepto $B_{1,m} = \{(1,m)\}$ y, ocasionalmente, $B_{\frac{L}{2}+1,m} = \{(\frac{L}{2}+1,m)\}$ si L es par. Las matrices correspondientes a los pares $B_{k,m}$ anteriores, están dadas por la suma de dos matrices elementales por subcomponente y frecuencia

$$\mathbf{X}_{B_{k,m}} = \mathbf{X}_{k,m} + \mathbf{X}_{L+2-k,m}. \quad (3.30)$$

Por ello, tanto las matrices asociadas a los pares elementales por subcomponente y frecuencia como las componentes oscilatorias obtenidas a partir de ellas, están identificadas *ex-ante* con una determinada frecuencia como en el caso univariante.

A continuación, bajo el supuesto de separabilidad presente en CSSA como se prueba en el primer capítulo, se definen D grupos disjuntos de los pares elementales por subcomponente y frecuencia. La matriz resultante para cada uno de los grupos disjuntos se define como la suma de las matrices asociadas a los pares $B_{k,m}$ incluidos. Si $I_j = \{B_{k_{j_1}, m_{j_1}}, \dots, B_{k_{j_q}, m_{j_q}}\}$, $j = 1, \dots, D$, es cada grupo disjunto de j_q pares $B_{k,m}$ con $1 \leq j_q \leq GM$, entonces, la matriz \mathbf{X}_{I_j} procedente del grupo I_j se calcula como la suma de las oportunas matrices definidas en (3.30), $\mathbf{X}_{I_j} = \sum_{B_{k,m} \in I_j} \mathbf{X}_{B_{k,m}}$. Por tanto, la descomposición de la matriz de trayectorias \mathbf{X} dada en (3.28) produce la expansión

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{I_1} + \mathbf{X}_{I_2} + \dots + \mathbf{X}_{I_D} . \quad (3.31)$$

Los D grupos disjuntos se determinan en función del objetivo del análisis: extraer la tendencia y/o el ciclo económico, suavizar la serie o corregirla de estacionalidad. Por ejemplo, si se desea extraer con M-CSSA la componente oscilatoria de periodo $\frac{L}{k-1}$, el grupo apropiado es $B_k = \{B_{k,m} \ \forall m / 1 \leq m \leq M\}$ siendo su matriz resultante

$$\mathbf{X}_{B_k} = \sum_{m=1}^M \mathbf{X}_{B_{k,m}} = \sum_{m=1}^M \mathbf{P} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{B_{k,m}}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{B_{k,m}}^{(M)} \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^M \mathbf{P} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{k,m}^{(1)} + \mathbf{X}_{L+2-k,m}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{k,m}^{(M)} + \mathbf{X}_{L+2-k,m}^{(M)} \end{pmatrix} ,$$

donde \mathbf{P} es la matriz de permutación definida en (3.7) y $\mathbf{X}_{k,m}^{(i)}$ la matriz elemental de la subcomponente m -ésima de la frecuencia ω_k para la serie (i) obtenida en (3.27).

La contribución de la componente oscilatoria procedente de la matriz $\mathbf{X}_{B_{k,m}}$ del par elemental $B_{k,m}$ está medida por la ratio $\text{card}(B_{k,m}) \hat{\lambda}_{k,m} / \text{trace}(\hat{\mathbf{D}})$ y la contribución de la componente oscilatoria derivada de la matriz \mathbf{X}_{I_j} asociada al grupo I_j en la expansión (3.31) se calcula por la proporción

$$\frac{\sum_{B_{k,m} \in I_j} \text{card}(B_{k,m}) \hat{\lambda}_{k,m}}{\text{trace}(\hat{\mathbf{D}})} .$$

Paso 4: Reconstrucción.

Finalmente, cada matriz $L \times N$, \mathbf{X}_{I_j} , de vectores $M \times 1$ del paso anterior se transforma en una nueva serie temporal vectorial de longitud T mediante el promedio diagonal dando lugar a la serie temporal vectorial reconstruida o componente oscilatoria vectorial $\tilde{\mathbf{x}}_{I_j,t} = (\tilde{x}_{I_j,t}^{(1)}, \dots, \tilde{x}_{I_j,t}^{(M)})^T$. Si $\mathbf{x}_{r,s}^{I_j}$ son los elementos vectoriales de la matriz \mathbf{X}_{I_j} , entonces, los valores de la serie vectorial reconstruida $\tilde{\mathbf{x}}_{I_j,t}$, con $L < N$, se calculan con la fórmula de Vautard et al. (1992) adaptada a vectores para “hankelizar” la matriz \mathbf{X}_{I_j} :

$$\tilde{\mathbf{x}}_{I_j,t} = \begin{cases} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \mathbf{x}_{i,t-i+1}^{I_j} & 1 \leq t < L \\ \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{x}_{i,t-i+1}^{I_j} & L \leq t \leq N \\ \frac{1}{T-t+1} \sum_{i=t-T+L}^L \mathbf{x}_{i,t-i+1}^{I_j} & N < t \leq T \end{cases} .$$

Las series vectoriales reconstruidas a partir de los pares elementales por subcomponente y frecuencia se denominan series vectoriales reconstruidas elementales por subcomponente y frecuencia.

Además, por la propiedad de la separabilidad, se verifica que la reconstrucción conserva la información, es decir, la serie vectorial analizada \mathbf{x}_t se puede descomponer como suma de D series vectoriales reconstruidas resultantes de los D grupos disjuntos, respectivamente, obtenidos en el paso anterior

$$\mathbf{x}_t = \sum_{j=1}^D \tilde{\mathbf{x}}_{I_j,t} .$$

3.3.5 Unicidad entre CSSA y M-CSSA

La estimación en CSSA de la componente oscilatoria de la serie (i) para cada frecuencia $\omega_k = \frac{k-1}{L}$, $k = 1, \dots, L$, origina una sola serie o componente asociada a la matriz elemental por frecuencia $\mathbf{X}_k^{(i)}$. Sin embargo, cuando se estima esa misma componente oscilatoria en M-CSSA se obtienen M series o subcomponentes asociadas, respectivamente, a las M matrices elementales por subcomponente y frecuencia $\mathbf{X}_{k,m}^{(i)}$.

La suma de estas matrices, $\sum_{m=1}^M \mathbf{X}_{k,m}^{(i)}$, origina la estimación en M-CSSA de la componente oscilatoria de la serie (i) en la frecuencia ω_k . El siguiente teorema pone de manifiesto que ambas estimaciones son iguales.

Teorema 3.7. *Las componentes oscilatorias derivadas de las matrices $\mathbf{X}_k^{(i)}$ y $\sum_{m=1}^M \mathbf{X}_{k,m}^{(i)}$ de toda serie (i) para cada frecuencia ω_k obtenidas con CSSA y M-CSSA, respectivamente, son idénticas, es decir, la componente oscilatoria de toda serie (i) para cada frecuencia ω_k es única.*

Demostración. La matriz elemental en M-CSSA para la serie (i) asociada a la m -ésima subcomponente de la frecuencia ω_k , utilizando la matriz unitaria \mathbf{V} definida en (3.23) y siguiendo la expresión (3.27), está dada por

$$\mathbf{X}_{k,m}^{(i)} = \mathbf{v}_{k,m}^{(i)} \mathbf{v}_{k,m}^{*} \mathbf{X} . \quad (3.32)$$

El autovector $\mathbf{v}_{k,m} = \mathbf{v}_{(k-1)M+m}$ de la matriz unitaria \mathbf{V} se puede expresar como

$$\mathbf{v}_{k,m} = (\mathbf{U}_L \otimes \mathbf{I}_M) (\mathbf{1}_{M,k} \otimes \mathbf{e}_{k,m})$$

que, junto con la fórmula (3.26), transforma la igualdad de (3.32) en

$$\mathbf{X}_{k,m}^{(i)} = (\mathbf{I}_L \otimes \mathbf{1}_{M,i}^T) (\mathbf{U}_L \otimes \mathbf{I}_M) (\mathbf{1}_{M,k} \otimes \mathbf{e}_{k,m}) (\mathbf{1}_{M,k} \otimes \mathbf{e}_{k,m})^* (\mathbf{U}_L \otimes \mathbf{I}_M)^* \mathbf{X} . \quad (3.33)$$

Sumando en m la igualdad (3.33) anterior, se obtiene que

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \mathbf{X}_{k,m}^{(i)} &= (\mathbf{I}_L \otimes \mathbf{1}_{M,i}^T) (\mathbf{U}_L \otimes \mathbf{I}_M) \left[\sum_{m=1}^M (\mathbf{1}_{M,k} \otimes \mathbf{e}_{k,m}) (\mathbf{1}_{M,k} \otimes \mathbf{e}_{k,m})^* \right] (\mathbf{U}_L \otimes \mathbf{I}_M)^* \mathbf{X} \\ &= (\mathbf{I}_L \otimes \mathbf{1}_{M,i}^T) (\mathbf{U}_L \otimes \mathbf{I}_M) \text{diag}(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{I}_M, \dots, \mathbf{0}) (\mathbf{U}_L \otimes \mathbf{I}_M)^* \mathbf{X} \\ &= \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^* \mathbf{X}^{(i)} \\ &= \mathbf{X}_k^{(i)} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{X}^{(i)}$ es la matriz de trayectorias de la serie (i) y la matriz identidad \mathbf{I}_M ocupa el lugar k -ésimo en la diagonal por bloques $\text{diag}(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{I}_M, \dots, \mathbf{0})$. Por tanto, se demuestra

que $\sum_{m=1}^M \mathbf{X}_{k,m}^{(i)} = \mathbf{X}_k^{(i)}$ y, en consecuencia, la componente oscilatoria de toda serie para cada frecuencia es única. ■

Este resultado amplía la utilidad de M-CSSA. Dada una componente oscilatoria, permite separar la señal de un posible ruido de color superpuesto, como lo definieron Allen y Robertson (1996), mediante la selección de un número reducido de sus subcomponentes igual a $\hat{d}_k = \text{rank}(\hat{\mathbf{D}}_k)$, es decir, el número de autovalores que se estiman no nulos para la frecuencia ω_k . En general, para estimar la señal de un armónico será suficiente un pequeño número de subcomponentes asociadas a sus mayores autovalores que detallarán tanto la amplitud como el fechado de los puntos de giro de las componentes oscilatorias. En este sentido, como aprecian Groth et al. (2011), las subcomponentes ayudan a extraer las señales espectrales comunes junto con los comovimientos, caracterización y posición cíclica, de las series analizadas y, por tanto, describen la formación de las componentes oscilatorias en un contexto multivariante.

También, este teorema demuestra el resultado empírico de Plaut y Vautard (1994) de que en M-SSA un par oscilatorio no explica el cien por cien de la varianza debida a un armónico. En las versiones clásicas de M-SSA se quedan fuera de los mayores autovalores información relativa a dicho armónico. Esta información puede tener un gran interés para el análisis económico porque permite observar, para cada una de las series, los diferentes shocks que se presentan para el mismo armónico o componente oscilatoria. La ventaja que presenta M-CSSA frente a las dos versiones clásicas de M-SSA es que los shocks para cada frecuencia se conocen *ex-ante* y se evita realizar un rastreo por todas las LM subcomponentes.

3.3.6 Equivalencia asintótica de las tres versiones de M-SSA

Sea una serie temporal vectorial estacionaria M -dimensional $\mathbf{x}_t = (x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(M)})^\top$ de longitud T con todas las series reales de media nula y sea L la longitud de la ventana tal que $1 < L < T/2$ con $N = T - L + 1$. Las matrices de trayectorias multivariantes \mathbf{X}_V y \mathbf{X} correspondientes a las versiones clásicas de M-SSA y M-CSSA, respectivamente, están relacionadas por la matriz de permutación dada en (3.7), $\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{X}_V$. Ello significa

que los autovalores de $\mathbf{X}_V \mathbf{X}_V^\top$ y $\mathbf{X} \mathbf{X}^\top = \mathbf{P} \mathbf{X}_V \mathbf{X}_V^\top \mathbf{P}^\top$ son los mismos. Ahora, se puede calcular la siguiente matriz $L \times L$ por bloques $M \times M$ de dimensión $ML \times ML$

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{X} \mathbf{X}^\top / N = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_{11} & \tilde{\mathbf{S}}_{12} & \cdots & \tilde{\mathbf{S}}_{1L} \\ \tilde{\mathbf{S}}_{21} & \tilde{\mathbf{S}}_{22} & \cdots & \tilde{\mathbf{S}}_{2L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{S}}_{L1} & \tilde{\mathbf{S}}_{L2} & \cdots & \tilde{\mathbf{S}}_{LL} \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

donde los elementos de cada bloque $\tilde{\mathbf{S}}_{ij}$ son $[\tilde{\mathbf{S}}_{ij}]_{r,s} = \tilde{s}_{ij}^{(r,s)} = \frac{1}{N} \sum_{t=i}^{i+N-1} x_{t+i-j}^{(r)} x_t^{(s)}$ y, así,

$\tilde{\mathbf{S}}_{ij} = \tilde{\mathbf{S}}_{ji}^\top$ con lo cual la matriz $\tilde{\mathbf{S}}$ es simétrica. Como las series $x_t^{(r)}$ y $x_t^{(s)}$ son estacionarias, si $N \rightarrow \infty$, entonces, $\tilde{s}_{ij}^{(r,s)} \xrightarrow{P} \gamma_{i-j}^{(r,s)} = E(x_{t+i-j}^{(r)} x_t^{(s)})$ cuando $T \rightarrow \infty$.

Además, $\mathbf{F}(\omega): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{M \times M}$ es la función matricial continua y 2π -periódica con la densidad espectral cruzada de la serie vectorial \mathbf{x}_t . A partir de $\mathbf{F}(\omega)$ se construye la secuencia $\{\mathbf{T}_L(\mathbf{F})\}$ de matrices Hermitianas $L \times L$ Toeplitz por bloques $M \times M$ con las covarianzas cruzadas retardadas y la secuencia asociada $\{\mathbf{C}_L(\mathbf{F})\}$ de matrices Hermitianas $L \times L$ circulantes por bloques $M \times M$. En las aplicaciones, las matrices $\mathbf{T}_L(\mathbf{F})$ y $\mathbf{C}_L(\mathbf{F})$ se estiman con \mathbf{S}_T y \mathbf{S}_C dadas en (3.24) y (3.25), respectivamente.

En este contexto, el objetivo es demostrar que $\tilde{\mathbf{S}} \sim \mathbf{S}_T \sim \mathbf{S}_C$. Es necesario comenzar verificando que las secuencias de matrices por bloques $\{\mathbf{T}_L(\mathbf{F})\}$ y $\{\mathbf{S}_T\}$ son asintóticamente equivalentes, $\mathbf{T}_L(\mathbf{F}) \sim \mathbf{S}_T$, y antes es preciso probar el siguiente lema.

Lema 3.8. Para una serie temporal vectorial estacionaria $\mathbf{x}_t = (x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(M)})^\top$, la

sucesión $S_L = \sum_{k=1-L}^{L-1} (\hat{\gamma}_k^{(r,s)} - \gamma_k^{(r,s)})^2$ converge en probabilidad a cero cuando $L \rightarrow \infty$ para

todo $r, s = 1, \dots, M$, siendo $\hat{\gamma}_k^{(r,s)}$ el estimador definido en (3.3).

Demostración. La suma S_L se puede descomponer como

$$S_L = \sum_{k=1-L}^{L-1} (\hat{\gamma}_k^{(r,s)} - \gamma_k^{(r,s)})^2 = \sum_{k=1-L}^{L-1} (\gamma_k^{(r,s)})^2 + \sum_{k=1-L}^{L-1} (\hat{\gamma}_k^{(r,s)})^2 - 2 \sum_{k=1-L}^{L-1} (\gamma_k^{(r,s)}) (\hat{\gamma}_k^{(r,s)}). \quad (3.35)$$

El primer término de (3.35) es finito cuando $L \rightarrow \infty$ por el teorema de Parseval, es decir, verifica la sumabilidad cuadrática, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\gamma_k^{(r,s)}\right)^2 = K$. Ahora bien, respetando $L < T/2$, T es una sucesión monótona estrictamente creciente en función de L y, así, $T \rightarrow \infty$ cuando $L \rightarrow \infty$. Por tanto, cuando $L \rightarrow \infty$, el segundo término es una suma de infinitos sumandos que converge en probabilidad a K porque $\hat{\gamma}_k^{(r,s)} \rightarrow \gamma_k^{(r,s)}$ cuando $T \rightarrow \infty$. Y, por el mismo razonamiento, el tercer término converge en probabilidad a $2K$ cuando $L \rightarrow \infty$. En consecuencia, la suma S_L converge en probabilidad a cero, $S_L \xrightarrow{P} K + K - 2K = 0$, cuando $L \rightarrow \infty$, como se quería probar. ■

En la siguiente proposición se demuestra que $\mathbf{S}_T \sim \mathbf{T}_L(\mathbf{F})$ para avanzar hacia el resultado principal de este apartado.

Proposición 3.9. Sean $\{\mathbf{S}_T\}$ y $\{\mathbf{T}_L(\mathbf{F})\}$ las secuencias de matrices en función de la longitud L de la ventana definidas por (3.24) y (3.8), respectivamente. Entonces,

$$\mathbf{S}_T \sim \mathbf{T}_L(\mathbf{F}).$$

Demostración. Se conoce que los autovalores de las matrices Toeplitz por bloques y Hermitianas $\mathbf{T}_L(\mathbf{F})$ están acotados. Además, las matrices \mathbf{S}_T son Toeplitz por bloques y simétricas, por ello, sus autovalores reales también están acotados. Asimismo, se debe probar que $\lim_{L \rightarrow \infty} L^{\frac{-1}{2}} \|\mathbf{S}_T - \mathbf{T}_L(\mathbf{F})\|_F = 0$. Se puede escribir

$$0 \leq \frac{1}{L} \|\mathbf{S}_T - \mathbf{T}_L(\mathbf{F})\|_F^2 = \sum_{k=1-L}^{L-1} \frac{L-|k|}{L} \|\boldsymbol{\Gamma}_k - \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_k\|_F^2 \leq \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^M \sum_{k=1-L}^{L-1} \left(\hat{\gamma}_k^{(r,s)} - \gamma_k^{(r,s)}\right)^2.$$

Por tanto, utilizando el teorema del emparejado y el Lema 3.8, se obtiene que $\lim_{L \rightarrow \infty} L^{\frac{-1}{2}} \|\mathbf{S}_T - \mathbf{T}_L(\mathbf{F})\|_F = 0$ y se demuestra que $\mathbf{S}_T \sim \mathbf{T}_L(\mathbf{F})$. ■

La matriz $\tilde{\mathbf{S}}$ forma una secuencia de matrices simétricas $\{\tilde{\mathbf{S}}\}$ en función de la longitud de la ventana L . A continuación, se relaciona esta secuencia de matrices simétricas $\{\tilde{\mathbf{S}}\}$ con la secuencia de matrices Hermitianas Toeplitz por bloques $\{\mathbf{T}_L(\mathbf{F})\}$ pero, antes, es preciso demostrar el siguiente lema.

Lema 3.10. Para una serie temporal vectorial estacionaria $\mathbf{x}_t = (x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(M)})^\top$, la

sucesión $S_L = \sum_{k=1-L}^{L-1} \max_{\substack{1 \leq i, j \leq L \\ i-j=k}} \left\{ \left(\tilde{s}_{ij}^{(r,s)} - \gamma_k^{(r,s)} \right)^2 \right\}$ converge en probabilidad a cero cuando

$L \rightarrow \infty$ para todo $r, s = 1, \dots, M$, siendo $\tilde{s}_{ij}^{(r,s)}$ los elementos de la matriz de (3.34).

Demostración. La suma S_L verifica que

$$0 \leq S_L \leq \sum_{k=1-L}^{L-1} \left(\gamma_k^{(r,s)} \right)^2 + \sum_{k=1-L}^{L-1} \max_{\substack{1 \leq i, j \leq L \\ i-j=k}} \left\{ \left(\tilde{s}_{ij}^{(r,s)} \right)^2 \right\} - 2 \sum_{k=1-L}^{L-1} \min_{\substack{1 \leq i, j \leq L \\ i-j=k}} \left\{ \left(\tilde{s}_{ij}^{(r,s)} \right) \left(\gamma_k^{(r,s)} \right) \right\}. \quad (3.36)$$

Por el teorema de Parseval, el primer término del lado derecho de (3.36) es finito

cuando $L \rightarrow \infty$, es decir, verifica la sumabilidad cuadrática, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\gamma_k^{(r,s)} \right)^2 = K$. Se sabe

que $N = T - L + 1$. Respetando $L < T/2$, N es una sucesión monótona estrictamente

creciente en función de L porque $N > L + 1$ y, así, $N \rightarrow \infty$ cuando $L \rightarrow \infty$. Por ello,

cuando $L \rightarrow \infty$, el segundo término es una suma de infinitos sumandos que converge en

probabilidad a K porque $\tilde{s}_{ij}^{(r,s)} \rightarrow \gamma_{i-j}^{(r,s)}$ cuando $N \rightarrow \infty$. Y, usando el mismo

razonamiento, el tercer término converge en probabilidad a $2K$ cuando $L \rightarrow \infty$. Por

tanto, el lado derecho de (3.36) converge en probabilidad a cero cuando $L \rightarrow \infty$.

Entonces, usando el teorema del emparedado, S_L converge en probabilidad a cero como

se quería demostrar. ■

Ahora, se está en condiciones de probar que $\tilde{\mathbf{S}} \sim \mathbf{T}_L(\mathbf{F})$ en la siguiente proposición.

