

ACTA DE EVALUACIÓN DE LA TESIS DOCTORAL

Año académico 2018/19

DOCTORANDO: **LANTI VIVAS, RAÚL**
D.N.I./PASAPORTE: ******7912G**

PROGRAMA DE DOCTORADO: **D440-ARQUITECTURA**
DPTO. COORDINADOR DEL PROGRAMA: **ARQUITECTURA**
TITULACIÓN DE DOCTOR EN: **DOCTOR/A POR LA UNIVERSIDAD DE ALCALÁ**

En el día de hoy 28/02/19, reunido el tribunal de evaluación nombrado por la Comisión de Estudios Oficiales de Posgrado y Doctorado de la Universidad y constituido por los miembros que suscriben la presente Acta, el aspirante defendió su Tesis Doctoral, elaborada bajo la dirección de **MÓNICA MARTÍNEZ MARTÍNEZ // ERNESTO ENRIQUE ECHEVERRÍA VALIENTE**.

Sobre el siguiente tema: **ANÁLISIS EN FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA DE SECCIONES DE HORMIGÓN ARMADO. UN ALGORITMO PARA LA DETERMINACIÓN DEL PLANO DE EQUILIBRIO. ANÁLISIS TEÓRICO Y EXPERIMENTAL**

Finalizada la defensa y discusión de la tesis, el tribunal acordó otorgar la CALIFICACIÓN GLOBAL¹ de (**no apto, aprobado, notable y sobresaliente**): **SOBRESALIENTE**

Alcalá de Henares, 28 de febrero de 2019

EL PRESIDENTE

Fdo.: AMADEO BENAVENT CLIMENT
GUARDIOLA

EL SECRETARIO

Fdo. FERNANDO DA CASA MARTIN

EL VOCAL

Fdo.: JOSE RAMON GAMEZ

Con fecha 25 de marzo de 2019 la Comisión Delegada de la Comisión de Estudios Oficiales de Posgrado, a la vista de los votos emitidos de manera anónima por el tribunal que ha juzgado la tesis, resuelve:

- Conceder la Mención de "Cum Laude"
 No conceder la Mención de "Cum Laude"

FIRMA DEL ALUMNO,

Fdo.: LANTI VIVAS, RAÚL

La Secretaria de la Comisión Delegada

¹ La calificación podrá ser "no apto" "aprobado" "notable" y "sobresaliente". El tribunal podrá otorgar la mención de "cum laude" si la calificación global es de sobresaliente y se emite en tal sentido el voto secreto positivo por unanimidad.

INCIDENCIAS / OBSERVACIONES:



Universidad
de Alcalá

COMISIÓN DE ESTUDIOS OFICIALES
DE POSGRADO Y DOCTORADO

En aplicación del art. 14.7 del RD. 99/2011 y el art. 14 del Reglamento de Elaboración, Autorización y Defensa de la Tesis Doctoral, la Comisión Delegada de la Comisión de Estudios Oficiales de Posgrado y Doctorado, en sesión pública de fecha 25 de marzo, procedió al escrutinio de los votos emitidos por los miembros del tribunal de la tesis defendida por LANTI VIVAS, RAÚL, el día 28 de febrero de 2019, titulada *ANÁLISIS EN FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA DE SECCIONES DE HORMIGÓN ARMADO. UN ALGORITMO PARA LA DETERMINACIÓN DEL PLANO DE EQUILIBRIO. ANÁLISIS TEÓRICO Y EXPERIMENTAL*, para determinar, si a la misma, se le concede la mención "cum laude", arrojando como resultado el voto favorable de todos los miembros del tribunal.

Por lo tanto, la Comisión de Estudios Oficiales de Posgrado **resuelve otorgar** a dicha tesis la

MENCIÓN "CUM LAUDE"

Alcalá de Henares, 25 de marzo de 2019
EL VICERRECTOR DE INVESTIGACIÓN Y TRANSFERENCIA




F. Javier de la Mata de la Mata

Copia por e-mail a:

Doctorando: LANTI VIVAS, RAÚL

Secretario del Tribunal: FERNANDO DA CASA MARTIN

Directores de Tesis: MÓNICA MARTÍNEZ MARTÍNEZ // ERNESTO ENRIQUE ECHEVERRÍA VALIENTE



Universidad
de Alcalá

ESCUELA DE DOCTORADO.
Servicio de Estudios Oficiales de Posgrado

DILIGENCIA DE DEPÓSITO DE TESIS.

Comprobado que el expediente académico de D./D^a RAÚL LANTI VIVAS
reúne los requisitos exigidos para la presentación de la Tesis, de acuerdo a la normativa vigente, y habiendo
presentado la misma en formato: soporte electrónico impreso en papel, para el depósito de la
misma, en el Servicio de Estudios Oficiales de Posgrado, con el nº de páginas: 394 se procede, con
fecha de hoy a registrar el depósito de la tesis.

Alcalá de Henares a 20 de DICIEMBRE de 2018



Aurora Juárez Abril

Fdo. El Funcionario

RESTAURAR

IMPRIMIR



Programa de Doctorado en Arquitectura.

**ANÁLISIS EN FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA DE SECCIONES DE
HORMIGÓN ARMADO. UN ALGORITMO PARA LA
DETERMINACIÓN DEL PLANO DE EQUILIBRIO. ANÁLISIS
TEÓRICO Y EXPERIMENTAL.**

Tesis Doctoral presentada por

RAÚL LANTI VIVAS

2019



D. **Gonzalo Barluenga Badiola**, Coordinador de la Comisión Académica del Programa de Doctorado en Arquitectura

INFORMA que la Tesis Doctoral titulada **ANÁLISIS EN FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA DE SECCIONES DE HORMIGÓN ARMADO. UN ALGORITMO PARA LA DETERMINACIÓN DEL PLANO DE EQUILIBRIO. ANÁLISIS TEÓRICO Y EXPERIMENTAL**, presentada por D **Raúl Lanti Vivas**, bajo la dirección de los Drs. **_Mónica Martínez Martínez y Ernesto Echeverría Valiente_**, reúne los requisitos científicos de originalidad y rigor metodológicos para ser defendida ante un tribunal. Esta Comisión ha tenido también en cuenta la evaluación positiva anual del doctorando, habiendo obtenido las correspondientes competencias establecidas en el Programa.

Para que así conste y surta los efectos oportunos, se firma el presente informe en Alcalá de Henares a 13 de diciembre de 2018.

Fdo.: Gonzalo Barluenga Badiola



D. Ernesto Echeverría Valiente, coodirector de la Tesis

Informa que la Tesis titulada

“ANÁLISIS EN FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA DE SECCIONES DE HORMIGÓN ARMADO. UN ALGORITMO PARA LA DETERMINACIÓN DEL PLANO DE EQUILIBRIO. ANÁLISIS TEÓRICO Y EXPERIMENTAL,” presentada por D Raúl Lanti Vivas, bajo la dirección de los Drs. Mónica Martínez Martínez y Ernesto Echeverría Valiente

Reúne los requisitos científicos, metodológicos, formales y de originalidad suficientes para constituir una Tesis doctoral. También considero la evaluación positiva anual del doctorando, habiendo obtenido las correspondientes competencias establecidas en el Programa.

Por lo que, como coodirector, considera que puede ser depositada en la Universidad de Alcalá para proceder a la lectura y defensa pública ante un tribunal competente

Alcalá de Henares, 17 de diciembre de 2018

Fdo.: Dr. D. Ernesto Echeverría Valiente
Coodirector de la tesis



D. Ernesto Echeverría Valiente, director de Departamento de Arquitectura de la Universidad de Alcalá.

Informa que la comisión de doctorado del día 13 de diciembre de 2018 del programa de doctorado en Arquitectura considera que la Tesis titulada

“ANÁLISIS EN FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA DE SECCIONES DE HORMIGÓN ARMADO. UN ALGORITMO PARA LA DETERMINACIÓN DEL PLANO DE EQUILIBRIO. ANÁLISIS TEÓRICO Y EXPERIMENTAL,” presentada por D Raúl Lanti Vivas, bajo la dirección de los Drs. Mónica Martínez Martínez y Ernesto Echeverría Valiente

Considera que reúne los requisitos científicos, metodológicos, formales y de originalidad suficientes para constituir una Tesis doctoral. La Comisión ha tenido también en cuenta la evaluación positiva anual del doctorando, habiendo obtenido las correspondientes competencias establecidas en el Programa.

Por lo que, por parte de este departamento, se considera que puede ser depositada en la Universidad de Alcalá para proceder a la lectura y defensa pública ante un tribunal competente

Alcalá de Henares, 17 de diciembre de 2018



Fdo.: Dr. D. Ernesto Echeverría Valiente
Director del Departamento de Arquitectura



Dña. Mónica Martínez Martínez, directora de la Tesis,

INFORMA que la Tesis Doctoral titulada ***ANÁLISIS EN FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA DE SECCIONES DE HORMIGÓN ARMADO. UN ALGORITMO PARA LA DETERMINACIÓN DEL PLANO DE EQUILIBRIO. ANÁLISIS TEÓRICO Y EXPERIMENTAL***, presentada por D. **Raúl Lanti Vivas**, llevada a cabo bajo mi dirección junto con D. Ernesto Echeverría Valiente, reúne los requisitos científicos, metodológicos, formales y de originalidad suficientes para constituir una Tesis doctoral. También considero la evaluación positiva anual del doctorando, habiendo obtenido las correspondientes competencias establecidas en el Programa.

Por lo que, como Directora de la Tesis Doctoral, considero que puede ser depositada en la Universidad de Alcalá para proceder a la lectura y defensa pública ante un tribunal competente

Alcalá de Henares, 18 de diciembre de 2018

Fdo.: Dra. Dña. Mónica Martínez Martínez
Directora de la Tesis Doctoral



Programa de Doctorado en Arquitectura.

**ANÁLISIS EN FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA DE SECCIONES DE
HORMIGÓN ARMADO. UN ALGORITMO PARA LA
DETERMINACIÓN DEL PLANO DE EQUILIBRIO. ANÁLISIS
TEÓRICO Y EXPERIMENTAL.**

Tesis Doctoral presentada por

RAÚL LANTI VIVAS

Directora:

Dra. Mónica Martínez Martínez.

Tutor y Co-Director:

Dr. Ernesto Enrique Echeverría Valiente.

Alcalá de Henares. 2019

A mis padres...

Dios sí lo ve.

Edwin Lutyens (1869-1944).

AGRADECIMIENTOS.

Necesito expresar mi más sincero agradecimiento y afecto a Mónica Martínez y a Ernesto Echeverría, por haber creído en mí con más determinación de lo que yo mismo lo hice nunca. Gracias por haberme permitido pasar tantas horas con vosotros elaborando este trabajo y haberlo dirigido con lucidez y entusiasmo sincero. Gracias.

Ha sido una suerte haber contado con la ayuda y los consejos de José Pedro Gutierrez Jiménez y Cecilio López Hombrados, miembros del Instituto Eduardo Torroja, que de manera tan estrecha han colaborado en la preparación y elaboración de los ensayos de este trabajo.

Gracias a Fermín González Blanco por sus explicaciones y datos sobre la obra de Miguel Fisac.

A Juan Luis Gomar, mi amigo escritor, por haber leído cada coma de este texto y haber añadido valor y criticado tanto y bien.

A Luís y María del Carmen, por haber cuidado de mis hijos como si fueran de ellos mismos los ratos que no he estado yo con ellos.

A todos los que han estado y ya se han ido y siguen siendo y también estando.

Para Manuel, mi hermano mayor, un referente inalcanzable y su familia que es también la mía, y nuestra Natalia y su lunar.

A José Vivas por toda nuestra vida y nuestros viajes y nuestros ratos juntos. Por obligarme a parar en cada curva y pensar, y mirar, y beber, y saborear...más despacio. Gracias tito.

A Mis hijos Eloy y Eva, mi bella barroca. Por mostrarme un sentimiento nuevo sólo porque ahora existís.

Para Manuel y Elena, mis padres. Por habernos dedicado vuestros esfuerzos y haber hecho nuestra vida tan sencilla. Por habernos dado todo de una manera tan limpia y transparente y que pareciera fácil hacerlo, ahora sé que no debió serlo. Y Por habernos motivado y despertado nuestra curiosidad. No podríais haberlo hecho mejor.

Y a ti Mamen, por ser mi compañera y mi puntal. Por haber estado siempre, tan paciente y calmada y entusiasta. Por quererme a pesar de mí. Por todo lo que nos queda por vivir.

ÍNDICE

TESIS

1. INTRODUCCIÓN.....	1
1.1 Origen.....	1
1.2 Objetivos.....	10
1.3 Metodología y estructura.....	11
2. ESTADO DE LA CUESTIÓN.....	15
2.1 Antecedentes.....	15
2.2 Autores de referencia.....	19
2.3 Modelos recientes.....	117
2.4 Modelos normativos.....	118
2.5 Análisis comparativo de los modelos analizados.....	128
2.6 Softwares comerciales.....	137
2.7 Marco teórico. Análisis no lineal.....	141
2.7.1 Hipótesis de partida: Análisis en compresión o flexión compuesta recta.....	141
2.7.2 Análisis en compresión o flexión compuesta esviada.....	147

2.8 Resumen y conclusiones (capítulo 2).....	149
3. ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.....	155
3.1 Método propuesto: Método de la diferencia mínima de curvaturas (MDMC).....	155
3.1.1 Discretización del bloque comprimido y resolución de las ecuaciones de equilibrio.....	163
3.1.2 Diagrama lógico del MDMC.....	168
3.1.3 Debilidades del MDMC.....	171
3.1.3.1 Presencia de mínimos locales en la relación del giro del eje neutro y la diferencia de curvatura.....	171
3.1.3.2 Aproximaciones por inferencia.....	171
3.1.3.3 Discretización del bloque comprimido.....	173
3.1.3.4 Integración de la tensión en el bloque comprimido.....	174
3.1.3.5 Tensión de compresión en acero.....	175
3.1.3.6 Normas de convergencia.....	176
3.1.4 Implementación del MDMC. Un software de análisis (FCE).....	177
3.1.4.1 Presentación del software desarrollado.....	177
3.4.4 Evaluación del MDMC mediante el software desarrollado frente al modelo de Farah y Huggins.....	190
3.4.4.1 Metodología.....	190
3.4.4.2 Discusión de los resultados obtenidos.....	210
3.5 Resumen y conclusiones (capítulo 3).....	211
4. ANÁLISIS EXPERIMENTAL.....	213
4.1 Ensayos de laboratorio.....	214
4.1.1 Descripción de los prototipos ensayados.....	214

ÍNDICE

4.1.2 Descripción de los medios de laboratorio y aparatos de instrumentación.	220
4.1.3 Ensayo 1. Soporte corto de hormigón armado sometido a compresión constante y excentricidad creciente.	220
4.1.3.1 Descripción del ensayo.	220
4.1.3.2 Instrumentación.	225
4.1.3.3 Resultados observados.	225
4.1.3.4 Análisis numérico.	228
4.1.3.5 Discusión de los resultados.	233
4.1.4 Ensayo 2. Soporte corto de hormigón armado sometido a compresión, e_y constante, y e_x creciente.	236
4.1.4.1 Descripción del ensayo.	236
4.1.4.2 Instrumentación.	245
4.1.4.3 Resultados observados.	246
4.1.4.4 Análisis numérico.	254
4.1.4.5 Discusión de los resultados.	278
4.2 Resumen y conclusiones (capítulo 4).	287
5. TENSIONES NORMALES EN SECCIONES ASIMÉTRICAS	291
5.1 Metodología.	292
5.2 Discusión de los resultados.	310
6. CONCLUSIONES	313
6.1 Conclusiones.	313
6.2 Corolario.	317
7. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURA.	319
7.1 Optimización del algoritmo.	319

7.1.1 Análisis de la discretización del bloque comprimido.	320
7.1.2 Búsqueda de tendencias en la diferencia de curvaturas por regresión múltiple.	320
7.1.3 Utilización de diagramas $M-\chi$ simplificados.	321
7.2 Problemas de análisis estructural abordables con el algoritmo propuesto.	321
7.2.1 Análisis de inestabilidad de soportes en flexión compuesta esviada. Universalización del método de la columna modelo.	322
7.2.2 .Placas de anclaje.	323
7.3 Análisis crítico de secciones construidas.	324
7.3.1 Análisis de la obra de Miguel Fisac.	324
LISTA DE FIGURAS	327
LISTA DE TABLAS.....	345
LISTA DE ABREVIATURAS.....	349
BIBLIOGRAFÍA.....	355
ANEXOS.....	363
Anexo I. Desarrollo justificado de un valor de N para el modelo de F. N. Pannell.	363
Anexo II. No convexidad de diagramas de interacción Mx, My	366

1. INTRODUCCIÓN.

1.1 Origen.

Cuando Agripa, siendo Edil de Roma del Emperador Cesar Augusto ordenó la construcción de un templo para rendir culto a los dioses en el año 27 a. C., no pudieron, ni él ni los arquitectos que lo diseñaron, pudieron tomar conciencia de que estaban ante el comienzo de la obra que representaría al Imperio a través del tiempo, y tampoco les fue posible advertir que se estaban convirtiendo en precursores del hormigón estructural. Los autores del Panteón de Roma¹ no pudieron conocer la relevancia que tendría en la historia de la construcción el resultado de aquel proyecto.

Basándose en métodos gráficos, tradición constructiva, ensayos, pruebas, y modelos a escala reducida de las construcciones definitivas, aquellos arquitectos intuyeron conceptos clave en el análisis estructural como la existencia de la línea de presiones y la necesidad de tener el dominio del comportamiento de la misma. Lograron mantenerla siempre en las proximidades del núcleo central de cada sección de la cúpula, garantizando el equilibrio, y soslayando la carencia constructiva y tecnológica que suponía no disponer de materiales con capacidad para resistir solicitaciones de tracción². Intuyeron que, si el eje neutro de la sección se mantenía en unos

¹ Un incendio provocó la destrucción y posterior reconstrucción por orden de Adriano en el año 118 d. C. Apolodoro de Damasco fue el responsable del diseño que aún perdura.

² La construcción del Imperio Romano no hacía uso de la madera de manera extensiva como material estructural.

rangos de profundidad determinados, al tiempo que no se agotaba el material por un exceso de compresión, (equilibrio y control de tensiones), la seguridad estaría garantizada³.



Figura 1.1. Panteón de Roma. Marco Vipsanio Agripa. 27 a.C. www.losandes.com.ar

Podría considerarse que este acercamiento al análisis estructural a nivel de sección supone el comienzo de los métodos de cálculo en rotura (análisis plástico de la sección), si bien, nunca formularon modelos matemáticos, así como tampoco describieron los materiales que emplearon desde un punto de vista mecánico. El conocimiento que manejaron fue empírico en todo momento.

Establecer umbrales límite bajo los cuales las secciones logran una situación de equilibrio frente a las sollicitaciones exteriores, sin atender a las situaciones intermedias de deformación y tensión, supone postular que es posible encontrar un estado interno de tensiones que no tendría por qué ser único, cuya resultante equilibrara las acciones exteriores.

³ Para que se logre el equilibrio de una cúpula de materiales pétreos, es preciso que se produzcan fisuras según la dirección de los meridianos desde las impostas de la misma hasta el óculo. De esta manera, el modelo de cálculo sería un gajo de cúpula, y las secciones tendrían una longitud variable en función de su posición (latitud).

CAPÍTULO 1

Este nivel de análisis fue suficiente para diseñar estructuras y garantizar su seguridad. Los niveles de tensión a los que se llevaban eran suficientemente reducidos para que su comportamiento (en estos niveles de carga) fuera sensiblemente lineal. Desde el punto de vista de los límites de agotamiento de los materiales, en los orígenes de estos métodos, es posible afirmar que los coeficientes de seguridad eran elevados.

Pero en este nivel de análisis, no participan las dos siguientes variables:

- Ecuaciones de compatibilidad de deformación, o la existencia de deformaciones compatibles con las tensiones postuladas.
- Ecuaciones constitutivas, donde quedan unívocamente descritas las curvas tensión-deformación de los materiales de los que está compuesta la sección.

La resistencia de materiales incorpora en el análisis de secciones estas dos variables en su formulación y resuelve con exactitud problemas generales de compresión o flexión compuesta esviada (teoría de Bernouilli-Navier⁴). Aceptando ciertas hipótesis es posible determinar mediante la aplicación de expresiones directas, no solamente la tensión normal en cualquier punto de la sección, sino también las coordenadas del plano de equilibrio, lo que supone conocer la profundidad y giro del eje neutro, así como la curvatura de la sección.

La tensión en un punto cualquiera de la sección transversal (figura 1.2), queda relacionada con los momentos estáticos de la sección y los esfuerzos exteriores mediante la expresión:

$$\sigma_{(x,y,z)} = \frac{P_{(x)}}{A} + \frac{I_z \cdot z - I_{yz} \cdot y}{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2} \cdot M_{y(x)} + \frac{I_y \cdot y - I_{yz} \cdot z}{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2} \cdot M_{z(x)} \quad [1.2]$$

⁴ Claude-Louis Marie Henri Navier (1785, 1836), aceptando la hipótesis de Jacob Bernouilli (1654-1705) en la que establecía que las secciones permanecen planas después de la deformación, desarrolla la teoría general de la flexión para materiales elásticos y pequeñas deformaciones, estableciendo una ley de proporcionalidad entre la curvatura y el momento exterior aplicado mediante la expresión [1.1]:

$$\frac{EI}{x} = M \quad [1.1]$$

En el caso particular en el que los ejes de la sección sean los ejes principales de inercia, lo cual sucede si se analizan secciones con geometrías canónicas, se anula el término del producto de inercia ($I_{yz} = 0$), y se llega a la siguiente simplificación:

$$\sigma_{(x,y,z)} = \frac{P(x)}{A} + \frac{M_{y(x)}}{I_y} \cdot z + \frac{M_{x(x)}}{I_z} \cdot y \quad [1.3]$$

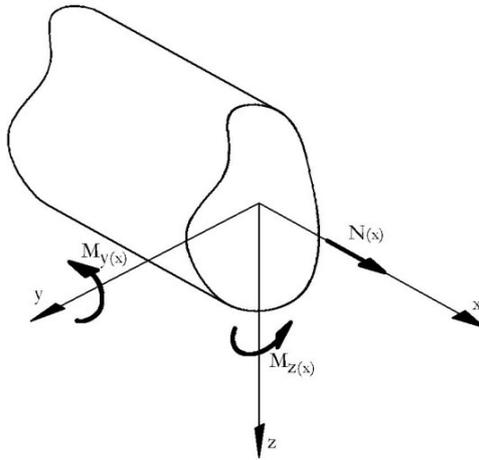


Figura 1.2. Sistema de ejes de coordenadas concordante con las expresiones expuestas. Autor.

El alcance de estas expresiones es limitado y se circunscribe al ámbito en el que se verifican las siguientes hipótesis:

- Las secciones analizadas permanecen planas después de la deformación (figura 1.3).

CAPÍTULO 1

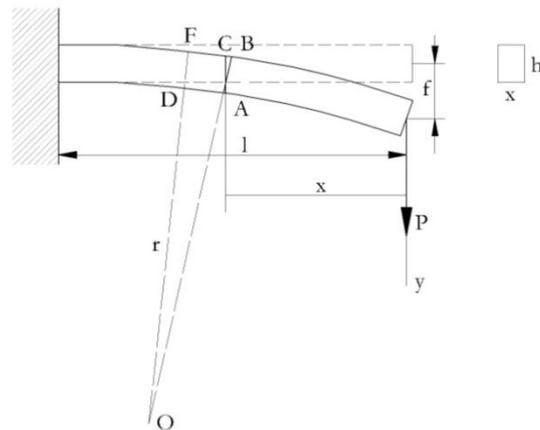


Figura 1.3. Deformada elástica de una viga en voladizo. Modelo de Jacob Bernouilli. Reproducción del autor de una imagen tomada de Timoshenko Stephen. "History of strength of materials". Mc Graw Hill, (1953).

- Las deformaciones son suficientemente pequeñas para que la acción de las fuerzas exteriores no se vea modificada, en primera aproximación por la deformación.
- Los materiales de la sección transversal analizada presentan un comportamiento elástico y lineal hasta el agotamiento, (figura 1.4).

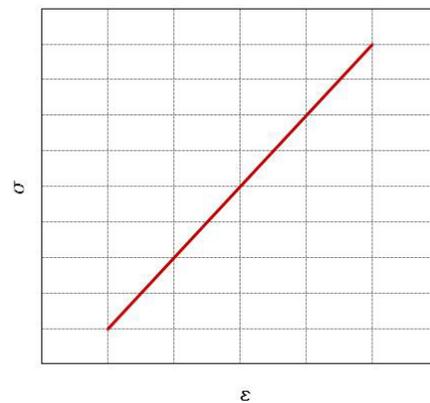


Figura 1.4. Curva tensión-deformación de un material elástico y lineal. Autor.

Cuando se aborda el análisis de una sección de hormigón armado solicitada frente a tensiones normales, a pesar de asumir que las secciones se conservarán planas, y admitir que se estará en el

ámbito de las pequeñas deformaciones a nivel de sección, esto es, a pesar de haberse verificado las dos primeras hipótesis establecidas para validar el campo de aplicación de la resistencia de materiales, el comportamiento no lineal de los materiales imposibilita la aplicación directa de las expresiones expuestas para la determinación de las coordenadas del plano de equilibrio.

Los modelos constitutivos aceptados para el hormigón presentan en estados iniciales de carga una rama sensiblemente lineal hasta cierto nivel de deformación, en el que se acepta un módulo de proporcionalidad entre la deformación y la tensión E_c . Superado este umbral son aceptados modelos con comportamientos plásticos (parábola-rectángulo), o modelos con bajada de rigidez (modelos hiperbólicos). En todos de ellos es habitual la ausencia de rama con capacidad de resistir tracciones⁵ (figura 1.5).

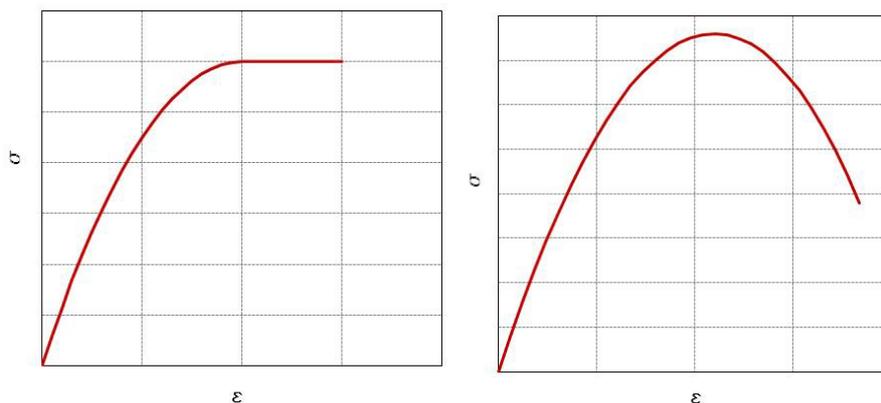


Figura 1.5. Curvas tensión-deformación características de hormigón. Modelo parábola-rectángulo y modelo hiperbólico. Autor.

La ecuación constitutiva del acero está definida en general por dos ramas lineales. La primera de ellas gobierna el problema desde un punto de vista elástico y lineal. Para la segunda rama el modelo constitutivo puede presentar configuraciones de pérdida total de rigidez (modelo

⁵ El hormigón presenta cierta capacidad a tracción que desempeña un papel fundamental en ciertos fenómenos, tales como la fisuración, el esfuerzo cortante, o la adherencia de las armaduras. Pero debido a que se trata de un valor reducido, de manera conservadora, esta capacidad no se computa para evaluar la capacidad de la sección frente a esfuerzos de compresión o flexión simple o compuesta.

CAPÍTULO 1

empleado para acero en secciones de hormigón armado), o pérdida parcial de rigidez con un módulo de proporcionalidad constante hasta la rotura (modelo para aceros de pernos de anclaje), donde el valor de la tensión en rotura es el valor de referencia en los procedimientos de cálculos habituales para estos elementos (figura 1.6).

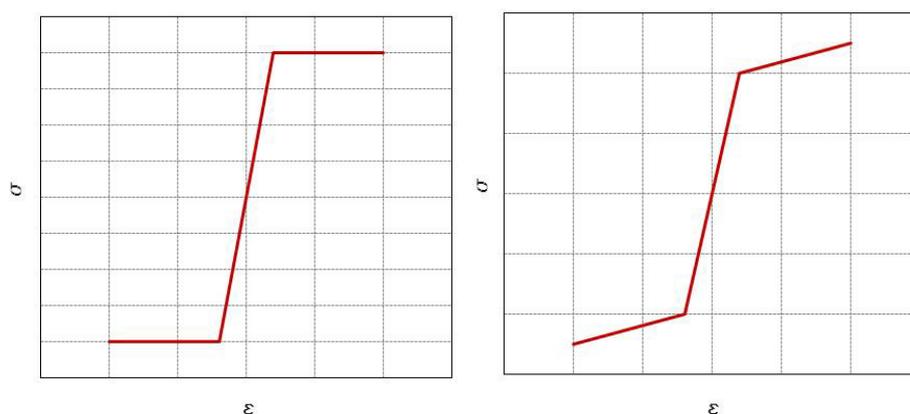


Figura 1.6. Curvas tensión-deformación características de acero. Modelo bi-lineal con pérdida total y parcial de rigidez de la rama plástica. Autor.

Otro hecho relevante que abunda en la no linealidad a nivel mecánico de la sección es la diferencia de rigideces entre los dos materiales. La relación entre los módulos elástico de acero y de hormigón (para edades tempranas de éste), es del orden de siete. De manera que, cualquier intento de utilización de las ecuaciones de resistencia de materiales para analizar una sección de hormigón armado debe pasar por llevar a cabo una homogeneización de la misma, haciendo equivalente el área de uno de los materiales (en general el acero), al del otro, y adoptar su módulo elástico (en general el del hormigón). De esta manera, es posible determinar los momentos de área de cualquier orden de la sección homogeneizada, y operar linealmente con ella bajo determinadas consideraciones con las expresiones de la resistencia de materiales.

En concreto, sería posible emplear las ecuaciones generales de la teoría de la flexión compuesta recta o esviada en el análisis de secciones de hormigón armado en las que todas sus fibras

estuvieran en compresión, y en la que en ningún punto de la sección se experimentaran deformaciones superiores a las del límite elástico aceptado del hormigón (ϵ_0).

En este contexto sería posible abordar un número muy reducido de problemas de secciones de hormigón armado con las expresiones expuestas. Así, elementos como columnas cortas, o placas base rígidas⁶ (en las que además los pernos estuvieran habilitados para asumir compresiones), con situaciones en ambos casos de axiles moderados y bajas excentricidades, son ejemplos de situaciones que podrían abordarse linealmente.

Quedarían sin resolver problemas tan habituales como piezas en flexión simple o pura⁷ (vigas, losas, pues desde estados muy iniciales de carga la pieza quedaría fisurada), soportes de hormigón con altas excentricidades, o soportes totalmente comprimidos en estados de sollicitación próximos a la rotura.

Y sería impensable abordar placas base (rígidas), igualmente con altas excentricidades, donde el equilibrio de las acciones exteriores se lograra con tracciones en los pernos, solicitados frente a tensiones tangenciales⁸ de manera concomitante.

Luego es claro que determinar las coordenadas del plano de equilibrio en una sección de hormigón armado para un estado de sollicitaciones de compresión o flexión compuesta esviada no necesariamente de agotamiento, se convierte en un problema altamente no lineal que implica cierta dificultad numérica.

⁶ Sería necesario dotar a la placa de rigidez suficiente (relación canto vuelo), para que se cumplieran las hipótesis establecidas para la resistencia de materiales. En este tipo de problemas, la dificultad estriba en conseguir garantizar la preservación del plano de la placa tras la deformación, lo que obliga en ocasiones a incorporar elementos de rigidización y dotarla a su vez de un gran espesor.

⁷ Para el análisis en tensiones normales de secciones de hormigón armado es posible despreciar el efecto concomitante del esfuerzo cortante, de manera que es válido hablar de flexión simple o pura a los efectos de esta tesis de manera indiferente.

⁸ Es habitual que en placas base de conexión entre estructuras de acero y cimentación, parte del cortante de diseño sea resistido por los pernos. Este estado de sollicitación normal y tangencial no se da en secciones de hormigón armado pues los esfuerzos de flexo-compresión y cortante son resistidos por elementos de armadura diferentes.

CAPÍTULO 1

Casos como soportes de hormigón armado, (incluso tomando en consideración efectos de segundo orden a nivel de estructura), placas base (rígidas), en las que los pernos estén solicitados simultáneamente frente a tensiones normales y tangenciales y para cuya comprobación sea necesario conocer el axil que lo solicita, piezas pretensadas con altas asimetrías mecánicas en sus ejes principales aparentes de inercia, (solicitados todos estos casos en compresión o flexión compuesta esviada), son algunos de los tipos de problemas que quedan sin resolver.

Para estos casos en los que la determinación de las coordenadas del plano de equilibrio se convierte en un problema altamente no lineal, y en los que el giro del eje neutro no se puede establecer desde el origen, esta tesis propone un algoritmo para hallar con un nivel de precisión suficiente, (mediante la imposición de una norma de convergencia inicial), el plano de equilibrio de una sección cualquiera de hormigón estructural frente a un estado de solicitaciones normales arbitrario, (no necesariamente de agotamiento), con el que poder conocer la profundidad y el giro del eje neutro, la curvatura de la sección, la deformación y la tensión de cada fibra. Es decir, tener un conocimiento real del punto en el que se alcanza el equilibrio y medir todas las variables que participan en el problema de manera unívoca. Se trata de un método iterativo que presenta una dificultad reducida desde el punto de vista numérico lo que lo hace adecuado para su empleo habitual en la comprobación de secciones de hormigón armado o pretensado.

Cabe la posibilidad de que nos preguntemos si realmente es necesario llegar al entendimiento de la sección en fases de carga inferiores a la rotura, y la utilidad real del conocimiento a bajo nivel de rotaciones y curvaturas, deformaciones y tensiones, y de la posición exacta de las resultantes, (hormigón y acero), para cualquier estado de solicitaciones normales, y geometría y distribución de armaduras igualmente arbitrarias. Es posible llegar a pensar que, en vista de que los análisis en rotura son suficientes para la determinación del nivel de seguridad de una sección en una gran cantidad de problemas prácticos, valga la pena el coste numérico y computacional que presenta la resolución de esta cuestión.

Sin embargo, y como ya se ha expuesto, existen múltiples situaciones en las que se hace necesario llegar a medir todas estas variables y controlarlas. Además, este nivel de análisis permite aumentar la libertad de diseño y otorga la posibilidad de pensar geometrías libres de simetrías y

abordarlas con seguridad. Es posible conocer la tensión en servicio de las armaduras de los soportes del Pabellón Suizo⁹ (figura 1.7), y no solamente determinar la curva de interacción en rotura que los agota para cada hipótesis y su axil concomitante.



Figura 1.7. Soportes de hormigón armado en el nivel inferior del Pabellón Suizo. www.disenoyarquitectura.net

Y se hace necesario poner de manifiesto que, en un entorno donde la exigencia es cada día mayor, donde los estándares de calidad aumentan de manera constante, o por el simple deseo de alcanzar la comprensión del problema en su totalidad, a bajo nivel, y gobernarlo *sin fisuras* es claro que, la comprobación de secciones de hormigón estructural, debe abordarse en todo momento, desde un acercamiento no lineal.

1.2 Objetivos.

Esta tesis se plantea los siguientes objetivos:

1. Establecer un procedimiento numérico para la determinación del plano de equilibrio de una sección de hormigón estructural sometida a solicitaciones de compresión o flexión compuesta esviada. El método buscado trata de ser universal de manera que de solución

⁹ Pabellón Suizo, Ciudad Universitaria de París (1931). Charles Édouard Jeanneret-Gris, Le-Corbusier (1887-1965).

CAPÍTULO 1

secciones con geometría, ecuaciones constitutivas de los materiales empleados, y estado de sollicitación en tensiones normales cualesquiera.

2. Descrito el algoritmo, y luego de haber desarrollado un software en la plataforma *.Net*, (*c#*), llevar a cabo una campaña de ensayos numéricos que permitan llegar a contrastarlo frente a un modelo de referencia que pueda asumirse como cierto.
3. Llevar a cabo dos ensayos experimentales controlados en laboratorio de dos soportes cortos de hormigón armado mediante la imposición de diversos estados de sollicitación exterior de compresión compuesta esviada, y comparar los resultados observados con los que se pueden determinar numéricamente mediante el empleo del algoritmo propuesto.
4. Analizar las implicaciones que se derivan de llevar a cabo la determinación de la estimación de la tensión por la elección errónea del giro del eje neutro en equilibrio en soportes apantallados de edificación en los que existe una diferencia elevada entre las capacidades de agotamiento de la sección transversal entre los dos ejes de simetría de la misma.
5. Poner en crisis la propiedad de convexidad de diagramas de interacción y demostrar que la capacidad máxima frente al agotamiento en compresión o flexión compuesta esviada en una sección con dos ejes de simetría no tiene por qué situarse, en contra de lo esperado, según una de estas direcciones, aparentes ejes principales de inercia máxima de la sección.

1.3 Metodología y estructura.

La tesis se organiza en siete capítulos fundamentales:

El capítulo 2 aborda una revisión de los modelos propuestos de los principales autores sobre el análisis en compresión y flexión compuesta esviada de secciones de hormigón armado. Se lleva a cabo una labor de análisis de evolución de los modelos y teorías surgidas al tiempo que se desarrolla el conocimiento. Se expone detalladamente cada modelo y se lleva a cabo la simulación numérica del mismo para su mejor entendimiento.

Este análisis de revisión retrospectiva del estado de la cuestión se detiene con el estudio de la propuesta de Row y Paulay¹⁰. En este momento, y luego de haber analizado el modelo propuesto por Farah y Huggins¹¹ en el que queda resuelta la determinación del plano de equilibrio en una sección cualquiera sometida a tensiones normales, la vuelta a modelos simplificados en forma de ábacos adimensionales y extrapolaciones lineales, no parece significar un avance relevante en el conocimiento de la cuestión investigada. En esta primera parte se lleva igualmente a cabo una breve exposición de los principales modelos normativos vigentes. Se revisa una selección de softwares comerciales que abordan la cuestión investigada en esta tesis.

En el capítulo 3, se expone detalladamente un método numérico de cálculo para la obtención del plano de equilibrio de una sección de hormigón estructural de geometría, ecuaciones constitutivas de los materiales que la compone, y distribución de armaduras genéricas, así como un estado de solicitaciones normales exteriores arbitrario, (axil y momentos aplicados en los dos ejes principales de inercia de la sección), inferiores a los de rotura. Se lleva a cabo un análisis crítico del método en el que se ponen de manifiesto las singularidades numéricas que presenta. Se evalúa su robustez y precisión mediante la comparación de los resultados que proporciona un software desarrollado para su implementación, con los resultados a los que se llega mediante el empleo de un modelo numérico de referencia (Farah y Huggins). Para llevar a cabo esta evaluación se plantea una campaña de ensayos numéricos de secciones de hormigón armado en los que se modifica diversas variables como la relación canto/base, cuantía de armadura longitudinal, dirección de aplicación del vector momento exterior, y el nivel de axil de compresión. Se evalúa el rumbo que adopta el eje neutro en equilibrio frente a la normal a la dirección de aplicación del vector momento. Este análisis se lleva a cabo mediante el empleo del software desarrollado (FCE).

¹⁰ Paulay Thomas, "Biaxial flexure and axial load interaction in short rectangular reinforced concrete columns", Bulletin of New Zealand Society for Earthquake Engineering, (September 1973).

¹¹ Anis Farah and M. W. Huggins. "Analysis of Reinforced Concrete Columns Subjected to Longitudinal Load and Biaxial Bending". ACI Journal, Proceedings, 66, 569-575, (July 1969).

CAPÍTULO 1

En el capítulo 4 se exponen los detalles para la preparación y ejecución de dos ensayos experimentales sobre un soporte corto de hormigón. Se presentan los resultados en términos de deformación que se observan en una sección de referencia del soporte ensayado. Estos dos ensayos experimentales se llevan a cabo también de manera numérica mediante la utilización del software desarrollado (FCE) y se comparan los resultados.

En el capítulo 5 se simula numéricamente la respuesta de secciones de hormigón para las que mediante la imposición de distintos estados de sollicitación normal exterior, se determina la tensión en las fibras características para dos supuestos. En el primero de ellos se adopta como rumbo del eje neutro la dirección normal a la dirección del vector momento y se analiza la sección mediante una aproximación en términos de flexión recta. En el segundo supuesto de la simulación se determina el giro real de la fibra neutra en equilibrio mediante el algoritmo desarrollado. Se evalúan las diferencias que se obtienen.

Las conclusiones más importantes a las que se llega en este trabajo se exponen en el capítulo 6, y seguidamente, en el capítulo 7 se presentan las posibles líneas de investigación a las que podrían dar paso.

Se recogen listas de figuras, tablas, y abreviaturas, así como referencias bibliográficas y anexos en la última parte de la tesis.

2. ESTADO DE LA CUESTIÓN.

2.1 Antecedentes.

El problema paradigmático de secciones solicitadas a flexión biaxial y un axil concomitante es el caso de soportes de estructuras. Pilares situados en las esquinas de edificios de los que forman parte, o en posiciones centrales en los que existan asimetrías en luces o cargas en los vanos de las vigas que concurren en sus extremos en pórticos espaciales, son ejemplos en los que el estado de sollicitaciones resultante es el que origina un axil con excentricidades en los dos ejes principales de inercia de la sección transversal de manera simultánea.

Ha quedado expuesta la dificultad numérica que supone llevar a cabo la integración de las tensiones en la sección trasversal. Esta dificultad aumenta si se trata de secciones de geometrías arbitrarias o para estados de compresión o flexión esviada. Las ecuaciones generales de equilibrio de esfuerzos internos a nivel de sección quedan planteadas en las ecuaciones [2.1], [2.2], y [2.3].

$$P = \int_A \sigma_c dA + \sum_{i=0}^n A_{s,i} \sigma_{s,i} \quad [2.1]$$

$$M_x = \int_A \sigma_c y dA + \sum_{i=0}^n A_{s,i} \sigma_{s,i} y_{s,i} \quad [2.2]$$

$$M_y = \int_A \sigma_c x dA + \sum_{i=0}^n A_{s,i} \sigma_{s,i} x_{s,i} \quad [2.3]$$

Los primeros modelos de análisis de compresión y flexión compuesta esviada no pretenden determinar las coordenadas del plano estricto de equilibrio, y se centran en buscar la seguridad de la sección determinado el límite superior de agotamiento.

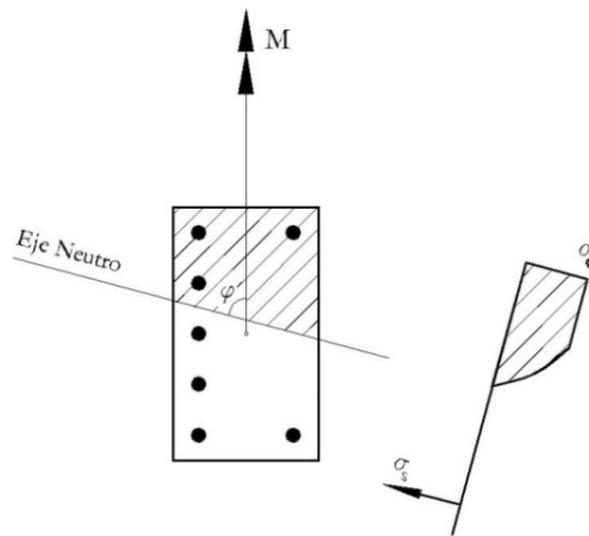


Figura 2.1. Esquema de tensiones normales en una sección en compresión o flexión compuesta esviada. Autor.

La manera de analizar el problema de la flexión compuesta esviada queda categorizada según Park y Paulay¹² en tres grupos:

- Métodos de superposición.
- Método de excentricidad uniaxial equivalente.
- Métodos basados en diagramas de interacción.

Cada uno de estos procedimientos se expone brevemente a continuación:

¹² R. Park & T. Paulay. "Reinforced concrete structures". John Wiley & sons, (1975).

Métodos de superposición.

Los métodos de superposición proponen simplificar el problema de flexión esviada (P, M_x, M_y) mediante la suma de las dos flexiones rectas según los dos ejes principales de inercia de la sección (P, M_x) y (P, M_y). Así, sería posible determinar la armadura necesaria para resistir el momento según cada uno de los ejes principales de la sección de manera separada, y sumar estas armaduras como resultado al problema, Figura 2.2(a).

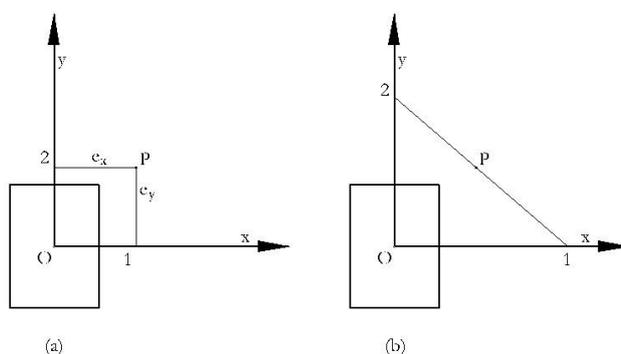


Figura 2.2. Métodos de superposición para análisis de secciones en compresión o flexión compuesta esviada. Reproducción del autor de una imagen tomada de R. Park & T. Paulay. "Reinforced concrete structures". John Wiley & sons, (1975).

El método según Morán¹³ conduce a secciones seguras en exceso, pudiéndose determinar cargas de agotamiento del orden de 1.7 veces superior a la carga de agotamiento real. Por otra parte, Park y Paulay afirman encontrar errores del lado de la inseguridad puesto que se toma en consideración dos veces la capacidad resistente del hormigón en la sección.

Una alternativa a este método consiste en determinar la posición del axil sobre cada uno de los ejes principales de inercia, puntos 1 y 2, (Figura 2.2 (b)), de la sección, trazando una línea recta cualquiera (por ejemplo paralela a la diagonal de la sección) por el punto de excentricidad real (P).

¹³ Moran Cabré Francisco, "Design of reinforced concrete sections under normal loads and stresses in the ultimate state". CEB Bulletin d'Information N° 83, (Abril 1972).

Método de excentricidad uniaxial equivalente.

Este método resuelve el problema de compresión o flexión compuesta esviada determinando una excentricidad única aplicada en uno de los ejes de la sección, de manera que conduzca a un estado de sollicitación mayor que el que producen las dos excentricidades originales del problema, reduciendo el problema a un caso de compresión o flexión compuesta recta. La excentricidad equivalente (e_0 , Figura 2.3), propuesta por diferentes autores está en función de la relación de las longitudes de los lados de la sección (de nuevo secciones con geometrías canónicas), así como la cuantía y disposición de armadura.

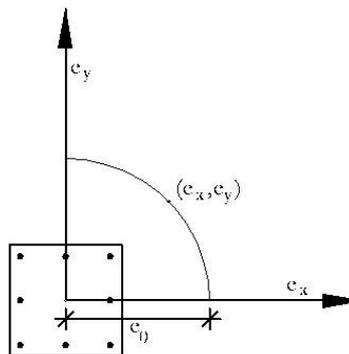


Figura 2.3. Diagrama de interacción para compresión o flexión compuesta esviada y excentricidad uniaxial equivalente. Reproducción del autor de una imagen tomada de R. Park & T. Paulay. "Reinforced concrete structures". John Wiley & sons, (1975).

Métodos basados en diagramas de interacción.

Estos métodos se basan en determinar el espectro de pares de excentricidades que agotan la sección para un axil concomitante de valor constante. Sobre cada uno de los ejes cartesianos se representa el esfuerzo de compresión o flexión compuesta recta que agota la sección. La dificultad numérica estriba en determinar el resto de puntos que determinan la curva (pues para todos esos puntos intermedios, el estado de sollicitación es de compresión o flexión esviada). La forma de estas curvas varía en función de múltiples factores como son el axil exterior, la geometría de la sección, o la cuantía de armadura dispuesta en la sección.

CAPÍTULO 2

Una alternativa a los diagramas de interacción son los nomogramas adimensionales¹⁴. Se trata de gráficos que condensan toda la colección de diagramas de interacción de una serie (para unas condiciones geométricas y mecánicas determinadas de la sección), lo que simplifica la resolución de problemas tanto de dimensionamiento como de comprobación. Con esta herramienta se evita el paso de hallar interpolaciones entre los distintos ábacos disponibles, a costa de cierta pérdida de precisión en la solución¹⁵.

Otros métodos de cálculo

La búsqueda de la solución exacta motiva la aparición y desarrollo de los métodos numéricos, no incluidos en la categorización de Row y Paulay, que consiguen aproximaciones cuyo nivel de error se reduce a niveles inferiores a los necesarios en la práctica habitual de diseño de secciones de hormigón armado. Se trata de métodos basados en la integración exacta de las tensiones en el dominio de la sección tomando en consideración la ecuación constitutiva real de los materiales de manera continua para todo el espectro de deformaciones compatibles.

Los modelos más recientes, situados entrado el siglo XXI, se basan en soluciones numéricas de alta dificultad operativa. Son en general métodos que plantean la solución óptima de dimensionamiento estricto de secciones reduciendo la cuantía de acero y volumen de hormigón necesarios para resistir los esfuerzos que las solicitan. Su alta complejidad los convierten en modelos teóricos y alejados de la necesaria practicidad en la operativa habitual del análisis estructural. No es objeto de esta tesis llevar a cabo un análisis crítico de modelos cuyo objetivo sea la búsqueda de soluciones exactas a la cuestión planteada, sino proponer un modelo de cálculo suficientemente aproximado con un reducido coste matemático.

2.2 Autores de referencia.

Se lleva a cabo una revisión histórica de las modelos de cálculo de secciones de hormigón armado sometidas a un estado de sollicitación de compresión o flexión compuesta esviada. Se

¹⁴ Morán Cabré Francisco, Verde A. “Flexión Esviada: estado actual del tema”, Informes de la Construcción, CSIC, Vol 22, nº217, (Enero Febrero 1970).

¹⁵ De acuerdo a Morán, los errores máximos se producen en situaciones extremas de cuantías.

CAPÍTULO 2

Aunque numerosos autores analizados provienen de la cultura anglosajona donde el sistema de unidades utilizado es el Imperial (así están notados los ejemplos que publican), en esta tesis, con objeto de poder correlacionar dichos modelos, todas las simulaciones que han sido implementadas lo han sido en Sistema Métrico Decimal y Sistema Internacional de Unidades. En adelante sólo este sistema será tratado. Y con la intención de reproducir con fidelidad los ejemplos expuestos en las publicaciones originales, las dimensiones de las secciones analizadas así como el límite de agotamiento de hormigón y acero y el diámetro de las barras de armadura empleadas presentan valores no convencionales¹⁷.

Para todos los autores analizados, las hipótesis de partida en las que fundamentan sus estudios son similares, y se recogen a continuación:

- Se toma por cierta la hipótesis de Bernoulli.
- Todos los modelos caracterizan mecánicamente los materiales en términos de tensión de agotamiento.
- Todos los modelos expuestos, salvo el desarrollado por Farah y Huggins¹⁸, desprecian la capacidad a tracción del hormigón.
- En general se considera que el agotamiento de las secciones se produce por rotura del hormigón en compresión. Para esto, es necesario considerar que el acero presenta

¹⁷ La traslación de unidades entre pulgadas y mm. para diámetros de barras conduce a diámetros no disponibles en el mercado, designadas estas barras en mm. No es posible especificar barras de acero corrugado con diámetros de 22.225 mm. correspondiente a un diámetro 7 (7/8' en Sistema Imperial).

¹⁸ Anis Farah and M. W. Huggins. "Analysis of Reinforced Concrete Columns Subjected to Longitudinal Load and Biaxial Bending". ACI Journal, Proceedings, 66, 569-575, (July 1969). En su artículo se incluye la representación del plano de equilibrio y se denota claramente el área de la sección con deformación de tracción admisible para el hormigón, si bien no se llega a describir la rama correspondiente en la ecuación constitutiva que emplean en su modelo, así como tampoco llegan a computar dicha capacidad en el ejemplo que publican.

suficiente ductilidad para experimentar una deformación superior a la de agotamiento del hormigón por compresión, establecida en el 3.00%¹⁹, sin alcanzar su agotamiento.

¹⁹ El valor de agotamiento del hormigón en compresión adoptado en modelos elaborados bajo la normativa ACI (American Concrete Institute), es 3.00%. Para los modelos desarrollados bajo la influencia de la normativa europea, este valor se fija en el 3.50%. No obstante el modelo de Farah considera que el agotamiento del hormigón en compresión se produce en el 4.00%.

CAPÍTULO 2

F. N. Pannell (1959)



Frederick Norman Pannell desarrolla un método de dimensionamiento y comprobación para secciones de hormigón armado con distribución homogénea de acero en las cuatro caras mediante la reducción del axil con dos excentricidades según las direcciones principales de inercia de la sección, a un axil con una excentricidad única aplicada en el eje principal de inercia de la misma. Reduce la dificultad de analizar problemas de flexión o compresión compuesta esviada a problemas de flexión o compresión compuesta recta.

Su trabajo fue publicado en 1959 “Biaxially Loaded Reinforced Concrete Columns”²⁰ y posteriormente ampliado y detallado en 1963 en su artículo “Failure surfaces for members in compression and biaxial bending”²¹.

La propuesta de Pannell surge de la idea de relacionar cualquier punto de la superficie real de agotamiento de una sección con una superficie de revolución resultante de rotar el diagrama de interacción $P - M_x$ sobre el eje vertical. Desde un punto de vista operativo, establecer una relación directa entre ambas superficies supone una gran ventaja numérica frente a la obtención de la superficie de agotamiento real de la sección.

Para ello parte de la hipótesis de que la desviación máxima entre la superficie de agotamiento real de la sección y la curva de revolución que se genera al asumir que para todas las direcciones de aplicación de la carga el valor de agotamiento es el que agota la sección según su eje principal de inercia, se produce para un par de excentricidades que se sitúen en la diagonal de la sección. Luego, partiendo de los momentos de agotamiento de la sección según sus direcciones principales de inercia²², así como de los momentos de agotamiento para la dirección de la

²⁰ F. N. Pannell. Discussion of “Biaxially Loaded Reinforced Concrete Columns”, ACI Journal, Proceedings, ASCE V. 85, ST6, pp. 47-54 (Junio 1959).

²¹ F. N. Pannell. “Failure surfaces for members in compression and biaxial bending”, ACI Journal, Proceedings, 60, 129-140, (January 1963).

²² Pannell está asumiendo de manera implícita que el diagrama de interacción en agotamiento ha de presentar convexidad en todos sus puntos. Esta hipótesis, que Morán trata en profundidad en "Design of reinforced concrete

diagonal de la sección, es posible trazar, afirma Pannell, la curva de interacción para cualquier par de excentricidades como una aproximación geométrica que sea tangente a los puntos conocidos y cuya función sea derivable en todo su dominio en el plano XY .

Para una sección rectangular con armadura distribuida de manera homogénea en las cuatro caras, esta desviación puede expresarse según $M_{fy} - M_d$, o bien NM_{fy} , (Figura 2.5).

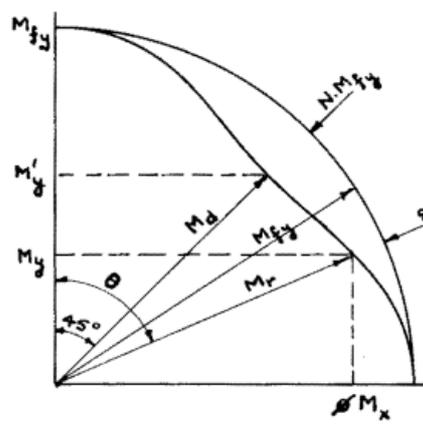


Figura 2.5. Superficie de agotamiento para un par de momentos $M_x - M_y$ y la superficie de revolución correspondiente al eje de inercia mayor de la sección. F. N. Pannell. Discussion of "Biaxially Loaded Reinforced Concrete Columns", ACI Journal, Proceedings, ASCE V. 85, ST6, pp. 47-54 (January 1959).

Es posible establecer una expresión que relacione la diferencia que existe entre la curva real de agotamiento y la superficie de revolución para cualquier dirección analizada θ . Para ello es necesario respetar la hipótesis de suavidad de la curva y la tangencia a los puntos característicos.

La desviación s puede expresarse en los siguientes términos:

$$s = NM_{fy} \sin^2 2\theta \quad [2.4]$$

Y puesto que $M_r = M_y \sec \theta$, y $M_r + s = M_{fy}$ se llega a la expresión [2.5]:

sections under normal loads and stresses in the ultimate state". CEB Bulletin d'Information N° 83, (Abril 1972), como una de las propiedades de los diagramas de interacción, se analiza en esta tesis en el anexo II.

CAPÍTULO 2

$$M_{fy} = \frac{FM_y \sec \theta}{1 - N \sin^2 2\theta} \quad [2.5]$$

Los valores de N para diferentes cuantías de armadura de la sección y niveles de axil concomitante pueden ser obtenidos y representados en curvas, tal como se muestra en la figura 2.6.

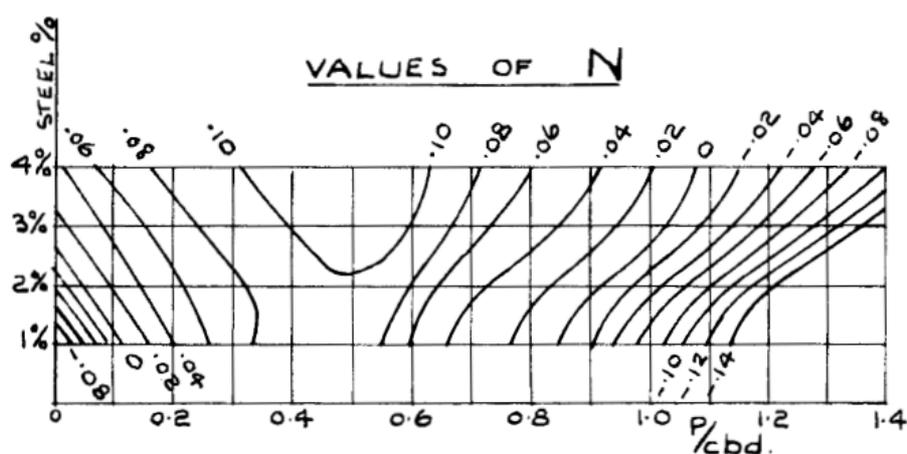


Figura 2.6. Valores de N para diferentes valores de cuantía y axil sobre la sección analizada. F. N. Pannell. Discussion of "Biaxially Loaded Reinforced Concrete Columns", ACI Journal, Proceedings, ASCE V. 85, ST6, pp. 47-54 (January 1959).

Es posible igualmente representar los valores de F y v $\phi = \frac{M_{fy}}{M_{fx}}$, (figura 2.7). Este último parámetro es usado para determinar el ángulo θ , puesto que es conocida la relación significada en la expresión [2.6].

$$\theta = \frac{\phi M_x}{M_y} \quad [2.6]$$

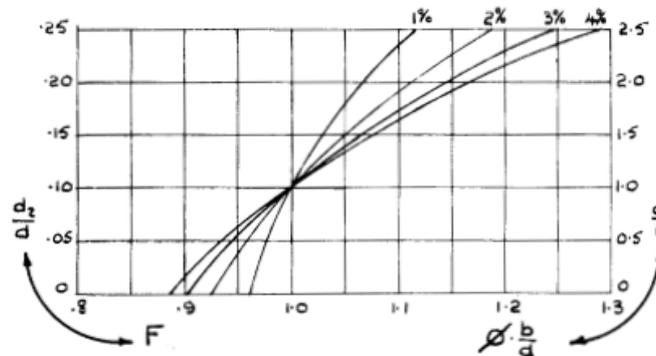


Figura 2.7. Relación de $\frac{r'}{h}$ y $F \frac{h}{b}$ y $\phi \frac{b}{d}$ para diferentes cuantías²³. F. N. Pannell. Discussion of “Biaxially Loaded Reinforced Concrete Columns”, ACI Journal, Proceedings, ASCE V. 85, ST6, pp. 47-54 (January 1959).

Finalmente es posible determinar el valor de M_{fy} (momento equivalente de diseño según la dirección principal de inercia de la sección). De esta manera el problema planteado originalmente compresión o flexión compuesta esviada, ha quedado reducido a un problema de compresión o flexión compuesta recta. El axil de agotamiento concomitante al momento de diseño M_{fy} puede obtenerse con ayuda de ábacos adimensionales de análisis en compresión o flexión recta.

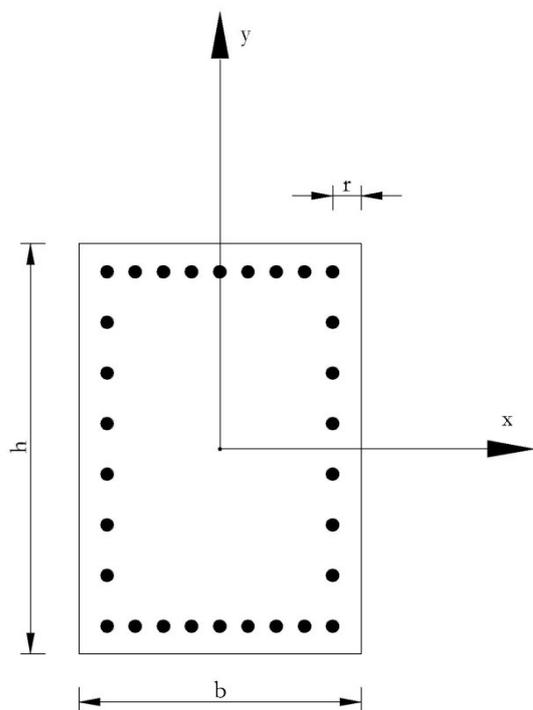
Pannell concluye su estudio exponiendo los resultados de los ensayos numéricos de verificación del método propuesto, y afirma haber medido errores inferiores al 3% frente a la solución teórica del problema.

- **Ejemplo de aplicación**

Se analiza según el modelo de Pannell la sección rectangular cuyo esquema, valores geométricos y mecánicos se muestran a continuación:

²³ Se adoptan la notación general de la tesis para las distintas dimensiones de la sección.

CAPÍTULO 2



$$b = 914.40 \text{ mm.}$$

$$h = 1066.80 \text{ mm.}$$

$$r = 76.20 \text{ mm.}$$

$$\text{Armadura: } 34\emptyset.$$

$$\rho = 2.86\%.$$

$$f'_c = 17.58 \text{ MPa.}$$

$$f_y = 275.79 \text{ MPa.}$$

$$P_u = 13344.67 \text{ kN.}$$

$$e_x = 101.60 \text{ mm.}$$

$$e_y = 254.00 \text{ mm.}$$

Para las condiciones expuestas es posible determinar el coeficiente de seguridad de la sección:

Los momentos de diseño según las dos direcciones principales de la sección son:

$$M_x = 13344.67 \cdot 0.1016 = 1355.82 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_y = 13344.67 \cdot 0.2540 = 3389.55 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Se ha determinado el ábaco donde se muestran los valores de N en función del axil característico y la cuantía de armadura, según se muestra en la figura 2.8. Entrando en este ábaco con el axil reducido ($\nu = \frac{P_u}{f_c b h} \rightarrow \nu = \frac{13344.67 \cdot 1000}{17.58 \cdot 914.40 \cdot 1066.80} = 0.778$), así como la cuantía de la sección (2.86%), se obtiene un valor de $N = 0.112^{24}$.

²⁴ El ábaco para valores de N determinado en esta tesis (figura 2.8) siguiendo las bases expuestas por Pannell difieren del original (figura 2.6). No ha sido posible alcanzar valores más próximos a los que se recogen en el artículo

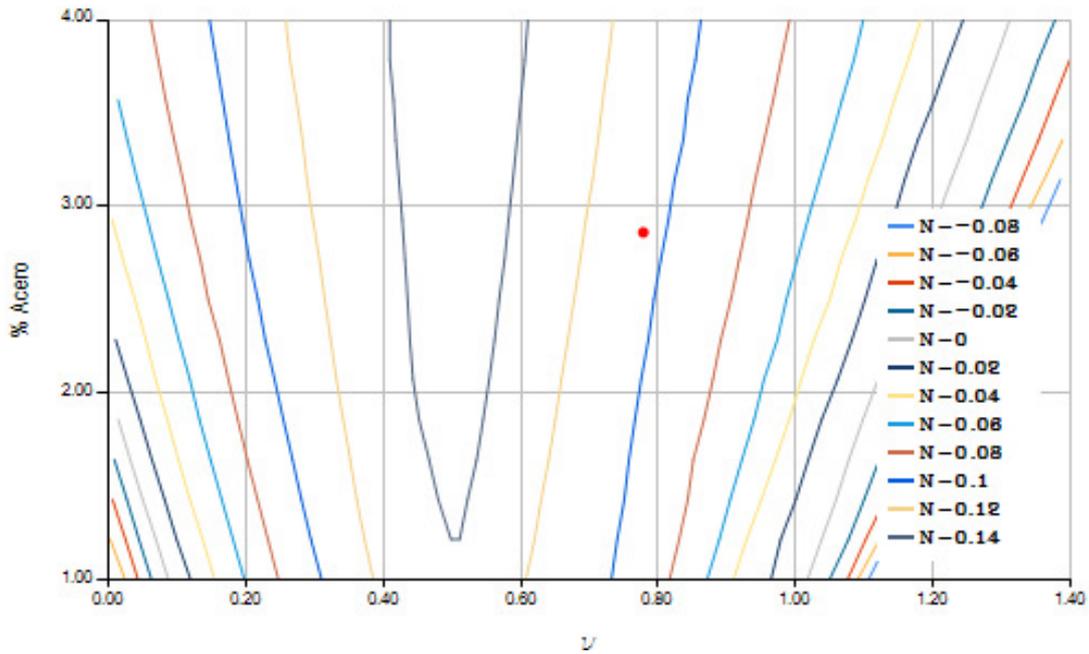


Figura 2.8. Valores de N calculados para el modelo de Parnell función de la cuantía y el eje concomitante de la sección. Autor.

Así mismo, se han determinado los ábacos descritos por Pannell en los que se relacionan las dimensiones geométricas de la sección y los coeficientes relacionados con la dirección de aplicación de la carga. De esta manera se han hallado los coeficientes F y ϕ , (figuras 2.9, 2.10), obteniéndose valores de $F = 0,97$, $\phi = 1.02 \frac{1066,80}{914,40} = 1.19$.

de Pannell. Así, para el ejemplo presentado en esta tesis, (reproducción del que el propio Pannell incluye en su publicación), haciendo uso del ábaco original se obtiene un valor de $N = 0.05$, y en la simulación presentada se ha obtenido un valor de $N = 0.112$. La justificación de los valores de N calculados para el trazado del ábaco se incluye en el Anexo I.

CAPÍTULO 2

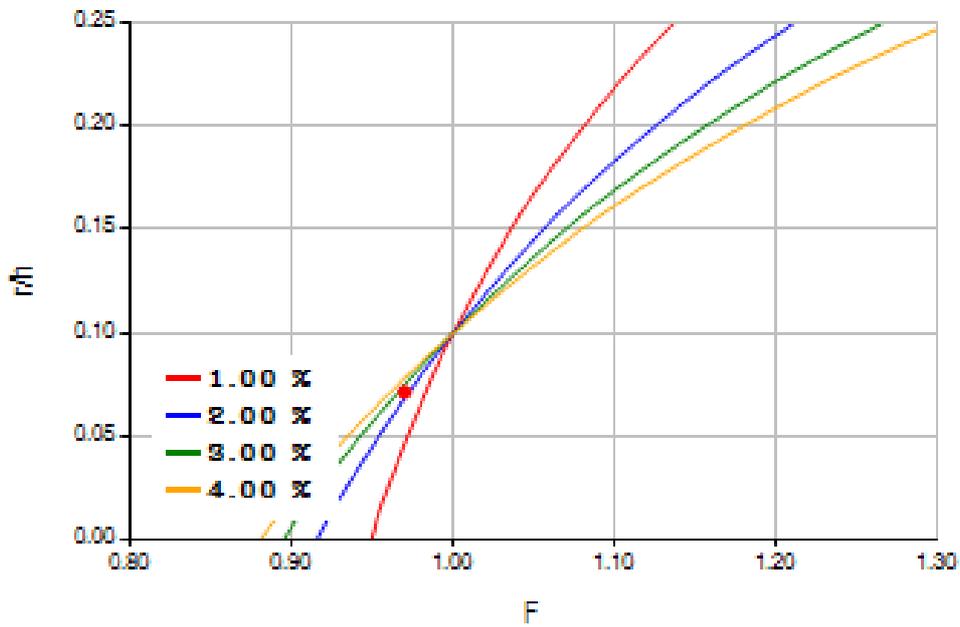


Figura 2.9. Relación de $\frac{r'}{h}$ y F para diferentes cuantías. Autor.

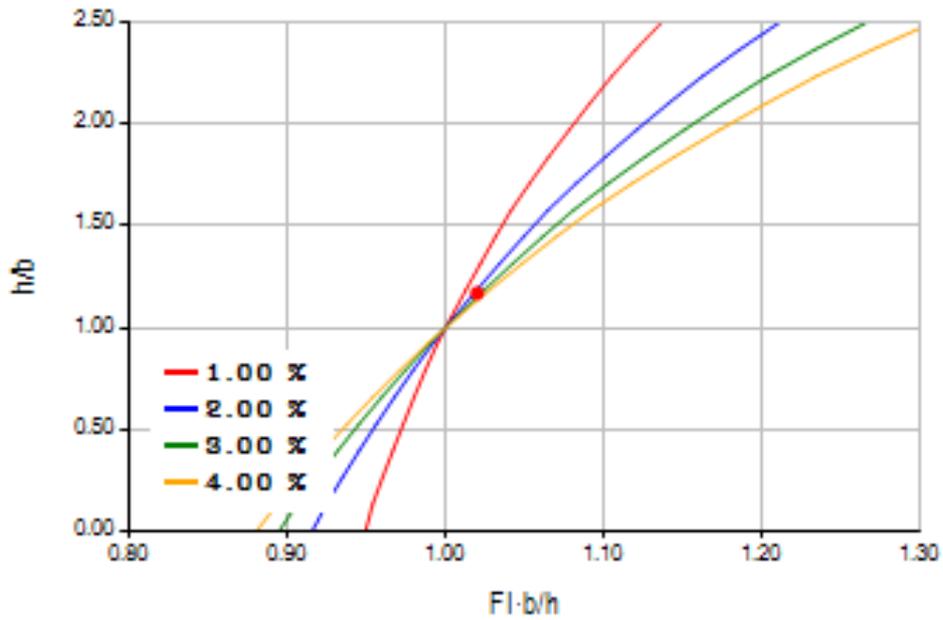


Figura 2.10. Relación $\frac{h}{b}$ y $\phi \frac{b}{h}$ para diferentes cuantías. Autor.

En este punto es preciso conocer las variables geométricas necesarias para el modelo de Pannell:

$$\tan \theta = \phi \frac{M_x}{M_y} \rightarrow \tan \theta = 1.19 \frac{1355.82}{3389.55} \rightarrow \tan \theta = 0.476$$

$$\theta = 25^\circ 27'$$

$$\sec \theta = 1.107$$

$$\sec^2 2\theta = 0.602$$

Finalmente es posible conocer el momento diseño equivalente en flexión compuesta recta con el que dimensionar la sección:

$$M_{fy} = \frac{FM_y \sec \theta}{1 - N \sin^2 2\theta} \rightarrow M_{fy} = \frac{0.97 \cdot 3389.55 \cdot 1.107}{1 - 0.112 \cdot 0.602} \rightarrow M_{fy} = 3913.85 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Expresado en términos adimensionales queda:

$$\mu = \frac{M_{fy}}{f_c b h^2} \rightarrow \mu = \frac{3913.85 \cdot 10^6}{17.68 \cdot 914.40 \cdot 1066.80^2} \rightarrow \mu = 0.212$$

Haciendo uso de ábacos adimensionales (Figura 2.11) para el análisis de secciones sometidas a flexión compuesta recta, y entrando con los esfuerzos de diseño ($\nu = 0.778, \mu = 0.212$), se determina la cuantía necesaria. Para el ejemplo analizado, la sección postulada resiste los esfuerzos impuestos de manera estricta.

CAPÍTULO 2

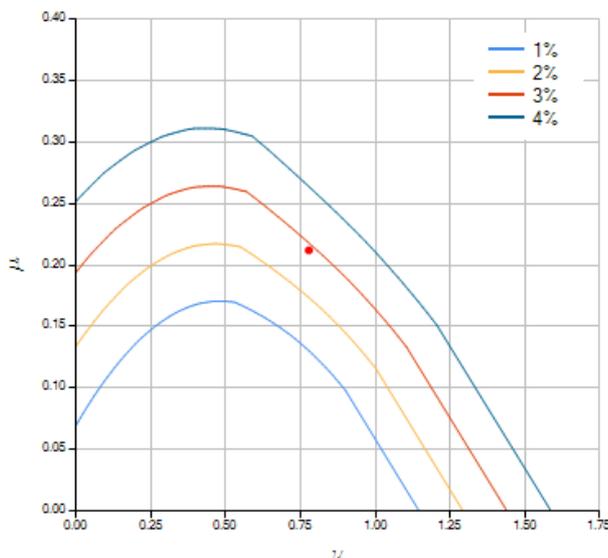


Figura 2.11. Diagrama de interacción adimensional para el análisis de secciones sometidas a flexión compuesta recta para diversas cuantías de armadura. Autor.

- **Aspectos relevantes del modelo de Pannell (1959)**

El modelo de Pannell resuelve el problema de compresión o flexión compuesta esviada en secciones rectangulares con distribución homogénea de armadura en las cuatro caras de la sección reduciendo el problema a un caso de compresión o flexión compuesta recta.

El modelo propuesto se basa en inferir geoméricamente la superficie de interacción partiendo de puntos característicos de agotamiento de la misma. Pannell parte de los momentos últimos de la sección según las dos direcciones principales de inercia, así como del momento que agota la sección según la dirección de la diagonal de la misma para un nivel de axil determinado, y determina la función de la forma de la superficie de interacción haciendo que esta pase por los tres puntos característicos conocidos, e imponiéndole condiciones de suavidad en todos sus puntos.

Con ayuda de los ábacos de Pannell, es posible dimensionar o comprobar secciones para cualquier par de excentricidades del axil de compresión obteniéndose, según su sus propios

ensayos numéricos, valores satisfactorios para todos los rangos de profundidades y giros del eje neutro.

Pannell no detalla en su publicación el método que sigue para llevar a cabo la integral de las tensiones en el hormigón para la elaboración de sus ábacos. En esta tesis se ha optado por adoptar el modelo de Whitney²⁵ puesto que en general, autores posteriores era el modelo de integración que utilizaban, si bien, no indica que la tensión del bloque comprimido se reduzca por el factor normativo aceptado del 85%.

No aporta información detallada de cómo discretiza la cuantía de armadura para llevar a cabo la integral de las tensiones en el acero. En esta tesis se ha optado por otorgar la superficie total de acero de la sección transversal en treinta y seis trozos de igual superficie a los que se les atribuyen la ecuación constitutiva del acero.

Siguiendo las indicaciones de Pannell, se ha optado por tomar en consideración la reducción de la capacidad mecánica del hormigón en compresión en la proporción de la superficie de acero que está incluida en la zona comprimida.

²⁵ Whitney, Charles S and Cohen, Edward, “Guide for Ultimate Strength Design of Reinforced Concrete”, ACI Journal, V.28, N° 5, Proceedings V. 53, 455-490, (Noviembre 1955). El modelo de Whitney para la caracterización del bloque comprimido asume un perfil rectangular de tensión en situaciones de rotura. Esta hipótesis se sustenta en el hecho de que en situaciones de agotamiento, las fibras extremas de la sección experimentarán deformaciones superiores al límite establecido (3‰) de manera que, tomar un perfil de tensión constante en una profundidad inferior a la teórica (80%), al tiempo que, (atendiendo a cuestiones normativas se limita la tensión de agotamiento al 85% del valor de agotamiento para una probeta cilíndrica), deja la estimación de la resultante y de su posición del lado de la seguridad.

CAPÍTULO 2

Boris Bresler (1960)

La publicación de Boris Bresler en 1960 “Design Criteria for Reinforced Columns under Axial Load and Biaxial Bending”²⁶ supone un intento de llevar a cabo la determinación de la capacidad resistente de columnas cortas sometidas a estados de compresión o flexión compuesta esviada de manera directa. Bresler propone una aproximación basada en *superficies de rotura* definidas como la superficie obtenida de representar la carga de agotamiento P_u como función de las excentricidades en los dos ejes principales de inercia de la sección o de las componentes de los momentos M_x, M_y , en dichas direcciones (Figura 2.13).



Figura 2.12. Boris Bresler. www.nap.edu

El objetivo de Bresler es hallar una función aproximada directa que se aleje de procedimientos iterativos y métodos numéricos, que defina con una aproximación suficiente la superficie de agotamiento de una sección sometida a flexión o compresión compuesta esviada.

²⁶ Boris Bresler, “Design Criteria for Reinforced Columns under Axial and Biaxial Bending”, ACI Journal, Proceedings, 57, 481-490. Disc., 1621-1638, (November 1960).

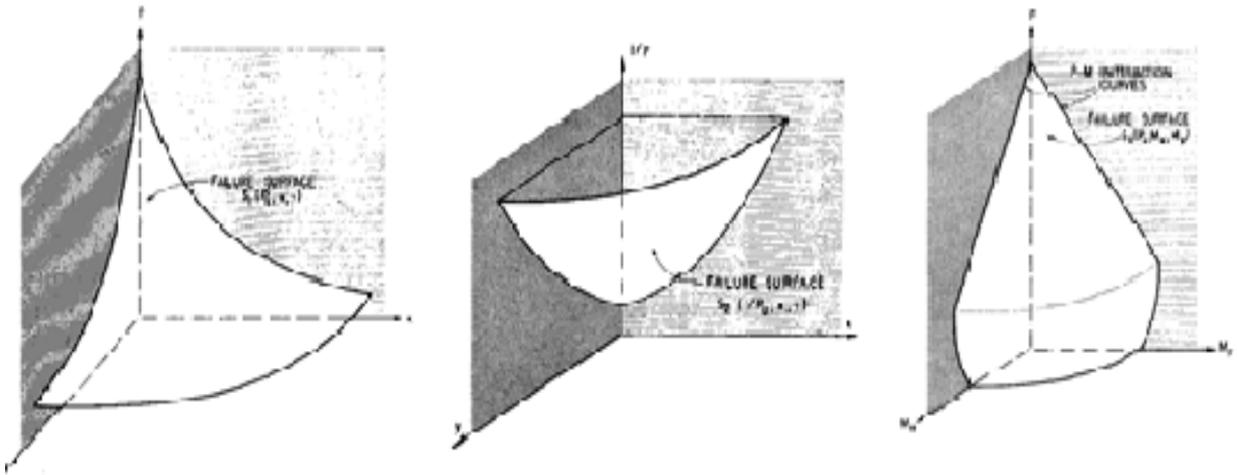


Figura 2.13. Superficies de rotura propuestas por Bresler. Boris Bresler, "Design Criteria for Reinforced Columns under Axial and Biaxial Bending", ACI Journal, Proceedings, 57, 481-490. Disc., 1621-1638, (November 1960).

La superficie de rotura postulada por Bresler puede expresarse en tres configuraciones diferentes:

$$S_1(P_u, x, y) \quad [2.7]$$

$$S_2\left(\frac{1}{P_u}, x, y\right) \quad [2.8]$$

$$S_3(P_u, M_x, M_y) \quad [2.9]$$

Cada una de las expresiones anteriores configura cada una de las tres superficies ilustradas en la figura 2.13, y para su determinación, Bresler propone dos métodos:

Método A



La ordenada $\frac{1}{P_u}$ de la superficie $S_2\left(\frac{1}{P_u}, x, y\right)$ puede aproximarse a la correspondiente ordenada $\frac{1}{P_i}$ en el plano $S_2\left(\frac{1}{P_i}, x, y\right)$ según se muestra en la figura 2.14.

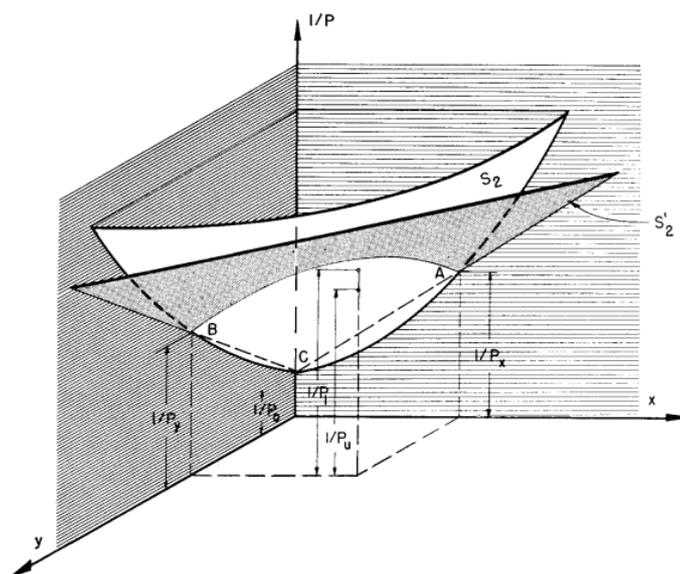


Figura 2.14. Representación gráfica para el método A. Boris Bresler, “Design Criteria for Reinforced Columns under Axial and Biaxial Bending”, ACI Journal, Proceedings, 57, 481-490. Disc., 1621-1638, (November 1960).

El plano S'_2 queda definido por tres puntos característicos A, B, C , donde las coordenadas de los mismos son las siguientes:

$$A\left(\frac{1}{P_x}, x_A, 0\right), B\left(\frac{1}{P_y}, y_B, 0\right), C\left(\frac{1}{P_0}, 0, 0\right)$$

Para una sección cualquiera, P_0 (punto C en la figura 2.14), representa la carga axial de agotamiento con excentricidades nulas, al tiempo que P_x y P_y representan las cargas axiales de agotamiento con excentricidades únicamente en cada uno de los ejes x, y de la sección respectivamente. En este momento la obtención de los valores P_0, P_x, P_y está resuelta y documentada, de manera que es posible aplicar el modelo propuesto por Bresler²⁷.

²⁷ ACI-ASCE Committee 327, “Report of ASCE-ACI Joint Committee on Ultimate Strength Design”. Proceedings, ASCE, V. 81, Paper N° 809 (January 1955).

Para cada punto de la superficie $S_2\left(\frac{1}{P_u}, x, y\right)$ existe un plano $S'_2\left(\frac{1}{P_i}, x, y\right)$. La aproximación de S'_2 implica un número infinito de planos, cada uno de ellos aplicable a un par de excentricidades según los ejes x, y , y cada uno de estos planos define un punto $\frac{1}{P_i}$, a su vez aproximación al punto $\frac{1}{P_u}$.

Haciendo $z = \frac{1}{P_i}$, para un valor dado de excentricidades x, y , el plano queda determinado por las coordenadas de los 3 puntos característicos A, B, C , según la figura 2.14:

$$\left[x - x_A - \frac{x_A}{y_B} y \right] + \frac{z_B - z_A}{z_C - z_B} \left[x - x_A + \frac{x_A}{z_B - z_A} (z - z_A) \right] = 0 \quad [2.10]$$

El valor de z_i en el plano correspondiente a $x = x_A$ y a $y = y_B$ se deduce de la expresión anterior:

$$z_i = z_A + z_B - z_C \quad [2.11]$$

O bien, en función de P_0, P_x, P_y :

$$\frac{1}{P_i} = \frac{1}{P_x} + \frac{1}{P_y} - \frac{1}{P_0} \quad [2.12]$$

Esta aproximación presenta las siguientes ventajas:

1. Se trata de una expresión simple y directa.
2. Los valores de P_0, P_x, P_y son moderadamente sencillos de determinar.
3. Es un método general para configuraciones de secciones de columnas de geometrías y distribución de armaduras canónicas.

Método B



El Segundo método propuesto por Bresler está basado la aproximación de la superficie $S_3(P_u, M_x, M_y)$ por una familia de curvas correspondientes a valores constantes de P_u (figura 2.15). Se trata del método de los contornos de carga.

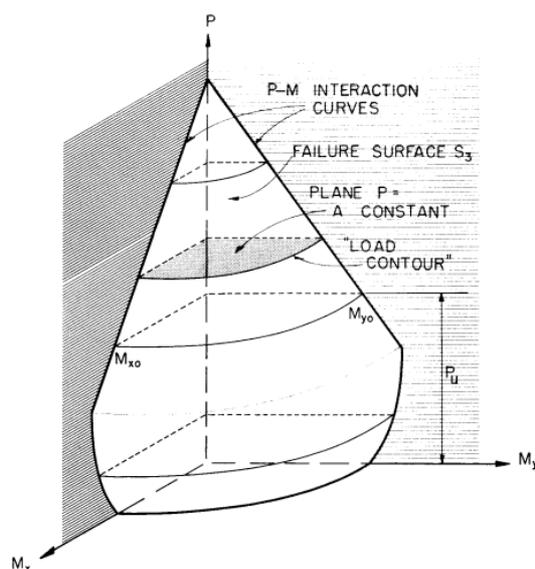


Figura 2.15. Representación gráfica para el método B. Boris Bresler, “Design Criteria for Reinforced Columns under Axial and Biaxial Bending”, ACI Journal, Proceedings, 57, 481-490. Disc., 1621-1638, (November 1960).

Estas curvas pueden expresarse en términos adimensionales mediante la siguiente expresión:

$$\left(\frac{M_x}{M_{x0}}\right)^\alpha + \left(\frac{M_y}{M_{y0}}\right)^\beta = 1.0 \quad [2.13]$$

Los valores de α y β , dependen de las dimensiones de la sección, la cuantía y distribución de armadura, las ecuaciones constitutivas de los materiales, valores de recubrimiento, y cuantías de armadura transversal de confinamiento, así como del axil concomitante aplicado en la sección.

Asumiendo que $\alpha = \beta$, la expresión anterior puede escribirse en términos de excentricidades, y para diferentes valores de α , se obtienen las familias de curvas mostradas en la figura 2.16:

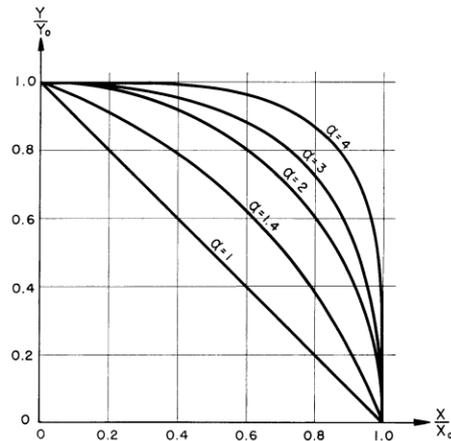


Figura 2.16. Curvas de interacción de Bresler para diferentes valores de α . Boris Bresler, “Design Criteria for Reinforced Columns under Axial and Biaxial Bending”, ACI Journal, Proceedings, 57, 481-490. Disc., 1621-1638, (November 1960).

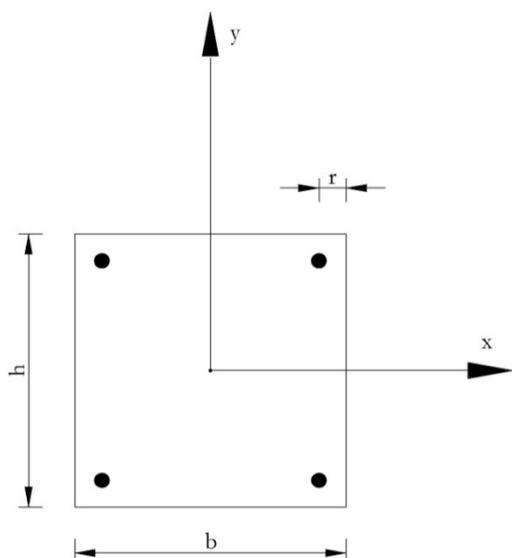
Los ensayos experimentales llevados a cabo para contrastar este modelo arrojaron valores de α que oscilaban entre 1.15 y 1.55. A medida que se aumenta la asimetría mecánica de la sección según sus ejes principales de inercia es previsible, según Bresler, que se obtengan grandes variaciones de valores de esta constante.

Por otra parte, Bresler constató que, mediante la definición simplificada de la superficie de rotura propuesta en el método A, se obtienen errores menores del 10%, y valor medio de desviación respecto a la solución teórica del orden del 3.3%.

- **Ejemplo de aplicación**

Haciendo uso del método A propuesto por Bresler es posible determinar el axil de agotamiento para la sección rectangular cuyo esquema, valores geométricos y mecánicos se muestran a continuación:

CAPÍTULO 2



$$b = 151.40 \text{ mm.}$$

$$h = 203.20 \text{ mm.}$$

$$r = 44.45 \text{ mm.}$$

Armadura: $4\phi 15.875 \text{ mm.}$

$$f'_c = 20.68 \text{ MPa.}$$

$$f_y = 379.20 \text{ MPa.}$$

$$e_x = 30.00 \text{ mm.}$$

$$e_y = 80.00 \text{ mm.}$$

Para ello, es preciso determinar las cargas de agotamiento de la sección para las tres pares de excentricidades características $(e_x, 0)$, $(e_y, 0)$, $(0,0)$ ²⁸.

Los diagramas de interacción (P, M) según las dos direcciones de la sección, así como las rectas que representan las excentricidades quedan se muestran en la figura 2.17.

²⁸ Bresler cita tres referencias para la determinación de las cargas últimas características para la aplicación del método \mathcal{A} descrito si bien, en esta tesis se ha optado por determinar la integral de las tensiones de hormigón y acero imponiendo una deformación de agotamiento en el hormigón del 3 ‰ y haciendo uso del modelo de Whitney. De esta manera, se ha determinado un diagrama de interacción $P - M$ para los dos ejes principales de inercia de la sección, y se han obtenido los valores buscados por la intersección de dichas curvas con las rectas de excentricidad constante para cada una de las direcciones analizadas. No se han afectan materiales ni secciones por coeficientes de reducción de capacidad.

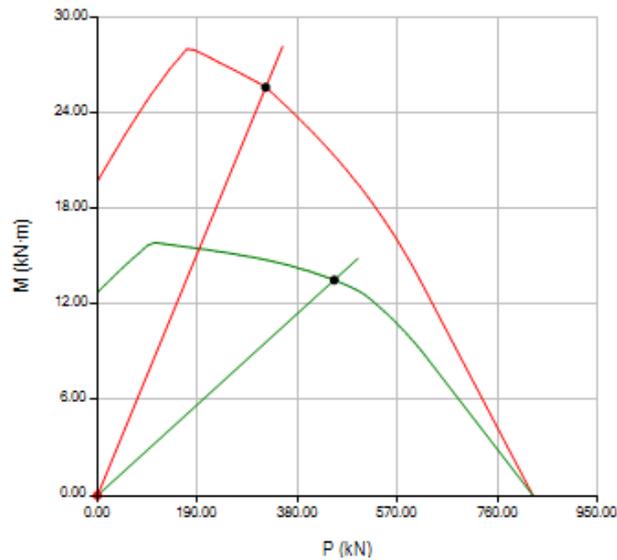


Figura 2.17. Diagrama de interacción (P, M) y excentricidades de cálculo para las dos direcciones principales de inercia de la sección. Autor.

De manera gráfica se obtienen los axiles característicos para la formulación de Bresler:

$$P_x = 449.77 \text{ kN} \cdot \text{m}, P_y = 319.61 \text{ kN} \cdot \text{m}, P_0 = 827.15 \text{ kN}.$$

Luego, para las excentricidades exteriores impuestas, el axil de agotamiento de la sección queda:

$$\frac{1}{P_i} = \frac{1}{P_x} + \frac{1}{P_y} - \frac{1}{P_0} \rightarrow P_i = 241.36 \text{ kN}$$

- **Aspectos relevantes del modelo de Bresler**

Los dos métodos de comprobación propuestos por Bresler son directos, y permiten determinar la superficie de agotamiento de una sección sometida a un estado de sollicitación de flexión o compresión compuesta esviada sin llevar a cabo iteraciones en el cálculo.

CAPÍTULO 2

El alcance de estos métodos se circunscribe a secciones transversales con geometrías canónicas y distribuciones de armaduras homogéneas en las cuatro caras. Así mismo, y a pesar de los resultados de los ensayos llevados a cabo por Bresler para su verificación, se producen errores del lado de la inseguridad en secciones con axiles reducidos o cuantías bajas.

No está descrito un método para la determinación de α , y comprobar secciones tomando considerando $\alpha = \beta = 1$ puede conducir a situaciones de franco sobredimensionado, alejadas del diseño óptimo teórico. El error que se produce es mayor a medida que se reduce el axil exterior.

Por otra parte, el método B presentado por Bresler será cuestionado por Pannell²⁹ en relación a la dificultad que supone establecer un valor arbitrario constante para α . Así mismo Pannell pondrá en crisis la idoneidad de este modelo pues según sus análisis, conduce a superficies de interacción que no respetan en todos sus puntos las condiciones de tangencia geométrica.

²⁹ F. N. Pannell. "Failure surfaces for members in compression and biaxial bending", ACI Journal, Proceedings, 60, 129-140, (January 1963).

Richard W. Furlong (1961)

Richard Furlong presenta en 1961³⁰ un estudio sobre la capacidad de columnas cortas y sección rectangular sometidas a compresión y flexión compuesta esviada y lo presenta en forma de diagramas de interacción para varios ángulos de aplicación de la carga. El objetivo de Furlong es describir el comportamiento teórico de estas secciones en agotamiento.



Figura 2.18. Richard W. Furlong. www.cae.ntexas.edu/faculty/directory/furlong

El estudio se centra en secciones rectangulares con armadura distribuida de manera homogénea en las cuatro caras de la sección, y en secciones rectangulares con armadura solamente en dos caras opuestas.

Furlong toma por válida la simplificación de Whitney para la caracterización del bloque comprimido de hormigón. El perfil de tensiones, así como las resultantes y los momentos aplicados en el centro de gravedad de la sección en el momento de agotamiento quedan representados en la figura 2.19.

³⁰ R. W. Furlong. “Ultimate strength of square columns under biaxially eccentric loads”, ACI Journal, Proceedings, 60, 1129-1140, (March 1961).

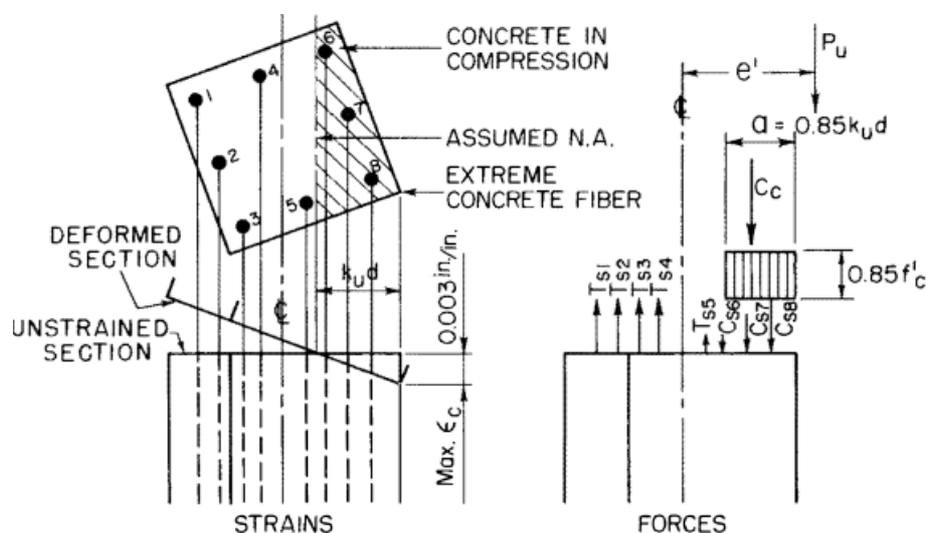


Figura 2.19. Esquema de tensiones y resultantes en una sección para el modelo de Furlong. R. W. Furlong. “Ultimate strength of square columns under biaxially eccentric loads”, ACI Journal, Proceedings, 60, 1129-1140, (March 1961).

Es posible determinar el axil y el momento de agotamiento de una sección imponiendo profundidades variables del eje neutro. Para todo el espectro de profundidades se obtendrán todos los pares de esfuerzos de agotamiento de la sección³¹. Todos estos pares de esfuerzos (P, M) representados sobre unos ejes cartesianos se denominan diagrama de interacción.

Si el axil de agotamiento se sitúa en el centro de gravedad de la sección, la rotura se produce por agotamiento simultáneo de todas las fibras de hormigón por compresión. A medida que el axil se desplaza del centro de gravedad de la sección, la excentricidad origina la aparición de un momento al tiempo que hace que disminuya el axil. Existe una excentricidad para la cual las fibras extremas del hormigón comprimido alcanzan su valor de agotamiento en el mismo

³¹ A pesar de asumir el modelo simplificado de Whitney, la resolución de la integral de las tensiones en el bloque comprimido no tiene una solución directa. Pannell, no indica el procedimiento numérico seguido en su estudio para abordar esta cuestión. En esta tesis, para la simulación del modelo de Pannell se ha optado por la aplicación del algoritmo propuesto por Joaquín Marín, “Computing double integrals with moments of area”, Boletín IMME (Instituto de Materiales y Modelos Estructurales), n°76, 144-155, (1988).

instante en el que la fibra extrema de acero en tracción alcanza su límite elástico. Esta excentricidad se denomina balanceada.

Furlong propone determinar diagramas de interacción para un rango de giros del eje neutro, de manera que se obtengan los pares de momentos según los dos ejes principales de inercia de la sección (M_x, M_y) para un axial constante P_u . La determinación de esta curva para todos los valores posibles de axiles arroja la superficie completa, tal como representa la figura 2.20.

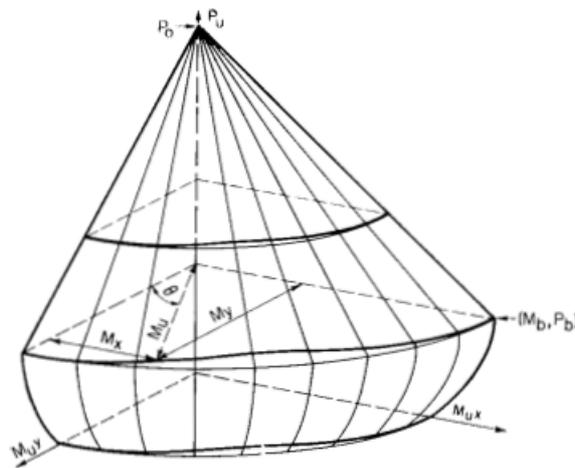


Figura 2.20. Superficie típica de interacción. R. W. Furlong. "Ultimate strength of square columns under biaxially eccentric loads", ACI Journal, Proceedings, 60, 1129-1140, (March 1961).

Furlong llevó a cabo el análisis de diagramas de interacción adimensionales para secciones cuadradas y cuatro barras de acero en cada cara de la sección, tomando por válida la hipótesis de que, el comportamiento de una sección con estas características podría extrapolarse a secciones de cuantías mayores de soportes con distribución de armadura homogénea en sus cuatro caras.

Las superficies de interacción y los diagramas calculados por Furlong contienen variaciones en las variables determinantes, esto es, cuantía de armadura, recubrimiento mecánico, grados de acero y tensión de agotamiento del hormigón.

CAPÍTULO 2

Para un axil P_u , la distancia desde el origen hasta la superficie de interacción representa la magnitud de la resultante del momento de agotamiento según la dirección de la excentricidad θ . Se deduce que, si la capacidad a flexión de la sección fuera constante para cualquier dirección, la línea de interacción de agotamiento resultante sería una circunferencia (figura 2.21)

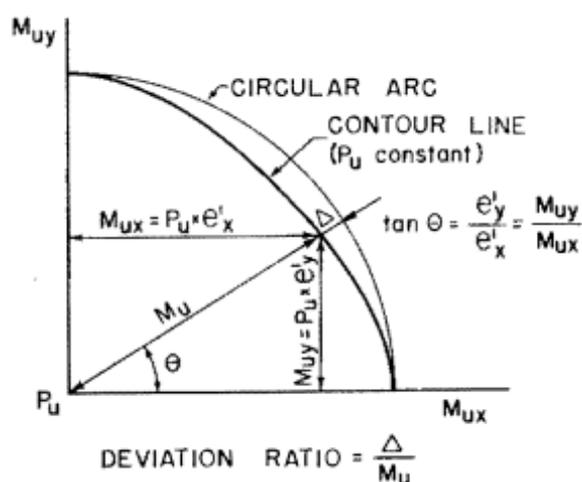


Figura 2.21. Diagrama de interacción para un axil P_u constante. R. W. Furlong. "Ultimate strength of square columns under biaxially eccentric loads", ACI Journal, Proceedings, 60, 1129-1140, (March 1961).

En secciones con distribución homogénea de armadura en las cuatro caras, las capacidades a flexión según los dos ejes principales es la misma, y se alcanza un mínimo de capacidad para un ángulo de 45° .

Por otra parte, debido a que los máximos momentos de agotamiento se logran para la condición de sección balanceada, situación en la que se logra un axil P_b , se observa que, la diferencia entre el arco de círculo y la superficie de interacción para la dirección pésima de análisis, se reduce a medida que el axil exterior se aproxima al axil balanceado y para ángulos menores de 45° . Para excentricidades menores al 10% del canto de la sección, Furlong afirma que las desviaciones producidas son despreciables.

La desviación entre el arco de circunferencia y la curva de agotamiento real, depende fundamentalmente, según indica Furlong, de la cuantía de armadura. Furlong llevó a cabo ensayos numéricos para investigar este desvío, hallando valores que oscilan entre 5% y 17%.

En esta tesis se ha llevado a cabo una campaña de ensayos numéricos para medir igualmente este desvío entre estas dos curvas y observar la tendencia del mismo, esto es, observar cómo evoluciona la separación entre el arco de circunferencia y la curva de interacción real de agotamiento de la sección calculada para las hipótesis establecidas por Furlong.

Se ha analizado una sección cuadrada con cuatro barras de acero en cada cara. Se han supuesto dos calidades diferentes de hormigón y acero, lo que equivale a ensayar dos grupos de secciones, y para cada uno de estos grupos se han escogido cuantías crecientes de armadura. Finalmente, se han supuesto tres casos de axil concomitante. Todo esto conduce a doce curvas mostradas en las figuras 2.22, 2.23, 2.24 y 2.25.

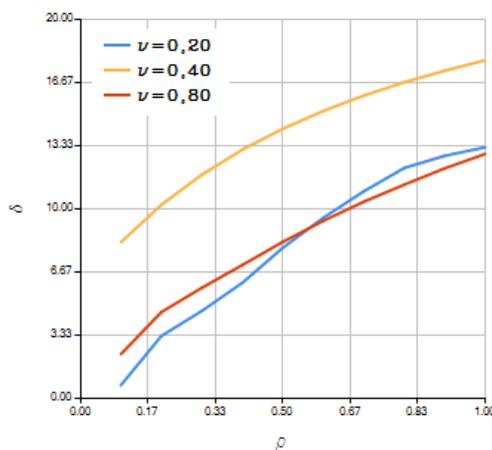


Figura 2.22

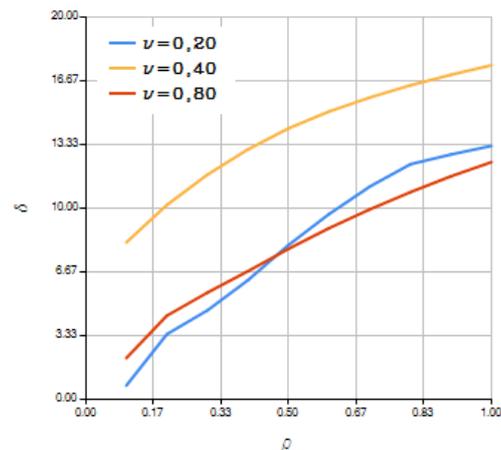


Figura 2.23

Figura 2.22. Desvío entre un arco de circunferencia y el diagrama de interacción calculado para $f_c = 20.68$ MPa, $f_y = 275.79$ MPa, $d = 0.75$, $\vartheta_1 = 0.20$, $\vartheta_2 = 0.40$, $\vartheta_3 = 0.80$. Autor.

Figura 2.23. Desvío entre un arco de circunferencia y el diagrama de interacción calculado para $f_c = 34.47$ MPa, $f_y = 275.79$ MPa, $d = 0.75$, $\vartheta_1 = 0.20$, $\vartheta_2 = 0.50$, $\vartheta_3 = 0.80$. Autor.

CAPÍTULO 2

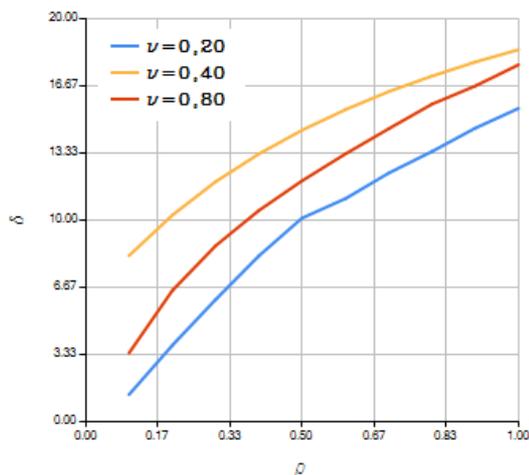


Figura 2.24

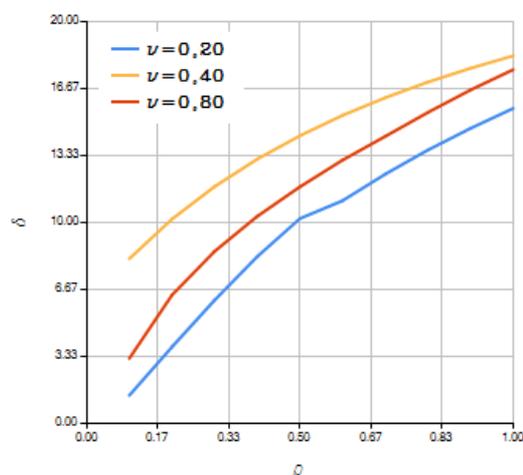


Figura 2.25

Figura 2.24. Desvío entre un arco de circunferencia y el diagrama de interacción calculado para $f_c = 20.68$ MPa, $f_y = 344.44$ MPa, $d = 0.75$, $\vartheta_1 = 0.20$, $\vartheta_2 = 0.50$, $\vartheta_3 = 0.80$. Autor.

Figura 2.25 Desvío entre un arco de circunferencia y el diagrama de interacción calculado para $f_c = 34.47$ MPa, $f_y = 344.44$ MPa, $d = 0.75$, $\vartheta_1 = 0.20$, $\vartheta_2 = 0.50$, $\vartheta_3 = 0.80$. Autor.

En las figuras 2.22, 2.23, 2.24 y 2.25 el coeficiente δ (eje vertical de cada gráfica) representa el desvío expresado en porcentaje entre la curva real de agotamiento de la sección según la diagonal de la misma y el valor de agotamiento de la sección según su dirección principal.

En la figura 2.26 se muestra el diagrama de interacción calculado y el arco de circunferencia para la situación en la que se ha encontrado el mayor desvío. Se ha encontrado un desvío máximo de 18.44%, (valor ligeramente superior al máximo hallado por Furlong).

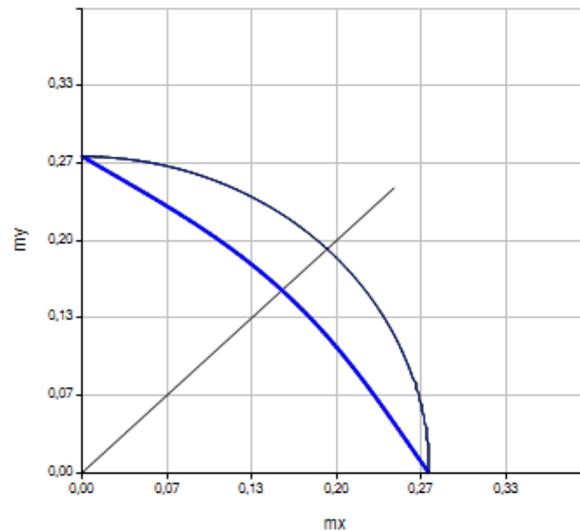


Figura 2.26. Diagrama de interacción para el desvío máximo de valores medido para las hipótesis de Furlong.

$$f_c = 20.68 \text{ MPa}, f_y = 344.44 \text{ MPa}, d = 0.75, \nu = 0.50, \rho = 1.00. \text{ Autor.}$$

- **Aspectos relevantes del modelo de Furlong**

Furlong concluyó que para una sección cuadrada con distribución de armadura homogénea en las cuatro caras, la capacidad máxima de la sección se logra cuando existe excentricidad únicamente en uno de los ejes principales de inercia³² al tiempo que el mínimo se produce cuando los momentos exteriores producen giros del eje neutro de 45°.

La variable relevante a la hora de encontrar desvíos máximos entre un diagrama de interacción teórico según un arco de circunferencia y la curva de agotamiento real es, según Furlong, la cuantía de armadura. Es posible afirmar que, el desvío se incrementa a medida que aumenta la cuantía de armadura en la sección.

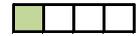
El desvío máximo se ha encontrado para un axil reducido $\nu = 0.50$. De los tres axiles ensayados, $\nu = 0.50$ es el que se encuentra más próximo al axil balanceado. Furlong postuló que los desvíos máximos se debían hallar en esta situación, tal como ha quedado comprobado.

³² Esta afirmación no es necesariamente verdadera tal como queda demostrado por el autor de esta tesis en el Anexo II.

CAPÍTULO 2

En secciones no simétricas, la curva de interacción para un axil P_u adquiere una configuración elíptica cuyos ejes coinciden con las direcciones principales de inercia de la sección, y nuevamente el desvío máximo entre una elipse y la curva real de agotamiento se produce en giros de eje neutro perpendiculares a la diagonal de la sección.

Furlong toma en consideración la reducción de la tensión de agotamiento del hormigón en un 85%. Así mismo, toma en cuenta la reducción de la capacidad mecánica del bloque comprimido por la presencia de armadura en esta zona. Así se ha replicado en esta tesis para el análisis expuesto.

F. N. Pannell (1963)

En 1963, Pannell, amplía su estudio sobre análisis de secciones sometidas a compresión o flexión compuesta esviada en su artículo “Failure surfaces for members in compression and biaxial bending”³³. En este trabajo, Pannell realiza una crítica al modelo de Bresler, comparándolo con su propia propuesta. En este mismo estudio, aborda la resolución de secciones rectangulares con armaduras distribuidas de manera no homogénea en sus cuatro caras.

- **Crítica al modelo de Bresler**

El modelo de Bresler establece la curva de interacción de agotamiento en flexión o compresión compuesta esviada según la expresión:

$$\left(\frac{M_x}{M_{x0}}\right)^\alpha + \left(\frac{M_y}{M_{y0}}\right)^\alpha = 1.0 \quad [2.14]$$

Donde α es un parámetro de ajuste que ha de determinarse mediante ensayos.

Pannell escribe la expresión de Bresler en la forma:

$$(M_{y0})^\alpha = (M_y)^\alpha + (\phi M_x)^\alpha \quad [2.14]$$

Para $\theta = 45^\circ$, $(M_{y0})^\alpha = 2(M_y)^\alpha$, y puesto que $M_d = \sqrt{2}M_y'$, se llega a la expresión [2.15]:

$$\left(\frac{M_d}{\sqrt{2}M_{y0}}\right)^\alpha = 0.50 \quad [2.15]$$

Es posible determinar los valores que toma α en función del axil reducido y de la cuantía de armadura de la sección. Se observan (figura 2.27) valores comprendidos entre 1.10 y 4.0, y esta gran variabilidad puede ocurrir en una misma sección para diferentes valores de excentricidad, lo que supone, según Pannell un modelo no adecuado si se adopta un valor constante de α .

³³ F. N. Pannell. “Failure surfaces for members in compression and biaxial bending”, ACI Journal, Proceedings, 60, 129-140, (January 1963).

CAPÍTULO 2

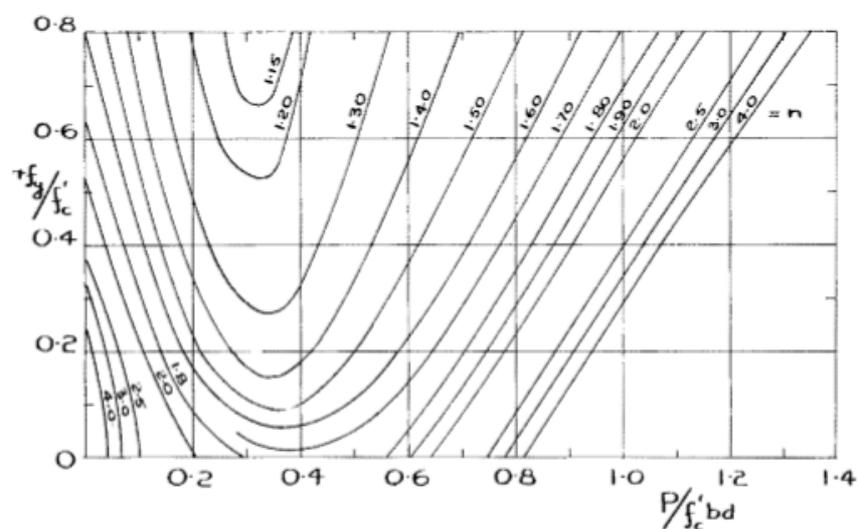


Figura 2.27. Valores de α para el modelo de Bresler determinados por Pannell para diferentes axiles y cuantías de una sección. F. N. Pannell. "Failure surfaces for members in compression and biaxial bending", ACI Journal, Proceedings, 60, 129-140, (January 1963).

Las curvas de interacción obtenidas mediante la aplicación del modelo de Bresler, no satisfacen las condiciones de tangencia en todos sus puntos, y es previsible, según Pannell, que conduzca a aproximaciones con un menor nivel de precisión a la solución exacta que su propio modelo incluso en situaciones en las que se haya adoptado un valor adecuado de α .

- **Secciones rectangulares con armadura distribuida de manera no homogénea en sus cuatro caras.**

La aproximación a la solución del problema está basada en la obtención de la curva de interacción partiendo de los momentos de agotamiento según las direcciones principales de inercia y la diagonal de la sección. Y esto es posible para secciones con distribución de armadura homogénea en las cuatro caras de la sección.

La distribución de armadura óptima en una sección se muestra en la figura 2.28. Así, es claro que en situaciones en las que el solamente exista M_x , la distribución óptima de armadura es la representada en la figura 2.28 A. De la misma manera si sólo solicita la sección un momento M_y ,

es óptima la configuración de armadura representada en la figura 2.28 B. Para situaciones en las que la flexión se produzca sobre el eje diagonal de la sección, la configuración óptima de la armadura es la que se muestra en la figura 2.28 C.

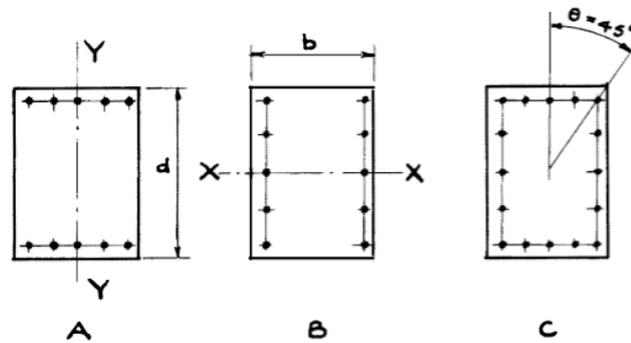


Figura 2.28. Secciones de soportes con distintas distribuciones de armadura. F. N. Pannell. "Failure surfaces for members in compression and biaxial bending", ACI Journal, Proceedings, 60, 129-140, (January 1963).

Este concepto puede expresarse en otros términos. Así, para $\theta = 0^\circ$ la manera más eficiente de distribuir la armadura es disponerla completamente en las caras b , para $\theta = 90^\circ$ la configuración óptima pasa por disponer toda la armadura en las caras d de la sección. En el caso intermedio, $\theta = 45^\circ$, el acero debería distribuirse de manera homogénea en las cuatro caras de la sección, esto es:

$$\frac{r_2}{r} = 0.50 \text{ si } \frac{\theta}{90^\circ} = 0.50 \quad [2.16]$$

$$\frac{r_2}{r} = 1.00 \text{ si } \frac{\theta}{90^\circ} = 1.00 \quad [2.17]$$

Luego, para direcciones comprendidas entre los valores límite definidos, la forma óptima de distribuir la armadura en la sección puede hallarse mediante la siguiente relación:

$$\frac{r_2}{r} = \frac{\theta}{90} \quad [2.18]$$

CAPÍTULO 2

El modelo que propone Pannell es esencialmente el mismo que ya presentó en 1959 para determinar la cuantía de armadura necesaria distribuida de manera homogénea en las cuatro caras de la sección, si bien en este momento establece un reparto de dicha cuantía de manera proporcional a los esfuerzos de flexión según cada uno de los ejes de la sección.

El ábaco con el que obtener factor de corrección N presentado por Pannell (Figura 2.29) está generado a partir de una sección con cuatro barras de acero en las esquinas con un momento flector aplicado en la dirección principal de inercia de la sección, junto con una sección con múltiples barras de armadura solicitada por un momento flector según la dirección de la diagonal de la sección.

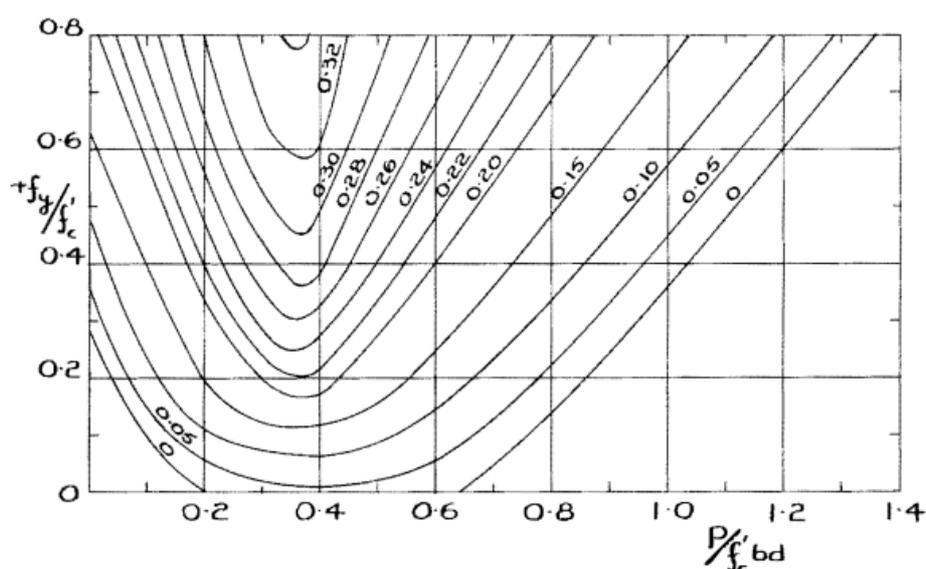


Figura 2.29. Valores de N para diferentes valores de cuantía y axil sobre la sección analizada para distribución no simétrica en las cuatro caras de la sección. F. N. Pannell. "Failure surfaces for members in compression and biaxial bending", ACI Journal, Proceedings, 60, 129-140, (January 1963).

El método no es válido para analizar secciones existentes, sino para diseñar secciones con distribución óptima de armadura con distribución no homogénea en las cuatro caras de las mismas para un estado de sollicitación cualquiera.

- **Ejemplo de aplicación**

Para el ejemplo expuesto en el análisis de Pannell, F. N. Discussion of “Biaxially Loaded Reinforced Concrete Columns”, una vez es hallada la cuantía de armadura necesaria para el agotamiento estricto de la sección, es posible llevar a cabo una distribución de la misma de manera óptima en las cuatro caras de la sección:

Para el caso analizado, se obtuvo una cuantía geométrica de armadura de 2.86%. En términos de cuantía mecánica y para los materiales utilizados, el factor r considerado por Pannell sería:

$$r = \frac{2.86 \cdot f_c}{f_y} \rightarrow r = \frac{2.86 \cdot 17.58}{275.79} \rightarrow r = 1.83\%$$

La distribución de dicha cuantía en las caras de la sección queda:

$$\frac{r_2}{r} = \frac{\theta}{90} \rightarrow r_2 = 1.83 \cdot \frac{25.45}{90} \rightarrow r_2 = 0.52$$

$$r_1 + r_2 = 1.83 \rightarrow r_1 = 1.83 - 0.52 \rightarrow r_1 = 1.31$$

- **Aspectos relevantes del modelo de Pannell (1963)**

Pannell amplía su modelo a secciones cuya distribución de armadura no sea homogénea en sus cuatro caras, lo que permite llevar a cabo un diseño más óptimo desde el punto de vista de los esfuerzos exteriores que solicitan la sección.

Tal como ocurre en su publicación de 1959, no está descrito el método de integración de las tensiones en la sección transversal. Pannell tampoco aporta detalles sobre cómo elaborar el ábaco de valores de N para distribución de armadura no homogénea en las cuatro caras de la sección, ni el procedimiento de operar con él. El ejemplo incluido en su publicación hace uso del ábaco original de 1953, para posteriormente, y mediante un reparto lineal en función de la dirección de la carga, hacer el reparto de la armadura según las cuatro caras de la sección.

Alfred L. Parme (1966)



Alfred L. Parme, junto con Jose M. Nieves y Albert Gouwens publica en 1966 un artículo titulado “Capacity of Reinforced Rectangular Columns Subject to Biaxial Bending”³⁴. La aportación de este texto al desarrollo del análisis de secciones de hormigón armado sometidas a compresión o flexión compuesta esviada, consiste en ampliar la formulación propuesta por Bresler³⁵, universalizando su aplicación y ajustando los resultados que arroja a la solución exacta.



Alfred L. Parme

Figura 2.30. Alfred L. Parme. www.nap.edu

Como ya ha quedado expuesto, la curva de interacción de una sección puede expresarse, según Bresler en los siguientes términos:

$$\left(\frac{M_x}{M_{x0}}\right)^\beta + \left(\frac{M_y}{M_{y0}}\right)^\beta = 1.0 \quad [2.19]$$

Esta expresión puede formularse de la siguiente manera:

³⁴ Alfred L. Parme, Jose M. Nieves, and Albert Gouwens. “Capacity of Reinforced Rectangular Columns Subject to Biaxial Bending”. ACI Journal, Proceedings, 63, 911- 923, (September 1966).

³⁵ Boris Bresler, “Design Criteria for Reinforced Columns under Axial and Biaxial Bending”, ACI Journal, Proceedings, 57, 481-490. Disc., 1621-1638, (November 1960).

$$\left(\frac{M_x}{M_{x0}}\right)^{\frac{\log 0.5}{\log \beta}} + \left(\frac{M_y}{M_{y0}}\right)^{\frac{\log 0.5}{\log \beta}} = 1.0 \quad [2.20]$$

Para valores de β comprendidos entre los límites (0.5-1.0), se obtienen curvas de interacción posibles (subelipses o superelipses), representados en la figura 2.31. Con estas curvas, y para un valor conocido de β , es posible conocer la capacidad a flexión de una sección en cualquier par de excentricidades de un axil.

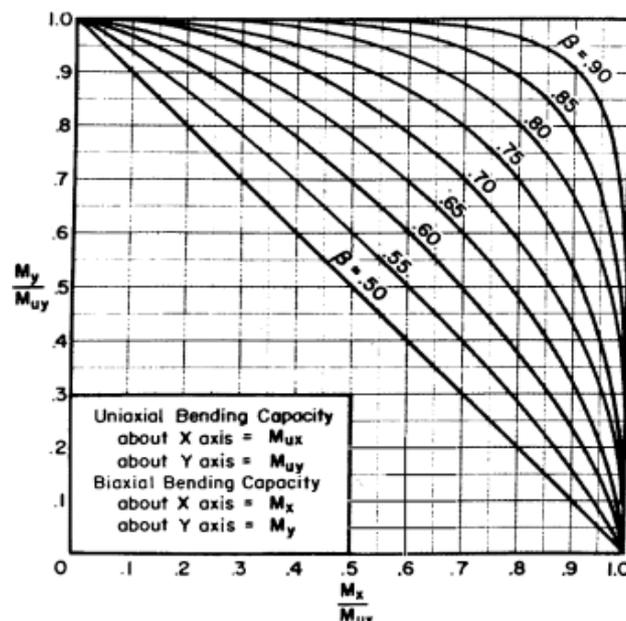


Figura 2.31. Relación de momentos según los dos ejes de la sección para el rango de valores de β posible. Alfred L. Parme, Jose M. Nieves, and Albert Gouwens. "Capacity of Reinforced Rectangular Columns Subject to Biaxial Bending". ACI Journal, Proceedings, 63, 911- 923, (September 1966).

De todos los valores posibles de este parámetro, existe uno que configura la curva cuya diferencia respecto a la solución exacta es mínima y Parme investigó sobre este hecho. Para ello contrastó los resultados que se obtienen de llevar a cabo el planteamiento y resolución de las ecuaciones de equilibrio en rotura de una sección para diferentes giros del eje neutro, y el par de

CAPÍTULO 2

valores de agotamiento que resulta de la formulación de Bresler luego de haber hallado el coeficiente β para esos mismos valores de M_x, M_y por el método general.

Los resultados de este análisis evidenciaron que incluso en el caso relaciones de cuantías de 2.5 para caras adyacentes de una sección, la diferencia entre las curvas obtenidas estaban por debajo del 5%, tal como se muestra en la figura 2.32.

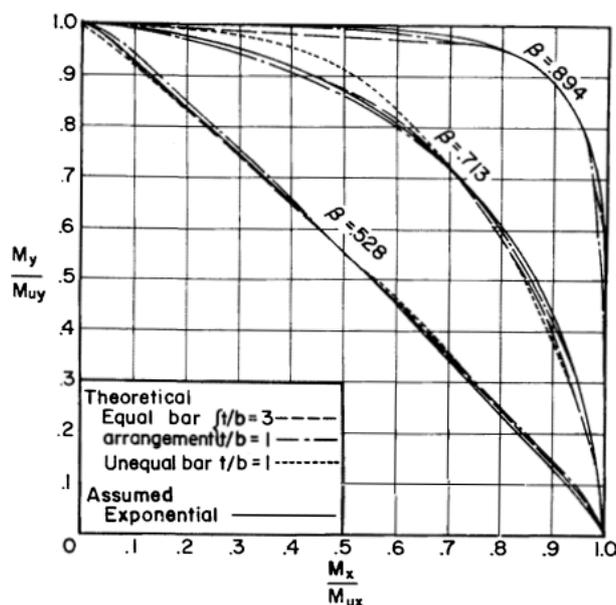


Figura 2.32. Curvas de interacción teóricas y halladas por Parme para la formulación de Bresler. Alfred L. Parme, Jose M. Nieves, and Albert Gouwens. "Capacity of Reinforced Rectangular Columns Subject to Biaxial Bending". ACI Journal, Proceedings, 63, 911- 923, (September 1966).

El coeficiente β es función de la cuantía de armadura y su distribución en la sección, de la relación canto base de la escuadría, de los límites de agotamiento de los materiales, y del axil exterior concomitante. De manera que debido a la gran variabilidad de todos estos parámetros, no es posible escoger un valor único que aproxime la curva a la solución exacta.

El objetivo del análisis de Parme es facilitar ábacos en los que se relacione el axil exterior con el valor de β para diferentes configuraciones de armado y materiales. En cada uno de los ábacos

publicados, se incluye una familia de curvas que cubren un rango de cuantías. Trataba de dar respuesta al mayor número de casos posibles de secciones.

Para la resolución de las ecuaciones de equilibrio, fue asumido un bloque constante de tensiones³⁶ para el hormigón. Parme no reduce la capacidad a compresión del bloque de hormigón por la presencia de acero, y justifica esta asunción afirmando que el parámetro β no se ve afectado significativamente por tal hecho. El resultado fueron cuatro ábacos. Uno de ellos se corresponde con la figura 2.33.

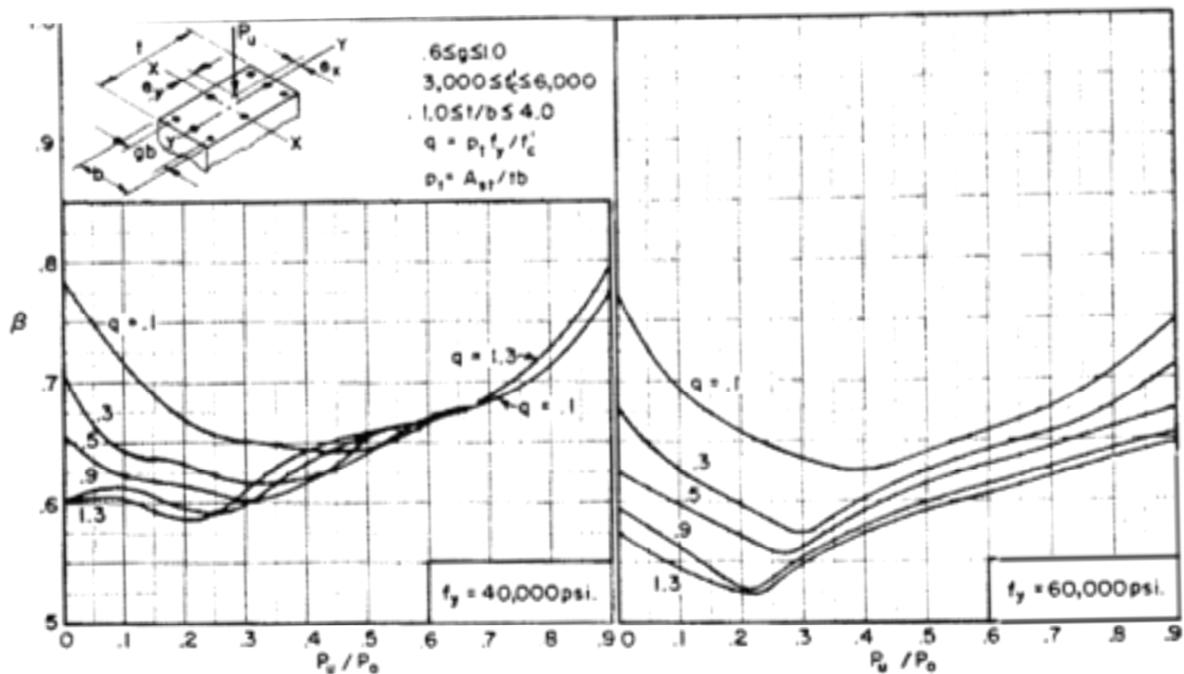


Figura 2.33. Valores de β propuestos por Parme. Alfred L. Parme, Jose M. Nieves, and Albert Gouwens. "Capacity of Reinforced Rectangular Columns Subject to Biaxial Bending". ACI Journal, Proceedings, 63, 911- 923, (September 1966).

³⁶ Modelo de Withney.

CAPÍTULO 2

Con ayuda de estos gráficos es posible conocer el valor de β que aproxima la curva de Bresler a la solución teórica para la configuración de armado y calidades de materiales representados. La ecuación de estas curvas, cuando se cumpla que $\frac{M_y}{M_{uy}} > \frac{M_x}{M_{ux}}$ es:

$$\frac{M_y}{M_{uy}} + \frac{M_x}{M_{ux}} \frac{(1 - \beta)}{\beta} = 1 \quad [2.21]$$

Que conduce a la siguiente expresión:

$$M_{uy} = M_y + M_x \frac{M_{uy}}{M_{ux}} \frac{(1 - \beta)}{\beta} \quad [2.22]$$

Para secciones rectangulares con armadura distribuida de manera homogénea en las cuatro caras, esta expresión queda como sigue:

$$M_{uy} \approx M_y + M_x \frac{b}{h} \frac{(1 - \beta)}{\beta} \quad [2.23]$$

Y de manera homóloga en el caso de $\frac{M_x}{M_{ux}} > \frac{M_y}{M_{uy}}$ es posible escribir:

$$M_{ux} = M_x + M_y \frac{M_{ux}}{M_{uy}} \frac{(1 - \beta)}{\beta} \quad [2.24]$$

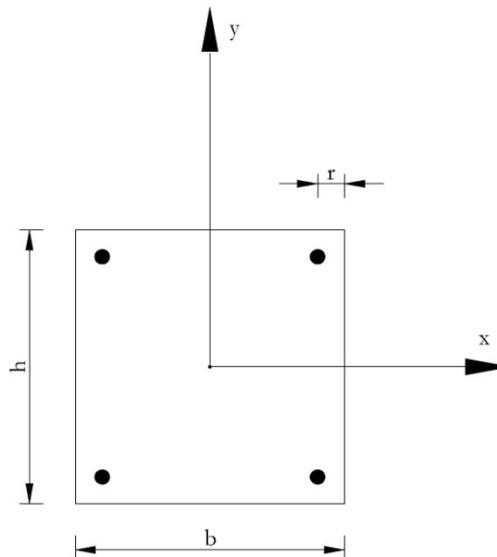
$$M_{ux} \approx M_x + M_y \frac{h}{b} \frac{(1 - \beta)}{\beta} \quad [2.25]$$

Es necesario estimar un valor inicial de β , y es razonable adoptar un valor de 0.65, pues, en columnas con axiles moderados, el valor final estará en el rango de 0.55-0.70. Con el valor β seleccionado, es posible determinar M_{ux} o M_{uy} mediante las ecuaciones expuestas. Para la sección resultante es posible calcular nuevamente el valor de β . Comienza en este punto un proceso iterativo que tendrá fin una vez lograda la convergencia deseada

- **Ejemplos de aplicación**

Conocidos los esfuerzos que solicitan una sección de sección rectangular, y las propiedades mecánicas de los materiales, asumiendo una distribución homogénea de armadura en las cuatro caras, es posible determinar las dimensiones necesarias de la sección así como la cuantía de armadura estricta para resistir dichos esfuerzos.

Aplicando el modelo de Parme, para la sección cuadrada cuyo esquema valores geométricos y mecánicos se muestran a continuación, se determinan las dimensiones y la cuantía necesaria:



$$r = 44.45 \text{ mm.}$$

$$f'_c = 20.68 \text{ MPa.}$$

$$f_y = 275.76 \text{ MPa.}$$

Armadura: 4 \emptyset .

$$P_u = 978.60 \text{ kN.}$$

$$M_x = 244.05 \text{ kNm.}$$

$$M_y = 108.47 \text{ kNm.}$$

Tomando como valor de partida de $\beta = 0.65$, y dado que se trata de una sección cuadrada, es posible determinar M_{ux} :

$$M_{ux} = 244.05 + 108.47 \frac{(1 - 0.65)}{0.65} \rightarrow M_{ux} = 302.46 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Es necesario postular las dimensiones de la sección así como su armadura para la aplicación del modelo de Parme. Una sección cuadrada de 406.4 mm con 8 barras de 28.575 mm de diámetro

CAPÍTULO 2

($\rho = 0.0313$) tiene una capacidad de $301\text{kN}\cdot\text{m}$ cuando sobre esa sección se aplica un axil de 979 kN . Para esa sección, $P_0 = 4228.25\text{ kN}$ ³⁷, tal como se muestra en la figura 2.34.

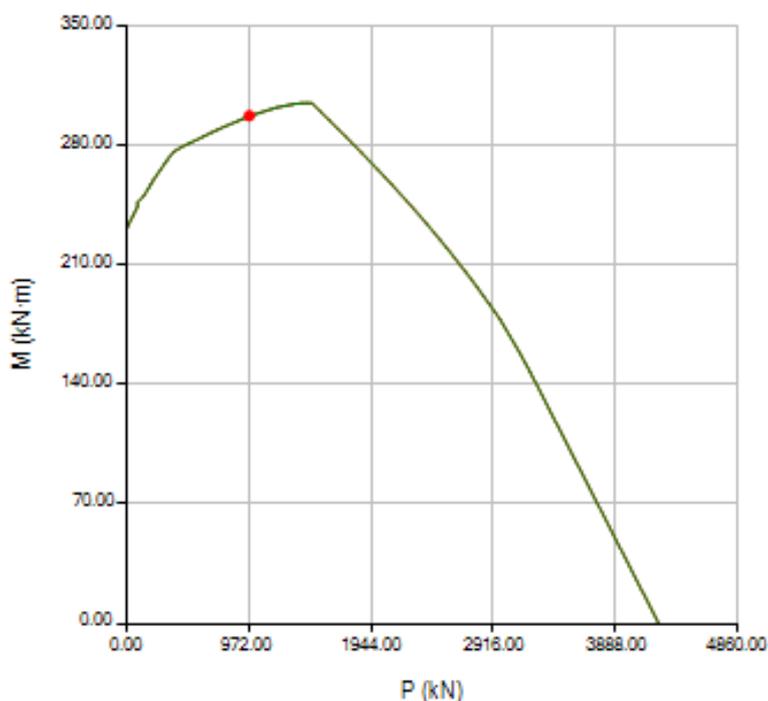


Figura 2.34. Diagrama de interacción en flexión recta para la sección analizada. Autor.

En este punto es preciso hacer uso de los ábacos publicados por Parme. En la figura 2.35 se muestran los valores calculado para β , para las cinco cuantías recogidas en el ábaco publicado por Parme. Entrando en este ábaco con los valores correspondientes de cuantía y axil se obtiene el valor de β :

$$\frac{P_u}{P_0} = \frac{978.60}{4328} = 0.22, q = 0.0313 \frac{275.79}{20.68} = 0.42. \text{ Se obtiene un valor } \beta = 0.635^{38}.$$

³⁷ Estos valores difieren ligeramente de los recogidos en el artículo de Parme, quien los obtuvo de “Ultimate Load Tables for Tied Columns”, Concrete Information, Portland Cement Association, Chicago, 1962, 29 pp. En esta tesis se ha optado por determinar un diagrama de interacción en flexión recta.

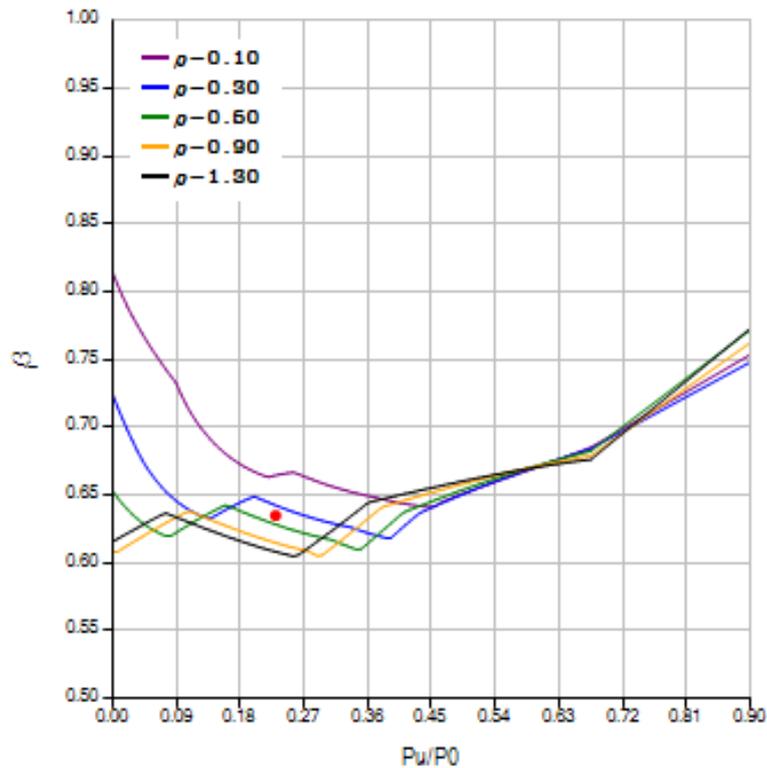


Figura 2.35. Valores de β calculados según el modelo de Parme Autor.

Finalmente, haciendo uso de las gráficas calculadas en la figura 2.36, es posible determinar la capacidad de la sección postulada. Para ello, entrando con $\frac{M_x}{M_{ux}} = \frac{244.05}{301} = 0.81$ y $\beta = 0.635$, se obtiene $\frac{M_y}{M_{uy}} = 0.40$, lo que implica $M_y = 0.40 \cdot 301 = 120.40 \text{ kN} \cdot \text{m} > 108.47 \text{ kN} \cdot \text{m}$. La sección postulada es adecuada.

³⁸ Parme obtiene un valor de $\beta = 0.62$.

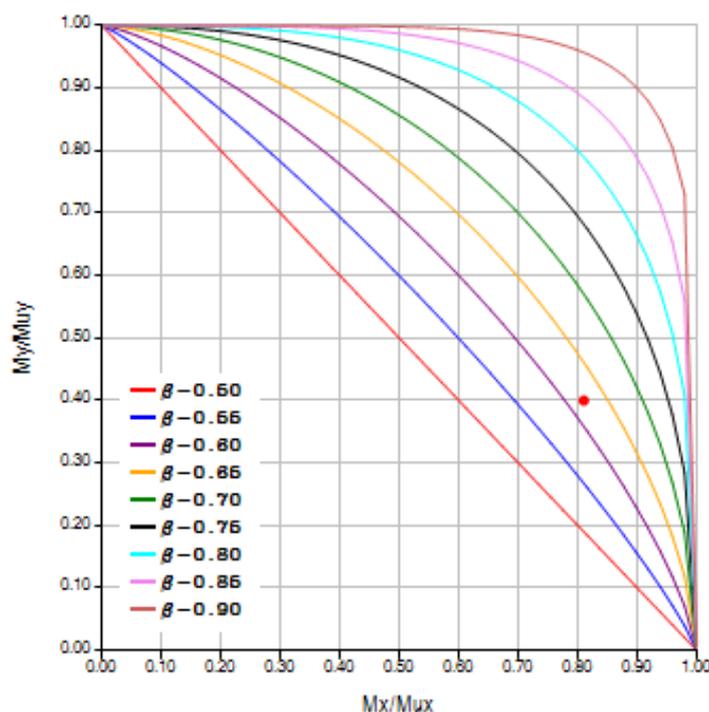


Figura 2.36. Relación de momentos según los dos ejes de la sección para el rango de valores de β posible calculados según el modelo de Parme. Autor.

- **Aspectos relevantes del modelo de Parme**

Parme parte del modelo de Bresler para desarrollar su trabajo y su objetivo es buscar una función que determine el coeficiente β con el que poder obtener un diagrama de interacción de agotamiento. Los ábacos que publica relacionan para cada tipo de sección analizada³⁹ el axil de diseño como fracción del axil de agotamiento frente al coeficiente β .

Los valores de β recogidos en los ábacos han sido hallados en la dirección donde el desvío entre la superficie de revolución que se origina al girar sobre el eje vertical el valor de del momento de

³⁹ Parme analiza cuatro distribuciones de armadura y relaciones geométricas y para cada una de ellas presenta dos calidades de acero, lo que supone un total de ocho ábacos. Para aceros distintos a los tabulados, Parme pone de manifiesto la viabilidad de llevar a cabo una interpolación lineal sin cometer errores significativos.

ESTADO DE LA CUESTIÓN

agotamiento de la dirección principal de inercia de la sección y la superficie real de agotamiento real es máxima, y esto se produce según la diagonal de la sección. Para el resto de direcciones posibles de pares de excentricidades, el modelo asume una desviación de la solución aceptable en tanto que se ha logrado una curva de interacción que mitiga la máxima diferencia posible entre la aproximación obtenida y la curva teórica de agotamiento.

D. C. Weber (1966)



La propuesta de Weber descrita en “Ultimate Strength Design Charts for Columns with Biaxial Bending”⁴⁰ surge según el propio autor por la falta de claridad en los modelos propuestos por investigadores precedentes, algunos expuestos en esta tesis, en cuanto a su utilización y comprensión de los mismos.

Weber pone de manifiesto que ninguno de los modelos existentes hasta esta fecha ha gozado de aceptación suficiente por la dificultad de comprensión de alguno de los parámetros a emplear en su aplicación. En ocasiones, afirma, se pierde el fundamento físico que gobierna el problema al tiempo que es difícil adquirir el hábito de uso de los rangos de valores razonables de diseño de estos parámetros. Weber propone un método basado en el empleo de ábacos adimensionales de análisis en flexión recta similares a los diagramas existentes y aceptados de la misma naturaleza.

Para una sección cualquiera, la superficie de agotamiento para un estado de sollicitación de tensiones normales se muestra en la figura 2.37. La intersección de esta superficie con los dos planos principales arrojan los diagramas de interacción en compresión o flexión recta.

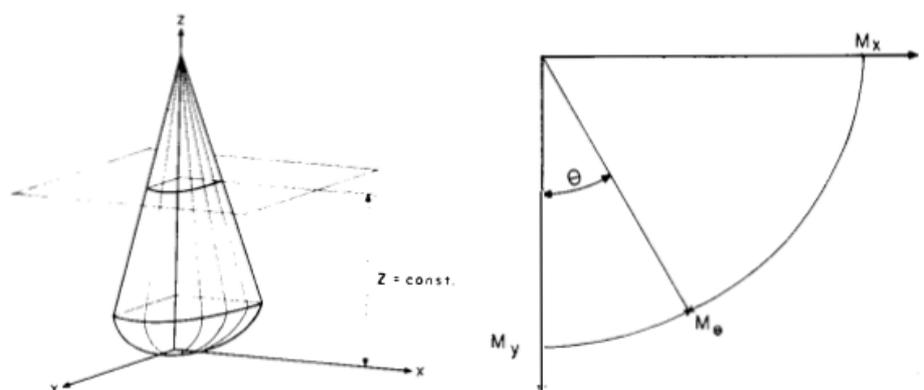


Figura 2.37. Superficie de interacción y línea de contorno de carga para un nivel de axil determinado. Donald C. Weber. “Ultimate Strength Design Charts for Columns with Biaxial Bending”, ACI Journal, Proceedings, 63, 1205-1320, Disc., 1538-1586, (November 1966).

40 Donald C. Weber. “Ultimate Strength Design Charts for Columns with Biaxial Bending”, ACI Journal, Proceedings, 63, 1205-1320, Disc., 1538-1586, (November 1966).

Cualquier plano horizontal que corte a la superficie de interacción arroja una línea de contorno de carga (diagrama de interacción M_x, M_y para un axil constante determinado), cuya intersección con los ejes X, Y, indica la capacidad a flexión recta sobre ese eje para ese nivel de axil. Basado en el trabajo de Furlong⁴¹ en el que se afirma que la desviación máxima entre la superficie de revolución (arco de circunferencia en secciones con doble simetría, y elipses para distribuciones de armadura no homogénea en las cuatro caras), y la curva real de agotamiento de la sección se produce en la dirección de la diagonal de la sección, Weber propone determinar una aproximación geométrica a la curva real de agotamiento (línea de contorno de carga) que pase por los tres puntos característicos y que mantenga la suavidad en todos sus puntos. Estos puntos son los momentos de agotamiento según cada dirección principal de inercia, y la diagonal de la sección

Desde este punto de vista, autores precedentes como Pannell⁴² y Bresler⁴³ ya han llevado a cabo propuestas de curvas aproximadas a la solución teórica. Sin embargo, Weber adopta la propuesta de Meek⁴⁴, en la que las coordenadas (M_x, M_y) de cada punto de la curva de interacción se obtiene mediante interpolación lineal entre los puntos característicos, esto es, momento de agotamiento según cada una de las dos direcciones principales de la sección, y el par de momentos de agotamiento de la sección según la dirección de la diagonal.

Weber publica un total de dieciséis ábacos dimensionales para el análisis de secciones cuadradas con distribución homogénea de armadura en sus cuatro caras. Las diferencias entre los ábacos publicados consisten en el número de barras empleadas para configurar el armado, así como en el recubrimiento mecánico de cada uno de ellos.

⁴¹ R. W. Furlong. "Ultimate strength of square columns under biaxially eccentric loads", ACI Journal, Proceedings, 60, 1129-1140, (March 1961).

⁴² F. N. Pannell. Discussion of "Biaxially Loaded Reinforced Concrete Columns", ACI Journal, Proceedings, ASCE V. 85, ST6, pp. 47-54 (Junio 1959).

⁴³ Boris Bresler, "Design Criteria for Reinforced Columns under Axial and Biaxial Bending", ACI Journal, Proceedings, 57, 481-490. Disc., 1621-1638, (November 1960).

⁴⁴ Meek, John L. "Ultimate Strength of Columns with Biaxially Eccentric Loads". ACI Journal, Proceedings V60, N8, pp 1053-1064 (Agosto 1963).

CAPÍTULO 2

Se muestra en la figura 2.38 uno de los ábacos publicados por Weber para el análisis de una sección cuadrada con doce barras distribuidas de manera homogénea en sus cuatro caras:

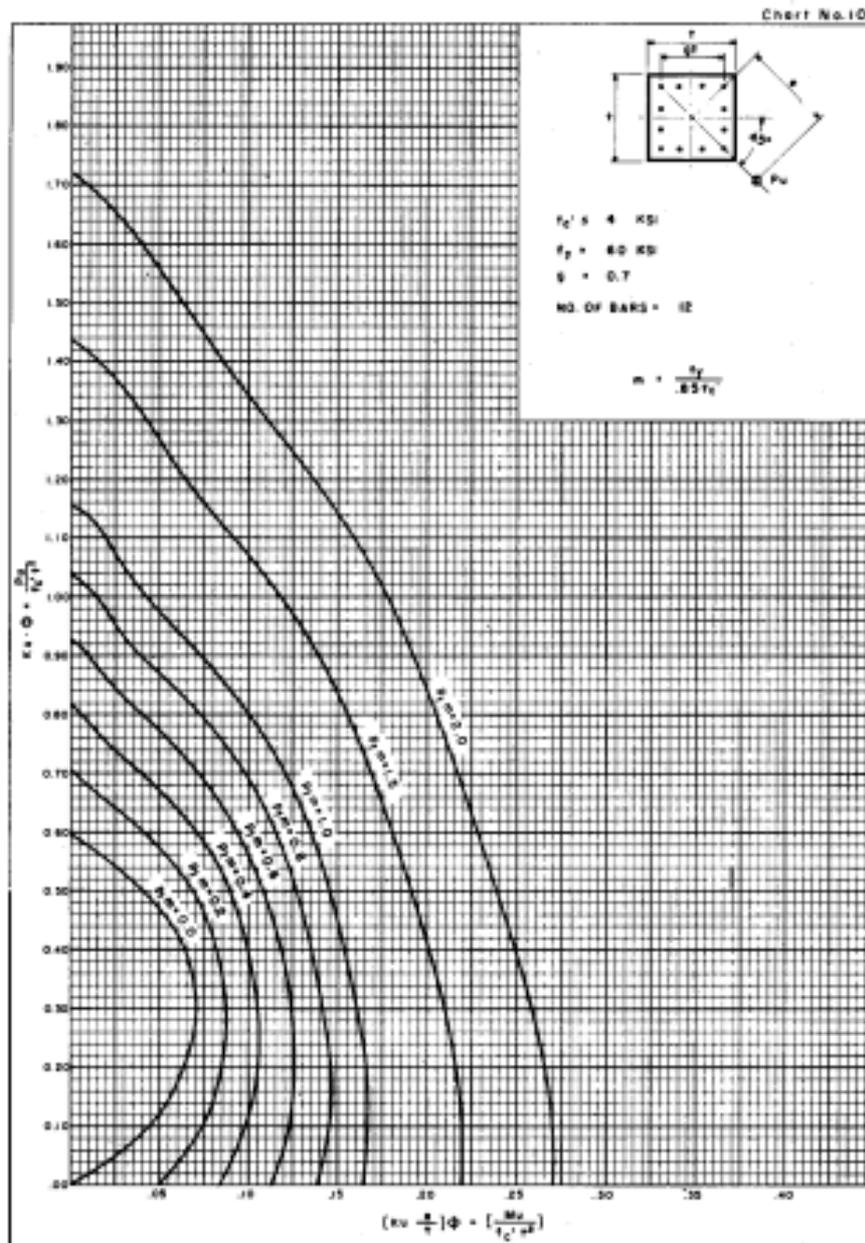
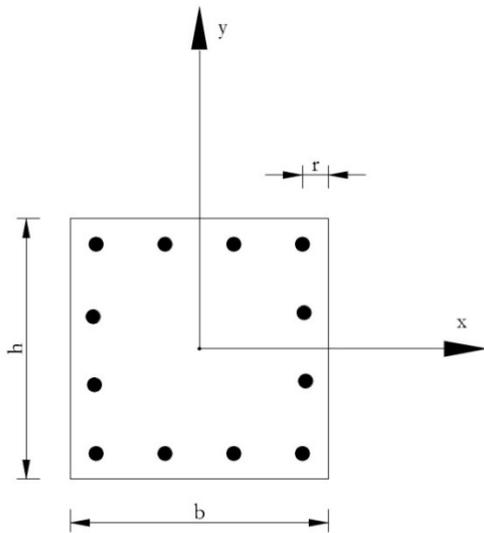


Figura 2.38. Diagrama de interacción publicado por Weber para análisis de una sección cuadrada solicitada según la dirección de la diagonal. Donald C. Weber. "Ultimate Strength Design Charts for Columns with Biaxial Bending", ACI Journal, Proceedings, 63, 1205-1320, Disc., 1538-1586, (November 1966).

- **Ejemplo de aplicación**

Para la sección cuadrada cuyo esquema, valores geométricos y mecánicos se muestran a continuación es posible determinar el momento de agotamiento según las dos ejes principales de inercia para un axil aplicado sobre la línea de acción que forma un ángulo $\theta = 23.2^\circ$ con el eje y .



$$b = 457.20 \text{ mm.}$$

$$h = 457.20 \text{ mm.}$$

$$r = 60.325 \text{ mm.}$$

Armadura: 12 \emptyset 28.575 mm.

$$f'_c = 27.58 \text{ MPa.}$$

$$f_y = 413.68 \text{ MPa.}$$

$$N_u = 2958.05 \text{ kN.}$$

Para hacer uso de los ábacos de Weber es preciso determinar la distancia entre capas extremas de armadura:

$$g = \frac{457.20 - 2 \cdot 60.325}{457.20} \rightarrow g = 0.736$$

La cuantía mecánica dispuesta en la sección es:

$$\rho_t m = \frac{A_s}{b \cdot h} \frac{f_y}{0.85 f'_c} \rightarrow \rho_t m = \frac{7695.62}{457.20 \cdot 457.20} \frac{413.68}{0.85 \cdot 27.58} \rightarrow \rho_t m = 0.650$$

El axil de diseño en términos adimensionales queda:

CAPÍTULO 2

$$v\phi = \frac{P_u}{f_c'bh} \rightarrow v\phi = \frac{2958.05 \cdot 1000}{27.58 \cdot 457.20 \cdot 457.20} \rightarrow v\phi = 0.513$$

Es preciso interpolar entre los ábacos publicados por Weber para $g = 0.6$, y $g = 0.7$. Se muestran en las figuras 2.39 y 2.40, los ábacos calculados según las hipótesis descritas en la propuesta de su modelo.

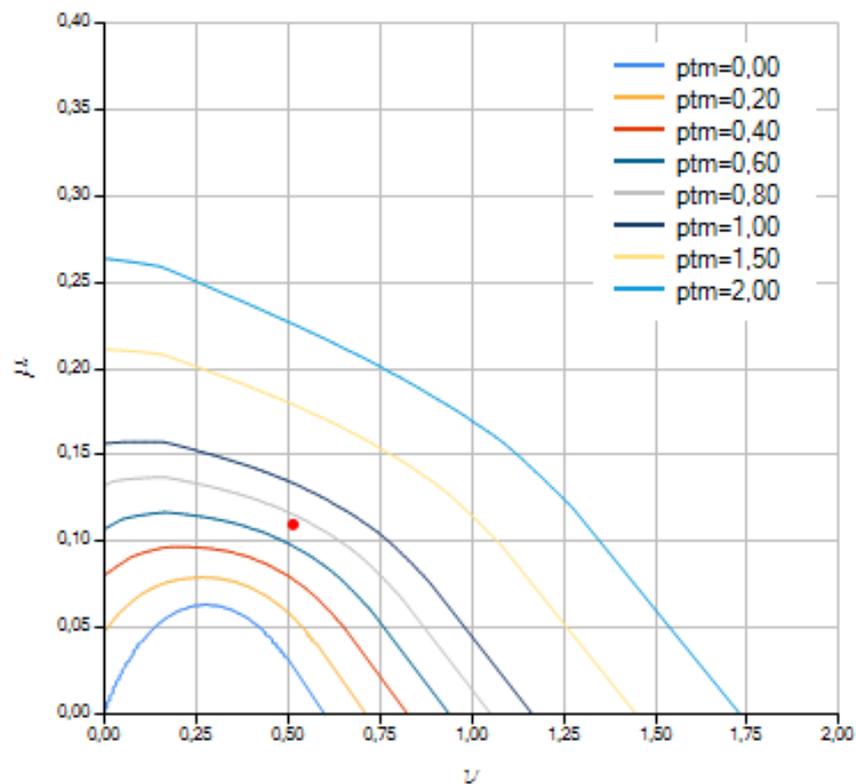


Figura 2.39. Diagrama de interacción publicado por Weber para análisis de una sección cuadrada con doce barras de armadura y $g=0.7$, analizada según la dirección de su diagonal. Autor.

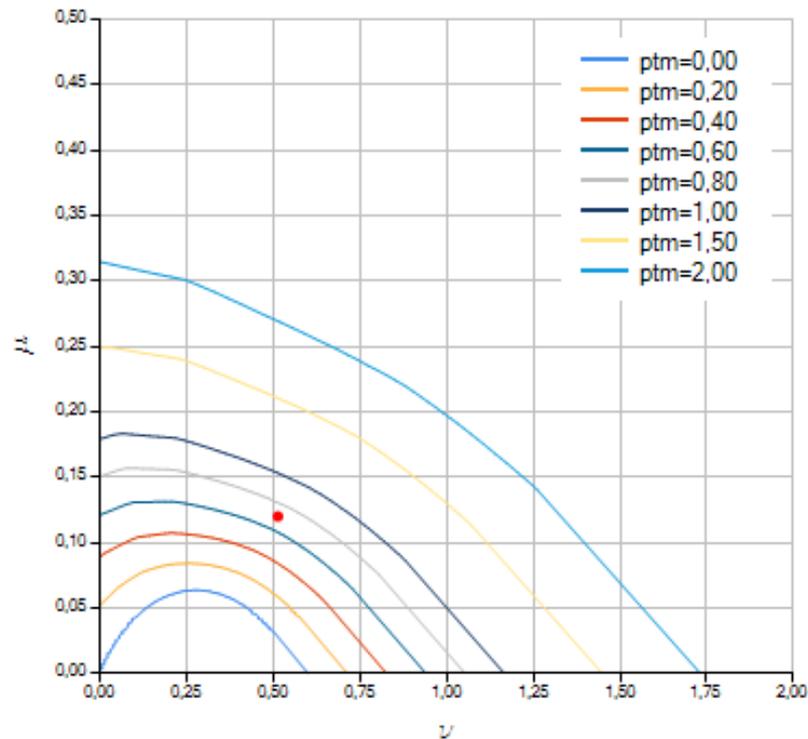


Figura 2.40. Diagrama de interacción publicado por Weber para análisis de una sección cuadrada con doce barras de armadura y $g=0.8$, analizada según la dirección de su diagonal. Autor.

Es preciso interpolar para el ángulo de diseño $\theta = 45^\circ$, y un recubrimiento mecánico correspondiente al de la sección analizada, esto es, en términos del modelo de Weber $g = 0.736$:

$$\mu = \frac{(0.120 - 0.110)}{(0.800 - 0.700)}(0.736 - 0.700) + 0.110 \rightarrow \mu = 0.114$$

Es necesario conocer el momento de agotamiento según la dirección principal para las condiciones geométricas y mecánicas de la sección analizada. La figura 2.41 muestra un diagrama adimensional de interacción en flexión compuesta recta para un recubrimiento mecánico (en términos del modelo de Weber) de $g = 0.736$, y diferentes cuantías de armadura.

CAPÍTULO 2

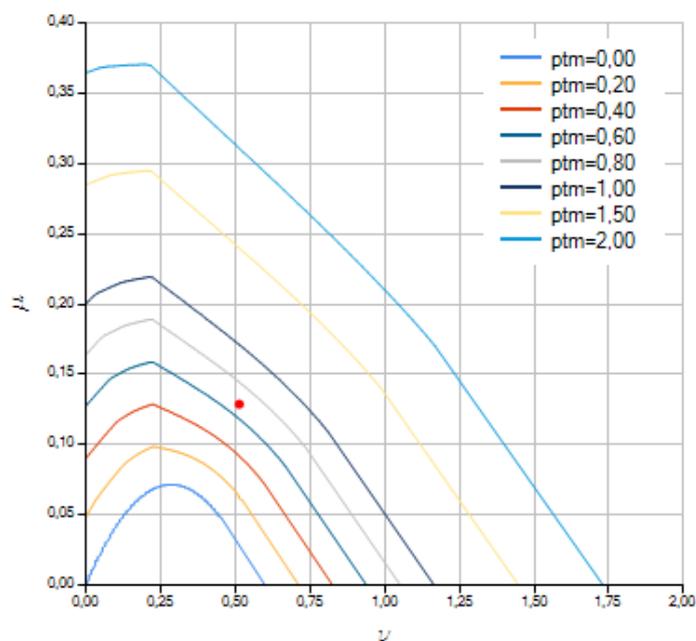


Figura 2.41. Diagrama de interacción de una sección cuadrada con doce barras de armadura, $g=0.736$, analizada según la dirección principal de inercia. Autor.

Del gráfico anterior para una cuantía $\rho_t m = 0.65$, un axil de diseño reducido $\nu = 0.513$, se obtiene un momento de agotamiento $\mu = 0.129$.

En este punto es preciso llevar a cabo la interpolación lineal entre las dos direcciones calculadas, esto es $\theta = 0.0^\circ$ y $\theta = 45.0^\circ$, hallándose para el ángulo de diseño el siguiente momento de agotamiento de la sección:

$$\mu = \frac{(0.129 - 0.114)}{45.0} (45.0 - 23.2) + 0.114 \rightarrow \mu = 0.121$$

Otorgando dimensiones a este valor se obtiene:

$$M_u = \mu b h^2 f_c \rightarrow M_u = 0.121 \cdot 457.20^3 \cdot 27.69 \cdot 10^{-6} \rightarrow M_u = 320.20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Y según las direcciones de la sección:

$$M_{ux} = 320.20 \cdot \text{sen } 23.2 \rightarrow M_{ux} = 126.14 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{uy} = 320.20 \cdot \text{cos } 23.2 \rightarrow M_{uy} = 294.30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

▪ **Aspectos relevantes del modelo de Weber**

En la exposición del modelo, Weber afirma aplicar un coeficiente de reducción de la capacidad de la sección $\phi = 0.70$ conforme a lo establecido en la ACI 318-63, y sin embargo, si se observan con detenimiento los ábacos publicados, parece que hubieran sido calculados con un coeficiente $\phi = 0.60$. Esto es fácilmente entendible para la curva $ptm = 0.0$, en la que la se muestra la curva de interacción de agotamiento ($N - M_x$) para una sección de hormigón en masa. Es claro que en ausencia de excentricidad, el valor de agotamiento por compresión pura sería la siguiente:

$$P_0 = f_c b h \quad [2.26]$$

Y expresado en términos adimensionales sería:

$$v = \frac{P_0}{f_c b h} = 1.0 \quad [2.27]$$

Sin embargo, el valor que se muestra en las curvas representadas para todas las condiciones de recubrimiento mecánico y distribución de armadura es 0.60.

Las curvas calculadas y mostradas en el ejemplo de aplicación (figura 2.39 y figura 2.40) han sido afectadas por un valor $\phi = 0.60$, y esto conduce a obtener las curvas publicadas por Weber.

El modelo tal como lo presenta Weber es de aplicación exclusiva a secciones rectangulares con distribución homogénea de armadura, lo cual lo convierte en un modelo no general de aplicación para el diseño de soportes de hormigón armado.

CAPÍTULO 2

R. F. Warner (1969)



En el momento en el que Warner publica “Biaxial Moment Thrust Curvature Relation”⁴⁵ era habitual el empleo de diagramas momento-curvatura para el análisis no lineal de secciones de hormigón armado sometidas a flexión según uno de sus ejes principales de inercia. Estaba documentado el procedimiento para la determinación de este tipo de curvas así como la manera de operar y obtener la distribución de tensiones en la sección para un par de esfuerzos $P - M_x$. Sin embargo, las expresiones empleadas con este propósito no eran extrapolables a situaciones de compresión o flexión compuesta esviada. La propuesta de Warner busca universalizar el análisis a este tipo de estado de sollicitaciones.

El método se basa en la discretización de la sección transversal en un número determinado de elementos de pequeño tamaño (hormigón y acero), cuya superficie es conocida. Para estos elementos, la determinación del axil interno movilizado resulta trivial (para un par de curvaturas impuestas y una profundidad del eje neutro), así como los momentos resultantes de estos axiles respecto a los dos ejes principales de inercia de la sección.

El algoritmo permite el empleo de modelos constitutivos arbitrarios para hormigón y acero, abandonando el modelo de Withney para la integración de las tensiones del bloque comprimido de hormigón. De esta manera se hace posible tomar en consideración la rama de endurecimiento del acero o computar la capacidad a tracción del hormigón.

Así mismo, el modelo propuesto por Warner permite llevar a cabo análisis de secciones con contornos arbitrarios alejados de secciones forzosamente rectangulares para los métodos existentes hasta este momento si bien, esta es una situación que Warner no investiga en la publicación analizada, y lo apunta como posible trabajo de investigación a llevar a cabo en su futuro.

⁴⁵ R. F. Warner. “Biaxial Moment Thrust Curvature Relation”. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 95, N° ST5, 923-940, (May 1969).

Según Warner, si se analiza una sección sometida a compresión o flexión recta, el diagrama momento-curvatura que abarca todo el espectro de axiles inferiores al de agotamiento supone una campo de valores de tres dimensiones (P, M_y, χ_y) . Esta superficie puede ser representada como una familia de curvas, cada curva para un valor de P , tal como se muestra en la figura 2.42.

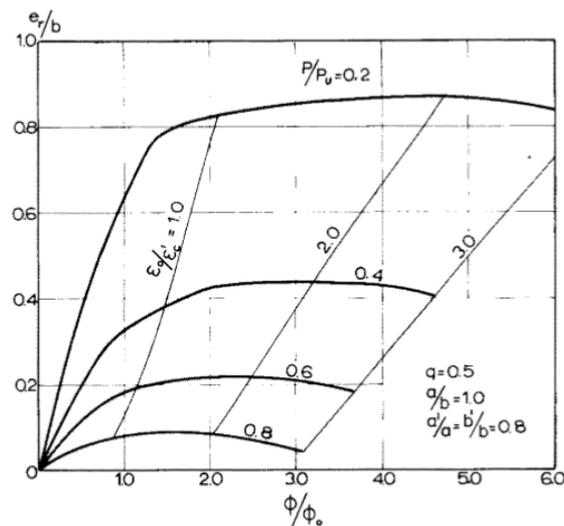


Figura 2.42. Familia de diagramas momento-curvatura para una sección analizada según una dirección principal de inercia. R. F. Warner. "Biaxial Moment Thrust Curvature Relation". Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 95, N° ST5, 923-940, (May 1969).

En el caso general de secciones sometidas a compresión o flexión compuesta esviada, la superficie que relaciona las curvaturas y los momentos según las dos direcciones principales de adquiere cinco dimensiones $(P, M_y, \chi_y, M_x, \chi_x)$, de manera que para su representación gráfica se vuelve compleja.

Warner propone un procedimiento iterativo para determinar los momentos internos movilizados (M_y, M_x) en una sección sometida a un axil P para valores conocidos de las curvaturas según los dos ejes principales de la sección (χ_y, χ_x) .

CAPÍTULO 2

El planteamiento analizado por Warner parte del supuesto de una sección rectangular con armadura distribuida de manera homogénea en las cuatro caras. Se asume que no existirán excentricidades negativas, lo que implica que el valor de compresión máxima se sitúa en el origen vértice O (figura 2.43). La excentricidad se considera en términos de (e_x, e_y) , lo cual conduce a dos momentos según las dos direcciones principales de la sección ($M_x = -P \cdot e_y$, $M_y = -P \cdot e_x$), o bien como el vector $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ y un ángulo $\varphi = \frac{1}{\tan \frac{e_y}{e_x}}$.

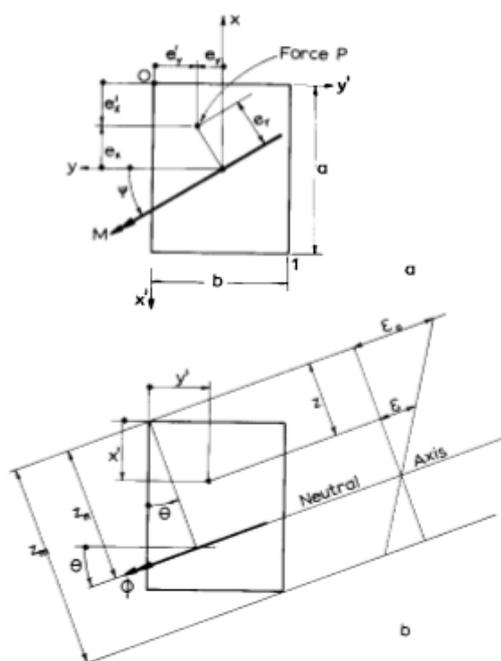


Figura 2.43. Sistemas de coordenadas adoptado por Warner en su modelo de tensiones, deformaciones y curvaturas en la sección. R. F. Warner. "Biaxial Moment Thrust Curvature Relation". Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 95, N° ST5, 923-940, (May 1969).

Es posible expresar la deformación de cualquier punto de la sección en función de la deformación del punto O, el giro del eje neutro y la mínima distancia entre el punto O y el eje neutro. La curvatura del plano de equilibrio puede expresarse como la relación entre la deformación del punto O y la distancia al eje neutro z_n :

$$\chi = \frac{\varepsilon_0}{z_n} \quad [2.28]$$

Es posible determinar mediante un procedimiento iterativo la curvatura a la que se logra movilizar un axil resultante igual al exterior P , según la dirección del vector M .

Los momentos internos movilizados junto con la curvatura de equilibrio pueden representarse en curvas por familias de axiles (para una dirección del vector M considerada), tal como se muestra en la figura 2.44.

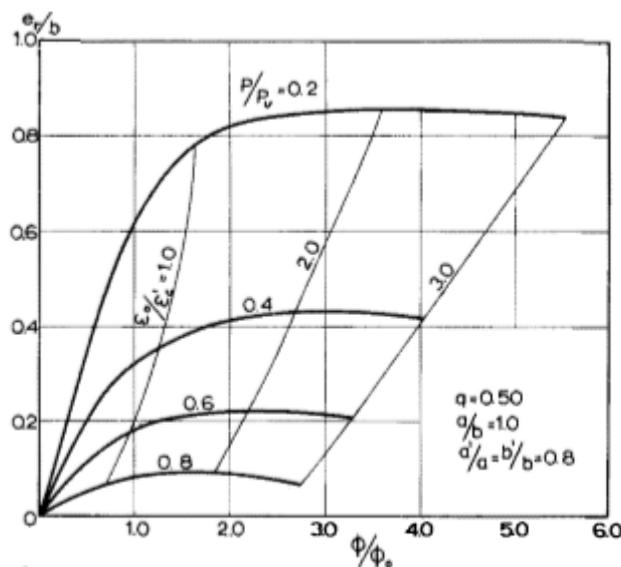


Figura 2.44. Familia de curvas adimensionales momento-curvatura para axiles crecientes y una dirección del vector momento de 30° . R. F. Warner. "Biaxial Moment Thrust Curvature Relation". Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 95, N° ST5, 923-940, (May 1969).