Proposición 3.11. Sean $\{\tilde{\mathbf{S}}\}$ y $\{\mathbf{T}_L(\mathbf{F})\}$ las secuencias de matrices en función de la longitud L de la ventana definidas por (3.34) y (3.8), respectivamente. Entonces,

$$\tilde{\mathbf{S}} \sim \mathbf{T}_L(\mathbf{F}).$$

Demostración. La estacionariedad significa sumabilidad cuadrática lo cual implica que

los autovalores reales de las matrices $\tilde{\mathbf{S}}$ simétricas están acotados como se ha visto que

verifican los de $\mathbf{T}_L(\mathbf{F})$. Ahora se prueba que $\lim_{L \rightarrow \infty} L^{\frac{-1}{2}} \left\| \tilde{\mathbf{S}} - \mathbf{T}_L(\mathbf{F}) \right\|_F = 0$. Se escribe

$$\begin{aligned}
 0 \leq \frac{1}{L} \|\tilde{\mathbf{S}} - \mathbf{T}_L(\mathbf{F})\|_F^2 &= \frac{1}{L} \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^M \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \left(\tilde{\mathcal{S}}_{ij}^{(r,s)} - \gamma_{i-j}^{(r,s)} \right)^2 \leq \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^M \sum_{k=1-L}^{L-1} \frac{L-|m|}{L} \max_{\substack{1 \leq i, j \leq L \\ i-j=k}} \left\{ \left(\tilde{\mathcal{S}}_{ij}^{(r,s)} - \gamma_k^{(r,s)} \right)^2 \right\} \\
 &\leq \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^M \sum_{m=1-L}^{L-1} \max_{\substack{1 \leq i, j \leq L \\ i-j=k}} \left\{ \left(\tilde{\mathcal{S}}_{ij}^{(r,s)} - \gamma_k^{(r,s)} \right)^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

De este modo, utilizando el teorema del emparedado y el Lema 3.10, se verifica que $\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \|\tilde{\mathbf{S}} - \mathbf{T}_L(\mathbf{F})\|_F^2 = 0$ y $\tilde{\mathbf{S}} \sim \mathbf{T}_L(\mathbf{F})$ como se quería demostrar. ■

Las Proposiciones 3.9 y 3.11 conducen al resultado central de este apartado expresado en el siguiente teorema.

Teorema 3.12. Sean $\{\tilde{\mathbf{S}}\}$, $\{\mathbf{S}_T\}$ y $\{\mathbf{S}_C\}$ las secuencias de matrices en función de la longitud L de la ventana definidas por (3.34), (3.24) y (3.25), respectivamente. Entonces,

$$\tilde{\mathbf{S}} \sim \mathbf{S}_T \sim \mathbf{S}_C .$$

Demostración. $\mathbf{S}_T \sim \mathbf{T}_L(\mathbf{F})$ y $\tilde{\mathbf{S}} \sim \mathbf{T}_L(\mathbf{F})$ por las proposiciones 3.9 y 3.11, respectivamente, que, junto con la propiedad transitiva, conducen a $\tilde{\mathbf{S}} \sim \mathbf{S}_T$. Este último resultado, más $\mathbf{S}_T \sim \mathbf{S}_C$, por los teoremas 3.2 y 3.3, y, además, la propiedad transitiva prueban que $\tilde{\mathbf{S}} \sim \mathbf{S}_C$ como se quería demostrar. ■

Este teorema demuestra de forma sencilla la exigua diferencia que existe entre los resultados obtenidos con las versiones Basic y Toeplitz de M-SSA y también entre ambas y la versión M-CSSA. En particular, para $M = 1$, es otra confirmación de forma analítica de las conclusiones empíricas obtenidas en los trabajos sobre series climáticas, Vautard et al. (1992) y Ghil et al. (2002) entre otros, en los que se establece que la discrepancia entre las versiones clásicas de SSA es residual. Además, los resultados ahí obtenidos de mayor estabilidad y menor diferencia marginal de la versión Toeplitz sobre la versión Basic se hacen extensivos a la versión Circulant.

La aplicación de la extensión del teorema de Szegő de Gutiérrez-Gutiérrez y Crespo (2012) a la Proposición 3.11, es decir, cuando la secuencia de matrices Hermitianas Toeplitz por bloques es reemplazada por una secuencia de matrices Hermitianas, origina el siguiente corolario que es útil en el sucesivo apartado de series no estacionarias.

Corolario 3.13. Sea $\mathbf{F}(\omega): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{M \times M}$ la función matricial continua y 2π -periódica tal que $f_m(\omega) = [\mathbf{F}(\omega)]_{m,m}$ es la función de densidad espectral de la serie $x_t^{(m)}$ y sea \mathbf{X}_V la matriz de trayectorias de las versiones clásicas de M-SSA. Entonces,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{NML} \text{trace}(\mathbf{X}_V \mathbf{X}_V^T) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \int_0^1 f_m(\omega) d\omega .$$

Demostración. El resultado de la Proposición 3.11, $\tilde{\mathbf{S}} \sim \mathbf{T}_L(\mathbf{F})$, junto con sus condiciones y la expresión (3.15) para la función $g(x) = x$ permiten escribir

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{ML} \sum_{k=1}^{ML} \lambda_k(\tilde{\mathbf{S}}) = \int_0^1 \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \lambda_m(\mathbf{F}(\omega)) d\omega .$$

Teniendo en cuenta que la suma del lado derecho de esa igualdad se puede formular

como $\sum_{m=1}^M \lambda_m(\mathbf{F}(\omega)) = \text{trace}(\mathbf{F}(\omega)) = \sum_{m=1}^M f_m(\omega)$ y que se está integrando una suma de

funciones, dicho lado derecho queda $\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \int_0^1 f_m(\omega) d\omega$. Para el lado izquierdo, por la

matriz de permutación dada en (3.7) tal que $\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{X}_V$, la suma se expresa como

$\sum_{k=1}^{ML} \lambda_k(\tilde{\mathbf{S}}) = \sum_{k=1}^{ML} \frac{1}{N} \lambda_k(\mathbf{X}\mathbf{X}^T) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{ML} \lambda_k(\mathbf{X}_V \mathbf{X}_V^T) = \frac{1}{N} \text{trace}(\mathbf{X}_V \mathbf{X}_V^T)$ con lo cual dicho lado

izquierdo llega a ser $\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{NML} \text{trace}(\mathbf{X}_V \mathbf{X}_V^T)$ como se quería demostrar. ■

3.3.7 Series no estacionarias

El algoritmo M-CSSA descrito requiere que las series temporales sean estacionarias. No obstante, aunque las propiedades asintóticas solo se garantizan bajo el supuesto de estacionariedad, el Teorema 1.7 del Capítulo 1, aplicado sobre cada serie, justifica el empleo de M-CSSA con series no estacionarias y, junto al Corolario 3.13, implica que los autovalores de la función matricial \mathbf{F} se distribuyen asintóticamente igual que los autovalores de las diferentes matrices de momentos cruzados de segundo orden hasta un valor finito para series no estacionarias. Ello no supone que las series sean asintóticamente estacionarias pero el resultado es más preciso en las discontinuidades de f_m al aumentar la longitud de la ventana ya que M-CSSA conserva la información.

3.4 Índices compuestos en el dominio de la frecuencia

Una vez estimadas las componentes oscilatorias de la serie temporal vectorial correspondiente a un grupo de frecuencias se desea extraer los factores comunes para ese conjunto de componentes en el dominio de la frecuencia. Uno de esos factores será la estimación de un índice compuesto que recoja la naturaleza dinámica subyacente compartida por las componentes reconstruidas permitiendo analizar, por ejemplo, el ciclo económico o la estacionalidad. El factor común o factores comunes serán estimados mediante el análisis factorial clásico aplicado a series temporales en el sentido expuesto por Gilbert y Meijer (2005) y Bai y Ng (2008) pero incorporando la información espectral obtenida con M-CSSA a partir de ciertos resultados de Brillinger (1981). Se utiliza el análisis factorial clásico porque no impone modelos a los factores comunes en concordancia con el carácter no paramétrico de SSA. A continuación, se determinan las matrices de covarianzas de las componentes oscilatorias. Dichas matrices intervienen en el sucesivo modelo factorial que se especifica y en la estimación posterior del índice compuesto como uno de los factores comunes.

3.4.1 Matrices de covarianzas de las componentes oscilatorias

Sea una serie temporal vectorial estacionaria M -dimensional $\mathbf{x}_t = (x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(M)})^T$ iniciada en $t = -\infty$ y sea L la longitud de la ventana del algoritmo de M-CSSA. La densidad espectral de la serie vectorial \mathbf{x}_t es la función matricial $\mathbf{F}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^{M \times M}$ que es continua, 2π -periódica y Hermitiana.

La secuencia de matrices $P \times M$ $\mathbf{h}(s)$, $s = 0, \pm 1, \dots$, denotada por $\{\mathbf{h}(s)\}$ se dice que es un filtro lineal si la transformación

$$\mathbf{y}_t = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(s) \mathbf{x}_{t-s} \quad (3.37)$$

es lineal e invariante en el tiempo donde $\mathbf{y}_t = (y_t^{(1)}, \dots, y_t^{(P)})^T$ es una serie temporal vectorial P -dimensional. Si, además, la secuencia $\{\mathbf{h}(s)\}$ verifica que $\sum_{s=-\infty}^{\infty} |\mathbf{h}(s)| < \infty$ se dice que dicho filtro es sumable y su función de transferencia $P \times M$ está dada por

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(s) \exp(-i2\pi\omega s), \quad \omega \in [0,1].$$

En esta situación, la función de densidad espectral cruzada de la serie temporal vectorial \mathbf{y}_t de la transformación (3.37) es

$$\mathbf{F}_y(\omega) = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{F}(\omega) \mathbf{H}(\omega)^* \quad (3.38)$$

donde $\mathbf{F}_y : [0,1] \rightarrow \mathbb{C}^{P \times P}$ es una función matricial continua, 2π -periódica y Hermitiana.

La componente oscilatoria ideal correspondiente a la frecuencia $\omega_k = \frac{k-1}{L}$ para la serie (i) , $x_{k,t}^{(i)}$, se obtiene mediante un filtro sumable 1×1 $\{\mathbf{h}(s)\}$ llamado filtro paso-banda que está centrado en la frecuencia ω_k con ancho de banda $\frac{1}{L}$ y cuya función de transferencia tiene la siguiente forma

$$\mathbf{H}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \left| \omega - \frac{k-1}{L} \right| < \frac{1}{2L} \text{ ó } \left| \omega - \left(1 - \frac{k-1}{L}\right) \right| < \frac{1}{2L}, \quad \omega \in [0,1]. \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Por tanto, la componente oscilatoria vectorial ideal correspondiente a la frecuencia ω_k , $\mathbf{x}_{k,t}$, se obtiene mediante un filtro sumable $M \times M$ $\{\mathbf{h}(s)\}$ cuya función de transferencia es $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{I}$ si $\left| \omega - \frac{k-1}{L} \right| < \frac{1}{2L}$ ó $\left| \omega - \left(1 - \frac{k-1}{L}\right) \right| < \frac{1}{2L}$ y $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{0}$ para el resto de frecuencias.

Otro filtro sumable 1×1 $\{\mathbf{h}(s)\}$ útil para los próximos resultados es la transformada de Hilbert para la serie (i) , $(x_t^{(i)})^H = \mathcal{H}(x_t^{(i)})$, cuya función de transferencia está dada por $\mathbf{H}(\omega) = -i \operatorname{sgn}(\frac{1}{2} - \omega)$, $\omega \in [0,1]$. La transformada de Hilbert de la componente oscilatoria ideal asociada a la frecuencia ω_k para la serie (i) , $(x_{k,t}^{(i)})^H$, se calcula mediante un filtro sumable 1×1 $\{\mathbf{h}(s)\}$ cuya función de transferencia es

$$\mathbf{H}(\omega) = \begin{cases} -i \operatorname{sgn}(\frac{1}{2} - \omega) & \text{si } \left| \omega - \frac{k-1}{L} \right| < \frac{1}{2L} \text{ ó } \left| \omega - \left(1 - \frac{k-1}{L}\right) \right| < \frac{1}{2L}, \quad \omega \in [0,1]. \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

De este modo, la transformada de Hilbert de la componente oscilatoria vectorial ideal correspondiente a la frecuencia ω_k , $\mathbf{x}_{k,t}^H = \mathcal{H}(\mathbf{x}_{k,t})$, se obtiene mediante un filtro sumable $M \times M$ $\{\mathbf{h}(s)\}$ cuya función de transferencia es $\mathbf{H}(\omega) = -i \operatorname{sgn}(\frac{1}{2} - \omega) \mathbf{I}$ si $|\omega - \frac{k-1}{L}| < \frac{1}{2L}$ ó $|\omega - (1 - \frac{k-1}{L})| < \frac{1}{2L}$ y $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{0}$ para otra frecuencia.

Siguiendo a Brillinger (1981), se designa por $\{\mathbf{h}_k(s)\}$ el filtro sumable $2M \times M$ que, a partir de la serie vectorial \mathbf{x}_t , obtiene al mismo tiempo tanto la componente oscilatoria vectorial ideal, centrada en la frecuencia ω_k con un ancho de banda $\frac{1}{L}$, como la transformada de Hilbert de esta, es decir,

$$\mathbf{y}_{k,t} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{h}_k(s) \mathbf{x}_{t-s} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k,t} \\ \mathbf{x}_{k,t}^H \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

donde la función de transferencia $2M \times M$ del filtro $\{\mathbf{h}_k(s)\}$ está dada por

$$\mathbf{H}_k(\omega) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -i \operatorname{sgn}(\frac{1}{2} - \omega) \mathbf{I} \end{pmatrix} & \text{si } |\omega - \frac{k-1}{L}| < \frac{1}{2L} \text{ ó } |\omega - (1 - \frac{k-1}{L})| < \frac{1}{2L}, \quad \omega \in [0, 1]. \\ \mathbf{0} & \text{resto} \end{cases} \quad (3.40)$$

Entonces, utilizando (3.38), las matrices de covarianzas cruzadas retardadas de la serie filtrada $\mathbf{y}_{k,t}$, para $m = 0, \pm 1, \dots$, se definen como

$$\Gamma_{\mathbf{y}_k}(m) = \operatorname{cov}(\mathbf{y}_{k,t}, \mathbf{y}_{k,t+m}) = \int_0^1 \mathbf{H}_k(\omega) \mathbf{F}(\omega) \mathbf{H}_k(\omega)^* \exp(-i2\pi\omega m) d\omega. \quad (3.41)$$

Utilizando el resultado de (3.40) para desarrollar la expresión anterior, se obtiene que

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbf{y}_k}(m) &= \int_{\frac{k-1}{L} - \frac{1}{2L}}^{\frac{k-1}{L} + \frac{1}{2L}} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -i\mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{F}(\omega) (\mathbf{I} \quad i\mathbf{I}) \exp(-i2\pi\omega m) d\omega \\ &+ \int_{1 - \frac{k-1}{L} - \frac{1}{2L}}^{1 - \frac{k-1}{L} + \frac{1}{2L}} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ i\mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{F}(\omega) (\mathbf{I} \quad -i\mathbf{I}) \exp(-i2\pi\omega m) d\omega. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Se designa $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}(\frac{k-1}{L})$ para simplificar las futuras expansiones. La primera integral de (3.42) se puede aproximar a

$$\frac{1}{L} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -i\mathbf{I} \end{pmatrix} \left[\operatorname{Re}(\mathbf{F}_k) + i \operatorname{Im}(\mathbf{F}_k) \right] (\mathbf{I} \quad i\mathbf{I}) \left[\cos(2\pi m \omega_k) - i \sin(2\pi m \omega_k) \right],$$

siendo más precisa la aproximación cuanto mayor sea L . Desarrollando dicha expresión se llega a que su parte real es

$$\frac{1}{L} \left[\cos(2\pi m \omega_k) \begin{pmatrix} \text{Re}(\mathbf{F}_k) & -\text{Im}(\mathbf{F}_k) \\ \text{Im}(\mathbf{F}_k) & \text{Re}(\mathbf{F}_k) \end{pmatrix} + \sin(2\pi m \omega_k) \begin{pmatrix} \text{Im}(\mathbf{F}_k) & \text{Re}(\mathbf{F}_k) \\ -\text{Re}(\mathbf{F}_k) & \text{Im}(\mathbf{F}_k) \end{pmatrix} \right] \quad (3.43)$$

y su parte imaginaria

$$\frac{1}{L} \left[\cos(2\pi m \omega_k) \begin{pmatrix} \text{Im}(\mathbf{F}_k) & \text{Re}(\mathbf{F}_k) \\ -\text{Re}(\mathbf{F}_k) & \text{Im}(\mathbf{F}_k) \end{pmatrix} - \sin(2\pi m \omega_k) \begin{pmatrix} \text{Re}(\mathbf{F}_k) & -\text{Im}(\mathbf{F}_k) \\ \text{Im}(\mathbf{F}_k) & \text{Re}(\mathbf{F}_k) \end{pmatrix} \right]. \quad (3.44)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que $\mathbf{F}(1-\omega) = \bar{\mathbf{F}}(\omega)$, la segunda integral de (3.42) se puede aproximar a

$$\frac{1}{L} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ i\mathbf{I} \end{pmatrix} [\text{Re}(\mathbf{F}_k) - i \text{Im}(\mathbf{F}_k)] (\mathbf{I} \quad -i\mathbf{I}) [\cos(2\pi m \omega_k) + i \sin(2\pi m \omega_k)].$$

Expandiendo dicho término, su parte real queda

$$\frac{1}{L} \left[\cos(2\pi m \omega_k) \begin{pmatrix} \text{Re}(\mathbf{F}_k) & -\text{Im}(\mathbf{F}_k) \\ \text{Im}(\mathbf{F}_k) & \text{Re}(\mathbf{F}_k) \end{pmatrix} + \sin(2\pi m \omega_k) \begin{pmatrix} \text{Im}(\mathbf{F}_k) & \text{Re}(\mathbf{F}_k) \\ -\text{Re}(\mathbf{F}_k) & \text{Im}(\mathbf{F}_k) \end{pmatrix} \right] \quad (3.45)$$

y su parte imaginaria

$$\frac{1}{L} \left[-\cos(2\pi m \omega_k) \begin{pmatrix} \text{Im}(\mathbf{F}_k) & \text{Re}(\mathbf{F}_k) \\ -\text{Re}(\mathbf{F}_k) & \text{Im}(\mathbf{F}_k) \end{pmatrix} + \sin(2\pi m \omega_k) \begin{pmatrix} \text{Re}(\mathbf{F}_k) & -\text{Im}(\mathbf{F}_k) \\ \text{Im}(\mathbf{F}_k) & \text{Re}(\mathbf{F}_k) \end{pmatrix} \right]. \quad (3.46)$$

Las expresiones (3.43) y (3.45) son idénticas y la suma de (3.44) y (3.46) es cero. Por ello, la aproximación de la matriz de covarianzas de (3.41) está dada por

$$\Gamma_{y_k}(m) \cong \frac{2}{L} \left[\cos(2\pi m \omega_k) \begin{pmatrix} \text{Re}(\mathbf{F}_k) & -\text{Im}(\mathbf{F}_k) \\ \text{Im}(\mathbf{F}_k) & \text{Re}(\mathbf{F}_k) \end{pmatrix} + \sin(2\pi m \omega_k) \begin{pmatrix} \text{Im}(\mathbf{F}_k) & \text{Re}(\mathbf{F}_k) \\ -\text{Re}(\mathbf{F}_k) & \text{Im}(\mathbf{F}_k) \end{pmatrix} \right]. \quad (3.47)$$

Si se compara esta aproximación con la siguiente expansión de la matriz $\Gamma_{y_k}(m)$, obtenida a partir del vector de (3.39), dada por

$$\Gamma_{y_k}(m) = \text{cov}(\mathbf{y}_{k,t}, \mathbf{y}_{k,t+m}) = \begin{pmatrix} \text{cov}(\mathbf{x}_{k,t}, \mathbf{x}_{k,t+m}) & \text{cov}(\mathbf{x}_{k,t}, \mathbf{x}_{k,t+m}^H) \\ \text{cov}(\mathbf{x}_{k,t}^H, \mathbf{x}_{k,t+m}) & \text{cov}(\mathbf{x}_{k,t}^H, \mathbf{x}_{k,t+m}^H) \end{pmatrix},$$

se concluye que la aproximación de la matriz de covarianzas cruzadas retardadas de la componente oscilatoria vectorial ideal, $\mathbf{x}_{k,t}$, asociada a la frecuencia ω_k está dada por

$$\Gamma_{\mathbf{x}_k}(m) = \text{cov}(\mathbf{x}_{k,t}, \mathbf{x}_{k,t+m}) \cong \frac{2}{L} \left[\cos(2\pi m \omega_k) \text{Re}(\mathbf{F}_k) + \sin(2\pi m \omega_k) \text{Im}(\mathbf{F}_k) \right], \quad (3.48)$$

para $m = 0, \pm 1, \dots$, donde el coeficiente $\frac{2}{L}$ se sustituye por $\frac{1}{L}$ si la frecuencia es $\omega_k = 0$ ó $\omega_k = \frac{1}{2}$. Esta aproximación amplía el resultado que Brillinger (1981) obtiene sólo para $m = 0$. Además, porque la función matricial $\mathbf{F}(\omega)$ es Hermitiana, se verifica que

$$\Gamma_{\mathbf{x}_k}(-m) = \Gamma_{\mathbf{x}_k}(m)^\top. \quad (3.49)$$

Sea $B_k = \{B_{k,m} \forall m / 1 \leq m \leq M\} = \{(k, m) \wedge (L+2-k, m) \forall m / 1 \leq m \leq M\}$ el grupo elemental por frecuencia con todos los pares elementales asociados a la frecuencia ω_k . Dada la realización de una serie temporal vectorial, no se puede conocer la componente oscilatoria vectorial ideal asociada a un entorno de la frecuencia ω_k de ancho de banda $\frac{1}{L}$, $\mathbf{x}_{k,t}$, pero sí una estimación que se corresponde con la componente reconstruida vectorial obtenida de la matriz asociada al grupo B_k , $\tilde{\mathbf{x}}_{B_k,t}$, es decir,

$$\hat{\mathbf{x}}_{k,t} = \tilde{\mathbf{x}}_{B_k,t}. \quad (3.50)$$

Las estimaciones de las matrices \mathbf{F}_k se obtienen de la diagonalización por bloques de la matriz circulante por bloques \mathbf{S}_C dada en (3.25) y producen la siguiente estimación de la matriz de covarianzas cruzadas retardadas de la componente oscilatoria vectorial asociada a la frecuencia ω_k :

$$\hat{\Gamma}_{\mathbf{x}_k}(m) = \frac{2}{L} \left[\cos(2\pi m \omega_k) \text{Re}(\hat{\mathbf{F}}_k) + \sin(2\pi m \omega_k) \text{Im}(\hat{\mathbf{F}}_k) \right], \quad m = 0, \pm 1, \dots. \quad (3.51)$$