Warner constató que cuando la dirección del vector momento no es coincidente con un plano de simetría mecánica de la sección, a medida que evoluciona la curvatura aproximándose a la de agotamiento, se producen diferencias entre la dirección de aplicación de la carga y la dirección perpendicular (eje neutro esperado) tal como puede observarse en la figura 2.45. Expresado en otros términos, en secciones en las que la dirección de aplicación de la carga no coincida con un

CAPÍTULO 2

eje principal de inercia de la sección no es posible predecir el rumbo de la fibra neutra para cualquier nivel de axil exterior, y la diferencia entre el giro teórico (perpendicular a la dirección del vector M) y el giro real en equilibrio aumenta a medida que la excentricidad del axil exterior se aproxima a la de agotamiento.

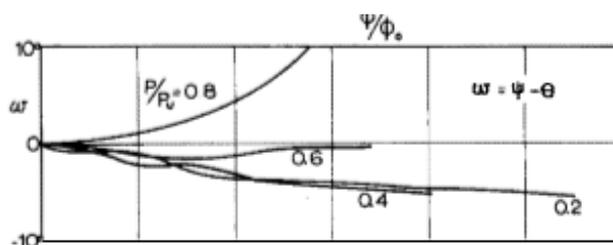


Figura 2.45. Diferencia entre los ángulos de aplicación del vector momento y el giro del eje neutro para una dirección de aplicación de la carga de 30° . R. F. Warner. "Biaxial Moment Thrust Curvature Relation". Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 95, N° ST5, 923-940, (Mayo 1969).

▪ Resumen y conclusiones al modelo de Warner

Hasta este momento, los modelos disponibles para el análisis de secciones sometidas a compresión o flexión compuesta esviada se limitaban a determinar la carga que produce el agotamiento de la sección para un par de excentricidades conocidas según los ejes principales de inercia de la sección. El objetivo de los modelos había sido garantizar la seguridad de la sección sin obtener información del plano de equilibrio, no sólo en estados de no agotamiento, sino tampoco en el momento de la rotura de la sección.

La propuesta de Warner supone un avance significativo. Por primera vez es posible pensar en términos de curvatura del plano de equilibrio y profundidad del eje neutro, lo que significa llevar a cabo un análisis no lineal a nivel de sección en el que incorporar las ecuaciones constitutivas a la resolución del problema.

Además, el planteamiento del modelo de Warner no se limita a secciones de formas rectangulares o cuadradas, y es posible analizar secciones con una distribución de armadura cualquiera.

La crítica que es posible realizar al planteamiento presentado por Warner es que parte del planteamiento de que el giro del eje neutro permanece constante y perpendicular al vector momento para todo el espectro de curvaturas posible, lo cual es falso. Esta hipótesis de partida sólo es cierta en situaciones en las que el axil exterior se sitúe en un plano de simetría mecánica de la sección.

Warner no obstante, conocedor del error de su modelo, investiga los desvíos que se producen entre la dirección de aplicación de la carga y el rumbo que toma el eje neutro en equilibrio, y constata que en secciones con geometrías canónicas y distribución de armadura homogéneas, esta diferencia es inferior a 10° . No investiga Warner qué implicaciones tiene un desvío de 10° en términos de error de estimación de la tensión en equilibrio de hormigón o acero. Ni tampoco analiza la posibilidad de que este error aumente en situaciones de alta asimetría mecánica de la sección, formas alejadas de contornos regulares o excentricidades antinaturales respecto a la distribución de armadura de la sección analizada.

Luego un modelo presentado como universal podría no serlo en las circunstancias citadas, y en las que la determinación de los momentos de agotamiento según la dirección de aplicación de la carga, podría llegar a resultar no conservador.

Anis Farah, W. Huggins (1969)



Anis Farah publica junto con W. Huggins en 1969 “Analysis of Reinforced Concrete Columns Subjected to Longitudinal Load and Biaxial Bending”⁴⁶ en el que se desarrolla una estrategia de integración de las tensiones en una sección de hormigón armado de contorno rectangular sometida a un estado de sollicitación de compresión o flexión compuesta esviada.

En el método propuesto por Farah y Huggins se logra la solución exacta del volumen de tensiones (axil), y los momentos respecto a los ejes principales de inercia de la sección. Para alcanzar esta solución, proponen la integración continua de las tensiones en todo el dominio geométrico de la sección. Esta propuesta supone un avance relevante en la metodología clásica de cálculo de esfuerzos internos, en la que se partía de la división de la sección en elementos discretos de tamaño reducido, o bien se asumía un bloque comprimido de tensión constante y profundidad reducida (Withney). De esta manera el axil resultaba de la suma de los axiles de cada trozo que forma parte de la sección, y los momentos eran el resultado de llevar a cabo el sumatorio del producto de cada axil por la distancia al eje de referencia. El error se producía al otorgar un valor constante de tensión a cada elemento analizado, despreciando la curva teórica de la ecuación constitutiva del hormigón.

Para poder implementar el método es preciso describir las ecuaciones constitutivas de los materiales en forma polinómica para todo el espectro de deformaciones compatibles en cada uno de ellos. Las ecuaciones constitutivas empleadas por Farah y Huggins se muestran a continuación y se representan en la figura 2.47.

- **Hormigón**

$$\sigma_c = f'_c(k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2 + k_3\varepsilon^3 + k_4\varepsilon^4) \quad [2.29]$$

Los coeficientes del polinomio toman los siguientes valores:

⁴⁶ Anis Farah and M. W. Huggins. “Analysis of Reinforced Concrete Columns Subjected to Longitudinal Load and Biaxial Bending”. ACI Journal, Proceedings, 66, 569-575, (July 1969).

$$k_1 = 0.985 \cdot 10^3$$

$$k_2 = -0.312 \cdot 10^6$$

$$k_3 = 0.306 \cdot 10^8$$

$$k_4 = -0.257 \cdot 10^9$$

En la figura 2.46 se muestra la distribución teórica de tensiones en la sección analizada para el hormigón representada por Farah y Huggins. Se observan tres zonas en el interior de la sección: zona comprimida, zona con tracciones admisibles para el hormigón y zona fisurada. Sería esperable que a la luz de este gráfico que existiera una rama de tracción descrita en la ecuación constitutiva, si bien, no es así (figura 2.47). En esta tesis, para los ejemplos y ensayos numéricos llevados a cabo para la aplicación de este modelo se considera nula la capacidad a tracción del hormigón.

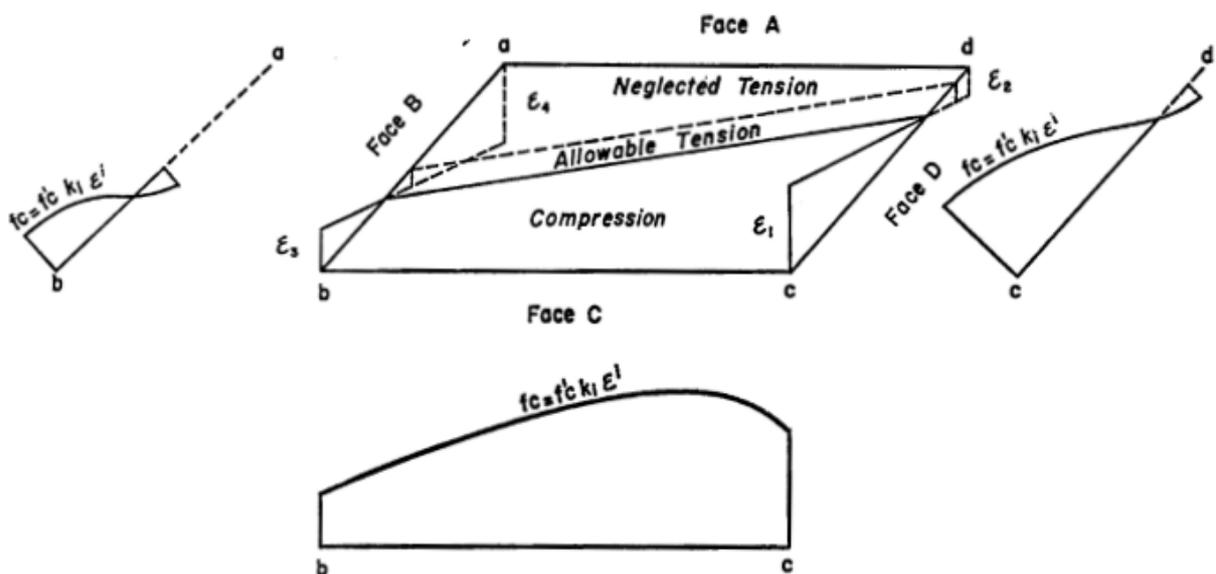


Figura 2.46. Distribución de tensiones de hormigón en una sección rectangular sometida a un estado de sollicitación de compresión o flexión compuesta esviada. Anis Farah and M. W. Huggins. "Analysis of Reinforced Concrete Columns Subjected to Longitudinal Load and Biaxial Bending". ACI Journal, Proceedings, 66, 569-575, (July 1969).

CAPÍTULO 2

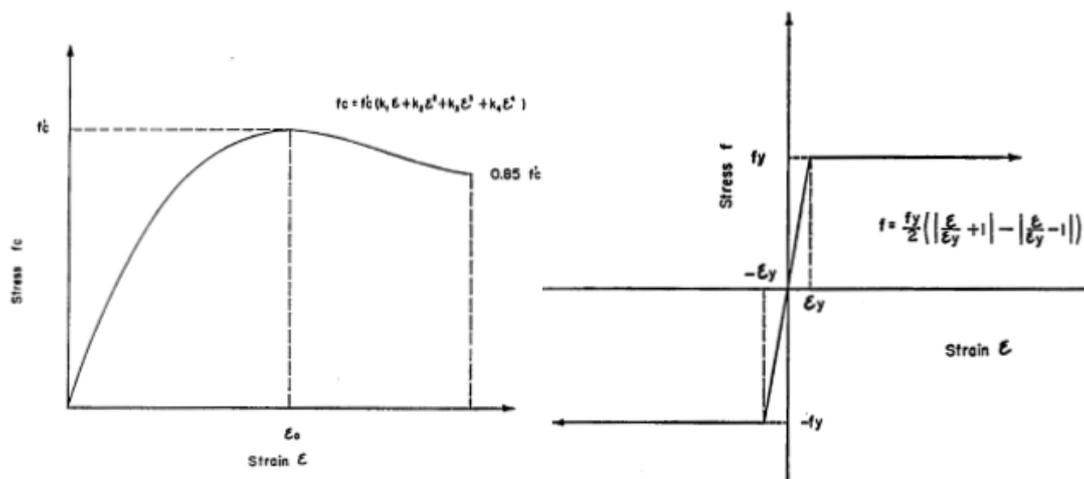


Figura 2.47. Modelos constitutivos para hormigón y acero descritos en forma polinómica empleados por Anis Farah y M. W. Huggins. Anis Farah and M. W. Huggins. "Analysis of Reinforced Concrete Columns Subjected to Longitudinal Load and Biaxial Bending". ACI Journal, Proceedings, 66, 569-575, (July 1969).

▪ Acero

Es posible definir la ecuación constitutiva del acero según las dos alternativas siguientes:

$$\sigma_s = \frac{f_y}{2} \left(\left| \frac{\epsilon}{\epsilon_y} + 1 \right| - \left| \frac{\epsilon}{\epsilon_y} - 1 \right| \right) \quad [2.30]$$

$$\sigma_s = \frac{f_y}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_y} + 1 \right)^2} - \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_y} - 1 \right)^2} \right) \quad [2.31]$$

Coherente con la figura 2.48, y tomando en consideración que la sección permanecerá plana en situación de equilibrio, la deformación de cada punto de la sección puede expresarse según la siguiente expresión:

$$\varepsilon_{(x,y)} = \varepsilon_1 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \frac{x}{T} - (\varepsilon_1 - \varepsilon_{32}) \frac{y}{B} \quad [2.32]$$

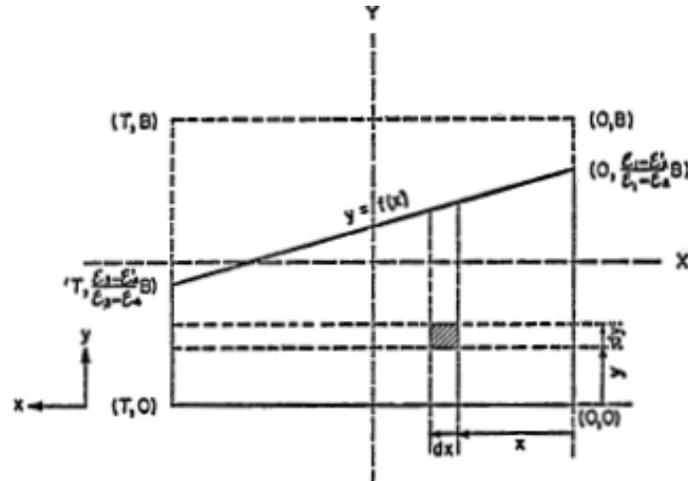


Figura 2.48. Área y límites de integración de la sección tipo analizada por Farah. Anis Farah and M. W. Huggins. “Analysis of Reinforced Concrete Columns Subjected to Longitudinal Load and Biaxial Bending”. ACI Journal, Proceedings, 66, 569-575, (July 1969).

El axil resultante se obtiene de la integración de las tensiones de hormigón y del sumatorio de los axiles de cada barra de acero incluida en la sección:

$$P = \int_0^T \int_0^{f(x)} f_c(x, y) dy dx + N_s \quad [2.33]$$

Y las componentes de los momentos respecto a los ejes principales de inercia se expresan en los siguientes términos:

$$M_x = \int_0^T \int_0^{f(x)} f_c(x, y) \left(\frac{B}{2} - y \right) dy dx + M_{x,s} \quad [2.34]$$

$$M_y = \int_0^T \int_0^{f(x)} f_c(x, y) \left(\frac{T}{2} - x \right) dy dx + M_{y,s} \quad [2.35]$$

CAPÍTULO 2

La determinación de la profundidad y giro del eje neutro en la posición de equilibrio debe llevarse a cabo por un procedimiento iterativo que comienza postulando las deformaciones de tres vértices de la sección ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$). El proceso finaliza cuando se logran esfuerzos internos similares a los exteriores, para lo que es preciso imponer una norma de convergencia que limita error de la solución alcanzada. La estrategia numérica para alcanzar el plano de equilibrio que presenta Farah y Huggins se basa en el método de Newton-Raphson y en el trabajo de Gurfinkel y Robinson⁴⁷ en el que se aborda la determinación de la distribución de tensiones en una sección transversal sometida a un axil exterior y un momento⁴⁸.

Para una sección cualquiera, los valores de P, M_x, M_y son función de los valores de deformación de tres puntos cualesquiera:

$$P = P(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \quad [2.36]$$

$$M_x = M_x(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \quad [2.37]$$

$$M_y = M_y(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \quad [2.38]$$

El proceso comienza postulando valores iniciales de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ con los que determinar los esfuerzos internos en la sección $\bar{P}, \bar{M}_x, \bar{M}_y$ ⁴⁹. Las ecuaciones anteriores ([2.36], [2.37], [2.38])

⁴⁷ Gurfinkel, G., Robinson, A. "Determination of Strain Distribution and Curvature in a Reinforced Concrete Section Subjected to Bending Moment and Longitudinal Load", ACI Journal, Proceedings V. 64, N° 7, pp 398-402, (July 1967).

⁴⁸ Con posterioridad, autores como Richard Yen (J. Y. Richard Yen. "Quasi-Newton Method for Reinforced Concrete Columns Analysis and Design". Journal of Structural Engineering, 10.1061/(ASCE)0733-9445(1991)117:3(657), 657-666, (March 1991)), hará uso del método de Newton Raphson para la determinación en agotamiento de la capacidad de la sección transversal analizada al tiempo que determina de manera estricta la cuantía de armadura. Y en hace uso de un perfil constante de tensiones y profundidad reducido para el hormigón comprimido.

⁴⁹ El procedimiento expuesto se basa en el conocimiento de todas las variables involucradas en el cálculo para un punto cualquiera. La rapidez con la que el método converge es función de la precisión con la que se escogen estos valores iniciales.

pueden expresarse según el teorema de Taylor, y despreciando términos de orden superior del siguiente modo:

$$P = \bar{P} + \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_1} \delta \varepsilon_1 + \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_2} \delta \varepsilon_2 + \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_3} \delta \varepsilon_3 \quad [2.39]$$

$$M_x = \bar{M}_x + \frac{\partial M_x}{\partial \varepsilon_1} \delta \varepsilon_1 + \frac{\partial M_x}{\partial \varepsilon_2} \delta \varepsilon_2 + \frac{\partial M_x}{\partial \varepsilon_3} \delta \varepsilon_3 \quad [2.40]$$

$$M_y = \bar{M}_y + \frac{\partial M_y}{\partial \varepsilon_1} \delta \varepsilon_1 + \frac{\partial M_y}{\partial \varepsilon_2} \delta \varepsilon_2 + \frac{\partial M_y}{\partial \varepsilon_3} \delta \varepsilon_3 \quad [2.41]$$

El sistema formado por las ecuaciones [2.39], [2.40], [2.41] puede escribirse y resolverse en notación matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_1} & \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_2} & \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_3} \\ \frac{\partial M_x}{\partial \varepsilon_1} & \frac{\partial M_x}{\partial \varepsilon_2} & \frac{\partial M_x}{\partial \varepsilon_3} \\ \frac{\partial M_y}{\partial \varepsilon_1} & \frac{\partial M_y}{\partial \varepsilon_2} & \frac{\partial M_y}{\partial \varepsilon_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_1 \\ \delta \varepsilon_2 \\ \delta \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P - \bar{P} \\ M_x - \bar{M}_x \\ M_y - \bar{M}_y \end{bmatrix} \quad [2.42]^{50}$$

Los valores de $\delta \varepsilon_1, \delta \varepsilon_2, \delta \varepsilon_3$ son los incrementos a las deformaciones correspondientes a la iteración previa con los que determinar nuevamente los esfuerzos internos en la sección. El procedimiento concluye cuando se alcanzan el cumplimiento de la norma de convergencia deseada.

▪ Ejemplos de aplicación

⁵⁰ El procedimiento numérico por el cual determinar la matriz de derivadas parciales no está descrito con profusión en el artículo de Farah y Huggins. En esta tesis se ha seguido el método descrito por Gurfinkel y Robinson para el análisis de flexión compuesta recta, en el que las variables cuya tasa de variación condicionan la evolución del plano de equilibrio son la curvatura y la deformación de la fibra extrema. Siguiendo el desarrollo, y evaluando la tasa de variación de las deformaciones de tres puntos del contorno de la sección ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$) se ha logrado la convergencia del problema planteado.

CAPÍTULO 2

Es posible llevar a cabo diversos tipos de análisis de una sección mediante la estrategia numérica descrita por Farah y Huggins. Se puede determinar la superficie de interacción de una sección rectangular con una distribución de armadura cualquiera, para lo cual sería adecuado abordar este tipo de análisis estableciendo un nivel de axil determinado (P), y obtener el espectro de pares de valores de momentos según las dos direcciones principales de inercia de la sección (M_x, M_y), que junto con aquél, la llevan la sección al agotamiento. Con el diagrama calculado sería posible determinar el nivel de seguridad que la sección presenta frente a un estado de solicitaciones exteriores cualquiera.

Por otra parte podrían obtenerse las coordenadas del plano de equilibrio para el estado de solicitaciones exteriores. Esto supone llegar a conocer la deformación y la tensión de cada fibra de la sección en la posición de equilibrio.

a) Diagrama de interacción.

Se lleva a cabo la determinación del diagrama de interacción de una sección rectangular con doble simetría para un axil exterior conocido (P).

Se parte del hecho de que la sección llegará al agotamiento cuando se alcance en alguno de sus puntos una deformación de valor $\varepsilon_u = 0.004$ tal como establece Farah y Huggins en la descripción de la ecuación constitutiva del hormigón (figura 2.47).

Para cada punto del diagrama, la deformación en el vértice de la sección más solicitada será la de agotamiento de hormigón ($\varepsilon_1 = \varepsilon_u$), por lo que para la determinación del plano de equilibrio (en este caso coincide con el plano de agotamiento), existen únicamente dos variables libres, a saber, la deformación unitaria de otros dos vértices de la sección ($\varepsilon_2, \varepsilon_3$).

Para determinar el diagrama de interacción, es más adecuado abordar el problema estableciendo como parámetros libres del sistema no lineal de ecuaciones el rumbo que adopta el eje neutro y la profundidad del mismo, esto es, la traza del plano de equilibrio.

Establecido fijo el rumbo del eje neutro para cada punto del diagrama es preciso determinar la profundidad del mismo. Se considera profundidad el eje neutro a la distancia entre el origen de coordenadas y su intersección con el eje Y.

Para todo el espectro de profundidades posibles se pueden determinar los esfuerzos que agotan la sección. El procedimiento iterativo de búsqueda concluye cuando se alcanza un axil de respuesta de la sección próximo (norma de convergencia) al axil exterior. Para la determinación de cada punto del diagrama de la figura 2.49, se han impuesto dos condiciones. El cumplimiento de cualquiera de ellas, implica la aceptación de la solución y el comienzo de la búsqueda del siguiente punto, modificando el rumbo del eje neutro. Así, el axil interno de la sección resultado de la integración de las tensiones de cada punto de la sección para el plano de equilibrio postulado es aceptado como solución cuando se cumple alguna de las siguientes condiciones⁵¹:

- La diferencia entre el axil interno y el axil exterior es inferior es menor que 0.5.

$$|P_i| - |P| \leq 0.50 \quad [2.43]$$

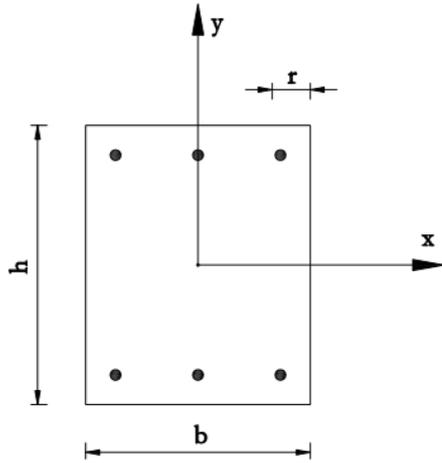
- La diferencia entre profundidades de fibras neutras entre dos iteraciones consecutivas es inferior a 0.1 mm.

$$|y_{FN(n)}| - |y_{FN(n+1)}| \leq 0.10 \quad [2.44]$$

Se determina según las hipótesis de Farah y Huggins, el diagrama de interacción de la sección rectangular cuyo esquema, valores geométricos y mecánicos se muestran a continuación:

⁵¹ Los valores de las normas de convergencia fijados son arbitrarios y escogidos por el autor como adecuado para la considerar la solución del problema como *exacta*.

CAPÍTULO 2



$$b = 127.00 \text{ mm.}$$

$$h = 177.80 \text{ mm.}$$

$$r = 19.00 \text{ mm.}$$

Armadura: $6\phi 12.7 \text{ mm.}$

$$f'_c = 28.83 \text{ MPa.}$$

$$f_y = 391.34 \text{ MPa.}$$

$$P = 200.17 \text{ KN}$$

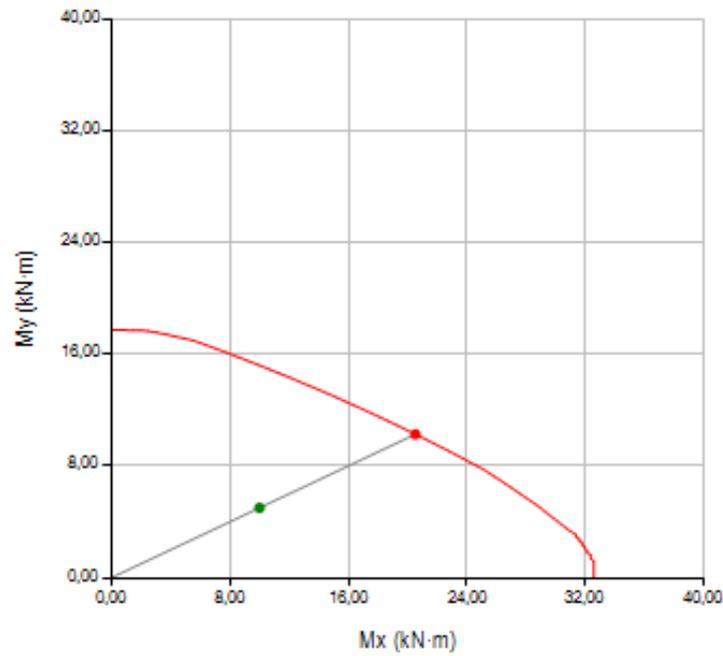


Figura 2.49. Diagrama de interacción determinado para las hipótesis de Farah y Huggins. Autor.

b) Determinación del plano de equilibrio.

Mediante la aplicación del modelo de Farah y Huggins, y para un estado de sollicitación de compresión o flexión compuesta esviada inferior al agotamiento, es posible determinar las coordenadas del plano de equilibrio.

Para la sección cuyo diagrama de interacción se ha determinado (Figura 2.49), y para los esfuerzos exteriores de diseño marcados con el punto verde sobre el diagrama ($P = 200.17 \text{ KN}$, $M_x = 10.00 \text{ kNm}$, $M_y = 5.00 \text{ kNm}$) se han obtenido el giro y la profundidad del eje neutro:

Giro del eje neutro: 51.459.

Profundidad del eje neutro: 40.807 mm.

El proceso iterativo requiere como ya ha quedado expuesto, una norma de convergencia. En el ejemplo expuesto se han fijado las siguientes diferencias máximas admisibles para axil y momentos según las dos direcciones principales de inercia de la sección:

$$\Delta P \leq 0.50 \text{ KN}$$

$$\Delta M_x \leq 0.005 \text{ KNm}$$

$$\Delta M_y \leq 0.005 \text{ KNm}$$

El proceso concluye cuando de manera simultánea se satisfacen las tres desigualdades. En el ejemplo analizado se logran los esfuerzos internos en la sección:

$$P = 200.613833 \text{ KN}$$

$$M_x = 9.991352 \text{ KNm}$$

$$M_y = 4.996411 \text{ KNm}$$

CAPÍTULO 2

Conocidas las coordenadas del plano de equilibrio es posible determinar la deformación y la tensión de cada punto de la sección transversal. Los valores obtenidos se muestran en la tabla [2.1]:

	Coordenada x (mm)	Coordenada y (mm)	Deformación (‰)	Tensión (MPa)
Hormigón	63.50	88.90	0.1867	4.99
	-63.50	88.90	-0.7546	0.00
	-63.50	-88.90	0.2952	7.62
	63.50	-88.90	1.236	23.01
Acero	-44.50	69.90	-0.5016	-100.33
	0.00	69.90	-0.1718	-34.36
	44.50	69.90	0.1581	31.61
	-44.50	-69.90	0.3238	64.77
	0.00	-69.90	0.6537	130.74
	44.50	-69.90	0.9835	196.71

Tabla 2.1. Matriz de coordenadas, deformaciones y tensiones de los puntos característicos de una sección para unos esfuerzos conocidos, determinados por el modelo de Farah.

▪ Aspectos relevantes del modelo de Farah y Huggins

El método propuesto por Farah y Huggins supone un avance significativo en el análisis de secciones de hormigón armado sometidas a estados de compresión o flexión compuesta esviada. La solución obtenida se aleja de coeficientes empíricos (Bresler), o ajustes geométricos (Pannell), y se basa en la integración de las tensiones del hormigón de manera exacta para cada plano postulado. La solución puede aproximarse a la teórica tanto como se reduzca la norma de convergencia.

La dificultad de aplicación del método propuesto por Farah y Huggins aumenta a medida que la sección se aleja de un contorno rectangular, caso en el que el límite inferior de la integración en y , es constante, y coherente con el sistema de coordenadas de la figura 2.48, toma valor cero:

$$P = \int_0^T \int_0^{f(x)} f_c(x, y) dy dx + N_s \quad [2.45]$$

En el caso de secciones cuyo límite geométrico inferior no fuera una recta horizontal (tal como sucede con secciones rectangulares), el límite inferior de la segunda integral definida sería una función $g(x)$:

$$N = \int_0^T \int_{g(x)}^{f(x)} f_c(x, y) dy dx + N_s \quad [2.46]$$

Para secciones en las que el límite geométrico inferior tuviera que ser descrito por una función discontinua, o por tramos de valores en x , la aplicación del método se vuelve complejo desde un punto de vista operativo y lo inhabilita para la resolución de problemas cotidianos del diseño estructural.

La aplicación de la estrategia numérica propuesta por Farah y Huggins para secciones con geometrías similares a las diseñadas por Miguel Fisac (figura 2.50) se convierte en un estudio teórico en lugar de llegar a ser un método práctico de aplicación de resolución de la sección.

CAPÍTULO 2

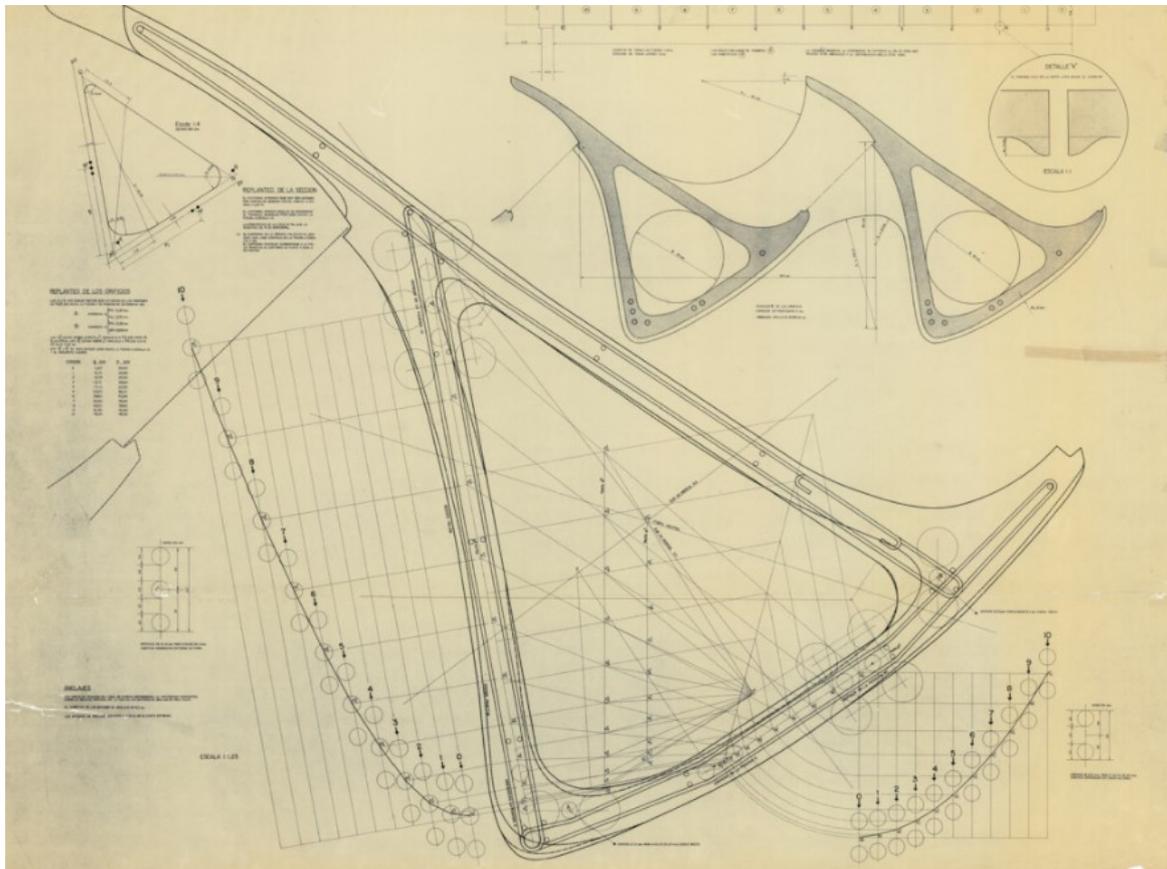
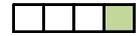


Figura 2.50. Imagen del plano original de la sección transversal de viga hueso para el Centro de Estudios Hidrográficos, 1961, Miguel Fisac. Fundación Miguel Fisac.

W. F. Chen, M. T. Shoraka (1972)



W. F. Chen y M. T. Shoraka, proponen la elaboración de diagramas de interacción de agotamiento en compresión o flexión compuesta esviada para un axil concomitante, y el método para su determinación queda descrito en su artículo “Tangent Stiffness Method for Biaxial Bending of Reinforced Concrete Columns”⁵².

Chen y Shoraka ponen de manifiesto la importancia de diagramas momento-curvatura para el análisis de columnas solicitadas en compresión compuesta, y para su obtención, proponen la aplicación del método descrito su artículo “Tangent Stiffness Method for Biaxial Bending”⁵³.

Los diagramas momento-curvatura representados en la figura 2.51, muestran la relación entre $M_x - \chi_x$ para diversos valores de M_y y un axil exterior P . El procedimiento numérico se basa en aplicar un axil P y a continuación un momento M_y de manera que P permanezca constante. Finalmente se aplica un momento M_x hasta el agotamiento de la sección, manteniendo los valores de P y M_y constantes.

⁵² W. F. Chen, M. T. Shoraka, “Tangent Stiffness Method for Biaxial Bending of Reinforced Concrete Columns”, Fritz Engineering Laboratory Report N° 389.1, (October 1972).

⁵³ Santathadaporn, S., Chen, W. F. “Tangent Stiffness Method for Biaxial Bending” Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 98, N° ST1, pp. 153-156, (January 1972).

CAPÍTULO 2

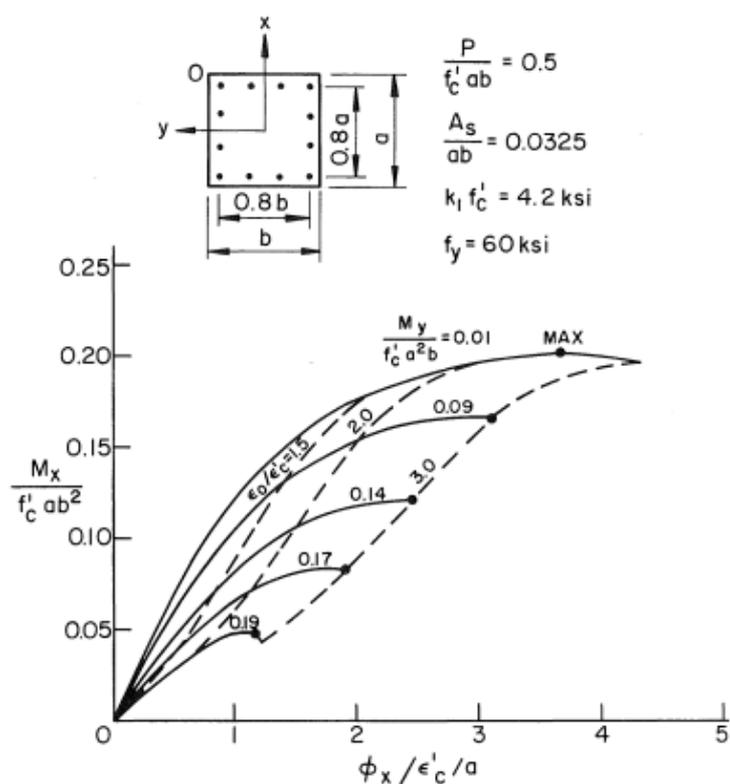


Figura 2.51. Diagrama $M_x - \chi_x$ para diversos valores M_y y un axil exterior P . W. F. Chen, M. T. Shoraka, "Tangent Stiffness Method for Biaxial Bending of Reinforced Concrete Columns", Fritz Engineering Laboratory Report N° 389.1, (October 1972).

Chen y Shoraka dan por agotada la sección cuando se alcanza una deformación unitaria en la fibra más comprimida de hormigón de valor 3.0‰. Para mostrar la deformación en la sección, incorporan en líneas discontinuas al 1.5‰ y al 2.0‰.

Constatan que el máximo valor de M_x (significado con un pequeño círculo negro en la figura 2.51), se encuentra siempre para deformaciones comprendidas entre el 2.0‰ y el 3.0‰, y en general muy próximo a este último valor.

Es posible representar diagramas de interacción de agotamiento $M_x - M_x$ para un axil P disponiendo en unos ejes cartesianos los valores correspondientes al agotamiento (líneas discontinuas), para el valor de deformación unitaria establecido para el hormigón.

▪ **Aspectos relevantes del modelo de Chen y Shoroka**

Gráficos similares al de la figura 2.51 son publicados por Chen y Shoroka para diferentes grados de acero y hormigón, si bien, la colección no es tan amplia como para que se conviertan en una herramienta de diseño. Mediante los gráficos publicados, los autores son capaces de realizar las siguientes afirmaciones:

1. La capacidad de una sección sometida a un estado de compresión o flexión compuesta esviada no depende de manera significativa del valor de deformación de agotamiento que se atribuya al hormigón.
2. La capacidad de una sección sometida a un estado de compresión o flexión compuesta esvida aumenta al tiempo que lo hacen las calidades de los materiales (valores de agotamiento de aquellos).
3. La capacidad de una sección sometida a un estado de compresión o flexión compuesta esvida aumenta para valores elevados de cuantías de armadura.

En relación a la posibilidad de determinar las coordenadas del plano de equilibrio para un estado de sollicitación cualquiera, con los diagramas momento curvatura publicados por Chen y Shoroka solamente queda determinado el valor de la curvatura según el eje x (χ_x), quedando sin determinar la profundidad y el rumbo del eje neutro, así como el valor de la curvatura según el eje y (χ_y).

CAPÍTULO 2

Francisco Morán Cabré (1972)



En abril de 1972 es publicado el documento “CEB Bulletin D’Information n°83”⁵⁴, en el que su autor, Francisco Morán Cabré, aborda el análisis de secciones de hormigón armado solicitadas frente a tensiones normales. Estudia esta cuestión en términos de flexión recta o esviada, simple o compuesta, dando solución a problemas de comprobación y dimensionamiento. Así mismo discutirá sobre soluciones gráficas y analíticas.



Figura 2.52. Francisco Morán Cabré. *www.elsevier.es*

Morán observa y aplica las recomendaciones incluidas en el CEB/FIP⁵⁵ en cuanto a las bases para el diseño de secciones de hormigón armado en estado límite último. En él se recogen los modelos constitutivos para hormigón y acero que emplea en sus análisis.

La curva tensión deformación utilizada por Morán para caracterizar el comportamiento del hormigón (figura 2.53 a), es descrita por Rüsçh y Grasser⁵⁶ y adopta una configuración parábola-rectángulo. El modelo constitutivo de acero es bilineal (rígido-plástico).

⁵⁴ Moran Cabré Francisco, "Design of reinforced concrete sections under normal loads and stresses in the ultimate state". CEB Bulletin d’Information N° 83, (April 1972).

⁵⁵ CEB / FIP “Recommandations pratiques unifies pour le calcul et l’execution des ouvrages en béton armé”, Paris, (1970).

⁵⁶ H. Rüsçh, E. Grasser, P. Rao. “Principes de calcul du béton armé sous des états de contraintes monoaxiaux”. Bulletin n° 36 of CEB. Paris (June 1962).

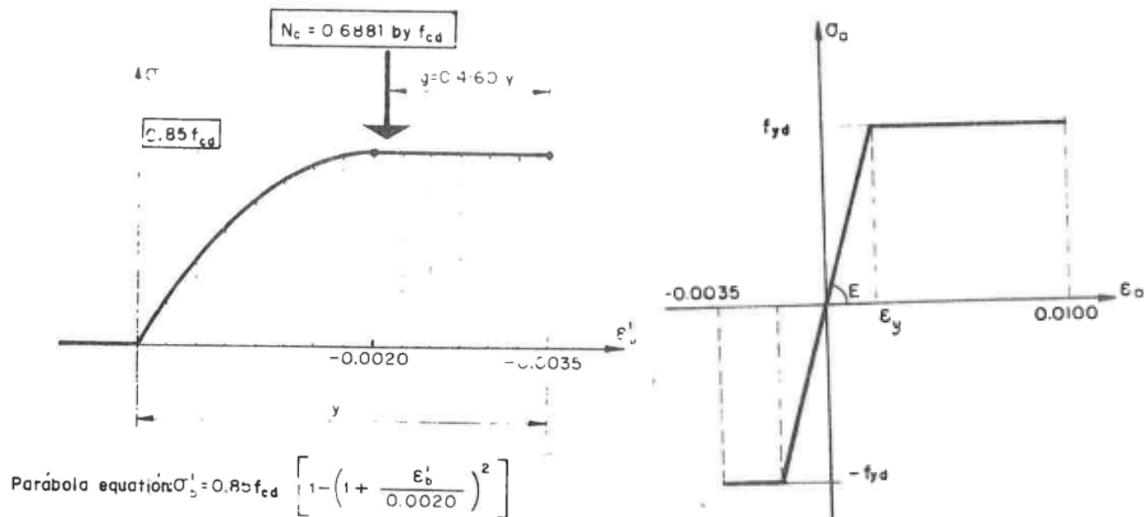


Figura 2.53. Ecuaciones constitutivas de hormigón y acero empleadas por Morán. "Design of reinforced concrete sections under normal loads and stresses in the ultimate state". CEB Bulletin d'Information N° 83, (Abril 1972).

Se incluye en el CEB/FIP la descripción del espectro de posibles estados límite último de una sección de hormigón, coherente con los modelos constitutivos descritos. Así se define de manera continua, para todas las curvaturas posibles, el plano en el que se alcanza el agotamiento, significándose un punto característico (pivote) sobre el que rotan los planos de agotamiento para cada modo de fallo (tracción en el acero, flexión compuesta, y compresión compuesta).

De las cuestiones analizadas por Morán, en esta tesis se expone el caso particular (solución propuesta por Morán), de la obtención de la cuantía óptima de armadura (con distribución geométrica conocida) en una sección cualquiera para un estado de sollicitación exterior arbitrario (P, M_x, M_y) , esto es, dada una sección de hormigón de la que es conocida la posición de cada barra de acero de refuerzo, analiza como determinar la superficie de la sección transversal de cada una de ellas que conduzca a la mínima cuantía posible.

CAPÍTULO 2

La figura 2.54 representa un diagrama de interacción de una sección de hormigón con armadura nula. Sobre el diagrama el vector $\overrightarrow{OE_F}$ representa por tanto a contribución del hormigón a la resistencia de un estado de sollicitación exterior $\overrightarrow{E_F S}$.

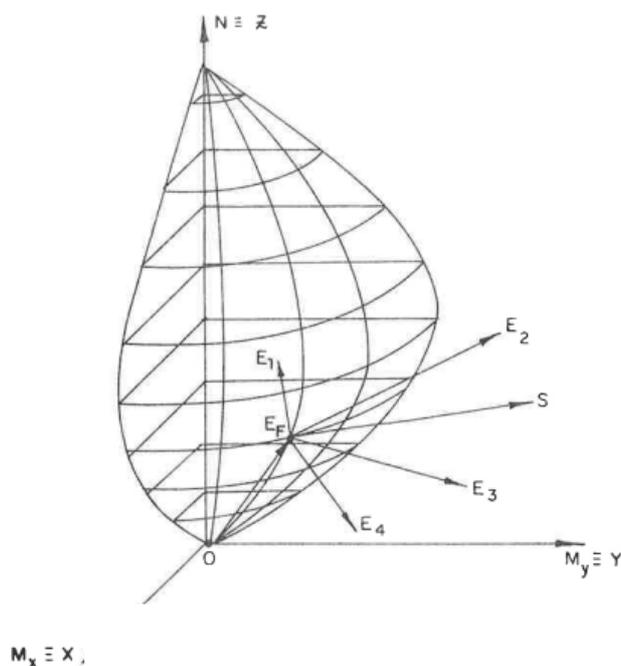


Figura 2.54. Diseño óptimo de armadura para un estado de sollicitación exterior arbitrario (P, M_x, M_y) . Morán Cabré Francisco. "Design of reinforced concrete sections under normal loads and stresses in the ultimate state". CEB Bulletin d'Information N° 83, (April 1972).

Para resistir este estado $\overrightarrow{E_F S}$ (que supera la capacidad del diagrama mostrado en la figura), es preciso incluir armadura en la sección transversal de la sección y componer dicho vector en función del número de barras que se coloquen. En la figura la contribución a la resistencia del estado de sollicitación exterior viene dado por los vectores $\overrightarrow{E_F E_1}$, $\overrightarrow{E_F E_2}$, $\overrightarrow{E_F E_3}$... $\overrightarrow{E_F E_n}$... como contribución de cada una de las barras dispuestas en la sección.

Es posible afirmar que la suma de los vectores $\overrightarrow{OE_F}$ y $\overrightarrow{E_F E_1}$, $\overrightarrow{E_F E_2}$, $\overrightarrow{E_F E_3} \dots \overrightarrow{E_F E_n} \dots$ pueden conducir a un estado resistente equivalente al vector de sollicitación exterior⁵⁷ $\overrightarrow{E_F S}$.

Para el caso particular de una sección con una barra de armadura de refuerzo, existe una única solución para la determinación del vector $\overrightarrow{E_F S}$, y es posible hablar en términos de dimensionado estricto. En el caso general de una sección con una configuración de más de una barra de armadura, existe un número infinito de combinaciones de cuantías de cada barra cuya composición arroja el vector sollicitación exterior. De todas las combinaciones posibles de cuantías que conducen a la composición del vector $\overrightarrow{E_F S}$, es posible determinar la de menor valor mediante el planteamiento y resolución de un sistema de ecuaciones no lineales.

Sean x, y, z las componentes del vector $\overrightarrow{E_F S}$, determinadas como:

$$x = M_x - M_{xF} \quad [2.47]$$

$$y = M_y - M_{yF} \quad [2.48]$$

$$z = N - N_F \quad [2.49]$$

Donde:

M_x, M_y, N Son las componentes de la sollicitación exterior.

M_{xF}, M_{yF}, N_F Son las componentes del punto de estado límite último analizado para la sección de hormigón y armadura fija (no susceptible de optimización).

x_i, y_i, z_i Son las componentes del vector $\overrightarrow{E_F E_i}$ de la resultante de cada barra de acero i con cuantía $\rho_i = 1$.

Deben determinarse los ratios $\rho_1, \rho_2 \dots \rho_n$ de cada barra de armadura de la sección, tomando en cuenta la siguiente condición:

⁵⁷ En el caso de dimensionamiento estricto la suma de las capacidades de hormigón y acero igualan a las sollicitaciones exteriores de manera exacta.

CAPÍTULO 2

$$\rho_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n$$

Así mismo, debe cumplirse:

$$x_1\rho_1 + x_2\rho_2 + \dots + x_n\rho_n = x \quad [2.50]$$

$$y_1\rho_1 + y_2\rho_2 + \dots + y_n\rho_n = y \quad [2.51]$$

$$z_1\rho_1 + z_2\rho_2 + \dots + z_n\rho_n = z \quad [2.52]$$

Y debe determinarse la función:

$$c_M = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n \quad [2.53]$$

La cuestión de determinar la cuantía mínima de armadura para un estado de agotamiento determinado se ha planteado como un problema de programación lineal⁵⁸ y la búsqueda del coste mínimo de c_M .

El procedimiento numérico iterativo en el que es preciso modificar en cada iteración la profundidad y el giro del eje neutro es descrito por Morán y se expone seguidamente:

1. Deben postularse los valores iniciales en cuanto a profundidad y giro del eje neutro⁵⁹, así como establecerse la tasa de variación de ambas variables entre dos ciclos de iteración consecutivos:

⁵⁸ Morán plantea la resolución del sistema de ecuaciones mediante un algoritmo descrito por Gorge Dantzing (Gass, S. "Linear Programming –Methods and Applications, McGraw Hill, New York, 1964). Esta cuestión se aborda mediante un procedimiento iterativo en el que la convergencia se alcanza con un número de ciclos reducido (del orden de seis para este caso). En esta tesis, la determinación de la cuantía mínima en cada estado límite último de agotamiento se ha resuelto mediante una aplicación desarrollada en C# con ayuda de la librería *Microsoft.SolverFoundation*, la cual implementa el método Simplex citado por Morán.

⁵⁹ Morán otorga un valor de $x_M=0.50$ para la profundidad relativa inicial de la fibra neutra. El eje neutro en esta primera iteración discurre por el centro de gravedad de la sección lo que implica suponer que el agotamiento de la sección se produce al alcanzar la fibra extrema superior la deformación última del hormigón (ϵ_{cu}). En esta tesis, se ha optado por otorgar el valor inicial de profundidad relativa del eje neutro $x_M=0.0$, (fibra extrema superior de la

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{M_y}{M_x}$$

$$x_M = 0.0$$

$$\Delta\varphi = \frac{(\varphi_s - \varphi_i)}{10}$$

$$\Delta x = 0.10$$

Donde φ_s , φ_i son valores externos posibles de iteración.

2. Manteniendo φ constante se determina:

$$x_{M_1} = x_M$$

sección). De esta manera para determinar el primer punto de iteración de la búsqueda de la cuantía óptima, se incrementa la profundidad hasta que se logra un plano de equilibrio posible y compatible con las condiciones de contorno. En la figura 2.55 se muestra el espectro de profundidades relativas posibles para la fibra neutra en todo el dominio de deformaciones de una sección en estado límite último. Morán adopta valores de -1.0 a 0.0 para estados de tracción compuesta, y valores de 1.0 a 2.0 para estados de compresión compuesta.

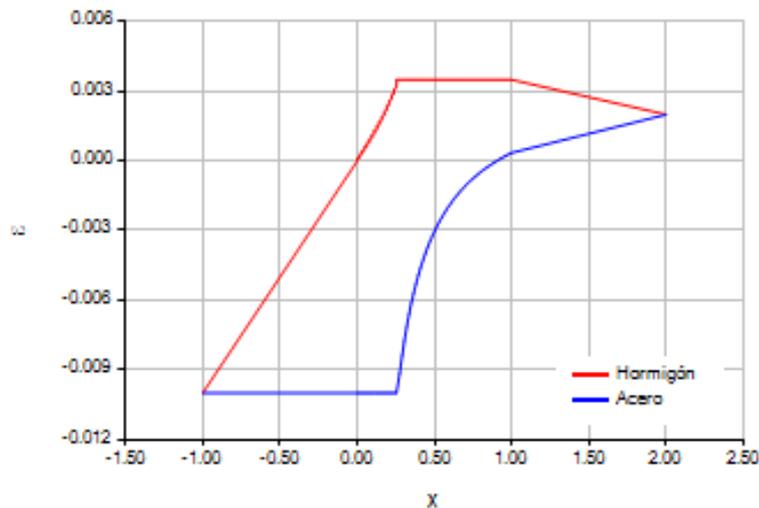


Figura 2.55. Deformación de fibras las extremas de hormigón y acero en relación a la profundidad relativa del eje neutro para todo el espectro posible de deformaciones en estado límite último de agotamiento. Reproducción del autor de una imagen tomada de "Design of reinforced concrete sections under normal loads and stresses in the ultimate state". CEB Bulletin d'Information N° 83, (April 1972).

CAPÍTULO 2

$$x_{M_2} = x_M + \Delta x_M$$

Si el coste de la función es mayor en el punto x_{M_2} que en x_{M_1} , se vuelve a fijar el valor de profundidad de eje neutro en x_{M_1} y se modifica el signo de Δx_M :

$$x_{M_2} = x_{M_1}$$

$$\Delta x_M = -\Delta x_M$$

3. Nueva iteración con los siguientes valores:

$$x_{M_1} = x_{M_2}$$

$$x_{M_2} = x_{M_1} + \Delta x_M$$

Mientras el coste de la función siga decreciendo, y la profundidad relativa del eje neutro esté comprendida entre los valores extremos (-1 y 2) representados en la figura 2.62.

4. En el ciclo de iteración en el que se obtenga un aumento del coste de la función c_M , es preciso volver al ciclo anterior (valores de φ y x_M), y reducir el incremento de la profundidad de la fibra neutra, esto es:

$$x_M = x_{M_1}$$

$$\Delta x_M = 0.1\Delta x_M$$

5. En este momento es preciso verificar que se cumplen las dos siguientes condiciones:

$$|\Delta x_M| \leq 0.001$$

$$|\Delta \varphi| \leq 0.001(\varphi_s - \varphi_i)$$

En cuyo caso el proceso ha concluido⁶⁰.

6. Si no se cumplen las condiciones descritas en el punto anterior, manteniendo constante el valor de x , se modifica el giro del eje neutro:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi \\ \varphi_2 &= \varphi_1 + \Delta\varphi\end{aligned}$$

Si el coste de la función es más elevado en el punto 2 que en el punto 1, es preciso volver al punto 1, y cambiar el signo del incremento del ángulo del eje neutro $\Delta\varphi$:

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \varphi_1 \\ \Delta x_M &= -\Delta x_M\end{aligned}$$

7. Continúa el proceso iterativo con el incremento del giro del eje neutro $\Delta\varphi$:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_2 \\ \varphi_2 &= \varphi_1 + \Delta\varphi\end{aligned}$$

⁶⁰ Morán no detalla el procedimiento por el que resuelve numéricamente la determinación de las cuantías en cada ciclo de iteración. Parece razonable pensar que desarrolla a bajo nivel un código que aplique el procedimiento ideado por Dantzing. A la luz de los valores de cuantías publicados por Morán para el ejemplo analizado, (y reproducido en esta tesis, tabla 2.3), es posible pensar que para cada rumbo y profundidad del eje neutro, sea factible hallar una solución numérica, (cuantía de armadura), aunque no tenga validez conceptual. Así, en algunos pasos de la iteración, Morán logra valores de cuantías del orden de 70000 veces superior a la cuantía óptima. En esta tesis, la resolución del sistema no lineal de ecuaciones se ha resuelto con la librería citada (*Microsoft.SolverFoundation*), y en la búsqueda de la solución exacta, de no existir ésta para las restricciones impuestas, se concluye que el plano de agotamiento postulado no es un plano posible. Luego en la verificación de la convergencia y posible acabamiento del proceso iterativo, en la simulación del ejemplo de Morán, en esta tesis, se ha introducido la restricción de que exista una solución exacta en cada plano de agotamiento postulado, y esta restricción adicional no está contemplada por Morán, lo cual conduce a implementar cambios en el procedimiento original de propio Morán en la búsqueda de la cuantía óptima de armadura.

CAPÍTULO 2

Mientras el coste de la función siga decreciendo, y $\varphi_i \leq \varphi \leq \varphi_s$.

8. En el momento en el que se produzca el primer aumento en el coste de la función, es preciso volver a los valores del ciclo de iteración anterior, y reducir el incremento de giro del eje neutro $\Delta\varphi$:

$$\varphi = \varphi_1$$

$$\Delta\varphi = 0.1\Delta\varphi$$

9. En este momento es preciso verificar que se cumplen las dos siguientes condiciones:

$$|\Delta x_M| \leq 0.001$$

$$|\Delta\varphi| \leq 0.001(\varphi_s - \varphi_i)$$

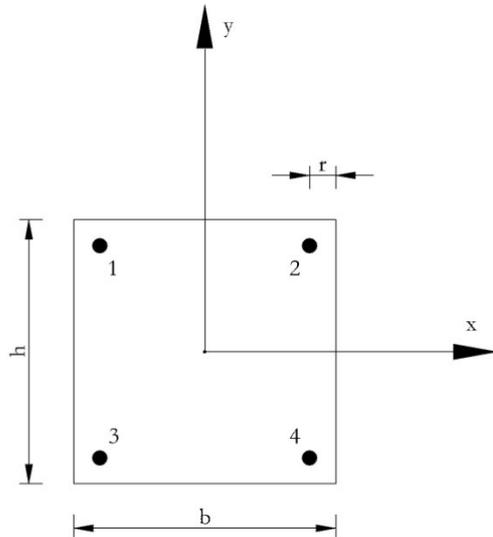
En cuyo caso el proceso ha concluido, y de no ser así, es preciso volver al punto 2 de este proceso.

Morán pone de manifiesto que el método expuesto se muestra eficaz para la búsqueda de mínimos en términos de coste (cuantía de armadura) para funciones correctamente condicionadas, esto es, funciones con cambios suaves de tendencias en los que el mínimo relativo sea único y sea así mismo el mínimo absoluto. Situaciones distintas conducen a un mayor número de ciclos de iteración o a situaciones en las que un mínimo relativo pueda ser tomado como absoluto.

▪ Ejemplos de aplicación

Para la sección cuadrada cuyo esquema, valores geométricos y mecánicos se muestran a continuación, es posible determinar la cuantía estricta de armadura que se requiere en cada una de las cuatro barras, para un axil exterior de 2000 KN con excentricidades según los dos ejes principales de inercia de la sección.

ESTADO DE LA CUESTIÓN



$$b = 1000 \text{ mm.}$$

$$h = 1000 \text{ mm.}$$

$$r = 100 \text{ mm.}$$

Armadura: 4 barras

$$f'_c = 10.00 \text{ MPa.}$$

$$f_y = 400.00 \text{ MPa.}$$

$$e_x = 300.00 \text{ mm.}$$

$$e_y = 500.00 \text{ mm.}$$

Los esfuerzos exteriores de diseño, para las excentricidades dadas son:

$$P = 2000 \text{ KN}, M_x = 1000 \text{ KNm}, M_y = 600 \text{ KNm.}$$

El procedimiento seguido en esta tesis para determinar la distribución óptima de armadura para resistir los esfuerzos exteriores es el descrito por Morán. Se ha simulado el proceso iterativo expuesto, y en cada ciclo (giro y profundidad del eje neutro postulados), se ha obtenido la superficie de armadura a disponer en la sección transversal en cada una de las posiciones fijadas.

CAPÍTULO 2

x (mm)	Giro (°)	A_{S1} (mm^2)	A_{S2} (mm^2)	A_{S3} (mm^2)	A_{S4} (mm^2)	$A_{S(Total)}$ (mm^2)
100	30.964	755.50	2275.50	145.00	0.00	3176.00
200	30.964	699.19	1587.50	441.50	0.00	2782.19
300	30.964	571.76	856.00	882.00	0.00	2309.76
400	30.964	343.57	117.50	1371.75	0.00	1832.82
400	30.064	195.76	40.75	1445.75	0.00	1682.26
400	29.974	180.74	33.50	1453.25	0.00	1667.49
400	29.884	166.29	24.75	1461.00	0.00	1652.04
400	29.794	153.78	18.00	1467.75	0.00	1639.53
400	29.704	139.55	10.00	1475.25	0.00	1624.80
400	29.614	127.24	3.25	1482.00	0.00	1612.49

Tabla 2.2. Resultados de las iteraciones en la búsqueda del dimensionado óptimo de la sección según el modelo de diseño óptimo de armadura de una sección de Morán

La tabla 2.2 muestra los resultados del proceso. Se observa que en 10 ciclos, se ha alcanzado el valor mínimo de armadura necesaria, y este se logra para el siguiente plano de agotamiento:

Giro del eje neutro: 29.614°.

Profundidad del eje neutro: 400 mm.

Se ha obtenido una superficie mínima total de acero de 1612.49 mm^2 , distribuida de la siguiente manera⁶¹:

$$A_{S1} = 127.24 \text{ mm}^2$$

⁶¹ Esta solución difiere ligeramente de la solución determinada por Morán ($\alpha = 29.074^\circ$, $x_M = 0.462$, $A_s = 1567,75 \text{ mm}^2$) por la diferencia de aproximación a la resolución del problema. Es preciso poner de manifiesto que, a pesar de no haber logrado reproducir exactamente los valores calculados por Morán ha quedado detallado el procedimiento y el espíritu de su modelo.

$$A_{s2} = 3.25 \text{ mm}^2$$

$$A_{s3} = 1482.00 \text{ mm}^2$$

$$A_{s4} = 0.00 \text{ mm}^2$$

▪ **Aspectos relevantes del modelo de Morán.**

El documento publicado por Morán cubre los problemas de comprobación y dimensionamiento de secciones de hormigón armado sometidas a un estado arbitrario de solicitaciones normales en estado límite último.

En esta tesis se ha expuesto el planteamiento propuesto por Morán para la determinación de la cuantía estricta de armadura para un estado último de agotamiento conocido (solicitaciones exteriores) si bien, Moran resuelve un mayor número de cuestiones, como son:

- a) Problemas de comprobación de una sección cualquiera definida mecánica y geoméricamente para un estado de sollicitación en tensiones normales cualquiera.
- b) Situaciones en las que es conocida una sección de hormigón y se plantea la necesidad de determinar la distribución de armadura que conduzca a un dimensionamiento óptimo de la sección, esto es, que conduzca a un ratio menor de armadura para un estado de sollicitación en tensiones normales cualquiera.

El planteamiento expuesto ha resultado ser robusto y eficaz. Se trata de un modelo universal con el que poder llevar a cabo el diseño estricto de armadura para secciones de hormigón armado de geometrías arbitrarias sometidas a tensiones normales. Y este nivel de análisis es suficiente como ya se ha expuesto, para garantizar la seguridad de una sección frente al agotamiento.

No obstante, no es posible determinar las coordenadas del plano de equilibrio para una sección dada y un estado de sollicitaciones normales inferiores a la rotura. Tampoco es posible llevar a cabo esta cuestión con el resto de cuestiones abordadas por Morán y no expuestas en esta tesis.

D. G. Row, Thomas Paulay (1973)



En 1973, Row y Paulay, en su artículo “Biaxial Flexure and Axial Load Interaction in Short Rectangular Reinforced Concrete Columns”⁶², ponen de manifiesto la necesidad de abordar columnas cortas de hormigón armado tomando en consideración la acción simultánea de los esfuerzos de flexión que la solicitan en cada una de las direcciones principales de su sección transversal según la acción de los pórticos de los que forma parte simultáneamente. Constatan que, en situaciones en las que se alcanza el momento de agotamiento de las vigas que concurren en uno los extremos del soporte de manera concomitante, la columna, analizada según las dos direcciones principales de su sección transversal de manera independiente, puede fallar.



Figura 2.56. Thomas Paulay. www.iabse.org

A pesar de que es posible llevar a cabo la integración de las tensiones en la sección transversal de la sección para una profundidad determinada del eje neutro afirman que, la dificultad del problema está en determinar el giro y la posición del mismo en la posición de equilibrio, siendo necesario abordar el problema por algún procedimiento iterativo.

Publican seis diagramas de interacción adimensionales, con diferentes relaciones de recubrimientos mecánicos según las dos dimensiones de la sección. En cada uno de esos

⁶² Paulay Thomas, “Biaxial flexure and axial load interaction in short rectangular reinforced concrete columns”, Bulletin of New Zealand Society for Earthquake Engineering, (September 1973)

diagramas se muestran cuatro familias de curvas, para cuatro direcciones de aplicación del vector momento (0° , 15° , 30° , 45°). Interpolando linealmente con estas familias de curvas, y trabajando en términos adimensionales es posible resolver dos tipos de problemas:

- a) Determinar la armadura para unos esfuerzos exteriores dados P, M_x, M_y . Se trata de un procedimiento de dimensionamiento.
- b) Determinar los momentos de agotamiento según los dos ejes de la sección (M_{ux}, M_{uy}) para una dirección de aplicación del vector momento determinada y un axil concomitante P_u . Se trata de un método de comprobación.

La integración de las tensiones del bloque comprimido es llevada a cabo por Row y Paulay dividiendo la sección en 400 elementos de igual área. A cada uno de estos elementos se le otorga la deformación y tensión correspondiente al centro de gravedad del mismo, asumiendo un valor constante de axil igual a esta tensión integrada en la superficie completa de dicho elemento.

Se desprecia la capacidad a tracción del hormigón. Se asume un modelo constitutivo parabólico hasta alcanzarse una deformación $\epsilon_0 = 0.002$ para un valor de $\sigma_c = 0.85f'_c$, manteniéndose constante esta tensión hasta la rotura para $\epsilon_u = 0.003$.

Se ha dispone una distribución de armadura homogénea en las cuatro caras de la sección. Desde un punto de vista de idealización de la sección, se divide la armadura en diez trozos de armadura en cada cara de la sección.

Row y Paulay ponen de manifiesto que llevar a cabo interpolaciones lineales en diagramas de interacción según la diagonal (Weber⁶³) de una sección y un eje principal de inercia produce errores no despreciables. Para reducirlos proponen diagramas con direcciones de excentricidad adicionales, reduciendo el error en el proceso de interpolación lineal entre direcciones de aplicación de la carga.

⁶³ Donald C. Weber. "Ultimate Strength Design Charts for Columns with Biaxial Bending", ACI Journal, Proceedings, 63, 1205-1320, Disc., 1538-1586, (November 1966).

CAPÍTULO 2

La excentricidad puede expresarse en los siguientes términos:

$$\frac{M_{uy}}{M_{ux}} = K \frac{b}{h} \rightarrow \frac{m_y}{m_x} = K \quad [2.54]$$

También es posible expresarlo de la siguiente manera:

$$K = \frac{e_y b}{e_x h} \quad [2.55]$$

Diferentes valores de K determinan la dirección del vector momento. Así, para $K = 1$ implica flexión según la dirección de la diagonal de la sección. Para $K = 0$ la flexión se produce según el eje x , y para $K = \infty$ la flexión se produce en el eje y .

Los diagramas propuestos son de aplicación para secciones rectangulares en las que las distancias de las armaduras de caras opuestas al centro de gravedad de la sección tengan el mismo valor. En ellos se representan el axil característico frente a la composición vectorial en términos adimensionales de los vectores momento según los dos ejes de la sección M_θ .

En situaciones de compresión o flexión compuesta esviada según las dos direcciones principales de la sección, se toma por convenio que el momento característico de mayor valor se asocia al eje x .

$$M_\theta = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} = \frac{M_{ux}}{f_c b h^2} \sqrt{1 + K^2} = \frac{M_{uy}}{f_c h b^2} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{K}\right)^2} \quad [2.56]$$

Para determinar los diagramas es preciso llevar a cabo un procedimiento iterativo cuya secuencia lógica sea la siguiente:

- Se escoge una dirección de la aplicación del vector momento (K).
- Se imponen valores crecientes en un rango de cero a uno para $\rho_T m$, donde:

$$\rho_T = \frac{A_T}{bh} \quad [2.57]$$

$$m = \frac{f_y}{0.85f_c'} \quad [2.58]$$

- c) Se imponen valores de K_y (tantos como puntos se quieran determinar para cada curva y se procede a determinar un valor de K_x de manera iterativa. El proceso cesa cuando se halla una relación de esfuerzos $\frac{M_y}{M_x}$ cuyo valor se aproxime al valor objetivo de K (dirección de aplicación del vector momento).
- d) Cuando se alcanza un valor negativo de axil reducido, se pasa a otro valor de cuantía y se vuelven a repetir el paso e.
- e) Una vez que se ha recorrido el rango impuesto de valores cuantías ($\rho_T m$), se analiza otra dirección de aplicación del vector momento (K), repitiéndose los puntos d, e, f.

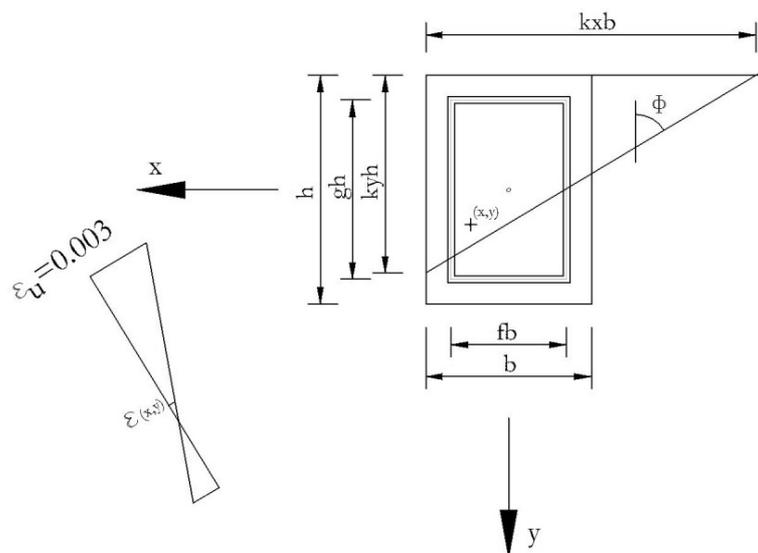


Figura 2.57. Definición geométrica de una sección para el modelo de Row y Paulay. Reproducción del autor de una imagen tomada de Paulay Thomas, "Biaxial flexure and axial load interaction in short rectangular reinforced concrete columns", Bulletin of New Zealand Society for Earthquake Engineering, (September 1973).

Consecuente con la figura 2.57, y aplicando semejanza de triángulos, es posible determinar la deformación de cada punto de la sección mediante la siguiente expresión:

CAPÍTULO 2

$$\varepsilon_{(x,y)} = 0.003 \left(1 - \frac{1}{2K_y} - \frac{1}{2K_x} - \frac{y}{K_y h} + \frac{x}{K_x b} \right) \quad [2.59]$$

El resultado de este análisis son seis diagramas. Se muestra uno de ellos en la figura 2.58. Como puede verse, cada cuadrante representa las curvas de interacción de agotamiento para un axil y el momento combinado, para cuantías crecientes. Con ayuda de estos ábacos, y operando en términos adimensionales, es posible determinar la armadura necesaria para una columna para unos esfuerzos exteriores dados, o bien, determinar las excentricidades de agotamiento para un axil cualquiera.

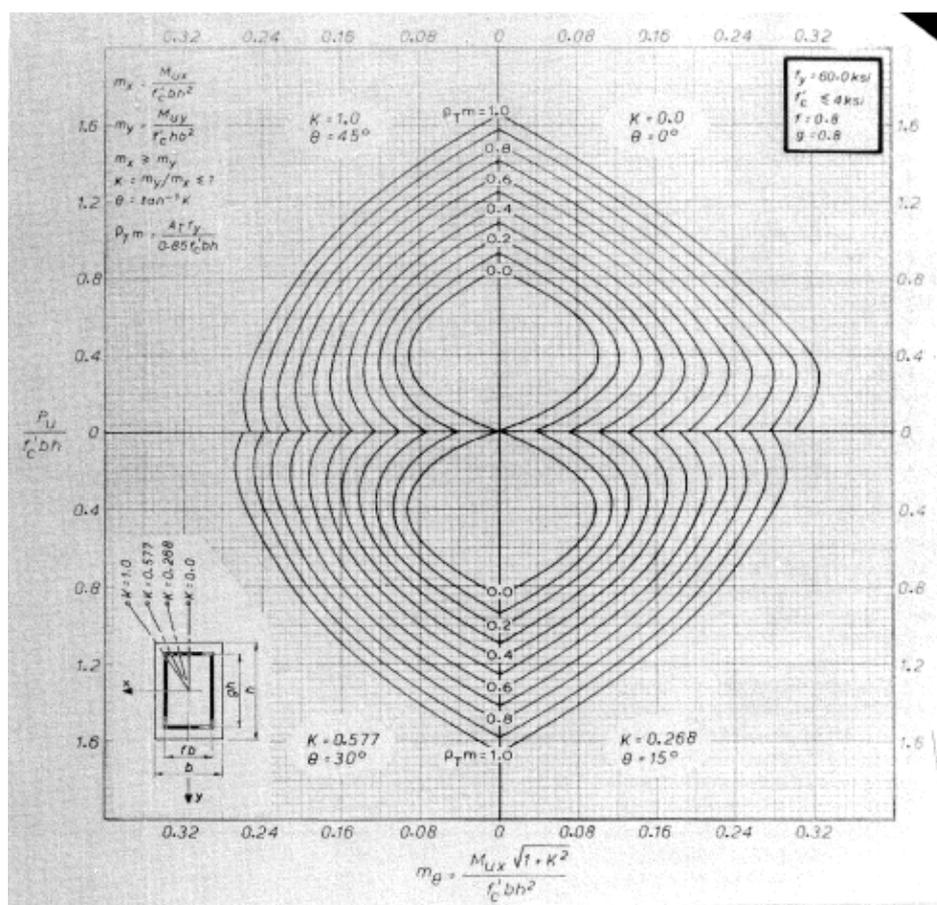


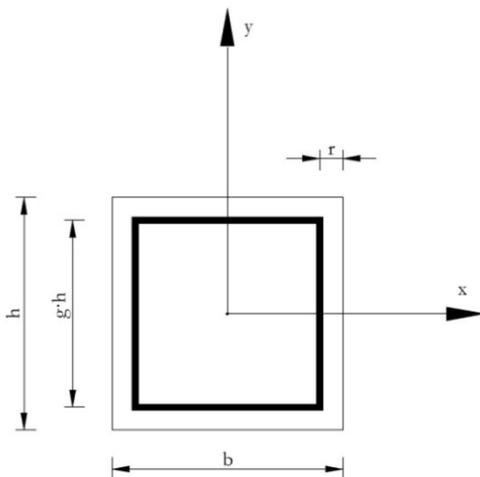
Figura 2.58. Diagrama adimensional para comprobación o dimensionamiento en compresión o flexión compuesta esviada propuesto por Row y Paulay. Paulay Thomas, "Biaxial flexure and axial load interaction in short rectangular reinforced concrete columns", Bulletin of New Zealand Society for Earthquake Engineering, (September 1973).

- Ejemplos de aplicación

Se ha desarrollado una aplicación en la plataforma *.Net (C#)* con la que poder simular los diagramas propuestos por Row y Paulay.

a) Ejemplo de dimensionamiento.

Para una sección rectangular cuyo esquema, valores geométricos y mecánicos se muestran a continuación es posible determinar la armadura estricta mediante la aplicación del modelo propuesto por Row y Paulay:



$$b = 406.40 \text{ mm.}$$

$$h = 508.00 \text{ mm.}$$

$$f = g = 0.80$$

$$f'_c = 27.58 \text{ MPa.}$$

$$f_y = 413.68 \text{ MPa.}$$

$$P_u = 1423.43 \text{ kN.}$$

$$M_{u1} = 499.57 \text{ kNm.}$$

$$M_{u2} = 157.80 \text{ kNm.}$$

Para la aplicación del método propuesto, es preciso otorgar a M_x , el mayor valor de los momentos reducidos aplicados a la sección. En este caso queda:

$$\nu_u = 0.25, \mu_{u1} = 0.1726, \mu_{u2} = 0.069$$

Puesto que $\mu_{u1} > \mu_{u2}$ se considera $\mu_x = 0.1726$, $\mu_y = 0.069$.

CAPÍTULO 2

La dirección del momento según el modelo es $K = \frac{\mu_y}{\mu_x} = 0.40$, y se deduce $\theta = \frac{1}{\tan K} = 21.8^\circ$.

El momento combinado toma el siguiente valor:

$$\mu_\theta = \mu_x \sqrt{1 + K^2} \rightarrow \mu_\theta = 0.1726 \sqrt{1 + 0.40^2} \rightarrow \mu_\theta = 0.186$$

Es preciso interpolar entre los diagramas calculados para 15.0° y 30.0° . Entrando en ambos diagramas, con un Axil $v_u = 0.250$, y $\mu_\theta = 0.186$. De estos dos diagramas se obtienen dos cuantías según la figura 2.66.

Del diagrama 15.0° , se obtiene una cuantía necesaria de 0.49.

Del diagrama 30.0° , se obtiene una cuantía necesaria de 0.56^{64} .

Interpolando linealmente, para 21.8° , la cuantía necesaria sería 0.51, lo que supone 5966.73 mm^2 de acero en la sección transversal.

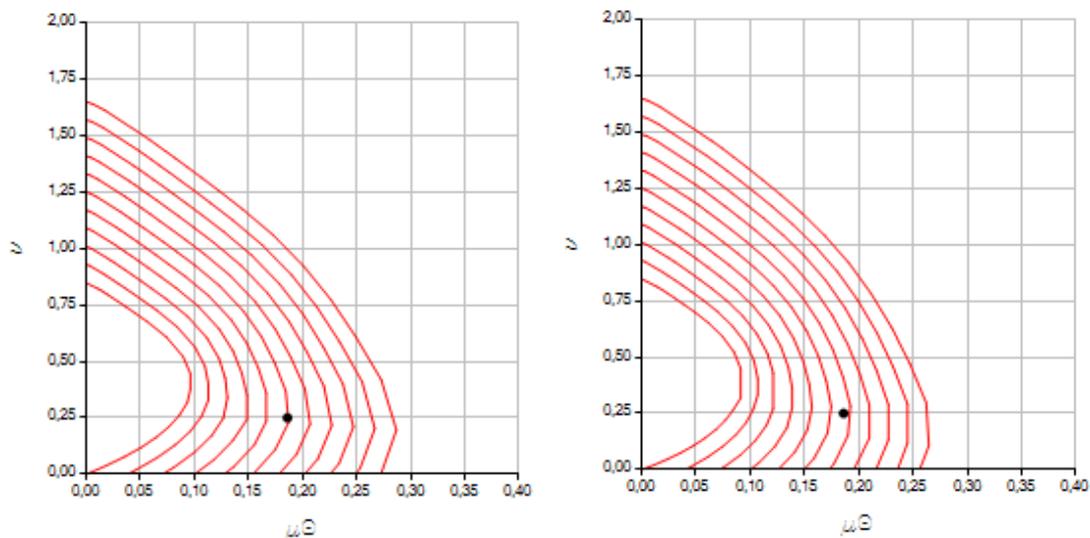


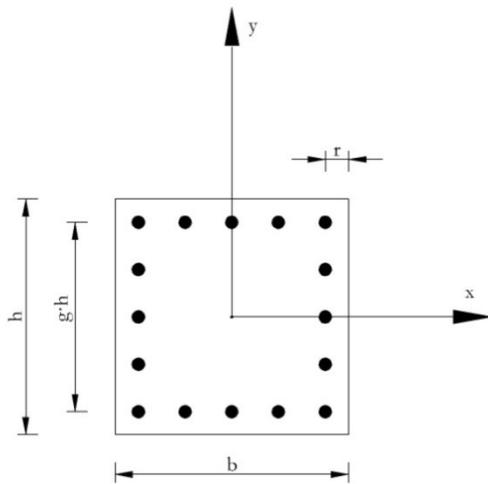
Figura 2.59. Simulación de los diagramas de interacción propuestos por Row y Paulay para direcciones de 15° y 30° .

Autor.

⁶⁴ Los valores de cuantías recogidos el artículo de Row y Paulay son 0.477 y 0.554 para los ángulos de 15° y 30° respectivamente.

b) Ejemplo de comprobación.

Para una sección rectangular cuyo esquema, valores geométricos y mecánicos se muestran a continuación es posible determinar los esfuerzos flectores de agotamiento para un axil actuando según en una dirección de acción de 30° :



$$b = 660.40 \text{ mm.}$$

$$h = 584.20 \text{ mm.}$$

$$f = g = 0.80$$

$$f'_c = 27.58 \text{ MPa.}$$

Armadura: $16\emptyset 25.4 \text{ mm.}$

$$f_y = 413.68 \text{ MPa.}$$

$$P_u = 1385.18 \text{ kN.}$$

$$M_{u1} = 499.57 \text{ kNm.}$$

$$M_{u2} = 157.80 \text{ kNm.}$$

Así, queda $v_u = 1.30$, y $\rho_t = 0.021$.

$$m = \frac{413.68}{27.68 \cdot 0.85} \rightarrow m = 17.58, \text{ y } \rho_t m = 0.370.$$

$$\frac{M_{uy}}{M_{ux}} = \tan 30^\circ = 0.5774. \frac{\mu_y}{\mu_x} = \frac{660.40}{584.20} \cdot 0.5774 = 0.6527 = K.$$

$$\theta = \tan^{-1} K = 33.13^\circ.$$

Del diagrama 30.0° , se obtiene un $\mu_\theta = 0.14$.

CAPÍTULO 2

Del diagrama 45.0°, se obtiene un $\mu_{\theta} = 0.14$ ⁶⁵

Interpolando linealmente, para 33.13°, se obtiene un $\mu_{\theta} = 0.14$. Y es posible determinar las dos componentes del momento de agotamiento con dimensiones adecuadas a la sección analizada:

$$\mu_{\theta} = \frac{M_{ux}}{f_c b h^2} \sqrt{1 + K^2}, \text{ se deduce } M_{ux} = 823.04 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

$$\mu_{\theta} = \frac{M_{uy}}{f_c h b^2} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{K}\right)^2}, \text{ se deduce } M_{uy} = 475.42 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

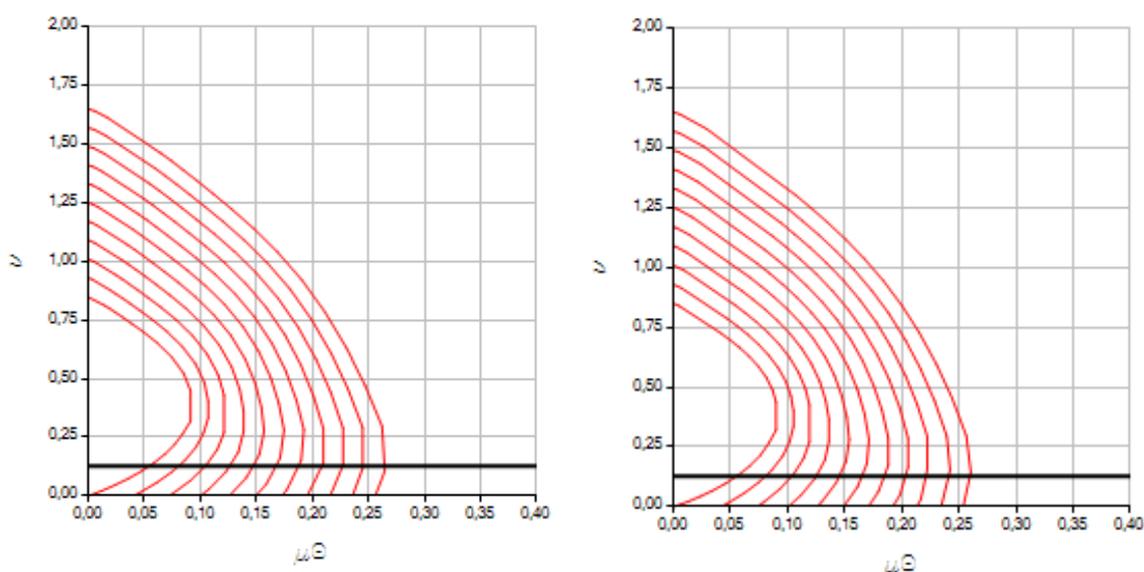


Figura 2.60. Simulación de los diagramas de interacción propuestos por Row y Paulay para direcciones de 30 y 45°.

Autor.

▪ Aspectos relevantes del modelo de Row y Paulay

Los diagramas propuestos por Roy y Paulay suponen una herramienta de dimensionamiento o comprobación de secciones rectangulares con distribución de armadura homogénea en las cuatro

⁶⁵ Los valores de momento recogidos el artículo de Row y Paulay son 0.138 y 0.143 para los ángulos de 30° y 45° respectivamente.

caras. Suponen una herramienta válida para la resolución de columnas de hormigón armado de formas y distribución de armadura canónicas.

Estos diagramas suponen un avance significativo respecto al modelo de Weber⁶⁶, pues permite analizar secciones rectangulares, (no solamente cuadradas), en la resolución de secciones de hormigón armado sometidas a estados de flexión o compresión compuesta esviada.

⁶⁶ Donald C. Weber. "Ultimate Strength Design Charts for Columns with Biaxial Bending", ACI Journal, Proceedings, 63, 1205-1320, Disc., 1538-1586, (November 1966).

CAPÍTULO 2

2.3 Modelos recientes.

La tendencia en la actualidad respecto a la aproximación a la solución de secciones de hormigón armado o pretensado solicitadas frente a tensiones normales discurre por la optimización de algoritmos o métodos numéricos que mejoren el tiempo de computación así como el nivel de precisión logrado. En esta línea, autores como Bonet y Fernández⁶⁷ (2000), plantea un método numérico de integración de las tensiones de hormigón en zonas no fisuradas de la sección mediante la división de la zona comprimida en un número reducido de franjas mediante la cuadratura de Gauss-Legendre frente a la división clásica en un elevado número de celdillas o franjas.

Otros como Barros⁶⁸ (2004), plantean una solución analítica para el diseño óptimo de secciones en estado límite último minimizando el coste de acero mediante el empleo de las que funciones tipo *Heanyside* para la caracterización de la deformación del hormigón en la sección analizada.

Los estudios se ocupan de determinar de manera eficaz y precisa la carga de agotamiento de la sección analizada si bien, no se trata de manera extensiva en la literatura especializada la búsqueda mediante técnicas sencillas del plano de respuesta en equilibrio para estados de sollicitación alejados del agotamiento.

Así mismo los modelos actuales de cálculo emplean un aparato matemático de elevada complejidad que los hacen inoperativos para su uso habitual en el diseño de estructuras de hormigón armado o pretensado. Por estos motivos, los modelos numéricos más recientes quedan fuera del alcance de investigación de esta tesis que busca obtener una modelo de cálculo de moderada dificultad y suficiente precisión y operatividad.

⁶⁷ P.F. Miguel, J.L. Bonet y M.A. Fernández. “Integración de tensiones en secciones de hormigón sometidas a flexocompresión esviada”, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, Vol. 16, Nº 2, pp. 209-225. (2000).

⁶⁸ Barros M. H. F. M., “Closed form solution of optimal design of rectangular reinforced concrete sections”, Engineering Computations; 2004; 21, 7/8 ABI/INFORM Collection, pag. 761, (March 2004).

2.4 Modelos normativos.

Se lleva a cabo una exposición de las hipótesis y de los métodos de dimensionamiento o comprobación de secciones sometidas a solicitaciones de compresión o flexión compuesta esviada. Se han escogido cuatro modelos significativos como muestra de la carencia de soporte normativo en estrategias numéricas o formulaciones con las que poder abordar este tipo de análisis. En general, los modelos expuestos se limitan a establecer las bases sobre las que deben de diseñarse dejando abierto el problema.

Los modelos normativos expuestos coinciden en establecer como cierta la hipótesis de Bernouilli, lo cual permite establecer una correlación lineal entre la profundidad de cada fibra en la sección y su deformación longitudinal mediante la curvatura que adopta en equilibrio.

Así mismo, los modelos normativos analizados⁶⁹ describen el comportamiento mecánico de los materiales (hormigón y acero), sobre los que se sustentan las hipótesis de cada uno de ellos. Y coincidirán en todos los casos en dar por cierta el modelo de Withney, lo cual simplifica el problema desde un punto de vista numérico.

⁶⁹ En el cuerpo normativo de la ACI-318 no se incluye una curva tensión-deformación que describa el comportamiento mecánico del hormigón, quedando fijado únicamente la deformación de agotamiento en el 3 ‰).