No obstante, lo más habitual es estudiar la suma de un conjunto de componentes oscilatorias ideales centradas en p frecuencias $\omega_{k_j} = \frac{k_j-1}{L}$, $j = 1, \dots, p$, con igual ancho de banda $\frac{1}{L}$ correspondientes a un grupo de filtros paso-banda mutuamente excluyentes, es decir, definidos sobre intervalos disjuntos. Así, el ciclo económico y la estacionalidad son ejemplos de estos grupos de filtros paso-banda donde, además, la unión de los intervalos del ciclo económico forma un intervalo sin discontinuidades. Sea $I = \{k_1, \dots, k_p\}$ un conjunto de frecuencias para cada una de las cuales se define el filtro sumable $2M \times M$ que da lugar a la serie vectorial ideal definida en (3.39). Entonces, la

serie vectorial ideal asociada al grupo I se obtiene como la suma dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{I,t} &= \sum_{j=1}^p \mathbf{y}_{k_j,t} = \sum_{j=1}^p \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{h}_{k_j}(s) \mathbf{x}_{t-s} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^p \mathbf{h}_{k_j}(s) \right) \mathbf{x}_{t-s} \\ &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{h}_I(s) \mathbf{x}_{t-s} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^p \mathbf{x}_{k_j,t} \\ \sum_{j=1}^p \mathbf{x}_{k_j,t}^H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{I,t} \\ \mathbf{x}_{I,t}^H \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Por ello, se genera un filtro sumable $2M \times M$ $\{\mathbf{h}_I(s)\}$ como suma de los filtros individuales $\{\mathbf{h}_{k_j}(s)\}$ cuya función de transferencia es

$$\mathbf{H}_I(\omega) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -i \operatorname{sgn}(\frac{1}{2} - \omega) \mathbf{I} \end{pmatrix} & \text{si } \left| \omega - \frac{k_j-1}{L} \right| < \frac{1}{2L} \text{ ó } \left| \omega - \left(1 - \frac{k_j-1}{L}\right) \right| < \frac{1}{2L} \forall k_j \in I, \omega \in [0,1]. \\ \mathbf{0} & \text{resto} \end{cases} \quad (3.53)$$

Ahora, para la componente oscilatoria vectorial ideal, $\mathbf{x}_{I,t} = \sum_{j=1}^p \mathbf{x}_{k_j,t}$, asociada al conjunto I , el interés se centra en calcular su matriz de covarianzas cruzadas retardadas, $\Gamma_{\mathbf{x}_I}(m) = \operatorname{cov}(\mathbf{x}_{I,t}, \mathbf{x}_{I,t+m})$. Cuando $k_j \neq k_i$, las series de las componentes vectoriales ideales $\mathbf{x}_{k_j,t}$ y $\mathbf{x}_{k_i,t}$ son independientes entre ellas y, por tanto, no correlacionadas, es decir, $\operatorname{cov}(\mathbf{x}_{k_j,t}, \mathbf{x}_{k_i,t+m}) = \mathbf{0} \quad \forall m \in \mathbb{Z}$. Así, la aproximación de la matriz $\Gamma_{\mathbf{x}_I}(m)$ es

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbf{x}_I}(m) &= \operatorname{cov}(\mathbf{x}_{I,t}, \mathbf{x}_{I,t+m}) = \sum_{j=1}^p \operatorname{cov}(\mathbf{x}_{k_j,t}, \mathbf{x}_{k_j,t+m}) + \sum_{j=1}^p \sum_{i \neq j} \operatorname{cov}(\mathbf{x}_{k_j,t}, \mathbf{x}_{k_i,t+m}) \\ &\cong \frac{2}{L} \sum_{k \in I} \Gamma_{\mathbf{x}_k}(m). \end{aligned} \quad (3.54)$$

De nuevo, cuando se dispone de una realización de una serie vectorial, no se puede conocer la componente vectorial ideal asociada al conjunto I pero si una estimación dada por la serie vectorial reconstruida, $\tilde{\mathbf{x}}_{I,t}$, obtenida a partir de la matriz asociada al grupo I . Dicha estimación también se puede concebir como la suma de las componentes vectoriales reconstruidas derivadas de las matrices correspondientes a los grupos elementales por frecuencia B_k pertenecientes a I , esto es,

$$\hat{\mathbf{x}}_{I,t} = \tilde{\mathbf{x}}_{I,t} = \sum_{k \in I} \tilde{\mathbf{x}}_{B_k,t}. \quad (3.55)$$

De forma equivalente al caso de una frecuencia, la estimación de las matrices de covarianzas cruzadas de la componente vectorial reconstruida asociada al conjunto I , teniendo en cuenta (3.51) y (3.54), está dada por

$$\hat{\Gamma}_{\mathbf{x}_I}(m) = \frac{2}{L} \sum_{k \in I} \hat{\Gamma}_{\mathbf{x}_k}(m). \quad (3.56)$$

3.4.2 Modelo Factorial

Sea $\mathbf{x}_{k,t} = (x_{k,t}^{(1)}, \dots, x_{k,t}^{(M)})^\top$ la serie temporal vectorial M -dimensional que se corresponde con la componente oscilatoria vectorial ideal asociada a la frecuencia $\omega_k = \frac{k-1}{L}$ con ancho de banda $\frac{1}{L}$. Se asume que las series del vector $\mathbf{x}_{k,t}$ para una frecuencia dada ω_k son generadas por el siguiente modelo factorial

$$\mathbf{x}_{k,t} = \boldsymbol{\mu}_k + \mathbf{A}_k \mathbf{z}_{k,t} + \boldsymbol{\varepsilon}_{k,t} \quad (3.57)$$

con los siguientes supuestos:

- I. El vector $M \times 1$ $\boldsymbol{\mu}_k$ es la esperanza de $\mathbf{x}_{k,t}$, $\boldsymbol{\mu}_k = E(\mathbf{x}_{k,t})$.
- II. La serie temporal vectorial $\mathbf{z}_{k,t}$ es un vector $r \times 1$, $r \ll M$, de factores comunes no observables con $E(\mathbf{z}_{k,t}) = \mathbf{0}$. Los factores comunes están mutuamente no correlacionados para todos los retardos pero individualmente están correlacionados serialmente. Ello significa que la matriz $\Gamma_{\mathbf{z}_k}(m) = \text{cov}(\mathbf{z}_{k,t}, \mathbf{z}_{k,t+m})$ es diagonal y $\Gamma_{\mathbf{z}_k}(m) = \Gamma_{\mathbf{z}_k}(-m)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.
- III. La matriz $M \times r$ \mathbf{A}_k es la matriz real de cargas factoriales, los coeficientes constantes que describen cómo los factores comunes afectan a las series del vector $\mathbf{x}_{k,t}$.
- IV. La serie temporal vectorial $\boldsymbol{\varepsilon}_{k,t}$ es un vector $M \times 1$ de perturbaciones o factores idiosincráticos con $E(\boldsymbol{\varepsilon}_{k,t}) = \mathbf{0}$. Las perturbaciones son ruidos blancos, es decir, están mutuamente no correlacionadas e individualmente no correlacionadas serialmente. Por ello, la matriz $\Sigma_k = \text{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_{k,t}, \boldsymbol{\varepsilon}_{k,t}) = E(\boldsymbol{\varepsilon}_{k,t} \boldsymbol{\varepsilon}_{k,t}^\top)$ es diagonal con las varianzas de los factores idiosincráticos y $\Gamma_{\boldsymbol{\varepsilon}_k}(m) = \text{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_{k,t}, \boldsymbol{\varepsilon}_{k,t+m}) = \mathbf{0}$ para todo $|m| \in \mathbb{Z}^+$.

V. Los factores comunes $\mathbf{z}_{k,t}$ no están correlacionados con las perturbaciones $\boldsymbol{\varepsilon}_{k,t}$ para todos los retardos, es decir, $\text{cov}(\mathbf{z}_{k,t}, \boldsymbol{\varepsilon}_{k,t+m}) = \mathbf{0}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.

VI. Se asume la normalización $\mathbf{A}_k^\top \mathbf{A}_k = \mathbf{I}$ donde \mathbf{I} es la matriz identidad.

El modelo factorial dado en (3.57) está expresado en el dominio de la frecuencia donde el espectro se ha dividido en bandas de forma similar a Geweke (1977) pero con la diferencia que el modelo especificado admite factores comunes correlacionados serialmente de forma individual pero sin exigir gaussianidad. Además, la matriz de covarianzas contemporáneas de $\mathbf{x}_{k,t}$ está dada por

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}_k}(0) = \mathbf{A}_k \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{z}_k}(0) \mathbf{A}_k^\top + \boldsymbol{\Sigma}_k \quad (3.58)$$

donde, debido a (3.48), se tiene que

$$\mathbf{A}_k \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{z}_k}(0) \mathbf{A}_k^\top + \boldsymbol{\Sigma}_k \cong \frac{2}{L} \text{Re}(\mathbf{F}_k). \quad (3.59)$$

Por ello, $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{z}_k}(0)$ y $\boldsymbol{\Sigma}_k$ dependen de la función matricial de densidad espectral de la serie vectorial original en la frecuencia $\boldsymbol{\omega}_k$ y corrobora que el modelo factorial descrito está definido en el dominio de la frecuencia.

El modelo enunciado en (3.57) presenta una doble indeterminación. En primer lugar, si los factores $\mathbf{z}_{k,t}$ no están correlacionados y \mathbf{B} es una matriz no singular $r \times r$, llamando $\tilde{\mathbf{A}}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{B}$ a la nueva matriz de cargas y $\tilde{\mathbf{z}}_{k,t} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{z}_{k,t}$ a los nuevos factores, el modelo (3.57) se puede escribir como

$$\mathbf{x}_{k,t} = \boldsymbol{\mu}_k + \mathbf{A}_k \mathbf{B} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{z}_{k,t} + \boldsymbol{\varepsilon}_{k,t} = \boldsymbol{\mu}_k + \tilde{\mathbf{A}}_k \tilde{\mathbf{z}}_{k,t} + \boldsymbol{\varepsilon}_{k,t}. \quad (3.60)$$

Por esto, se obtienen unos nuevos factores equivalentes a los anteriores, $\mathbf{A}_k \mathbf{z}_{k,t} = \tilde{\mathbf{A}}_k \tilde{\mathbf{z}}_{k,t}$, que están mutuamente correlacionados porque la matriz de covarianzas retardadas $\boldsymbol{\Gamma}_{\tilde{\mathbf{z}}_k}(m) = E(\tilde{\mathbf{z}}_{k,t} \tilde{\mathbf{z}}_{k,t+m}^\top) = \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{z}_k}(m) (\mathbf{B}^{-1})^\top$ no es diagonal. El supuesto II resuelve esta indeterminación por elegir siempre factores no correlacionados. En segundo lugar, si \mathbf{B} es una matriz ortogonal, $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^\top$, se obtiene una rotación tanto de la matriz de cargas, $\hat{\mathbf{A}}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{B}$, como de los factores comunes, $\hat{\mathbf{z}}_{k,t} = \mathbf{B}^\top \mathbf{z}_{k,t}$. El modelo representado en (3.57) no se distingue del modelo derivado de la rotación ortogonal

$$\mathbf{x}_{k,t} = \boldsymbol{\mu}_k + \mathbf{A}_k \mathbf{B} \mathbf{B}^\top \mathbf{z}_{k,t} + \boldsymbol{\varepsilon}_{k,t} = \boldsymbol{\mu}_k + \widehat{\mathbf{A}}_k \widehat{\mathbf{z}}_{k,t} + \boldsymbol{\varepsilon}_{k,t} .$$

Es decir, aunque la matriz de cargas \mathbf{A}_k sea diferente a la matriz de cargas $\widehat{\mathbf{A}}_k$, se verifica que $\widehat{\mathbf{A}}_k \widehat{\mathbf{A}}_k^\top = \mathbf{A}_k \mathbf{B} \mathbf{B}^\top \mathbf{A}_k^\top = \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^\top$ y ambos modelos generan la misma descomposición de la matriz de covarianzas contemporáneas de $\mathbf{x}_{k,t}$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}_k}(0) = \mathbf{A}_k \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{z}_k}(0) \mathbf{A}_k^\top + \boldsymbol{\Sigma}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{B} \mathbf{B}^\top \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{z}_k}(0) \mathbf{B} \mathbf{B}^\top \mathbf{A}_k^\top + \boldsymbol{\Sigma}_k = \widehat{\mathbf{A}}_k \boldsymbol{\Gamma}_{\widehat{\mathbf{z}}_k}(0) \widehat{\mathbf{A}}_k^\top + \boldsymbol{\Sigma}_k .$$

Esta indeterminación se elimina estableciendo la normalización del supuesto VI. Cuando dicha normalización se verifica, si los términos de la expresión (3.58) se postmultiplican por \mathbf{A}_k se puede escribir

$$\left[\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}_k}(0) - \boldsymbol{\Sigma}_k \right] \mathbf{A}_k = \mathbf{A}_k \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{z}_k}(0) ,$$

es decir, las columnas de \mathbf{A}_k son los autovectores de la matriz $\left[\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}_k}(0) - \boldsymbol{\Sigma}_k \right]$ y la matriz diagonal $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{z}_k}(0)$ contiene los autovalores asociados que son positivos por representar las varianzas de los factores comunes. En consecuencia, combinando las $r(r-1)/2$ restricciones derivadas de la diagonalidad del supuesto II con las $r(r+1)/2$ restricciones obtenidas por la normalización del supuesto VI resultan las r^2 restricciones necesarias para determinar de forma única, salvo un cambio de signo, los factores comunes $\mathbf{z}_{k,t}$ y la matriz de cargas \mathbf{A}_k ante cualquier transformación dada por una matriz no singular $r \times r$. La indeterminación del signo se resuelve con la corrección $[\mathbf{A}_k]_{\cdot j} = \text{sgn} \left(\sum_{i=1}^M [\mathbf{A}_k]_{i,j} \right) \times [\mathbf{A}_k]_{\cdot j}$ para toda columna $[\mathbf{A}_k]_{\cdot j}$ de la matriz \mathbf{A}_k .

La matriz de covarianzas cruzadas retardadas de $\mathbf{x}_{k,t}$, $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}_k}(m)$, en general, no es simétrica. La diagonalidad del supuesto II, la no correlación serial de los factores idiosincráticos del supuesto IV y la no correlación entre los factores comunes y los idiosincráticos del supuesto V permiten definir la siguiente matriz modificada de covarianzas cruzadas retardadas

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{x}_k}(m) &= \frac{1}{2} \left[\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}_k}(m) + \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}_k}(m)^\top \right] = \frac{1}{2} \left[\mathbf{A}_k \left(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{z}_k}(m) + \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{z}_k}(m)^\top \right) \mathbf{A}_k^\top \right] \\ &= \mathbf{A}_k \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{z}_k}(m) \mathbf{A}_k^\top , \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (3.61)$$

Por otro lado, (3.48) y (3.49) implican la siguiente aproximación

$$\Psi_{x_k}(m) \cong \frac{2}{L} \cos(2\pi m \omega_k) \operatorname{Re}(\mathbf{F}_k), \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.62)$$

Las matrices $\Psi_{x_k}(m)$ son simétricas. Entonces, las columnas de la matriz \mathbf{A}_k son sus autovectores ortogonales y la matriz diagonal $\Gamma_{z_k}(m)$ contiene los autovalores asociados. En consecuencia, las matrices \mathbf{A}_k quedan perfectamente determinadas porque son las mismas para todo $|m| \geq 1$. Por tanto, para el modelo factorial de (3.57), las columnas de la matriz de cargas \mathbf{A}_k son los autovectores de la matriz $\operatorname{Re}(\mathbf{F}_k)$ y, además, el número de factores comunes r es el rango de $\operatorname{Re}(\mathbf{F}_k)$, $r = \operatorname{rank}(\operatorname{Re}(\mathbf{F}_k))$.

En el supuesto IV, según Bai y Ng (2008), se puede admitir que las perturbaciones no sean ruido blanco de forma que exista débil correlación serial y cruzada en los factores idiosincráticos. Esto origina que la matriz $\Sigma_k = \Gamma_{\varepsilon_k}(0) = \operatorname{cov}(\varepsilon_{k,t}, \varepsilon_{k,t})$ no sea diagonal pero simétrica y que las matrices $\Gamma_{\varepsilon_k}(m) = \operatorname{cov}(\varepsilon_{k,t}, \varepsilon_{k,t+m})$ para todo $|m| \in \mathbb{Z}^+$ no sean nulas pero antisimétricas, $\Gamma_{\varepsilon_k}(m)^\top = \Gamma_{\varepsilon_k}(-m)$. Esta reforma del supuesto IV no varía la expresión (3.58) de la matriz de covarianzas contemporáneas de $\mathbf{x}_{k,t}$. Sin embargo, la fórmula (3.61) de la matriz modificada de covarianzas retardadas ahora es

$$\Psi_{x_k}(m) = \mathbf{A}_k \Gamma_{z_k}(m) \mathbf{A}_k^\top + \frac{1}{2} (\Gamma_{\varepsilon_k}(m) + \Gamma_{\varepsilon_k}(m)^\top).$$

Y, por tanto, las columnas de la matriz de cargas \mathbf{A}_k serán los autovectores de la matriz $\Psi_{x_k}(m) - \frac{1}{2} (\Gamma_{\varepsilon_k}(m) + \Gamma_{\varepsilon_k}(m)^\top)$ porque bajo el supuesto VI se obtiene que

$$\left[\Psi_{x_k}(m) - \frac{1}{2} (\Gamma_{\varepsilon_k}(m) + \Gamma_{\varepsilon_k}(m)^\top) \right] \mathbf{A}_k = \mathbf{A}_k \Gamma_{z_k}(m).$$

Por otro lado, cuando se selecciona un grupo de frecuencias $I = \{k_1, \dots, k_p\}$, en lugar de una sola frecuencia ω_k , todos los razonamientos previos son igualmente válidos y simplemente se debe sustituir el subíndice k por I . De este modo, el modelo factorial para componente oscilatoria vectorial asociada al conjunto I , con los mismos supuestos anteriores I a VI, queda expresado por

$$\mathbf{x}_{I,t} = \boldsymbol{\mu}_I + \mathbf{A}_I \mathbf{z}_{I,t} + \boldsymbol{\varepsilon}_{I,t} \quad (3.63)$$

Las ecuaciones (3.58) y (3.59), teniendo en cuenta (3.54), conducen a

$$\Gamma_{x_I}(0) = \mathbf{A}_I \Gamma_{z_I}(0) \mathbf{A}_I^\top + \Sigma_I \cong \frac{2}{L} \sum_{k \in I} \text{Re}(\mathbf{F}_k). \quad (3.64)$$

Y, también por (3.54), las expresiones (3.61) y (3.62) se transforman en

$$\Psi_{x_I}(m) = \mathbf{A}_I \Gamma_{z_I}(m) \mathbf{A}_I^\top \cong \frac{2}{L} \sum_{k \in I} \cos(2\pi m \omega_k) \text{Re}(\mathbf{F}_k), \quad (3.65)$$

siendo el número de factores r el rango de la matriz $\Psi_{x_I}(m)$, es decir,

$$r = \text{rank}(\Psi_{x_I}(m)) = \text{rank}\left(\sum_{k \in I} \text{Re}(\mathbf{F}_k)\right) \leq \sum_{k \in I} \text{rank}(\text{Re}(\mathbf{F}_k)). \quad (3.66)$$

3.4.3 Índice compuesto: estimación de los factores comunes

La construcción del índice compuesto mediante la estimación de uno de los factores comunes se centra directamente sobre una componente vectorial asociada a un grupo de frecuencias $I = \{k_1, \dots, k_p\}$ como puede ser el ciclo económico o la estacionalidad. La componente vectorial ideal asociada al conjunto I , $\mathbf{x}_{I,t}$, no se observa directamente pero se recuerda que puede ser estimada por (3.55) como $\hat{\mathbf{x}}_{I,t} = \sum_{k \in I} \tilde{\mathbf{x}}_{B_k,t}$, donde $\tilde{\mathbf{x}}_{B_k,t}$ es la componente vectorial reconstruida asociada al grupo elemental por frecuencia B_k .

Los factores se estiman con el método de Bartlett de mínimos cuadrados generalizados. Si se conocen las matrices de cargas factoriales, \mathbf{A}_I , y de varianzas de las perturbaciones, $\Sigma_I = E(\boldsymbol{\varepsilon}_{I,t} \boldsymbol{\varepsilon}_{I,t}^\top)$, el predictor de Bartlett para estimar los factores es

$$\mathbf{\Pi}_I = (\mathbf{A}_I^\top \Sigma_I^{-1} \mathbf{A}_I)^{-1} \mathbf{A}_I^\top \Sigma_I^{-1}, \quad (3.67)$$

pudiendo encontrar su derivación en Johnson y Wichern (2007). Por tanto, la estimación de los factores con este predictor está dada por

$$\hat{\mathbf{z}}_{I,t} = \mathbf{\Pi}_I (\hat{\mathbf{x}}_{I,t} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_I). \quad (3.68)$$

La matriz de covarianzas cruzadas contemporáneas de los factores estimados con el predictor de Bartlett, ver Gilbert y Meijer (2005), es

$$\text{cov}(\hat{\mathbf{z}}_{I,t}, \hat{\mathbf{z}}_{I,t}) = \mathbf{\Pi}_I \Gamma_{x_I}(0) \mathbf{\Pi}_I^\top = \Gamma_{z_I}(0) + (\mathbf{A}_I^\top \Sigma_I^{-1} \mathbf{A}_I)^{-1}. \quad (3.69)$$

Y de ello se deriva que

$$\Gamma_{z_I}(0) = \Pi_I \Gamma_{x_I}(0) \Pi_I^T - (\mathbf{A}_I^T \Sigma_I^{-1} \mathbf{A}_I)^{-1}. \quad (3.70)$$

En la práctica, sin embargo, dada la realización de una serie temporal vectorial, las matrices \mathbf{A}_I y Σ_I no son conocidas y deben ser estimadas. Por ello, para estimar los factores, después de haber realizado M-CSSA sobre la serie temporal vectorial \mathbf{x}_I , se establece el siguiente proceso que consta de cuatro fases.

Fase 1:

Se establece el conjunto $I = \{k_1, \dots, k_p\}$ correspondiente a las frecuencias de referencia de la componente oscilatoria vectorial para la que se desea construir el índice compuesto. Para dicha componente oscilatoria vectorial, $\mathbf{x}_{I,t}$, se efectúa su estimación, $\hat{\mathbf{x}}_{I,t}$, mediante (3.55) y, si fuera necesario, su esperanza con $\hat{\boldsymbol{\mu}}_I = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\mathbf{x}}_{I,t}$.