Manual CEB/FIP on Bending and Compression 1981



Emil Grasser es el responsable de la publicación del documento “Manual CEB/FIP on Bending and Compression”, Bulletin D’Information nº141, Construction Press, 1981⁷⁰. No se trata de un código regulador que haya estado vigente en ningún estado si bien, se trata de un documento que establece las bases de diseño sobre las que se sustentan los códigos normativos europeos.

En el documento se incluye un diagrama que cubre todos los planos de deformación posibles de agotamiento de una sección de manera continua (figura 2.61), desde una situación de tracción pura hasta la compresión simple. Y para cada una de estas situaciones límite fija la deformación de agotamiento de hormigón y acero compatible con los modelos constitutivos que describe.

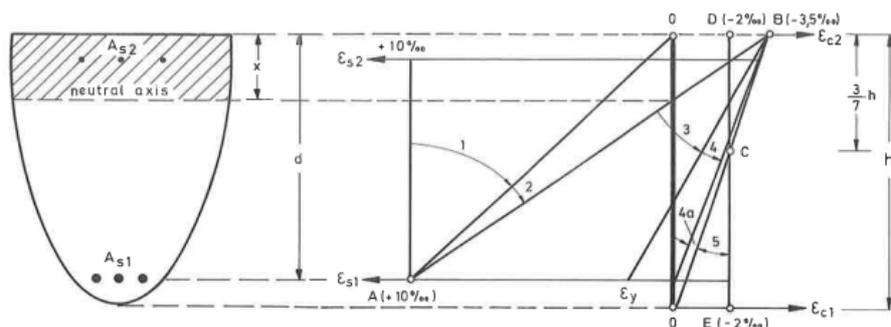


Figura 2.61. Planos posibles de agotamiento de una sección establecidos por el Manual CEB/FIP on Bending and Compression”, Bulletin D’Information nº141, Construction Press, 1981

Emplea un modelo constitutivo parabólico para el hormigón, aunque permite la utilización de un bloque comprimido de tensión constante y profundidad reducida⁷¹ para determinar la magnitud y la posición de la resultante en la sección.

Luego de haber establecido las bases con las que poder llevar a cabo la integración de las tensiones en la sección transversal y poder diseñar una sección de manera general en compresión

⁷⁰ A. G. Meseguer, P.J. Montoya, W. Moosecker, F. Morán, J. Perchat, G. Thielen son coautores del documento coordinado por Grasser.

⁷¹ Hipótesis de Withney.

o flexión compuesta esviada, el *Manual CEB/FIP on Bending and Compression* incluye una colección de diagramas de interacción adimensionales que resuelven el salto que supone abordar el problema de manera numérica. Los ábacos resuelven secciones rectangulares con distintas distribución de armadura (esquinas, caras opuestas y contorno). Así mismo, estos diagramas están planteados para diversos niveles de cuantías, axiles, y calidad de los materiales, y esto permite inferir linealmente la cuantía de armadura para la sección particular de diseño.

Para secciones cuya configuración geométrica no se corresponda con una de las formas resueltas en los ábacos propuestos, el *Manual CEB/FIP on Bending and Compression* aborda el análisis teórico de la resolución del análisis de un axil actuando con excentricidades según los dos ejes principales de inercia.

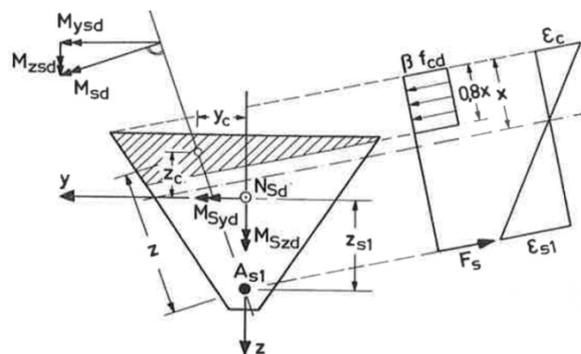


Figura 2.62. Cargas exterior y distribución estimada interna de deformaciones y tensiones para una sección de geometría y armadura cualquiera. *Manual CEB/FIP on Bending and Compression*, Bulletin D'Information n°141, Construction Press, 1981

La cuestión puede abordarse de la siguiente manera:

1. Toma por válida la hipótesis de considerar que el eje neutro forma un ángulo recto con la dirección del vector M exterior, y postula que existe un estado de tensiones internas en la sección, en el que los centros de gravedad del bloque comprimido y de la resultante en tracción de las armaduras se sitúan sobre una línea que forma igualmente ángulo recto con la fibra neutra.

CAPÍTULO 2

2. Postular la profundidad del bloque comprimido.
3. Determinar la resultante del bloque dando por válida la hipótesis de Whitney.
4. De manera iterativa se ajusta la profundidad del eje neutro.

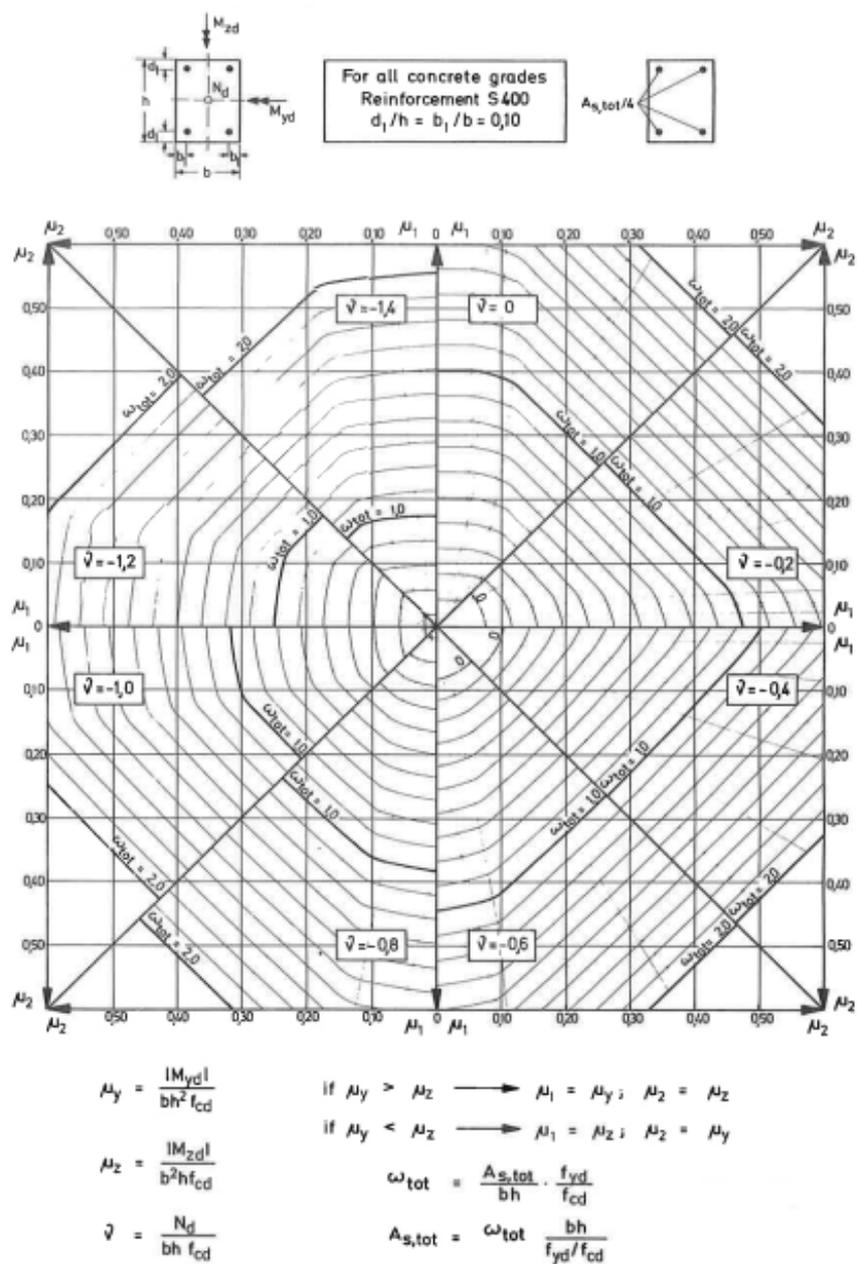
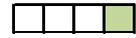


Figura 2.63. Diagrama adimensional de interacción para una sección rectangular. Manual CEB/FIP on Bending and Compression”, Bulletin D’Information n°141, Construction Press, 1981.

Model Code 90

El Model Code⁷² establece un diagrama continuo de planos de deformación de agotamiento de la sección. Para ello, se fijan dos puntos sobre los que rotan todos los planos posibles de agotamiento de la sección. En la figura 2.64 las secciones agotadas por flexión simple o compuesta lo harán con un plano de agotamiento que pase por el punto A. Para situaciones en las que se alcance el agotamiento y la sección esté completamente en compresión, el plano de rotura pasará por el punto B.

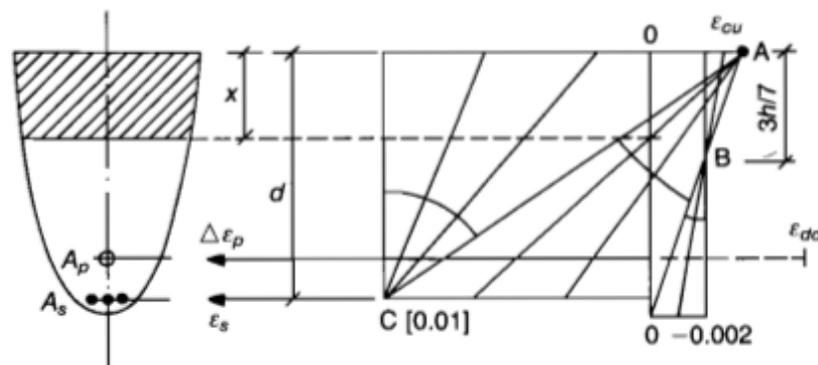


Figura 2.64. Planos posibles de agotamiento de una sección establecidos por el Codel Mode 90.CEB-FIP Model Code, Comité Euro-International du Beton, (1990).

Para secciones en las que se empleen aceros con diferentes modelos constitutivos, o secciones en las que se distribuyan armaduras en las caras laterales, el Model Code establece un punto de agotamiento C, coincidente con el agotamiento de la sección por deformación excesiva en el acero (10‰).

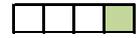
El Model Code permite el empleo de dos modelos constitutivos de hormigón simplificados frente a la curva teórica de su ecuación constitutiva. Así, es posible emplear un modelo parábola-rectángulo, o un diagrama rectangular si se trata de secciones no completamente comprimidas, lo que reduce la complejidad del problema de manera significativa.

⁷² CEB-FIP Model Code, Comité Euro-International du Beton, (1990).

CAPÍTULO 2

El Model Code expone las relación existente en una sección entra el momento interno movilizado y la curvatura que experimenta para un nivel de axil determinado, y lo expresa en diagramas momento-curvatura para situaciones de flexión simple o compuesta. Sin embargo el espíritu de este nivel de análisis es tomar en consideración efectos de retracción y temperatura y no establecer una estrategia numérica con la que abordar el problema de dimensionado o comprobación de secciones de manera habitual para estados de compresión o flexión compuesta esviada.

Eurocódigo 2



El Eurocódigo 2⁷³ comparte con el Model Code el tratamiento de determinar de manera continua los posibles planos de agotamiento de la sección, (figura 2.65), y de la misma manera establece tres puntos característicos por los que pasan todos los planos de fallo de la sección.

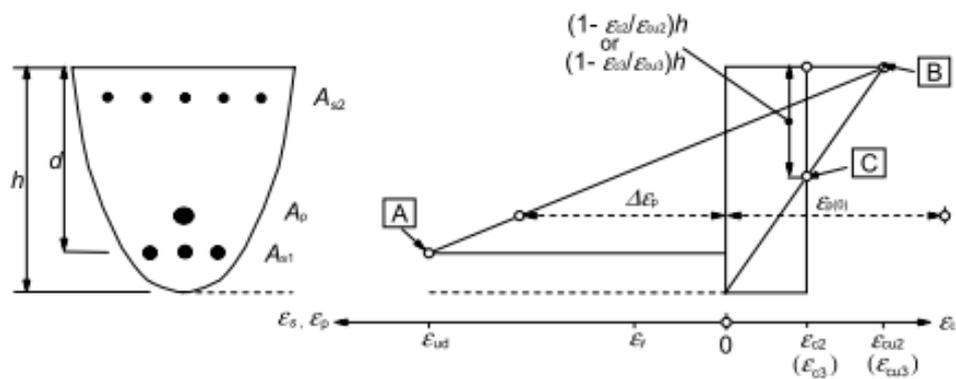


Figura 2.65. Planos posibles de agotamiento de una sección establecidos por el Eurocódigo 2. Comité Europeo de Normalización: "Eurocódigo 2, Proyecto de Estructuras-de Hormigón", AENOR (1992).

Comparte con el Model Code la posibilidad de emplear modelos constitutivos simplificados para el hormigón (parábola-rectángulo, o un bloque constante de profundidad reducido en función de la calidad del hormigón y su carga última de agotamiento).

En el análisis de soportes esbeltos sometidos a compresión y dos excentricidades según las dos direcciones principales de inercia de la sección transversal, el Eurocódigo 2 recoge una formulación similar a la propuesta en el método B por Bresler⁷⁴, y para la que es definido el valor del exponente

$$\left(\frac{M_x}{M_{x0}}\right)^\alpha + \left(\frac{M_y}{M_{y0}}\right)^\alpha = 1.0 \quad [2.60]$$

⁷³ Comité Europeo de Normalización: "Eurocódigo 2, Proyecto de Estructuras-de Hormigón", AENOR (1992).

⁷⁴ Boris Bresler, "Design Criteria for Reinforced Columns under Axial and Biaxial Bending", ACI Journal, Proceedings, 57, 481-490. Disc., 1621-1638, (November 1960).

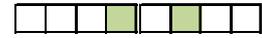
CAPÍTULO 2

α Toma valor 2 para secciones transversales circulares o elípticas y para secciones cuadradas o rectangulares, es función del nivel de axil que solicita la sección, según la tabla 2.3:

P/P_0	0.10	0.70	1.00
α	1.00	1.50	2.00

Tabla 2.3. Valores de α para análisis de soportes con axil y dos excentricidades en el modelo propuesto por el Eurocódigo 2.

EHE-08



La instrucción de hormigón estructural vigente ⁷⁵ presenta, al igual que hacen el Model Code y el Eurocódigo 2, un diagrama de planos de agotamiento para secciones sometidas a tensiones normales que agotan la sección. Cada posible plano de agotamiento queda clasificado en un dominio de rotura y cada dominio presenta un punto de agotamiento característico (pivote), sobre el que rotan todos los planos de fallo que pertenecen a este dominio (figura 2.66).

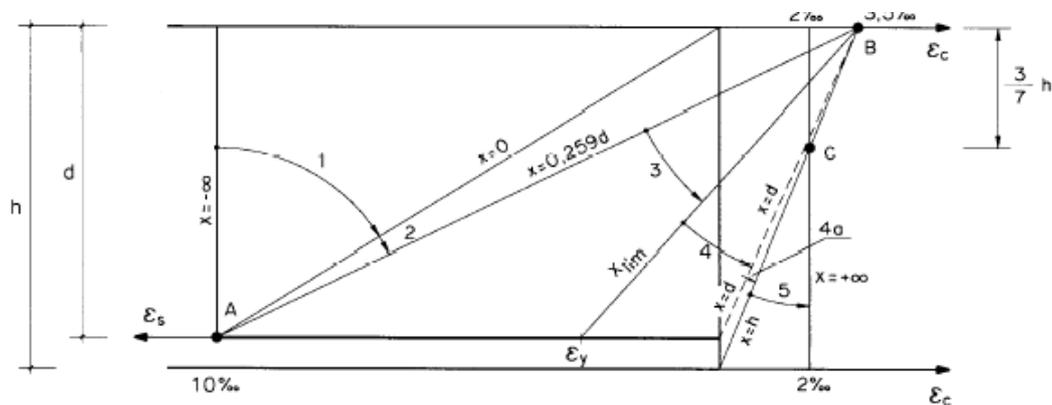


Figura 2.66. Planos posibles de agotamiento de una sección establecidos por la EHE-08. Comisión Permanente del Hormigón: "Instrucción de Hormigón Estructural. EHE-08", Ministerio de Fomento, (2008).

El anejo 7 de la instrucción, "Cálculo simplificado de secciones en Estado Límite de Agotamiento frente a sollicitaciones normales", presentan expresiones simplificadas para la comprobación o dimensionamiento de secciones rectangulares o en T sometidas a flexión simple o compuesta.

Este anejo propone un método simplificado de reducción a flexión compuesta recta en situaciones de flexión esviada simple o compuesta para secciones rectangulares con armaduras iguales en las cuatro esquinas o armaduras iguales en las cuatro caras.

⁷⁵ Comisión Permanente del Hormigón: "Instrucción de Hormigón Estructural. EHE-08", Ministerio de Fomento, (2008).

CAPÍTULO 2

La excentricidad ficticia equivalente toma el siguiente valor:

$$e'_y = e_y + \beta_{EHE} e_x \frac{h}{b} \quad [2.61]$$

Dónde:

$$\frac{e_y}{e_x} \geq \frac{h}{b} \quad [2.62]$$

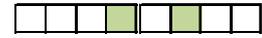
Y β toma los siguientes valores:

$\vartheta = \frac{P}{bh f_{cd}}$	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	≥ 0.80
β_{EHE}	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50

Tabla 2.4. Valores de β_{EHE} para análisis de soportes con axil y dos excentricidades en el modelo propuesto por la Instrucción de hormigón estructural EHE.

El valor que tome β_{EHE} debe corregirse para cuantías mecánicas de armadura elevadas (valores superiores a 0.60) aumentando su valor en 0.10, y para cuantías mecánicas de armadura reducidas (valores inferiores a 0.20) disminuyéndolo en 0.10.

La instrucción EHE-08, recoge en su Anejo 7 “Análisis en situación de servicio de secciones y elementos estructurales sometidos a flexión simple” una serie de formulaciones aproximadas con las que poder determinar la profundidad de la fibra neutra y la inercia fisurada en secciones rectangulares y secciones en T, sometidas a flexión simple. El espíritu de este Anejo es establecer el comienzo del análisis de deformación y fisuración de una viga o una losa con cargas aplicadas únicamente según su directriz. Quedan fuera de su alcance elementos con cargas axiales, o solicitados con esfuerzos flectores según los dos ejes principales de inercia de su sección transversal.

ACI-318

El modelo normativo de la ACI-318⁷⁶ contempla que, en todas las situaciones de secciones solicitadas frente a tensiones normales el agotamiento de la sección se alcanza cuando se logra una deformación correspondiente al 3‰ en la fibra de máxima compresión, lo que coincide con el agotamiento del hormigón. Esto implica indirectamente de dotar de ductilidad ilimitada el acero pues, no será posible alcanzar el alargamiento correspondiente a su rotura.

La ACI-318 no establece una modelo constitutivo para el hormigón, sino que permite la utilización de cualquier curva tensión-deformación contrastada que conduzca a situaciones de seguridad, y abunda en la posibilidad de la utilización de un bloque de tensiones de compresión constante cuya profundidad determina en función de la carga de agotamiento del hormigón.

En los comentarios de este código, se expone el método de las cargas recíprocas, ya expuesto en esta tesis, y publicado por Bresler⁷⁷ (método A) para el dimensionado de secciones sometidas a compresión o flexión compuesta esviada:

$$\frac{1}{P_i} = \frac{1}{P_x} + \frac{1}{P_y} - \frac{1}{P_0} \quad [2.63]$$

2.5 Análisis comparativo de los modelos analizados.

La labor de realizar una comparación de los modelos expuestos resulta compleja pues no comparten las mismas hipótesis de cálculo. Para poder llevar a cabo de manera exhaustiva esta labor habría que establecer para ellos las mismas hipótesis de cálculo. Todos los modelos deberían compartir la misma descripción en las ecuaciones constitutivas de los materiales, y habría que imponer un criterio único en cuanto a la consideración de la reducción de la tensión

⁷⁶ ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-14)" American Concrete Institute, (2014).

⁷⁷ Boris Bresler, "Design Criteria for Reinforced Columns under Axial and Biaxial Bending", ACI Journal, Proceedings, 57, 481-490. Disc., 1621-1638, (November 1960).

CAPÍTULO 2

de agotamiento del hormigón en compresión esto es, establecer un criterio único sobre el valor en el que se alcanza el agotamiento ($0.85f_c$ o f_c) y esto, por la naturaleza misma de algunos modelos no es posible. Como se ha expuesto, hay autores que parten de la hipótesis de Whitney en cuando a la consideración de un bloque de tensiones en compresión de valor constante y profundidad reducida, al tiempo que otros autores, llevan a cabo la integral del perfil real de la tensión en el hormigón por diversas técnicas.

Por este motivo, la evaluación comparativa que se lleva a cabo tiene un espíritu cualitativo y no pretende determinar con precisión los desvíos entre los modelos. El objetivo del análisis es en definitiva poder observar tendencias de comportamiento de los modelos para distintos valores de cuantías y axiles, y extraer conclusiones sobre la eficacia y estabilidad de los mismos.

Para llevar a cabo este análisis se ha diseñado una campaña de ensayos numéricos de una sección cuadrada y cuantía de armadura creciente distribuida de manera homogénea en las cuatro caras, solicitada a compresión por un axil excéntrico de valor igualmente creciente actuando en el plano de la diagonal de la sección. Se evalúa así mismo el comportamiento de cada modelo cuando el axil es el balanceado, pues como ya se ha expuesto, cabe esperar que los mayores errores cometidos se encuentren en la proximidad de este valor de compresión.

En cada cuantía y axil evaluado, para cada modelo se ha medido la diferencia entre la excentricidad de agotamiento que ha arrojado frente al valor de excentricidad última que se obtiene mediante la aplicación del modelo de Farah y Huggins.

Es preciso poner de manifiesto que, para cada modelo se ha llevado hasta la obtención de la solución final con todas las hipótesis establecidas en el mismo. Así, cuando el objetivo del modelo analizado es determinar el momento uniaxial equivalente y llevar a cabo el dimensionamiento de la sección en compresión o flexión compuesta recta, se ha construido un diagrama de interacción $P - M_x$ igualmente con las mismas bases de cálculo para el último paso necesario del cálculo.

Se ha optado por analizar una sección con las siguientes propiedades geométricas y mecánicas:

$$r = 0.1h$$

$$f'_c = 30.00 \text{ MPa}$$

$$f_y = 400.00 \text{ MPa.}$$

Los resultados se muestran de manera gráfica (figuras 2.67, 2.68, 2.69, 2.70, 2.71) y numérica (tabla 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9).

CAPÍTULO 2

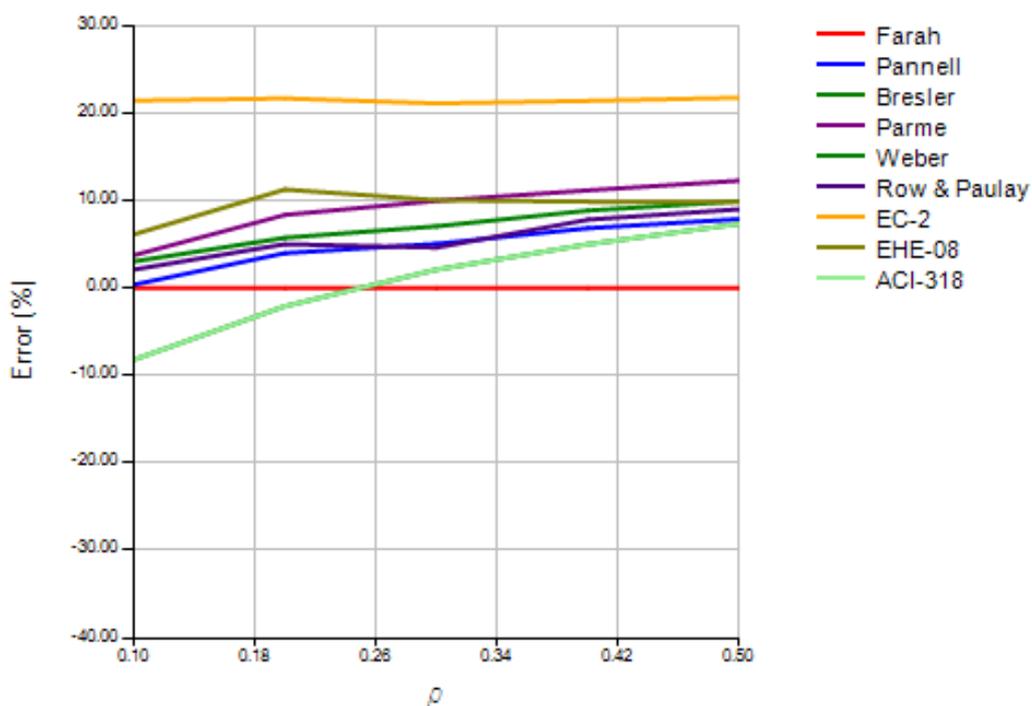


Figura 2.67. Medida del error en % respecto al modelo de Farah y Huggins para los modelos analizados frente a cuantía de armadura creciente y un axil reducido $\nu = 0.20$. Autor.

Modelo	$\rho=0.10$	$\rho=0.20$	$\rho=0.30$	$\rho=0.40$	$\rho=0.50$
Pannell	0.39	4.00	5.06	6.84	7.89
Bresler	-8.19	-2.07	2.11	5.01	7.35
Parme	3.75	8.37	9.98	11.18	12.28
Weber	3.04	5.75	7.06	8.86	9.93
Row & Paulay	2.11	5.02	4.63	7.82	9.01
Eurocódigo 2	21.44	21.68	21.11	21.40	21.76
EHE-08	6.13	11.27	10.05	9.88	9.85
ACI-318	-8.19	-2.07	2.11	5.01	7.35

Tabla 2.5. Medida del error en % respecto al modelo de Farah y Huggins para los modelos analizados frente a cuantía de armadura creciente y un axil reducido $\vartheta = 0.20$.

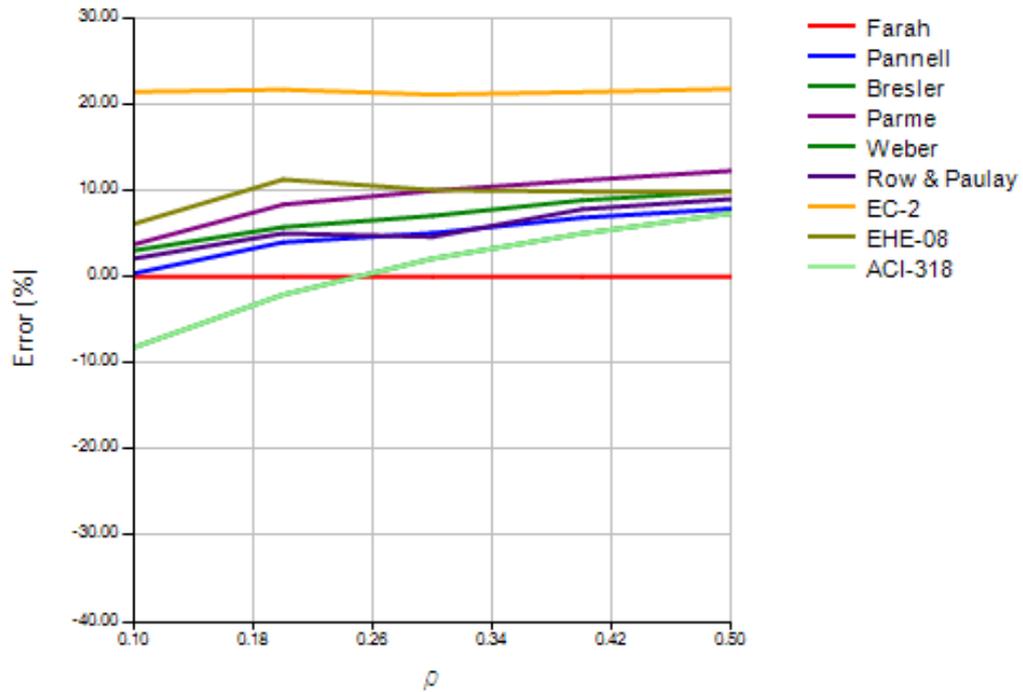


Figura 2.68. Medida del error en % respecto al modelo de Farah y Huggins para los modelos analizados frente a cuantía de armadura creciente y un axil reducido $\vartheta = 0.40$. Autor.

Modelo	$\rho=0.10$	$\rho=0.20$	$\rho=0.30$	$\rho=0.40$	$\rho=0.50$
Pannell	1.51	4.18	7.15	7.87	8.91
Bresler	-6.94	-1.11	3.46	6.68	9.37
Parme	-0.27	4.58	8.27	9.80	11.45
Weber	4.95	8.22	10.20	11.29	12.66
Row & Paulay	4.17	8.22	11.33	12.28	14.42
Eurocódigo 2	8.13	9.53	11.30	12.44	13.49
EHE-08	10.02	15.10	15.92	16.27	16.60
ACI-318	-6.94	-1.11	3.46	6.68	9.37

Tabla 2.6. Medida del error en % respecto al modelo de Farah y Huggins para los modelos analizados frente a cuantía de armadura creciente y un axil reducido $\vartheta = 0.40$.

CAPÍTULO 2

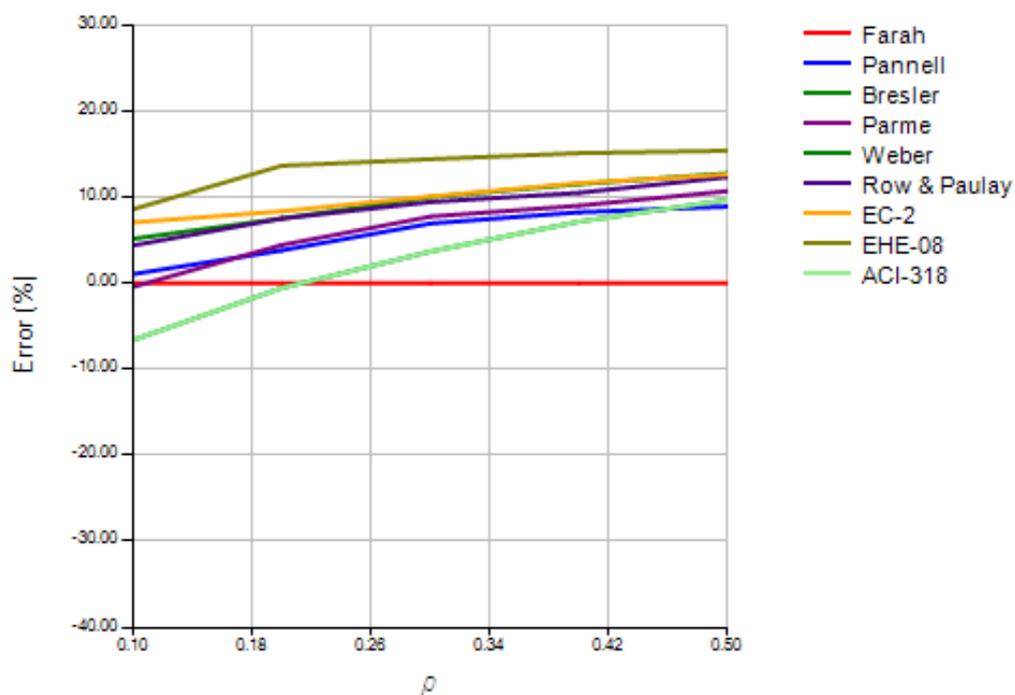


Figura 2.69. Medida del error en % respecto al modelo de Farah y Huggins para los modelos analizados frente a cuantía de armadura creciente y axil balanceado $\vartheta = 0.42$. Autor

Modelo	$\rho=0.10$	$\rho=0.20$	$\rho=0.30$	$\rho=0.40$	$\rho=0.50$
Pannell	1.06	3.81	6.93	8.25	8.90
Bresler	-6.60	-0.56	3.68	7.16	9.68
Parme	-0.42	4.44	7.74	9.01	10.70
Weber	5.16	7.51	9.99	11.51	12.77
Row & Paulay	4.39	7.51	9.43	10.51	12.32
Eurocódigo 2	7.06	8.35	10.08	11.62	12.64
EHE-08	8.60	13.65	14.41	15.11	15.39
ACI-318	-6.60	-0.56	3.68	7.16	9.68

Tabla 2.7. Medida del error en % respecto al modelo de Farah y Huggins para los modelos analizados frente a cuantía de armadura creciente y axil balanceado $\vartheta = 0.42$.

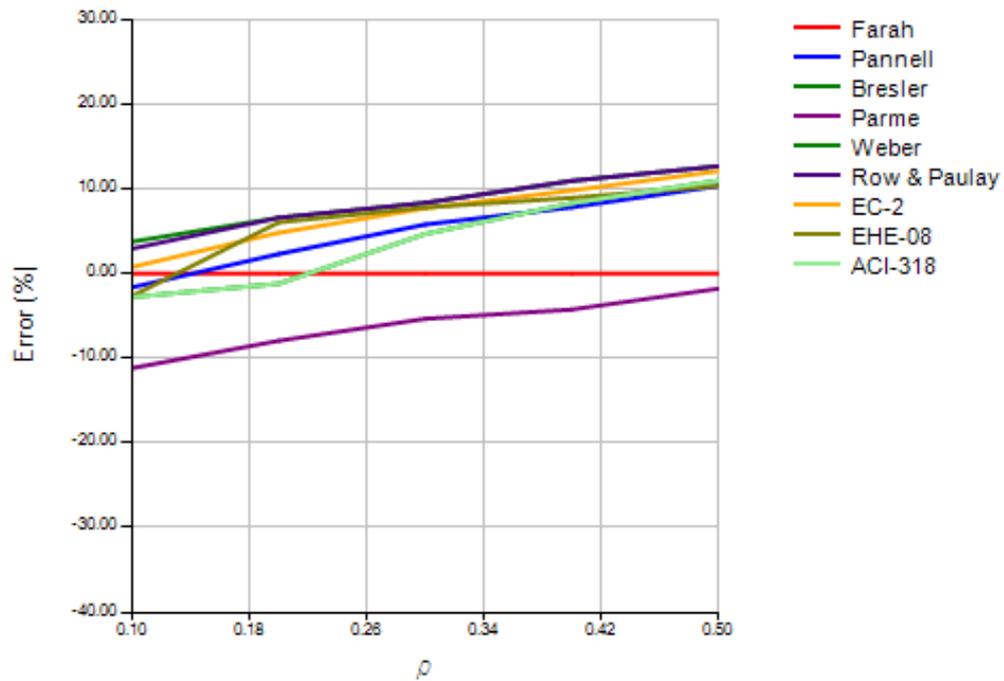


Figura 2.70. Medida del error en % respecto al modelo de Farah y Huggins para los modelos analizados frente a cuantía de armadura creciente y un axil reducido $\vartheta = 0.60$. Autor.

Modelo	$\rho=0.10$	$\rho=0.20$	$\rho=0.30$	$\rho=0.40$	$\rho=0.50$
Pannell	-1.62	2.31	5.80	7.83	10.34
Bresler	-2.77	-1.19	4.69	8.32	10.99
Parme	-11.16	-7.93	-5.34	-4.24	-1.78
Weber	3.77	6.59	9.54	11.49	13.14
Row & Paulay	2.94	6.59	8.35	10.96	12.68
Eurocódigo 2	0.77	4.82	7.71	9.82	12.10
EHE-08	-2.65	6.05	7.81	8.94	10.35
ACI-318	-2.77	-1.19	4.69	8.32	10.99

Tabla 2.8. Medida del error en % respecto al modelo de Farah y Huggins para los modelos analizados frente a cuantía de armadura creciente y un axil reducido $\vartheta = 0.60$.

CAPÍTULO 2

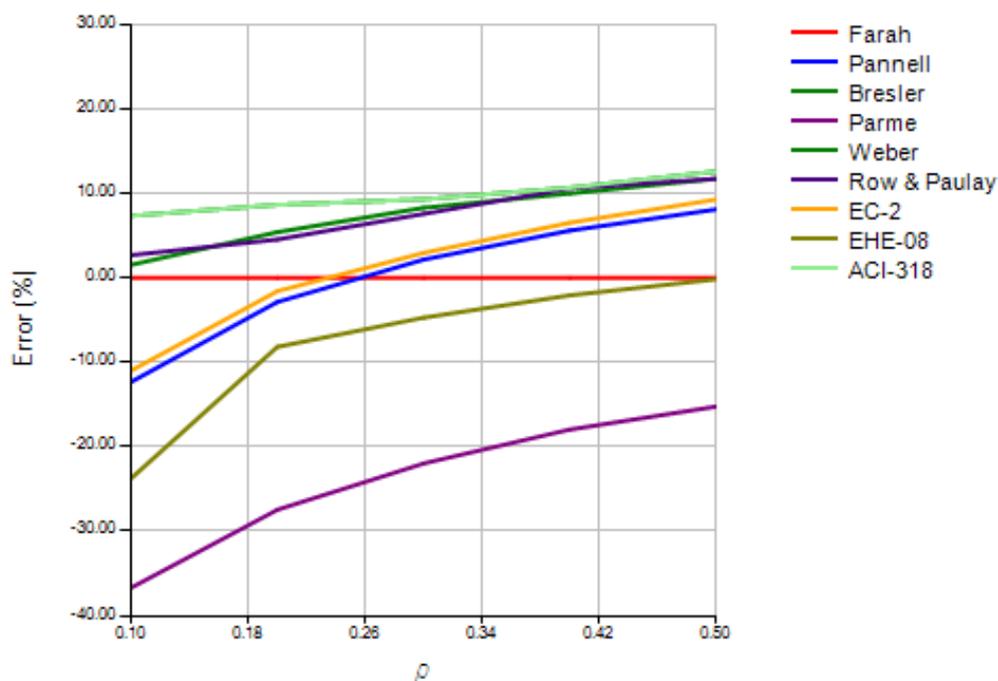


Figura 2.71. Medida del error en % respecto al modelo de Farah y Huggins para los modelos analizados frente a cuantía de armadura creciente y un axil reducido $\vartheta = 0.80$. Autor.

Modelo	$\rho=0.10$	$\rho=0.20$	$\rho=0.30$	$\rho=0.40$	$\rho=0.50$
Pannell	-12.33	-2.68	2.16	5.60	8.10
Bresler	7.35	8.65	9.30	10.67	12.60
Parme	-36.69	-27.45	-21.97	-17.95	-15.23
Weber	1.54	5.41	8.29	9.99	11.73
Row & Paulay	2.69	4.54	7.57	10.59	11.73
Eurocódigo 2	-10.99	-1.58	2.96	6.53	9.28
EHE-08	-23.75	-8.17	-4.71	-2.07	-0.17
ACI-318	7.35	8.65	9.30	10.67	12.60

Tabla 2.9. Medida del error en % respecto al modelo de Farah y Huggins para los modelos analizados frente a cuantía de armadura creciente y un axil reducido $\vartheta = 0.80$.

Atendiendo a los resultados obtenidos en el análisis comparativo llevado a cabo, es posible extraer las siguientes conclusiones:

- Se constata que los desvíos máximos obtenidos del lado de la seguridad, se han encontrado para axiles próximos al balanceado.
- Para las situaciones analizadas, el modelo de Pannell, es el que se ha comportado de una manera más robusta, arrojando el menor error en comparación con el modelo de Farah y Huggins.
- El modelo propuesto en el Anejo 7 de la instrucción EHE-08, conduce a situaciones inseguras para un axil elevado y todas las cuantías analizadas, si bien, este error se ve reducido a medida que aumenta el área de acero dispuesto en la sección. Este error puede deberse a que, el valor máximo de tensión posible para el hormigón en el modelo de Farah y Huggins es 30 MPa, si bien, y por la naturaleza hiperbólica del modelo constitutivo, la tensión a la que se sitúa el hormigón en la zona de deformación máxima se reduce hasta $0.85f_c$. Para los ensayos llevados a cabo, la tensión máxima admitida para el bloque comprimido en el modelo EHE-08 es 30 MPa, y se logra para la deformación máxima unitaria permitida.
- El modelo propuesto en el Eurocódigo 2 ha resultado ser el que arroja soluciones más conservadoras en todos los rangos de axiles y cuantías analizadas, habiéndose leído desvíos del 20 % frente al modelo de referencia.
- El método A de Bresler, (adoptado por la ACI-318 en sus comentarios), ha resultado ser el método que conduce a un rango de soluciones más adecuadas en comparación con la inmediatez de su aplicación. Su utilización requiere la determinación de las capacidades a flexión compuesta recta de la sección para el axil de diseño, así como la capacidad de agotamiento de la sección en compresión.
- La no concordancia entre los modelos de Weber y Row y Paulay frente al modelo de referencia se justifican por la diferencia entre los modelos constitutivos. La propuesta de estos autores, determinan la capacidad de agotamiento de la sección para la dirección

CAPÍTULO 2

analizada en esta tesis (45°), de manera que, cabría esperar como ya se ha dicho, y en coincidencia absoluta de hipótesis de cálculo, resultados idénticos.

2.6 Softwares comerciales.

FAGUS

CUBUS software España s.l. distribuye el analizador de secciones FAGUS en el marco de su paquete completo de aplicaciones de análisis estructural. FAGUS permite llevar a cabo para cualquier tipo de sección las siguientes tareas:

- Determinación de la carga última para una solicitación dada (N_x , M_y , M_z , T_x , V_y , V_z), manteniendo constantes hasta cinco componentes.
- Diagrama momento-curvatura (M_y o M_z) para una serie de esfuerzos normales dados.
- Diagrama momento-rigidez (M_y o M_z) para una serie de esfuerzos normales dados.
- Comprobación de tensiones para un plano de deformación dado.
- Comprobación de tensiones mediante introducción paso a paso de las solicitaciones o de las deformaciones sobre las secciones parciales, que pueden a su vez activarse o desactivarse en cada paso.
- Comprobación de las tensiones para una solicitación dada (N_x , M_y , M_z , T_x , V_y , V_z), determinando el plano de equilibrio de respuesta de la sección, calculando el giro de la traza del mismo (rumbo del eje neutro).
- Diagrama general de interacción de dos componentes (a elegir entre M_y , M_z y N_x) manteniendo el tercero con un valor determinado.
- Diagrama de interacción N- M_y .

FAGUS determina las coordenadas del plano de equilibrio de una sección cualquiera para un estado de solicitación exterior arbitrario. No aporta información sobre el algoritmo que subyace bajo su modelo de análisis.

CYPECAD

CYPECAD desarrollado por cype ingenieros, no emplea un método directo de determinación de las cuantías necesarias bajo un estado de sollicitación de compresión o flexión compuesta esviada, si no que lleva a cabo un proceso iterativo de comprobación que consiste en que para cada entrada de una lista de posibles combinaciones de soluciones, se crea la envolvente de capacidades o agotamiento de la sección, es decir, cada punto de esa superficie de la envolvente está representado por un pseudovector cuya componente son el Axil, Momento X, Momento Y. Expresado en otros términos cype determina para un conjunto de secciones transversales con un diseño de armadura dado, sus diagramas de interacción en agotamiento y una vez definida las superficies de todas estas secciones, verifica que las sollicitaciones correspondientes al esfuerzo pésimo actuante queda dentro de una de dichas superficies de agotamiento (diagramas de interacción).

No es posible mediante este software determinar la respuesta de una sección bajo condiciones de no agotamiento, así como llevar a cabo análisis de secciones de geometrías no adscritas a las formas canónicas (rectangular, circular).

BIAX

Este software permite llevar a cabo análisis de secciones de hormigón armado sometidas a un estado arbitrario de compresión y flexión biaxial en estado de agotamiento. Ha sido desarrollado por Abdelhamind Charif, profesor de la Universidad King Saudi.

Permite determinar diagramas de interacción en agotamiento en compresión o flexión esviada y determinar la relación de momento-curvatura-rigidez para un momento creciente y un rumbo constante del eje neutro. De esta manera es posible obtener un mapa de deformaciones y tensiones asumiendo como cierta la hipótesis de que el rumbo del eje neutro se encuentra en la dirección perpendicular a la dirección del vector momento, luego este software no permite determinar un mapa completo de tensiones en la sección transversal en estados de compresión o flexión esviada en secciones genéricas y estados de no agotamiento puesto que para llevar a cabo

CAPÍTULO 2

esta tarea, es preciso determinar el giro de la traza del plano de equilibrio para las acciones que solicitan la sección.

SAP2000

SAP 2000 es un software completo de diseño y cálculo estructural distribuido en España por la compañía CSI Computer & Structures Spain. SAP 2000 contiene un módulo ideado para la definición de secciones de hormigón armado con el que poder definir cualquier tipo de sección transversal.

SAP 2000 permite determinar diagramas en agotamiento en flexión compuesta recta y esviada, con los que es posible medir la seguridad de la sección frente a un estado de sollicitación exterior cualquiera. Asimismo permite determinar diagramas momento-curvatura con los que poder analizar en condiciones de servicio cualquier sección para un rumbo fijo de eje neutro previamente establecido, esto es, el usuario impone el giro para el cual SAP 2000 halla el diagrama momento-curvatura de la sección.

No obstante, SAP 2000 no determina para unas condiciones de sollicitación exteriores cualesquiera el rumbo que adopta el eje neutro para alcanzar las condiciones de equilibrio, lo cual implica que no es posible conocer las coordenadas del plano de respuesta de la sección en condiciones de no agotamiento.

STAAD PRO

Bentley Systems Inc. produce y comercializa el software Staad.Pro. Se trata de un programa informático ideado para llevar a cabo análisis de estructuras mediante barras y elementos finitos mediante la aplicación diversas normativas. En relación a la verificación de soportes de hormigón armado sometidos a estados de flexión compuesta esviada, Staad.Pro postula distribuciones de armadura homogéneas en el perímetro de los tres tipos de secciones que es capaz de abordar: cuadradas, rectangulares y circulares, lo cual implica que el número total de barras de armado empleadas es múltiplo de 4.

Staad.Pro emplea el modelo de las líneas de contorno de Bresler⁷⁸, según la expresión [2.13], ya expuesto en esta tesis.

$$\left(\frac{M_x}{M_{x0}}\right)^\alpha + \left(\frac{M_y}{M_{y0}}\right)^\beta = 1.0 \quad [2.13]$$

Donde $\alpha = 1.24$. En el caso particular de diseño de secciones sometidas a compresión o flexión compuesta recta, $\alpha = 1.00$.

Staad.Pro no contempla el análisis de secciones en condiciones de no agotamiento. No es posible igualmente abordar secciones con geometrías no canónicas (rectangular, circular).

PRONTUARIO INFORMÁTICO DEL HORMIGÓN ESTRUCTURAL EHE

Hugo Corres Peiretti, Alejandro Pérez Caldentey, José Luís Martínez Martínez, y Juan Carlos López Agüi, desarrollan por encargo de IECA⁷⁹ un software de distribución gratuito de análisis de secciones de hormigón armado y pretensado. Se trata de una aplicación cuyo objetivo es la difusión del conocimiento del hormigón estructural. Según sus propios autores, este software tiene dos objetivos fundamentales:

- Sustituir y ampliar la colección de diagramas empleados de manera tradicional en el análisis de secciones de hormigón armado.
- Servir de ayuda a los alumnos de las Escuelas Técnicas para el aprendizaje del comportamiento y evaluación del hormigón estructural.

Su alcance en el análisis de secciones de geometrías y distribución de armadura genéricas, sometidas a estados de compresión o flexión compuesta esviada se limita a la determinación de diagramas de interacción en agotamiento para un nivel de axil constante. Asimismo permite determinar diagramas momento curvatura asumiendo que la pieza está sometida a un estado de

⁷⁸ Bresler, "Design Criteria for Reinforced Columns under Axial and Biaxial Bending", ACI Journal, Proceedings, 57, 481-490. Disc., 1621-1638, (November 1960).

⁷⁹ Instituto Español del Cemento y sus Aplicaciones.

CAPÍTULO 2

flexión simple (según su eje geométrico horizontal), y manteniendo constante el rumbo del eje neutro (perpendicular a la dirección del vector momento) hasta su agotamiento. Así, es posible evaluar una sección desde el punto de vista de su seguridad, comparando los esfuerzos de diseño frente a los de agotamiento, o determinar las coordenadas del plano de equilibrio para un momento exterior cualquiera asumiendo conocido el rumbo de la traza de dicho plano.

Este software no permite determinar un mapa completo de tensiones en la sección transversal en estados de compresión o flexión esviada en secciones genéricas y estados de no agotamiento.

2.7 Marco teórico. Análisis no lineal.

2.7.1 Hipótesis de partida: Análisis en compresión o flexión compuesta recta.

El análisis no lineal de secciones de hormigón armado que poseen un eje de simetría solicitadas por un axil excéntrico según dicho eje presenta la particularidad: para todas las curvaturas posibles de equilibrio y sus resultantes asociadas, la fibra neutra forma un ángulo recto con dicho eje. Por otra parte, si a esta sección se le imponen curvaturas crecientes hasta la curvatura de agotamiento para planos cuya traza discorra según la dirección perpendicular a dicho eje de simetría, será posible determinar los esfuerzos (P, M_x) correspondientes a las deformaciones que se inducen en cada fibra de la sección para dicho plano. Para cada par de valores (χ_n, x_n) existe un único par de esfuerzos (P, M_x) asociados a dicho plano de deformación.

Los valores de los esfuerzos (P, M_x) pueden expresarse como una función de la curvatura de la sección y de la profundidad de la fibra neutra:

$$(P_n, M_{x,n}) = f(\chi_n, x_n) \quad [2.64]$$

Y si son conocidas las ecuaciones constitutivas de hormigón y acero es posible determinar estos esfuerzos mediante la integración de las tensiones en la sección transversal planteando las ecuaciones de equilibrio:

$$P = \int_A \sigma_c dA + \sum_{i=0}^n A_{s,i} \sigma_{s,i} \quad [2.1]$$

$$M_x = \int_A \sigma_c y dA + \sum_{i=0}^n A_{s,i} \sigma_{s,i} y_{s,i} \quad [2.2]$$

La resolución de las ecuaciones [2.1] y [2.2] puede llevarse a cabo mediante las siguientes estrategias:

- Tomando en consideración un bloque de tensión de valor constante y profundidad reducida para la parte comprimida de la sección, tal como Withney postula. Otros autores como Pannell y Parme utilizan esta técnica. Esta hipótesis es suficientemente aproximada⁸⁰ para situaciones de rotura de la sección en las que se asume que el bloque hormigón tiene una tensión de agotamiento en toda su profundidad (figura 2.72).

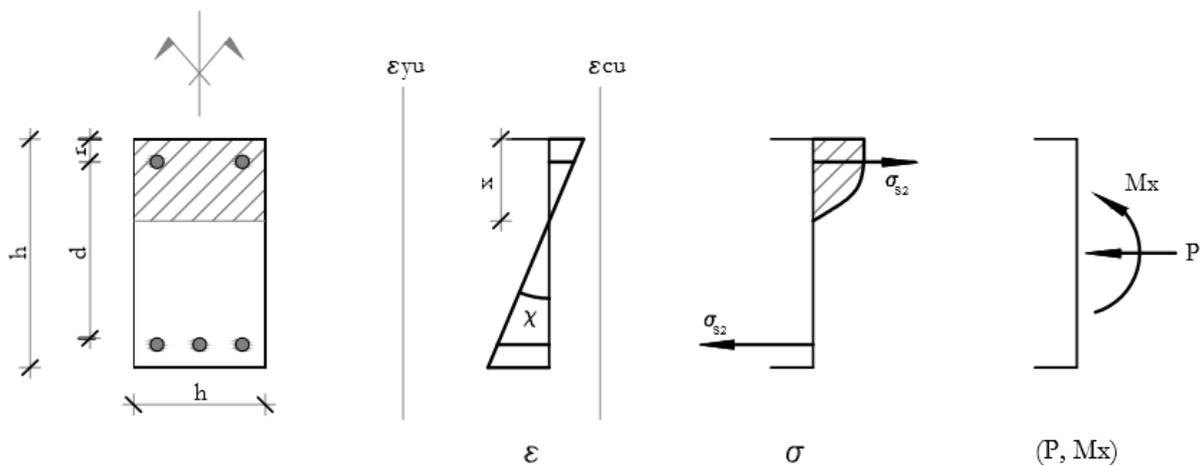


Figura 2.72. Curvatura inferior a la curvatura de agotamiento en una sección con simetría en el eje vertical. Autor.

⁸⁰ Un estudio detallado de la capacidad de una sección frente a solicitaciones normales puede conducir a diferentes valores según el modelo constitutivo que se emplee para caracterizar el hormigón, incluso para iguales valores característicos de resistencia f_c . Este hecho se trata en el anexo II de esta tesis.

CAPÍTULO 2

Partiendo de esta hipótesis, las ecuaciones [2.1] y [2.2], en coherencia con la figura 2.73 pueden expresarse en los siguientes términos:

$$\sum P = 0 \quad [2.65]$$

$$\sum M_x = 0 \quad [2.66]$$

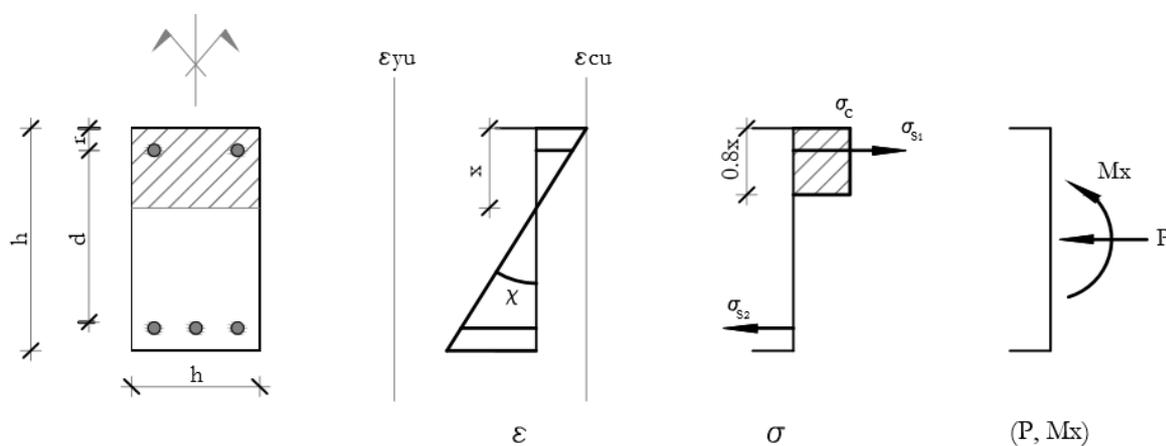


Figura 2.73. Simplificación del bloque comprimido según la hipótesis de Whitney y equilibrio de esfuerzos en una sección con simetría vertical para un axil excéntrico según dicho eje. Autor.

Las ecuaciones [2.65] y [2.66] pueden desarrollarse y llegar al siguiente sistema formado por las expresiones [2.67] y [2.68]:

$$P = 0.80 \cdot b \cdot x \cdot f_c + A_{s1} \cdot \sigma_{s1} + A_{s2} \cdot \sigma_{s2} \quad [2.67]$$

$$M_x = 0.80 \cdot b \cdot x \cdot f_c \cdot \left(\frac{h}{2} - 0.4x\right) + A_{s1} \cdot \sigma_{s1} \cdot \left(\frac{h}{2} - r\right) + A_{s2} \cdot \sigma_{s2} \cdot \left(\frac{h}{2} - r\right) \quad [2.68]$$

- Mediante la división de la sección en elementos de tamaño reducido. Con esta técnica, se otorga al centro de gravedad de cada uno de los elementos el área total del mismo. En la

figura 2.74 se muestra cómo es posible llevar a cabo diversas configuraciones de división de la sección en estos elementos. Así, la figura 2.74 (a) muestra la división en rectángulos llevada a cabo por Warner, en la figura 2.74 (b) puede verse una división que se adecua al contorno de la sección transversal utilizada por Morán, y en la figura 2.74(c) se aprecia la división de la sección transversal en franjas paralelas a la dirección esperada de la fibra neutra⁸¹

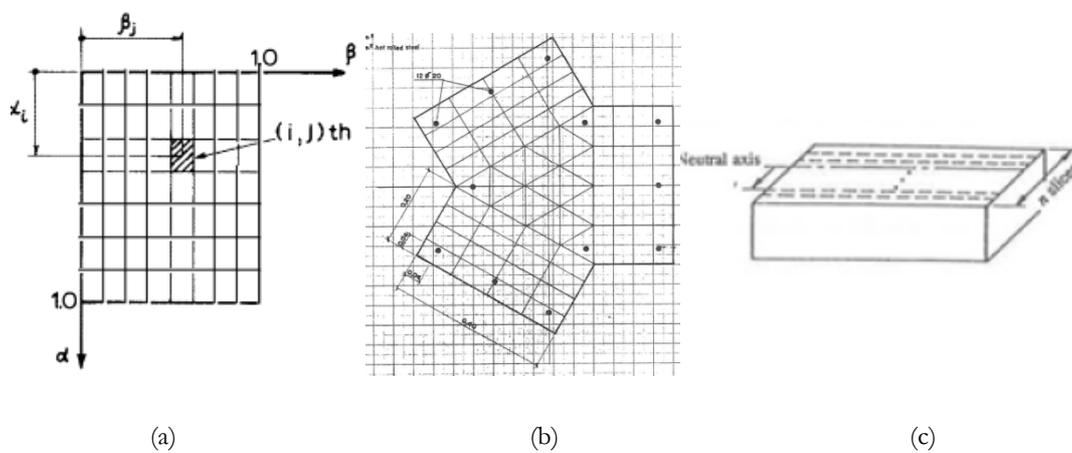


Figura 2.74. División de la sección transversal en elementos discretos para la integración de la tensión normal. (a) R. F. Warner. "Biaxial Moment Thrust Curvature Relation". Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 95, N° ST5, 923-940, (Mayo 1969). (b) Moran Cabré Francisco, "Design of reinforced concrete sections under normal loads and stresses in the ultimate state". CEB Bulletin d'Information N° 83, (Abril 1972). (c) Japan Road Association: Specification for Highway Bridges; Part V-Seismic Design, April 2002.

En este planteamiento las ecuaciones [2.1] y [2.2] pueden plantearse según las ecuaciones [2.69] y [2.70]:

$$P = \sum_{i=0}^m A_{c,i} \cdot \sigma_{c,i} + \sum_{j=0}^n A_{s,j} \cdot \sigma_{s,j} \quad [2.69]$$

⁸¹ Japan Road Association: Specification for Highway Bridges; Part V-Seismic Design, April 2002.

$$M_x = \sum_{i=0}^m A_{c,i} \cdot \sigma_{c,i} \cdot y_{c,i} + \sum_{j=0}^n A_{s,j} \cdot \sigma_{s,j} \cdot y_{s,j} \quad [2.70]$$

- Mediante la integración directa de las ecuaciones [2.1] y [2.2], tal como hace Gurfinkel y Robinson⁸², o Farah y Huggins.

Para cada curvatura inferior a la de agotamiento, existe una profundidad (sólo una) para la fibra neutra en la que se movilizan unos esfuerzos internos que equilibran las acciones de diseño que solicitan la sección. Y para cada una de estas curvaturas, la búsqueda de la profundidad de la fibra neutra (hay que incidir en el hecho de que el rumbo de la misma está fijado ya que es perpendicular al eje de simetría de la sección y a la dirección de la acción del vector momento), puede llevarse a cabo por diferentes procedimientos. Algunas de estos métodos se detallan a continuación.

- Métodos iterativos basados la variación de la profundidad de la fibra neutra en función del axil movilizado. Estos métodos se basan en postular una profundidad arbitraria y determinar los esfuerzos para dicha posición. Si el axil que se logra es inferior al axil deseado, el siguiente ciclo en la búsqueda aumentará la profundidad del bloque comprimido. Nuevamente se compara el valor de axil obtenido para este nuevo plano postulado con el axil exterior y se vuelve a modificar la profundidad del eje neutro. Este procedimiento es posible puesto que existe una relación entre el aumento de la profundidad del eje neutro y del axil movilizado.
- Método de Newton-Rapshon. Procedimiento empleado por Gurfinkel y Robinson, o Farah y Huggins entre otros. La solución se determina por aproximaciones según las derivadas parciales de las funciones que describen los esfuerzos (P, M_x) respecto a la curvatura y la profundidad de la fibra neutra. Para ello es preciso determinar dichas funciones. Expandiendo la ecuación [2.64]:

⁸² Gurfinkel, G., Robinson, A. "Determination of Strain Distribution and Curvature in a Reinforced Concrete Section Subjected to Bending Moment and Longitudinal Load", ACI Journal, Proceedings V. 64, N° 7, pp 398-402, (July 1967).

$$P = f(\chi_n, x_n) \quad [2.71]$$

$$M_x = f(\chi_n, x_n) \quad [2.72]$$

Y el valor de las funciones puede aproximarse por las ecuaciones [2.73] y [2.74]:

$$P = \bar{P} + \frac{\partial P}{\partial \chi_n} \delta \chi_n + \frac{\partial P}{\partial x_n} \delta x_n \quad [2.73]$$

$$M_x = \bar{M}_x + \frac{\partial M_x}{\partial \chi_n} \delta \chi_n + \frac{\partial M_x}{\partial x_n} \delta x_n \quad [2.74]$$

Donde \bar{P} y \bar{M}_x toman el valor de los esfuerzos para los valores postulados de (χ_n, x_n) .

Si para cada curvatura (desde la curvatura nula hasta la de agotamiento) se determina la profundidad de la fibra neutra de manera que se satisfagan las ecuaciones [2.65] y [2.66], será posible trazar un diagrama en el que se muestre la curvatura que adopta la sección frente al momento que se induce para un axil constante P , (figura 2.75). Conocida esta curva (propia de cada sección y su axil concomitante), es posible determinar el plano de equilibrio para un momento exterior arbitrario M_x inferior al de agotamiento. Para ello es posible leer de dicho diagrama la curvatura de equilibrio χ y se determina la profundidad de la fibra neutra por alguno de los procedimientos descritos.

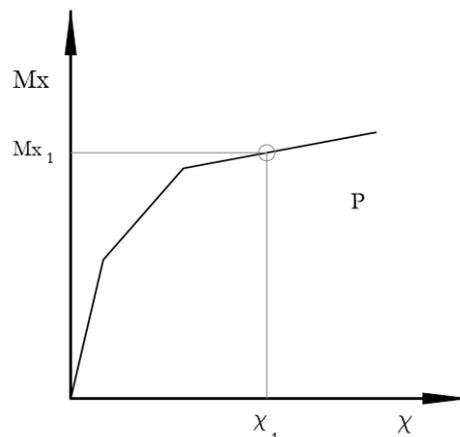


Figura 2.75. Lectura de la curvatura de equilibrio para un par de esfuerzos exteriores de diseño (P, M_x) . Autor.

2.7.2 Análisis en compresión o flexión compuesta esviada.

En el caso general de la determinación de las coordenadas del plano de equilibrio para estados de sollicitación normal tiene la dificultad adicional de que el rumbo de la fibra neutra no es conocido y no es posible afirmar que forme un ángulo determinado con la dirección de aplicación del vector momento. Expresado en otros términos, para el plano descrito de forma general según la expresión [2.75] la pendiente y la ordenada en el origen de ecuación de la recta que describe su traza, así como la curvatura del plano según la dirección de máxima pendiente del mismo son desconocidas.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad [2.75]$$

Y puesto que se trata de un estado de sollicitación exterior arbitrario (P, M_x, M_y) no necesariamente de agotamiento, no es conocido ningún punto de dicho plano, de manera que a priori, en la expresión [2.75], los coeficientes A, B, C y D, son desconocidos.

Para una sección transversal cualquiera de la que se conozcan las ecuaciones constitutivas de los materiales que la componen en la que se postulen los coeficientes del plano definido en la ecuación [2.75], es posible obtener las resultantes de los esfuerzos internos mediante la resolución de las ecuaciones [2.1], [2.2], [2.3]:

$$P = \int_A \sigma_c dA + \sum_{i=0}^n A_{s,i} \sigma_{s,i} \quad [2.1]$$

$$M_x = \int_A \sigma_c y dA + \sum_{i=0}^n A_{s,i} \sigma_{s,i} y_{s,i} \quad [2.2]$$

$$M_y = \int_A \sigma_c x dA + \sum_{i=0}^n A_{s,i} \sigma_{s,i} x_{s,i} \quad [2.3]$$

Como ha quedado expuesto, para cada plano que se postule existe un único estado de tensiones interno a nivel de sección cuyas resultantes conducen de manera unívoca a un conjunto de esfuerzos (P, M_x, M_y) .

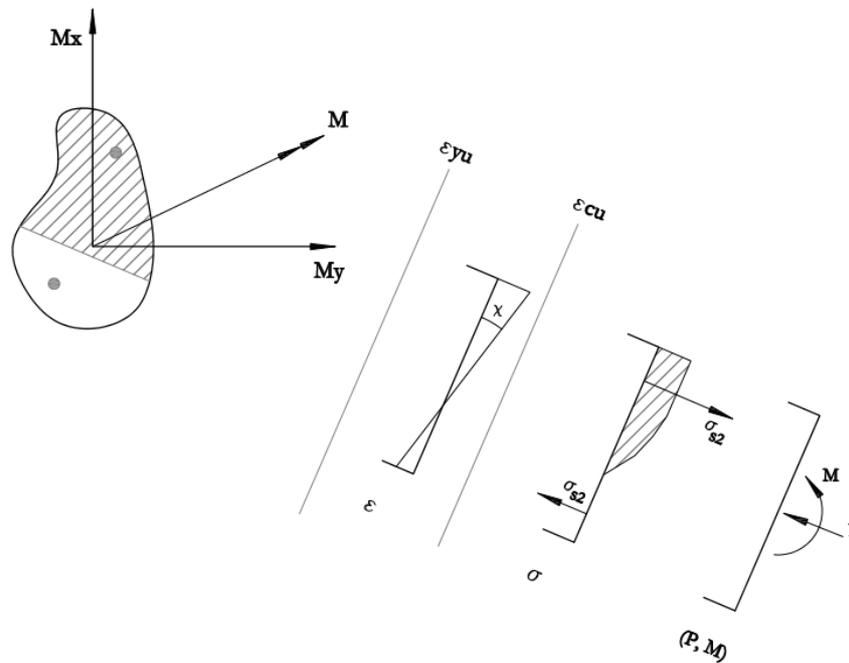


Figura 2.76. Perfil de tensiones normales en una sección transversal arbitraria. Autor.

En la búsqueda de los parámetros del plano, autores como Farah y Huggins, proponen tomar tres puntos de la sección (cuyas coordenadas x, y son conocidas), de los que se postulan sus deformaciones ε (z del plano en la ecuación [2.75]). La dificultad estriba en establecer un procedimiento numérico de iteración para la determinación de la deformación de los tres puntos escogidos, así como llevar a cabo la resolución de las expresiones [2.1], [2.2], [2.3] en cada ciclo del proceso. La complejidad aumenta si el contorno de la sección transversal analizada posee geometrías arbitrarias difíciles de parametrizar.

Para superar estas dificultades se plantea las siguientes cuestiones:

CAPÍTULO 2

- Es preciso establecer una estrategia de iteración intuitiva que mantenga transparente el espíritu de la búsqueda de las coordenadas del plano de equilibrio en cada ciclo del proceso.
- Es necesario resolver de manera general mediante una aproximación suficiente las expresiones [2.1], [2.2], [2.3] para cada plano postulado en cada iteración para cualquier contorno de sección transversal.

En el capítulo 3 se expone la solución detallada propuesta por el autor de esta tesis consistente en un modelo iterativo de cálculo en el que se logran aproximaciones adecuadas para el dimensionado y la comprobación de secciones de hormigón armado o pretensado de geometrías y estados de sollicitación normal exterior arbitrarios.

2.8 Resumen y conclusiones (capítulo 2).

Se ha expuesto una muestra representativa de modelos existentes para el dimensionamiento y comprobación de secciones de hormigón armado sometidas a un estado de sollicitación de compresión y flexión compuesta esviada. Se han categorizado según la clasificación de Park y Paulay, y para los más significativos se han llevado a cabo simulaciones numéricas que reproducen los ejemplos publicados originales.

A modo de resumen, la tabla 2.10 muestra como los primeros modelos abordan la cuestión reduciendo la doble excentricidad del axil exterior a un axil equivalente que solicite la sección según la dirección principal de inercia de la misma. Se trata de la aproximación que menos dificultad numérica representa. El objetivo de estos primeros modelos es determinar la capacidad de agotamiento de la sección en una dirección de aplicación de la carga.

Es claro que estos modelos tienen que limitares a abordar secciones rectangulares y distribución de armadura homogénea en sus cuatro caras. Así mismo, y dado que la integración de las tensiones del bloque comprimido supone un cierto esfuerzo numérico, los primeros modelos toman por cierta la hipótesis de Withney en la que es sustituido el perfil real de tensiones de la zona comprimida de la sección por un bloque equivalente de tensión de valor constante. Esta consideración es cierta (o suficientemente aproximada) si se aborda la cuestión desde el punto de

vista del agotamiento, esto es, el perfil del bloque comprimido en hormigón en el instante en el que alcanza la rotura de la sección.

Estos primeros modelos no pueden abordar el análisis de la sección estados alejados de la rotura, situaciones en las que el comportamiento del hormigón es sensiblemente lineal (rama elástica), pues esto habría supuesto llevar a cabo un análisis detallado de la integración del bloque comprimido tomando en consideración la tensión que cada fibra habría experimentado en función de su deformación.

CAPÍTULO 2

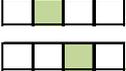
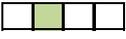
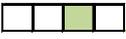
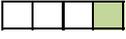
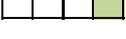
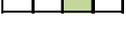
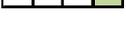
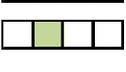
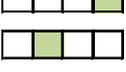
Modelo	Año	Análisis	Sección	Bloque Comprimido	Plano Equilibrio
Pannell	1959				-
Bresler	1960				-
Parne	1966				-
Weber	1966				-
Warner	1969				SI
Farah &Huggins	1969				SI
Morán	1972				-
Row & Paulay	1973				-
Model Code 90	1990				-
Eurocódigo 2	1992				-
EHE-08	2008				-
ACI-318	2014			-	-

Tabla 2.10. Resumen de los modelos analizados y alcance de los mismos.

En los primeros años setenta del siglo XX, surge el interés de abordar la cuestión desde un punto de vista más universal. Autores como Warner o Farah y Huggins se ocupan en poder determinar las coordenadas del plano de equilibrio en estados previos a la rotura, y presentan modelos con los que es posible conocer la tensión y la deformación de cada punto de la sección.

Así, Warner publica una colección de diagramas momento-curvatura para distintas direcciones de aplicación de la carga pero otorga a la fibra neutra la dirección perpendicular a esta, lo cual, como él mismo constata, no es estrictamente cierto. Warner incluso llega a valorar que el desvío máximo entre el giro real en equilibrio del eje neutro y la propuesta de dar por válido que éste discurre según la perpendicular de la acción del momento, es inferior en todos los casos a 10° . Lo que Warner no explora es qué implicaciones tiene este desvío en términos de tensión sobre el hormigón o el acero.

Por otra parte, autores como Francisco Morán, basado en un método de programación lineal logra determinar el valor óptimo de armadura (y su posición dentro de la sección), para un estado de sollicitación cualquiera y un contorno de la sección arbitrario. No obstante Morán aborda el asunto desde el punto de vista del dimensionamiento estricto lo que conduce a secciones económicas y seguras, pero de las que no es posible conocer el mapa de tensiones para estados de sollicitación de no rotura.

La cuestión de la obtención de las coordenadas del plano de equilibrio para un estado de sollicitación normal cualquiera parece quedar resuelta con el modelo presentado por Farah y Huggins. En esta tesis se ha determinado un diagrama de interacción para una sección dada y un axil exterior conocido en el que la única fuente de error ha sido la impuesta en la norma de convergencia del proceso iterativo de búsqueda. También se han determinado las coordenadas del plano de equilibrio mediante la propuesta de los autores de emplear el método de Newton-Raphson para un estado de sollicitación inferior al de agotamiento. El modelo se basa en la integración de las tensiones en la sección transversal de manera exacta, y esto es posible puesto que plantean la descripción de las ecuaciones constitutivas de hormigón y acero en forma polinómica continua en todo el espectro de deformaciones compatibles. Este modelo ha sido

CAPÍTULO 2

adoptado como valor de referencia con el que comparar los resultados arrojados por el resto de los modelos analizados en el estudio comparativo presentado.

La crítica que es posible plantear a este modelo es la dificultad que implica definir el contorno de secciones arbitrarias en términos de funciones del tipo $f(x, y)$, debido a que estas se convierten en los límites de la integración definida con las que determinar los esfuerzos internos movilizados en la sección transversal analizada. El modelo parece ser abordable para secciones rectangulares pero a priori, no parece que fuera sencillo aplicarlo para conocer el mapa de tensiones en servicio de una sección trasversal de contornos orgánicos, o similares a las diseñadas por Miguel Fisac para el Centro de Estudios Hidrográficos.

El levantamiento del estado de la cuestión se da por concluido con la propuesta de Row y Paulay. El motivo es que nuevamente, su propuesta parece abundar sobre campos ya explorados (Weber). Parece que una vez logrados modelos como el de Warnenr, Farah, o Morán, la vuelta a la interpolación lineal entre un catálogo de ábacos adimensionales, ciertamente rígidos en cuanto a la definición geométrica y mecánica de la sección analizada parece, como ya se ha dicho, dar un paso atrás en la evolución del modelo.

Finalmente se ha constatado que los modelos normativos vigentes más relevantes no establecen una estrategia numérica con la que determinar el plano de equilibrio de una sección para estados de sollicitación de tensión normal arbitrario, y definen las bases sobre las que la determinación del agotamiento ha de llevarse a cabo en términos de deformaciones últimas de las fibras características.

La instrucción EHE-08 plantea en uno de sus anejos la reducción de dos excentricidades a una excentricidad equivalente actuando sobre el eje de mayor inercia de la sección, nuevamente abundando sobre el dimensionamiento en rotura, nivel de análisis que como ya ha quedado expuesto, solo otorga información del nivel de seguridad al que se encuentra la sección. Y permite el empleo de ecuaciones directas para la determinación de la profundidad de la fibra neutra y la tensión de la armadura para secciones rectangulares y en T en flexión simple.

El espíritu de este trabajo es validar y contrastar un método de relativa simplicidad numérica, y explorar el error que pueda llegar a cometerse haciendo un uso extensivo del mismo. El objetivo es dar a conocer una estrategia de cálculo con la que poder determinar con seguridad, para cualquier contorno de sección transversal planteado, distribución de armadura, y esfuerzos exteriores (P, M_x, M_y) la deformación y la tensión a la que se encuentra cada punto en su interior.

3. ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

3.1 Método propuesto: Método de la diferencia mínima de curvaturas (MDMC).

El modelo parte de la idea de hacer uso de un diagrama momento curvatura con el momento de diseño según una dirección cualquiera. En un primer acercamiento al problema podría plantearse que sería suficiente rotar la sección hasta hacer coincidir la dirección del vector momento exterior con el eje vertical y a continuación determinar el diagrama momento curvatura para el axil exterior. Finalmente bastaría operar tal como se ha expuesto en el análisis de secciones sometidas a compresión o flexión compuesta recta dotadas de simetría. Pero esto sólo sería posible si la fibra neutra formara un ángulo recto con la dirección del vector momento en todo el espectro de curvaturas posibles hasta su agotamiento para la dirección de aplicación del momento exterior.

Para determinar la solución del problema es necesario entender que para una sección cualquiera sometida a un axil excéntrico según el sistema de referencia escogido, si se aumenta la excentricidad de manera que el axil permanezca constante, para cada incremento Δe , podrá obtenerse un giro del eje neutro distinto ($\varphi = \varphi + \Delta\varphi$), y variarán las coordenadas del plano de equilibrio así como el estado de tensiones internas en la sección como respuesta a las distintas sollicitaciones exteriores [3.1], [3.2].

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA
ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

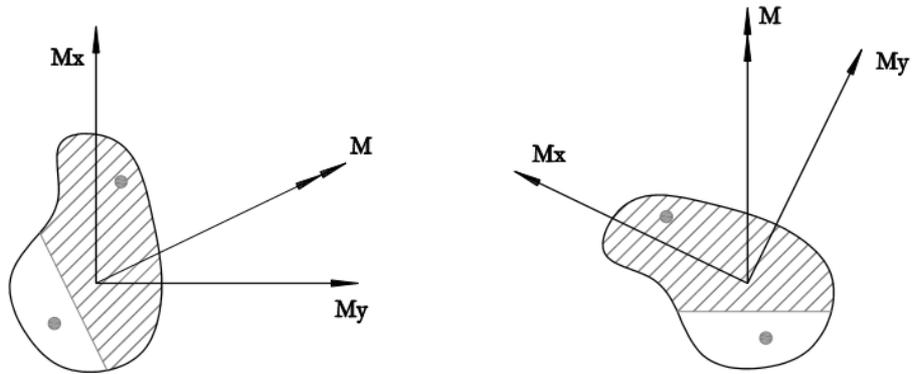


Figura 3.1. Sección rotada el ángulo del vector momento para su hipotético tratamiento en flexión o compresión compuesta recta. Autor.

$$M_x = P \cdot (e_y + \Delta e_y) \quad [3.1]$$

$$M_y = P \cdot (e_x + \Delta e_x) \quad [3.2]$$

Por otra parte si se fija un rumbo arbitrario para el eje neutro y se mantiene constante para incrementos de curvatura, es posible determinar un diagrama momento curvatura para la sección analizada y un axil exterior dado desde la curvatura nula hasta la de agotamiento. Nótese que en este diagrama no podrá asumirse de manera general que la dirección del vector momento permanece constante para cada curvatura analizada, esto es, la relación entre las componentes del momento referido a cada uno de los ejes de simetría $\left(\frac{M_x}{M_y}\right)$ varía al tiempo que varía la curvatura (χ).

Para una sección sometida a un axil excéntrico P , y establecido un giro cualquiera del eje neutro φ , es posible determinar el diagrama momento curvatura y expresar dicho momento como su descomposición vectorial según el sistema de referencia (figura 3.2), de manera que se obtenga

CAPÍTULO 3

información sobre las componentes del momento para cada curvatura de la sección y un valor constante φ en el rumbo del eje neutro.

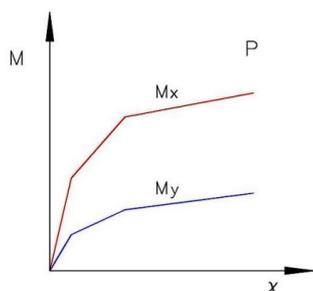


Figura 3.2. Diagrama momento curvatura de una sección genérica sometida a un axil exterior constante P y excentricidad variable (rumbo constante del eje neutro). Autor.

Es claro que si se disponen de las curvas representadas en la figura 3.3 para el giro del eje neutro que conduce a una situación de equilibrio (situación en la que los esfuerzos internos a nivel de sección equilibran los esfuerzos que la solicitan), podría leerse directamente la curvatura χ para los valores M_x, M_y . Conocida la curvatura, el problema concluye con la determinación de la profundidad u ordenada en el origen de la ecuación de la recta de la fibra neutra. Para ello, comienza un nuevo proceso de búsqueda que finaliza cuando para el rumbo del eje neutro y la curvatura fijados, se alcanza el valor de axil interno próximo al axil de diseño.

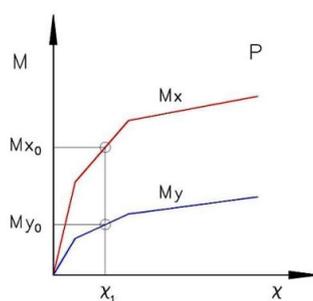


Figura 3.3. Lectura de la curvatura de equilibrio χ_1 en un diagrama momento-curvatura para el giro de equilibrio φ y esfuerzos de diseño M_{x1}, M_{y1} . Autor.

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

Luego en la búsqueda de las coordenadas del plano de equilibrio es preciso lograr determinar un diagrama momento curvatura similar al representado en la figura 3.2, en el que entrando con los valores de diseño M_x, M_y , se obtenga un único valor de curvatura χ , y esto solo ocurre para un giro del eje neutro correspondiente al de equilibrio (figura 3.3).

Desde un punto de vista operativo, si para la sección analizada y el axil exterior P se dispusieran de los diagramas momento curvatura correspondientes a una muestra representativa (suficientemente amplia) de giros del eje neutro ($\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$), podría determinarse el giro en el que, entrando con los momentos de diseño M_x, M_y se obtuviera el valor mínimo de diferencias entre las curvaturas leídas para cada par de esfuerzos (M_x, M_y). Es claro que la curvatura para ambos momentos en la solución estricta (giro teórico de equilibrio) es única, si bien, en el método expuesto de búsqueda del plano de equilibrio se propone determinar un giro en el que la diferencia de las curvaturas leídas de las componentes del momento adquiriera un valor mínimo establecido previamente que conduzca a un nivel de precisión suficiente.

En la figura 3.4 se muestran tres diagramas momento curvatura para tres giros arbitrarios del eje neutro. Los tres diagramas se determinan para que en todas las curvaturas y los momentos M_x, M_y el axil interno movilizado sea igual al axil exterior P de valor constante. Se observa que, la diferencia de curvaturas ($\Delta\chi$) leídas en cada giro postulado para el eje neutro se reduce al tiempo que φ se aproxima al giro de equilibrio solución al problema.

CAPÍTULO 3

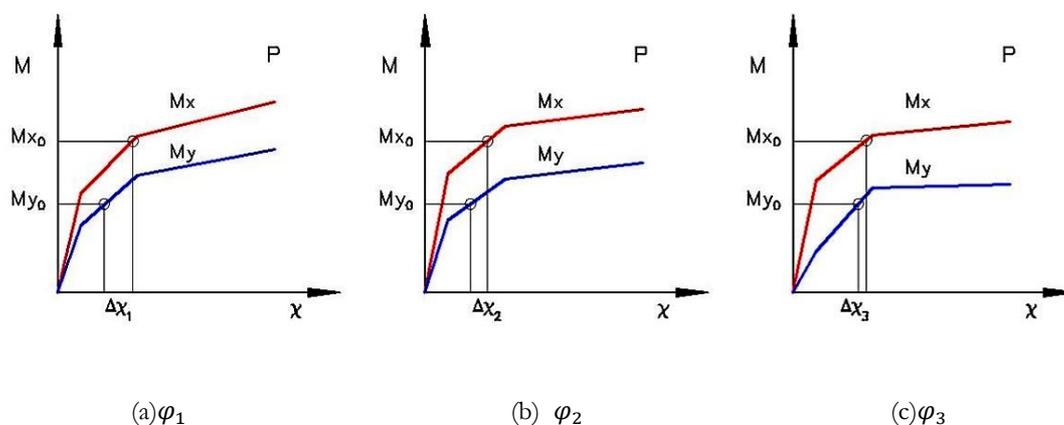


Figura 3.4. Búsqueda del giro de equilibrio del eje neutro mediante la lectura de la diferencia mínima de curvaturas para los esfuerzos de diseño M_x, M_y en una sección cualquiera. Autor.

En la búsqueda del giro de la fibra neutra en equilibrio cabe esperar que éste se encuentre próximo a la dirección perpendicular a la línea de acción del vector momento. Warner⁸³ afirmó que a pesar de no coincidir el giro del eje neutro con la dirección esperada de la fibra neutra, en la posición de equilibrio la diferencia no superaría los 10°. En la figura 3.5 se ha incluido en una línea naranja el conjunto de pares de componentes M_x, M_y cuya relación permanece constante (dirección del momento exterior constante). La línea violeta representa el conjunto de valores M_x, M_y correspondientes a un diagrama momento curvatura en el que el giro del eje neutro permanece constante y coincide con el giro de equilibrio.

⁸³ R. F. Warner. "Biaxial Moment Thrust Curvature Relation". Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 95, N° ST5, 923-940, (May 1969).

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA
 ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

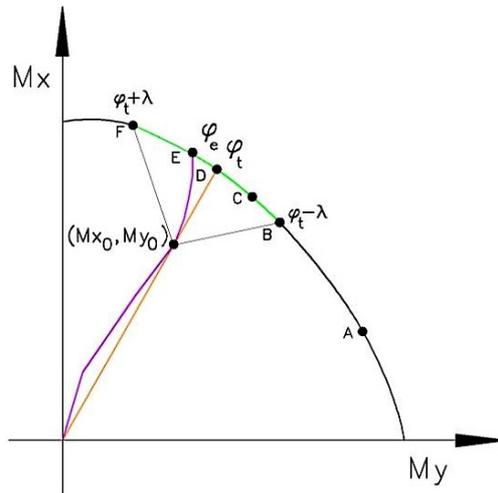


Figura 3.5. Puntos de agotamiento indicados en verde de un diagrama de interacción para los que el giro del eje neutro es compatible con la búsqueda del giro de equilibrio. Autor.

Con independencia de la precisión en la cuantificación de la diferencia entre el de equilibrio y el esperado de la fibra neutra en equilibrio postulada por Warner, ($\lambda = \varphi_e - \varphi_t$), la búsqueda podría acotarse a un rango de giros limitados superior e inferiormente respecto al giro teórico esperado (dirección perpendicular a la acción del vector momento), según la expresión [3.3]:

$$\varphi_t + \lambda \geq \varphi_e \geq \varphi_t - \lambda \quad [3.3]$$

Es claro que en ausencia de seguridad respecto a la determinación de λ , puede asumirse como límite superior que adopta un valor de 180° , y esto equivale a analizar el espectro total teórico de giros posibles que pudiera adoptar la fibra neutra en equilibrio.

En la figura 3.6 se muestran los diagramas momento curvaturas correspondientes a los giros de fibra neutra que conducen a los momentos de agotamiento significados por los puntos A, C, E de la figura 3.5.

Para el primero de los giros (φ_A) puede observarse (figura 3.6 (a)) el hecho de la imposibilidad de hallar la curvatura para la componente M_{y0} del momento de diseño. De este hecho se extrae la

CAPÍTULO 3

conclusión de que este giro queda descartado como giro posible solución desde el origen del planteamiento del problema.

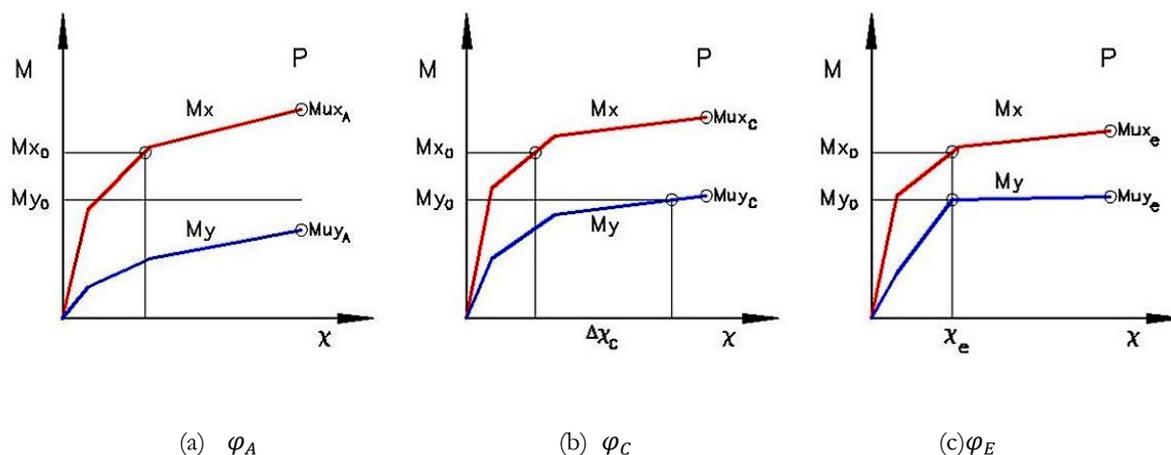


Figura 3.6. Lectura de la diferencia de curvaturas en tres diagramas momento curvatura para tres giros del eje neutro, sin lectura posible de diferencia de curvaturas (a), con lectura posible de diferencia de curvaturas (b), y con solución exacta de equilibrio (c). Autor.

El segundo de estos puntos posee un giro del eje neutro φ_C compatible con la búsqueda del giro de equilibrio si bien en el caso representado se trata de un giro que no satisface las condiciones para convertirse en solución puesto que la diferencia de curvaturas ($\Delta\chi_C$) es elevada.

Haciendo uso del diagrama momento curvatura correspondiente al giro φ_E , (figura 3.6 (c)), y las componentes del momento de diseño M_{x0} , M_{y0} , puede observarse que la lectura de la curvatura es única ($\Delta\chi = 0$). Se trata del giro para el cual la sección analizada alcanza el equilibrio estricto.

Desde un punto de vista operativo, la determinación del diagrama de interacción de agotamiento para el axil exterior P de la sección analizada no es estrictamente necesaria para poder hallar las coordenadas del plano de equilibrio, si bien, la representación del mismo junto con el punto de solicitaciones exteriores (M_{x0} , M_{y0}) ayuda a visualizar el rango de puntos de agotamiento del

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA
ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

diagrama cuyos giros en la fibra neutra son compatibles con el giro de la fibra neutra en equilibrio para dichas solicitaciones.

En el rango de giros compatibles con la solución $(\varphi_t + \lambda, \varphi_t - \lambda)$, el autor no ha encontrado la manera de establecer una búsqueda elegante del giro de equilibrio. La figura 3.7 (a) muestra de manera idealizada la forma de la función que relaciona la diferencia de curvaturas y el giro del eje neutro analizado. El mínimo de la función se encuentra en el giro de la fibra neutra en equilibrio. Es claro que no parece factible definir una función que relacione todas las variables que intervienen en el dimensionamiento de secciones de hormigón estructural. Y es por esto que la búsqueda del mínimo valor de esta función ha de hacerse de manera secuencial, analizando con un intervalo de giro elegido, todos los giros compatibles. Así, si se decide determinar los diagramas momento curvatura para diferencias de giro de un grado (se determinarían un total de 360 diagramas en ausencia de un valor verosímil para λ), se llegaría a cometer un error máximo de medio grado respecto a la solución exacta del rumbo del eje neutro en equilibrio.

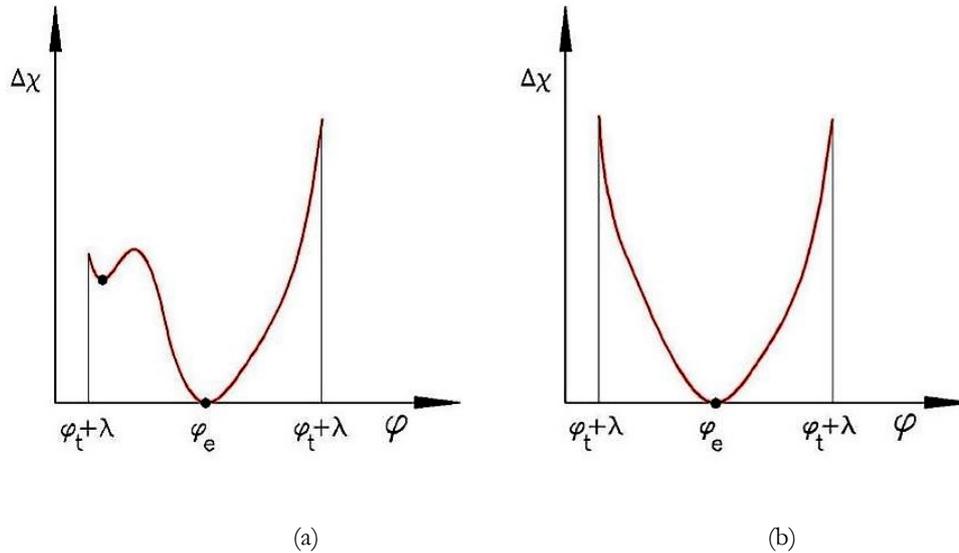


Figura 3.7. Representación idealizada de la diferencia de curvaturas leídas en un diagrama de interacción frente al giro del eje neutro. Autor.

Por el contrario de existir una tendencia constante en la manera en la que cambia la diferencia de curvaturas leídas en cada diagrama de interacción ($\Delta\chi$) respecto al giro del eje neutro φ , el giro

CAPÍTULO 3

de equilibrio se encontraría en uno de los giros extremos compatibles con la búsqueda de la solución tal como se muestra en la figura 3.7 (b), y la búsqueda podría hacerse de manera secuencial, eliminando en cada iteración la mitad de los giros compatibles.

Hallado el giro de la fibra neutra para el cual se alcanza el equilibrio, queda aún por determinar la profundidad a la que se alcanza un axil interno igual al axil exterior. Nuevamente un proceso iterativo, en esta ocasión mediante particiones del tramo donde se halla la solución a la mitad en cada ciclo⁸⁴, conducen a la definición de todas las variables de un plano de equilibrio de una precisión suficiente para el dimensionado y comprobación de secciones de hormigón armado.

3.1.1 Discretización del bloque comprimido y resolución de las ecuaciones de equilibrio.

El método propuesto en esta tesis plantea la resolución de las ecuaciones de equilibrio en su forma expresada en [3.4] y [3.5], como los sumatorios de las resultantes de elementos de tamaño definido para la zona comprimida de hormigón y las barras de acero:

$$P = \sum_{i=0}^m A_{c,i} \cdot \sigma_{c,i} + \sum_{j=0}^n A_{s,j} \cdot \sigma_{s,j} \quad [3.4]$$

$$M_x = \sum_{i=0}^m A_{c,i} \cdot \sigma_{c,i} \cdot y_{c,i} + \sum_{j=0}^n A_{s,j} \cdot \sigma_{s,j} \cdot y_{s,j} \quad [3.5]$$

Se ha optado por llevar a cabo una división en franjas paralelas a la dirección de la fibra neutra, tal como se muestra en la figura 3.8:

⁸⁴ La manera en la que cambia el axil con la profundidad de la fibra neutra es constante. De esta manera, y postulada una profundidad inicial, es posible descartar todos los valores inferiores o superiores de profundidad en función del axil interno movilizado luego de haberlo comparado con el axil exterior.

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA
 ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

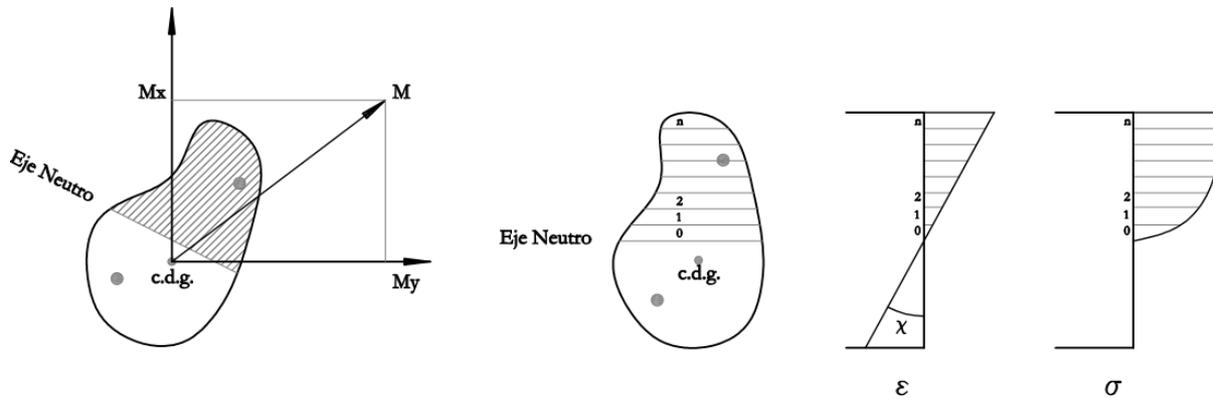


Figura 3.8. Esquema del método de discretización del bloque comprimido en la sección transversal. Autor.

Un número elevado de franjas conduce a aproximaciones con un nivel de precisión mayor si bien, se ha observado que los errores cometidos son reducidos para un total de 20 franjas. Por otra parte, para bloques comprimidos de reducido tamaño el número de franjas podría reducirse manteniendo un nivel de precisión suficiente⁸⁵.

Cualquiera que sea el sistema de división elegido de la zona comprimida, es preciso determinar el volumen comprendido entre el contorno de dicho elemento en el plano horizontal y la superficie que lo limita superiormente (tensión en el hormigón). Para elementos cuadrados o rectangulares, determinar la superficie en el plano horizontal del elemento es trivial. Así mismo el volumen (axil) de dicho elemento puede computarse considerando la tensión correspondiente a la deformación del punto situado en el centro de gravedad de dicho elemento, equivalente a la media de tensiones que se producen en los cuatro vértices del contorno del elemento en el plano horizontal. Luego a pesar de que desde un punto de vista numérico llevar a cabo una división en

⁸⁵ El algoritmo desarrollado en *c#* con el que se muestran resultados en esta tesis tiene implementado un método para la elección del número de franjas en función de la profundidad del bloque comprimido. El número máximo de franjas empleadas se corresponde a situaciones en las que la sección se encuentre completamente comprimida. Para situaciones en las que la fibra neutra corta a la sección, la profundidad del bloque comprimido es dividido en un número proporcional a la distancia entre las coordenadas *y* extremas de la sección en relación a la profundidad total del propio bloque.

CAPÍTULO 3

elementos rectangulares es sencillo, adaptar esta forma de elementos a contornos no regulares de secciones transversales podría conducir a tener que emplear un número de elementos elevado.

La discretización en franjas horizontales presenta la dificultad inicial de tener que determinar los momentos principales de área para el contorno arbitrario de la franja en el plano horizontal. Así será posible determinar el volumen de tensiones de dicha franja y la proyección sobre el plano horizontal de las coordenadas de su centro de gravedad. En la figura 3.9 se ha ampliado el contorno de la franja 2 de la figura 3.8, y se ha muestra en relación al centro de gravedad de la sección, origen de coordenadas del sistema de referencia empleado.

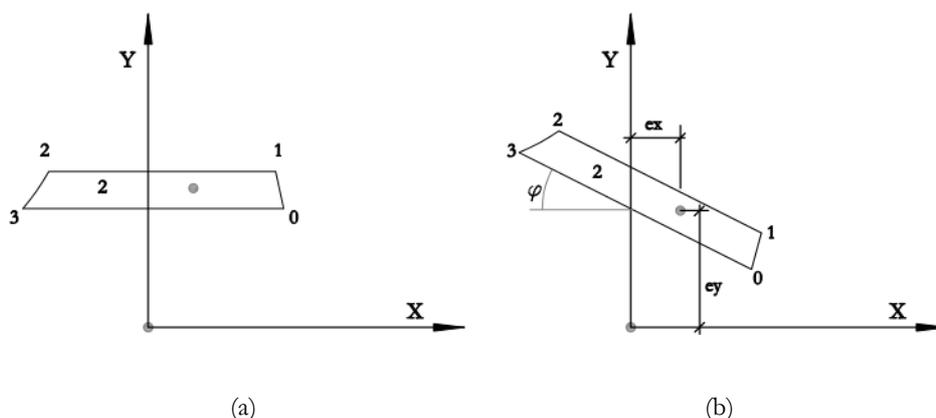


Figura 3.9. Detalle de una franja horizontal en la zona comprimida referidas al sistema de coordenadas rotado el ángulo φ (a), y referido al sistema de coordenadas original de la sección (b). Autor.

En 1988 Joaquín Marín publica “Computing double integrals with moments of area”⁸⁶ documento en el que establece los principios para poder determinar los momentos de área de cualquier orden de una sección plana de contorno cerrado conocido. Marín define los momentos de área de orden m y n según la expresión [3.6]:

⁸⁶ Joaquín Marín, “Computing double integrals with moments of area”, Boletín IMME (Instituto de Materiales y Modelos Estructurales), n°76, 144-155, (1988).

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA
 ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

$$M_{m,n} = \int \int_A x^m y^n dA \quad [3.6]$$

Mediante el algoritmo de Marín es posible llevar a cabo la integración de funciones polinómicas bivaridas [3.17]:

$$P(x, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a_{m,n} x^m y^n \quad [3.7]$$

Para poder determinar la solución exacta, es preciso definir el dominio de integración (w_i) como un contorno poligonal cerrado simplemente conexo, determinado mediante un conjunto de vértices secuencialmente numerados en sentido anti horario (figura 3.10), en el que coinciden los puntos primero y último del mismo.

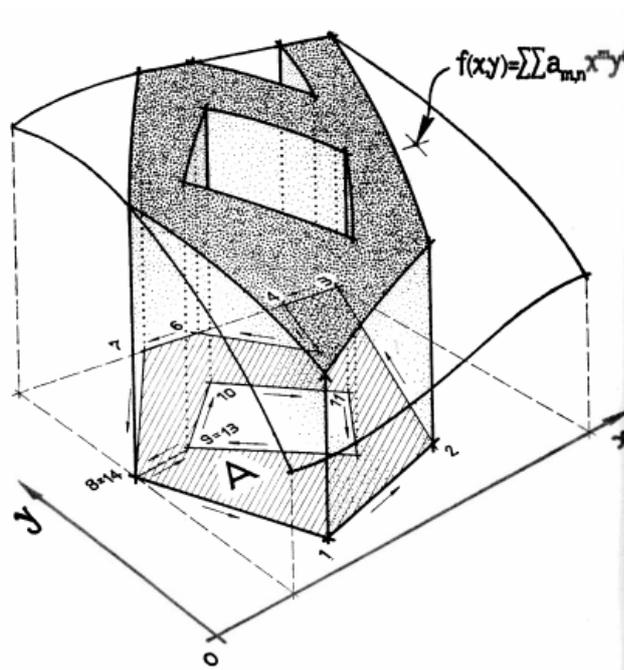


Figura 3.10. Convenio de notación adoptado por Marín para su propuesta de resolución de integrales dobles mediante momentos de área. Joaquín Marín, “Computing double integrals with moments of area”, Boletín IMME (Instituto de Materiales y Modelos Estructurales), nº76, 144-155, (1988).

CAPÍTULO 3

Para estas condiciones Marín expone la formula general para la determinación de los momentos de área de cualquier orden [3.8]:

$$M_{m,n} = \frac{m! n!}{(m+n+2)!} \sum_{i=1}^P w_i \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n \binom{j+k}{j} \binom{m+n-j-k}{n-k} x_i^{m-j} x_{i+1}^j y_i^{n-k} y_{i+1}^k \quad [3.8]$$



Figura 3.11. Joaquín Marín. “Computing double integrals with moments of area”, Boletín IMME (Instituto de Materiales y Modelos Estructurales), nº76, 144-155, (1988).

Si se disponen de los momentos de área $M_{m,n}$ de una región es posible determinar el volumen limitado por dicha región y una función cualquiera que la limite superiormente según la expresión [3.9]. Para el asunto particular analizado en esta tesis, se trata del volumen de una franja de la división escogida en la sección transversal:

$$N_{c,i} = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a_{m,n} M_{m,n} \quad [3.9]$$

Es posible incluir en el código general del algoritmo para la determinación del plano de equilibrio, la expresión [3.9] y determinar los momentos de inercia principales de cada franja

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

analizada⁸⁷. De esta manera es posible determinar el volumen (axil), y la proyección en el plano horizontal del centro de gravedad de dicho volumen (e_x, e_y) , con la que determinar los momentos (M_x, M_y) de dicha franja respecto al centro de gravedad de la sección original.

3.1.2 Diagrama lógico del MDMC.

En la figura 3.12 se muestra el esquema lógico de la rutina principal para la determinación del plano de equilibrio en una sección cualquier sometida a un estado de sollicitación de compresión o flexión compuesta esviada. A continuación está descrito el procedimiento:

1. Elección del número de giros a evaluar. Para cada uno de estos giros se lleva a cabo la determinación del diagrama momento curvatura. Se trata del giro del eje neutro que permanecerá constante para cada diagrama momento curvatura determinado.
2. Se determina el diagrama momento curvatura para la sección rotada el ángulo correspondiente en cada giro a evaluar, de manera que la fibra neutra en esta situación permanezca paralela al eje X de la sección rotada.
3. Elección del número de curvaturas a evaluar en cada uno de los diagramas momento curvatura a determinar.
4. Para cada una de las curvaturas seleccionadas, es necesario encontrar la profundidad de la fibra neutra a la que se alcanza un axil similar al exterior (norma de convergencia).
5. Determinados los diagrama momento curvatura de cada giro a evaluar comienza el proceso de la búsqueda del giro de equilibrio.
6. Para cada giro analizado, y haciendo uso de su diagrama momento curvatura (en el que se muestran las dos componentes del momento interno movilizado), se leen las curvaturas correspondientes para cada componente del momento exterior. Finalizado este proceso en todos los giros analizados, es conocida la diferencia de curvatura que se logra en cada giro para el momento que solicita la sección.

⁸⁷ Es preciso determinar $A, I_x, I_y, I_{xy}, S_x, S_y$ referidos al centro de gravedad de la sección original. Con estos valores es posible determinar el volumen de tensiones de cada franja y la proyección del centro de gravedad de dicho volumen sobre el plano horizontal.

CAPÍTULO 3

7. El giro de equilibrio puede estimarse como aquel en el que la diferencia de curvaturas es la menor de las diferencias calculadas.
8. Evaluar la diferencia de curvaturas obtenida. En este punto resulta necesario comparar la diferencia de curvatura del giro de equilibrio estimada con un valor objetivo de diferencia de curvatura (nueva norma de convergencia). Si no se ha satisfecho, es preciso volver al punto 1 de este procedimiento y aumentar el número de giros si bien, es posible acotar el entorno en el que se encuentra el giro de equilibrio.
9. Conocido el giro y la profundidad de la fibra neutra, así como la curvatura de la sección, se determina de manera directa la deformación y la tensión de cada fibra de la sección.

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA
 ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

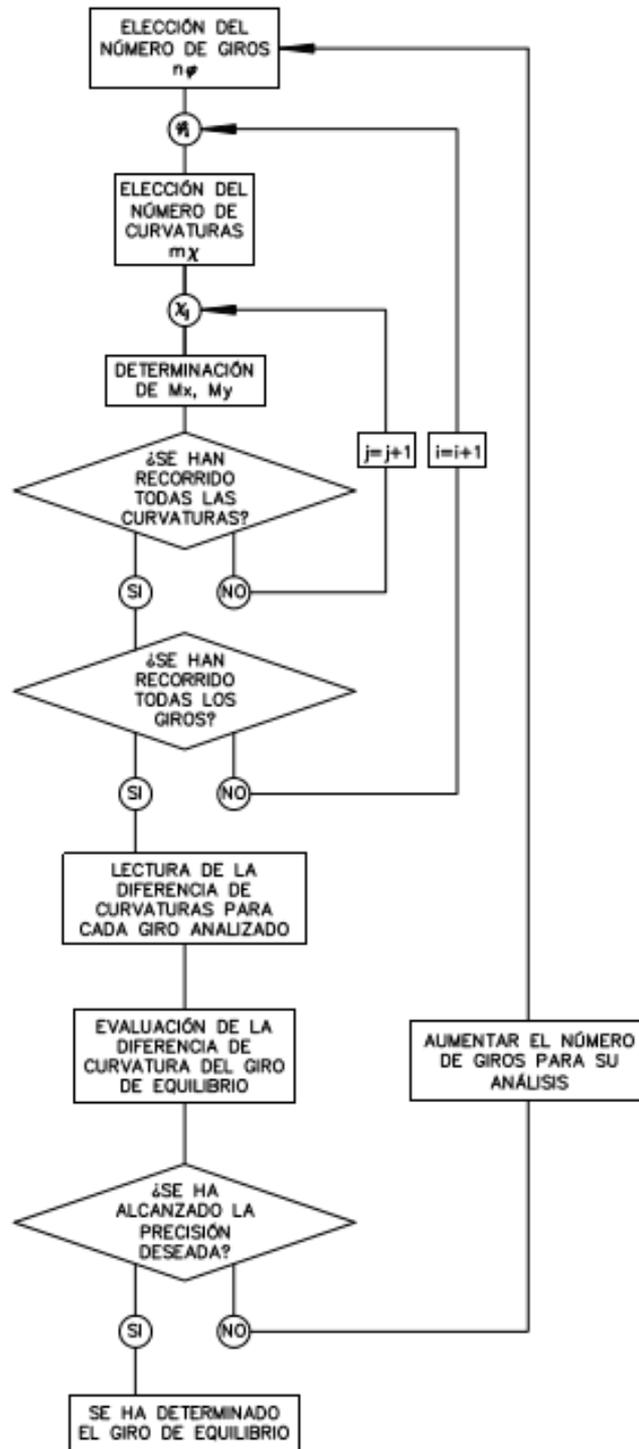


Figura 3.12. Esquema lógico para el desarrollo de una rutina para la determinación del plano de equilibrio de una sección solicitada frente a tensiones normales. Autor.

3.1.3 Debilidades del MDMC.

El MDMC presenta una ventaja clara frente a los procedimientos generales (Gurfinkel y Robinson, Farah y Huggins) en cuanto a su uso en secciones de contornos no regulares u orgánicos. No obstante las simplificaciones adoptadas conducen a situaciones en las que es preciso tomar conciencia de sus debilidades y de las posibles fuentes de error en la búsqueda de la solución.

3.1.3.1 Presencia de mínimos locales en la relación del giro del eje neutro y la diferencia de curvatura.

En la búsqueda del giro que conduce al diagrama momento curvatura para el sistema de referencia elegido, para el cual la diferencia de curvaturas es mínima según las dos componentes (M_x, M_y) del momento de diseño entre la familia de curvas determinada según el espectro de giros compatibles $(\varphi_t + \lambda \geq \varphi_e \geq \varphi_t - \lambda)$, la búsqueda ha de ser secuencial y sistemática por la presencia de mínimos relativos en la función que relaciona la diferencia de curvatura y el giro analizado (figura 3.7). Este hecho ocasiona que el método propuesto puede llegar a carecer de rapidez de computación en función del número de giros compatibles analizados (número de diagramas momento curvatura determinados).

3.1.3.2 Aproximaciones por inferencia.

- **Determinación del giro de equilibrio.**

Para el conjunto de diagramas momento curvatura determinado, ha de hallarse aquel para el cual la diferencia de curvaturas es mínima para el momento de diseño. Este puede producirse en un giro no elegido, lo cual ocurre si el mínimo absoluto en la función que relaciona la diferencia de curvatura y el giro analizado se produce para un ángulo de rotación no analizado (figura 3.13).

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

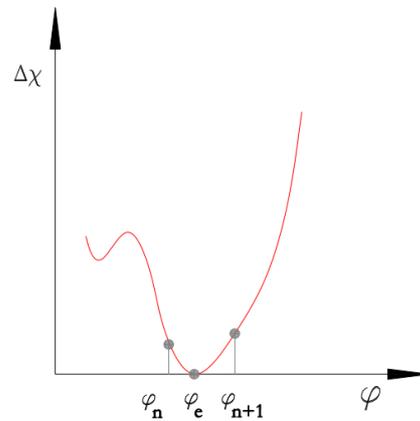


Figura 3.13. Determinación del giro de equilibrio por inferencia lineal entre los giros adyacentes al mínimo absoluto de diferencia de curvaturas. Autor.

La función de la curva que se muestra en la figura 3.13 es la conceptualización de la línea que une los valores de diferencia de curvatura por los giros analizados. Se trata de una función que a priori podría adoptar cualquier configuración

La elección de un número de giros compatibles con el hallazgo de solución posible, cuya diferencia no supere un grado de rotación, conduce a una precisión mínima de 0.50° . Y puede que este sea un nivel de precisión suficiente para el análisis de secciones de hormigón estructural en la práctica habitual. En la figura 3.13 se habrá fijado la solución para un ángulo de rotación de la fibra neutra φ_n , si bien, puede apreciarse que el giro de equilibrio adopta un valor intermedio entre φ_n y φ_{n+1} .

Habida cuenta de que la configuración de la función que relaciona el giro del eje neutro y a diferencia de curvaturas es no lineal, no es posible tratar de hallar un nivel de precisión mayor en la búsqueda del giro de equilibrio mediante interpolación y sería necesario explorar la búsqueda del giro real (mínimo absoluto) mediante técnicas de regresión múltiple una vez haya sido definida la función.

Una vez determinado el giro de equilibrio existen dos posibilidades para la determinación del resto de variables asociadas al plano solución (profundidad de la fibra neutra y curvatura):

CAPÍTULO 3

- Inferir de manera lineal la profundidad de la fibra neutra para el giro de equilibrio.
- Determinar de manera iterativa el valor de la profundidad de fibra neutra para el giro de equilibrio.

- **Determinación de la curvatura de equilibrio.**

Cada diagrama momento curvatura ha de ser determinado para un número discreto de curvaturas. El método establece la determinación de la profundidad del eje neutro y las componentes del momento interno movilizado para cada una de esas curvaturas. Cada vez que se determina la diferencia de curvaturas en un diagrama momento curvatura para un giro cualquiera es preciso inferir linealmente la curvatura, el momento, y la fibra neutra correspondiente a cada una de las componentes del momento de diseño exterior. De manera análoga a la determinación del giro de equilibrio, una vez inferida la curvatura que arroja las componentes del momento de diseño, es preciso determinar la profundidad de la fibra neutra. Esto puede hacerse por interpolación lineal entre los valores de profundidad de fibras neutra correspondiente a las curvaturas adyacentes a la curvatura inferida.

3.1.3.3 Discretización del bloque comprimido.

La división en franjas horizontales de la zona comprimida supone unir mediante segmentos de recta las intersecciones de los límites superior e inferior de cada franja con el contorno de la sección, despreciando la posible línea curva del contorno entre dichas intersecciones. El error puede cometerse por exceso o por defecto en la estimación de la superficie real de la sección transversal (figura 3.14 (a, b)).

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

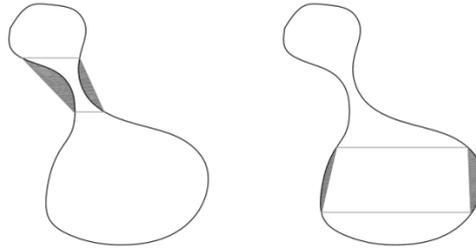


Figura 3.14. Posibles errores en la discretización de la sección analizada por el empleo de franjas horizontales. (a) Error por exceso, se considera una superficie mayor a la real. (b) Error por defecto, se considera una superficie menor a la real. Autor.

Una correcta división de la sección transversal en franjas horizontales pasa por incluir un límite de franja en cada vértice con el que se ha definido el contorno. De esta manera, los errores que se muestran en la figura 3.15 (a, b) son menores.

3.1.3.4 Integración de la tensión en el bloque comprimido.

La integración del perfil real de tensiones del hormigón se lleva a cabo mediante la asimilación a un perfil poligonal resultado de establecer planos entre las intersecciones de los límites superior e inferior de cada franja en la que se ha dividido la sección con el volumen real de tensiones en de hormigón según su ecuación constitutiva.

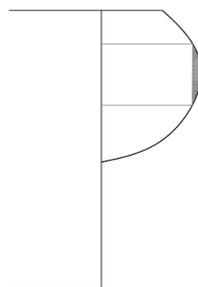


Figura 3.15. Error cometido en la integración de la tensión en el hormigón por asimilación del perfil real de tensión a la poligonal secante interior. Autor.

CAPÍTULO 3

El error que se produce es siempre por defecto, esto es, considerar que la resultante del bloque comprimido es siempre inferior a la real. Esto conduce en todos los casos a otorgar una profundidad de fibra neutro mayor a la real lo cual implica que el error que se produce se sitúa siempre del lado de la seguridad pues se desprecia cierta capacidad en el hormigón comprimido.

3.1.3.5 Tensión de compresión en acero.

El modelo propuesto no contempla la reducción de la superficie de la sección transversal en su zona comprimida por la presencia de armadura. Esto supone sobreestimar la capacidad mecánica del hormigón en todos los casos en los que exista armadura en esta zona. Es claro que en secciones con cuantías elevadas de armadura el error cometido aumenta.

Tomar en cuenta esta consideración implicaría que, en cada franja horizontal en la que se divide la sección, llevar a cabo la definición poligonal de la sección de cada barra (numerando los nodos en sentido horario tal como contempla el algoritmo de Marín en la figura 3.10), y esto dificulta la operación del método (figura 3.16).

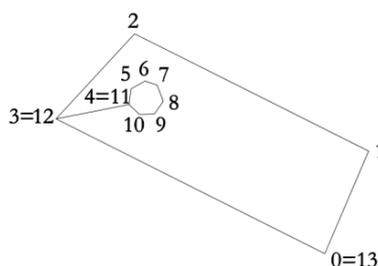


Figura 3.16. Posible definición del contorno de una franja considerando la presencia de armadura en la zona comprimida de la sección analizada. Autor

En la mirada retrospectiva que se ha realizado sobre el estado del análisis de secciones sometidas a estados de compresión o flexión compuesta esviada y el tratamiento que diversos autores han dado a lo largo del tiempo a este asunto, se ha constatado que tomar en consideración la reducción de la capacidad del hormigón en compresión por la presencia de armadura ha sido un

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

hecho no determinante en ninguno de los modelos. Autores como Row y Paulay⁸⁸, consideran esta reducción disminuyendo la tensión del acero un valor igual a la que tomaría el bloque comprimido⁸⁹. Otros como Parme⁹⁰, desprecian este hecho y asumen que se está cometiendo un error del lado de la inseguridad afirmando que éste es de valor reducido y asumible.

3.1.3.6 Normas de convergencia.

Para cada giro de fibra neutra analizado y su profundidad (pendiente y ordenada en el origen de la ecuación de la recta de la traza del plano de equilibrio), se lleva a cabo la integración de las tensiones según el procedimiento descrito. La búsqueda de la profundidad de la fibra neutra se lleva a cabo de manera iterativa, aproximando la solución en cada ciclo y despreciando la semirrecta que queda del lado de la zona descartada. Esto es posible como ya se ha dicho, porque, el axil aumenta al tiempo que lo hace la profundidad del eje neutro.

En cada iteración se compara el axil interno movilizado con el axil de diseño. La solución se considera adecuada y concluye la búsqueda cuando se logra un nivel de precisión previamente establecido como norma de convergencia según la expresión [3.10]:

$$|P_i - P| \leq \Delta P_{Objetivo} \quad [3.10]$$

Establecer una norma de convergencia exigente en exceso puede conllevar las siguientes implicaciones:

⁸⁸ Paulay Thomas, "Biaxial flexure and axial load interaction in short rectangular reinforced concrete columns", Bulletin of New Zealand Society for Earthquake Engineering, (September 1973).

⁸⁹ Esta consideración es posible llevarla a cabo en situaciones de agotamiento, en la que se otorga al hormigón por defecto, la tensión de agotamiento. Si se dese llevar a cabo la determinación del plano de equilibrio en situaciones inferiores al agotamiento, es preciso tomar en consideración la sección transversal real, esto es, no considerar la superficie de acero para la integración de la tensión del hormigón pues a priori, tomará en cada profundidad la tensión correspondiente a su deformación y a su ecuación constitutiva.

⁹⁰ Alfred L. Parme, Jose M. Nieves, and Albert Gouwens. "Capacity of Reinforced Rectangular Columns Subject to Biaxial Bending". ACI Journal, Proceedings, 63, 911- 923, (September 1966).

CAPÍTULO 3

- Aumentar el tiempo de cálculo de manera innecesaria pues, en el ámbito de los problemas analizados, diferencias de axiles del orden de 100 N puede ser suficiente.
- Posibilidad de la no convergencia pues, como ya se ha expuesto existen otros factores en el modelo como las inferencias lineales que no se alcance el axil deseado.

Es razonable incluir un criterio de abandono de búsqueda de la solución paralelo a la diferencia de axiles. En el algoritmo desarrollado con el que se muestran resultados en esta tesis se incluye una condición cuyo cumplimiento implica la detención del proceso de búsqueda, dando por válida el mejor valor logrado hasta ese momento. Se presentan a continuación dos posibles criterios adicionales:

- Número máximo de ciclos realizados.
- Valor absoluto de la diferencia de profundidad de la fibra neutra postulada en dos ciclos consecutivos inferior a un valor [3.11]:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq 0.005 \quad [3.11]$$

En esta tesis se ha optado por la segunda condición, asumiendo que se ha logrado una solución adecuada si el valor absoluto de la diferencia de profundidad en la fibra neutra en dos iteraciones consecutivas es inferior a 0.005 mm.

3.1.4 Implementación del MDMC. Un software de análisis (FCE).

3.1.4.1 Presentación del software desarrollado.

Se ha desarrollado un software para análisis de secciones sometidas a estados de sollicitación de compresión o flexión compuesta esviada (FCE) con una interfaz gráfica de fácil uso en el que se ha implementado el MDMC expuesto en esta tesis. El código del software se ha desarrollado en *c#*. Se trata de un lenguaje compilado de programación orientado a objetos y englobado en la plataforma *.Net* de Microsoft. La elección del lenguaje se justifica por los siguientes argumentos:

- Se trata de un lenguaje orientado a objetos lo cual facilita el almacenamiento y manejo de todos los atributos o propiedades de cada una de las estructuras lógicas diseñadas

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

(objetos) por el programador y organizarlas en *clases*. En el software desarrollado, el objeto característico es el denominado *PuntoEquilibrio* que posee un número elevado de atributos como son:

- Acciones exteriores.
- Acciones de convergencia.
- Giro del eje neutro en equilibrio.
- Curvatura del plano de equilibrio.
- Deformación y tensión de cada una de las barras de acero o pernos incluidos en la sección transversal.
- Ratios de utilización en relación a la normativa elegida de diseño.

En el proceso de programación es posible invocar métodos a los que suministrar únicamente un objeto (y sus atributos) de manera simple y ordenada. FCE genera un objeto *puntoequilibrio* de la clase *PuntoEquilibrio* para cada combinación de acciones exteriores introducida, y mantiene estos atributos disponibles para su acceso en todo momento.

- Desde un punto de vista comercial se consigue una interfaz visual gráfica similar a los programas habituales que operan en entorno Windows, lo cual posibilita la vía de comercialización del software para su uso extensivo.
- Existen compiladores gratuitos para el lenguaje de programación elegido. Se ha empleado *SharpDevelop* Versión 4.4.1 para producir el ejecutable.
- Existe una gran información disponible en la red por tratarse de un lenguaje ampliamente difundido.

FCE está diseñado en pestañas secuenciales en los que introducir datos y leer resultados. En cada pestaña de entrada de datos es necesario confirmar el ingreso de toda la información necesaria para poder acceder a la pestaña siguiente. FCE verifica la coherencia en los datos introducidos.

CAPÍTULO 3

Desde un punto de vista operativo FCE está diseñado para poder determinar la respuesta no lineal de secciones de hormigón armado, hormigón pretensado, y placas de anclaje sometidas a estados arbitrarios de solicitaciones normales. Asimismo se han incorporado dos normativas para cada tipo de elemento. Para el análisis de secciones de hormigón estructural se han incluido las verificaciones establecidas en la EHE-08⁹¹ y la ACI-318-14⁹². En las comprobaciones a efectuar en placas de anclaje se han programado las premisas establecidas en el Eurocódigo 3⁹³ y el código AISC⁹⁴ (LRFD, *load and resistance factor design*). La figura 3.17 muestra la pantalla de inicio del software de entrada del tipo de elemento a analizar y la normativa de referencia que se desea utilizar para ello.

⁹¹ Comisión Permanente del Hormigón: "Instrucción de Hormigón Estructural. EHE-08", Ministerio de Fomento, (2008).

⁹² ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-14)" American Concrete Institute, (2014).

⁹³ Comité Europeo de Normalización: "Eurocódigo 3, Proyecto de Estructuras de Acero", AENOR (1993).

⁹⁴ ANSI/AISC 360-16, "Specification for Structural Steel Buildings", American Institute of Steel Construction, 2016.

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

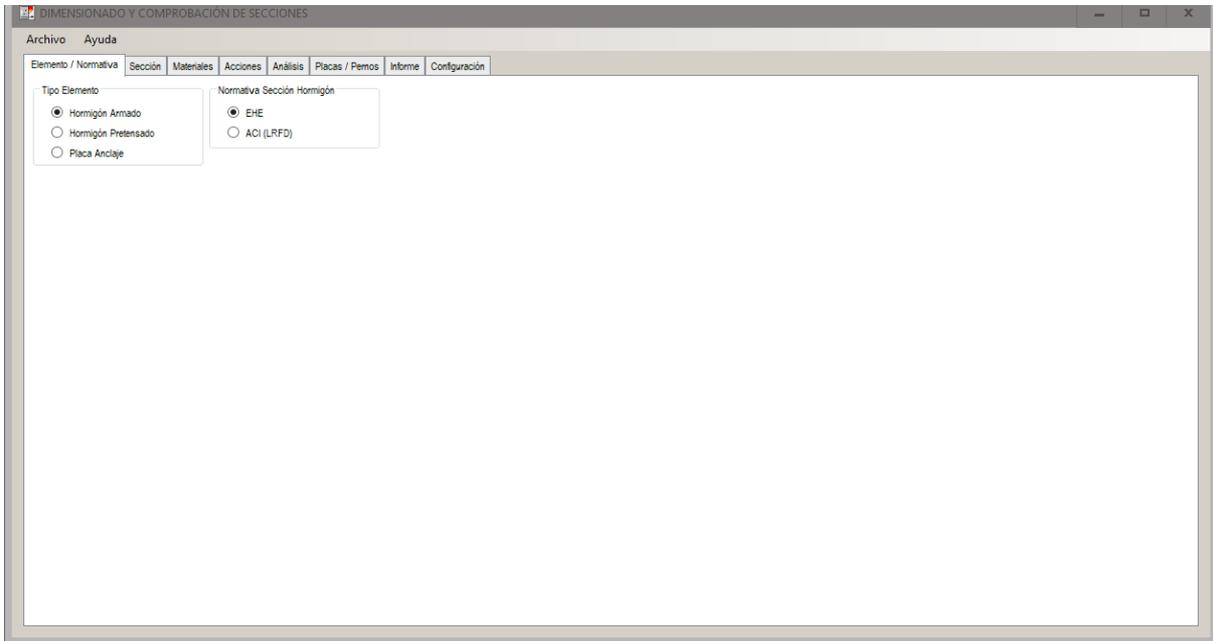


Figura 3.17. Pantalla de ingreso de datos correspondientes al tipo de elemento y normativa en el software desarrollado (FCE). Autor

En la pestaña SECCIÓN, se introducen datos relativos a la descripción geométrica del elemento a analizar. Para secciones de geometrías canónicas FCE presenta un interfaz de entrada de datos con los parámetros necesarios mínimos, e internamente opera con ellos definiendo las coordenadas cartesianas de cada punto significativo del contorno de la sección y la posición de cada barra de acero pasivo, activo, o perno de anclaje. La figura 3.18 muestra el aspecto de la pestaña de FCE para el ingreso de los datos para el análisis de una sección rectangular.

CAPÍTULO 3

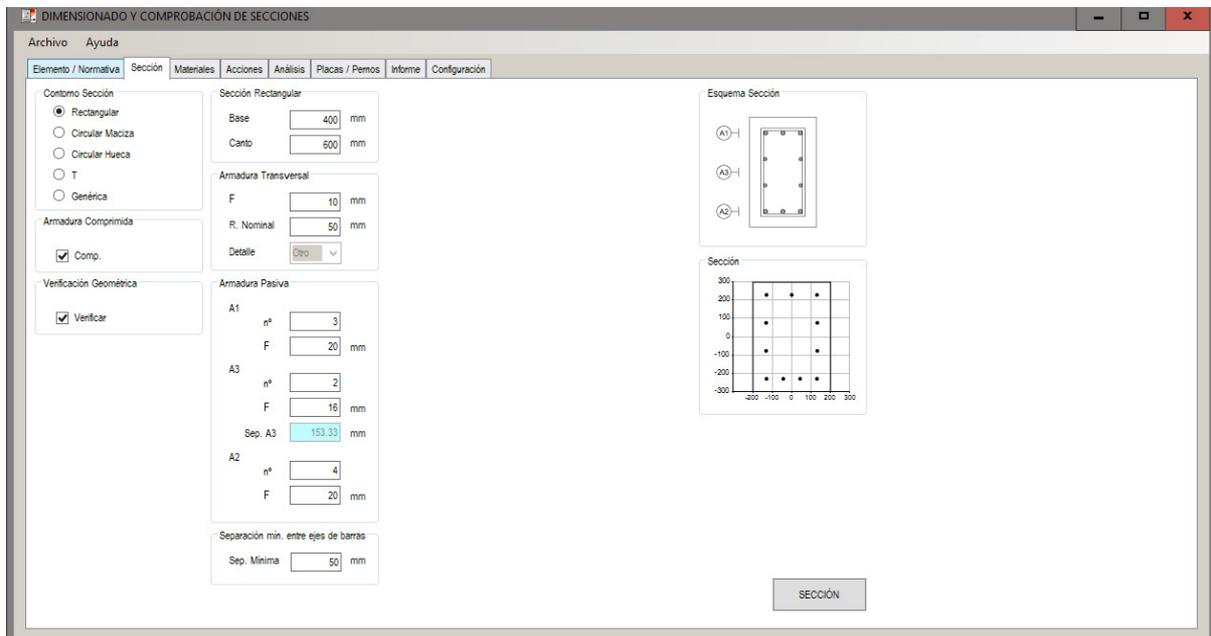


Figura 3.18. Pantalla de ingreso de datos geométricos en una sección rectangular en el software desarrollado (FCE) según la normativa 318-14. Autor

FCE genera el gráfico Sección (imagen inferior derecha) de la figura 3.23 en el que es posible verificar la geometría introducida de manera visual.

Se ha pre configurado la entrada de datos mediante parámetros simples para secciones de diferentes geometrías:

- Rectangular (figura 3.18).
- Circular maciza.
- Circular hueca.
- T.

Es posible igualmente introducir formas de contornos arbitrarios mediante las coordenadas (x,y) de tantos puntos como éste contenga. El MDMC es universal en cuanto a la geometría de la sección analizada y permite su análisis cualquiera que esta sea.

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

En la figura 3.19 se muestra la imagen de la pantalla de ingreso de las coordenadas de los puntos que definen el contorno de una sección genérica. Para ilustrar esta capacidad del software se ha introducido la sección transversal correspondiente a la pieza SIGMA empleada por Miguel Fisac en la vivienda Antonio Casacuberta y las Fábricas Baumann.

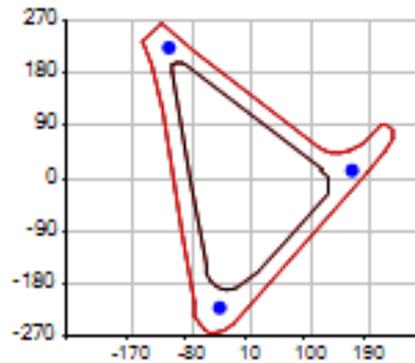


Figura 3.19. Pantalla de ingreso de datos de una sección Genérica definida por las coordenadas de los puntos de sus contornos en el software desarrollado (FCE). Autor

Como puede verse en la imagen 3.19 se ha implementado la posibilidad de incluir armaduras activas (cables de tesado). La introducción de estos datos se hace mediante una matriz en la que se solicita al usuario que defina las coordenadas (x,y) , el área de la sección trasversal de cada armadura activa, y la tensión efectiva de tesado. FCE evalúa el axil equivalente trasladándolo al centro de gravedad de la sección bruta, y desde este momento sumando las acciones de tesado a las acciones exteriores para determinar las coordenadas del plano de equilibrio. FCE no evalúa las pérdidas de tensión que se puedan producir por los diversos mecanismos, siendo el objetivo del software la determinación de las coordenadas del plano de equilibrio de respuesta, quedando en la responsabilidad del usuario la introducción de las acciones definitivas de tesado concomitantes con el resto de acciones exteriores con las que se deba evaluar la sección en cada

CAPÍTULO 3

instante de tiempo⁹⁵. A pesar de esto, y puesto que la primera acción introducida en la sección es la acción de tesado, y dado que esta induce una primera deformación en la sección, FCE arroja información sobre el estado final de las acciones de tesado por el propio acortamiento de la pieza.

La información geométrica de la sección simulada en este trabajo se ha obtenido mediante la medición de una sección real (figura 3.20).



Figura 3.20. Sección original de la sección SIGMA. Alex del Río.

⁹⁵ FCE establece determina la pérdida por acortamiento elástico de la sección. El axil de tesado induce una deformación de acortamiento (tensión de compresión en la sección) que implica una pérdida de deformación en la armadura activa.

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.



Figura 3.21. Vivienda Casacuberta (Santa Eugènia de Berga). Miguel Fisac Serna. González Blanco Fermín. “Los huesos de Fisac”. COAM. Madrid. (2007).

La descripción de los materiales desde un punto de vista de su ecuación constitutiva es, como ya se ha puesto de manifiesto, esencial para llevar a cabo un análisis exhaustivo de la respuesta de la sección. FCE tiene implementadas las curvas tensión deformación normativas correspondientes a los códigos disponibles. Asimismo permite al usuario definir las curvas tensión deformación de hormigón y acero por puntos (ϵ, σ) , e infiere linealmente entre los valores definidos para valores intermedios de deformaciones.

Continuando con la pieza SIGMA, los materiales⁹⁶ empleados originalmente en el proyecto se describen seguidamente, y sus ecuaciones se introducen en FCE y se muestran en la figura 3.27.

⁹⁶ La designación de la calidad de los materiales está expresado en el proyecto original en kg/cm^2 . En esta tesis se opta por emplear unidades del S.I.

CAPÍTULO 3

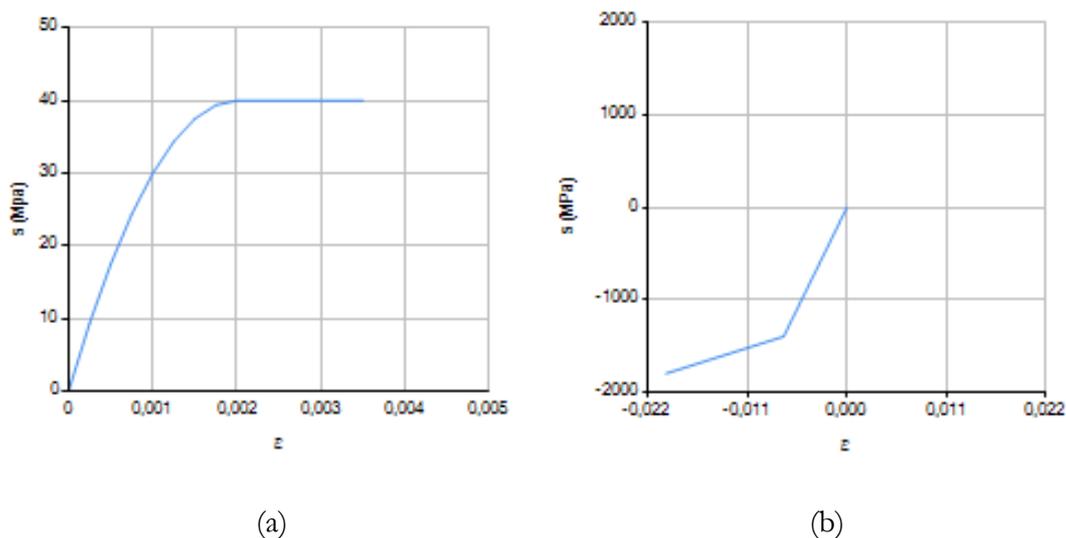


Figura 3.27. Pantalla de definición de ecuaciones constitutivas de hormigón (a) y acero activo (b) en el software desarrollado (FCE). Curva de hormigón definida por puntos por el usuario. Autor

Hormigón: $f_{ck} = 40.00 \text{ MPa}$.

Acero armadura activa: $f_{uk} = 1800 - 2000 \text{ MPa}$, alcanzándose el límite elástico en : $f_{yk} = 1400 - 1500 \text{ MPa}$. Se aplican niveles de tensión en fase de tesado de 1250 MPa.

Para simular la pieza SIGMA se ha asumido el modelo hiperbólico descrito en la EHE-08⁹⁷ para la caracterización del hormigón en compresión. Igualmente se ha supuesto un alargamiento en rotura del acero activo del 2.50%.

FCE presenta una pantalla de introducción de acciones exteriores referidas al centro de gravedad de la sección bruta. El usuario ha de introducir el axil y los momentos flectores (así como los cortantes si se analiza una placa de anclaje) para el sistema de coordenadas adoptado.

⁹⁷Comisión Permanente del Hormigón: "Instrucción de Hormigón Estructural. EHE-08", Ministerio de Fomento, (2008).

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

La introducción de acciones se lleva a cabo mediante la generación por parte de FCE de un archivo Excel en el que el introducir los valores por filas correspondientes a las combinaciones que se desee sean analizadas. FCE lee el mismo archivo Excel generado con los valores introducidos por el usuario.

La pieza SIGMA fue diseñada para salvar luces de hasta 17 metros en cubiertas, permitir luz cenital, y asumir valores de sobrecarga de hasta 0.80 kN/m². HUECOSA comercializaba la patente con la que configurar diferentes configuraciones de edificios y soluciones (cubiertas, forjados y voladizos).

Seleccionado el tipo de análisis (flexión compuesta esviada), FCE determina la solución para cada combinación de cargas introducida y emite un reporte en forma de listado de valores significativos con los que auditar la sección.

La figura 3.28 muestra la pantalla en la que se han determinado las coordenadas del plano de equilibrio y todas las variables relevantes asociadas a dicho plano para un momento flector que produce una tensión nula en la fibra inferior de la sección.

	Index	Ratio	Giro Sección (°)	X (1/km)	Prof. FN (mm)	sc (MPa)	ss Pasiva (Min.)	ss Pasiva (Max.)	ss Activa (Min.)	ss Activa (Max.)	N Conv. (kN)	Mx Conv. (kN·m)	My Conv. (kN·m)
	0	0,07	28,52	0,04	-2.856,53	4,98	0,00	0,00	-927,65	-924,64	174,26	1,02	0,19
▶	1	0,59	28,52	0,44	-276,89	7,67	0,00	0,00	-944,40	-913,19	173,95	10,68	1,99

Figura 3.28. Pantalla de salida de resultados para una sección analizada en flexión compuesta esviada en el software desarrollado (FCE). Autor

FCE advierte mediante un mensaje y la introducción de celdas en color naranja que la solución lograda no alcanza el nivel de convergencia configurado.

Para la combinación analizada se muestra el mapa de tensiones normales en hormigón y acero así como el giro que adopta la sección en equilibrio (como giro complementario al eje rumbo que adopta al eje neutro). Las variables numéricas mostradas en la tabla significan lo siguiente:

CAPÍTULO 3

- Comb.: número de combinación analizada.
- Ratio: ratio de utilización frente al agotamiento según las bases establecidas en la normativa seleccionada.
- Giro Sección ($^{\circ}$): giro complementario al rumbo que adopta el eje neutro en equilibrio.
- X (1/km): curvatura del plano de equilibrio referida al giro correspondiente del eje neutro en equilibrio.
- Prof. FN (mm): distancia entre la coordenada y del centro de gravedad de la sección bruta rotada un ángulo correspondiente al Giro Sección y la posición de la fibra neutra.
- sc (MPa): tensión normal en el hormigón correspondiente a la deformación máxima de compresión en el hormigón.
- ss Pas. Min. (MPa): tensión normal mínima en el acero pasivo. (Mínimo valor de tracción).
- ss Pas. Max. (Mpa): tensión normal máxima en el acero pasivo. (Máximo valor de tracción).
- ss Pas. Min. (MPa): tensión normal mínima en el acero activo. (Mínimo valor de tracción).
- ss Pas. Max. (Mpa): tensión normal máxima en el acero activo. (Máximo valor de tracción).
- N Conv. (kN): axil de convergencia.
- Mx Conv. (kN): momento de convergencia referido al eje x de la sección.
- My Conv. (kN): momento de convergencia referido al eje y de la sección.

Las salidas gráficas tienen el significado que se indica en la figura la figura 3.29.

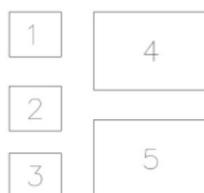


Figura 3.29. Esquema leyenda para la interpretación de la salida gráfica del análisis efectuado mediante FCE. Autor

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

- 1: Sección rotada el ángulo complementario al rumbo que adopta el eje neutro en equilibrio y gradiente de tensiones normales de compresión en la zona comprimida en hormigón. Indicación de armaduras comprimidas (representadas en negro) y armaduras traccionadas (representadas en rojo).
- 2. Perfil de tensiones normales en el hormigón para la sección rotada el giro indicado en la imagen 1, para un plano vertical que discurre por el punto de tensión extremo.
- 3. Perfil de tensiones normales en el acero para la sección rotada el giro indicado en la imagen 1, para los valores extremos en las fibras de acero de la sección.
- Diagrama de interacción en agotamiento en flexión compuesta esviada. Se incluyen dos líneas y tres puntos:
 - Línea gris: momentos de agotamiento (M_x, M_y) para un giro constante del eje neutro desde la curvatura nula hasta la de agotamiento. Sobre esta curva se incluye un punto color rojo que indica el par de momentos que agotan la sección en este supuesto.
 - Línea amarilla: momentos de agotamiento (M_x, M_y) para una relación constante de excentricidad exterior. Sobre esta curva se incluye un punto color naranja que indica el par de momentos que agotan la sección en este supuesto.
 - Punto negro: momentos (M_x, M_y) exteriores de diseño de la sección.
- Diagramas momento-curvatura para el giro de equilibrio de la sección para las acciones exteriores analizadas referidas a los ejes cartesianos de la sección, desde la curvatura nula hasta la del agotamiento. Los valores de momento representados en estos diagramas (M_x, M_y) para cada curvatura son los que se representan en la línea amarilla en el diagrama de interacción para cada curvatura.

La figura 3.30 muestra la salida gráfica correspondiente al ejemplo realizado.

CAPÍTULO 3

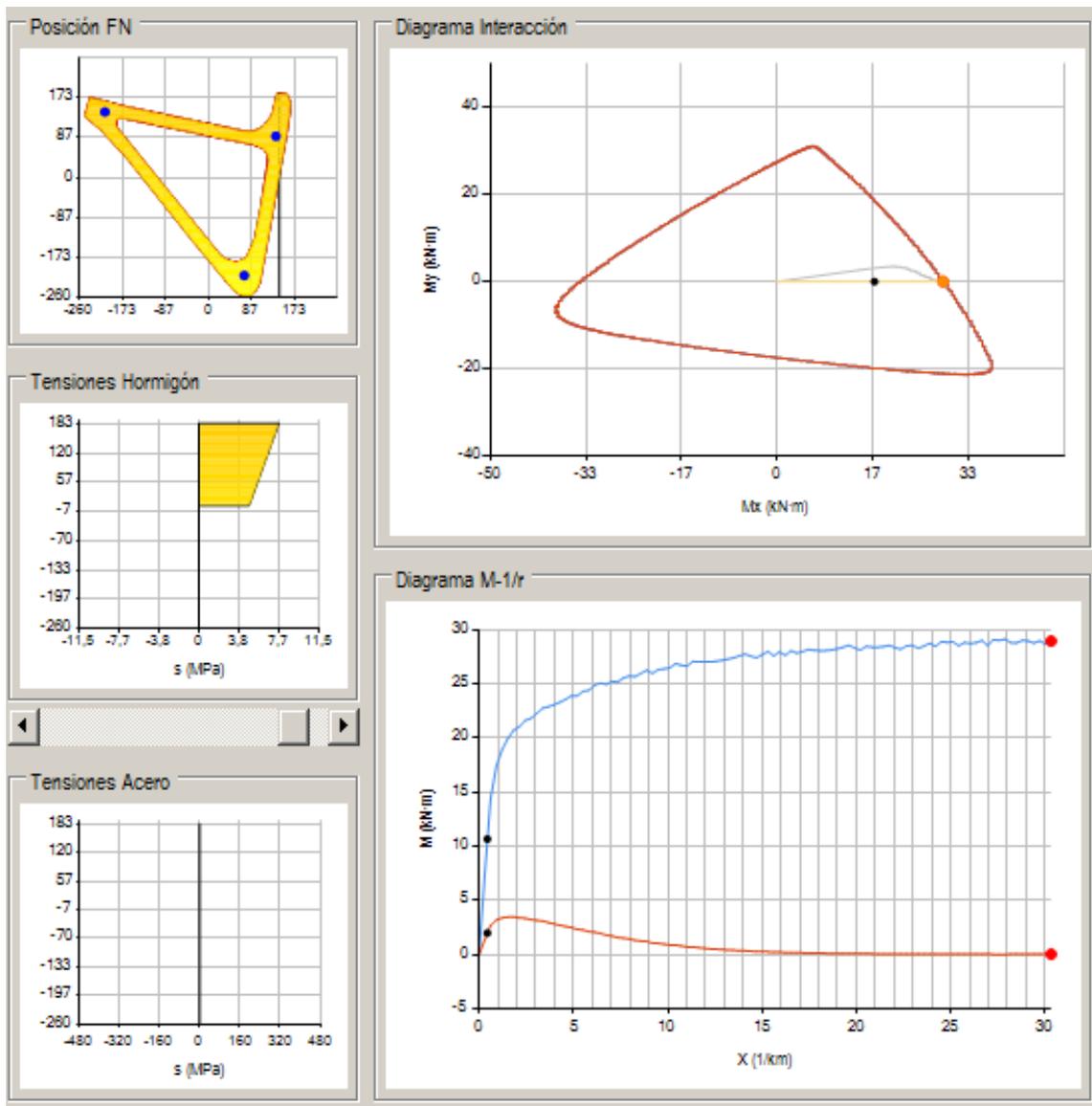


Figura 3.30 Salida gráfica de distribución de tensiones normales, diagrama de agotamiento en flexión compuesta esviada, y diagramas momento-curvatura para la posición de equilibrio. Autor.

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

3.4.4 Evaluación del MDMC mediante el software desarrollado frente al modelo de Farah y Huggins.

Las posibles fuentes de error descritas motivan la necesidad de llevar a cabo una evaluación exhaustiva del modelo propuesto con el objetivo de cuantificar el nivel de precisión que se puede lograr con él. Para ello se lleva a cabo un estudio consistente en evaluar y comparar los resultados que se obtienen para distintos axiles, cuantías, relaciones de momentos de agotamiento según las dos direcciones principales de inercia de la sección, y dirección de aplicación del vector momento exterior, aplicando el modelo de Farah y Huggins y el MDMC. Es preciso volver a incidir en el hecho de que el modelo de Farah y Huggins presenta una única fuente de error en su planteamiento y ésta es la norma de convergencia que se establece para detener el proceso iterativo de búsqueda el axil interno movilizado. Así, imponiendo niveles de exigencia reducidos es posible cuantificar el desvío entre la solución que se alcance mediante el MDMC y la solución de Farah y Huggins, modelo que en esta tesis se adopta como solución de referencia.

3.4.4.1 Metodología.

Se lleva a cabo una campaña de ensayos numéricos consistentes en determinar el giro del eje neutro en la posición de equilibrio para diversas situaciones mediante el modelo de Farah y Huggins, y el MDMC. Se ensayan cuatro escuadrías de secciones de relación h/b creciente ($h/b=1$, $h/b=2$, $h/b=3$, $h/b=4$). En cada una de estas escuadrías se toman cuatro cuantías diferentes de armadura ($\rho_1 = 0.20$, $\rho_2 = 0.40$, $\rho_3 = 0.60$, $\rho_4 = 0.80$) consistente en cuatro barras en las caras opuestas del eje Y. Para cada sección se estudian cuatro niveles de axiles ($v_1 = 0.20$, $v_2 = 0.40$, $v_3 = 0.60$, $v_4 = 0.80$), así como dos direcciones del vector momento exterior θ_1, θ_2 correspondientes con la diagonal de la sección y la bisectriz al ángulo formado por la diagonal de la sección y el eje X. El recubrimiento mecánico en todos los casos se ha considerado dos veces el diámetro de la barra de acero. Todo esto conduce a determinar un total de 256 curvas que muestran el giro de la fibra neutra en equilibrio para cada una de las secciones analizadas frente al axil.

CAPÍTULO 3

Las curvas tensión-deformación empleadas para caracterizar hormigón y acero empleados en el análisis son los que se muestran en la figura 3.31, y son similares a los establecidos por Farah y Huggins en la presentación de su modelo⁹⁸. Puede apreciarse que los valores característicos para hormigón y acero son $f_c = 30 \text{ MPa}$, $f_y = 400 \text{ MPa}$.

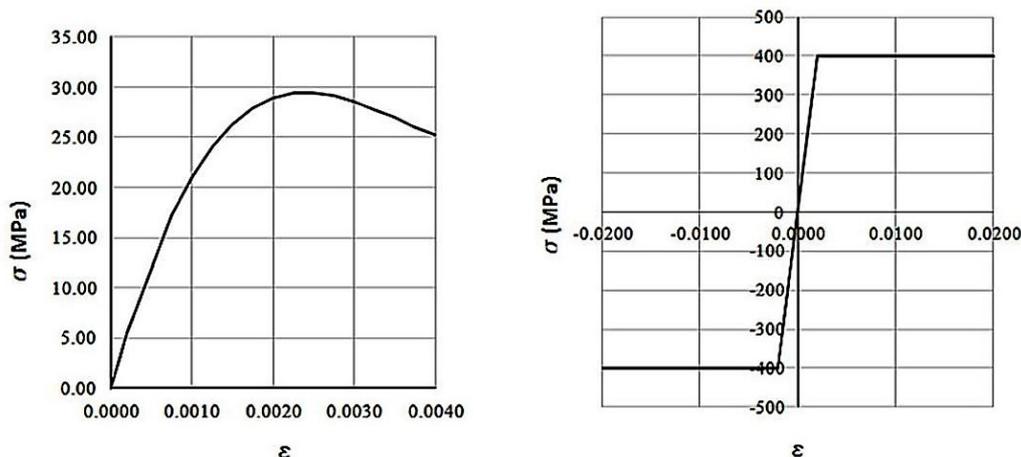


Figura 3.31. Ecuaciones constitutivas de hormigón y acero empleadas en el análisis comparativo para los modelos de Farah y Huggins y el método propuesto. Autor

Para el hormigón se emplea un modelo hiperbólico en el que la deformación de agotamiento no se corresponde con la tensión máxima⁹⁹. Se reproduce con fidelidad la curva tensión deformación empleada por Farah y Huggins en la que se alcanza el agotamiento para una deformación de $\epsilon_{cu} = 0.004$. El acero presenta un comportamiento bilineal rígido plástico en el que se ha limitado la deformación de agotamiento¹⁰⁰ a un valor de $\epsilon_{yu} = 0.02$.

⁹⁸ Anis Farah and M. W. Huggins. "Analysis of Reinforced Concrete Columns Subjected to Longitudinal Load and Biaxial Bending". ACI Journal, Proceedings, 66, 569-575, (July 1969).

⁹⁹ Este hecho tiene implicaciones en cuanto a la capacidad de la sección, y se analiza y expone en el Anexo II.

¹⁰⁰ Los autores que desarrollan sus modelos en países donde la instrucción vigente es la ACI-318, otorgan en consonancia con aquella ductilidad ilimitada al acero. En esta tesis se ha limitado este valor a una deformación en

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

En la figura 3.32 se muestra la sección genérica simulada en la que se describen las variables geométricas así como los ángulos de excentricidad del vector momento (θ_1, θ_2) con los que se han llevado a cabo los ensayos numéricos.

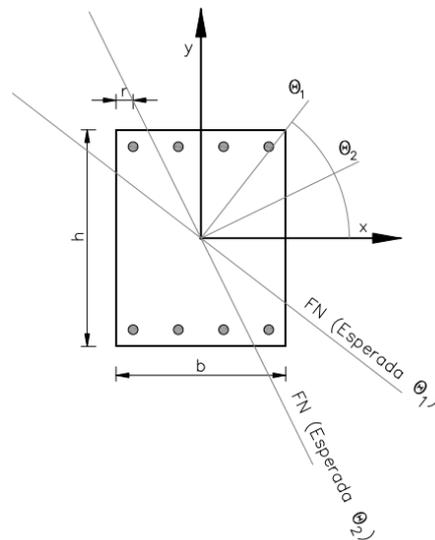


Figura 3.32. Sección tipo correspondiente al ensayo comparativo entre el modelo de Farah y Huggins y el método propuesto. Autor

El procedimiento numérico parte de determinar la posición del plano de equilibrio mediante FCE para la simulación del MDMC. De los resultados de cada punto calculado (640), se leen las deformaciones unitarias de tres vértices de la sección transversal $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Estos valores se emplean para la determinación de las coordenadas del plano de equilibrio según el modelo de Farah y Huggins. En la búsqueda de la solución mediante la implementación del método de Newton-Raphson, la estimación de un valor inicial próximo a la solución posibilita el hallazgo de la misma garantizando la convergencia. En este análisis la solución se adopta como válida cuando el error cometido es inferior al 2%.

rotura correspondiente al 20%, lo cual en términos prácticos conduce a que el agotamiento en la sección se alcancen en todos los casos por la rotura de la fibra extrema comprimida en el hormigón.

CAPÍTULO 3

En las figuras siguientes (figura 3.33 a figura 3.48) se muestran los resultados de los ensayos numéricos realizados. En cada gráfico se incluyen dos grupos de dos curvas (un grupo para cada giro analizado (θ_1, θ_2)). El significado de cada una de estas curvas se describe seguidamente¹⁰¹:

- Giro de equilibrio del eje neutro frente al axil calculado mediante el modelo de Farah y Huggins y mediante el MDMC. Se denotan como *Calculado* en las figuras.
- Dirección perpendicular a cada giro analizado $(\theta_1 + 90^\circ, \theta_2 + 90^\circ)$, o giro esperado del eje neutro en equilibrio. Se denota como *Esperado* en las figuras.

¹⁰¹ Se han suprimido de la representación los puntos en los que no coincide la solución determinada por el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins, lo cual conduce a representar dos grupos de dos curvas en cada gráfico, correspondientes a los valores calculados y esperados para cada dirección analizada.

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA
 ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

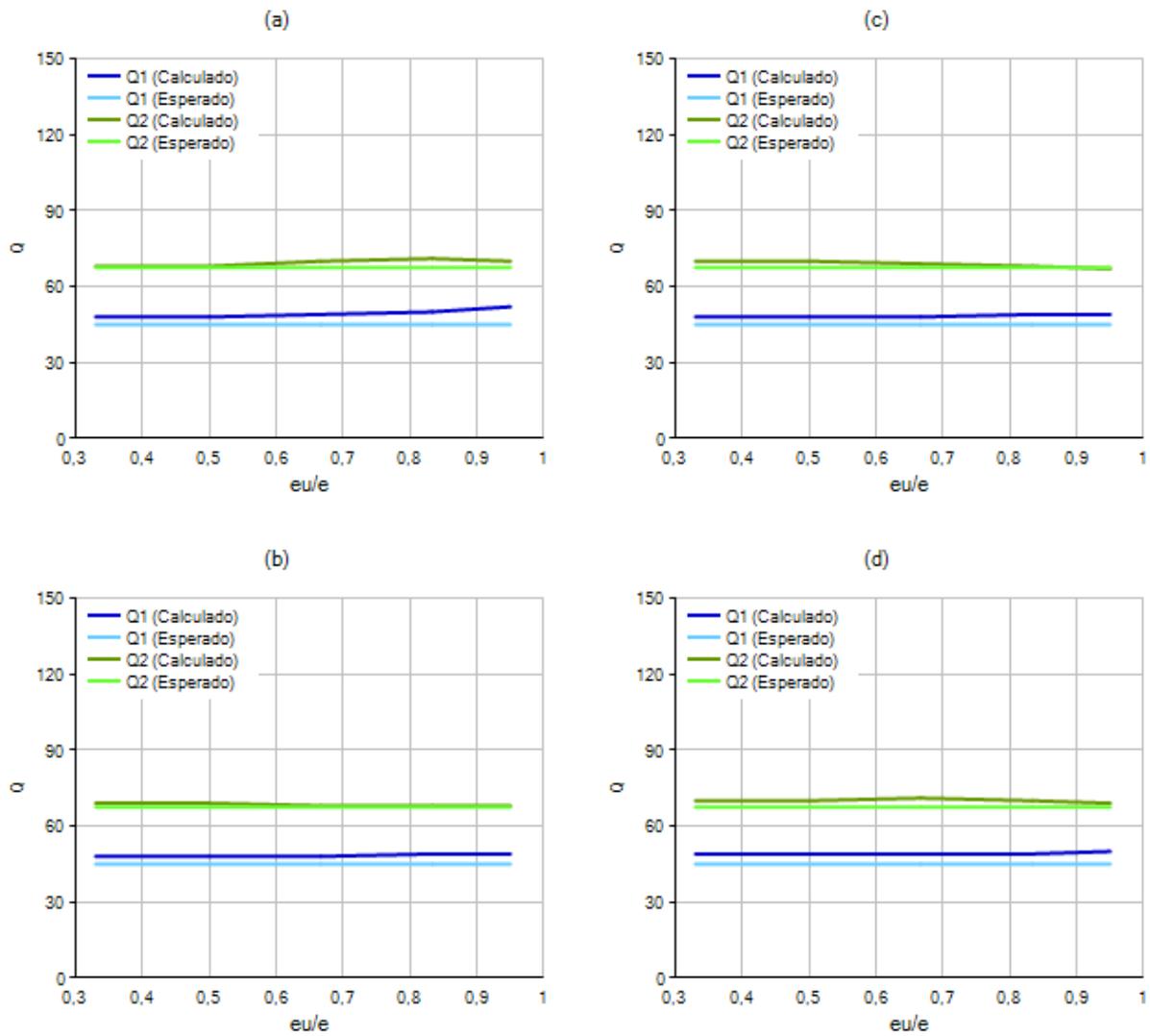


Figura 3.33. Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 1$, $\rho = 0.20$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $\nu_1 = 0.40$, $\nu_2 = 0.60$, $\nu_3 = 0.80$, $\nu_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d. Autor.

CAPÍTULO 3

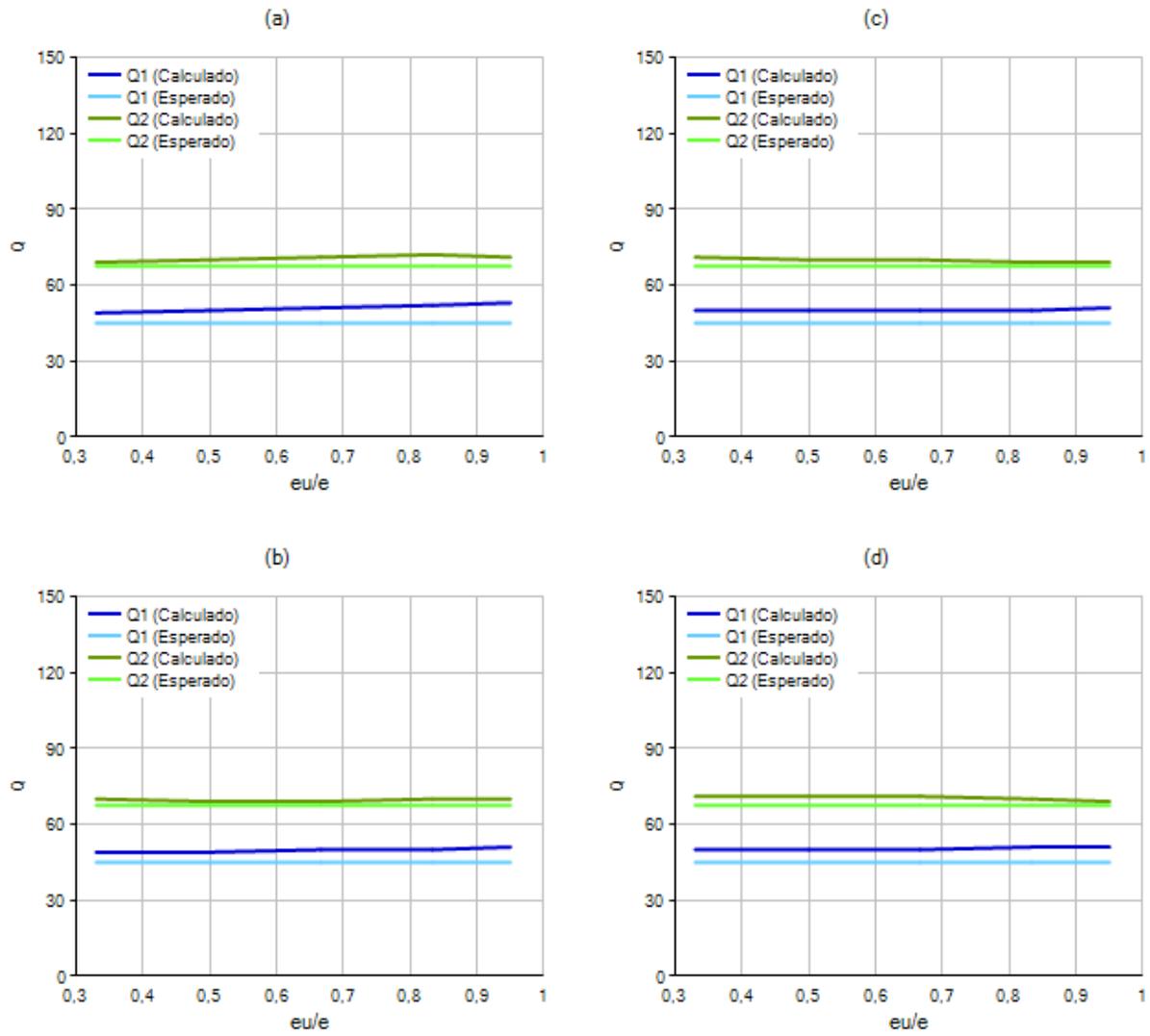


Figura 3.34. Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 1$, $\rho = 0.40$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $\nu_1 = 0.40$, $\nu_2 = 0.60$, $\nu_3 = 0.80$, $\nu_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d. Autor.

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA
 ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

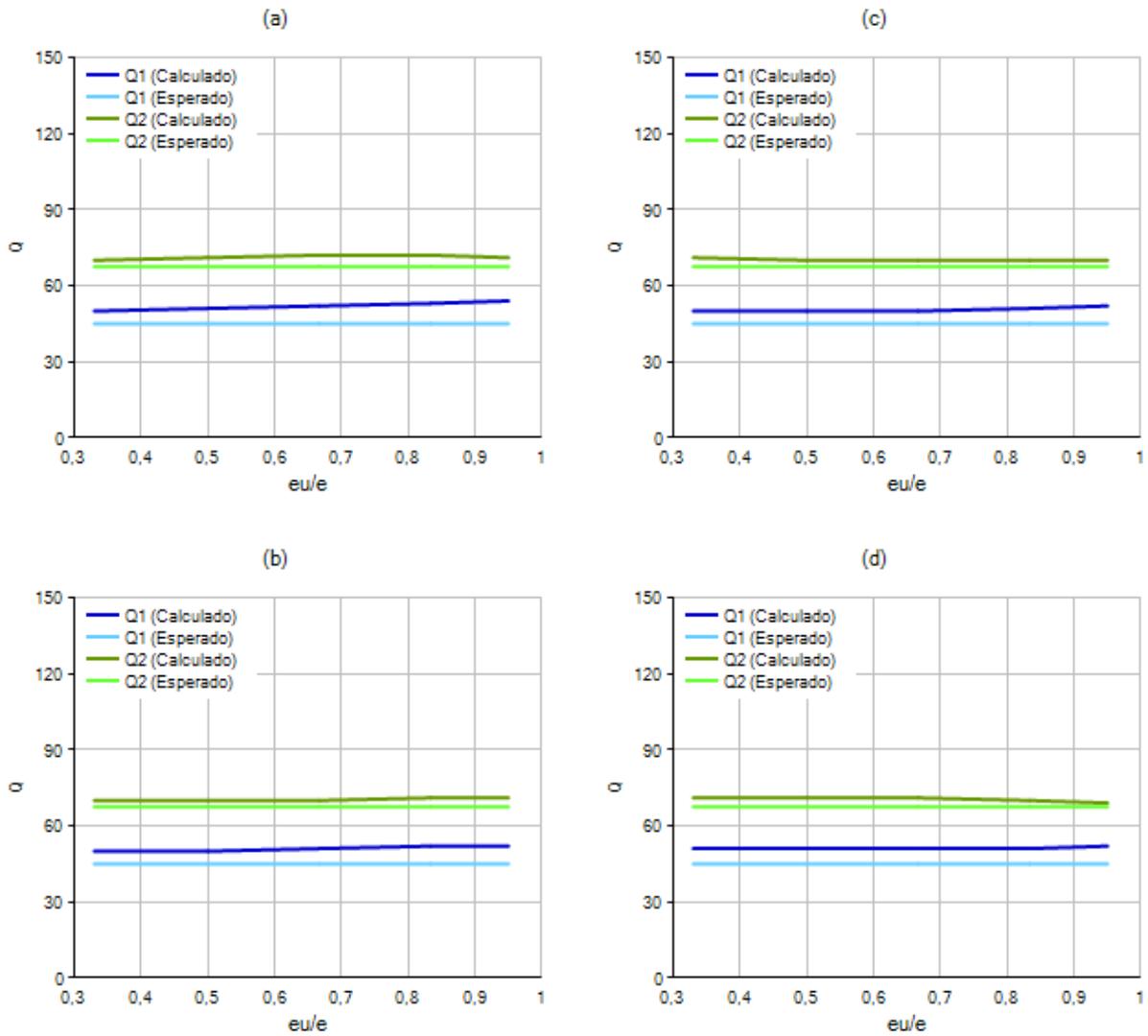


Figura 3.35. Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 1$, $\rho = 0.60$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $\nu_1 = 0.40$, $\nu_2 = 0.60$, $\nu_3 = 0.80$, $\nu_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d. Autor.

CAPÍTULO 3

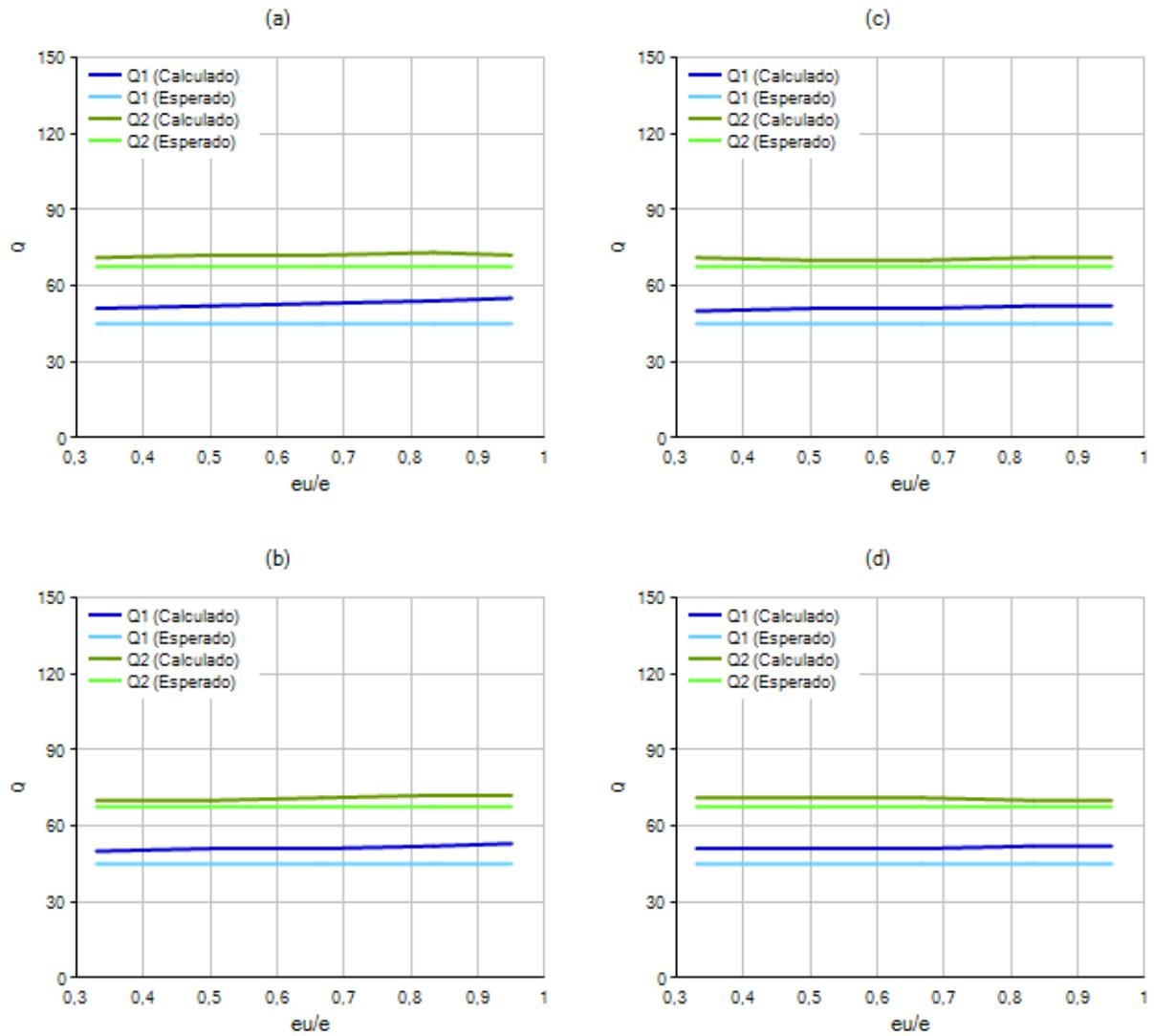


Figura 3.36. Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 1$, $\rho = 0.80$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $\nu_1 = 0.40$, $\nu_2 = 0.60$, $\nu_3 = 0.80$, $\nu_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d. Autor.

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA
 ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

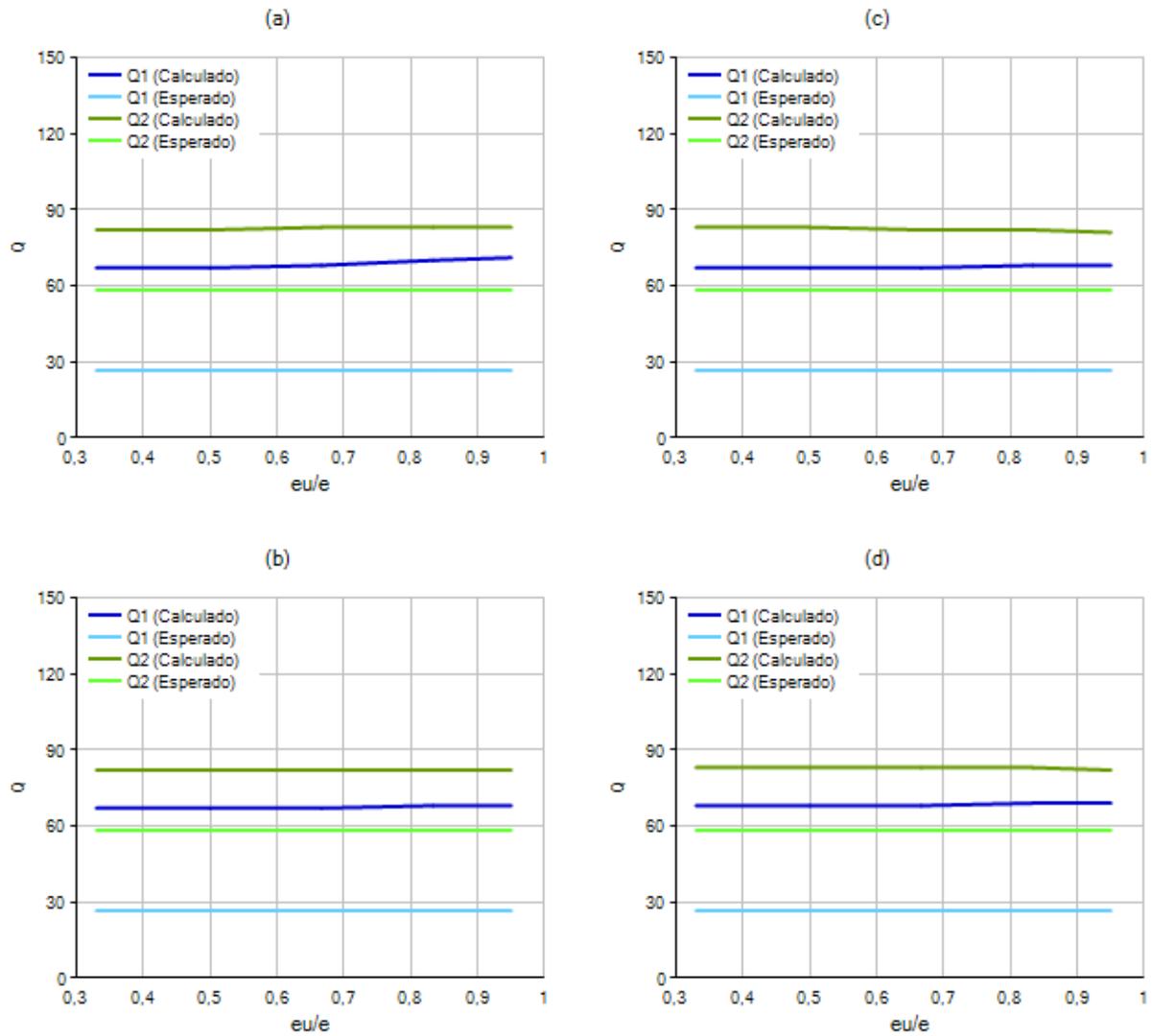


Figura 3.37. Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 2$, $\rho = 0.20$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $\nu_1 = 0.40$, $\nu_2 = 0.60$, $\nu_3 = 0.80$, $\nu_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d. Autor.