Fase 2:

A partir de las estimaciones $\hat{\mathbf{F}}_k$ obtenidas con M-CSSA se estima $\Gamma_{x_I}(0)$ mediante

$$\hat{\Gamma}_{x_I}(0) = \frac{2}{L} \sum_{k \in I} \text{Re}(\hat{\mathbf{F}}_k).$$

Además, con las mismas estimaciones $\hat{\mathbf{F}}_k$, se calcula la matriz simétrica $M \times M$

$$\hat{\Psi}_{x_I}(m) = \frac{2}{L} \sum_{k \in I} \cos(2\pi m \omega_k) \text{Re}(\hat{\mathbf{F}}_k), \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

y se procede a su diagonalización ortogonal dada por

$$\hat{\Psi}_{x_I}(m) = \hat{\mathbf{A}}_I \hat{\Gamma}_{z_I}(m) \hat{\mathbf{A}}_I^T.$$

Las columnas de la matriz estimada de cargas $\hat{\mathbf{A}}_I$ son los autovectores de la matriz $\hat{\Psi}_{x_I}(m)$ asociados a los autovalores no nulos, $\hat{\tau}_j(m)$, que se corresponden con los elementos de la matriz diagonal $\hat{\Gamma}_{z_I}(m)$, es decir, con las autocovarianzas estimadas de retardo m de los factores comunes. En consecuencia, el número de dichos factores comunes es el rango de la matriz $\hat{\Psi}_{x_I}(m)$, $r = \text{rank}(\hat{\Psi}_{x_I}(m))$, esto es, el número de

autovalores no nulos de $\hat{\Psi}_{x_t}(m)$. Por simplicidad se puede tomar $m = 1$.

Fase 3:

La estimación del predictor de Bartlett, $\hat{\Pi}_I$, se obtiene iterativamente. Para ello es necesario una estimación inicial de la matriz de covarianzas de las perturbaciones, $\hat{\Sigma}_I$, siendo $\hat{\Sigma}_I^{-1} = \text{diag}(\hat{\Gamma}_{x_t}(0)^{-1})$ la más utilizada. Los pasos del algoritmo son:

- 1) Con la expresión (3.67) se estima Π_I , $\hat{\Pi}_I = (\hat{\mathbf{A}}_I^T \hat{\Sigma}_I^{-1} \hat{\mathbf{A}}_I)^{-1} \hat{\mathbf{A}}_I^T \hat{\Sigma}_I^{-1}$, y se estudia su posible convergencia a partir de la segunda iteración.
- 2) Si $\hat{\Pi}_I$ no converge, es necesario estimar $\Gamma_{z_t}(0)$ a partir de la expresión (3.70),

$$\hat{\Gamma}_{z_t}(0) = \text{diag}(\hat{\Pi}_I \hat{\Gamma}_{x_t}(0) \hat{\Pi}_I^T - (\hat{\mathbf{A}}_I^T \hat{\Sigma}_I^{-1} \hat{\mathbf{A}}_I)^{-1}).$$

- 3) Se estima de nuevo la matriz Σ_I utilizando ahora la fórmula (3.64),

$$\hat{\Sigma}_I = \text{diag}(\hat{\Gamma}_{x_t}(0) - \hat{\mathbf{A}}_I \hat{\Gamma}_{z_t}(0) \hat{\mathbf{A}}_I^T).$$

A continuación, se vuelve al primer paso para repetir el proceso hasta converger.

Fase 4:

Finalmente, con la estimación del predictor de Bartlett de la Fase 3, se estiman los factores comunes a partir de la expresión (3.68), $\hat{\mathbf{z}}_{I,t} = \hat{\Pi}_I (\hat{\mathbf{x}}_{I,t} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_I)$, obteniendo el índice compuesto que recoge la naturaleza dinámica subyacente compartida por las componentes oscilatorias reconstruidas.

En el caso de que en el supuesto IV se admita débil correlación serial y cruzada en los factores idiosincráticos, las fases 2 y 3 varían. En la Fase 2 se deben estimar las matrices \mathbf{A}_I y Σ_I , bien por máxima verosimilitud, bien por el método del Factor Principal. Y, en la Fase 3 el predictor de Bartlett se estima de forma directa a partir de (3.67) con las estimaciones previas de \mathbf{A}_I y Σ_I .

3.5 Aplicación real

El objetivo de esta sección es ilustrar las capacidades de M-CSSA con datos reales. Se van a efectuar dos casos prácticos, uno referido a un sector económico y otro a una zona geográfica. Con ello se pretende resaltar el potencial de M-CSSA para asignar *ex-ante* las frecuencias de los patrones temporales identificados, separar mediante las subcomponentes estimadas la señal del ruido en una componente oscilatoria reconstruida y confeccionar índices compuestos con los patrones espaciales extraídos.

3.5.1 Sector económico

Se considera el Índice de Producción Industrial (IPI) de EE.UU. (Base 2012=100) desagregado por grupos de mercado en 21 series junto con el IPI Total para realizar comparaciones. Las 22 series son mensuales, de longitud $T = 576$, abarcan desde enero de 1970 hasta diciembre de 2017, no están corregidas de estacionalidad y se han obtenido de la base de datos de la Reserva Federal de EE.UU.

La primera tarea es establecer la longitud de la ventana. Esta debe ser múltiplo de 12 porque las series son mensuales no corregidas de estacionalidad. Además, se desea extraer la componente cíclica o ciclo económico que, siguiendo a Carvalho y Rua (2017), se corresponde con las oscilaciones cuyo periodo está comprendido entre año y medio y ocho años. Finalmente se selecciona $L = 96$ que proporciona una adecuada desagregación de la densidad espectral y coincide con el mayor periodo de oscilación del ciclo económico.

Se realiza *Multivariate Circulant SSA* con $L = 96$ sobre el conjunto de las 21 series con los grupos de mercado para extraer las diferentes componentes y estimar las matrices de densidad espectral cruzada. Con el algoritmo M-CSSA, la tendencia se reconstruye con las subcomponentes relativas a los autovectores de la matriz $\hat{\mathbf{F}}_1$, los pares elementales por subcomponente y frecuencia $B_{1,m}$, con $m = 1, \dots, 21$, asociados con $\omega = 0$ porque $\omega_k = \frac{k-1}{L}$. La componente cíclica o ciclo económico se reconstruye con las subcomponentes correspondientes a los autovectores de las matrices $\hat{\mathbf{F}}_2$ a $\hat{\mathbf{F}}_6$ y $\hat{\mathbf{F}}_{92}$ a $\hat{\mathbf{F}}_{96}$, los pares elementales por subcomponente y frecuencia del $B_{2,m}$ al $B_{6,m}$, con

$m=1, \dots, 21$, asociados con $\omega=1/96, 1/48, 1/32, 1/24$ y $5/96$, respectivamente. Finalmente, la componente estacional se reconstruye con las subcomponentes relativas a los autovectores de las matrices $\hat{\mathbf{F}}_{8j+1}$, $j=1, \dots, 11$, los pares elementales por subcomponente y frecuencia $B_{8j+1,m}$, con $j=1, \dots, 6$ y $m=1, \dots, 21$, asociados con $\omega=1/12, 1/6, 1/4, 1/3, 5/12$ y $1/2$, respectivamente. También, se efectúa *Circulant SSA* con $L=96$ sobre la serie del IPI Total para extraer las mismas componentes que están asociadas a los respectivos grupos elementales por frecuencias B_k .

Las contribuciones de las componentes indican que la irregularidad supone menos del 2% tanto para el conjunto de las 21 series de grupos de mercado, de forma global, como para el IPI Total según aparece en la Tabla 3.1. La tendencia contribuye casi 10 puntos más en el caso univariante que de forma conjunta o promedio en el caso multivariante. Esta diferencia se traslada a las otras dos componentes del caso multivariante de forma que la componente cíclica tiene un peso notable de forma global para las 21 series y la componente estacional es más apreciable para el conjunto de los grupos de mercado. La mayor contribución de las componentes oscilatorias en el caso multivariante se debe a que en el caso univariante desaparece información porque las componentes de los grupos de mercado se compensan unas con otras cuando se agregan, aunque sea de forma ponderada, para construir el IPI Total.

Tabla 3.1 Contribuciones (%) de las componentes del conjunto de las 21 series de productos.

	Tendencia	Componente cíclica	Componente estacional	TOTAL
Conjunto 21 series	79,7	16,0	2,6	98,4
IPI Total	89,4	9,4	0,3	99,1

En M-CSSA es posible estimar la señal de un armónico mediante la suma de un número pequeño de sus subcomponentes. En la Figura 3.1 se representan los autovalores de las matrices de densidad espectral cruzada de la tendencia y las frecuencias incluidas en la componente cíclica. En la Tabla 3.2 se muestran las contribuciones acumuladas de las subcomponentes por frecuencia para la tendencia, los periodos asociados a la componente cíclica y el periodo anual. Del análisis de ambos

elementos se deduce que la señal de la tendencia puede ser reconstruida con la primera o, quizás, con las dos principales subcomponentes y las señales oscilatorias relativas a la componente cíclica con las dos o tres primeras. Ello induce a representar de forma gráfica, Figura 3.2, el primer y el segundo autovalor de cada matriz de densidad espectral estimada en función de la frecuencia. Dicha figura describe la densidad espectral global del sistema de las 21 series. Además de la tendencia, destacan las frecuencias estacionales, de forma más nítida en el gráfico del primer autovalor, lo cual implica la existencia de una estacionalidad significativa en el conjunto que posteriormente se atenúa al generar el IPI Total como media ponderada.

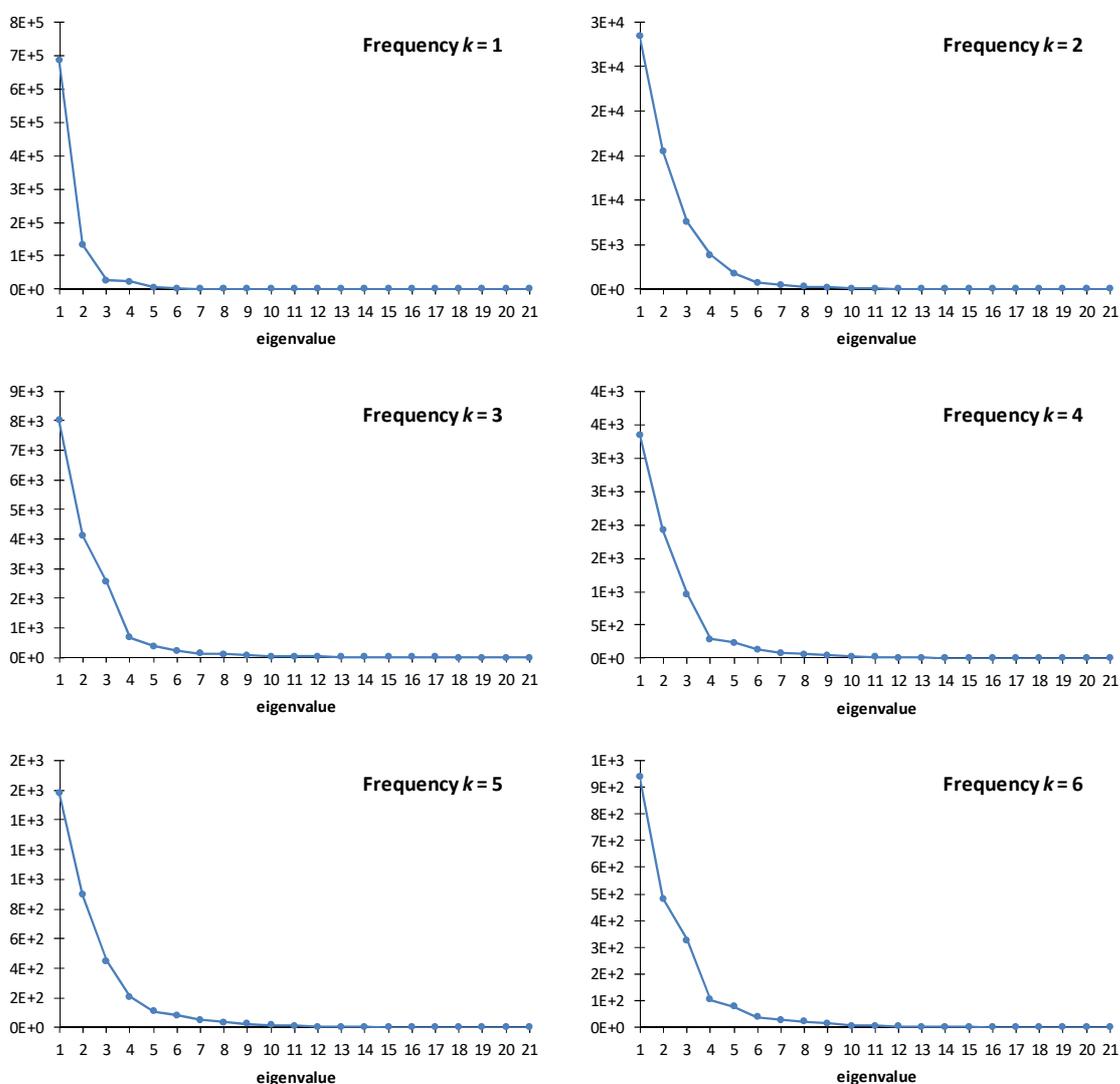


Figura 3.1 Gráficos de los autovalores de las matrices de densidad espectral de la tendencia y de las frecuencias asociadas a la componente cíclica del conjunto de las 21 series de los productos de mercado.

Tabla 3.2 Contribuciones acumuladas (%) de las subcomponentes en una frecuencia en el conjunto de las 21 series del IPI por grupos de mercado de EE.UU.

Periodo	Subcomponentes							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Infinito	78,3	93,5	96,5	99,1	99,8	99,9	100,0	100,0
96	48,2	74,5	87,3	93,8	96,8	98,1	98,9	99,3
48	48,8	74,1	89,6	93,7	96,0	97,4	98,2	98,8
36	46,9	73,8	87,2	91,2	94,5	96,3	97,5	98,3
24	45,5	71,1	84,0	89,9	93,0	95,4	96,9	97,9
19,2	45,4	68,8	84,5	89,6	93,4	95,3	96,8	97,9
12	75,7	85,3	90,7	94,3	96,6	97,8	98,6	99,1

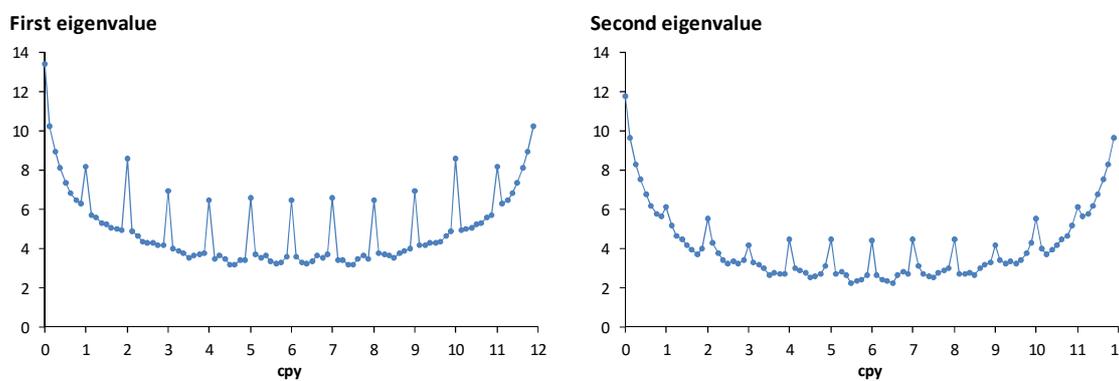


Figura 3.2 Primer y segundo log-autovalor de las matrices estimadas de densidad espectral cruzada, en el eje de abscisas aparece la frecuencia expresada en ciclos por año (cpy).

M-CSSA obtiene, además de los patrones temporales como CSSA, los patrones espaciales, la distribución del peso de las subcomponentes de una frecuencia en cada una de las series que intervienen en el estudio. Por ello, a partir del índice de participación definido en (3.29) es posible replicar la Tabla 3.2 para cada una de las series. A modo de muestra se consideran dos de las series de mayor importancia cotidiana: el grupo de otros bienes duraderos (equipos de informática, aparatos de vídeo y audio, electrodomésticos y muebles) y el grupo de bienes de consumo no energéticos no duraderos (alimentos, bebidas y tabaco, vestido y calzado, productos farmacéuticos y productos de papel). Respectivamente, en la Tabla 3.3 y Tabla 3.4 se muestran las contribuciones acumuladas de las subcomponentes para las mismas frecuencias de la Tabla 3.2. De un análisis comparado de las Tablas 3.3 y 3.4 se deduce que la primera subcomponente de la tendencia tiene mayor peso en la serie de otros bienes duraderos mientras que en el ciclo anual necesita las seis primeras subcomponentes para tener un

porcentaje de reconstrucción similar al que se obtendría con la primera en la otra serie. También se resalta que, en ambas series, la segunda subcomponente del ciclo de cuatro años apenas tiene influencia mientras que, en todas las frecuencias asociadas a la componente cíclica, la primera subcomponente pesa más en la serie de otros bienes duraderos que en la otra serie del ejemplo.

Tabla 3.3 Contribuciones acumuladas (%) de las subcomponentes en una frecuencia para la serie del grupo de otros bienes duraderos del IPI de EE.UU.

Periodo	Subcomponentes							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Infinito	85,9	97,3	98,9	98,9	99,9	100,0	100,0	100,0
96	65,5	81,0	92,9	94,1	96,4	98,5	99,1	99,3
48	81,1	81,4	90,5	92,8	96,5	97,9	98,5	99,2
36	70,8	78,4	84,8	84,8	94,0	96,3	97,6	98,1
24	61,2	71,8	88,4	88,8	91,0	92,9	97,5	98,1
19,2	68,6	83,2	86,6	88,2	91,5	94,4	95,0	97,0
12	47,1	60,5	68,9	72,5	90,9	91,7	93,8	95,1

Tabla 3.4 Contribuciones acumuladas (%) de las subcomponentes en una frecuencia para la serie del grupo de bienes de consumo no energéticos no duraderos del IPI de EE.UU.

Periodo	Subcomponentes							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Infinito	78,2	96,9	97,0	99,2	99,9	99,9	100,0	100,0
96	46,6	58,7	63,9	87,5	94,2	95,2	99,3	99,3
48	59,9	61,2	75,1	87,7	88,9	93,3	95,5	95,8
36	42,5	43,5	55,7	64,8	92,5	93,4	93,9	94,6
24	37,8	39,8	64,8	84,0	86,7	88,4	93,4	95,4
19,2	59,9	76,8	79,1	88,2	89,3	91,7	92,2	93,9
12	92,8	95,2	95,9	96,5	98,4	99,5	99,5	99,6

Como se ha mostrado en las secciones previas de este capítulo, la existencia de subcomponentes para una determinada frecuencia supone que la componente oscilatoria asociada se puede recomponer con un número pequeño de esas subcomponentes, es decir, se puede reconocer la formación sucesiva de la componente oscilatoria tanto en su amplitud como en sus puntos de giro. Así, la componente del ciclo de 96 meses de la serie del grupo de otros bienes duraderos se puede recomponer con las tres primeras subcomponentes que representan casi el 93% de la información, ver Tabla 3.3. Este

proceso de estimación de la señal se muestra de forma gráfica en la Figura 3.3 donde se representa la componente del ciclo de 96 meses obtenida por CSSA frente a la suma sucesiva de las tres primeras subcomponentes asociadas a dicho periodo. Se observa que, al ir sumando subcomponentes, los puntos de giro van coincidiendo con la componente estimada por CSSA y la diferencia de nivel con la suma de las tres primeras subcomponentes muestra los posibles shocks en dicho armónico.

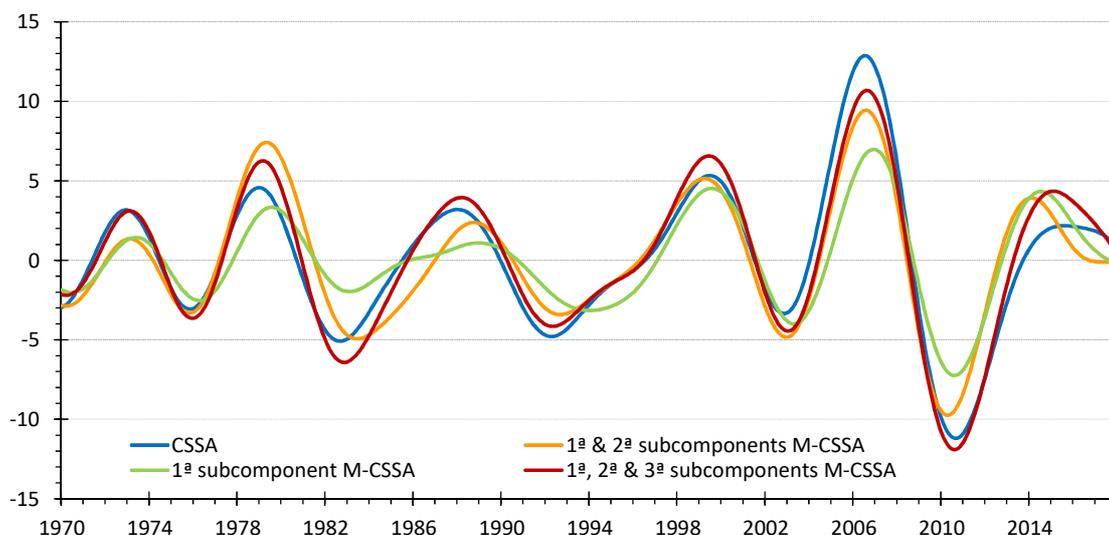


Figura 3.3 Ciclo de 96 meses del grupo de otros bienes duraderos: componente obtenida por CSSA y sumas sucesivas de las tres primeras subcomponentes obtenidas por M-CSSA.

Por otro lado, la capacidad de M-SSA de estimar las componentes oscilatorias junto con sus correspondientes comovimientos como resaltan Groth et al. (2011) se facilita en M-CSSA al identificar *ex-ante* todos los autovectores asociados a una frecuencia. Continuando con el ejemplo del ciclo de 96 meses, en las Figuras 3.4 y 3.5 se representan los segmentos correspondientes a cada una de las 21 series de los autovectores de la primera y segunda subcomponente, respectivamente. En la Figura 3.4 se observa la mayor o menor amplitud que tendrán las oscilaciones de las primeras subcomponentes en cada una de las 21 series. Otro aspecto que resalta en esa figura es que los ciclos que muestran los diferentes fragmentos son prácticamente coincidentes excepto dos: perforación de pozos de petróleo y gas y materiales textiles. El grupo de perforación de pozos está claramente adelantado al resto y el grupo de materiales

textiles (utilizados en los talleres de arreglos de prendas de vestir) es anticíclico. Estos hechos se reflejan en la Figura 3.6 donde aparecen las primeras subcomponentes del ciclo de 96 meses para las 21 series.