CAPÍTULO 3

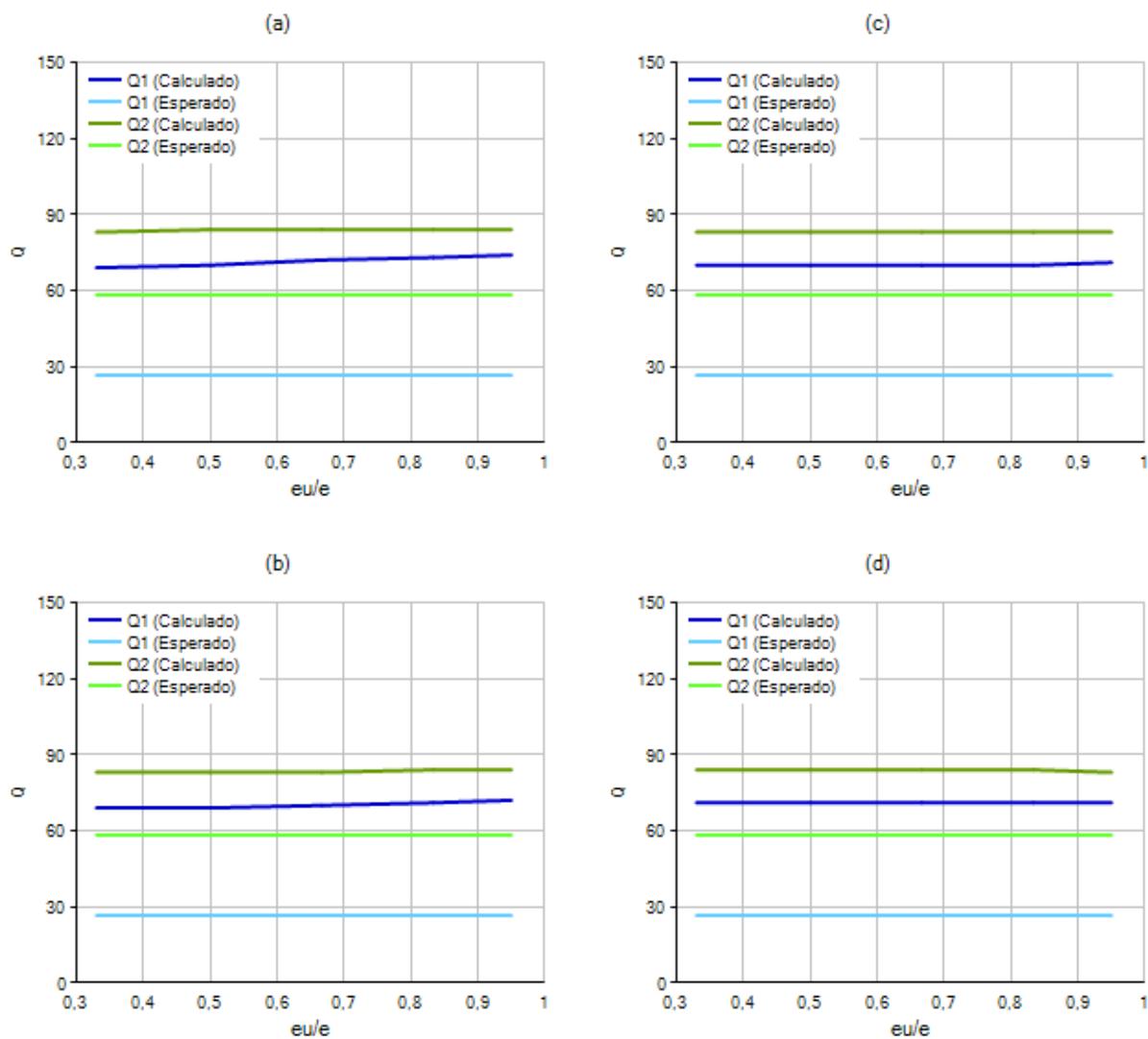


Figura 3.38. Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 2$, $\rho = 0.40$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $\nu_1 = 0.40$, $\nu_2 = 0.60$, $\nu_3 = 0.80$, $\nu_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d. Autor.

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA
 ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

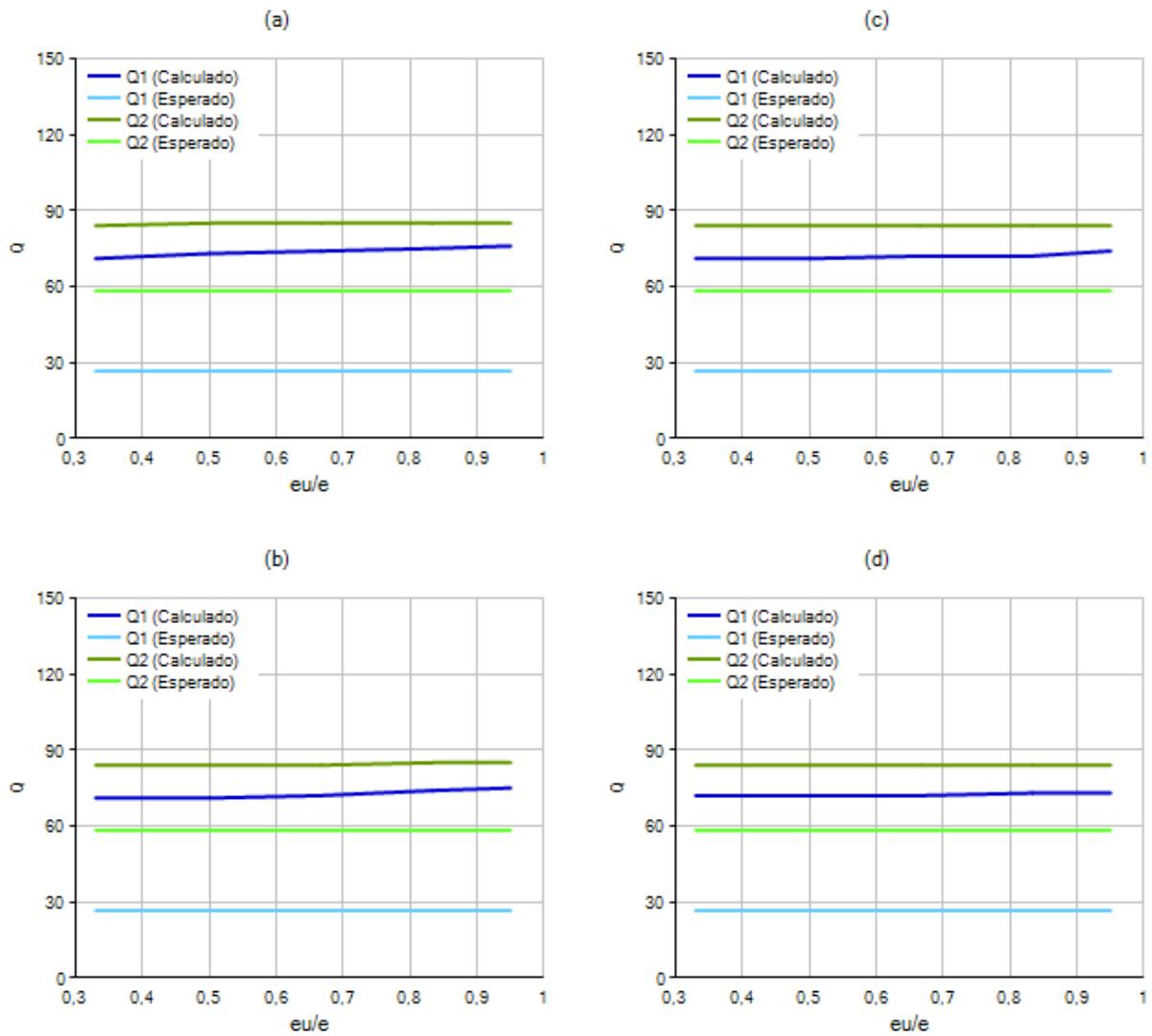


Figura 3.39. Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 2$, $\rho = 0.60$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $\nu_1 = 0.40$, $\nu_2 = 0.60$, $\nu_3 = 0.80$, $\nu_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d. Autor.

CAPÍTULO 3

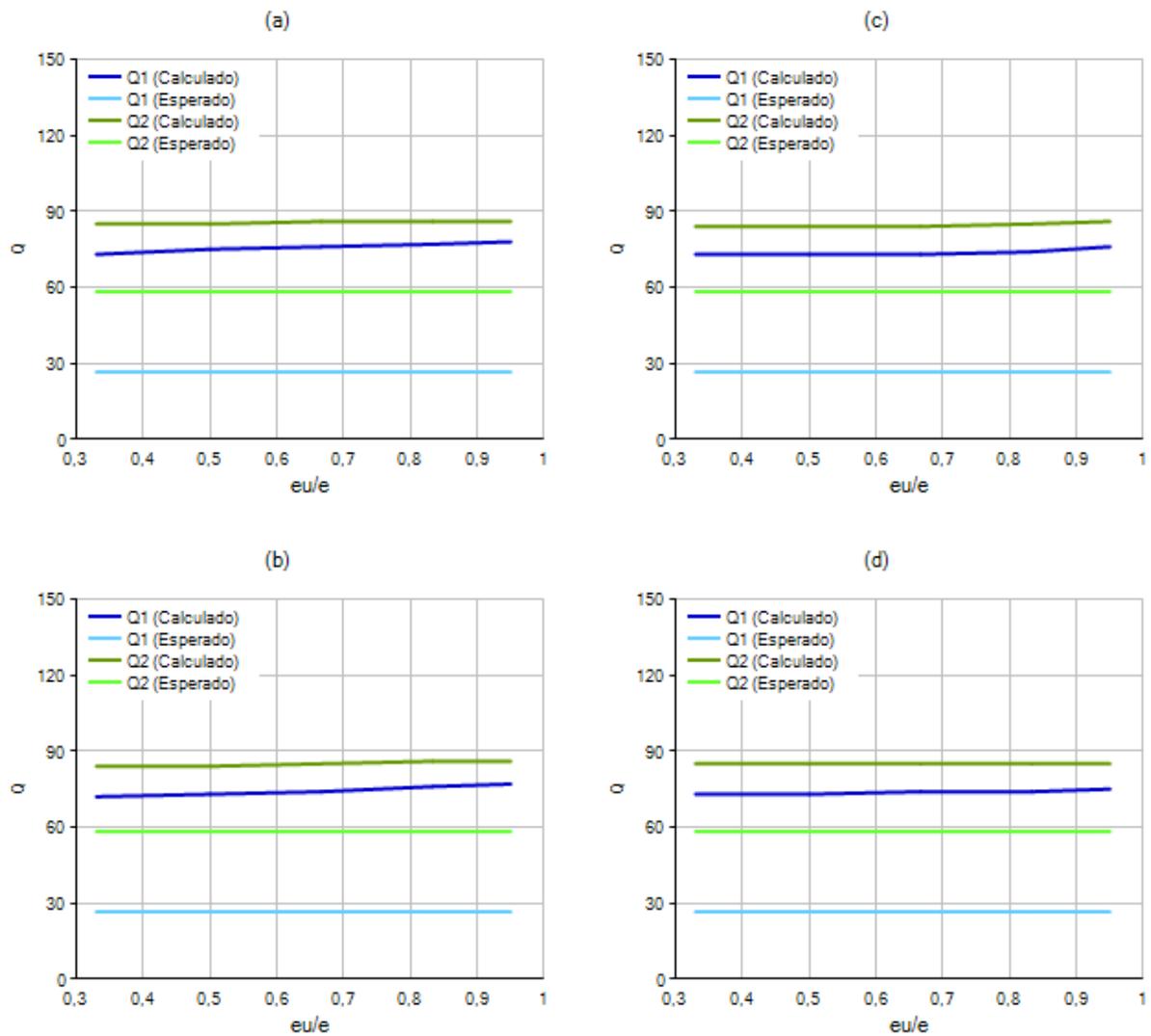


Figura 3.40. Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 2$, $\rho = 0.80$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $\nu_1 = 0.40$, $\nu_2 = 0.60$, $\nu_3 = 0.80$, $\nu_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d. Autor.

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA
 ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

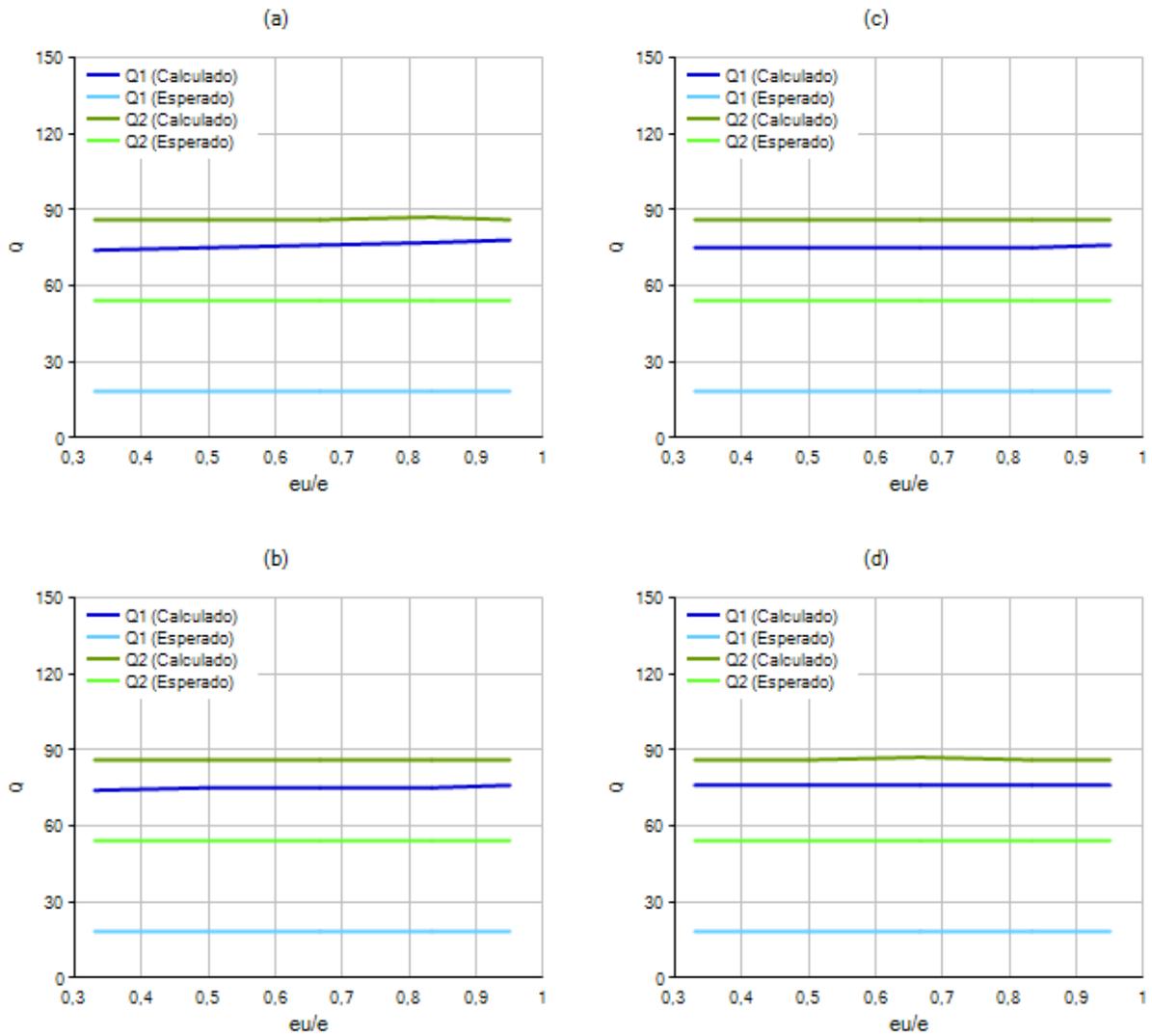


Figura 3.41. Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 3$, $\rho = 0.20$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $\nu_1 = 0.40$, $\nu_2 = 0.60$, $\nu_3 = 0.80$, $\nu_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d. Autor.

CAPÍTULO 3

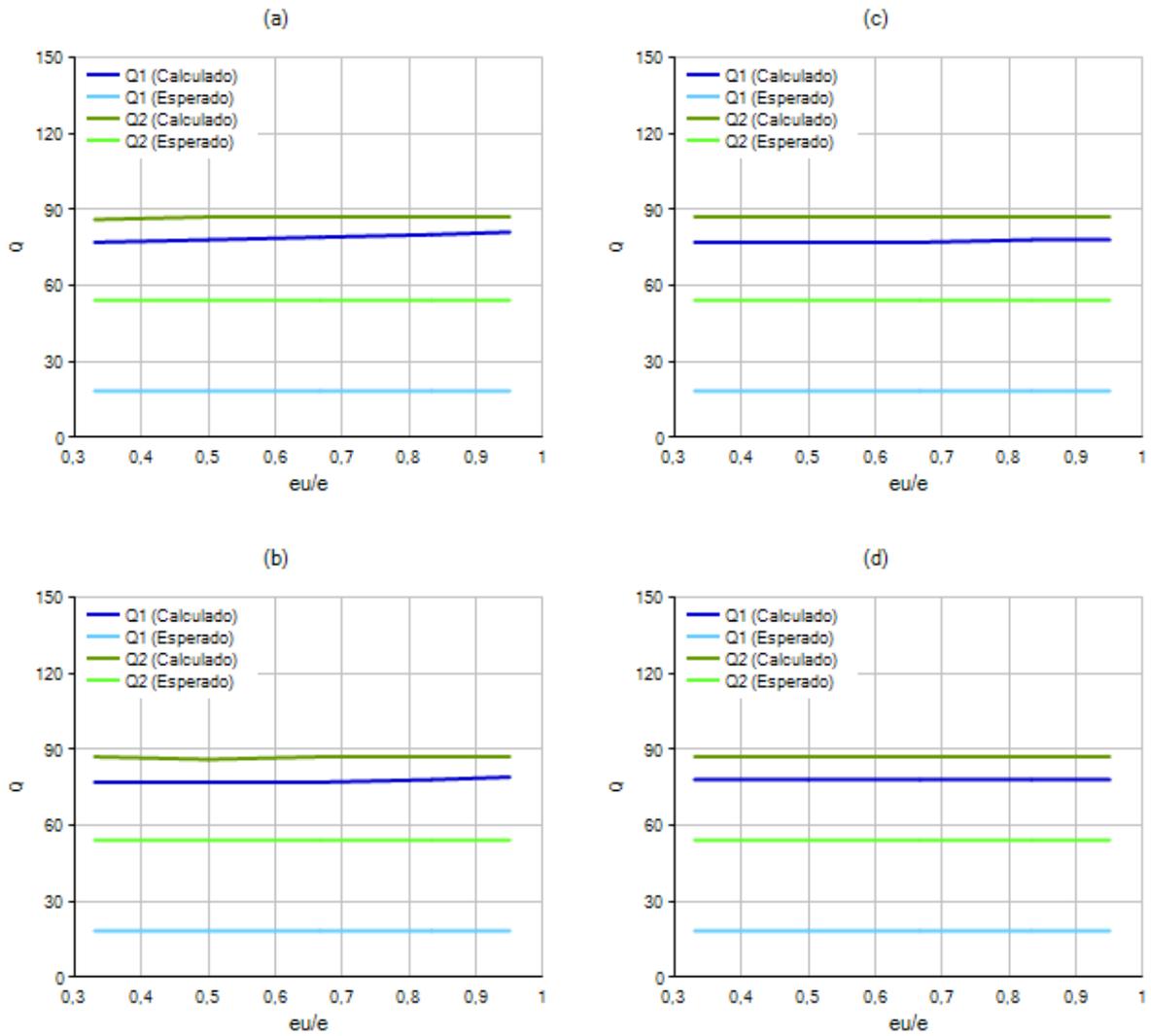


Figura 3.42. Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 3$, $\rho = 0.40$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $\nu_1 = 0.40$, $\nu_2 = 0.60$, $\nu_3 = 0.80$, $\nu_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d. Autor.

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA
 ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

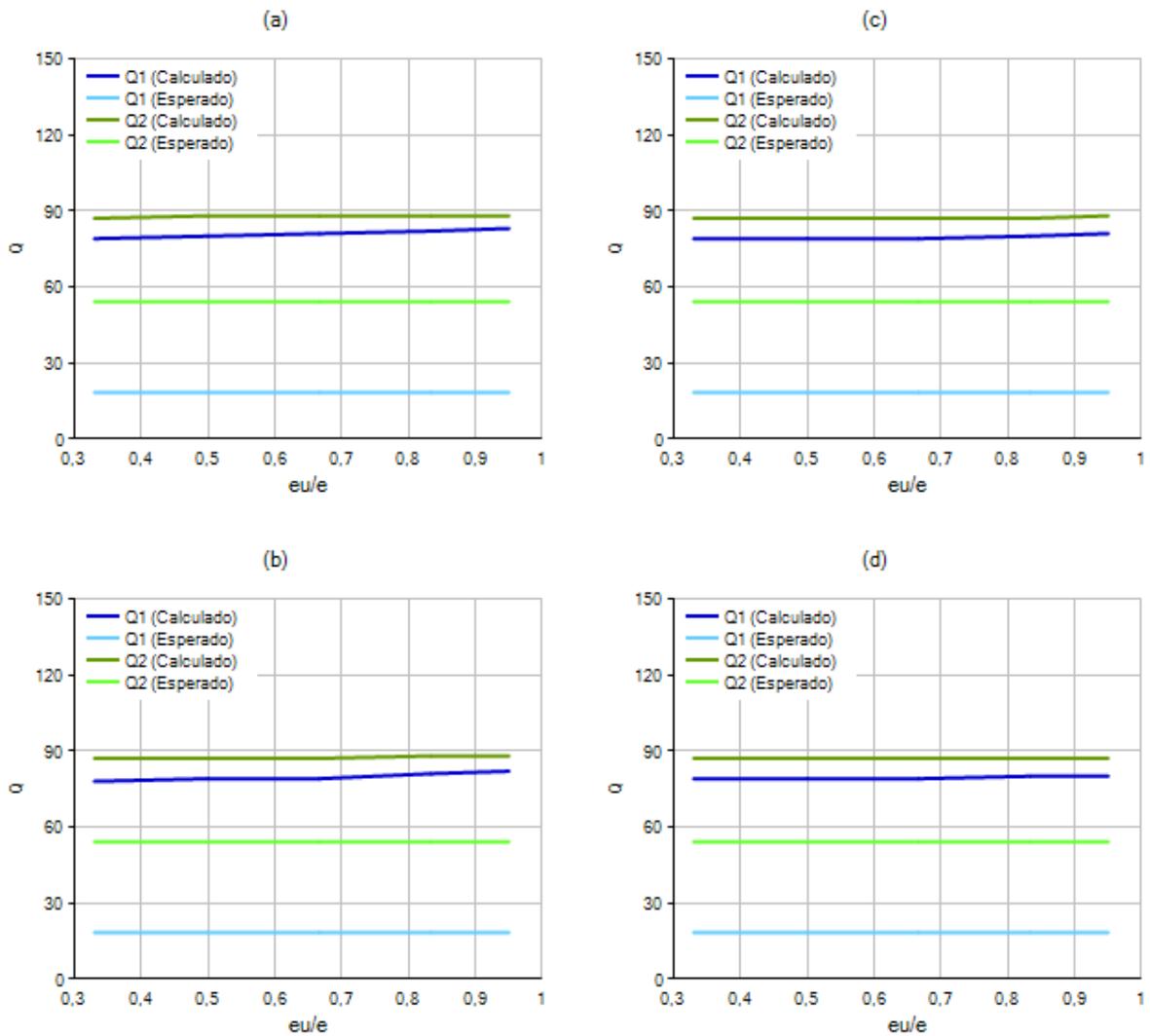


Figura 3.43. Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 3$, $\rho = 0.60$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro ejes distintos $\nu_1 = 0.40$, $\nu_2 = 0.60$, $\nu_3 = 0.80$, $\nu_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d. Autor.

CAPÍTULO 3

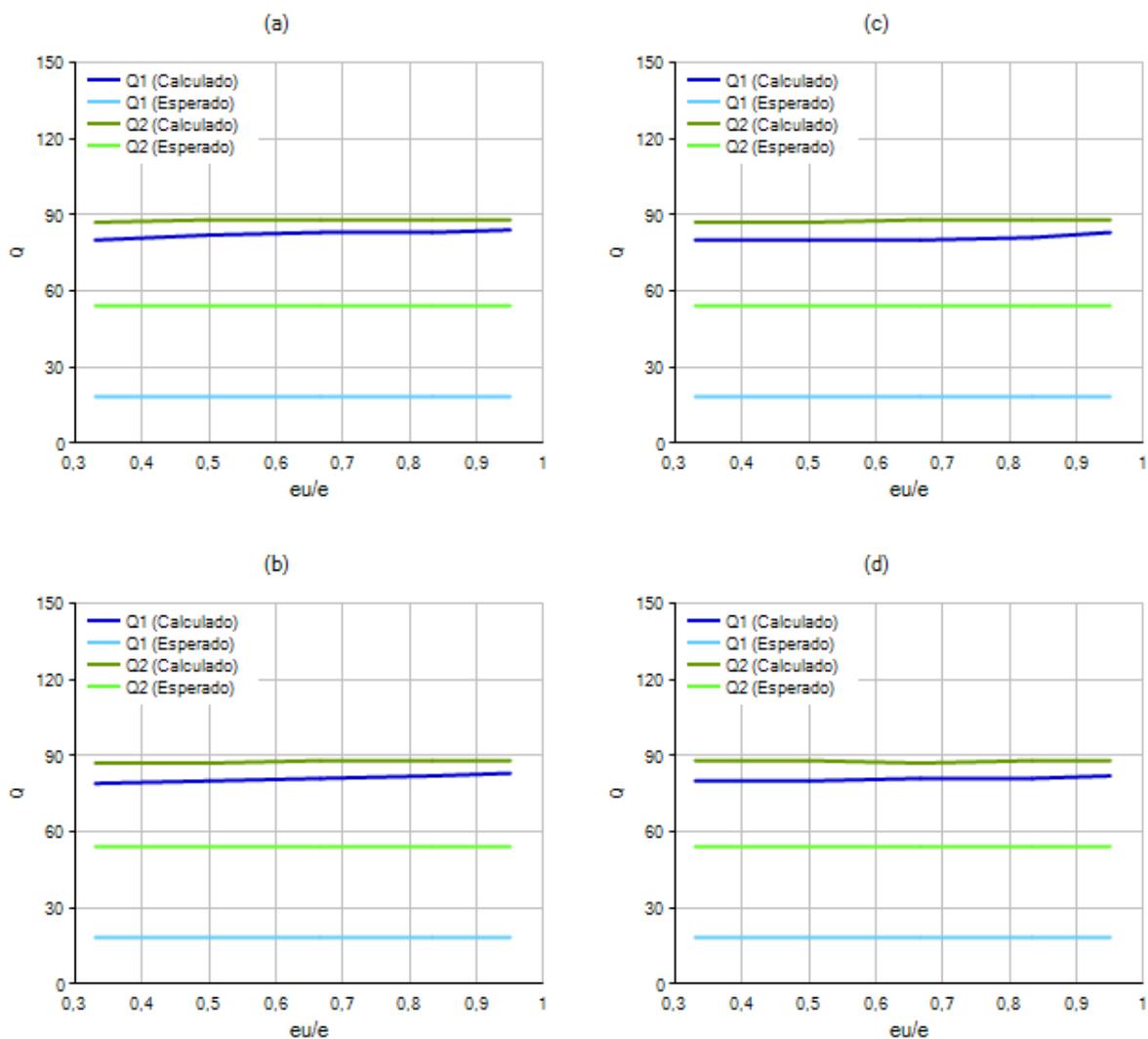


Figura 3.44. Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 3$, $\rho = 0.80$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $\nu_1 = 0.40$, $\nu_2 = 0.60$, $\nu_3 = 0.80$, $\nu_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d. Autor.

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA
 ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

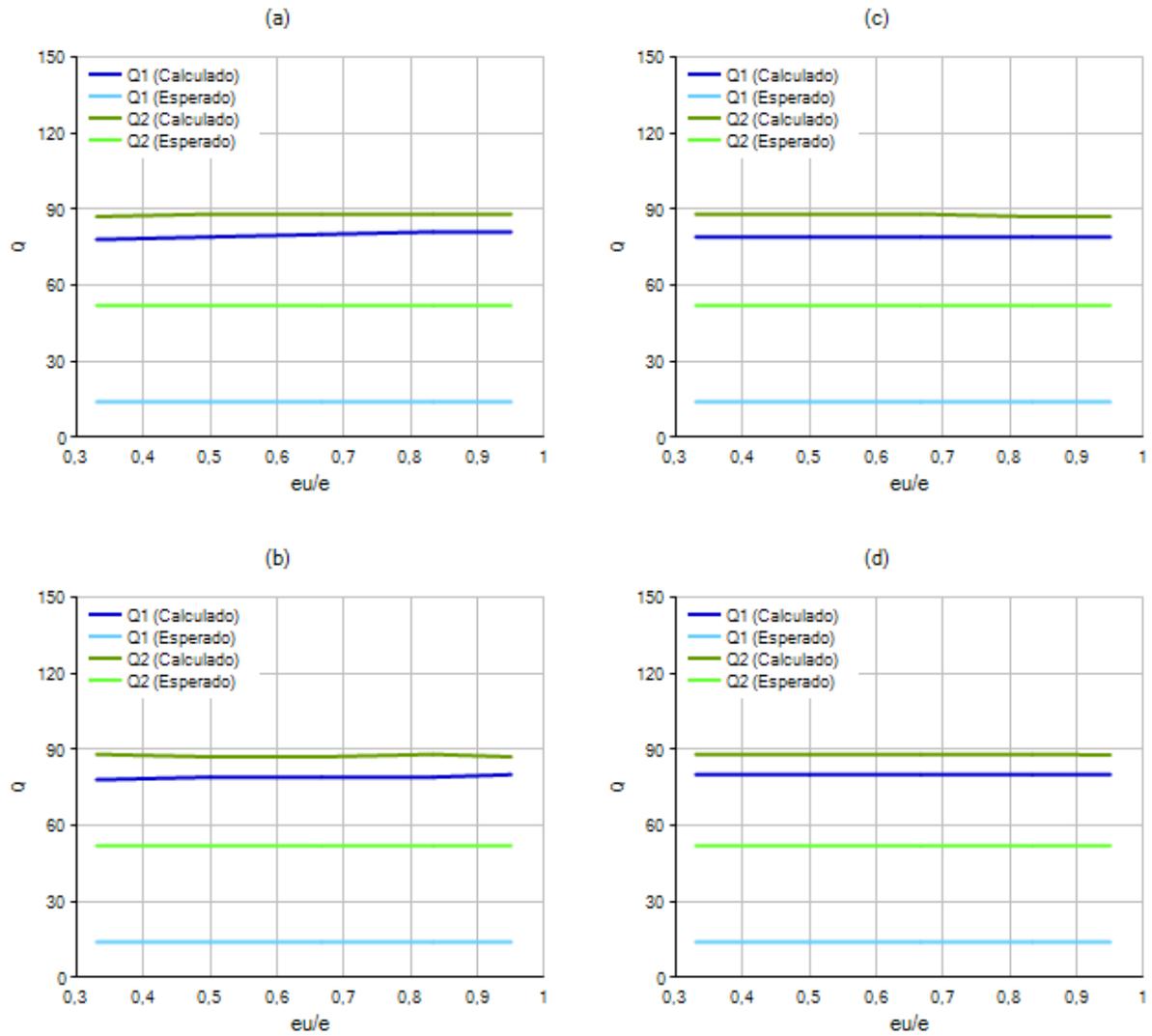


Figura 3.45. Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 4$, $\rho = 0.20$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $\nu_1 = 0.40$, $\nu_2 = 0.60$, $\nu_3 = 0.80$, $\nu_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d. Autor.

CAPÍTULO 3

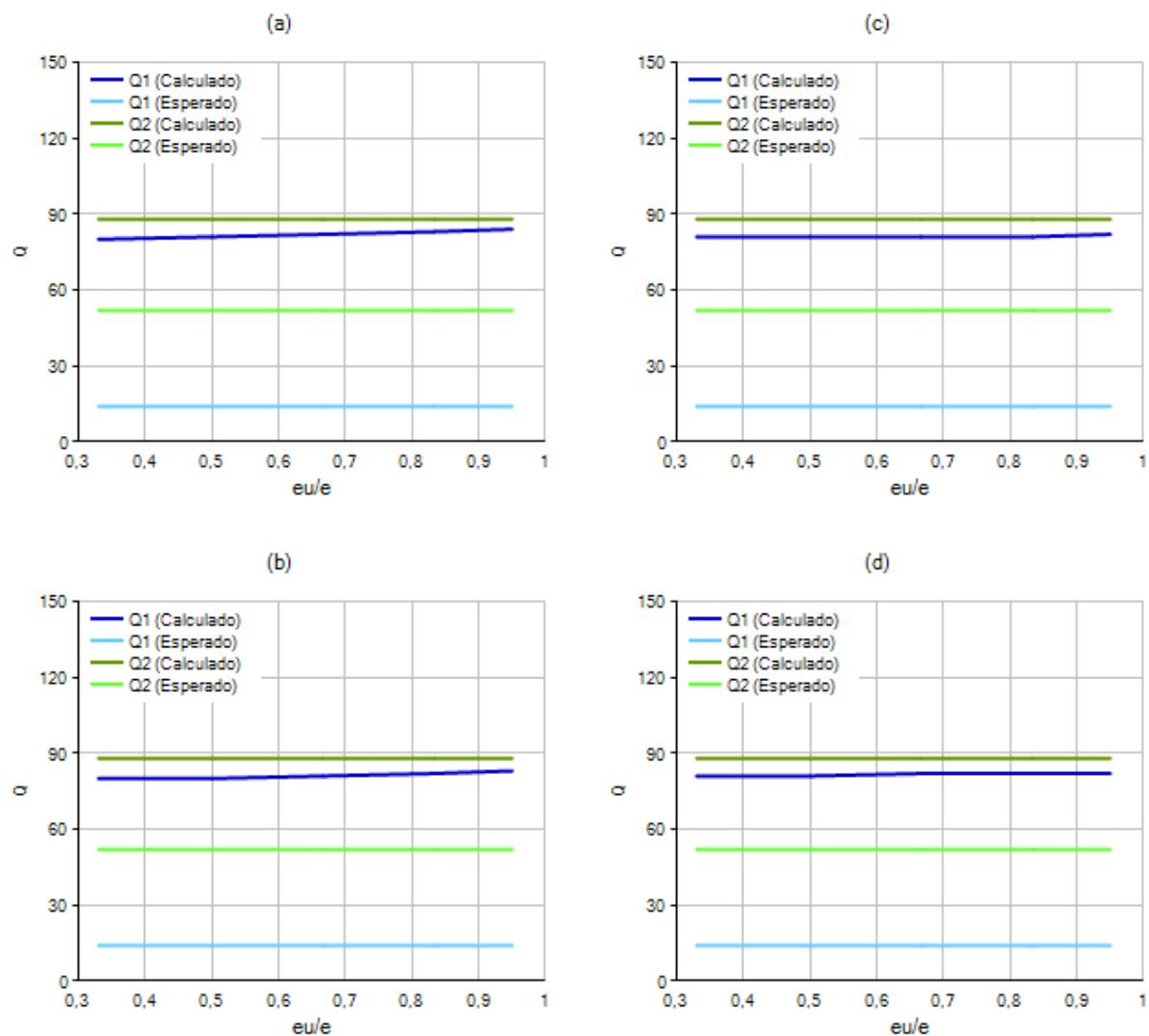


Figura 3.46. Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 4$, $\rho = 0.40$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $\nu_1 = 0.40$, $\nu_2 = 0.60$, $\nu_3 = 0.80$, $\nu_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d. Autor.

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA
 ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

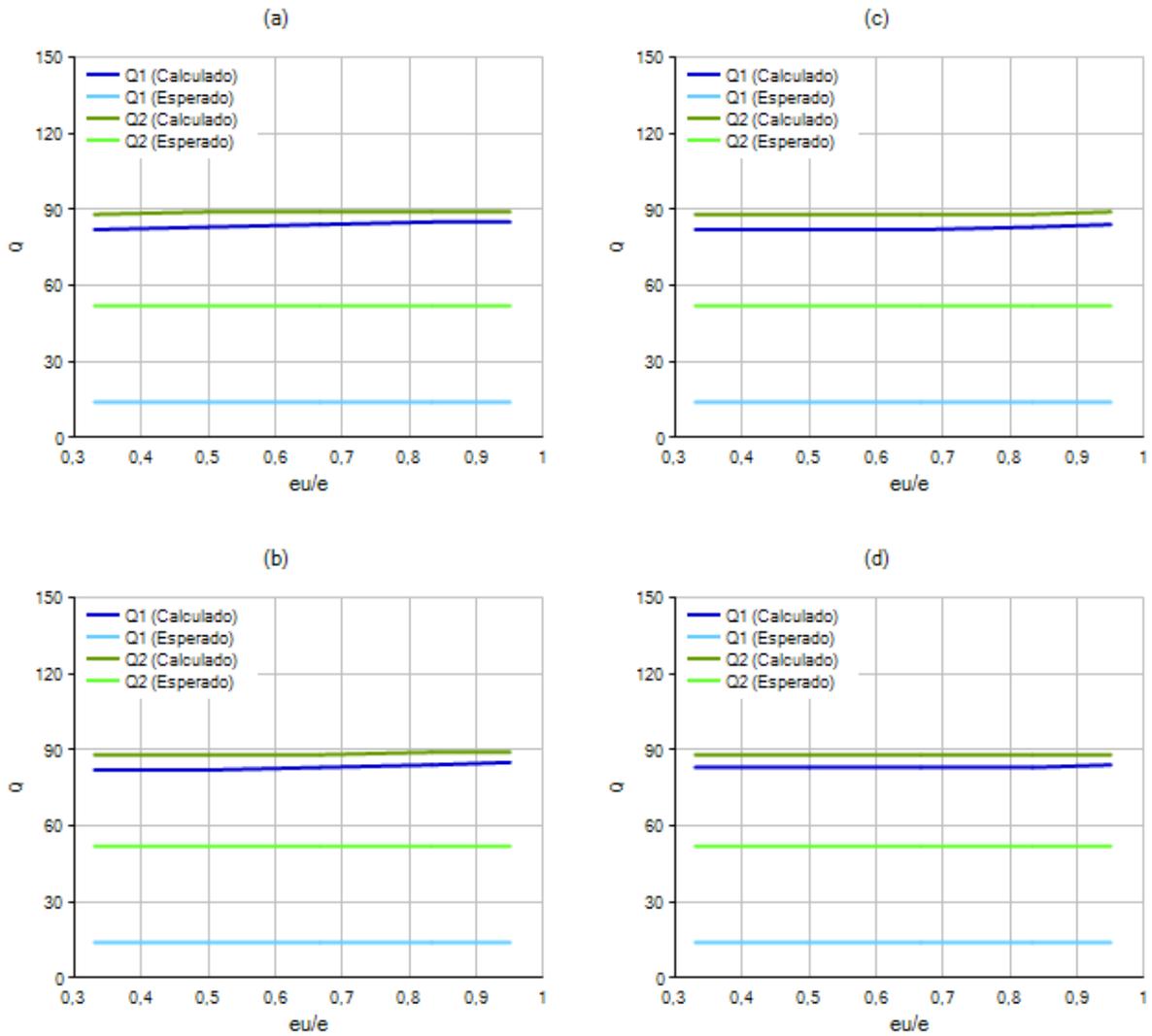


Figura 3.47. Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 4$, $\rho = 0.60$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $\nu_1 = 0.40$, $\nu_2 = 0.60$, $\nu_3 = 0.80$, $\nu_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d. Autor.

CAPÍTULO 3

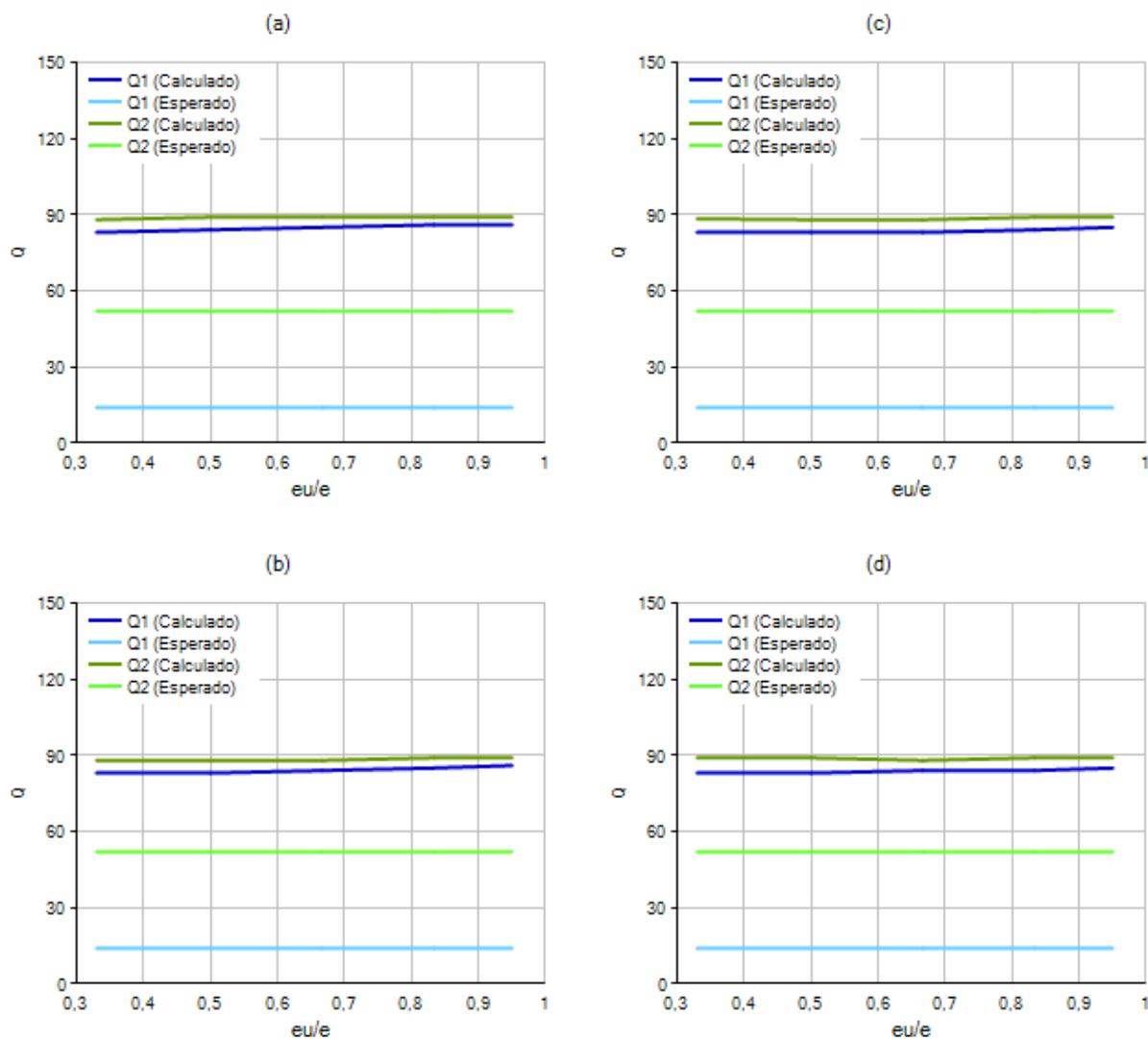


Figura 3.48. Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 4$, $\rho = 0.80$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $\nu_1 = 0.40$, $\nu_2 = 0.60$, $\nu_3 = 0.80$, $\nu_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d. Autor.

ANÁLISIS NO LINEAL DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA. MÉTODO DE LA DIFERENCIA MÍNIMA DE CURVATURAS.

3.4.4.2 Discusión de los resultados obtenidos.

Se ha constatado que para el 96.5% de los puntos determinados, (618 puntos), de las curvas analizadas el modelo de Farah y Huggins ha convergido a un giro en equilibrio de valor igual al obtenido mediante el MDMC. Por otra parte, para el 0.94 % de los puntos determinados, (6 puntos), la diferencia entre el giro de equilibrio determinado mediante el modelo de Farah y Huggins y el determinado por el MDMC la diferencia es inferior a un grado. Para el 2.5 % de los puntos determinados, (16 puntos), no se ha logrado la convergencia mediante el modelo de Farah y Huggins partiendo de la solución determinada por el MDMC.

Luego es posible afirmar que para el 96.5 % se ha alcanzado un nivel de precisión superior al 98% mediante el MDMC respecto a la solución de referencia, y que para el 97.5% de los puntos, la solución lograda mediante el modelo de Farah y Huggins no difiere en más de un grado respecto a la solución obtenida por el MDMC.

Es importante reparar en el hecho de que en condiciones de relativa simetría mecánica entre los ejes de la sección, (figuras 3.31 a 3.36) las diferencias entre los giros del eje neutro calculados y las direcciones de los giros del eje neutro (perpendicular al vector exterior de solicitaciones), son reducidas. Podría pensarse que establecer a priori el rumbo del eje neutro según la dirección perpendicular a la dirección de la solicitación exterior podría ser válido.

Sin embargo se observa que a medida que la relación entre capacidades últimas de la sección respecto a cada uno de los ejes de simetría aumenta (se incrementa la asimetría mecánica de la sección), la diferencia entre el rumbo que adopta el eje neutro en equilibrio respecto al valor perpendicular a la acción del vector exterior de solicitaciones, aumenta. Se han medido diferencias de 72° en las situaciones de máxima asimetría simuladas.

Luego dada la alta rotación que puede llegar a adoptar el eje neutro respecto a la posición esperada en condiciones de asimetría mecánica o solicitación esviada, se demuestra necesario llevar a cabo un análisis no lineal a nivel de sección con el que poder determinar el mapa real de deformaciones y tensiones en equilibrio. Y dado que se ha demostrado difícil de predecir el giro que adopta el eje neutro, surge la necesidad de investigar la afección que puede tener la

CAPÍTULO 3

estimación errónea de este giro en la determinación de la deformación y la tensión en las fibras características de la sección.

3.5 Resumen y conclusiones (capítulo 3).

Se ha expuesto en detalle un método de análisis no lineal de secciones de hormigón armado o pretensado sometidas a estados de sollicitación de compresión o flexión compuesta esviada. El método permite la determinación del plano de equilibrio para un estado cualquiera de esfuerzos exteriores (no necesariamente de agotamiento) y es de aplicación para secciones transversales de geometría genérica. Se toma en consideración en el análisis el comportamiento tensión deformación de los materiales en todo el dominio de deformaciones compatible con cada uno de ellos, y permite el empleo de materiales definidos por ecuaciones constitutivas arbitrarias.

El método se basa en la universalización del tratamiento no lineal de una sección analizada en compresión o flexión compuesta recta mediante el diagrama momento curvatura que la define para el axil exterior de diseño, en el que mediante un procedimiento iterativo se logra determinar el giro del eje neutro para el cual la resultante de los esfuerzos a nivel de sección equilibra los esfuerzos exteriores de manera *precisa*.

Se ha realizado una campaña de ensayos numéricos en los que se ha comparado el giro del eje neutro determinado por el MDMC para secciones con asimetrías mecánicas, cuantías, y axiles crecientes con el valor del giro del eje neutro para las mismas condiciones geométricas y mecánicas determinado mediante el modelo de Farah y Huggins, considerado valor de referencia en este tesis, y se han observado para ambos modelos valores muy próximos en las coordenadas de los planos de equilibrio. No obstante se observa que al tiempo que aumenta la asimetría mecánica de la sección y el axil exterior, la diferencia entre el rumbo que adopta el eje neutro y la dirección perpendicular a la acción del momento exterior, aumenta. Se han observado diferencias de 72° entre estas dos direcciones. Por este motivo es preciso de desarrollar un modelo de cálculo universal y robusto, con el que poder investigar este hecho.

4. ANÁLISIS EXPERIMENTAL

En el contexto de la presente tesis se hace necesario llevar a cabo ensayos controlados en laboratorio de cuyos resultados se extraigan conclusiones que abunden en el tema fundamental investigado: el comportamiento no lineal de secciones de hormigón armado sometidas a estados generales de compresión y flexión esviada, así como validar el modelo propuesto.

Para ello se plantean dos ensayos distintos con los que tratar de establecer una estrategia válida que sugiera el camino a seguir en una campaña experimental más extensa. Los dos ensayos llevados a cabo en esta tesis se describen seguidamente:

- Soporte corto de hormigón sometido a un axil excéntrico según las dos direcciones principales de simetría de la sección, imponiendo para un mismo nivel de axil tres excentricidades distintas. El objetivo de este primer ensayo es constatar que, para a un rumbo constante de excentricidad y un mismo nivel de compresión, el giro que adopta el eje neutro en equilibrio no presenta una relación directa con la dirección de la excentricidad, verificando la ausencia de necesaria perpendicularidad entre ambas direcciones: dirección de la excentricidad exterior y rumbo del eje neutro en equilibrio.
- Soporte corto de hormigón sometido a un estado de flexión compuesta esviada. Para materializar este segundo ensayo, se impone un axil con una excentricidad según el eje principal de simetría de la sección mediante un tesado exterior de valor constante. En

este estado de compresión y flexión recta¹⁰², se ensaya el prototipo construido a flexión, como una viga doblemente apoyada, sometida a una carga puntual creciente en el centro de su vano hasta el agotamiento. El objetivo de este segundo ensayo es observar cómo evoluciona el rumbo que adopta el eje neutro en equilibrio bajo un axil y una excentricidad constante al tiempo que se aplica un momento flector creciente en el eje perpendicular, y observar en qué rangos de aprovechamiento de la sección la diferencia entre la dirección de la excentricidad y la dirección perpendicular alcanza un valor máximo.

Estos dos ensayos se simulan numéricamente mediante la aplicación desarrollada (implementación del MDMC) y se comparan y analizan los resultados obtenidos durante la fase experimental con los valores teóricos esperados.

4.1 Ensayos de laboratorio

4.1.1 Descripción de los prototipos ensayados.

Los ensayos se llevan a cabo en el Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja, organismo adscrito al CSIC durante el desarrollo de la presente tesis y se realizan sobre un mismo modelo de prototipo construido por duplicado cuya definición geométrica y de armadura se muestra en la figura 4.1. En la figura 4.2 puede observarse el aspecto final de la armadura del soporte antes de la fase de hormigonado.

El prototipo construido presenta dos tipos de sección transversal a lo largo de su directriz. En los extremos la sección S1 presenta cuatro barras de armadura longitudinal con el propósito de evitar el fallo prematuro de la pieza por aplicación del axil en las proximidades del borde libre. Así mismo estas barras longitudinales son necesarias para disponer la armadura transversal que eviten el fallo de la pieza por esfuerzo cortante. En la sección central S2 (sección de referencia), una de las barras longitudinales de armadura se interrumpe generando que dicha sección presente

¹⁰² Es preciso indicar que se trata de un estado de aparente flexión recta puesto que, pieza ensayada posee una asimetría mecánica debido a la distribución de armadura. La simetría de la pieza está presente solamente en cuanto a la geometría de la sección (rectángulo).

CAPÍTULO 4

asimetría mecánica y motivando una respuesta no lineal en cada escalón de excentricidad o carga exterior.

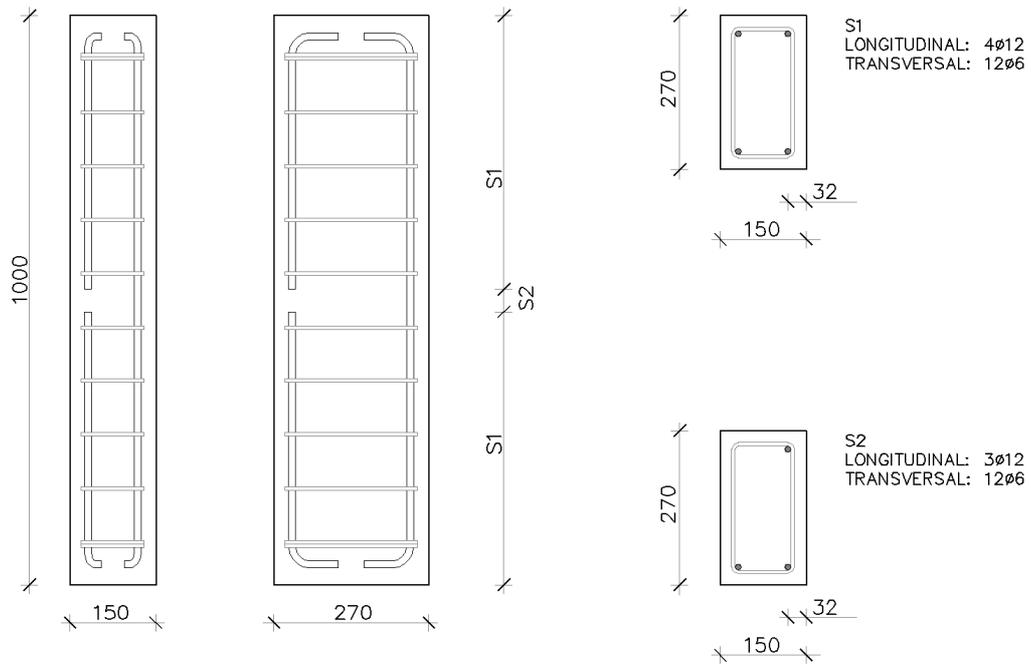


Figura 4.1. Diseño del prototipo de hormigón ensayado. Autor.



Figura 4.2. Armadura de uno de los soportes construidos previo a su hormigonado. Autor.

En cuando a los materiales empleados en la fabricación de los dos prototipos ensayados se describen seguidamente:

- **Hormigón**

Se ha empleado un hormigón HA-30. Debido a la alta sensibilidad del problema se ha llevado a cabo un ensayo destructivo de una probeta cilíndrica de 15x30 cm. a fin de caracterizar su comportamiento y obtener la curva tensión-deformación que lo describe. La probeta instrumentada durante el ensayo se muestra en la figura 4.3.

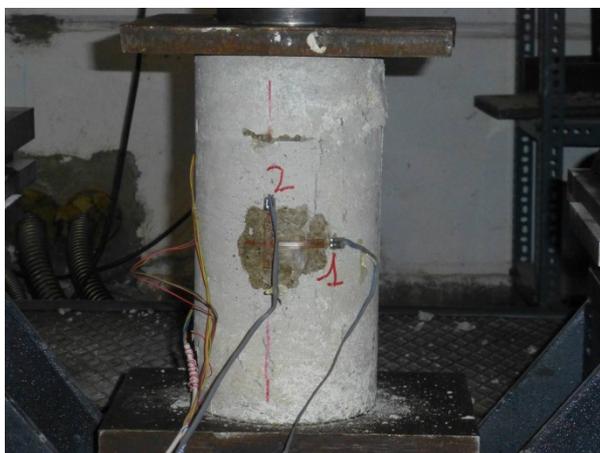


Figura 4.3. Probeta de hormigón ensayada a compresión hasta su agotamiento. Autor.

Se colocan sobre la probeta seis instrumentos de medida en la sección central dispuestos a 120°. Tres de ellas recogen las de deformación longitudinal y otros tres la deformación transversal. De la lectura de las tres galgas longitudinales se ha obtenido la curva tensión-deformación que se muestra en la figura 4.4.

CAPÍTULO 4

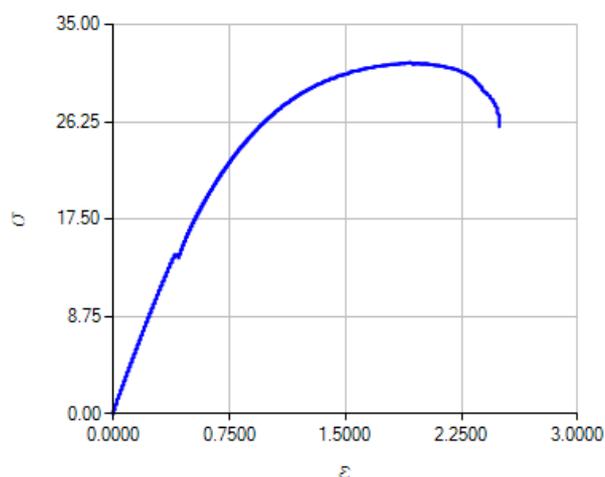


Figura 4.4. Curva tensión-deformación del hormigón de los prototipos ensayados. Autor

En la determinación de la curva se ha tomado para cada instante de tiempo el valor medio de la deformación de las tres galgas dispuestas sobre la probeta. En la curva de la figura 4.4 puede apreciarse una discontinuidad para una carga próxima a 250 kN (14.14 MPa) debido a que la primera parte del ensayo, zona del material con comportamiento sensiblemente elástico y lineal, se realiza con control de carga, mientras que la segunda parte del ensayo se realiza mediante control de desplazamiento con una velocidad de 0.5 mm/min. Se ha obtenido una tensión máxima de 31.61 MPa para una deformación de 1.92‰. El agotamiento del material se ha logrado en una deformación de 2.50‰, punto en el que la tensión alcanza un valor de 25.86 MPa.

Es posible llevar a cabo un ajuste numérico de la curva tensión-deformación obtenida de manera experimental mediante la expresión incluida en los comentarios de la EHE-08, [4.1], modificando la rama descendente y rectificando la caída abrupta de tensión por el fallo de la probeta durante el ensayo. La ecuación constitutiva se determina seguidamente:

$$\sigma_c = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k - 2)\eta} f_{cm} \quad \text{para } \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu} \quad [4.1]$$

Dónde:

$$\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c0}} \quad [4.2]$$

$$k = 1.0 + 2.0e^{\left(\frac{-f_{cm}}{40}\right)} \quad [4.3]$$

Para la probeta ensayada y los valores de deformación y tensión obtenidos, si se ajusta la expresión [4.3] por un valor constante de 150 en lugar de 40 establecido en la EHE-08, se logra una aproximación adecuada a la curva experimental. De esta manera, valor k de la expresión [4.3], queda tal como se recoge en [4.4].

$$k = 1.0 + 2.0e^{\left(\frac{-f_{cm}}{150}\right)} \quad [4.3]$$

Asimismo, el valor de la deformación en agotamiento se limita según la expresión [4.4].

$$\varepsilon_{cu} = \left(k - \frac{k-1}{k^3}\right) \varepsilon_{c0} \quad [4.4]$$

En el caso expuesto en esta tesis, la curva que resulta de este ajuste numérico se muestra en la figura 4.5 en la que se ha obtenido un valor de $\varepsilon_{cu} = 2.536\%$.

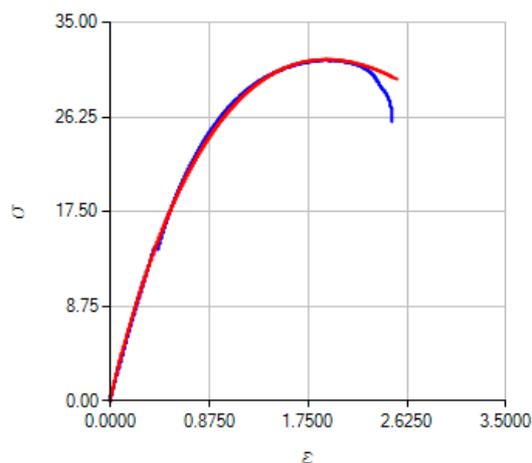


Figura 4.5. Curva tensión-deformación modificada numéricamente mediante la expresión facilitada en la EHE-08 y curva tensión-deformación obtenida del ensayo. Autor.

CAPÍTULO 4

Se ha representado (figura 4.5) junto con la curva obtenida de manera experimental (azul), la curva que resulta de emplear la expresión [4.1] para deformaciones inferiores a la deformación determinada mediante la expresión [4.4] (rojo). Se puede apreciar con claridad que el ajuste es adecuado y que se ha corregido la caída súbita de tensión en la parte final del material por el fallo de la probeta durante el ensayo.

Para las simulaciones numéricas de los ensayos llevados a cabo en laboratorio se ha empleado la curva tensión-deformación para la caracterización del hormigón que se muestra en la figura 4.6.

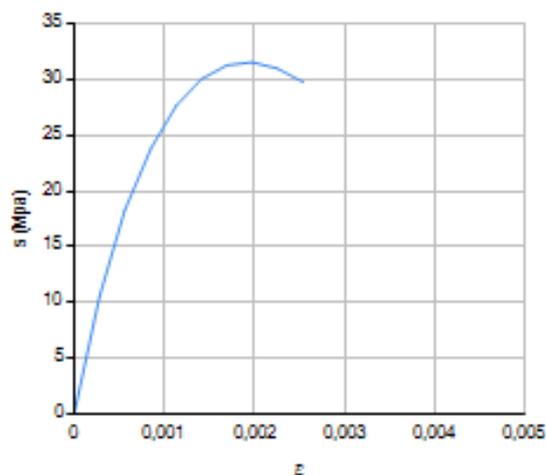


Figura 4.6. Curva tensión-deformación para el hormigón empleada en el análisis numérico. Autor.

- **Acero**

Se ha empleado un acero B500SD, y se ha utilizado la curva tensión-deformación recogida en la EHE-08 en la que una vez alcanzado el límite elástico, se ha supuesto una rama horizontal hasta la deformación de agotamiento (10.00‰).

Para las simulaciones numéricas de los ensayos llevados a cabo en laboratorio se ha empleado la curva tensión-deformación para la caracterización del acero que se muestra en la figura 4.7.

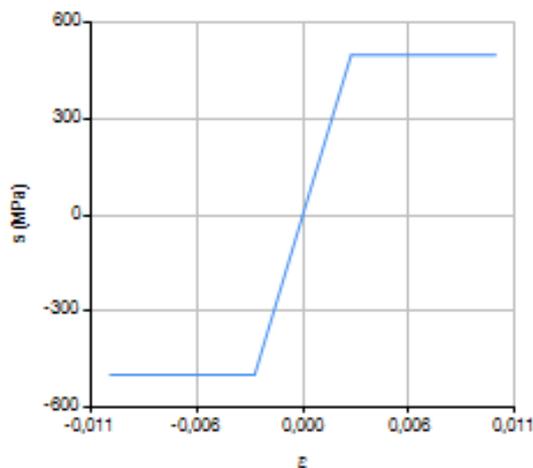


Figura 4.7. Curva tensión-deformación para el acero empleada en el análisis numérico. Autor.

4.1.2 Descripción de los medios de laboratorio y aparatos de instrumentación.

A continuación se describen los equipos, sensores, y demás medios empleados en los ensayos:

- Máquina universal de ensayo Instron 8805 de 1000 kN, clase 1.
- Equipo de medida extensométrico HBM QuantumX.
- Galgas interiores para acero: TML FLA-1-11-1L.
- Galgas exteriores para hormigón: TML PL-30-11-1L.
- Software CatmanEasy de HBM.

4.1.3 Ensayo 1. Soporte corto de hormigón armado sometido a compresión constante y excentricidad creciente.

4.1.3.1 Descripción del ensayo.

Se aplica un axil de compresión creciente hasta el valor objetivo de 310 kN en el extremo superior del soporte. La carga se aplica en tres puntos distintos, lo cual equivale a solicitar la pieza mediante un axil de compresión y tres momentos flectores de distinto valor. Las tres

CAPÍTULO 4

excentricidades escogidas se sitúan en la misma dirección (θ) de manera que se verifique la expresión [4.5] para los tres estados de carga. El axil se aplica a una velocidad de 1 kN/s.

$$\frac{e_y}{e_x} = \tan \theta \quad [4.5]$$

La tabla 4.1 muestra las excentricidades ensayadas en cada caso así como los momentos flectores que solicitan la sección del prototipo referidos a los ejes de simetría de la sección transversal¹⁰³.

Escalón de carga	Axil (kN)	θ (°)	e (mm)	e_x (mm)	e_y (mm)	M_x (kN·m)	M_y (kN·m)
1	310	67.34	10.00	3.85	9.23	2.86	1.19
2	310	67.34	50.00	19.26	46.14	14.30	5.97
3	310	67.64	81.00	31.21	74.75	23.17	9.67

Tabla 4.1. Definición de los estados de carga a los que se somete el soporte en el ensayo 1.

¹⁰³ La escuadría de la sección transversal ensayada es rectangular y presenta dos ejes de simetría si bien, por la configuración de armadura dispuesta, existe una fuerte asimetría mecánica. Esto implica que no sería posible llevar a cabo un análisis en compresión o flexión compuesta recta respecto a los ejes x, y de la sección, pues el rumbo del eje neutro no adoptaría un ángulo recto respecto de estas direcciones.



Figura 4.8. Imagen del soporte antes de comenzar el ensayo 1. Autor.

CAPÍTULO 4

En la figura 4.9 se muestra la posición de la carga en cada uno de los escalones de excentricidad definidos.

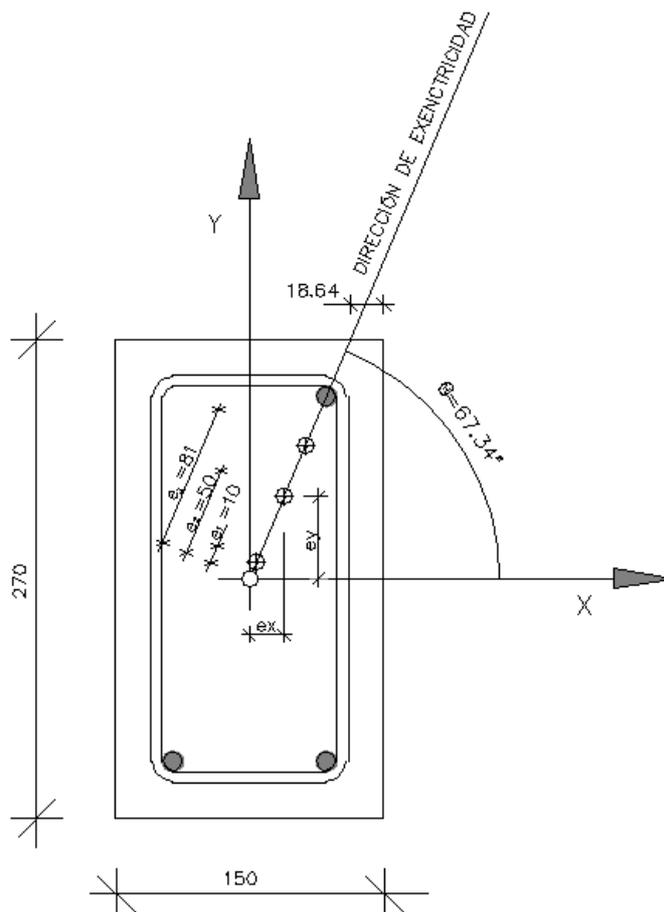


Figura 4.9. Esquema de aplicación de la carga en los tres escalones de excentricidad en el ensayo 1. Autor.

Para materializar el ensayo se coloca una placa circular de acero de 80 mm de diámetro (5026.54 mm^2) en cada una de las tres posiciones elegidas en el extremo inferior del soporte de manera que durante el ensayo se garantice que en la sección central (S2) la excentricidad de cálculo es la deseada en cada caso. En la figura 4.10 puede apreciarse la materialización del apoyo del soporte en la base durante el escalón 2 de excentricidad durante la ejecución del ensayo 1.



Figura 4.10. Detalle del apoyo inferior del soporte durante el ensayo 1. Autor.

Para la simulación numérica de este ensayo es preciso establecer un convenio de notación de los parámetros del plano de respuesta logrado en cada estado de sollicitación analizado. En adelante, los valores de profundidad de fibra neutra y su rumbo, así como la curvatura del plano serán coherentes con el esquema mostrado en la figura 4.11. También es necesario designar las barras de armadura y los puntos característicos del contorno exterior de la sección transversal de manera unívoca.

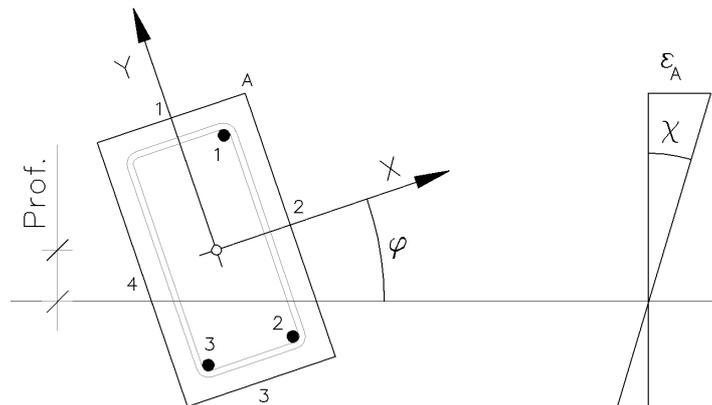


Figura 4.11. Esquema de las coordenadas del plano de equilibrio sobre la sección analizada en el ensayo 1. Autor.

4.1.3.2 Instrumentación.

Se colocan 10 bandas extensométricas en la sección de referencia (S2) sobre el prototipo ensayado. En las tres barras de acero se disponen de manera redundante dos bandas en cada una de ellas. Igualmente se han instalado cuatro bandas en el exterior del soporte, una en cada cara del mismo. Con objeto de identificar la lectura de cada una de estas bandas durante el ensayo se designa según el esquema mostrado en la figura 4.12.

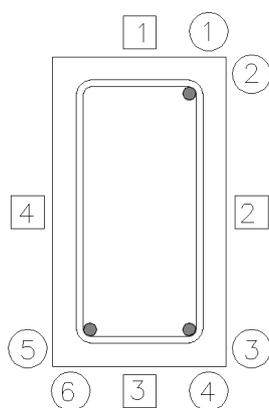


Figura 4.12. Posición y designación de bandas extensométricas en el soporte en el ensayo 1. Círculos designan bandas colocadas en las barras de armadura. Cuadrados designan bandas situadas en la cara exterior del prototipo.

Autor.

Cada una de estas bandas se conecta con un sistema de lectura e interpretación con el que poder registrar la deformación que experimentan en cada instante de tiempo. Concluido el ensayo se dispone de un registro continuo de deformación longitudinal frente a las cargas exteriores aplicadas y frente al tiempo para las diez galgas instaladas en el soporte.

4.1.3.3 Resultados observados.

En cada instante de carga del ensayo y para las tres excentricidades se han obtenido las lecturas de los diez sensores dispuestos en la sección de referencia. Puesto que el objetivo del ensayo es determinar las coordenadas del plano de equilibrio y contrastarlas frente a las coordenadas del mismo plano determinadas numéricamente, y puesto que un plano queda unívocamente descrito mediante las coordenadas de tres puntos en el espacio, la tenencia de datos de diez puntos teóricamente coplanarios (las diez galgas se encuentran en la sección de referencia y ésta

permanece plana tras la deformación), dificulta la interpretación y determinación de las coordenadas del plano de manera directa.

Para soslayar esta cuestión, en cada nivel de excentricidad se han determinado tantos planos como posibles variaciones de diez elementos tomados de tres en tres sin repetición. Esto conduce a obtener un total de 120 planos para cada estado de excentricidad. De estos 120 posibles grupos de tres puntos es preciso suprimir aquellos que contengan las galgas de la misma barra de armadura (puntos coincidentes), lo cual conduce a un total de 96 posibles combinaciones de tres galgas cualesquiera no coincidentes con las que determinar 96 planos¹⁰⁴ de respuesta en cada nivel de excentricidad.

De un primer análisis de las lecturas de deformaciones de las galgas instaladas en el soporte se observa que los datos de aquellas que se encuentran en la superficie exterior (1, 2, 3, y 4), así como la galga 4 situada en una de las barras de armadura no arrojan valores coherentes y son descartadas. Los resultados presentados en esta tesis son consecuencia del tratamiento de los datos arrojados solamente por las galgas situadas en las barras de armadura cuya numeración, según la figura 4.12, es 1, 2, 3, 5, y 6. Luego en la determinación de las coordenadas del plano de equilibrio se deben llevar a cabo las combinaciones de cinco elementos tomados de tres en tres, lo cual conduce a determinar un total de 10 planos por cada excentricidad. De nuevo planos idénticos desde un punto de vista teórico de los que extraer valores promedios.

Respecto al nivel de carga del ensayo, y puesto que se ha ido aumentando el axil de compresión hasta alcanzar el valor objetivo (310 kN), en la determinación de los valores medios característicos del plano de respuesta se han considerado aquellas lecturas de los sensores en los que la carga aplicada se encuentra en el entorno de 310 kN con una diferencia de un 1%, esto es, se han considerado tantas grupos de lecturas de deformaciones en las bandas extensométricas como estados de carga recogidos en el entorno de valores de compresión de 306.90 kN y 313.10 kN.

¹⁰⁴ Los 96 planos determinados son idénticos desde un punto de vista teórico.

CAPÍTULO 4

La tabla 4.2 contiene los valores de las deformaciones medias obtenidas para las tres barras de armadura presentes en la sección de referencia S2 para las tres excentricidades ensayadas.

Escalón de excentricidad	Acero		
	ϵ_1 (‰)	ϵ_2 (‰)	ϵ_3 (‰)
1 ¹⁰⁵	-	-	-
2	0.376	0.035	0.066
3	0.465	-0.073	0.025

Tabla 4.2. Valores medios de deformación en las tres barras de armadura para los tres escalones de excentricidad ensayados.

Los valores característicos de la fibra neutra (rumbo y profundidad), así como la curvatura máxima del plano y la deformación máxima en el contorno de la sección en cada instante de carga se han determinado como los valores medios de los valores leídos en los instrumentos por los criterios expuestos (tabla 4.3).

Escalón de excentricidad	φ (°)	χ (1/km)	Prof. (mm)	ϵ_A (‰)
1	-	-	-	-
2	-12.56	1.335	-137.33	0.436
3	-28.13	1.974	-91.91	0.570

Tabla 4.3 Coordenadas del plano de equilibrio obtenidas en el análisis experimental para los tres escalones de excentricidad establecidos.

Finalmente, y haciendo uso de los modelos constitutivos descritos es posible conocer la tensión que se alcanza para cada fibra característica de la sección, que coinciden con la posición de los sensores instalados (figura 4.11), así como en el vértice de la sección transversal donde la

¹⁰⁵ Para el primer escalón de excentricidad, las deformaciones leídas no conducen a un plano de equilibrio coherente con la dirección de aplicación de la carga.

deformación de compresión en el hormigón es máxima para cada escalón de excentricidad, tal como se recoge en la tabla 4.4.

Escalón de excentricidad	Acero			Hormigón				
	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_3 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_3 (MPa)	σ_4 (MPa)	σ_A (MPa)
1	-	-	-	-	-	-	-	-
2	75.38	7.46	13.24	13.12	8.22	0.11	6.13	13.98
3	92.98	-14.54	5.08	15.15	10.39	0.00	3.44	17.34

Tabla 4.4. Valores de tensión en las los siete instrumentos instalados en el prototipo para los tres escalones de excentricidad ensayados.

4.1.3.4 Análisis numérico.

Se lleva a cabo la reproducción numérica del ensayo 1 realizado en laboratorio. Para ello se hace uso del software desarrollado y expuesto en el capítulo 3 de esta tesis. Se toma en consideración en el análisis las ecuaciones constitutivas descritas para hormigón (figura 4.6) y acero (figura 4.7).

Para las condiciones descritas, para cada escalón de excentricidad el software desarrollado arroja las siguientes coordenadas de cada plano de equilibrio en coherencia con la figura 4.8:

Escalón de excentricidad	φ (°)	χ (1/km)	Prof. (mm)	ε_A (‰)
1	-45.00	0.49	-383.97	0.268
2	-53.00	2.96	-64.45	0.608
3	-55.00	7.72	-13.37	1.176

Tabla 4.5. Coordenadas del plano de equilibrio obtenidas en el análisis numérico para los tres escalones de excentricidad establecidos.

Es inmediata la determinación de las deformaciones y tensiones de cada una de las fibras características (fibras instrumentadas en laboratorio). Se recogen en las tablas 4.6 y 4.7.

CAPÍTULO 4

Escalón de excentricidad	Acero			Hormigón			
	ϵ_1 (‰)	ϵ_2 (‰)	ϵ_3 (‰)	ϵ_1 (‰)	ϵ_2 (‰)	ϵ_3 (‰)	ϵ_4 (‰)
1	0.238	0.167	0.137	0.213	0.214	0.162	0.161
2	0.476	0.109	-0.094	0.325	0.369	0.057	0.014
3	0.832	-0.0081	-0.625	0.401	0.641	-0.202	-0.43

Tabla 4.6. Deformaciones obtenidas numéricamente en las siete fibras instrumentadas en el prototipo para los tres escalones de excentricidad ensayados.

Escalón de excentricidad	Acero			Hormigón				
	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_3 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_3 (MPa)	σ_4 (MPa)	σ_A (MPa)
1	47.73	33.46	27.50	8.21	8.21	6.38	6.34	9.80
2	95.17	21.78	-18.87	11.84	13.15	7.11	0.57	19.27
3	166.33	-16.19	-125.02	14.10	19.96	0.00	0.00	28.15

Tabla 4.7. Tensiones obtenidas numéricamente en las siete fibras instrumentadas en el prototipo para los tres escalones de excentricidad ensayados.

Las figuras 4.13, 4.14, y 4.15 muestran las salidas del software desarrollado para la simulación numérica de cada excentricidad ensayada y el axil de compresión objetivo (310 kN). En estas figuras es posible visualizar el giro que adopta la fibra neutra en equilibrio así como los perfiles de tensiones normales de respuesta en hormigón y acero. Las figuras se completan con el diagrama de interacción para el axil de diseño (310 kN) y los diagramas momento-curvatura para el giro de equilibrio, en los que se puede observar como las curvaturas referidas a los ejes x, y coinciden tal como establece el MDMC.

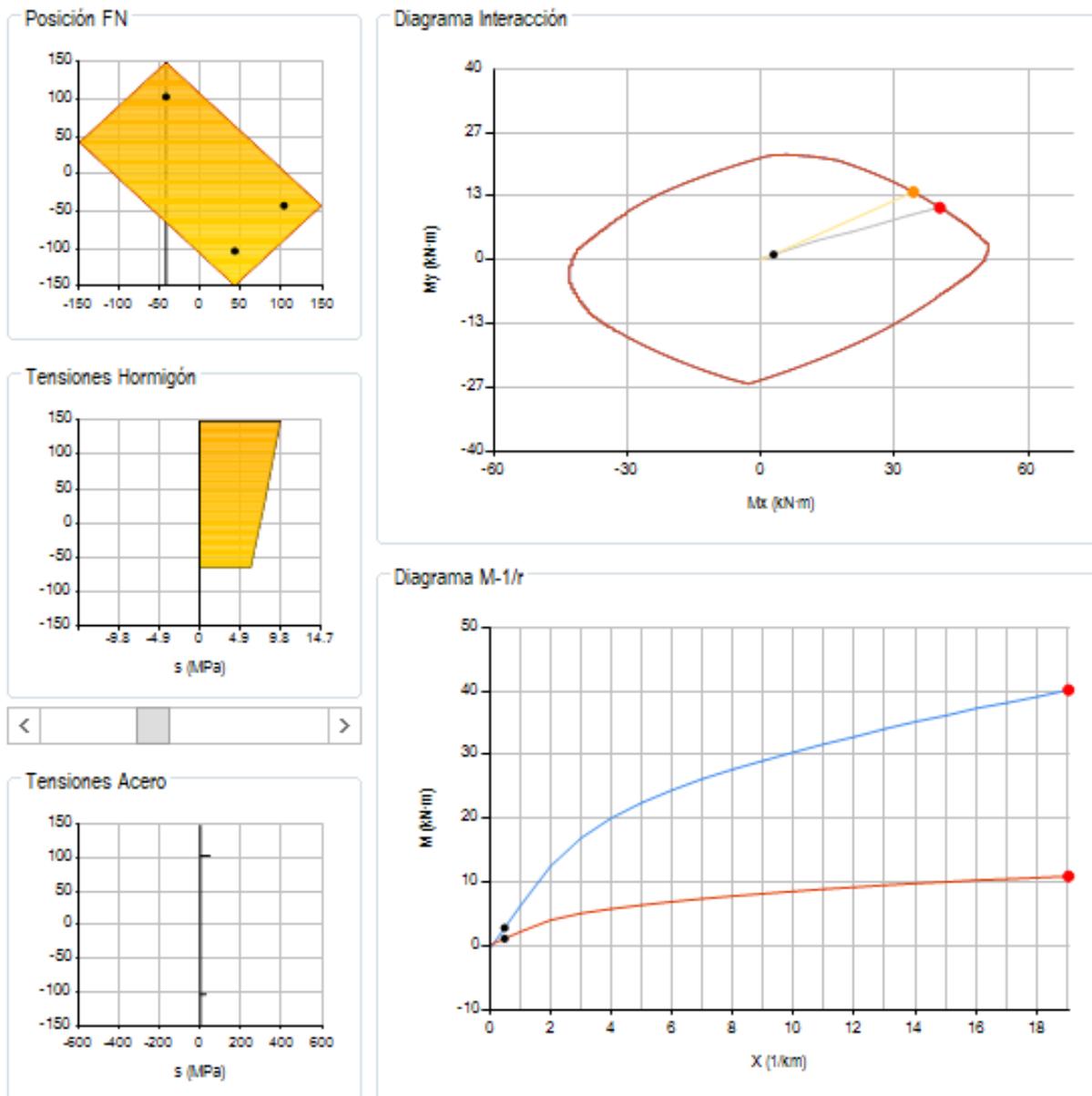


Figura 4.13. Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de excentricidad 1 en el ensayo 1.

CAPÍTULO 4

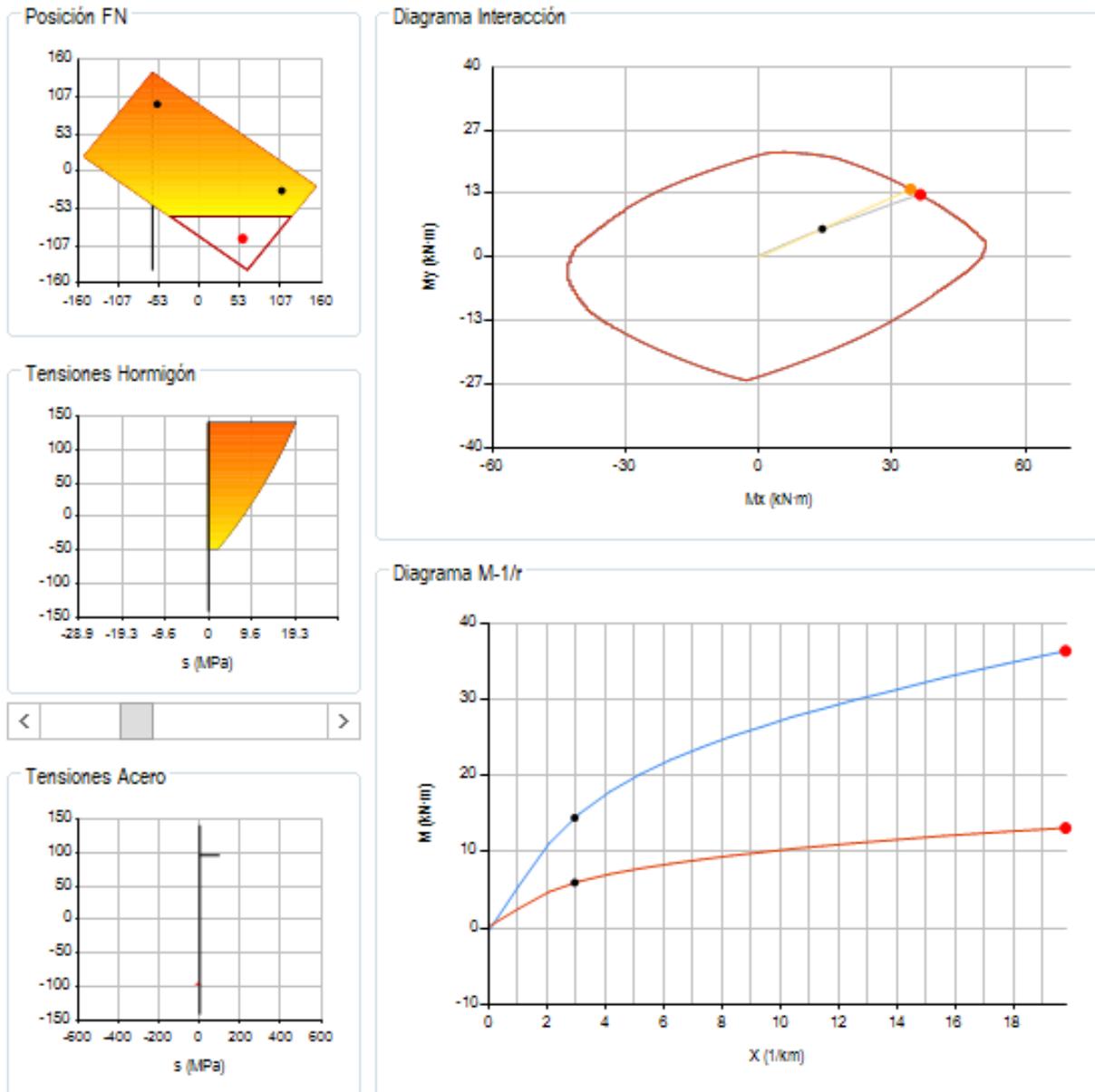


Figura 4.14. Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de excentricidad 2 en el ensayo 1.

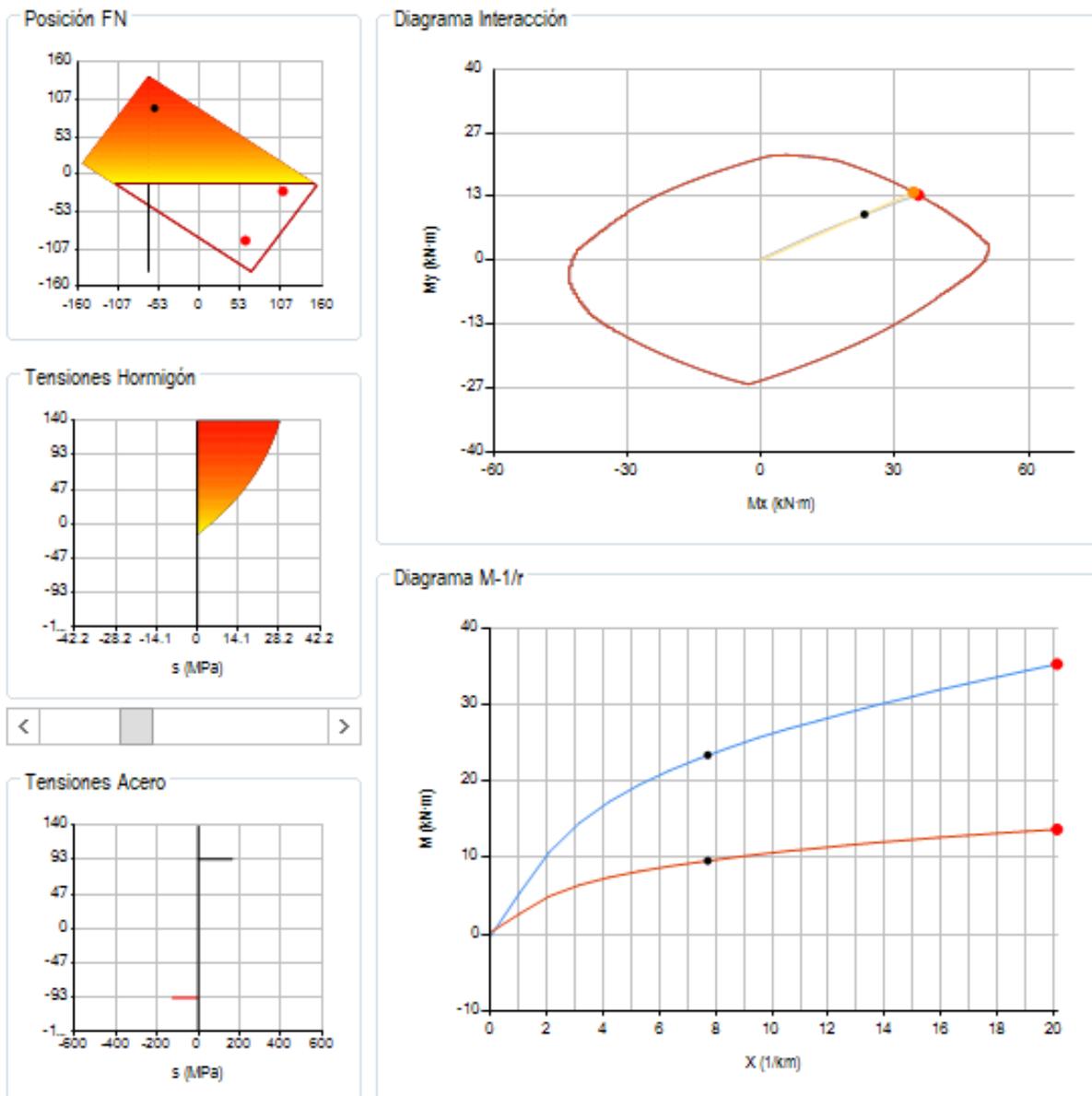


Figura 4.15. Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de excentricidad 3 en el ensayo 1.

CAPÍTULO 4

4.1.3.5 Discusión de los resultados.

Del análisis detallado de las lecturas de los sensores instalados en el soporte se ha constatado la dificultad de reproducir en laboratorio las condiciones ideales numéricas diseñadas para pequeñas excentricidades de diseño y niveles de tensión de servicio.

A pesar de que se han buscado excentricidades concretas de valor 10, 50, y 81 mm. según un rumbo elegido (67.34°) sobre la sección transversal de referencia del soporte, los resultados observados en laboratorio hacen pensar que en dicha sección no se han alcanzado estos valores. Las excentricidades logradas son sensiblemente inferiores a las buscadas. El rumbo del eje neutro en equilibrio para las excentricidades e_2 , y e_3 , (tabla 4.3) han alcanzado valores inferiores a los valores determinados numéricamente y esto induce a pensar que a la profundidad de la sección de referencia, la excentricidad impuesta en los extremos del soporte por las posiciones del axil y reacción (extremos superior e inferior) se ha reducido por las condiciones del propio ensayo.

La reducción del valor de la excentricidad en la sección de referencia del soporte se puede atribuir a dos causas:

- El axil de compresión se aplica sobre una placa circular de apoyo de 80 mm de diámetro. A pesar de que el centro de gravedad del axil de compresión se sitúa en el punto teórico de excentricidad, la dimensión de la zona comprimida es relativamente grande frente a la superficie de la sección transversal. Reducir el tamaño de esta placa, concentrando el axil en la zona de aplicación teórica habría ocasionado el fallo local de la superficie de contacto¹⁰⁶, generando una nueva fuente de incertidumbre en la materialización del ensayo. La placa de apoyo del axil situado en el extremo superior del soporte induce un campo de compresiones (una biela de compresión) más que un axil puro puntual concentrado en la posición exacta deseada.
- A medida que se avanza en profundidad desde los extremos del soporte hasta la sección de referencia, la biela de compresión se abre originando un campo de tensiones de compresión, y nuevamente conduce a una reducción en la excentricidad real.

¹⁰⁶ La tensión bajo la placa de apoyo durante el ensayo es de 61.67 MPa.

Para la primera excentricidad ensayada (10 mm), los valores observados en los instrumentos de medida han sido descartados puesto que arrojan resultados incoherentes. En este primer escalón de excentricidad, y debido a la alta sensibilidad del problema, se han observado valores de deformaciones no congruentes.

Respecto a los resultados observados para las excentricidades de 50 mm. y 81 mm, en relación al plano de respuesta de la sección, se han observado los siguientes aspectos:

- Ausencia de perpendicularidad entre la dirección de la aplicación de la excentricidad y la dirección de la fibra neutra en equilibrio. Se han observado diferencias elevadas entre los rumbos adoptados por la fibra neutra y la normal a la dirección de la excentricidad. Para las excentricidades 2 y 3 se han obtenido giros de 12.56° y 28.13° (tabla 4.3).
- Se aprecia la tendencia adoptada por el giro del eje neutro en equilibrio a medida que la posición del axil se aleja del centro de gravedad de la sección (aumenta la excentricidad), tal como se determina de manera numérica. No obstante, no se han logrado los valores teóricos de respuesta hallados con la aplicación desarrollada (FCE) mediante la implementación del MDMC. En la figura 4.16 se han representado las trazas de los planos de equilibrio (fibra neutra) observados experimentalmente (rojo) y determinados de manera numérica (azul) para los escalones de excentricidad 2 y 3 (figuras 4.16(a) y 4.16 (b)). Se ha incluido en ambas figuras la línea que indica la dirección de la excentricidad y la dirección perpendicular a la misma, así como la posición del axil exterior.

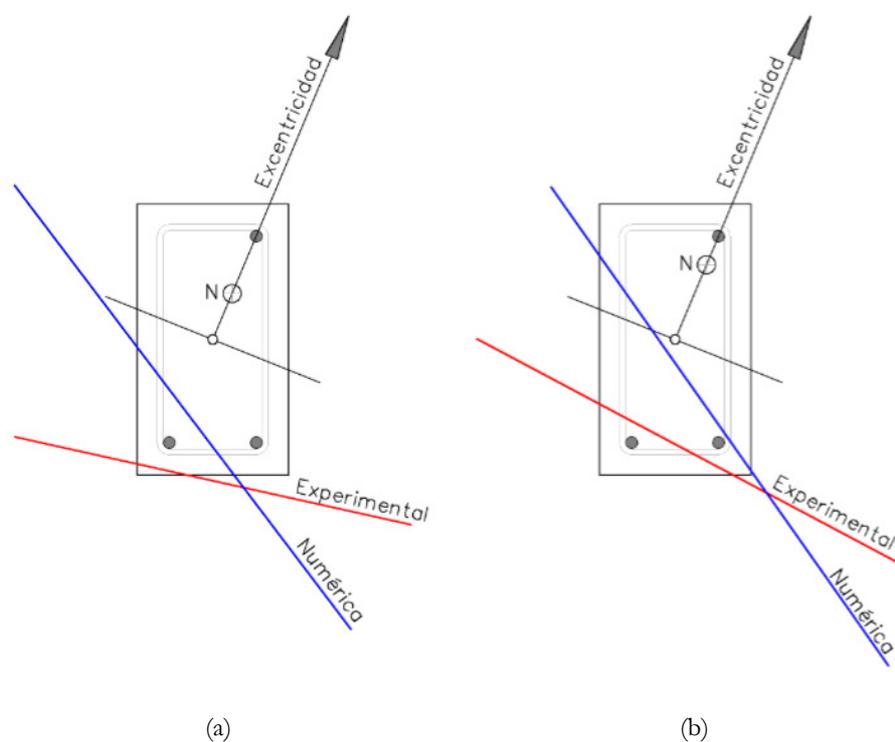


Figura 4.16. Posición de la fibra neutra obtenida de manera experimental y numérica para los escalones de excentricidad 2 y 3 correspondientes al ensayo 1. Autor.

Es importante poner de manifiesto que a pesar de que en el análisis numérico el comportamiento del hormigón se ha caracterizado mediante una curva tensión-deformación con nulo desarrollo en la zona de tracción (figura 4.6), la ecuación constitutiva real del hormigón presenta cierta capacidad en la zona de tracción. Y si bien la aproximación adoptada en este análisis queda siempre del lado de la seguridad en condiciones de diseño, puede no ser cierta en umbrales de tensiones bajas en la búsqueda y medida de dimensiones micrométricas y posición de planos de equilibrio en servicio.

Finalmente, y en relación al tipo de ensayo llevado a cabo, analizados los datos obtenidos de manera experimental y comparados con los esperados de manera numérica, se concluye que en la búsqueda de la observación en laboratorio de la respuesta no lineal de una sección de hormigón armado, habría resultado más adecuado imponer unos niveles de excentricidad mayores a los

aplicados al prototipo. El axil debería discurrir realmente por el exterior del soporte, garantizando en todo momento que las barras de armadura más alejadas de su línea de actuación entraran siempre realmente en tracción. Para las excentricidades impuestas (10, 50, y 81 mm), la aparición de la biela de compresión ha desvirtuado la respuesta teórica esperada de la sección.

4.1.4 Ensayo 2. Soporte corto de hormigón armado sometido a compresión, e_y constante, y e_x creciente.

4.1.4.1 Descripción del ensayo.

Se somete el soporte construido a un estado de compresión compuesta esviada mediante la aplicación de un axil exterior y una excentricidad constante en el eje Y de su sección transversal (M_x), y un momento M_y de valor creciente desde valor nulo hasta su agotamiento. Se analizan los planos de respuesta en la sección de referencia en cada instante de tiempo, y éstos se comparan con los valores determinados mediante simulación numérica llevada a cabo con ayuda de la aplicación desarrollada (FCE) y el MDMC.

Para lograr este estado de sollicitaciones exteriores se aplican acciones de manera controlada en las siguientes fases:

- Axil exterior de valor 40.51 kNy una excentricidad $e_y = 195 \text{ mm}$ sobre el eje de mayor inercia de la sección transversal, lo cual induce un momento flector en el centro de gravedad de la sección de referencia del soporte (S2) de valor $M_x = 7.90 \text{ kN} \cdot \text{m}$. El axil de compresión se logra mediante la tracción aplicada a una barra de acero de límite elástico $f_y = 500 \text{ MPa}$ y 16 mm de diámetro situada a una distancia constante del centro de gravedad de la sección transversal del soporte (figura 4.16). En el punto medio de esta barra (a la altura de la sección de referencia del soporte) se coloca una banda extensométrica de la que se lee la deformación que experimenta durante la aplicación del par de apriete exterior, procedimiento por el cual es posible lograr el axil de diseño. Se aplica un par de apriete en uno de sus extremos hasta lograr una deformación unitaria de

CAPÍTULO 4

valor $\varepsilon = 1066 \mu m$ ¹⁰⁷, lo cual equivale al axil que se deduce de las expresiones [4.6] y [4.7].

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \rightarrow \sigma = 189000 \cdot 1066 \cdot 10^{-6} \rightarrow \sigma = 201.47 \text{ MPa} \quad [4.6]$$

$$N = \sigma \cdot A \rightarrow N = 201.47 \cdot 201.06 \rightarrow N = 40.51 \cdot 10^3 \text{ N} \quad [4.7]$$

Para materializar la aplicación del axil se colocan dos perfiles UPN-160 en los extremos del soporte de hormigón (figura 4.17). Estos perfiles se conectan mediante soldadura una chapa perpendicular de acero en uno de sus extremos, y esta chapa se une a la cara de tracción del soporte de hormigón, (para esta primera fase de aplicación de la carga exterior), mediante una resina de naturaleza epoxídica (SIKADUR 31¹⁰⁸). La resina alcanza según los datos del fabricante valores de tensión de agotamiento frente a esfuerzos cortantes en el entorno de 18-24 MPa para una temperatura de +23°C y 7 días de curado. En la zona de compresión de la sección de contacto entre el aparato de aplicación de la carga y el soporte de hormigón, con objeto de evitar la rotura prematura y frágil de su borde libre se ha colocado bajo cada perfil UPN-160 una chapa de acero de 240x130x10 separada de dicho borde libre una distancia de 30 mm.

En una primera etapa de diseño de este ensayo se ideó un sistema de seguridad en el supuesto de que se produjera el fallo en la superficie de contacto hormigón-acero, esto es, que se produjera el deslizamiento frágil de la junta de resina de naturaleza epoxídica. Para ello se soldaron dos chapas de 120x50x6 a cada lado de cada perfil UPN-160, y se

¹⁰⁷ La carga objetivo para la cual se diseña el ensayo se fija en 40.00 kN, lo que equivale a una deformación en la barra exterior $\varepsilon = 1050.48 \mu m$. No obstante, se observa durante la aplicación del par, que la deformación en la barra queda estabilizada para el valor referido $\varepsilon = 1066 \mu m$, lo cual implica un axil de tracción en la barra de valor 40.51 kN para un módulo elástico de $189 \cdot 10^6 \text{ MPa}$. Este valor de rigidez se ha medido en laboratorio mediante la realización de un ensayo a tracción de una muestra de la barra empleada.

¹⁰⁸ Sikadur 31 es un adhesivo y mortero estructural de reparación, de dos componentes, basado en una combinación de resinas epoxídicas, diseñado para ser utilizado a temperaturas entre +10°C y +30°C.

practicó un taladro en cada una de ellas. Estas chapas pueden apreciarse en la figura 4.17. Se pretendía enhebrar un cable sin tensión que lograra frenar el supuesto impacto del aparato de aplicación de la carga en caso de accidente. Finalmente se optó por colocar una mordaza a cada chapa de tracción (carga normal a la junta hormigón-acero) que desempeñó la misma función, si bien, no se produjo el deslizamiento en la junta y el sistema de seguridad no entró en funcionamiento.

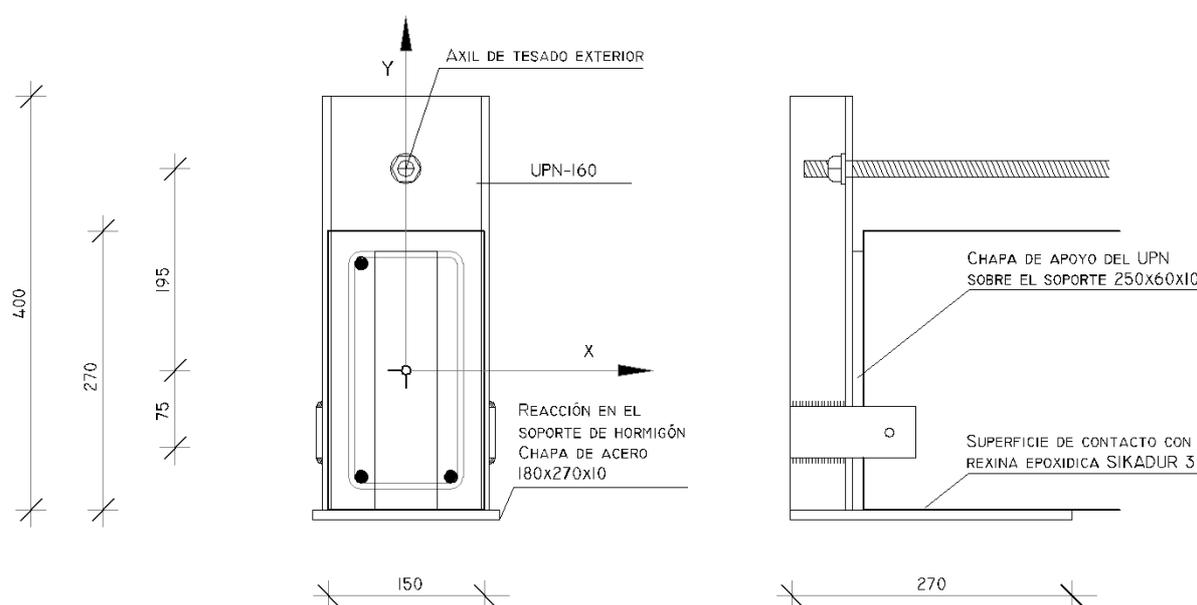


Figura 4.17. Esquema de aplicación del axil sobre el eje Y de la sección transversal en el ensayo 2. Autor.

- Una vez que el axil aplicado en la barra exterior alcanza el nivel deseado, y estabilizada su deformación longitudinal (hecho que se constata mediante la lectura continua de la banda extensométrica instalada en la sección central de la barra), se procede a aplicar una carga perpendicular a la directriz del soporte de hormigón, según el eje X de la sección transversal (eje débil), a una velocidad constante de 5 kN/min. hasta producir la rotura

CAPÍTULO 4

del soporte. Esta carga induce un momento flector de valor creciente en el centro del vano del soporte (sección de referencia) en el eje Y^{109} .

Mediante el sistema descrito se logra en cada instante de tiempo un estado de compresión compuesta esviada, en el que N , y M_x permanecen constantes al tiempo que M_y aumenta de valor.

Para la simulación numérica de este ensayo es preciso establecer un convenio de notación de los parámetros del plano de respuesta logrado en cada estado de sollicitación analizado. En adelante, los valores de profundidad de fibra neutra y su rumbo, así como la curvatura del plano serán coherentes con el esquema mostrado en la figura 4.18. También es necesario designar las barras de armadura y los puntos característicos del contorno exterior de la sección transversal de manera unívoca.

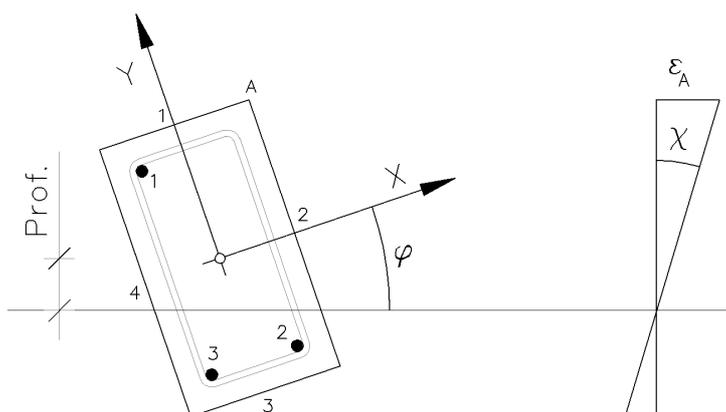


Figura 4.18. Esquema de las coordenadas del plano de equilibrio sobre la sección analizada en el ensayo 2. Autor.

¹⁰⁹ Debido al peso propio del soporte, de los perfiles de apoyo de la carga del equipo, y los cilindros de reparto de la carga sobre el propio soporte, durante la fase de tesado de la barra exterior existe un momento flector inicial M_{y0} aplicado en la sección de referencia y que ha de tomarse en consideración en la determinación del plano de respuesta durante todo el ensayo.

Para el diseño del propio ensayo, en la fase de aplicación del axil exterior, se lleva a cabo un análisis a nivel de la sección de contacto entre la chapa colocada bajo cada perfil UPN-160, y la cara de tracción del soporte de hormigón empleando para ello la aplicación desarrollada (FCE) y el MDMC. La sección transversal de la chapa de tracción (180x270x10) se ha idealizado mediante una sección circular de diámetro 12 mm a fin de determinar la sollicitación de tracción sobre dicho elemento y dimensionar la unión a rasante (hormigón-acero).

Las figuras 4.19 y 4.20 muestran el detalle del aparato diseñado colocado en cada extremo del soporte de hormigón representado en la figura 4.17, antes de la aplicación del axil de tesado exterior:

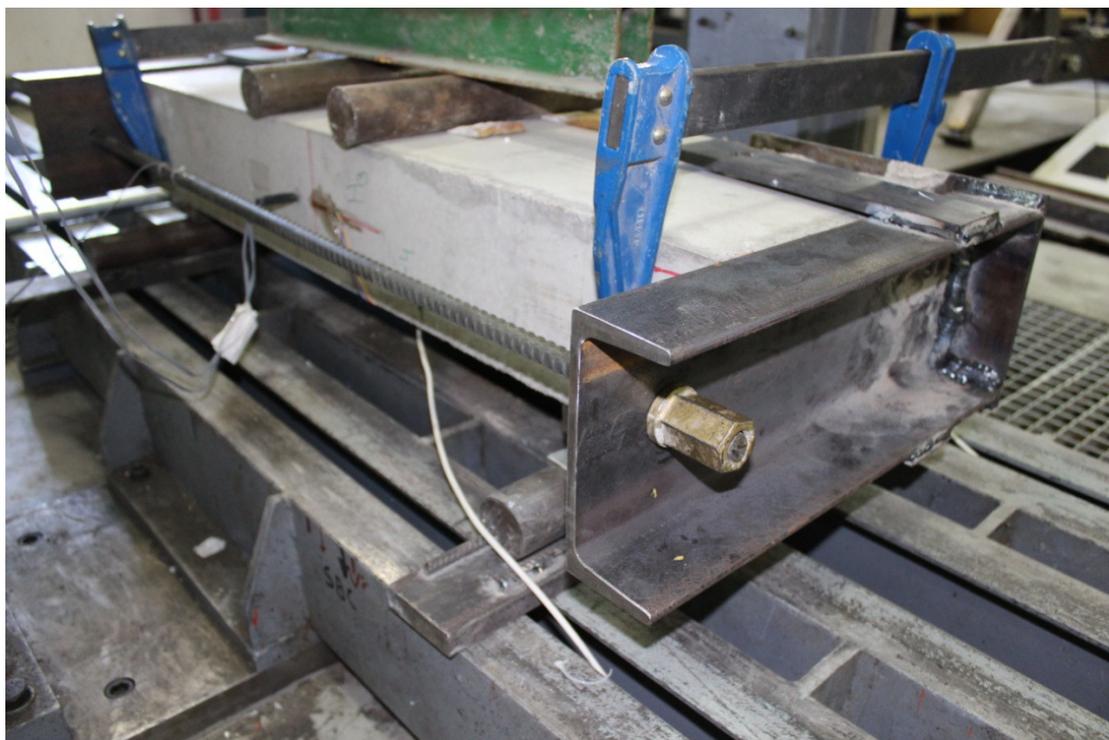


Figura 4.19. Soporte de hormigón colocado para la aplicación de la carga exterior en el plano débil de la sección transversal y el axil de tesado exterior aplicado. Autor.



Figura 4.20. Soporte de hormigón colocado para la aplicación de la carga exterior en el plano débil de la sección transversal y el axil de tesado exterior aplicado. Autor.

La figura 4.21 muestra las tensiones de compresión sobre el hormigón bajo la chapa situada bajo el UPN-160 en el extremo próximo a la posición del axil de tesado (figura 4.21 (a)), así como el perfil de tensión normal de respuesta de la sección de contacto en hormigón (figuras 4.21 (b)). La resultante sobre el perno (idealización de la chapa trasera, figura 4.21 (c)) determina la capacidad

necesaria en la zona de contacto hormigón-acero. Los esfuerzos aplicados en la sección de contacto entre la chapa situada bajo cada perfil UPN-160 y el soporte de hormigón se detallan seguidamente, según el esquema de la figura 4.17:

$$N = 40.51 \text{ kN}$$

$$M_x = 40.51 \cdot 0.21 \rightarrow M_x = 8.51 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

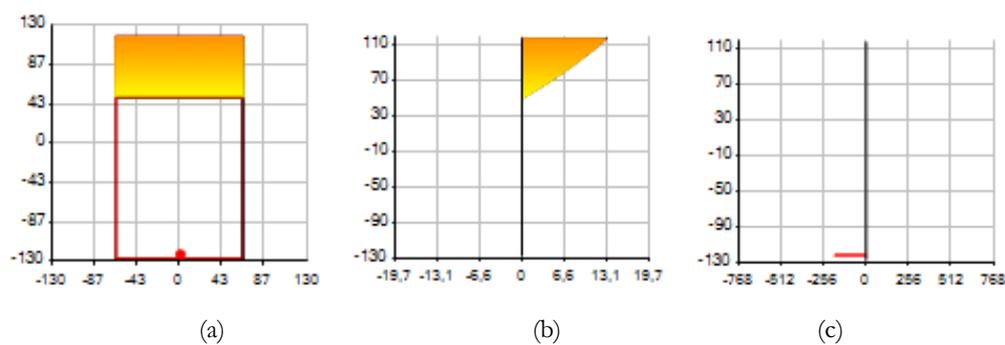


Figura 4.21. Tensiones normales en la sección de contacto entre el la chapa colocada bajo el perfil UPN-160 y el soporte de hormigón en el ensayo 2. Autor.

Del análisis a nivel de sección se obtienen los siguientes valores:

- Tensión máxima de compresión en el hormigón: 13.22 MPa.
- Tensión en el perno (idealización de la chapa trasera): 191.85 MPa (axil de tracción de 21.69 kN).

Para una tracción de 21.69 kN, y una superficie de contacto entre la chapa trasera y el soporte de hormigón de 150x200 mm², la tensión tangencial máxima sobre la superficie de contacto hormigón-acero alcanza el valor que se muestra en la expresión [4.8]:

CAPÍTULO 4

$$\tau = 1.5 \frac{N}{A} \rightarrow \tau = 1.5 \frac{21.69 \cdot 10^3}{150 \cdot 200} \rightarrow \tau = 1.09 \text{ MPa} \quad [4.8]$$

Esto supone un coeficiente de seguridad frente al fallo de la junta hormigón-acero, tomando en consideración una tensión de agotamiento de 18 MPa, del orden de 16.

Durante la segunda fase de la aplicación de las acciones exteriores el soporte se dispone apoyado en dos puntos separados 800 mm, la directriz contenida en un plano horizontal y el eje de menor inercia de la sección transversal coincidente con la dirección de la aplicación de la carga (plano vertical, figuras 4.22 y 4.23). La carga se transmite mediante un perfil de acero que descansa en dos cilindros separados 200 mm, lo cual conlleva a la ausencia de esfuerzo cortante en la sección de referencia (S2) en todas las fases de aplicación de las sollicitaciones exteriores.

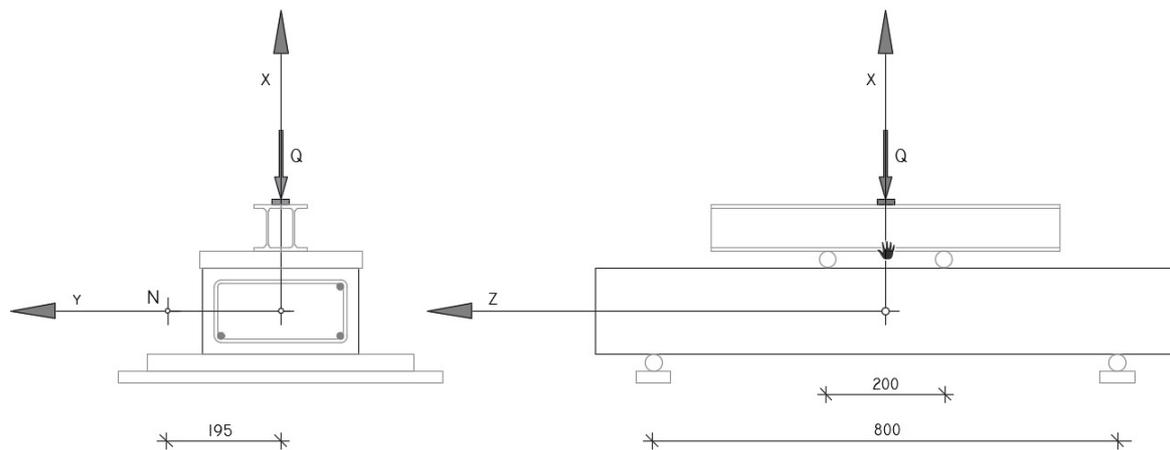


Figura 4.22. Esquema de aplicación del momento según el eje Y de la sección transversal en el ensayo 2. Autor.

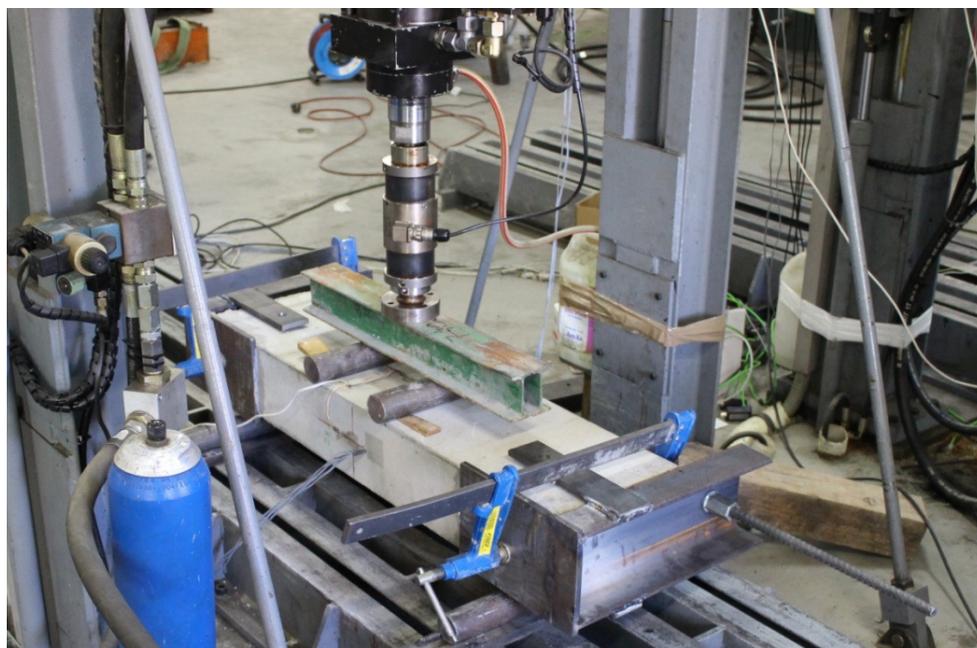


Figura 4.23. Imagen del soporte con el axil exterior aplicado sobre la barra exterior, colocado en la posición de la aplicación de la carga vertical perpendicular a su eje Y. Autor.

Para estas condiciones de apoyos existe un momento flector inicial M_{y0} debido al peso propio del soporte y del aparato de apoyo de la carga sobre el mismo¹¹⁰. Este esfuerzo se determina seguidamente:

- $M_{y(PP)}$ debido al peso propio del soporte. Se considera una densidad del hormigón de 2500 kg/m^3 . Para el prototipo construido $M_{y(PP)} = 0.11175 \text{ kN} \cdot \text{m}$.
- $M_{y(Rod,perf)}$ debido al peso de los rodillos y del perfil de apoyo de la carga. Para el prototipo construido $M_{y(Rod,perf)} = 0.024 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

Luego, el momento total M_{y0} queda:

¹¹⁰ Se ha considerado que la carga de los aparatos de anclaje de la barra exterior entra en los apoyos de manera directa sin producir esfuerzos de flexión en la sección de referencia. Se ha despreciado el esfuerzo que produce el peso propio de la barra exterior.

CAPÍTULO 4

$$M_{y0} = M_{y(PP)} + M_{y(Rod,perf)} \rightarrow M_{y0} = 0.1357 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad [4.9]$$

La figura 4.24 muestra el convenio adoptado para designar la dirección de aplicación del momento exterior en la sección transversal de referencia en el ensayo 2.

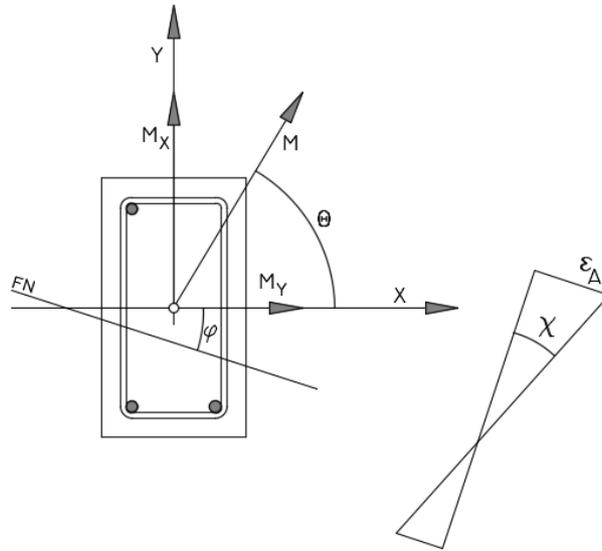


Figura 4.24. Convenio de notación de dirección de aplicación del vector momento en el ensayo 2. Autor.

4.1.4.2 Instrumentación.

Se colocan 10 bandas extensométricas en la sección de referencia (S2) sobre el prototipo ensayado. En las tres barras de acero se disponen de manera redundante dos bandas en cada una de ellas. Igualmente se han instalado cuatro bandas en el exterior del soporte, una en cada cara del mismo. Finalmente se instala una banda extensométrica en la barra exterior. Con objeto de identificar la lectura de cada una de estas bandas durante el ensayo se designa según el esquema mostrado en la figura 4.25.

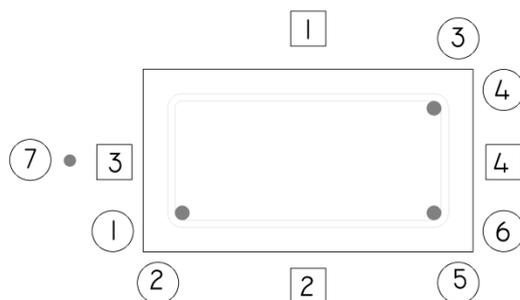


Figura 4.25. Posición y designación de bandas extensométricas en el soporte y en la barra exterior en el ensayo 2. Círculos designan bandas colocadas en las barras de armadura. Cuadrados designan bandas situadas en la cara exterior del prototipo. Autor.

Cada una de estas bandas se conecta con un sistema de lectura e interpretación con el que poder registrar la deformación que experimentan en cada instante de tiempo. Concluido el ensayo se dispone de un registro continuo de deformación longitudinal frente a las cargas exteriores aplicadas para las once galgas instaladas en el soporte y la barra exterior.

4.1.4.3 Resultados observados.

En cada instante de tiempo y para cada nivel de carga del ensayo se han obtenido las lecturas de los once sensores dispuestos en la sección de referencia. Puesto que el objetivo del ensayo es determinar las coordenadas del plano de equilibrio y contrastarlas frente a las coordenadas del mismo plano determinadas numéricamente, y puesto que un plano queda unívocamente descrito mediante las coordenadas de tres puntos en el espacio, la tenencia de datos de once puntos teóricamente coplanarios (las once galgas se encuentran en la sección de referencia y la sección permanece plana tras la deformación), dificulta la interpretación y determinación de las coordenadas del plano de manera directa.

Durante la primera fase del ensayo (tesado de la barra exterior) se recogen las lecturas de deformación en los once instrumentos mostradas en la figura 4.26.

CAPÍTULO 4

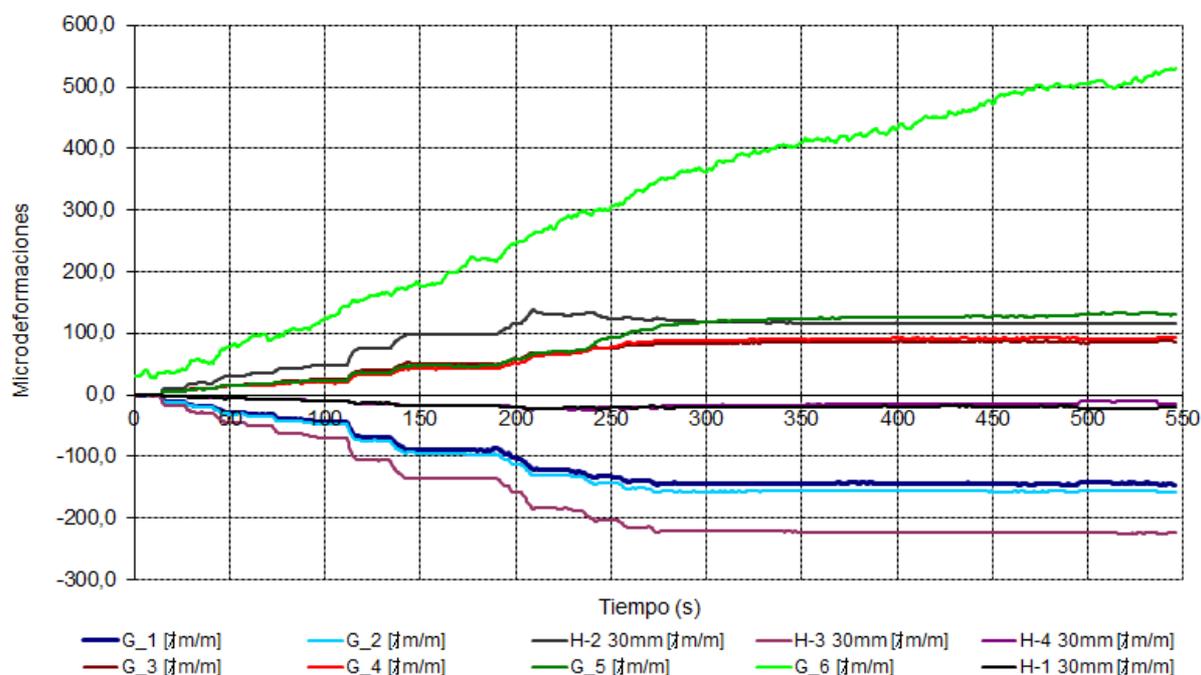


Figura 4.26. Lectura de deformación de las diez galgas instaladas en el soporte y la barra exterior de tesado frente al tiempo durante la primera fase del ensayo 2. Autor.

Observando la representación gráfica de la deformación frente al tiempo de las bandas extensométricas, es posible apreciar como la lectura de la banda 6 arroja valores erróneos en toda la duración de la fase de tesado del ensayo. Se aprecia que los valores leídos de las galgas instaladas en las barras de armadura 2 y 3 (galgas designadas como 3, 4, 5, y 6) deben ser parecidos por encontrarse a una distancia similar a la posición teórica de la fibra neutra para la primera fase del ensayo. Así ocurre con las lecturas de las galgas 3, 4, y 5. Por este motivo, se descarta en adelante la galga 6. Para las galgas 1, 2, 3, 4, y 5 se toman los valores medios de cada par como valor representativo de la deformación.

Si se atiende a la representación gráfica de la deformación que se obtiene en cada una de los instrumentos instalados frente al tiempo durante la aplicación de la carga según el eje X de la sección (M_y) (segunda fase del ensayo), puede apreciarse en primer lugar como la deformación

de cada instrumento parte de un estado inicial (deformación última de la fase inicial del ensayo) (figura 4.27). La deformación inicial es debido a la lectura recogida del estado final de la fase primera del ensayo.

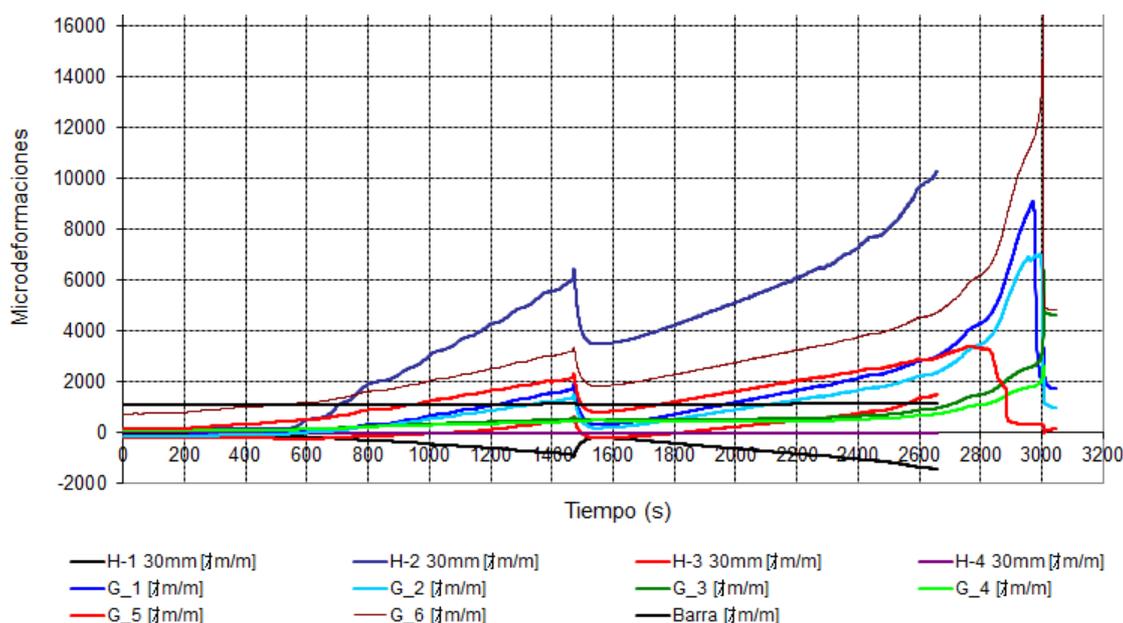


Figura 4.27. Lectura de deformación de las diez galgas instaladas en el soporte y la barra exterior de tesado frente al tiempo durante la segunda fase del ensayo 2. Autor.

En el entorno del tiempo de 1500 segundos se observa cómo la deformación en todas las fibras instrumentadas cae de manera súbita para instantes después proseguir con la tendencia de deformación que habían experimentado hasta este momento. Esto es debido a que el equipo de carga tenía por defecto (y por error) configurada una carga máxima, superada la cual tenía previsto detenerse y dar por concluido el ensayo. Soslayado este problema la prueba prosigue con normalidad recuperando la carga y mostrando una tendencia de deformación similar a la experimentada hasta ese instante.

Desde el comienzo de la segunda fase del ensayo y hasta el final del mismo, la lectura correspondiente a la galga 4 de hormigón arroja un valor nulo, hecho incoherente con la realidad. Se concluye que es preciso descartar esta lectura para determinar los planos de equilibrio.

CAPÍTULO 4

Con las lecturas de deformación encontradas coherentes en la sección de referencia de este primer análisis cualitativo, es posible determinar tantos planos de respuesta (en cada instante de tiempo) como variaciones de siete elementos tomados de tres en tres sin repetición. Así mismo puesto que las lecturas coherentes de instrumentos de medida colocados de manera duplicada en cada barra se emplean los valores medios, la obtención de todos los planos de equilibrio posibles se reduce a determinar las variaciones de seis elementos tomados de tres en tres sin repetición, lo cual lleva a obtener un total de 20 planos en cada instante de tiempo. Finalmente, para cada uno de estos 20 planos se han hallado los valores medios de los parámetros característicos que los definen, en coherencia con la figura 4.18.

Puesto que la carga aplicada según el eje X (segunda fase del ensayo) se aplica de manera continua, se han escogido un total de 20 estados concretos de carga para los que se han determinado los planos de equilibrio. Se ha partido de una carga exterior aplicada de valor 29.25 kN, y se ha incrementado en cada escalón de carga en un valor de 2.89 kN hasta alcanzar el valor de 90.00 kN¹¹¹.

El valor inicial de carga vertical impuesta se debe a que para este valor el momento inicial M_{y0} representa el 3% (una fracción reducida) del momento total en esa misma sección para la carga elegida, minimizándose las diferencias existentes entre los planos de respuesta observados y los reales (que incluyen la deformación correspondiente al peso propio). Es preciso tener en consideración que el equipo de lectura arroja información solamente para los incrementos de carga impuestos, no quedando registradas las deformaciones iniciales existentes en todas las fibras de la sección de referencia debido al peso propio de rodillos y perfiles de aplicación de la carga y del peso propio del soporte, esto es, las lecturas de las bandas extensométricas instaladas en el prototipo son nulas para el momento inicial M_{y0} .

¹¹¹ La simulación numérica se detiene en esta carga pues para niveles superiores no se han obtenido registro de lectura de los instrumentos de medida. La carga de 90 kN queda próxima a la carga teórica de agotamiento (95.95 kN). Se ha obtenido una carga real de agotamiento en laboratorio de 114.03 kN, lo cual implica un aumento respecto a la carga teórica de un 18%.

La tabla 4.8 recoge las sollicitaciones exteriores consideradas. Se observa que los valores de axil y momento flector sobre el eje de mayor inercia de la sección (N, M_x) permanecen constantes al tiempo que el valor de M_y aumenta, y se muestra el valor de la carga exterior (Q_x) que induce dicho momento M_y . Finalmente se recoge la dirección del vector momento en coherencia con el esquema mostrado en la figura 4.24.

Escalón de Carga	Axil (kN)	M_x (kN·m)	M_y (kN·m)	Q_x (kN)	θ (°)
1	40,51	7,90	4,52	29,25	60,21
2	40,51	7,90	4,96	32,14	57,89
3	40,51	7,90	5,39	35,04	55,69
4	40,51	7,90	5,82	37,93	53,60
5	40,51	7,90	6,26	40,82	51,61
6	40,51	7,90	6,69	43,71	49,73
7	40,51	7,90	7,13	46,61	47,95
8	40,51	7,90	7,56	49,50	46,26
9	40,51	7,90	7,99	52,39	44,66
10	40,51	7,90	8,43	55,29	43,15
11	40,51	7,90	8,86	58,18	41,71
12	40,51	7,90	9,30	61,07	40,36
13	40,51	7,90	9,73	63,96	39,07
14	40,51	7,90	10,16	66,86	37,86
15	40,51	7,90	10,60	69,75	36,70
16	40,51	7,90	11,03	72,64	35,61
17	40,51	7,90	11,47	75,54	34,57
18	40,51	7,90	11,90	78,43	33,58
19	40,51	7,90	12,33	81,32	32,64
20	40,51	7,90	13,64	90,00	30,09
21	40,51	7,90	17,24	114,03	24,62

Tabla 4.8. Valores de sollicitaciones exteriores considerados sobre la sección de referencia para el análisis de los resultados del ensayo 2.

CAPÍTULO 4

La tabla 4.9 contiene los valores de las deformaciones obtenidas en cinco puntos característicos en la sección de referencia S2 para los 20 estados de sollicitación exterior escogidos como los valores medios de deformación para todos los registros correspondientes a una carga igual a la carga objetivo o en el entorno de esta e un 0.2% de diferencia.

Escalón de Carga	Acero			Hormigón	
	ϵ_1 (‰)	ϵ_2 (‰)	ϵ_3 (‰)	ϵ_1 (‰)	ϵ_2 (‰)
1	0,540	0,457	1,133	-0,418	-0,083
2	0,617	0,456	1,209	-0,456	-0,041
3	0,704	0,456	1,294	-0,500	0,011
4	0,785	0,456	1,375	-0,541	0,061
5	0,874	0,459	1,463	-0,584	0,115
6	0,952	0,461	1,538	-0,621	0,161
7	1,021	0,464	1,605	-0,654	0,202
8	1,093	0,466	1,676	-0,689	0,245
9	1,197	0,470	1,779	-0,738	0,306
10	1,267	0,475	1,845	-0,770	0,348
11	1,363	0,481	1,939	-0,817	0,404
12	1,445	0,488	2,017	-0,856	0,453
13	1,516	0,495	2,079	-0,890	0,495
14	1,608	0,508	2,158	-0,933	0,550
15	1,695	0,520	2,235	-0,977	0,602
16	1,836	0,549	2,356	-1,047	0,694
17	1,946	0,576	2,456	-1,100	0,775
18	2,097	0,618	2,569	-1,178	0,894
19	2,246	0,659	2,689	-1,254	1,037
20	2,422	0,725	2,793	-1,347	1,220

Tabla 4.9. Valores medios de deformación en cinco puntos característicos de la sección de referencia para los 20 estados de sollicitación exterior elegidos en el ensayo 2

Para cada estado de sollicitación exterior es posible determinar los valores característicos que definen el plano de equilibrio (tabla 4.10).

Escalón de Carga	φ (°)	χ (1/km)	Prof. (mm)	ε_A (‰)
1	75,98	12,590	124,12	-1,102
2	76,99	13,507	135,68	-1,137
3	78,06	14,562	150,31	-1,173
4	78,93	15,551	164,57	-1,206
5	79,78	16,667	180,61	-1,243
6	80,44	17,643	194,85	-1,276
7	80,97	18,525	207,93	-1,306
8	81,46	19,450	221,56	-1,337
9	82,09	20,750	241,69	-1,380
10	82,50	21,692	256,24	-1,411
11	82,99	22,983	275,79	-1,456
12	83,39	23,967	293,51	-1,496
13	83,74	25,165	310,28	-1,532
14	84,18	26,551	333,42	-1,581
15	84,54	27,910	355,58	-1,631
16	85,15	30,227	399,15	-1,712
17	85,59	31,992	440,97	-1,763
18	86,30	34,808	524,26	-1,843
19	87,04	37,440	658,90	-1,888
20	88,01	41,130	976,26	-1,953

Tabla 4.10. Coordenadas del plano de equilibrio obtenidas en el análisis experimental para los 20 estados de sollicitación elegidos en el ensayo 2.

Finalmente y haciendo uso de los modelos constitutivos descritos es posible conocer la tensión que se alcanza para cada fibra característica de la sección, que coinciden con la posición de los sensores instalados (figura 4.11), así como en el vértice de la sección transversal donde la

CAPÍTULO 4

deformación de compresión en el hormigón es máxima para cada escalón de excentricidad, tal como se recoge en la tabla 4.11.

Escalón de Carga	Acero			Hormigón				
	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_3 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_3 (MPa)	σ_4 (MPa)	σ_A (MPa)
1	-136,88	-38,85	-282,70	1,58	19,60	0,00	0,00	27,37
2	-153,60	-36,97	-298,26	0,00	20,42	0,00	0,00	27,74
3	-173,30	-34,62	-315,77	0,00	21,32	0,00	0,00	28,12
4	-191,74	-32,49	-332,08	0,00	22,05	0,00	0,00	28,46
5	-212,18	-30,22	-350,42	0,00	22,88	0,00	0,00	28,79
6	-229,83	-28,14	-366,19	0,00	23,54	0,00	0,00	29,08
7	-245,74	-26,43	-380,56	0,00	24,10	0,00	0,00	29,33
8	-262,08	-24,61	-395,36	0,00	24,70	0,00	0,00	29,55
9	-285,56	-22,50	-416,85	0,00	25,40	0,00	0,00	29,87
10	-301,95	-20,43	-431,54	0,00	25,93	0,00	0,00	30,08
11	-324,22	-17,91	-452,00	0,00	26,59	0,00	0,00	30,34
12	-343,71	-15,48	-469,76	0,00	27,14	0,00	0,00	30,57
13	-361,04	-12,63	-485,08	0,00	27,63	0,00	0,00	30,74
14	-384,02	-8,66	-500,00	0,00	28,24	0,00	0,00	30,95
15	-405,98	-4,88	-500,00	0,00	28,77	0,00	0,00	31,13
16	-443,82	2,30	-500,00	0,00	29,57	0,00	0,00	31,36
17	-473,83	7,06	-500,00	0,00	30,04	0,00	0,00	31,46
18	-500,00	18,36	-500,00	0,00	30,68	0,00	0,00	31,56
19	-500,00	28,71	-500,00	0,00	31,07	0,00	0,00	31,60
20	-500,00	47,19	-500,00	0,00	31,44	0,00	0,00	31,59

Tabla 4.11. Valores de tensión en la posición de los instrumentos instalados y punto de la sección con mayor deformación de compresión en el ensayo 2.

4.1.4.4 Análisis numérico.

Se lleva a cabo la reproducción numérica del ensayo 2 realizado en laboratorio. Para ello, se hace uso del software desarrollado y expuesto en el capítulo 3 de esta tesis. Se toma en consideración en el análisis las ecuaciones constitutivas descritas para hormigón (figura 4.6) y acero (figura 4.7).

Se han estudiado los 20 estados de sollicitación exterior considerados en el análisis experimental y detallados asimismo en la tabla 4.8.

Para las condiciones descritas, para cada escalón de carga el software desarrollado arroja las coordenadas de los planos de equilibrio incluidas en la tabla 4.12.

CAPÍTULO 4

Escalón de Carga	φ (°)	χ (1/km)	Prof. (mm)	ε_A (‰)
1	66	7,17	38,00	0,613
2	69	8,03	37,95	0,646
3	71	9,01	38,01	0,693
4	73	9,98	37,81	0,732
5	74	10,91	38,9	0,768
6	75	11,68	38,91	0,800
7	76	12,61	38,37	0,845
8	77	13,84	39,01	0,892
9	78	14,89	38,87	0,931
10	79	16,21	39,17	0,976
11	79	16,75	39,15	1,009
12	80	18,35	39,17	1,067
13	80	18,93	39,24	1,099
14	80	19,52	39,33	1,132
15	81	21,48	39,26	1,202
16	81	22,02	39,26	1,231
17	81	22,58	39,33	1,261
18	82	25,65	39,19	1,382
19	82	26,38	39,49	1,413
20	82	29,37	40,23	1,551

Tabla 4.12. Coordenadas del plano de equilibrio obtenidas en el análisis numérico para los veinte niveles de carga establecidos en el ensayo 2.

Es inmediata la determinación de las deformaciones y tensiones de cada una de las fibras características (fibras instrumentadas en laboratorio). Se recogen en las tablas 4.13 y 4.14.

Escalón de Carga	Acero			Hormigón			
	ϵ_1 (‰)	ϵ_2 (‰)	ϵ_3 (‰)	ϵ_1 (‰)	ϵ_2 (‰)	ϵ_3 (‰)	ϵ_4 (‰)
1	-0,254	-0,291	-0,855	0,121	-0,764	-0,666	0,219
2	-0,331	-0,279	-0,923	0,084	-0,867	-0,693	0,257
3	-0,407	-0,278	-1,011	0,054	-0,982	-0,739	0,297
4	-0,487	-0,267	-1,088	0,017	-1,093	-0,771	0,338
5	-0,565	-0,283	-1,185	-0,018	-1,210	-0,830	0,362
6	-0,628	-0,281	-1,251	-0,046	-1,300	-0,862	0,392
7	-0,696	-0,272	-1,324	-0,072	-1,401	-0,895	0,434
8	-0,799	-0,281	-1,441	-0,120	1,552	-0,960	0,472
9	-0,886	-0,271	-1,524	-0,161	-1,671	-0,996	0,513
10	-1,001	-0,269	-1,638	-0,217	-1,828	-1,503	0,558
11	-1,033	-0,278	-1,692	-0,224	-1,889	-1,087	0,577
12	-1,167	-0,27	-1,824	-0,289	-2,074	-1,149	0,636
13	-1,206	-0,280	-1,883	-0,299	-2,141	-1,187	0,655
14	-1,245	-0,290	-1,943	-0,310	-2,209	-1,225	0,674
15	-1,409	-0,277	-2,102	-0,390	-2,435	-1,297	0,748
16	-1,445	-0,284	-2,154	-0,399	-2,495	-1,329	0,766
17	-1,483	-0,293	-2,211	-0,411	-2,560	-1,365	0,785
18	-1,730	-0,281	-2,465	-0,523	-2,911	-1,487	0,900
19	-1,787	-0,297	-2,543	-0,546	-3,001	-1,537	0,918
20	-2,011	-0,352	-2,853	-0,630	-3,363	-1,733	1,000

Tabla 4.13. Deformaciones obtenidas numéricamente en las siete fibras instrumentadas en el prototipo para para los veinte niveles de carga establecidos en el ensayo 2.

CAPÍTULO 4

Escalón de Carga	Acero			Hormigón				
	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_3 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_3 (MPa)	σ_4 (MPa)	σ_A (MPa)
1	-50,77	-58,26	-170,97	4,88	0,00	0,00	8,41	19,36
2	-66,13	-55,75	-184,67	3,43	0,00	0,00	9,69	20,06
3	-81,36	-55,68	-202,25	2,19	0,00	0,00	10,98	21,05
4	-97,42	-53,48	-217,62	0,68	0,00	0,00	12,24	21,80
5	-113,08	-56,62	-236,93	0,00	0,00	0,00	12,94	22,46
6	-125,63	-56,14	-250,17	0,00	0,00	0,00	13,82	23,06
7	-139,11	-54,38	-264,75	0,00	0,00	0,00	14,96	23,80
8	-159,86	-56,16	-288,15	0,00	0,00	0,00	15,97	24,57
9	-177,20	-54,26	-304,71	0,00	0,00	0,00	17,04	25,14
10	-200,12	-53,87	-327,55	0,00	0,00	0,00	18,11	25,78
11	-206,67	-55,56	-338,33	0,00	0,00	0,00	18,56	26,23
12	-233,50	-53,98	-364,76	0,00	0,00	0,00	19,86	26,94
13	-241,22	-55,97	-376,68	0,00	0,00	0,00	20,26	27,35
14	-249,02	-58,04	-388,67	0,00	0,00	0,00	20,65	27,69
15	-281,90	-55,42	-420,34	0,00	0,00	0,00	22,09	28,42
16	-288,94	-56,83	-430,83	0,00	0,00	0,00	22,44	28,68
17	-296,61	-58,57	-442,13	0,00	0,00	0,00	22,77	28,95
18	-345,97	-56,12	-493,07	0,00	0,00	0,00	24,70	29,88
19	-357,38	-59,30	-500,00	0,00	0,00	0,00	24,95	30,09
20	-402,21	-70,40	-500,00	0,00	0,00	0,00	26,12	30,82

Tabla 4.14. Tensiones obtenidas numéricamente en las siete fibras instrumentadas en el prototipo para los veinte niveles de carga establecidos en el ensayo 2.

Las figuras 4.28 a 4.47 muestran las salidas del software desarrollado para la simulación numérica de cada escalón de carga. En estas figuras es posible visualizar el giro que adopta la fibra neutra en equilibrio así como los perfiles de tensiones normales de respuesta en hormigón y acero. Las figuras se completan con el diagrama de interacción para el axil de diseño (40.51 kN) y los diagramas momento-curvatura para el giro de equilibrio, en los que se puede observar como las curvaturas referidas a los ejes x, y coinciden tal como establece el MDMC.

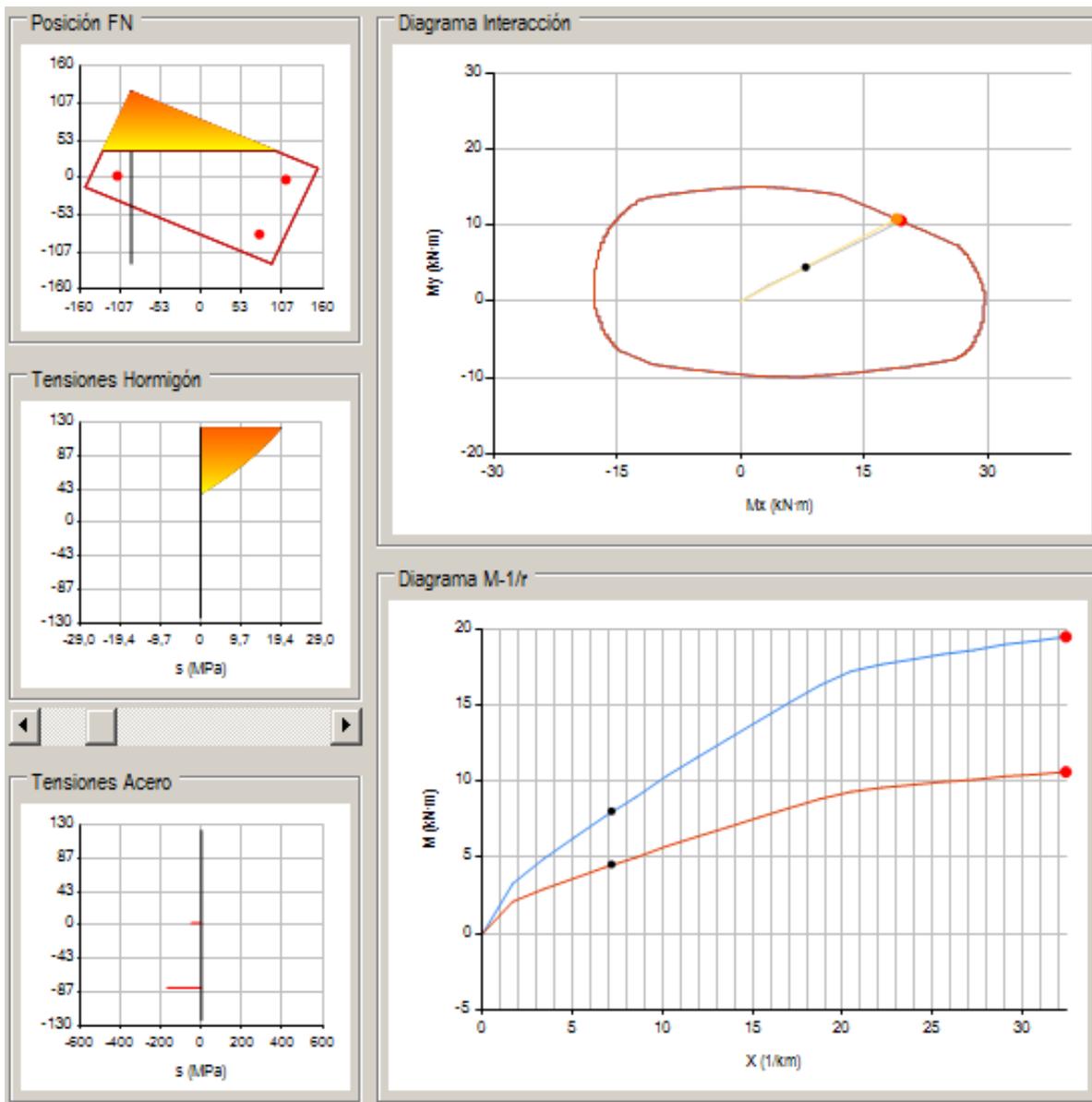


Figura 4.28. Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 1 en el ensayo 2.

CAPÍTULO 4

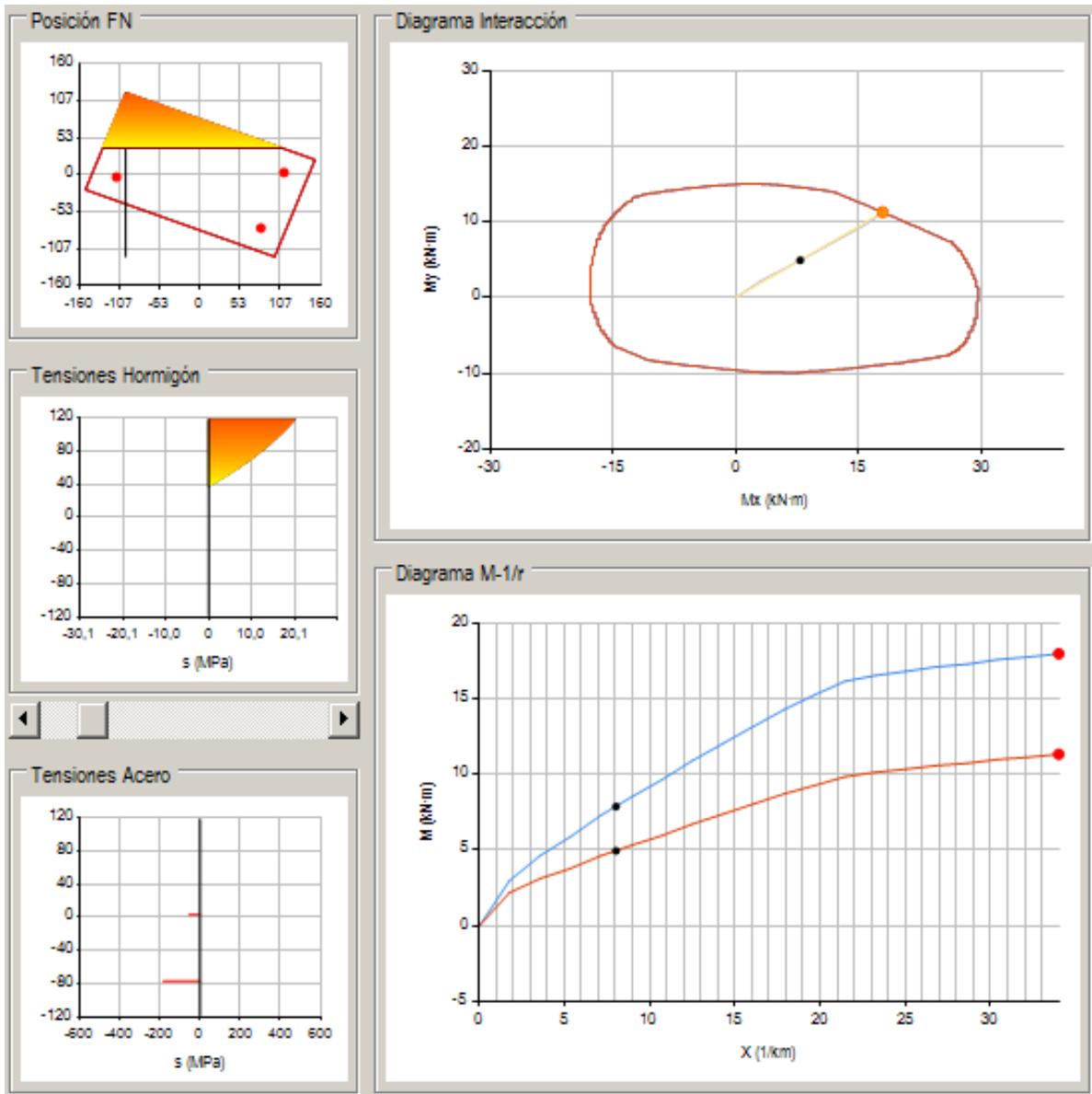


Figura 4.29. Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 2 en el ensayo 2.

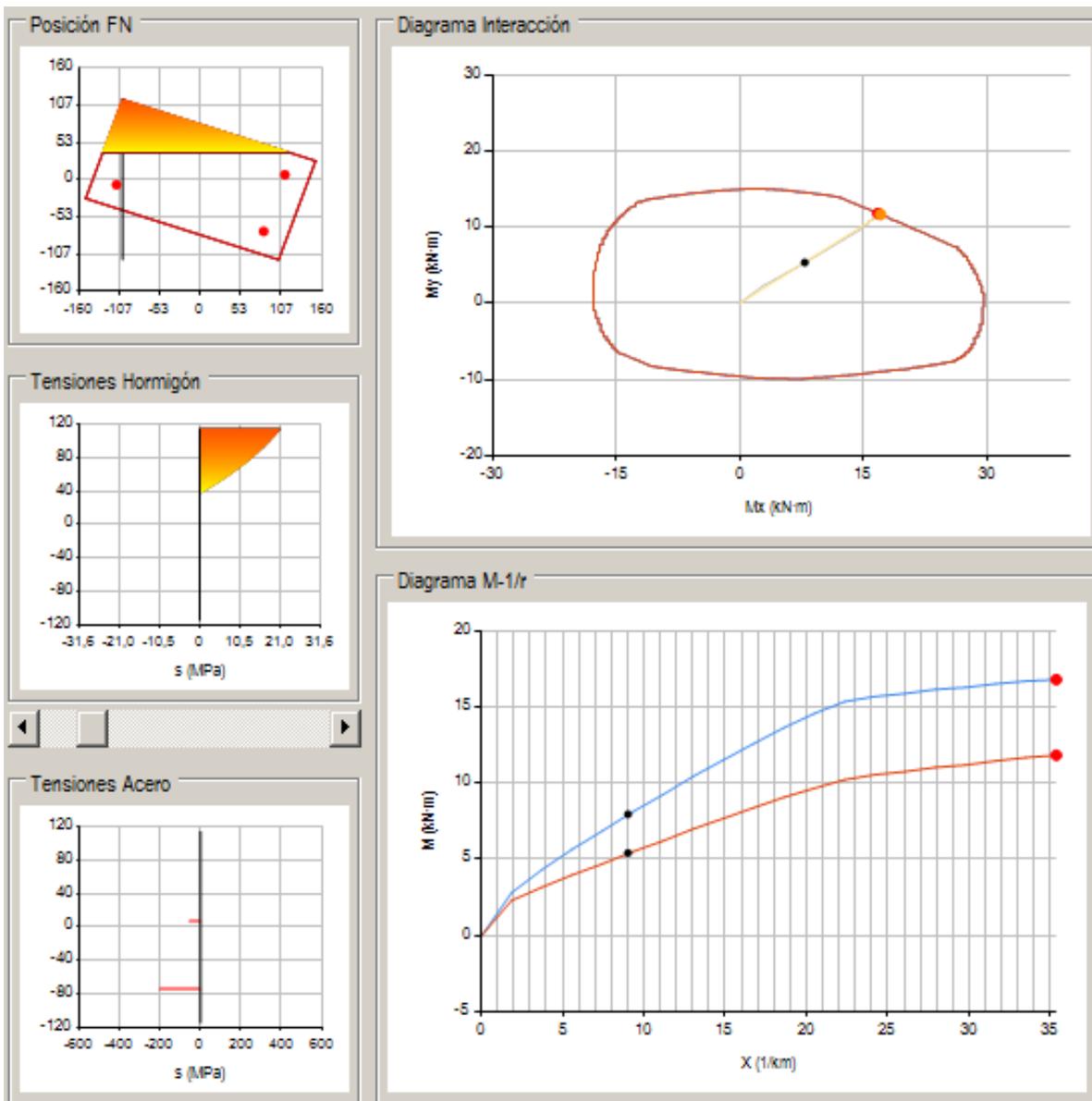


Figura 4.30. Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 3 en el ensayo 2.

CAPÍTULO 4

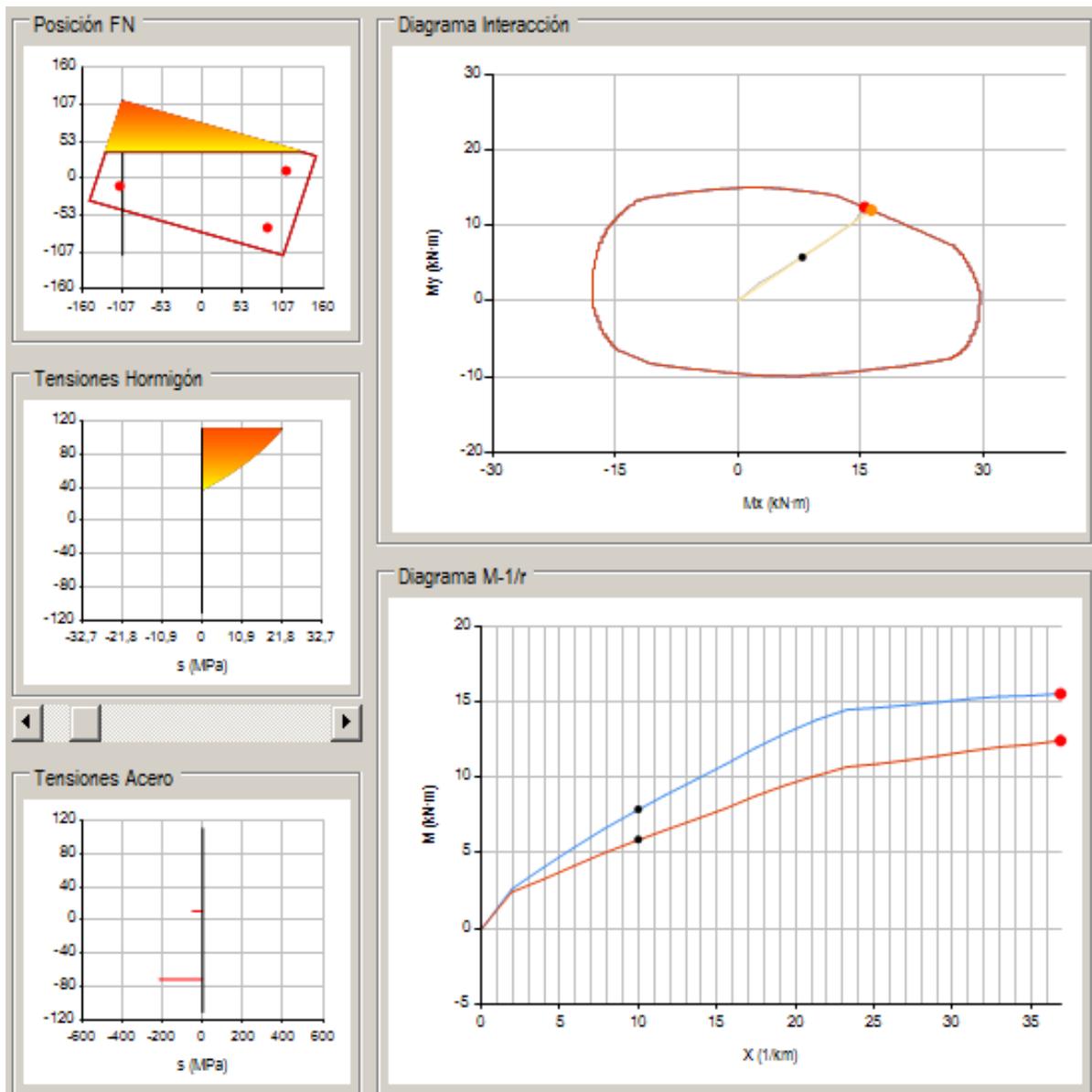


Figura 4.31. Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 4 en el ensayo 2.

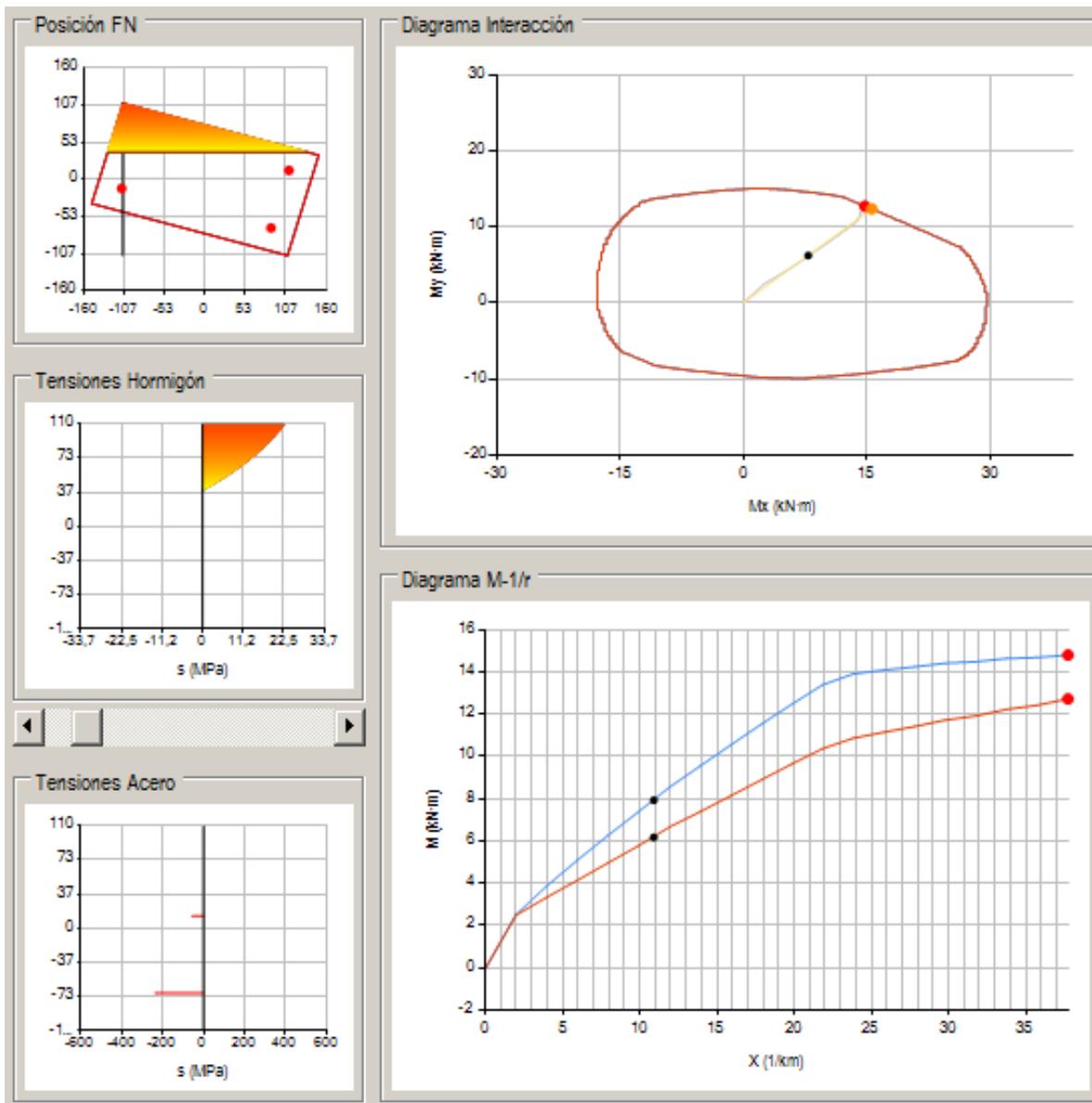


Figura 4.32. Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 5 en el ensayo 2.

CAPÍTULO 4

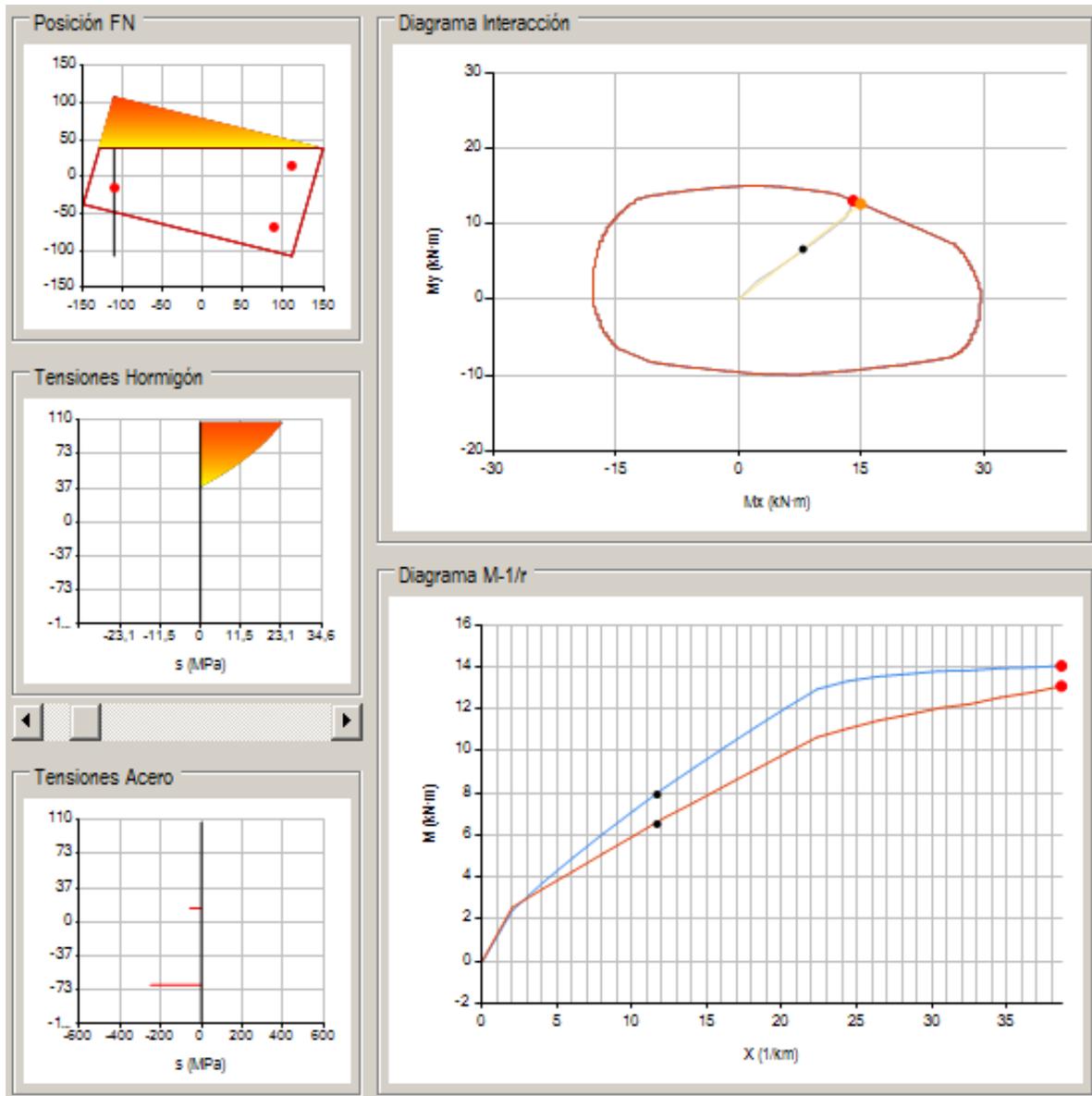


Figura 4.33. Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 6 en el ensayo 2.

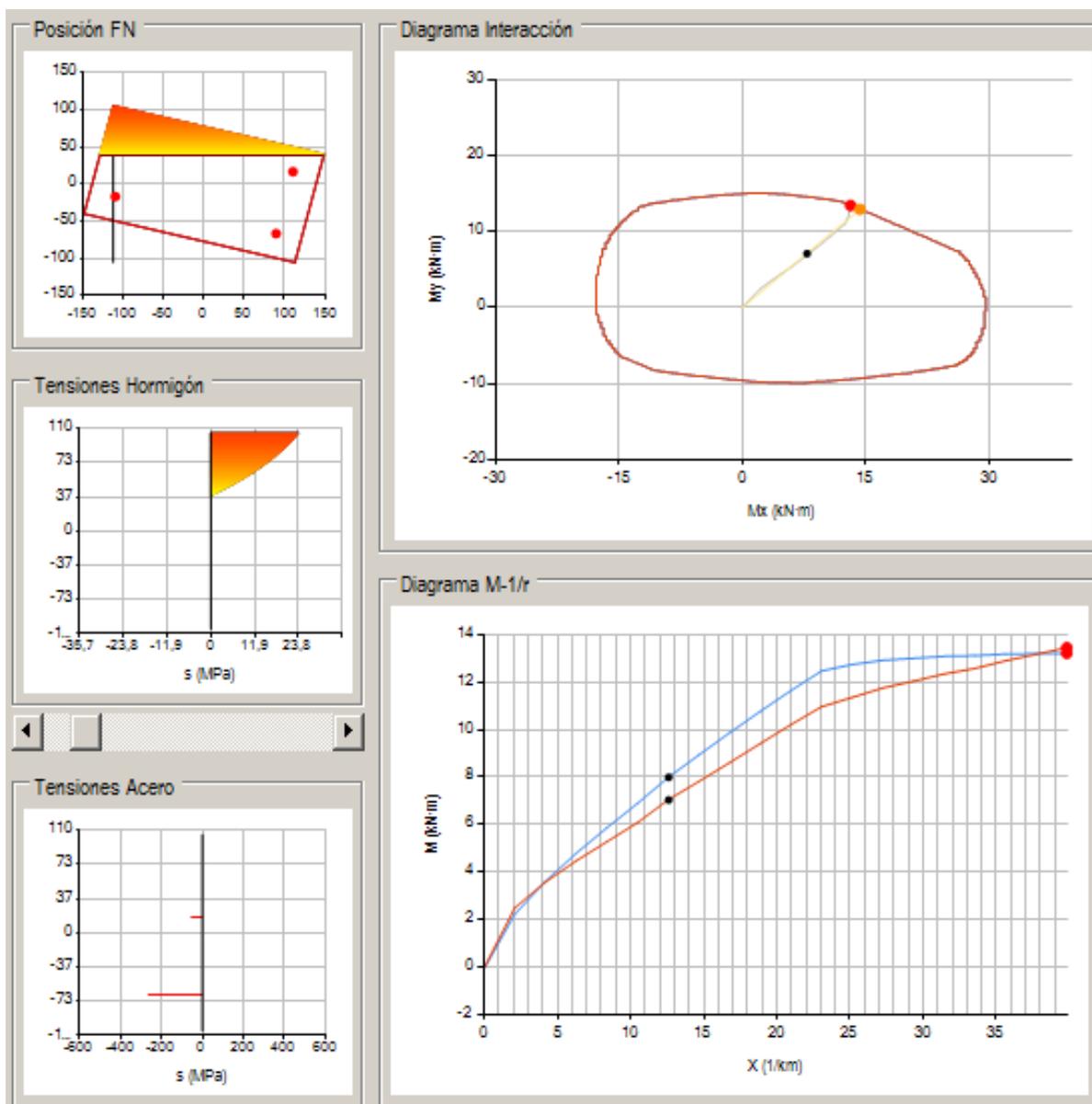


Figura 4.34. Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 7 en el ensayo 2.