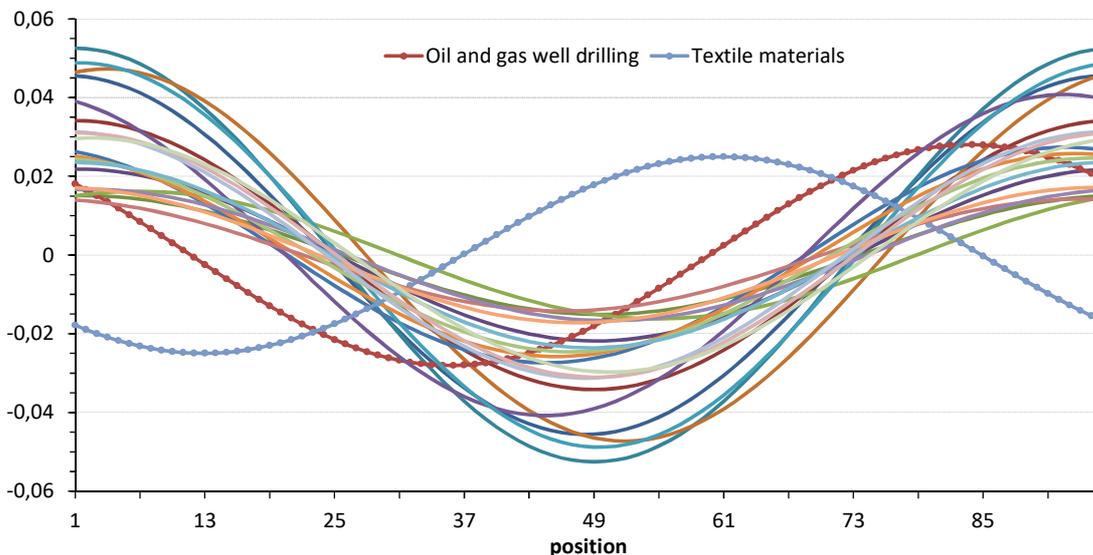


Figura 3.4 Segmentos del primer autovector del ciclo de 96 meses para cada una de las 21 series.

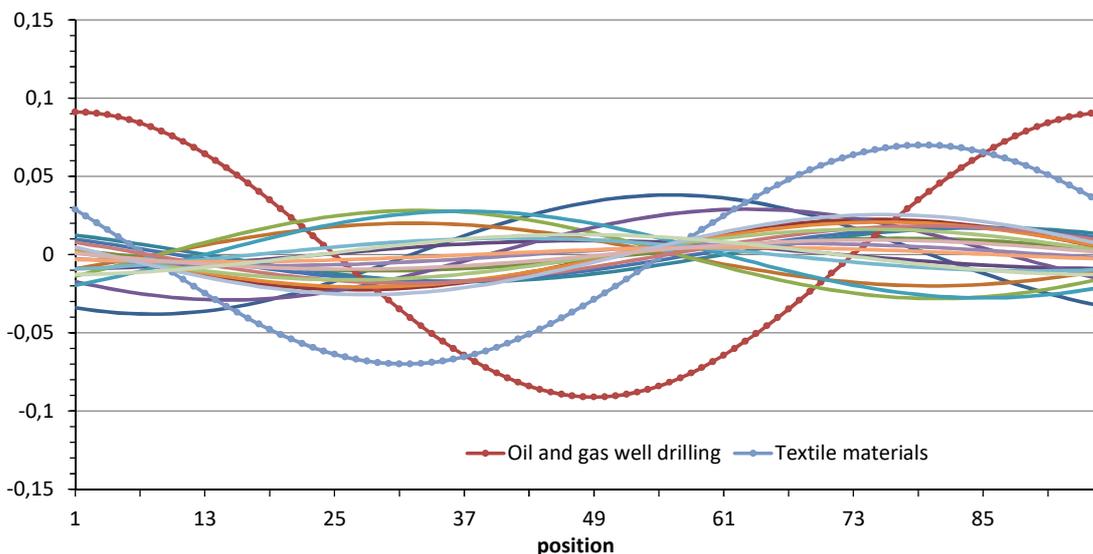


Figura 3.5 Segmentos del segundo autovector del ciclo de 96 meses para cada una de las 21 series.

No obstante, en la Figura 3.5 se distingue que las series tienen una posición y caracterización cíclica algo dispar pero poseen una amplitud similar excepto las dos

excepciones de la Figura 3.4 pero ahora estas tienen mayor amplitud. Todo ello se percibe en la Figura 3.7 donde se encuentran las segundas subcomponentes del ciclo de 96 meses de las 21 series. Aunque las amplitudes de las segundas subcomponentes puedan resultar mayores que las de las primeras, se debe tener presente que las primeras aportan el 48,2% frente al 26,3% de la información del ciclo de 96 meses.

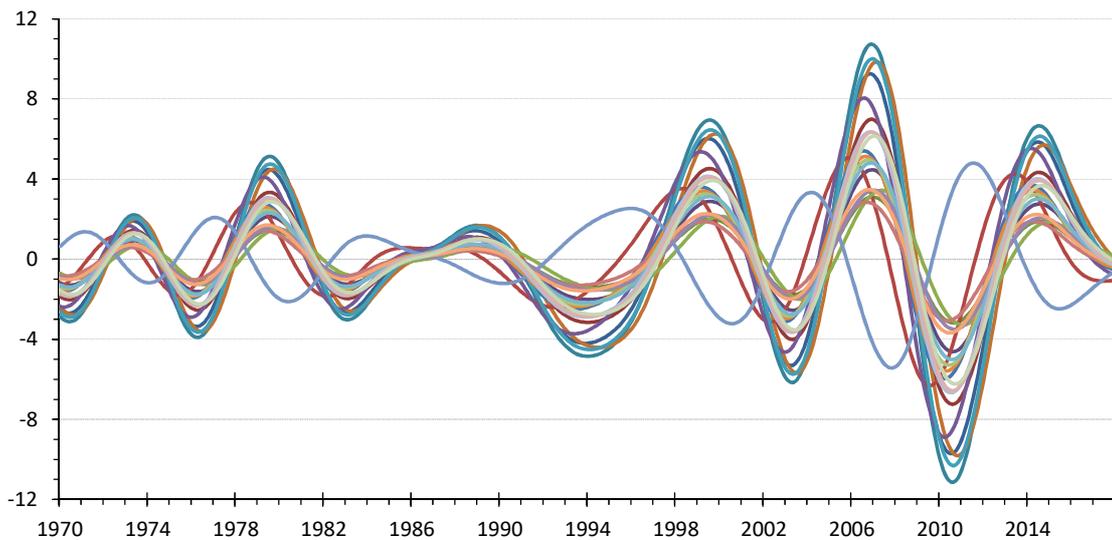


Figura 3.6 Primeras subcomponentes del ciclo de 96 meses para cada una de las 21 series.

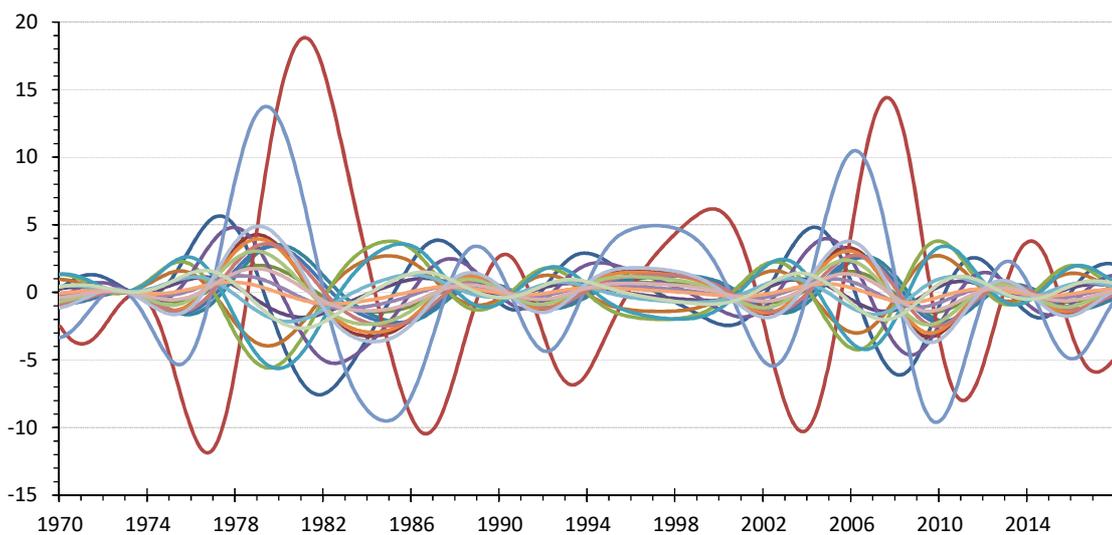


Figura 3.7 Segundas subcomponentes del ciclo de 96 meses para cada una de las 21 series.

Finalmente, se presentan dos ejemplos de índice compuesto, factor común. En la Figura 3.8 referido a una frecuencia, el ciclo de 96 meses, y en la Figura 3.9 a un grupo de frecuencias, el ciclo económico. En ambos casos se muestran con la componente oscilatoria equivalente estimada para el IPI Total mediante CSSA mostrando una gran coincidencia entre ellas. Además, el índice compuesto del ciclo económico caracteriza muy bien las recesiones anunciadas por la OCDE, zonas sombreadas, en la Figura 3.9.

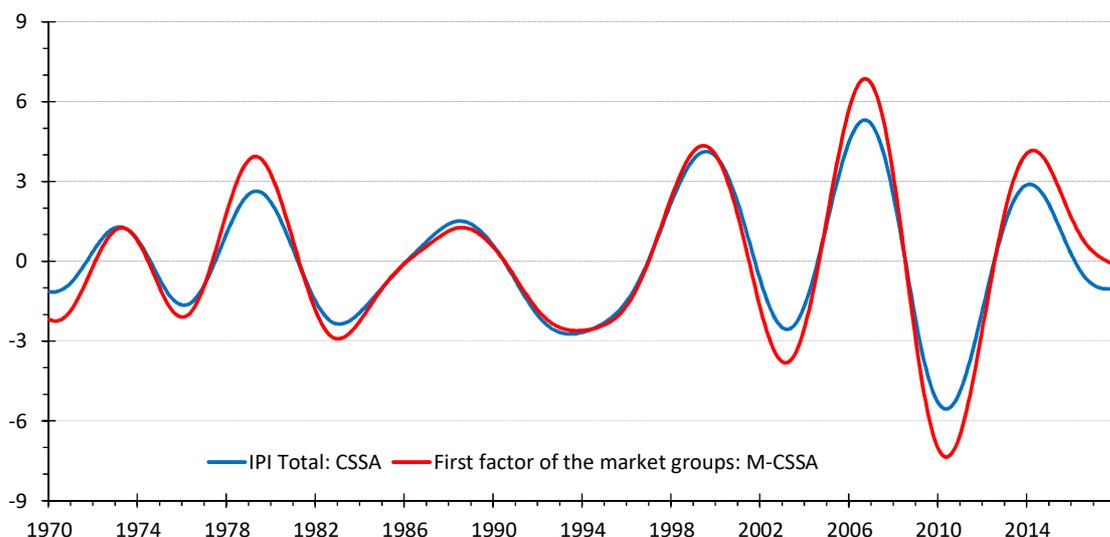


Figura 3.8 Ciclo de 96 meses: IPI Total con CSSA y primer factor grupos de mercado con M-CSSA.

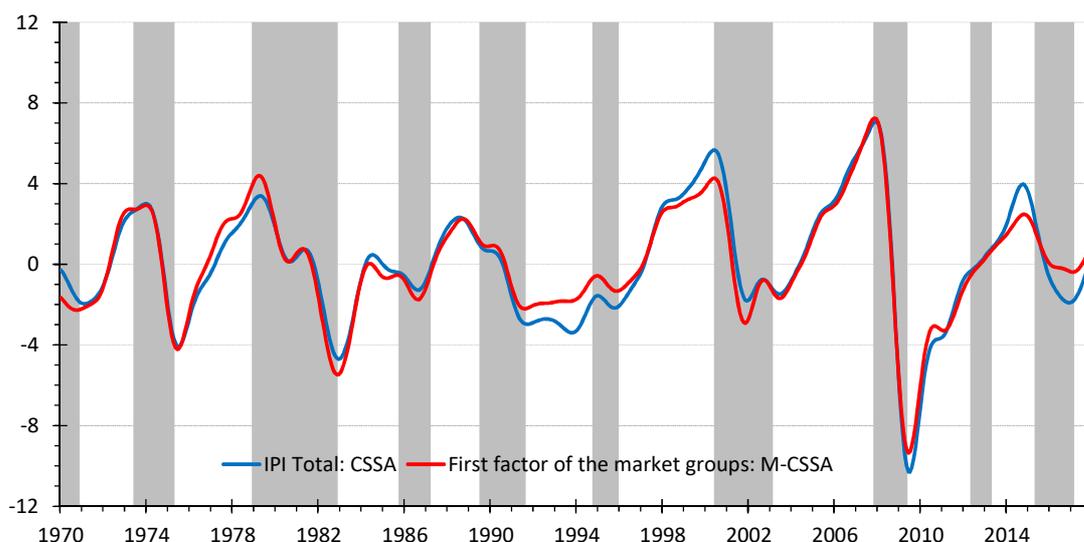


Figura 3.9 Ciclo económico: IPI Total con CSSA y primer factor grupos de mercado con M-CSSA.

3.5.2 Zona geográfica

Se considera el Producto Interior Bruto, PIB, en volumen según paridades de poder adquisitivo en millones de dólares americanos de 2010 para cada uno de los países de la “Europa de los quince” (correspondiente a la ampliación de la Unión Europea en 1995) y el PIB agregado de estos 15 países (EU-15). Las 16 series son trimestrales, de longitud $T = 232$, comprenden desde el primer trimestre de 1960 hasta el cuarto de 2017, están corregidas de estacionalidad y se han obtenido de la base de datos de la OCDE. Posteriormente las 16 series de PIB se convierten en índice con Base 2010=100 para poder efectuar distintas comparaciones entre los países.

Se establece la longitud de la ventana en $L = 32$ (ocho años) por las mismas razones que en el caso real previo. Se aplica *Multivariate Circulant SSA* sobre el conjunto de las 15 series de PIB para extraer las diferentes componentes y estimar las matrices de densidad espectral cruzada. Con el algoritmo M-CSSA, la tendencia se reconstruye con las subcomponentes relativas a los autovectores de la matriz $\hat{\mathbf{F}}_1$, los pares elementales por subcomponente y frecuencia $B_{1,m}$, con $m=1, \dots, 15$, asociados con $\omega=0$. Análogamente, la componente cíclica o ciclo económico se reconstruye con las subcomponentes correspondientes a los autovectores de las matrices $\hat{\mathbf{F}}_2$ a $\hat{\mathbf{F}}_6$ y $\hat{\mathbf{F}}_{28}$ a $\hat{\mathbf{F}}_{32}$, los pares elementales por subcomponente y frecuencia del $B_{2,m}$ al $B_{6,m}$, con $m=1, \dots, 15$, asociados con $\omega=1/32, 1/16, 3/32, 1/8$ y $5/32$, respectivamente. En esta ocasión la componente estacional no se reconstruye porque las series están corregidas de estacionalidad. También, se efectúa *Circulant SSA* con $L = 32$ sobre la serie del PIB EU-15 para extraer tanto la tendencia como la componente cíclica que están asociadas a los respectivos grupos elementales por frecuencias B_k .

Las contribuciones de las componentes indican que la componente irregular no supone más del 1% tanto para el conjunto de las 15 series de los PIBs, de forma global, como para el PIB EU-15 según aparece en la Tabla 3.5. La tendencia contribuye poco más de un punto en el caso univariante que de forma conjunta o promedio en el caso multivariante. Esta diferencia se traslada a la componente cíclica del caso multivariante de forma que su peso en el conjunto de las 15 series es un punto más que para el PIB

EU-15. De nuevo, la mayor contribución de la componente cíclica en el caso multivariante se debe a que en el caso univariante desaparece información porque las componentes oscilatorias de cada uno de los 15 países se compensan unas con otras al agregarse, aunque sea de forma ponderada, para construir el PIB EU-15.

Tabla 3.5 Contribuciones (%) de las componentes del conjunto de las 15 series del PIB.

	Tendencia	Componente cíclica	TOTAL
Conjunto 15 países	89,8	9,2	99,0
PIB EU-15	90,9	8,2	99,1

Como se ha demostrado, M-CSSA puede estimar la señal correspondiente a un armónico al recomponerla con un número muy reducido de sus subcomponentes. La Tabla 3.6 recoge las contribuciones acumuladas de las subcomponentes por frecuencia para la tendencia y los periodos asociados a la componente cíclica. Por otra parte, en la Figura 3.10 se representan los autovalores de las matrices de densidad espectral cruzada de la tendencia y de las frecuencias asociadas a la componente cíclica. Del examen de ambos elementos se concluye que, para cada país, la señal de la tendencia se puede reconstruir sólo con la primera subcomponente y con las dos primeras todas las señales de los armónicos asociados con la componente cíclica. Por ello, en todas las componentes oscilatorias anteriores, se deja fuera de la señal menos del 3% de la información de forma conjunta para las 15 series de PIB.

Tabla 3.6 Contribuciones acumuladas (%) de las subcomponentes para una frecuencia en el conjunto de las 15 series de PIB de los países de la EU-15.

Periodo	Subcomponentes							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Infinito	97,4	99,6	99,8	99,9	100,0	100,0	100,0	100,0
32	89,7	97,2	98,7	99,3	99,6	99,7	99,8	99,9
16	91,3	97,8	98,7	99,2	99,5	99,7	99,8	99,8
10,7	91,7	97,7	98,8	99,2	99,5	99,6	99,7	99,8
8	90,9	97,9	98,9	99,2	99,5	99,6	99,8	99,8
6,4	91,8	97,8	98,8	99,2	99,5	99,6	99,7	99,8

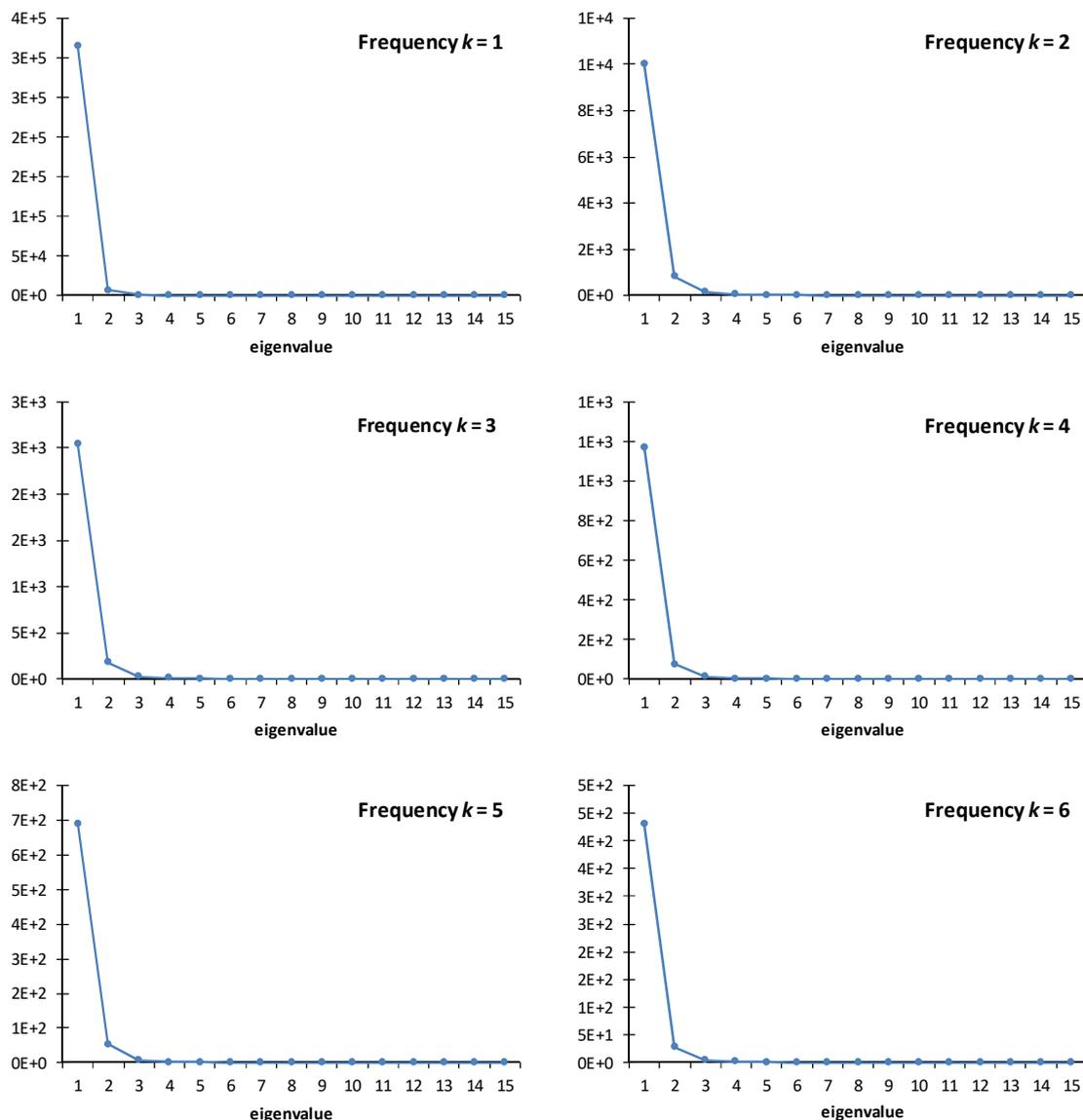


Figura 3.10 Gráficos de los autovalores de las matrices de densidad espectral de la tendencia y de las frecuencias asociadas a la componente cíclica del conjunto de las 15 series de PIB.

Al identificar *ex-ante* todos los autovectores asociados a una frecuencia, M-CSSA facilita la estimación de las componentes oscilatorias junto con los comovimientos como se ha visto en el primer caso práctico. Para evidenciar esta capacidad, en este ejercicio se toman como muestra los ciclos de 32 y 16 trimestres de periodo para las seis mayores economías de la EU-15: Francia, Alemania, Italia, Holanda, España y Reino Unido, según orden alfabético en su denominación inglesa. En primer lugar se analiza el ciclo de 32 trimestres. Los segmentos de los autovectores, obtenidos con M-CSSA, para la primera y segunda subcomponentes correspondientes a cada uno de esos 6 países se

representan en las Figuras 3.11 y 3.12, respectivamente. De la Figura 3.11 se deduce que las oscilaciones de la primera subcomponente tendrán una amplitud similar excepto para Italia que será algo inferior, pero todas serán procíclicas coincidentes. Sin embargo, la amplitud de las oscilaciones de la segunda componente para Italia será mucho mayor que en el resto de países según se aprecia en la Figura 3.12 en la cual, además, se distingue que las oscilaciones de Reino Unido serán de reducida amplitud y anticíclicas respecto al resto de países. También se advierte en esta figura que, respecto a Alemania, el resto de economías procíclicas serán adelantadas en esta segunda subcomponente. No obstante, no se puede olvidar que la aportación global de esta segunda subcomponente en el conjunto de las 15 series de PIB es del 7,5% frente al 89,7% de la primera subcomponente. Todas estas conclusiones se reflejan con nitidez en la Figura 3.13 donde se representan la primera y segunda subcomponentes del ciclo de 32 trimestres para el PIB de cada uno de los 6 países considerados: oscilaciones de menor amplitud en Italia y de amplitud similar en el resto para la primera subcomponente y oscilaciones de mayor amplitud en Italia y de escasa amplitud en el Reino Unido con un carácter anticíclico respecto al resto de países para la segunda subcomponente.

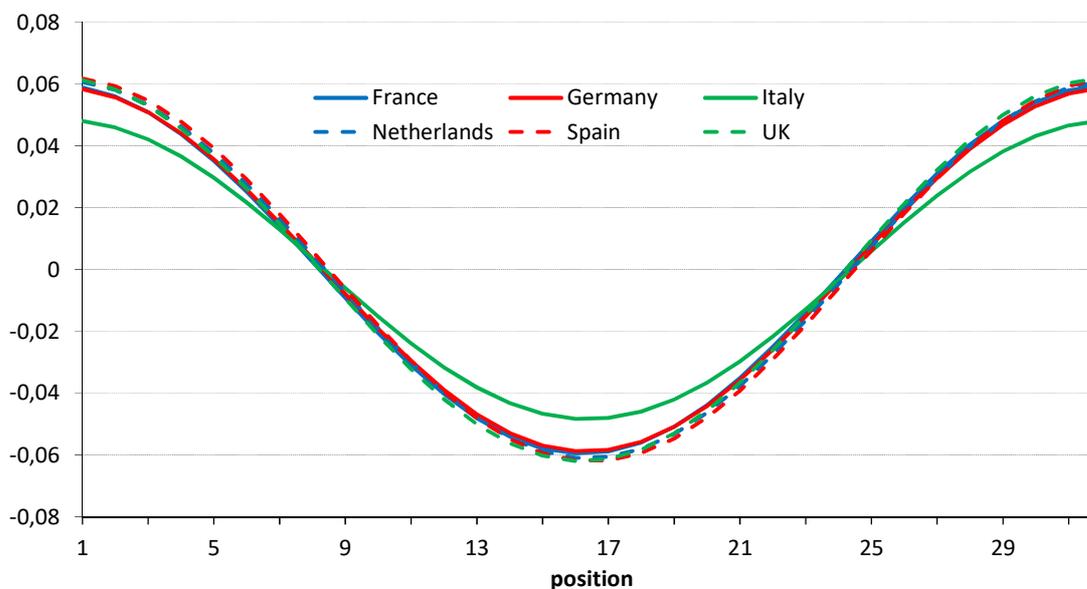


Figura 3.11 Segmentos del primer autovector del ciclo de 32 trimestres para cada uno de los 6 países.

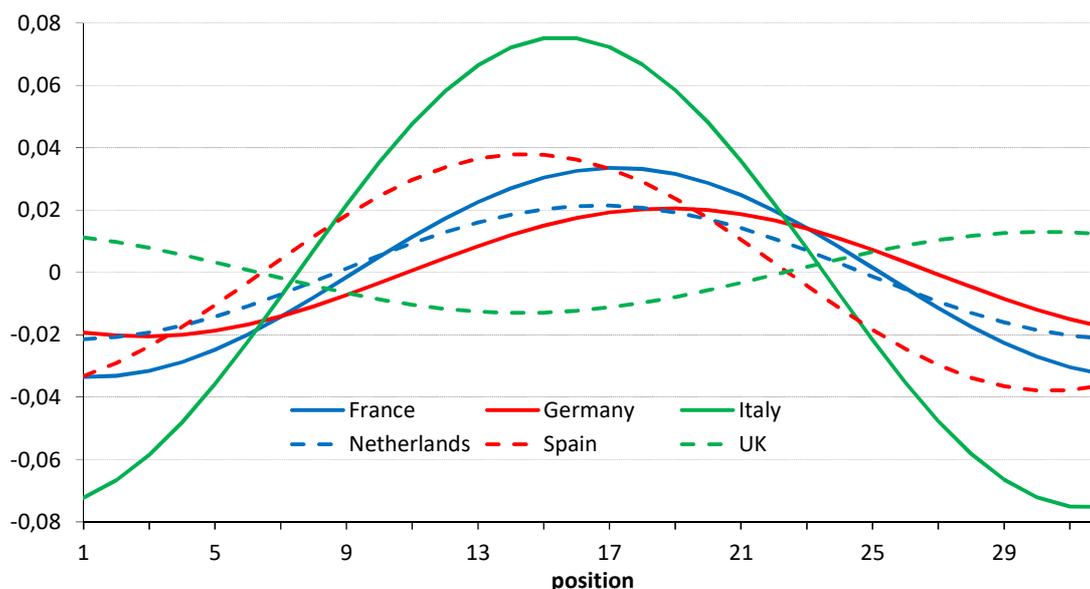


Figura 3.12 Segmentos del segundo autovector del ciclo de 32 trimestres para cada uno de los 6 países.

Además, como se ha comentado, la señal para cada país de su componente oscilatoria de 32 trimestres se puede estimar con la suma de sus dos primeras subcomponentes respectivas. Dicha señal junto con la componente oscilatoria de 32 trimestres se representan en la Figura 3.14 para los 6 países seleccionados. En ella se distinguen los shocks (como diferencia entre la componente y la señal) que han afectado a cada uno de los países. Se focaliza el examen, por ejemplo, en los últimos diez años. En cuanto a intensidad o sentido, para el máximo de 2007 sufren un shock negativo Francia y Alemania y, también, en menor medida, Italia y Holanda mientras que España y Reino Unido un shock positivo; sin embargo, para el mínimo de 2013 soportan un shock positivo Francia y Alemania y, también, en menor medida, Holanda mientras que España un shock negativo e Italia y Reino Unido carecen de shock. En definitiva, los shocks moderan las amplitudes en Francia y Alemania y las amplifican en España. En cuanto a posición temporal, para el máximo de 2007 el shock lo adelanta en Francia, Alemania, Italia y Reino Unido mientras que lo retrasa en Holanda y España; y para el mínimo de 2013 el shock también lo adelanta en Francia, Alemania y Reino Unido y lo retrasa en Holanda mientras que no tiene efecto alguno en Italia y España.

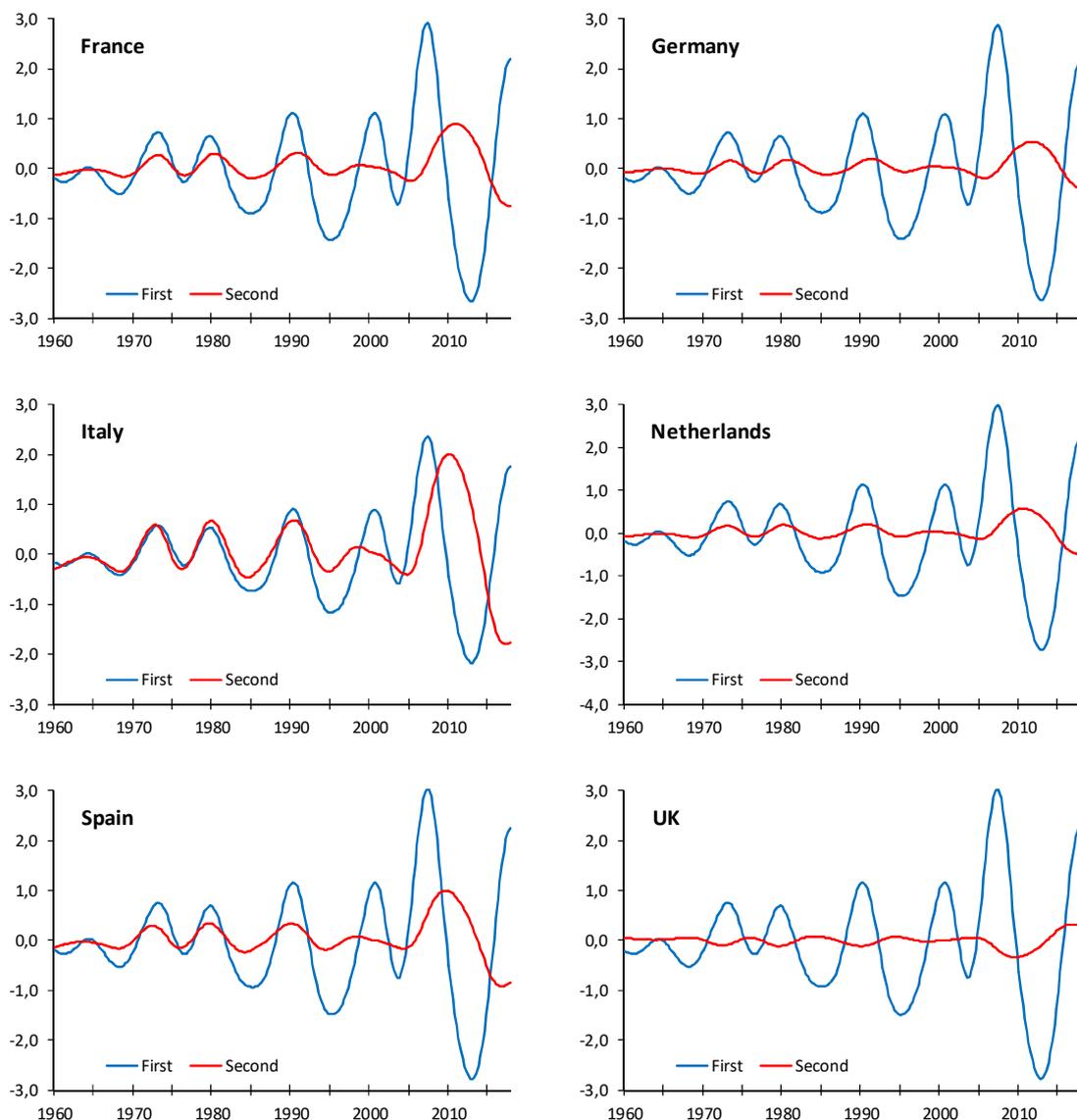


Figura 3.13 Primera y segunda subcomponente de la componente oscilatoria de 32 trimestres estimadas para cada uno de los 6 países seleccionados.

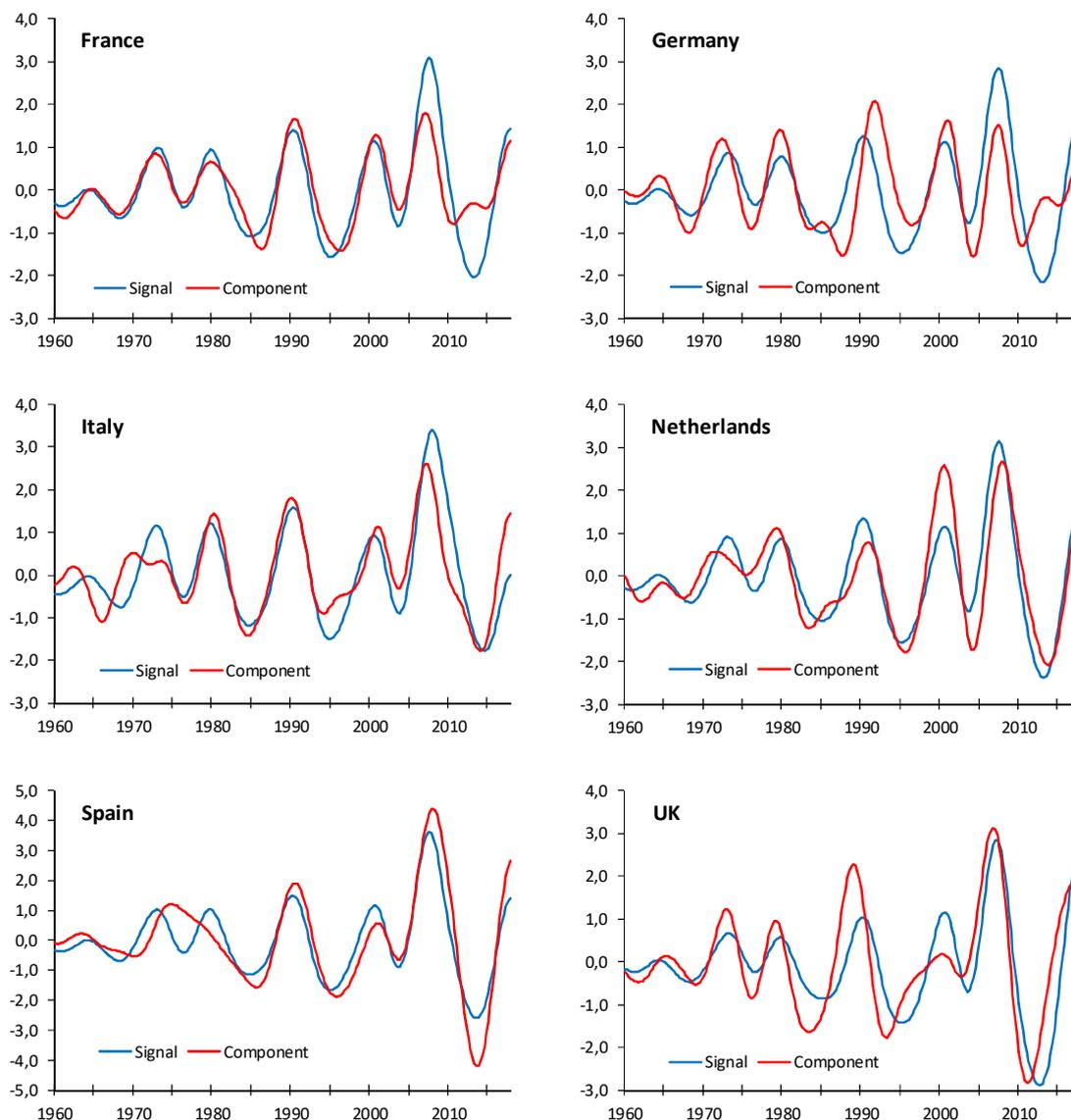


Figura 3.14 Señal y componente oscilatoria de 32 trimestres estimadas para cada uno de los 6 países.

A continuación se analiza el ciclo de 16 trimestres. Los segmentos de los autovectores de la primera y segunda subcomponentes correspondientes a cada uno de esos 6 países aparecen en las Figuras 3.15 y 3.16, respectivamente. En la Figura 3.15 se aprecia que las oscilaciones de la primera subcomponente tendrán, al igual que en el ciclo de 32 trimestres, una amplitud similar excepto para España que será levemente superior y para Italia que será algo inferior, pero todas serán procíclicas coincidentes. De nuevo, la amplitud de las oscilaciones de la segunda subcomponente para Italia será mucho mayor que en el resto de países según se aprecia en la Figura 3.16 en la cual, además, se distingue que las oscilaciones de Reino Unido serán de reducida amplitud y

anticíclicas respecto al resto de países que son coincidentes. Sin embargo, se debe tener presente que la aportación global de esta segunda subcomponente en el conjunto de las 15 series de PIB es del 6,5% frente al 91,3% de la primera. Todos estos resultados se reflejan con claridad en la Figura 3.17 donde se muestran la primera y segunda subcomponentes del ciclo de 16 trimestres para el PIB de los 6 países considerados.

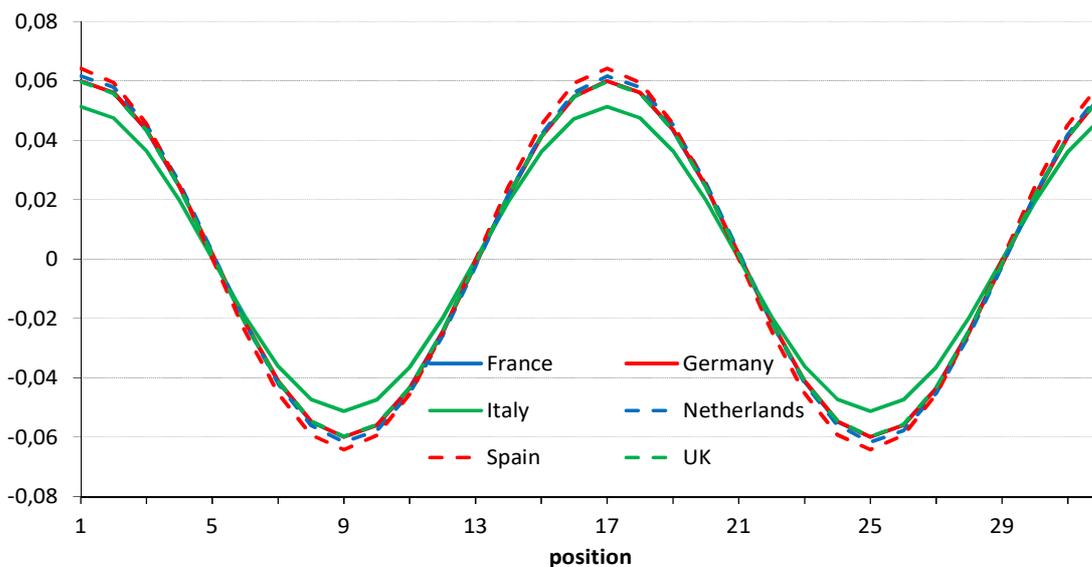


Figura 3.15 Segmentos del primer autovector del ciclo de 16 trimestres para cada uno de los 6 países.

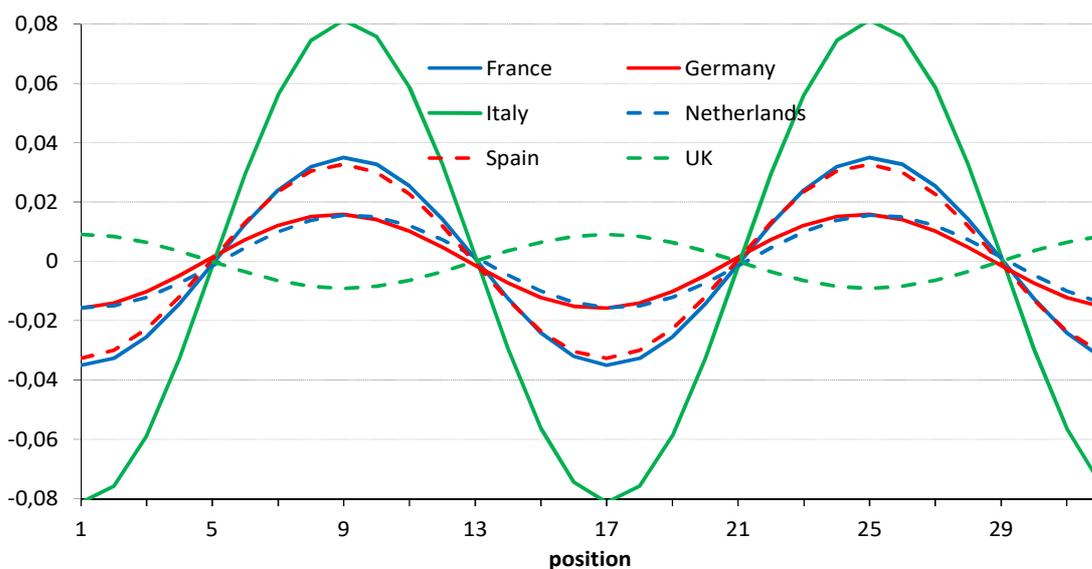


Figura 3.16 Segmentos del segundo autovector del ciclo de 16 trimestres para cada uno de los 6 países.

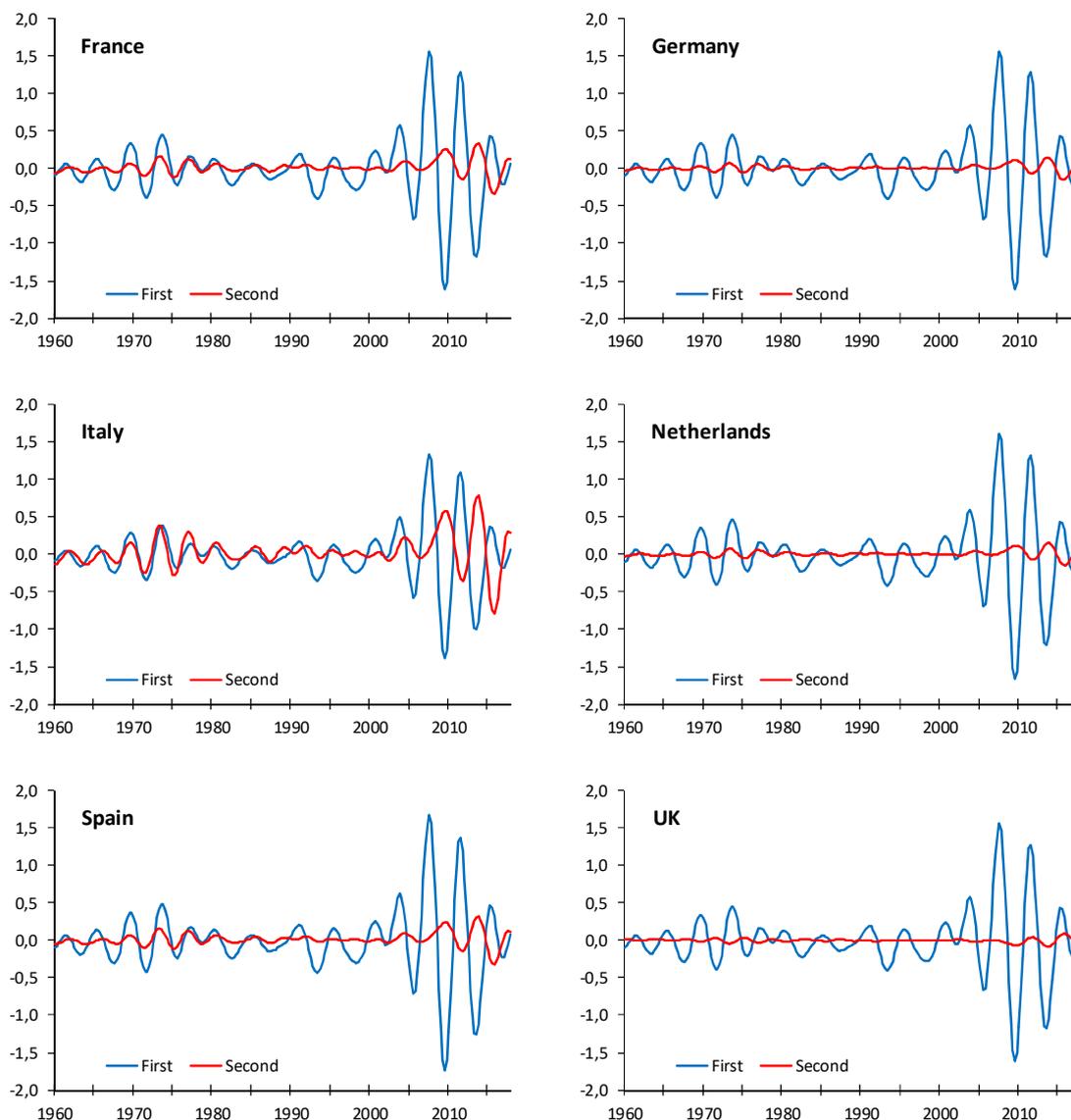


Figura 3.17 Primera y segunda subcomponente de la componente oscilatoria de 16 trimestres estimadas para cada uno de los 6 países seleccionados.

También, la señal para cada país de su componente oscilatoria de 16 trimestres se puede estimar con la suma de sus dos primeras subcomponentes respectivas. Esta señal y la respectiva componente oscilatoria de 16 trimestres se muestran en la Figura 3.18 para los 6 países seleccionados. Igualmente, se centra el examen en los últimos diez años para apreciar los shocks que han influido en cada uno de los países. En cuanto a intensidad, en general, las amplitudes de las oscilaciones se atenúan para Francia, Holanda, España y Reino Unido con shocks negativos en los máximos y positivos en los mínimos mientras que las amplitudes se incrementan en Alemania e Italia con shocks

positivos en los máximos y negativos en los mínimos. En esta ocasión, ciclos de 16 trimestres, los shocks continúan moderando las amplitudes en Francia pero amplifican las de Alemania. En cuanto a posición temporal, los shocks no tienen efecto sobre los puntos de giro salvo al final del periodo analizado que los retrasa en Italia y adelanta ligeramente en Holanda y Reino Unido.

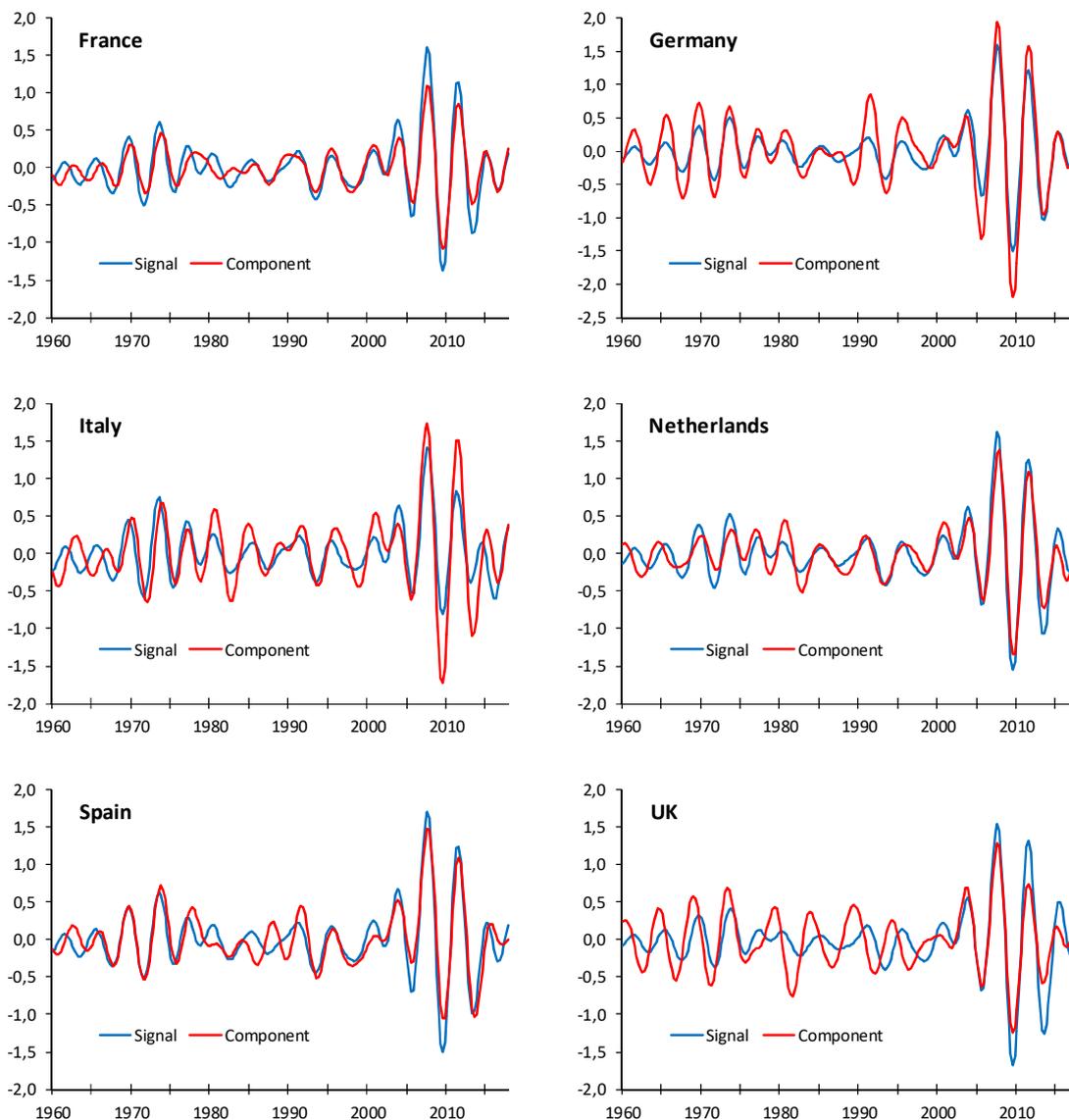


Figura 3.18 Señal y componente oscilatoria de 16 trimestres estimadas para cada uno de los 6 países.

Continuando con los ciclos de 32 y 16 trimestres, después de realizar M-CSSA, se calcula un índice compuesto, factor común, para cada armónico. Además, con CSSA se

genera la componente reconstruida de esos armónicos para el PIB EU-15. En las Figuras 3.19 y 3.20 aparecen el índice compuesto y la componente reconstruida para los ciclos de 32 y 16 trimestres, respectivamente. En ambas se aprecia que en los últimos años el índice amplifica las oscilaciones de la componente porque corresponde al factor común y en la componente se incluyen, ponderados, los shocks vistos de los 15 países.

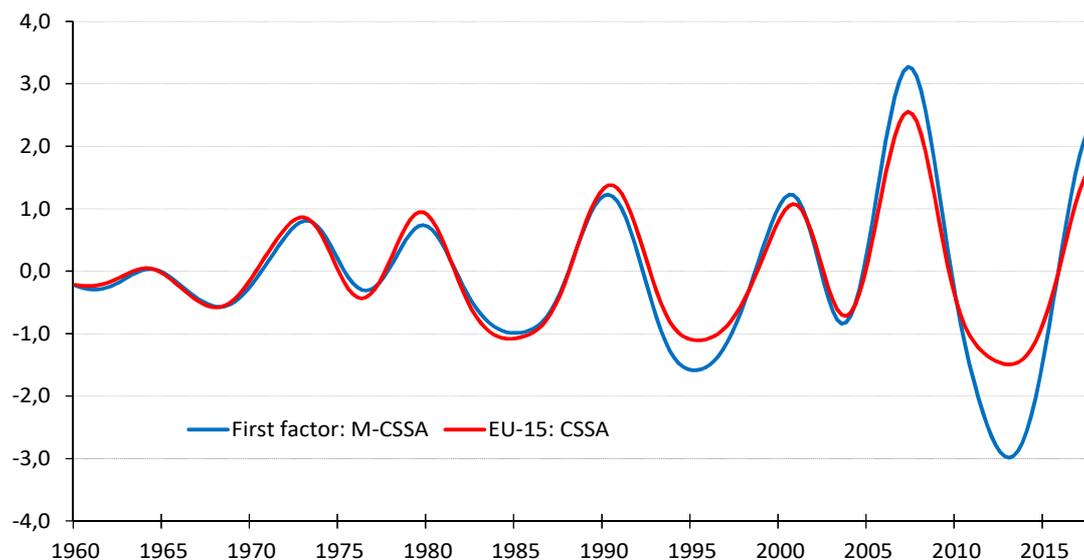


Figura 3.19 Ciclo 32 trimestres: PIB EU-15 con CSSA y primer factor de los 15 países con M-CSSA.

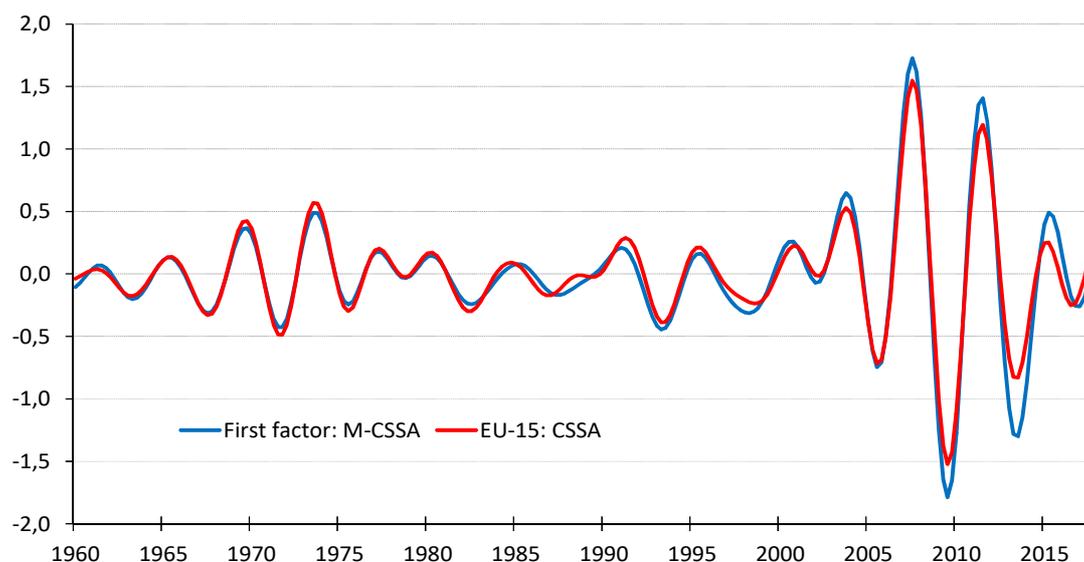


Figura 3.20 Ciclo 16 trimestres: PIB EU-15 con CSSA y primer factor de los 15 países con M-CSSA.

Finalmente, con los resultados de M-CSSA se construye un índice compuesto para el ciclo económico de la EU-15 como el factor común de los ciclos económicos del PIB de los 15 países. En la Figura 3.21 se muestra el índice compuesto junto al ciclo económico de cada uno de los 6 países seleccionados. Se observa que, en general, los puntos de giro son bastante coincidentes entre el índice y el ciclo de cada país, donde los adelantos o retrasos y las diferencias de amplitud se deben a cada factor específico. Francia y Holanda son los países que más se asemejan al índice mientras que Alemania y España son los que más se diferencian, poseen mayores factores específicos.

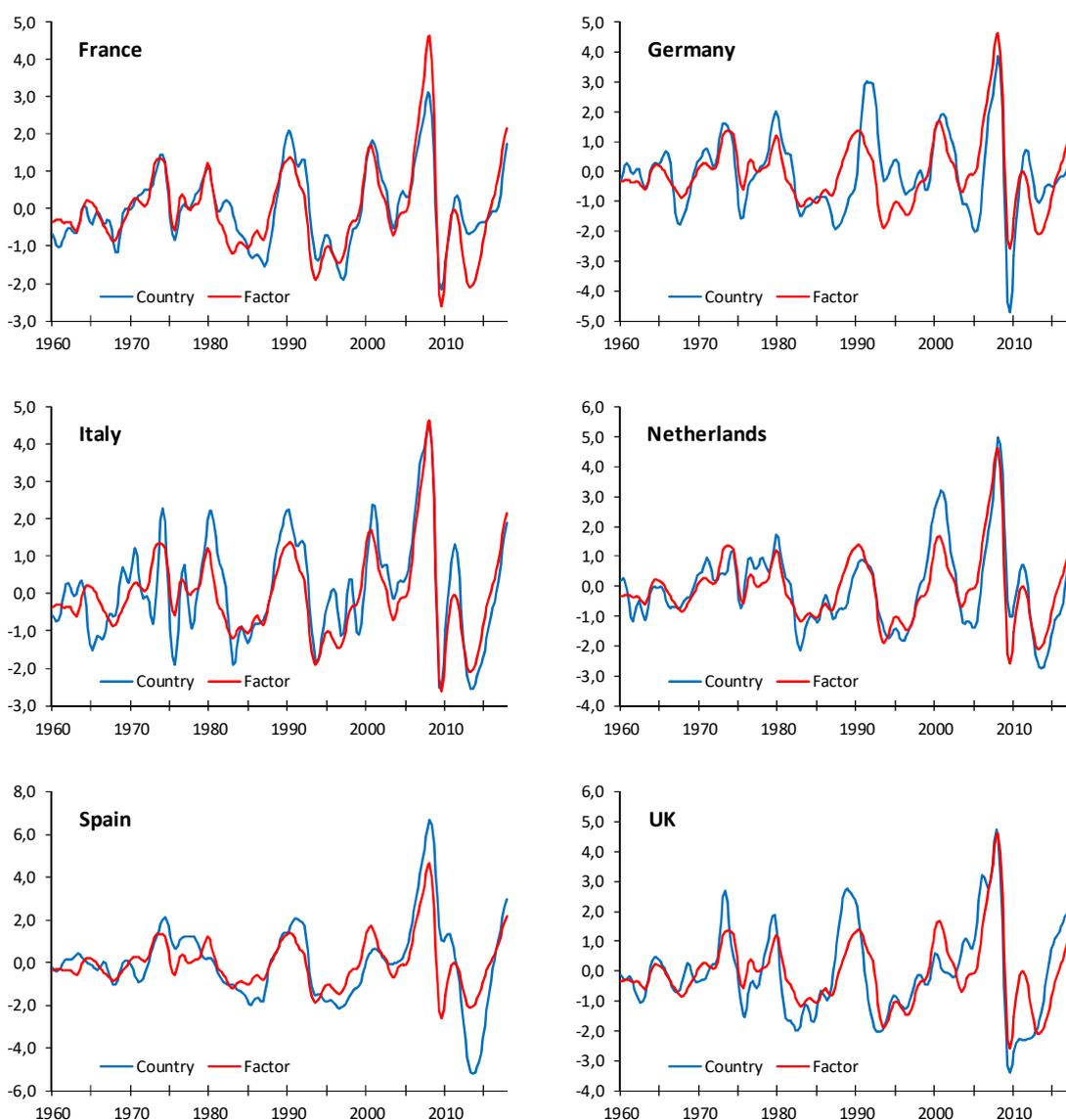


Figura 3.21 Ciclo económico de cada país seleccionado y factor común de los 15 ciclos económicos.

Además, en la Figura 3.22 se compara el factor común del ciclo económico del PIB de los 15 países con el ciclo económico del PIB EU-15 obtenido con CSSA. De su análisis se deriva la práctica coincidencia total de los puntos de giro y la escasa diferencia en las amplitudes de las oscilaciones alternándose las dos series en su aumento o disminución. En último lugar, se destaca la concordancia de las dos series desde 2005 cuando se produjo la completa armonización de la contabilidad nacional en los países de la Unión Europea.

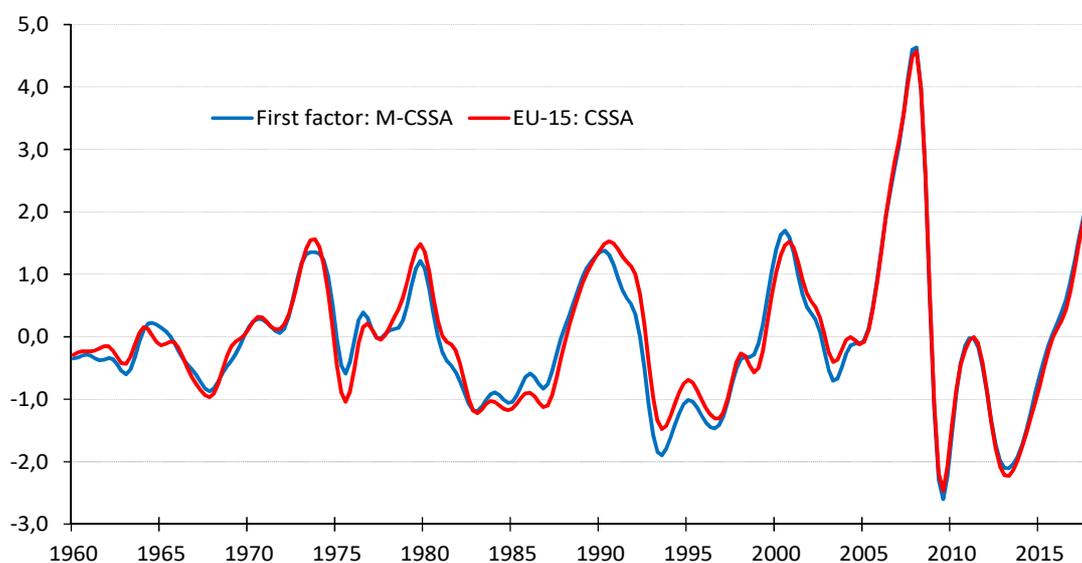


Figura 3.22 Ciclo económico: PIB EU-15 con CSSA y primer factor de los 15 países con M-CSSA.

3.6 Conclusiones

M-SSA es una técnica no paramétrica que extrae patrones espacio-temporales de un conjunto de series temporales asignando *ex-post* la frecuencia asociada a cada componente subyacente. La identificación automática y *ex-ante* de las frecuencias de las componentes subyacentes en un contexto multivariante es posible extendiendo la formulación univariante de CSSA. Para ello, ha sido necesario diseñar una nueva matriz de trayectorias multivariante a partir de la matriz de trayectorias univariante en la que se sustituyen los escalares por vectores. En consecuencia, es posible construir una matriz de momentos de segundo orden que sea Toeplitz por bloques y obtener una matriz circulante por bloques asintóticamente equivalente ampliando al caso multivariante las

propuestas existentes en la literatura de matrices circulantes en el caso univariante.

Las propiedades de las matrices circulantes por bloques permiten estimar las matrices de densidad espectral cruzada de una serie temporal vectorial mediante su diagonalización por bloques. A su vez, la sucesiva diagonalización unitaria de las matrices de densidad espectral deriva un conjunto de autovectores reales que forman una base ortonormal para el subespacio de las columnas de la nueva matriz de trayectorias multivariante. Como resultado, las series elementales reconstruidas son reales y su frecuencia asociada se identifica *ex-ante* de forma automática.

En el caso multivariante se obtiene un número de componentes reconstruidas por frecuencia igual al número de series analizadas llamadas subcomponentes. La suma de las subcomponentes asociadas a una frecuencia obtenidas en M-CSSA coincide con la componente conseguida en CSSA para la misma frecuencia. Ello prueba la unicidad entre M-CSSA y CSSA posibilitando de forma sencilla el análisis espacio-temporal de las componentes subyacentes, sus amplitudes y posiciones cíclicas. Además, la demostración de la equivalencia asintótica de las tres versiones de M-SSA (Basic, Toeplitz y Circulant) trabajando con datos muestrales avala los resultados de M-CSSA.

La información producida por M-CSSA proporciona las matrices de covarianzas cruzadas retardadas de las componentes vectoriales asociadas a una o a un conjunto de frecuencias. Por tanto, se puede especificar un modelo factorial en el dominio de la frecuencia que permite aplicar M-CSSA para obtener un índice compuesto de las componentes vectoriales que se corresponde con un factor común estimado con el predictor de Bartlett obtenido mediante un algoritmo iterativo diseñado con este fin.

El estudio de los casos reales, IPIs de los grupos de mercado de EE.UU. y PIBs de los países de la EU-15, ha verificado la eficacia de M-CSSA para identificar *ex-ante* la frecuencia asociada a los patrones espacio-temporales de las componentes subyacentes así como la formación de dichas componentes en un contexto multivariante obteniendo los shocks producidos en cada serie con una clara interpretación económica. También, se ha mostrado la gran concordancia entre el índice compuesto y la componente correspondiente del agregado obtenida con CSSA. Esto propicia el uso de M-CSSA para generar indicadores sintéticos con información espectral.

Referencias

1. Allen, M. R. & Robertson, A. W. (1996). Distinguishing modulated oscillations from coloured noise in multivariate datasets. *Climate Dynamics*, 12, 775-784.
2. Bai, J. & Ng, S. (2008). Large dimensional factor analysis. *Foundations and Trends in Econometrics*, 3 (2), 89-163.
3. Brillinger, D. R. (1981). *Time series: data analysis and theory*. Holden Day, Inc., San Francisco.
4. Broomhead, D. & King, G. (1986a). Extracting qualitative dynamics from experimental data. *Physica D*, 20, 217-236.
5. Broomhead, D. & King, G. (1986b). On the qualitative analysis of experimental dynamical systems. In *Nonlinear Phenomena and Chaos*, 113-144. A. Hilger ed., Bristol.
6. Carvalho, M. de & Rua, A. (2017). Real-time nowcasting the US output gap: Singular spectrum analysis at work. *International Journal of Forecasting*, 33 (1), 185-198.
7. Engle, R. F. & Watson, M. W. (1981). A one-factor multivariate time series model of metropolitan wage rates. *Journal of the American Statistical Association*, 76 (376), 774-81.
8. Fraedrich, K. (1986). Estimating the dimension of weather and climate attractors. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 43 (5), 419-432.
9. Gazzah, H., Regalia, P. A. & Delmas, J. P. (2001). Asymptotic eigenvalue distribution of block Toeplitz matrices and application to blind SIMO channel identification. *IEEE Transactions on Information Theory*, 47 (3), 1243-1251.
10. Geweke, J. (1977). The dynamic factor analysis of economic time-series models. In *Latent Variables in Socioeconomic Models*, D. J. Aigner and A. S. Goldberger, editors. North Holland, Amsterdam.
11. Ghil M., Allen R.M., Dettinger M.D., Ide K., Kondrashov D., Mann M.E., Robertson A., Saunders A., Tian Y., Varadi F. & Yiou P. (2002). Advanced spectral methods for climatic time series. *Reviews of Geophysics*, 40 (1), 1-41.
12. Gilbert, P. D. & Meijer, E. (2005). *Time series factor analysis with an application to measuring money*. Rijksuniversiteit Groningen.
13. Golyandina, N., Korobeynikov, A., Shlemov, A. & Usevich, K. (2013). Multivariate and 2D extensions of singular spectrum analysis with the Rssa package. *arXiv preprint arXiv:1309.5050*.
14. Golyandina, N., Nekrutkin, V. & Zhigljavsky, A. (2001). *Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques*. Chapman & Hall/CRC.

15. Golyandina, N. & Stepanov, D. (2005). SSA-based approaches to analysis and forecast of multidimensional time series. In *proceedings of the 5th St. Petersburg workshop on simulation* (Vol. 293, p. 298).
16. Golyandina, N. E. & Usevich, K. D. (2010). 2D-extension of Singular Spectrum Analysis: algorithm and elements of theory. In *Matrix Methods: Theory, Algorithms and Applications: Dedicated to the Memory of Gene Golub*, 449-473.
17. Gray, R.M. (2006). Toeplitz and Circulant Matrices: A review. *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, 2 (3), 155-239.
18. Groth, A. & Ghil, M. (2011). Multivariate singular spectrum analysis and the road to phase synchronization. *Physical Review E*, 84 (3), 036206.
19. Groth, A. & Ghil, M. (2015). Monte Carlo singular spectrum analysis (SSA) revisited: Detecting oscillator clusters in multivariate datasets. *Journal of Climate*, 28 (19), 7873-7893.
20. Groth, A., Ghil, M., Hallegatte, S., & Dumas, P. (2011). Identification and reconstruction of oscillatory modes in US business cycles using Multivariate Singular Spectrum Analysis. In *Workshop on Frequency Domain Research in Macroeconomics and Finance*. Bank of Finland, Helsinki.
21. Groth, A., Ghil, M., Hallegatte, S. & Dumas, P. (2015). The role of oscillatory modes in US business cycles. *Journal of Business Cycle Measurement and Analysis*, 2015 (1), 63. OCDE.
22. Gruszczynska, M., Klos, A., Rosat, S. & Bogusz, J. (2017). Deriving common seasonal signals in GPS position time series by using multichannel singular spectrum analysis. *Acta Geodynamica et Geromaterialia*, 14 (3), 273-285.
23. Gutiérrez-Gutiérrez, J. & Crespo, P. M. (2008). Asymptotically equivalent sequences of matrices and Hermitian block Toeplitz matrices with continuous symbols: Applications to MIMO systems. *IEEE Transactions on Information Theory*, 54 (12), 5671-5680.
24. Gutiérrez-Gutiérrez, J. & Crespo, P. M. (2012). Block Toeplitz matrices: asymptotic results and applications. *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, 8 (3), 179-257.
25. Hassani, H., Heravi, S. & Zhigljavsky, A. (2013a). Forecasting UK industrial production with multivariate singular spectrum analysis. *Journal of Forecasting*, 32 (5), 395-408.
26. Hassani, H. & Mahmoudvand, R. (2013). Multivariate singular spectrum analysis: A general view and new vector forecasting approach. *International Journal of Energy and Statistics*, 1 (01), 55-83.

27. Hassani, H., Soofi, A. S. & Zhigljavsky, A. (2013b). Predicting inflation dynamics with singular spectrum analysis. *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (Statistics in Society)*, 176 (3), 743-760.
28. Johnson, R. A. & Wichern, D. W. (2007). *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Pearson Prentice Hall. Upper Saddle River, NJ.
29. Kume, K. & Nose-Togawa, N. (2014). Multidimensional extension of singular spectrum analysis based on filtering interpretation. *Advances in Adaptive Data Analysis*, 6 (01), 1450005.
30. Launonen, I. & Holmström, L. (2017). Multivariate posterior singular spectrum analysis. *Statistical Methods & Applications*, 26 (3), 361-382.
31. Lee, T. K., Gan, S. S., Lim, J. G. & Sanei, S. (2014). A multivariate Singular Spectrum Analysis approach to clinically-motivated movement biometrics. In *Signal Processing Conference (EUSIPCO), 2014 Proceedings of the 22nd European* , 1397-1401. IEEE.
32. Miranda, M., & Tilli, P. (2000). Asymptotic spectra of Hermitian block Toeplitz matrices and preconditioning results. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 21 (3), 867-881.
33. Patterson, K., Hassani, H., Heravi, S. & Zhigljavsky, A. (2011). Multivariate singular spectrum analysis for forecasting revisions to real-time data. *Journal of Applied Statistics*, 38 (10), 2183-2211.
34. Pearl, J. (1973). On Coding and Filtering Stationary Signals by Discrete Fourier Transform. *IEEE Trans. on Info. Theory*, IT-19, 229-232.
35. Peña, D. & Box, G. E. (1987). Identifying a simplifying structure in time series. *Journal of the American Statistical Association*, 82 (399), 836-843.
36. Peña, D. & Poncela, P. (2006). Nonstationary dynamic factor analysis. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 136 (4), 1237-1257.
37. Peña, D. & Yohai, V. J. (2016). Generalized dynamic principal components. *Journal of the American Statistical Association*, 111(515), 1121-1131.
38. Plaut, G. & Vautard, R. (1994). Spells of Low-Frequency Oscillations and Weather Regimes in the Northern Hemisphere. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 51 (2), 210-236.
39. Portes, L. L., & Aguirre, L. A. (2016). Matrix formulation and singular-value decomposition algorithm for structured varimax rotation in multivariate singular spectrum analysis. *Physical Review E*, 93 (5), 052216.
40. Pukenas, K. (2014). Algorithm for the characterization of the cross-correlation structure in multivariate time series. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 33 (4), 1289-1297.

41. Sella, L., Vivaldo, G., Groth, A. & Ghil, M. (2016). Economic cycles and their synchronization: a comparison of cyclic modes in three European countries. *Journal of Business Cycle Research*, 12 (1), 25-48.
42. Shlemov, A. & Golyandina, N. (2014). Shaped extensions of singular spectrum analysis. *arXiv preprint arXiv:1401.4980*.
43. Shumway, R.H. & Stoffer, D. S. (2000). *Time Series Analysis and Its Applications*. New York: Springer.
44. Silva, E. S., Hassani, H., & Heravi, S. (2018). Modeling European industrial production with multivariate singular spectrum analysis: A cross-industry analysis. *Journal of Forecasting*, 37 (3), 371-384.
45. Tilli, P. (1998). Singular values and eigenvalues of non-Hermitian block Toeplitz matrices. *Linear algebra and its applications*, 272 (1-3), 59-89.
46. Vautard, R. & Ghil, M. (1989). Singular spectrum analysis in nonlinear dynamics, with applications to paleoclimatic time series. *Physica D*, 35, 395-424.
47. Vautard, R., Yiou, P. & Ghil, M. (1992). Singular-spectrum analysis: A toolkit for short, noisy chaotic signal. *Physica D*, 58, 95-126.
48. Viljoen, H. & Nel, D. G. (2010). Common singular spectrum analysis of several time series. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 140 (1), 260-267.
49. Von Storch, H., & F. W. Zwiers (1999). *Statistical Analysis in Climate Research*. Cambridge University Press, New York.
50. Zhang, J., Hassani, H., Xie, H. & Zhang, X. (2014). Estimating multi-country prosperity index: a two-dimensional singular spectrum analysis approach. *Journal of Systems Science and Complexity*, 27 (1), 56-74.
51. Zhigljavsky, A., Hassani, H., & Heravi, H. (2009). Forecasting European Industrial Production with Multivariate Singular Spectrum Analysis, International Institute of Forecasters, 2008–2009 SAS/IIF Grant.

4

Conclusiones

4.1 Conclusiones

En esta investigación se desarrolla y se estudian las propiedades de la versión Circulant de la técnica no paramétrica Análisis Espectral Singular, *Circulant SSA*, que descompone una serie temporal en diferentes oscilaciones tanto en el campo univariante como multivariante. La conclusión central es que *Circulant SSA* permite asociar *ex-ante* toda componente o subcomponente oscilatoria reconstruida o extraída con su correspondiente frecuencia en ambos casos, univariante y multivariante. La asignación *ex-ante* es originada por el uso de matrices circulantes en el campo univariante y de matrices circulantes por bloques en el campo multivariante. En el caso multivariante se ha podido realizar un uso directo de las matrices circulantes. Sin embargo, para utilizar las matrices circulantes por bloques en el caso multivariante, ha sido necesario construir una nueva matriz de trayectorias multivariante y ampliar a este caso las aproximaciones que existen en la literatura de la función de densidad espectral.

La asociación *ex-ante* de toda componente con su frecuencia presenta tres ventajas. Primera, se reduce el coste computacional aumentando la velocidad de los cálculos y, por tanto, se ahorra tiempo en el análisis. Segunda, se elimina la incertidumbre y el riesgo de una asignación incorrecta. Y, tercera, esta automatización permite la implementación de SSA sobre grandes conjuntos de series. Además, si bien es cierto que los autovectores de las matrices circulantes y circulantes por bloques forman una base unitaria, es decir, pertenecen al campo de los números complejos, las propiedades de dichas matrices han permitido construir una base ortonormal, es decir, en el campo de los números reales, que ayuda a simplificar las operaciones.

Se ha constatado de forma analítica que las tres versiones de SSA, Basic, Toeplitz y Circulant, cuando trabajan con datos observados, son asintóticamente equivalentes tanto en el caso univariante como en el multivariante. Ello significa que, cuanto más largas sean las series, las diferencias entre las componentes oscilatorias extraídas con cada una de las versiones serán menores avalando, por tanto, los resultados que se obtienen con *Circulant SSA*. Además, la generalización del teorema de Gray que se ha propuesto justifica el uso de *Circulant SSA* con series no estacionarias manteniendo el espíritu de SSA de su aplicación sobre cualquier serie temporal sin imponer restricción alguna.

También, se ha probado empíricamente que SSA, en sus tres versiones: Basic, Toeplitz y Circulant, es una técnica que para muestras finitas estima componentes oscilatorias no sesgadas, con pequeño error de estimación y separables donde el error global es ruido blanco gaussiano como el término de error incluido en las series simuladas. Sin embargo, *Circulant SSA* es la más eficiente de las tres versiones porque obtiene menor error de estimación. Asimismo, el algoritmo de *Circulant SSA* es capaz de garantizar fuerte separabilidad entre las componentes estimadas, a diferencia de las otras versiones, cuando las frecuencias de dos componentes oscilatorias están próximas. Gracias a la unicidad entre las componentes oscilatorias estimadas mediante *Circulant SSA* y *Multivariate Circulant SSA*, las propiedades del caso univariante se verifican en el caso multivariante.

Referente a las implicaciones para el análisis de la coyuntura económica, también, se ha probado empíricamente que, cuando se dispone de datos adicionales, *Circulant SSA* genera menores revisiones para toda la senda de estimación del ciclo económico, desde la estimación inicial a la estimación final, que los métodos de descomposición basados en modelos ARIMA como es Tramo-Seats. La senda de estimación se analiza de forma homogénea sin la distorsión de los datos actuales gracias a la introducción en SSA de una nueva definición de estimación final. Como consecuencia del estudio empírico de las revisiones se ha verificado que *Circulant SSA* produce estimaciones más fiables en tiempo real que Tramo-Seats. Y, en consecuencia, la toma de decisiones con *Circulant SSA* se realiza con menos incertidumbre porque su estimación inicial del ciclo económico para el último periodo disponible está más próxima a la estimación final que la obtenida con Tramo-Seats.

En el caso multivariante, *Circulant SSA* obtiene para cada frecuencia igual número de componentes reconstruidas, llamadas subcomponentes, que la dimensión del conjunto de series tratadas. Ello posibilita la estimación de cada componente oscilatoria con un pequeño número de subcomponentes y, por tanto, el análisis de los shocks en cada serie para una determinada frecuencia. Asimismo, con la información producida por Multivariante *Circulant SSA*, se calculan las matrices de covarianzas cruzadas retardadas de las componentes oscilatorias asociadas a una frecuencia o conjunto de frecuencias. Y, en consecuencia, se puede especificar un modelo factorial en el dominio de la frecuencia con el fin de calcular un índice compuesto de esas componentes oscilatorias. Este índice compuesto se corresponde con uno de los factores comunes estimados con el predictor de Bartlett que se ha obtenido mediante un algoritmo diseñado para tal fin.

Finalmente, el estudio de los casos reales pone de manifiesto que *Circulant SSA* obtiene series desestacionalizadas que no contienen restos de componente estacional y la componente cíclica estimada tiene una clara interpretación económica. Al mismo tiempo, la estimación inicial de la componente cíclica está más próxima a la estimación final que la obtenida con Tramo-Seats y la senda de estimación alcanza la estabilidad en un plazo de dos años, inferior al que necesita Tramo-Seats. Además, en el campo multivariante se verifica la eficacia de *Circulant SSA* para determinar la amplitud y caracterización cíclica de las componentes subyacentes con un notable significado económico de los shocks obtenidos. También en este campo se muestra la concordancia entre los índices compuestos y la correspondiente componente del agregado propiciando el uso de *Multivariate Circulant SSA* para construir indicadores sintéticos.

4.2 Líneas de futuro

El presente trabajo ha logrado los objetivos establecidos en el Plan de Investigación y que se han enunciado en el capítulo de Introducción. No obstante, la investigación no puede darse por finalizada porque lo conseguido en este ensayo plantea nuevos interrogantes que abren otras líneas de investigación. Estas nuevas perspectivas abarcan tanto cuestiones técnicas como aplicaciones del algoritmo *Circulant SSA*:

1. Proporcionar bandas de confianza para las componentes estimadas con *Circulant SSA*. Una vez que se determinan las frecuencias cuyas componentes forman parte de la señal, el resto es ruido. Por ello, de forma similar a las propuestas existentes en la literatura de SSA para las predicciones, mediante la técnica “bootstrap” aplicada al ruido se pueden obtener nuevas series para las cuales se extraen de nuevo las componentes derivando de esta forma bandas de confianza para ellas. En la literatura de SSA no se encuentran fórmulas para obtener esas bandas de confianza. Ello es debido a que para cada nueva serie “bootstrap”, aunque solo sea diferente el ruido, los autovectores varían en las versiones clásicas mientras que en *Circulant SSA* son los mismos para una determinada longitud de ventana. Esta propiedad de *Circulant SSA* elimina la incertidumbre asociada al cálculo de los autovectores y posibilita también la construcción de intervalos de confianza para la densidad espectral estimada, los autovalores.
2. Detectar valores atípicos en la serie con *Circulant SSA* y determinar el efecto sobre sus componentes estimadas. Estas acciones pueden ser facilitadas con esta versión de SSA porque los valores atípicos van a afectar a la densidad espectral pero no a los autovectores para las proyecciones.
3. Efectuar predicciones con *Circulant SSA*. A partir de esta línea se abren dos nuevas posibilidades. Una es adaptar e incluso simplificar los algoritmos de predicción en SSA para los dos enfoques existentes, recurrente y vectorial, puesto que en *Circulant SSA* los autovectores están determinados por la matriz unitaria de Fourier. Otra es comparar la precisión de las tres versiones, Basic, Toeplitz y Circulant, en la predicción en términos de error cuadrático medio.
4. Ampliar las tres líneas de investigación previas al caso multivariante, es decir, con *Multivariate Circulant SSA*.
5. Comparar mediante simulaciones las revisiones en la senda de estimación del ciclo económico que produce *Circulant SSA* frente a las obtenidas por otros métodos también no paramétricos como son los incorporados en el programa X-11 ARIMA que forman parte de la última versión X-13 ARIMA-SEATS.
6. Extender el análisis factorial en el dominio de la frecuencia a las tendencias o componentes de frecuencia cero analizando las consecuencias que tendría sobre la cointegración.

7. Analizar las implicaciones de que la matriz de cargas sea diferente para cada frecuencia en el análisis factorial derivado de *Circulant SSA* y, también, las consecuencias que se derivarían si la matriz de cargas fuera la misma para varias frecuencias.

En consecuencia, *Circulant SSA* no solo permite la automatización *ex-ante* de SSA y su uso para construir indicadores sintéticos en la frecuencia sino que abre nuevas posibilidades en el desarrollo y aplicación de SSA.

4.3 Difusión de resultados

Los resultados obtenidos de la investigación, recogidos en los capítulos del cuerpo central de la tesis, han sido presentados en diversos congresos de ámbito nacional e internacional. A continuación se detalla una relación de los seminarios y congresos, así como las publicaciones, donde dichos resultados han sido expuestos.

1) Ponencias en congresos

- 39th International Symposium on Forecasting
Del 16 al 19 de junio de 2019 – Thessaloniki (Grecia)
"Multivariate business cycle by Circulant SSA"
- 12th International Conference on Computational and Financial Econometrics
Del 14 al 16 de diciembre de 2018 – Pisa (Italia)
"Multivariate automated circulant SSA"
- 7th Iberian Mathematical Meeting
Del 12 al 14 de octubre de 2018 – Évora (Portugal)
"Multivariate automated circulant SSA"
- 38th International Symposium on Forecasting
Del 16 al 20 de junio de 2018 – Boulder, Colorado (Estados Unidos)
"Effects of the revisions in signal extraction when predicting the business cycle"

- XXI Encuentro Economía Aplicada
Del 7 al 8 de junio de 2018 – Alcalá de Henares (España)
"Circulant SSA: A new automated procedure for signal extraction with applications to business cycle".
- VIII Workshop in Time Series Econometrics
Del 12 al 13 de abril de 2018 – Zaragoza (España)
"Multivariate circulant singular spectrum analysis"
- 11th International Conference on Computational and Financial Econometrics
Del 16 al 18 de diciembre de 2017 – Londres (Reino Unido)
"Factor models by frequency by multivariate circulant singular spectrum Analysis – MCSSA"
- 2017 Joint Statistical Meeting – American Statistical Association
Del 29 de julio al 3 de agosto de 2017 – Baltimore, Maryland (Estados Unidos)
"Circulant SSA: a New Automated Procedure for Signal Extraction with Applications to Business Cycle"
- VII Workshop in Time Series Econometrics
Del 30 al 31 de marzo de 2017 – Zaragoza (España)
"Circulant SSA: A new automatic procedure for signal extraction with applications to business cycle"
- 9th International Conference of the ERCIM WG on Computational and Methodological Statistics (CMStatistics 2016)
Del 9 al 11 de diciembre de 2016 – Sevilla (España)
"Assessing the properties of circulant SSA for signal extraction"
- XXXVI Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa
Del 5 al 7 de septiembre de 2016 – Toledo (España)
"Revisiones en las componentes de una serie temporal con Circulant SSA"

- 36th International Symposium on Forecasting
Del 19 al 21 de junio de 2016 – Santander (España)
"Automatic Signal Extraction for Stationary and Non-Stationary Time Series by Circulant SSA"
- 3rd Conference of the International Society for Non-Parametric Statistics
Del 11 al 16 de junio de 2016 – Avignon (Francia)
"Strong Separability in Circulant SSA"
- XXXV Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa
Del 26 al 29 de mayo de 2015 – Pamplona (España)
"Extracción de señales en series temporales no estacionarias con Circulant SSA"

2) Presentaciones en seminarios y jornadas de investigación

- VII Jornadas de Jóvenes Investigadores de la Universidad de Alcalá
12 y 13 de diciembre de 2018 – Alcalá de Henares (España)
"Decomposition of the business cycle and composite index by Multivariate Circulant SSA"
- III Jornadas de Investigación en Economía y Gestión Empresarial de la Universidad de Alcalá
22 y 23 de febrero de 2018 – Alcalá de Henares (España)
"Multivariate Circulant SSA: Application to the decomposition of the business cycle"
- II Jornadas de Investigación en Economía y Gestión Empresarial de la Universidad de Alcalá
23 y 24 de febrero de 2017 – Alcalá de Henares (España)
"Fiabilidad de las revisiones del ciclo económico en el marco de Circulant SSA"

- VI Jornadas de Jóvenes Investigadores de la Universidad de Alcalá
Del 14 al 16 de diciembre de 2016 – Alcalá de Henares (España)
“Revisiones en el ciclo económico con Circulant SSA”
- I Jornadas de Investigación en Economía y Gestión Empresarial de la Universidad de Alcalá
25 y 26 de febrero de 2016 – Alcalá de Henares (España)
“Circulant SSA”
- Seminario de Investigación. Departamento de Análisis Económico: Economía Cuantitativa. Universidad Autónoma de Madrid.
26 de marzo de 2015 – Madrid (España)
“Extracción de señales en series temporales no estacionarias con Circulant SSA”

3) Publicaciones: Capítulos de libros

- Bógalo, J., Poncela, P. & Senra, E. (2018). Strong Separability in Circulant SSA. In P. Bertail, P. A. Cornillon, E. Matzner-Lober & D. Blanke (Eds.), *Nonparametric Statistics, 3rd ISNPS, June 2016*. Avignon, France: Springer-Verlag (ISBN 978-3-319-96940).
- Bógalo, J., Poncela, P. & Senra, E. (2017). Revisiones en el ciclo económico con Circulant SSA. In G. Ros, A. Guerrero, F. Pascual, C. Tejedor, P. Ruiz & V. Taberner (Eds.), *VI Jornadas de Jóvenes Investigadores de la Universidad de Alcalá (Humanidades y Ciencias Sociales)* (pp. 187-198). Alcalá de Henares, España: Servicio de Publicaciones UAH (ISBN 978-84-16599-47-9).