CAPÍTULO 4

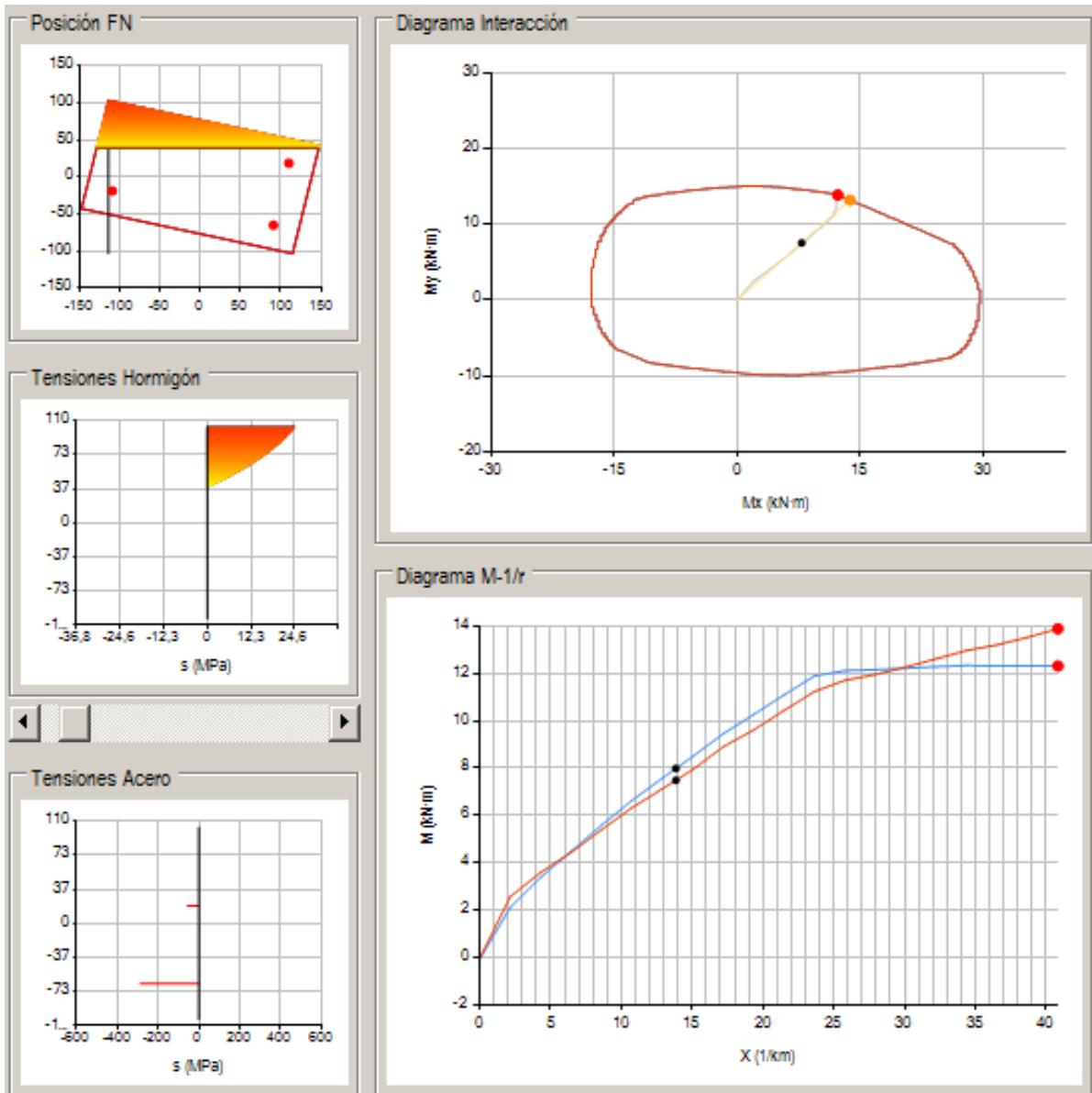


Figura 4.35. Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 8 en el ensayo 2.

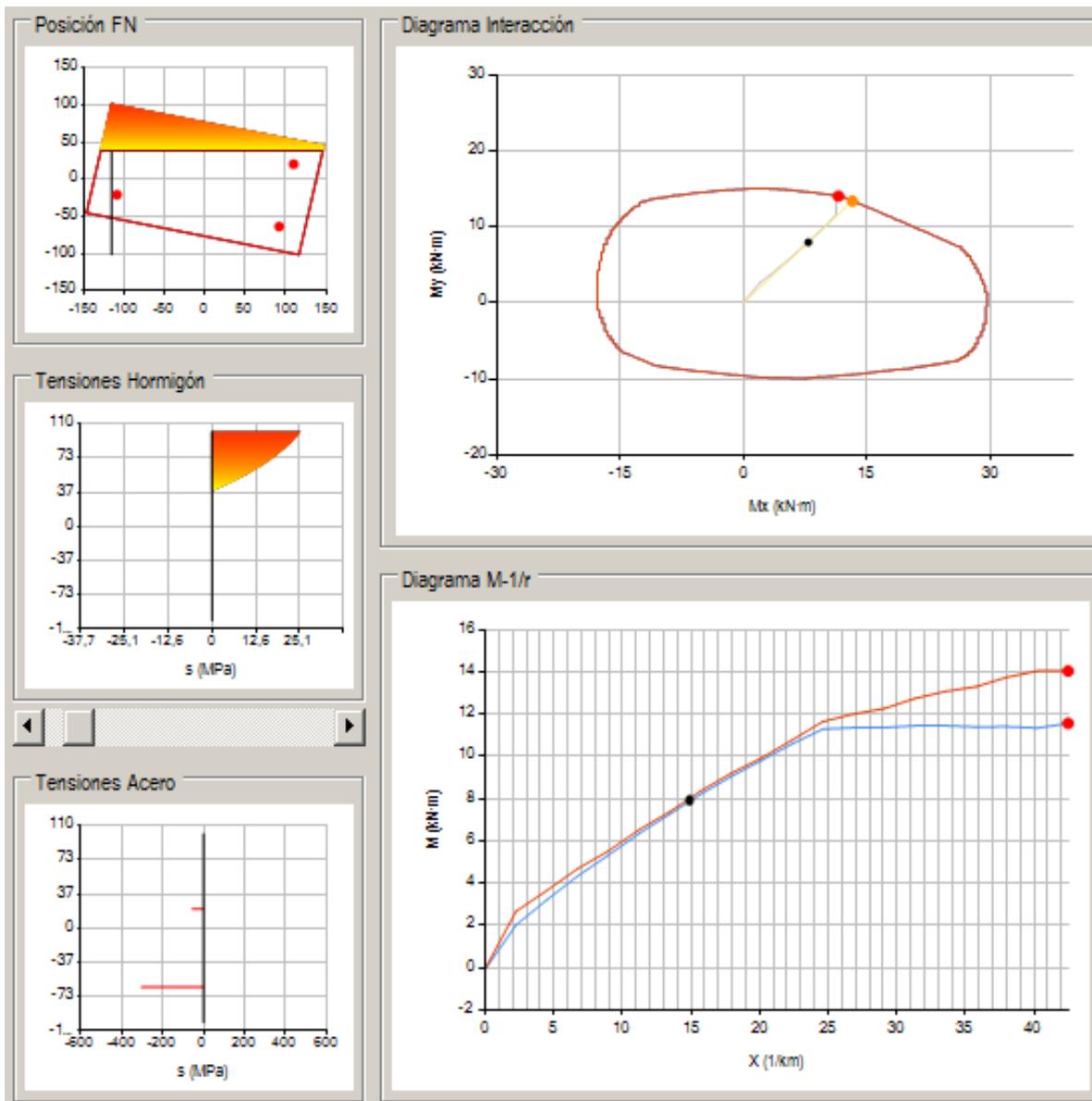


Figura 4.36. Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 9 en el ensayo 2.

CAPÍTULO 4

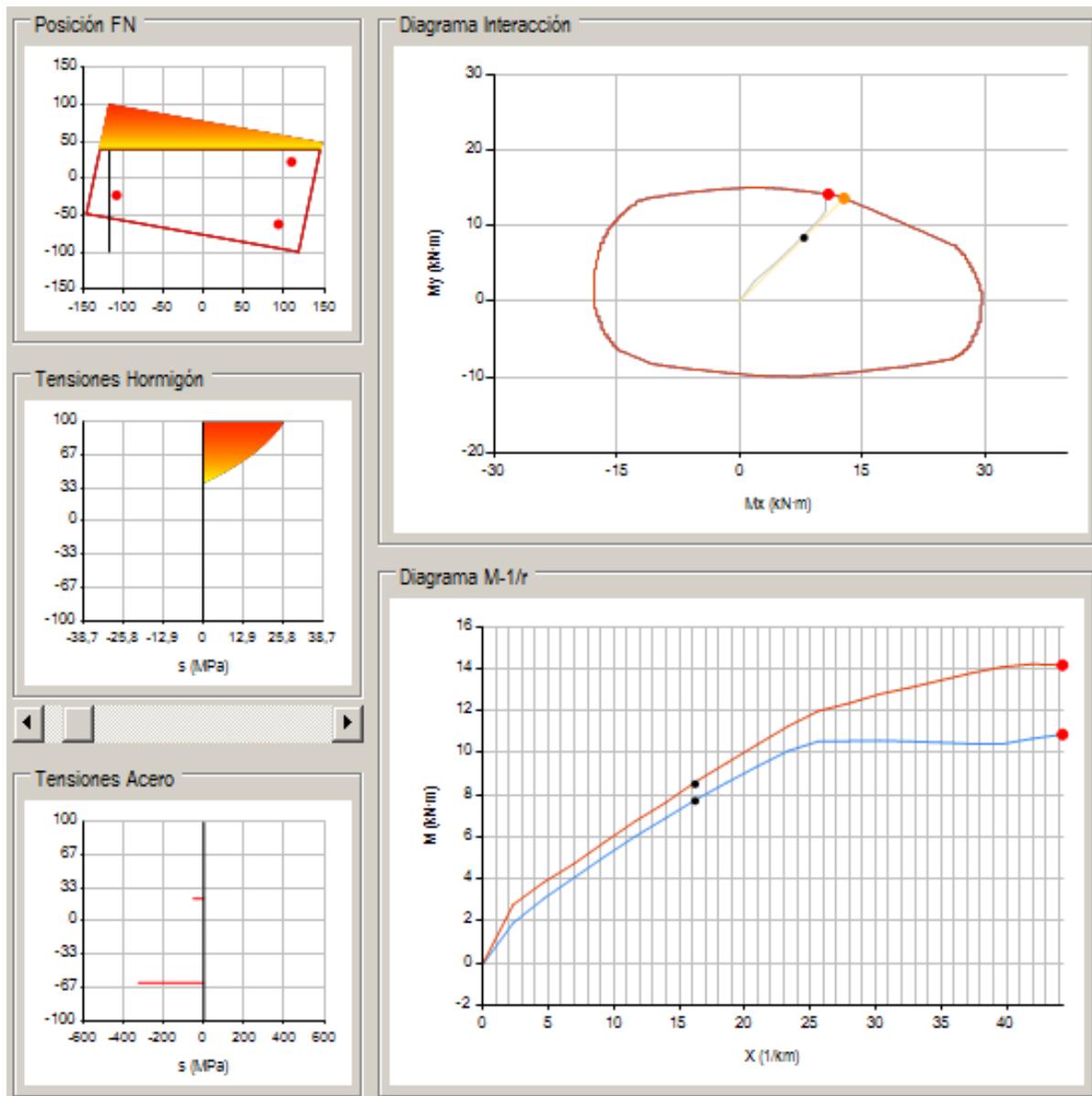


Figura 4.37. Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 10 en el ensayo 2.

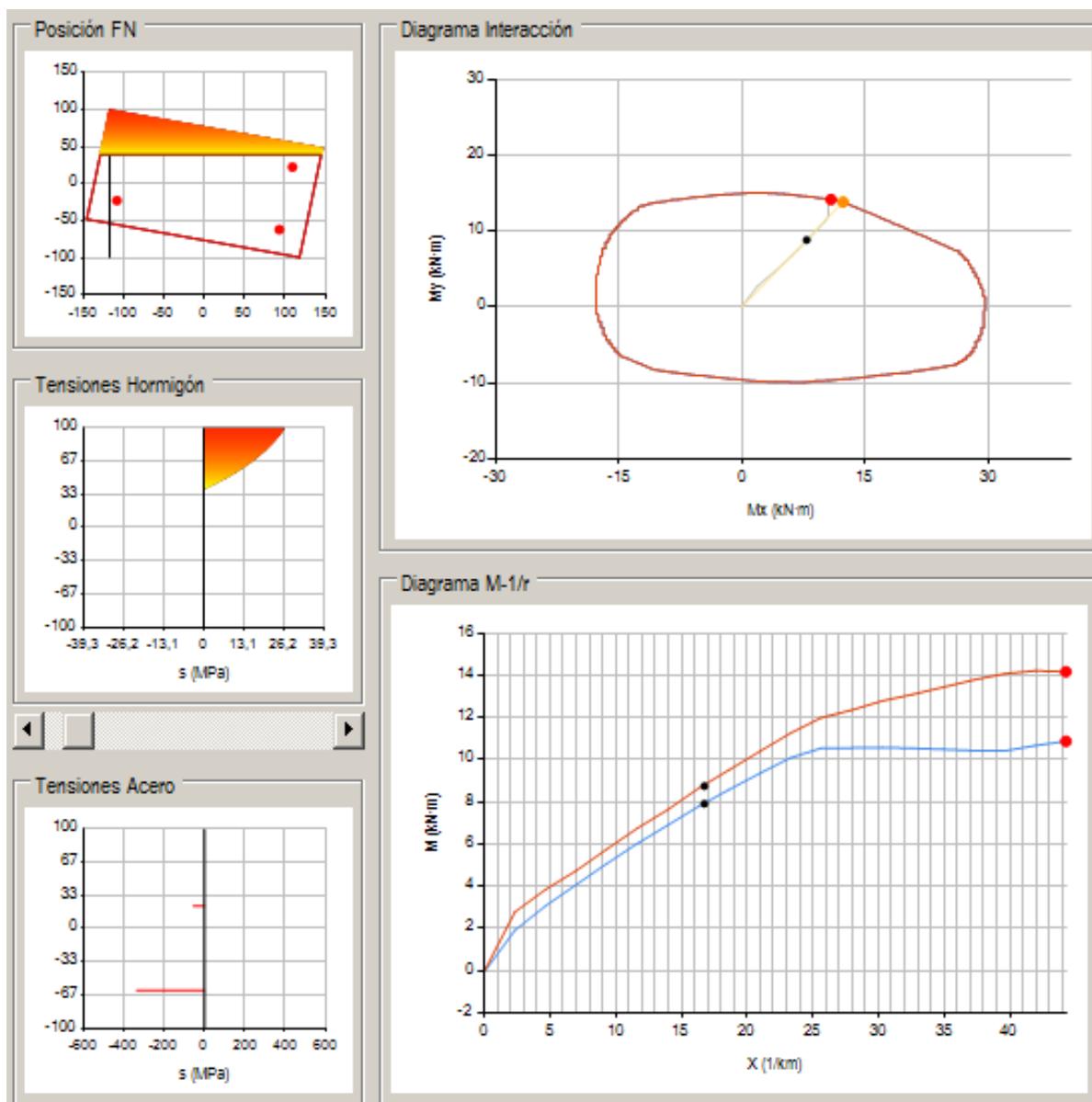


Figura 4.38. Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 11 en el ensayo 2.

CAPÍTULO 4

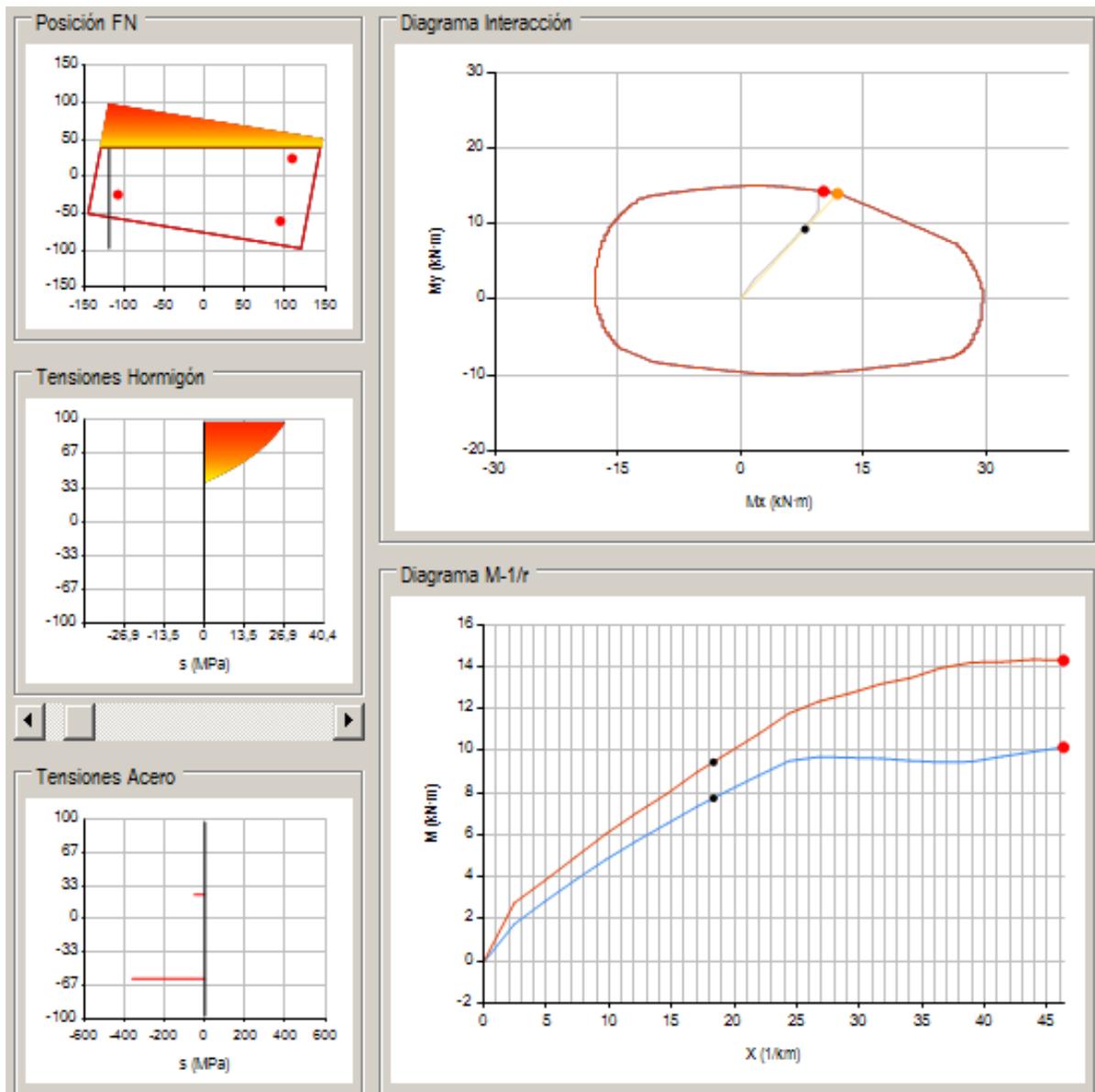


Figura 4.39. Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 12 en el ensayo 2.

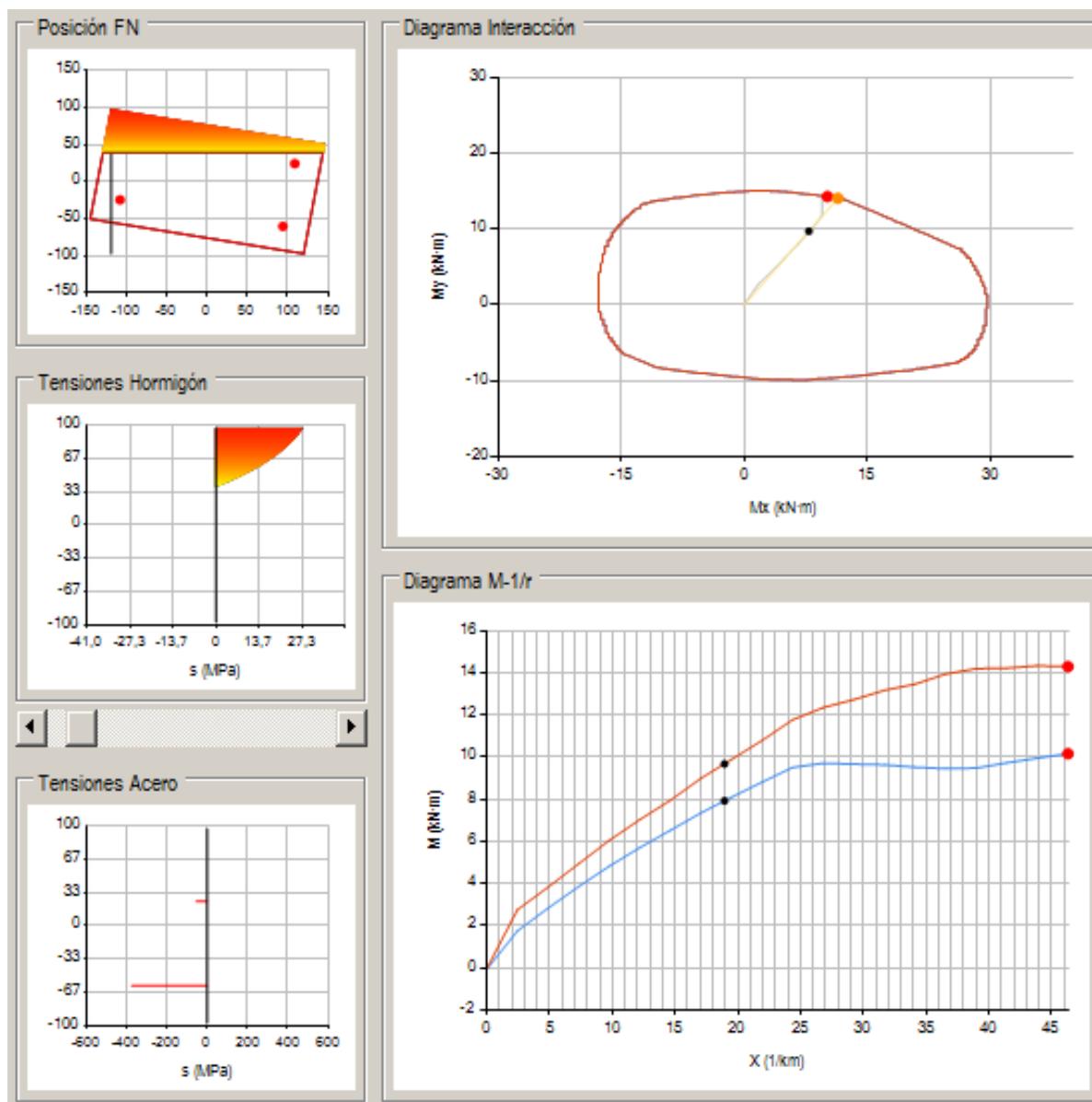


Figura 4.40. Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 13 en el ensayo 2.

CAPÍTULO 4

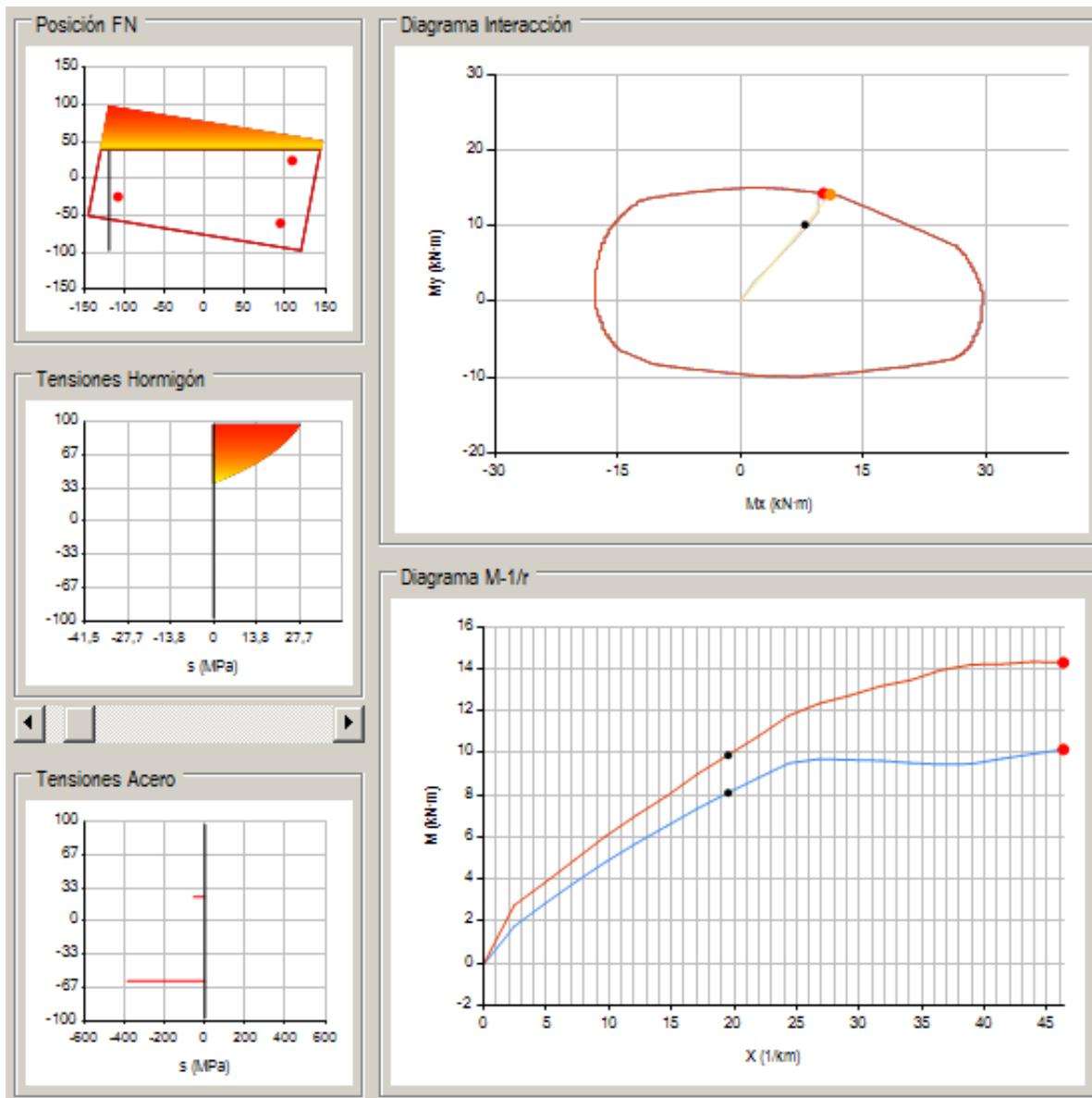


Figura 4.41. Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 14 en el ensayo 2.

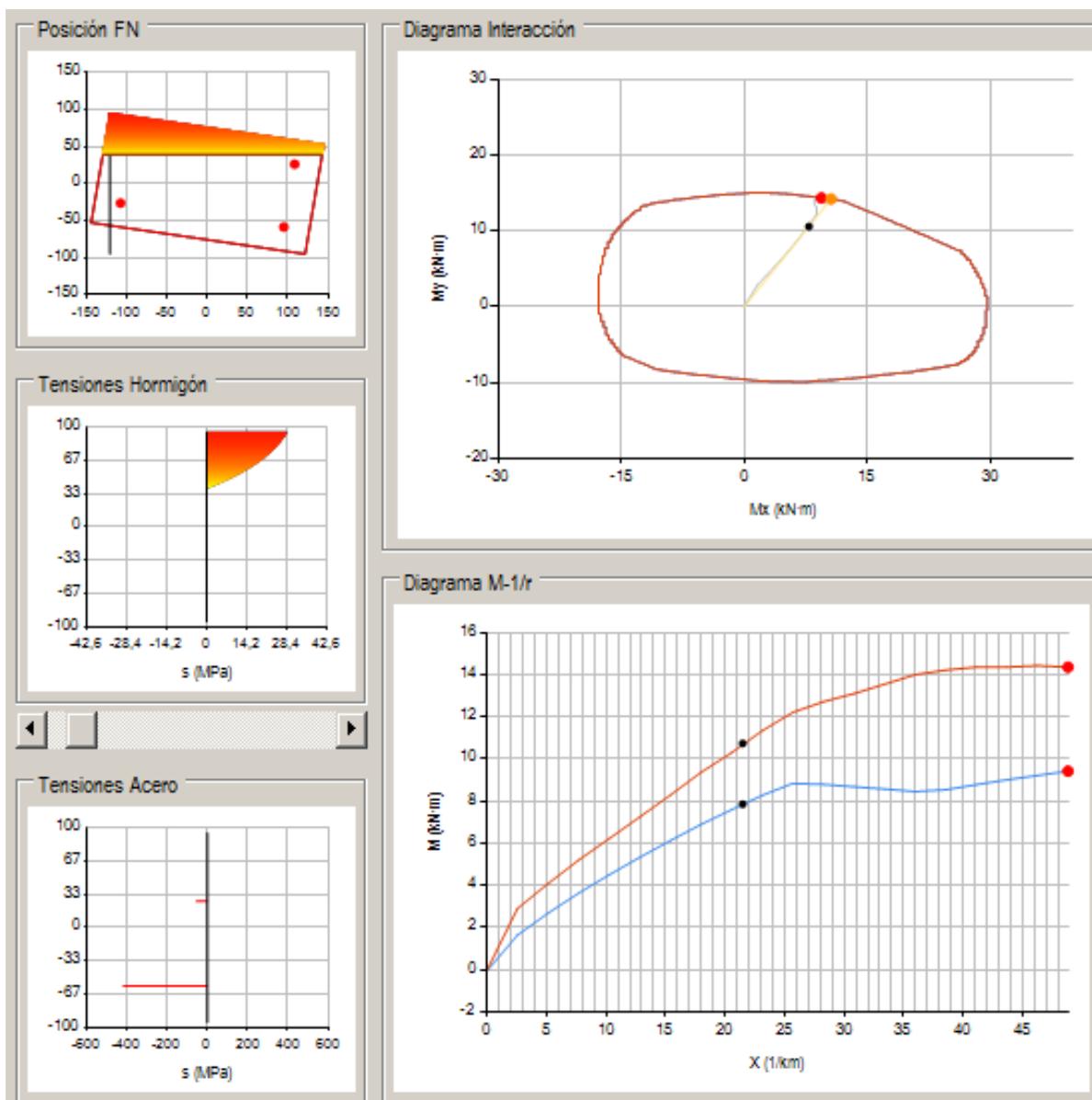


Figura 4.42. Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 15 en el ensayo 2.

CAPÍTULO 4

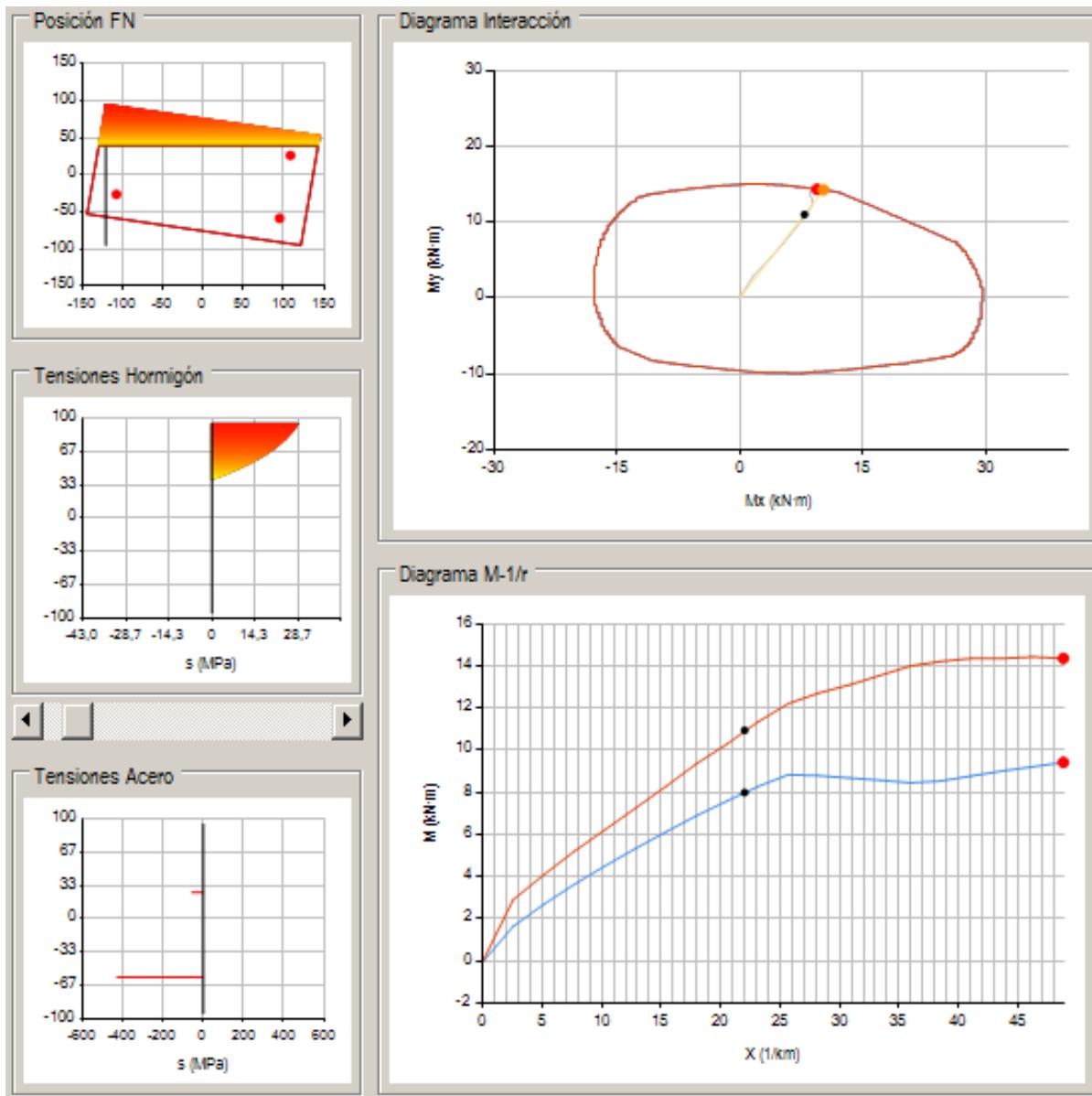


Figura 4.43. Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 16 en el ensayo 2.

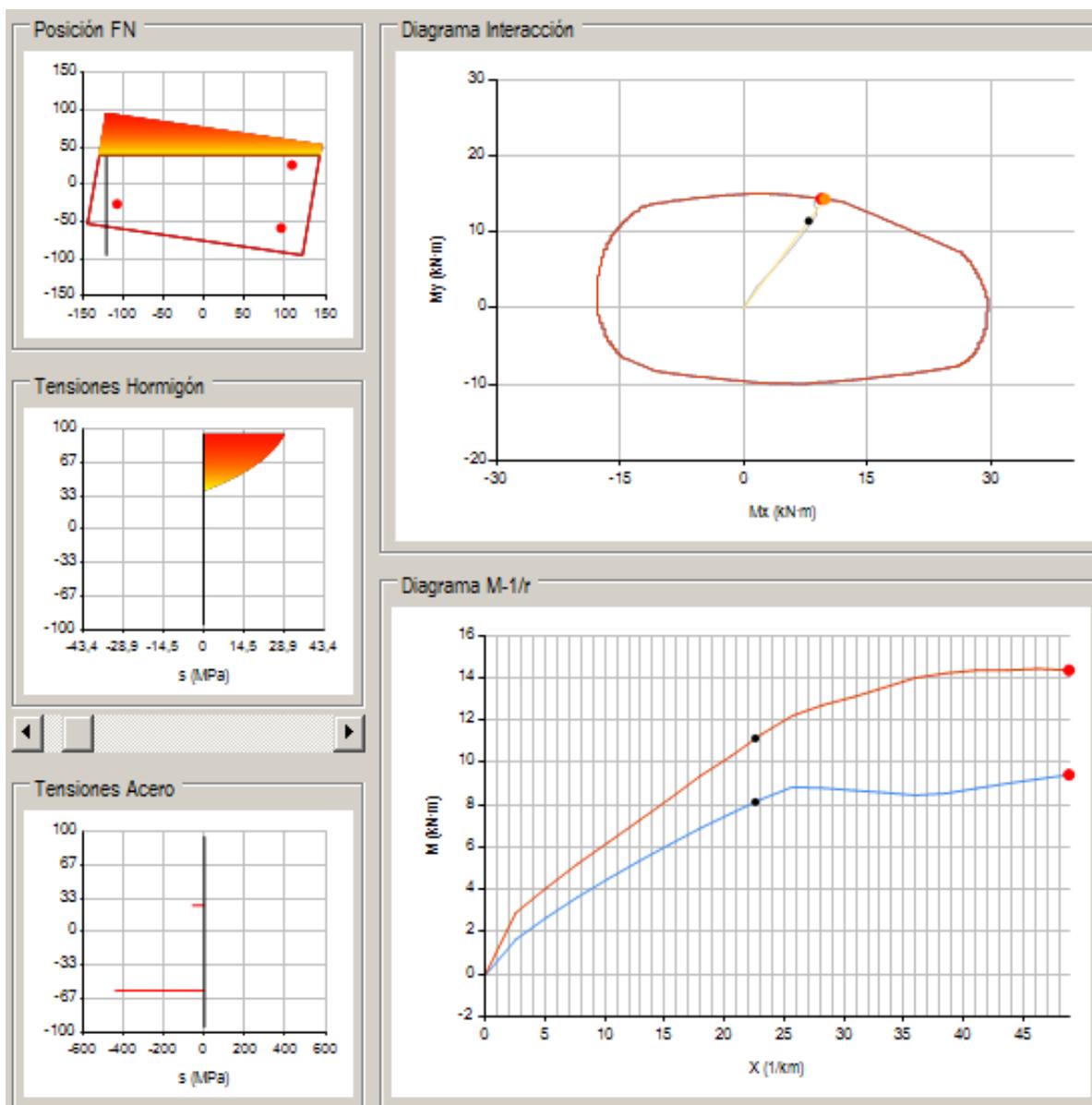


Figura 4.44. Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 17 en el ensayo 2.

CAPÍTULO 4

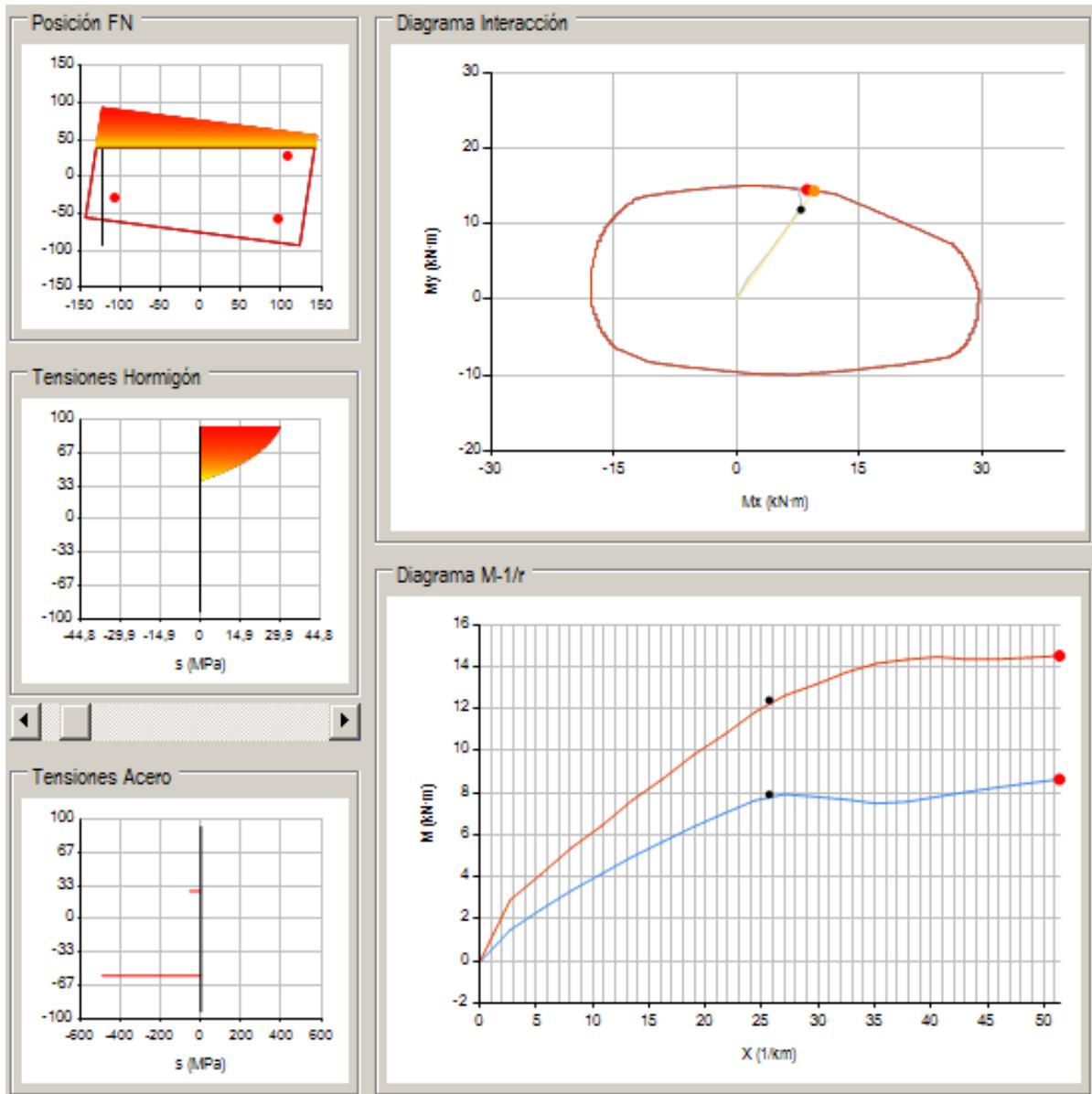


Figura 4.45. Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 18 en el ensayo 2.

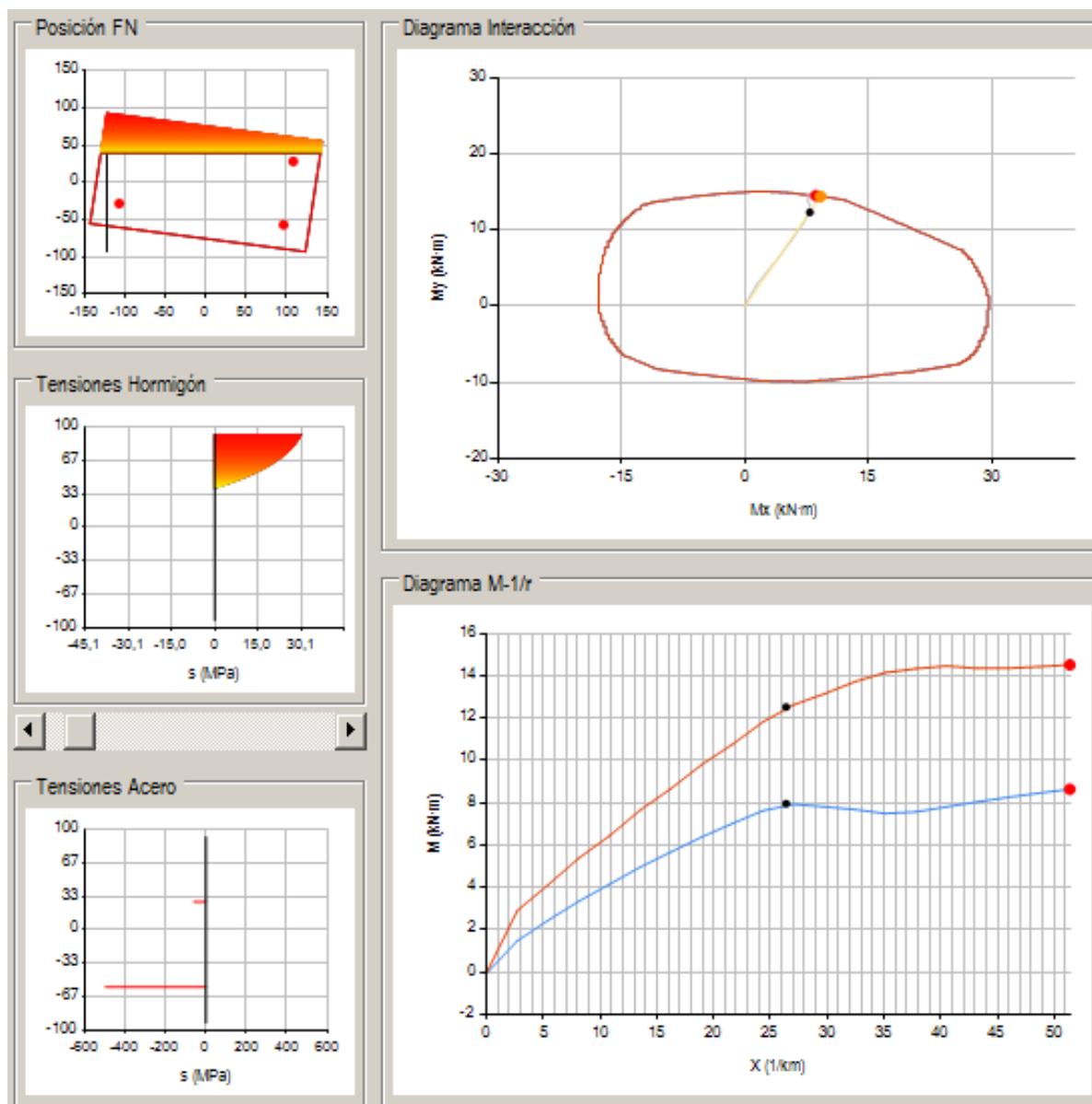


Figura 4.46. Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 19 en el ensayo 2.

CAPÍTULO 4

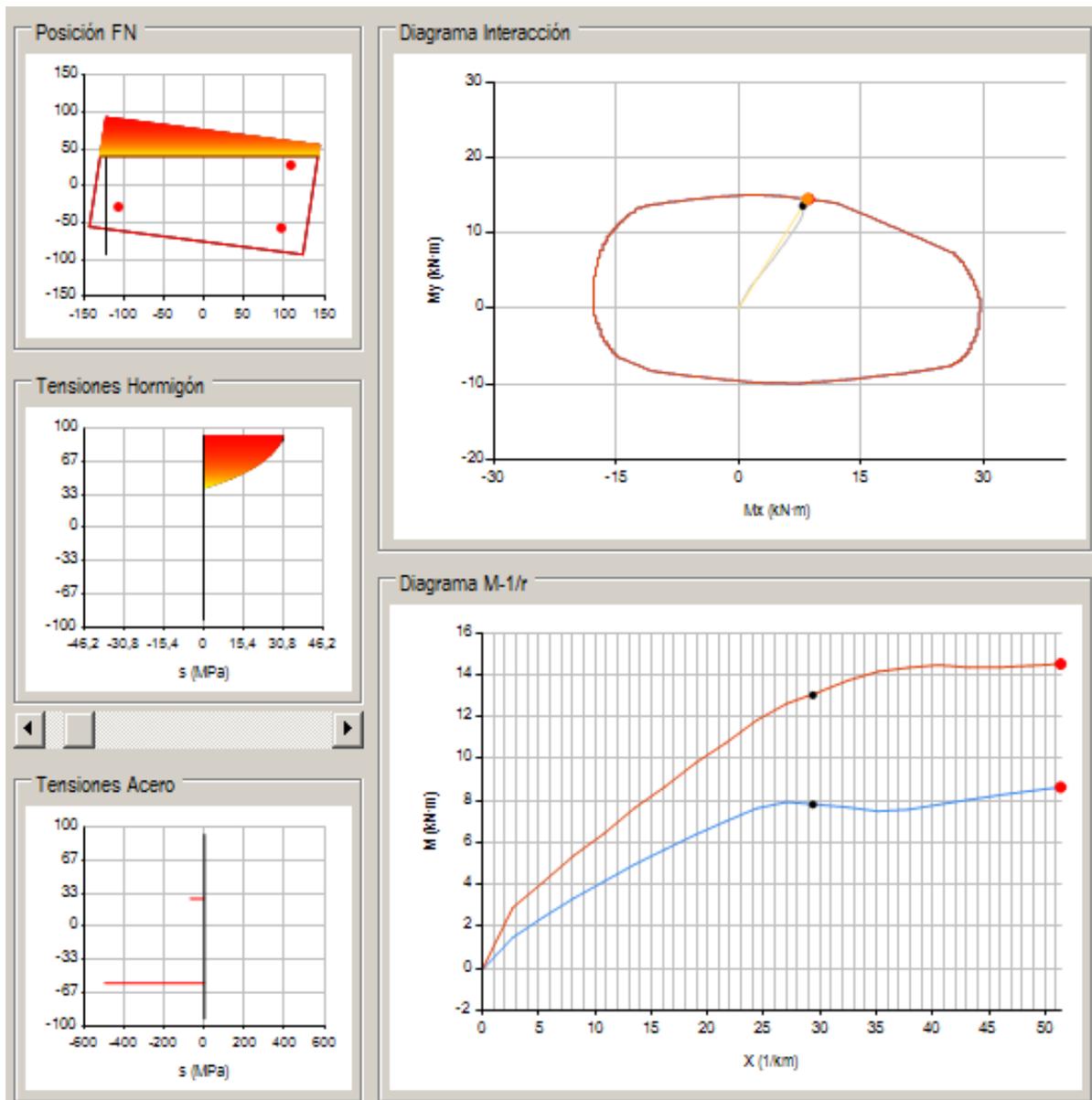


Figura 4.47. Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 20 en el ensayo 2.

4.1.4.5 Discusión de los resultados.

Se ha llevado a cabo la rotura controlada de un soporte corto de hormigón armado sometido a un estado de sollicitación de compresión compuesta esviada. Para ello se mantiene constante un axil de compresión y el momento flector según el eje principal de inercia de la sección al tiempo que se aumenta el valor del momento flector en el plano débil hasta el agotamiento de la pieza. Para cada estado de sollicitación exterior analizada es conocida la dirección de aplicación del vector momento, dirección de la excentricidad exterior.

Se ha obtenido un registro completo de las deformaciones de las fibras instrumentadas en la sección de referencia del soporte con las que poder determinar las coordenadas del plano de respuesta en cada instante.

Conocidas las coordenadas de los planos de respuesta de la sección, así como la dirección de aplicación de la excentricidad exterior, es posible analizar cómo evoluciona la relación entre ambas direcciones.

Se han seleccionado un total de veinte estados de sollicitación exterior para los cuales se determinan las coordenadas del plano de respuesta de la sección (rumbo y profundidad de la fibra neutra, así como su curvatura), y la tensión de las fibras características, partiendo de las deformaciones leídas de los instrumentos instalados en el soporte. Para estos veinte estados se ha llevado a cabo una simulación numérica consistente en determinar los planos de respuesta en equilibrio mediante la implementación del MDMC y la aplicación desarrollada (FCE).

De los datos obtenidos en laboratorio y los resultados del análisis numérico se extraen las siguientes conclusiones:

- Se constata que la dirección que adopta el eje neutro del plano de respuesta en equilibrio no discurre según la perpendicular a la dirección de aplicación del vector momento exterior.
- Se observa que la diferencia entre la normal a la dirección del vector momento exterior y el rumbo que adopta la fibra neutra en equilibrio disminuye al tiempo que aumenta el ratio de utilización de la sección analizada. Esto implica que los errores que se pueden

CAPÍTULO 4

cometer por adoptar un rumbo para el eje neutro en equilibrio no correcto, son mayores en umbrales de estados de sollicitación de servicio de la sección, situación en el que realmente es útil conocer la respuesta en términos de deformaciones y tensiones de las fibras características. La figura 4.48 muestra la relación que se ha obtenido mediante el análisis numérico entre el rumbo del eje neutro en equilibrio y la normal a la dirección del vector momento frente al ratio de utilización de la sección.

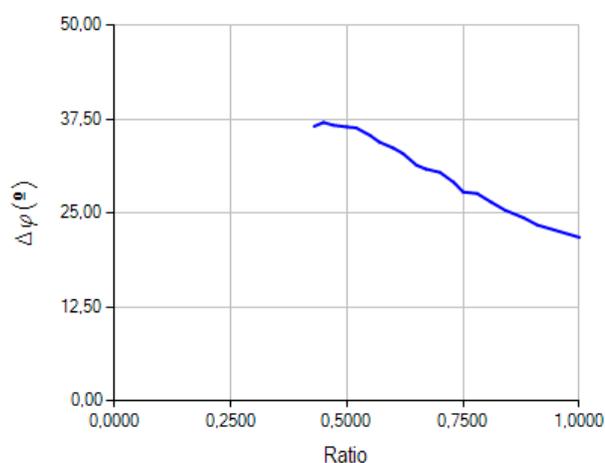


Figura 4.48. Diferencia en grados entre la normal a la dirección del vector momento exterior y el rumbo de la fibra neutra en equilibrio frente al ratio de agotamiento de la sección, obtenidos en la simulación numérica del ensayo 2.

Autor.

- Se ha observado en laboratorio que la carga en rotura alcanzada supera sensiblemente a la carga en rotura determinada de manera numérica. La figura 4.49 representa el diagrama de interacción M_x, M_y para el axil exterior concomitante ($N = 40.51 \text{ kN}$), y sobre este diagrama se ha medido la diferencia entre la carga experimental y teórica en agotamiento, hallándose un incremento de la primera respecto a la segunda del 17%.

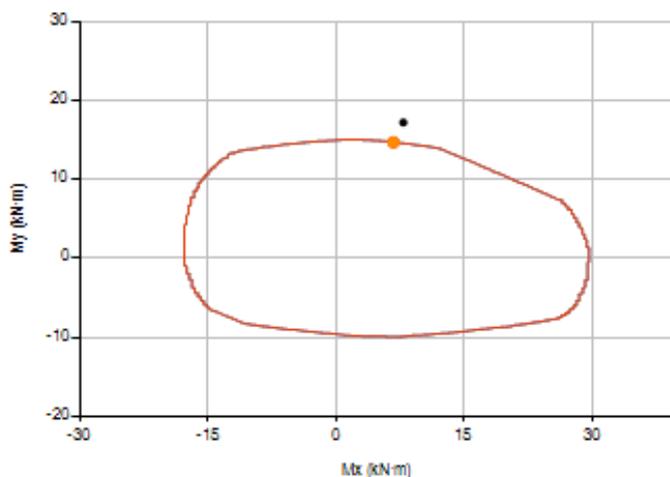


Figura 4.49. Medida de la diferencia entre la carga de agotamiento experimental y numérica sobre un diagrama de interacción (M_x, M_y) para el axil exterior aplicado N en el ensayo 2. Autor.

El incremento de capacidad de la sección observado en laboratorio frente a la carga teórica de agotamiento determinada mediante FCE y el MDMC puede deberse a las siguientes causas:

- En el análisis numérico llevado a cabo no se ha tomado en consideración la capacidad del hormigón para resistir esfuerzos de tracción.
- Debido a la posición de la carga según el eje X, y puesto que esta se lleva al soporte de hormigón mediante un perfil de acero apoyado en dos rodillos, es posible que en fases próximas a la rotura, se produjera un cierto arco de descarga, y una fracción de la carga aplicada fuera conducida directamente mediante bielas a los apoyos.
- El modelo de cálculo de equilibrio de la sección en cuanto a la resultante de esfuerzos internos no contempla otros posibles mecanismos resistentes adicionales que abundan en el aumento de capacidad real de la sección.



Figura 4.50. Soporte ensayado instantes después de alcanzarse su agotamiento en el ensayo 2. Autor.

- Si se comparan los planos de respuesta obtenidos experimentalmente frente a los determinados de manera numérica, es posible afirmar que el modelo propuesto (MDMC) es adecuado para la predicción de la respuesta de una sección cualquiera de hormigón armado sometida a un estado de sollicitación de compresión o flexión compuesta esviada. Las figuras 4.51 a 4.55 muestran para cada uno de los veinte estados de sollicitación analizada la traza del plano de equilibrio (fibra neutra) así como la dirección de la aplicación del vector momento exterior. Se observa que a pesar de haberse encontrado diferencias entre ambas soluciones se ha estimado de manera adecuada la tendencia del rumbo adoptado por la fibra neutra en todos los rangos de utilización de la sección. La diferencia entre los dos rumbos no ha superado los 10 °.

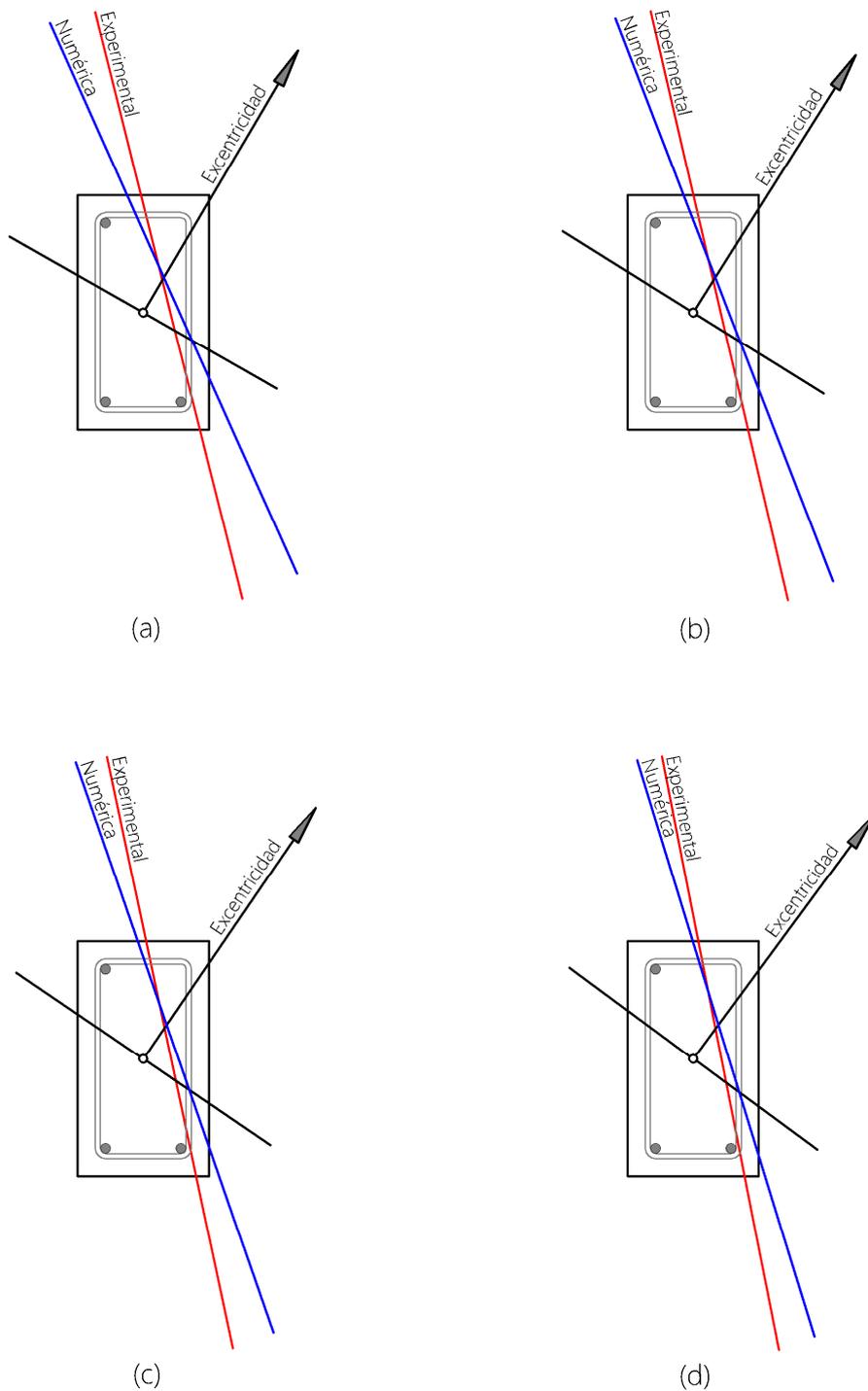


Figura 4.51. Posición de la fibra neutra obtenida de manera experimental y numérica para los escalones de carga 1, 2, 3, y 4 correspondiente al ensayo 2 (a, b, c, d). Autor.

CAPÍTULO 4

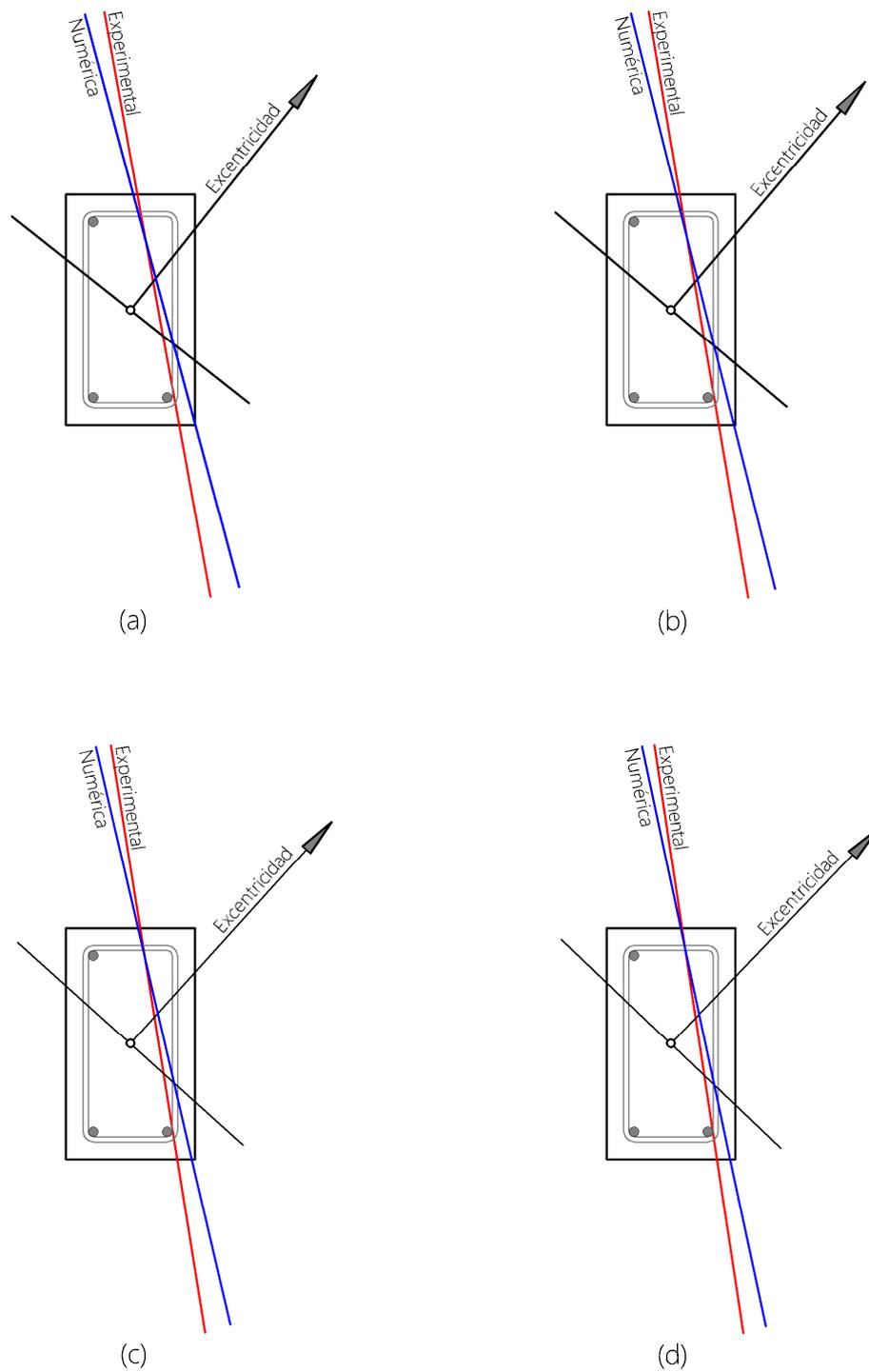


Figura 4.52. Posición de la fibra neutra obtenida de manera experimental y numérica para los escalones de carga 5, 6, 7, y 8 correspondiente al ensayo 2 (a, b, c, d). Autor.

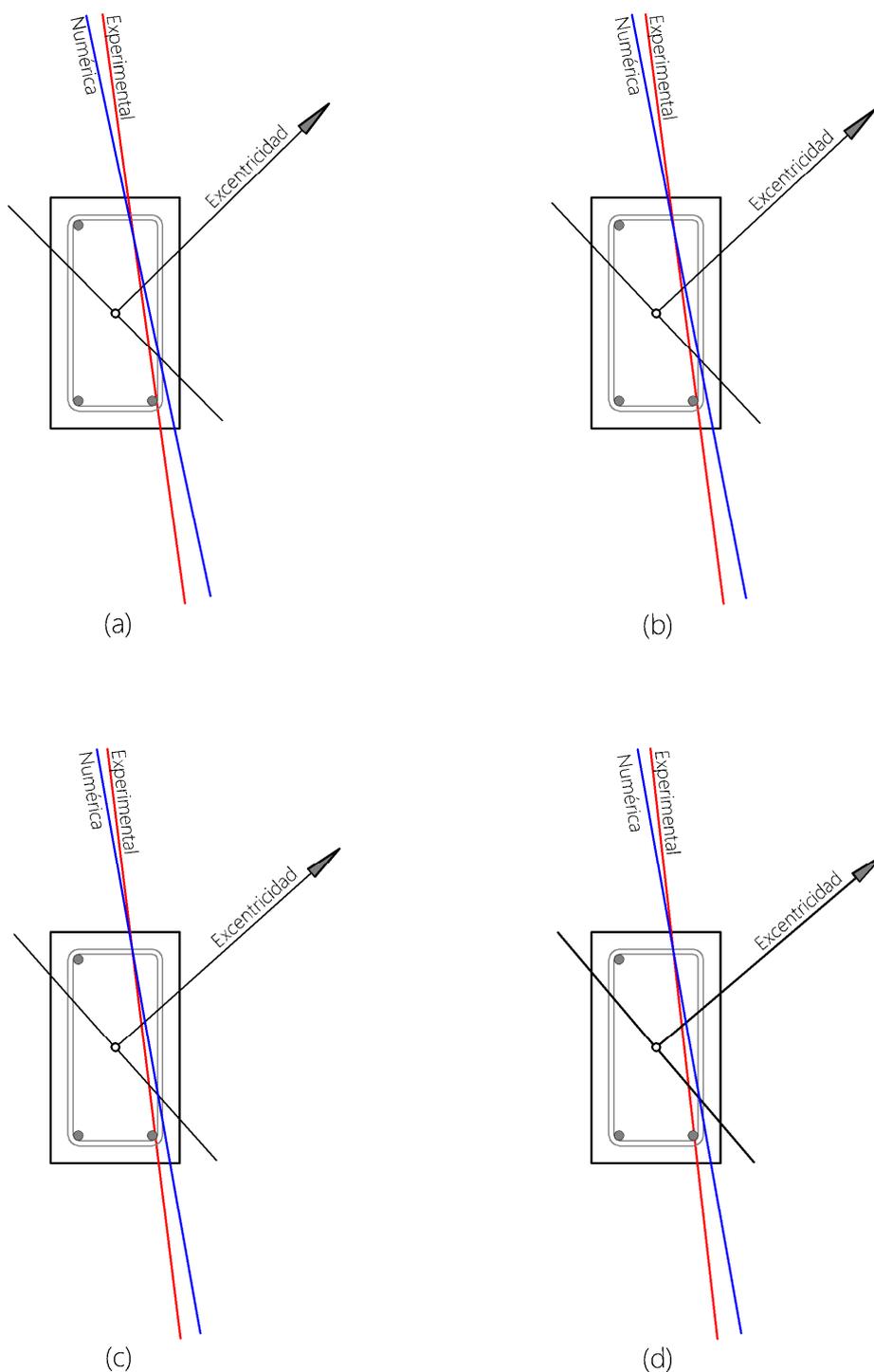


Figura 4.53. Posición de la fibra neutra obtenida de manera experimental y numérica para los escalones de carga 9, 10, 11, y 12 correspondiente al ensayo 2 (a, b, c, d). Autor.

CAPÍTULO 4

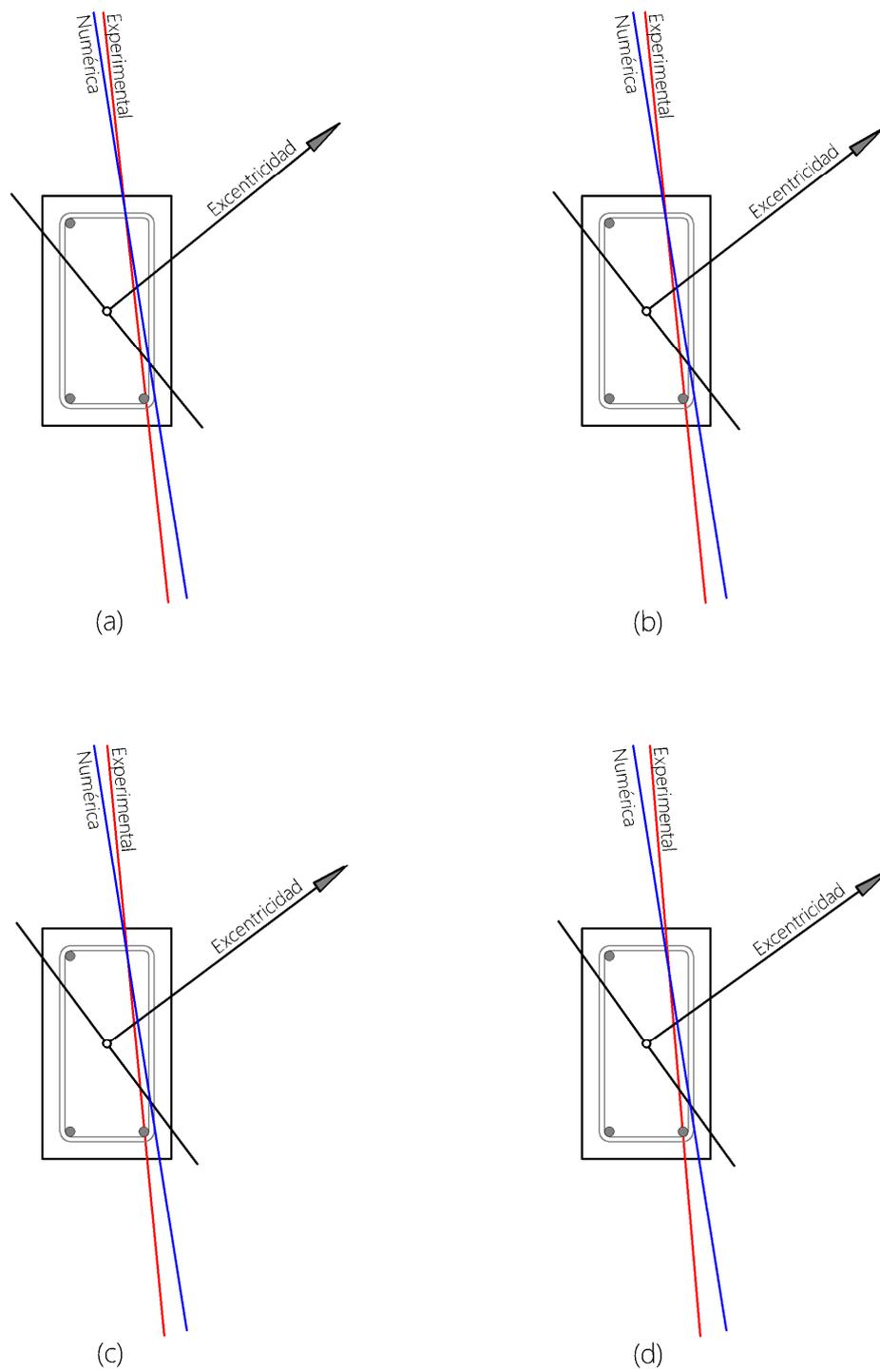


Figura 4.54. Posición de la fibra neutra obtenida de manera experimental y numérica para los escalones de carga 13, 14, 15, y 16 correspondiente al ensayo 2 (a, b, c, d). Autor.

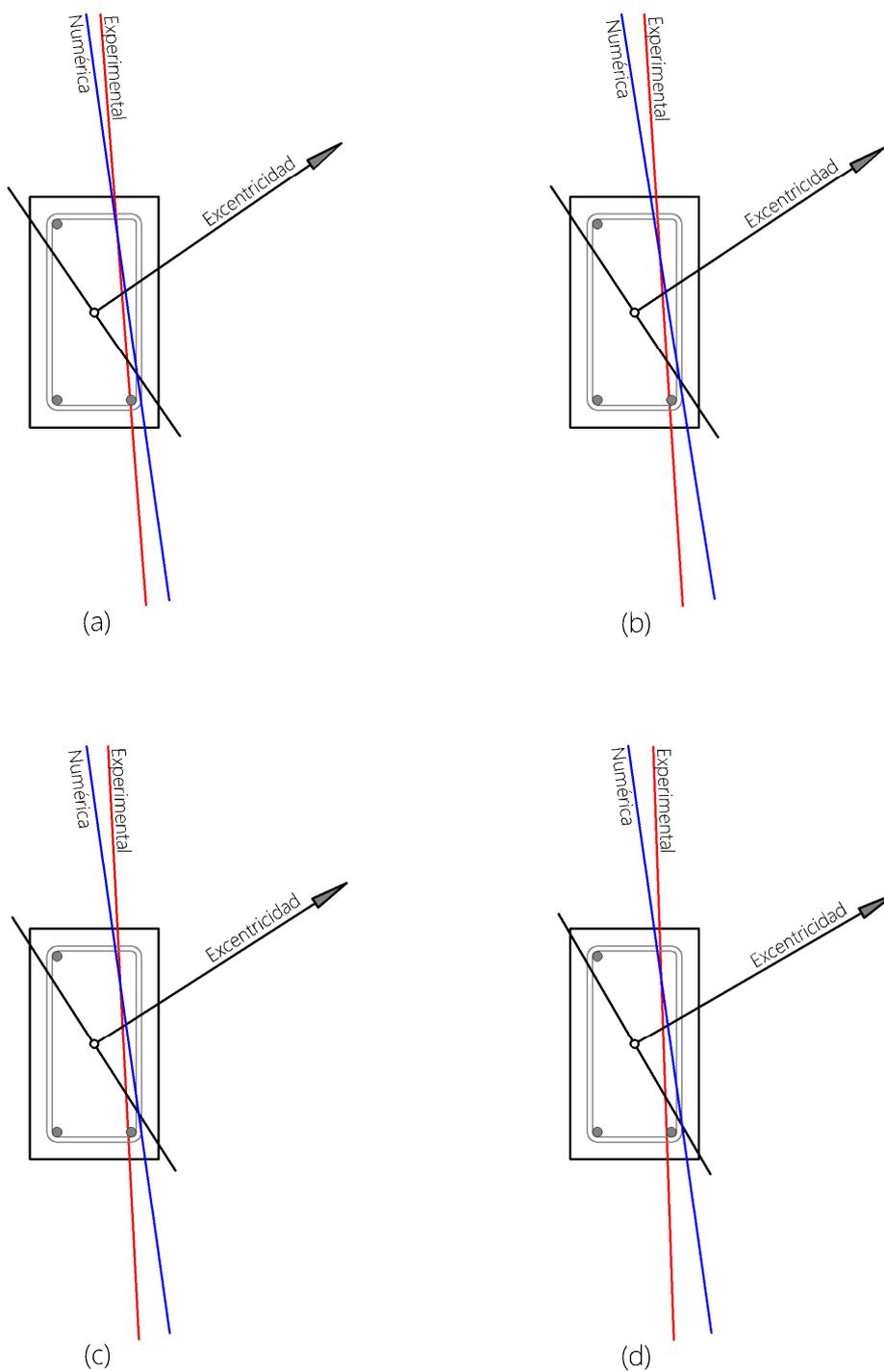


Figura 4.55. Posición de la fibra neutra obtenida de manera experimental y numérica para los escalones de carga 17, 18, 19, y 20 correspondiente al ensayo 2 (a, b, c, d). Autor.

CAPÍTULO 4

4.2 Resumen y conclusiones (capítulo 4).

El diseño y la materialización de un tipo de ensayo adecuado posibilita la determinación de lecturas verosímiles en los instrumentos de medida de los que poder extraer conclusiones ciertas y generales. Así mismo, un número elevado de ensayos en los que se reproduzcan las condiciones del mismo y los resultados observados avalan las conclusiones de los hechos observados.

En esta tesis se ha tratado de diseñar un tipo de ensayo que fuera el origen de una campaña más extensa y ambiciosa. Y en este proceso, con los medios disponibles, se han destruido de manera controlada dos soportes cortos de hormigón armado con una asimetría mecánica en la sección de referencia de los mismos mediante la imposición exterior de estados de compresión compuesta enviada. El objetivo de los ensayos llevados a cabo ha sido principalmente validar el modelo de cálculo propuesto (MDMC) y habilitarlo para el uso extensivo en la práctica habitual de la profesión.

En términos generales, la conclusión primera que es posible extraer de los dos ensayos llevados a cabo es que existe una gran dificultad de simular la respuesta precisa de una sección sometida a sollicitaciones normales cuando las deformaciones y las tensiones adoptan reducidos, y esto ocurre en estados iniciales de carga así como situaciones de reducida excentricidad. Esta dificultad podría atribuirse a las siguientes causas:

- La complejidad de caracterizar la ecuación constitutiva del hormigón en la rama de tracción hace que en el modelo numérico se descarte cierta capacidad de la sección. Lo relevante no es el hecho de eliminar esta fracción reducida de capacidad resistente de la sección sino que, debido a esto, la respuesta de la sección desde un punto de vista numérico puede ser distinta a la respuesta real.
- Las deformaciones que pretende medirse en estados iniciales de carga o bajas excentricidades exteriores son muy reducidos. Pequeñas variaciones en esta medida conduce a planos de respuesta muy distintos.

Respecto a la geometría de los prototipos ensayados:

- Debido al reducido tamaño de los soportes ensayados es posible afirmar que la respuesta de las secciones no siguiera con rigor la hipótesis de secciones planas, lo cual implicaría que el modelo de cálculo propuesto no fuera de aplicación a los hechos observados.
- Debido igualmente a las dimensiones de los prototipos ensayados, se han introducido incertidumbres en cuanto a la posición real de aplicación del axil exterior durante la ejecución del primer ensayo. La superficie de la placa de apoyo del equipo de compresión (axil exterior) es suficientemente grande como para que el posible error que se comete durante el posicionamiento del mismo sobre el extremo del soporte indujera diferencias elevadas en las excentricidades reales frente a las buscadas.

Si se atiende a la interpretación de los resultados obtenidos se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- El MDMC y la aplicación desarrollada (FCE) han estimado de manera adecuada la respuesta de la sección de referencia para los dos ensayos llevados a cabo. En ambos ensayos la tendencia de los planos determinados numéricamente se han situado próximos a los planos observados en laboratorio.
- El MDMC es robusto en todos los umbrales de utilización de la sección. Así puede observarse como se ha determinado de manera fiel el rumbo de la fibra neutra y la tensión en las fibras características en el ensayo 2 (figuras 4.51-4.55).
- Se ha constatado la ausencia de perpendicularidad entre el rumbo que adopta el eje neutro de una sección en equilibrio sometida a sollicitaciones normales frente a la dirección de aplicación del vector momento exterior, habiéndose observado que las mayores diferencias se encuentra en umbrales iniciales de carga (zonas de la sección en servicio). Es importante abundar en el hecho de que el conocimiento del plano de respuesta de una sección frente a sollicitaciones normales adquiere mayor importancia en estos rangos de tensión puesto que son los que están asociados a la implementación de las verificaciones establecidas en los códigos (estados límite de deformación y fisuración).

CAPÍTULO 4

- Se genera la necesidad de conocer el error en la estimación de la tensión de una fibra cualquiera en una sección por la adopción errónea del rumbo del eje neutro, hecho que es investigado en el capítulo 5 de esta tesis.

5. TENSIONES NORMALES EN SECCIONES ASIMÉTRICAS

Ha quedado constatada la imposibilidad de determinar de manera directa el rumbo que adopta el eje neutro en condiciones de equilibrio en secciones genéricas de hormigón armado o pretensado sometidas a un estado de sollicitación normal arbitrario. La asunción de un giro establecido a priori como la normal a la dirección de la excentricidad exterior como dirección del eje neutro en equilibrio puede producir errores significativos tal como ha quedado demostrado en los capítulos 3 y 4 de esta tesis. Y surge de manera inmediata la cuestión sobre la posible afección en la estimación de la tensión en las fibras características si ésta se determina con una dirección errónea en el eje neutro. Se ha observado que la fibra neutra vira hacia el eje débil de una sección lo cual puede producir diferencias sensibles en las componentes de la ecuación del plano de equilibrio.

Es preciso volver a incidir en la necesidad conocer las coordenadas del plano de equilibrio con el que poder dar solución a cuestiones relacionadas con el dimensionamiento a bajo nivel de la sección. Así, llevar a cabo la verificación frente a estados límite de servicio o analizar secciones en agotamiento sometidas a estados tensionales complejos (en las que la sección se ve sollicitada de manera simultánea frente a tensiones tangenciales) requiere del conocimiento detallado de la respuesta no lineal de la sección.

Se evalúa la necesidad de llevar a cabo un análisis no lineal a nivel de sección con el que poder determinar el giro del eje neutro en equilibrio para soportes de edificación.

5.1 Metodología.

Se ha planteado un estudio en el que medir el error en la determinación de la tensión como consecuencia de atribuir un valor de giro erróneo al eje neutro en equilibrio. Para ello se lleva a cabo un análisis numérico en el que se evalúa y compara la tensión que alcanzan las fibras características (hormigón y acero) de una sección para dos giros distintos del eje neutro:

- Giro del eje neutro correspondiente a la normal a la dirección de la excentricidad del axil exterior (φ_1).
- Giro del eje neutro determinado mediante el MDMC (φ_e).

Para φ_1 y φ_e se determinan los diagramas momento curvatura característicos de cada sección analizada. Así para φ_1 se ha supuesto constante el rumbo del eje neutro en la sección desde la curvatura nula hasta la de agotamiento y se ha abordado el problema como si se tratara de un caso de compresión compuesta recta. El diagrama momento curvatura utilizado consta de una sola curva en la que se representa el momento referido a la dirección de la fibra neutra frente a la curvatura que adopta la sección. Usando este modelo, entrando en esta curva con la resultante de la composición vectorial del momento exterior se obtiene una curvatura y una profundidad del eje neutro para el cual, a pesar de haber logrado que la resultante de las componentes del momento referidas a cada uno de los ejes de la sección sea igual a la resultante del momento exterior, las componentes de dicha resultante respecto a cada uno de los ejes de la sección no son iguales a las componentes del vector momento exterior. El rumbo del eje neutro considerado no ha de ser necesariamente el de equilibrio real.

Por otra parte el rumbo φ_e se ha determinado en cada caso mediante el MDMC para los esfuerzos exteriores. Luego de haber determinado el giro del eje neutro en el que se alcanza el equilibrio se determinan los dos diagramas momento curvatura correspondientes a cada una de las componentes del momento interno movilizado referido a los dos ejes de simetría de la sección. Haciendo uso de estas curvas, y entrando en cada una de ellas con la componente del momento exterior correspondiente se logra determinar la curvatura y la profundidad del eje neutro del plano de equilibrio.

CAPÍTULO 5

Se analizan secciones de relación h/b creciente ($h/b=1$, $h/b=2$, $h/b=3$, $h/b=4$). En cada una de estas escuadrías se toman dos cuantías diferentes de armadura ($\rho_1 = 0.40$, $\rho_2 = 0.80$) y la armadura se supone distribuida de manera homogénea en las cuatro caras. Se evalúan cuatro niveles de axil exterior ($v_1 = 0.20$, $v_2 = 0.40$, $v_3 = 0.60$, $v_4 = 0.80$), y éste se supone aplicado con excentricidad creciente. Se ha considerado un recubrimiento mecánico $r = 0.15b$.

En la figura 5.1 se muestra la sección genérica simulada en la que se describen las variables geométricas así como los ángulos de excentricidad del vector momento (θ_1, θ_2) con los que se han llevado a cabo los ensayos numéricos.

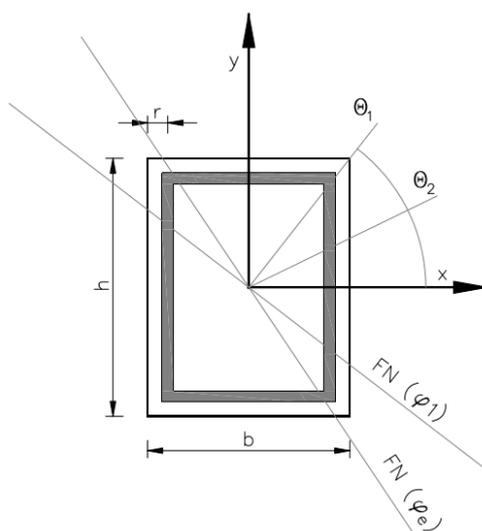


Figura 5.1. Esquema de la sección analizada en la estimación de la tensión en las fibras características para un rumbo del eje neutro perpendicular a la dirección de la excentricidad frente a la tensión real para el giro de equilibrio. Autor.

Todo esto conduce a determinar un total de 128 curvas que muestran la diferencia en MPa de la tensión obtenida para el giro φ_1 respecto a la tensión que se alcanza en la sección para esa misma situación y el giro φ_e . Se han empleado los materiales descritos en el apartado 3.4.4.1 de esta tesis. Los resultados se muestra en las figuras sucesivas (figura 5.2 a figura 5.17). Los modelos constitutivos considerados para hormigón y acero son los que se muestran en las figura 3.31, y sus valores característicos son $f_c = 30 \text{ MPa}$, $f_y = 400 \text{ MPa}$.

TENSIONES NORMALES EN SECCIONES ASIMÉTRICAS

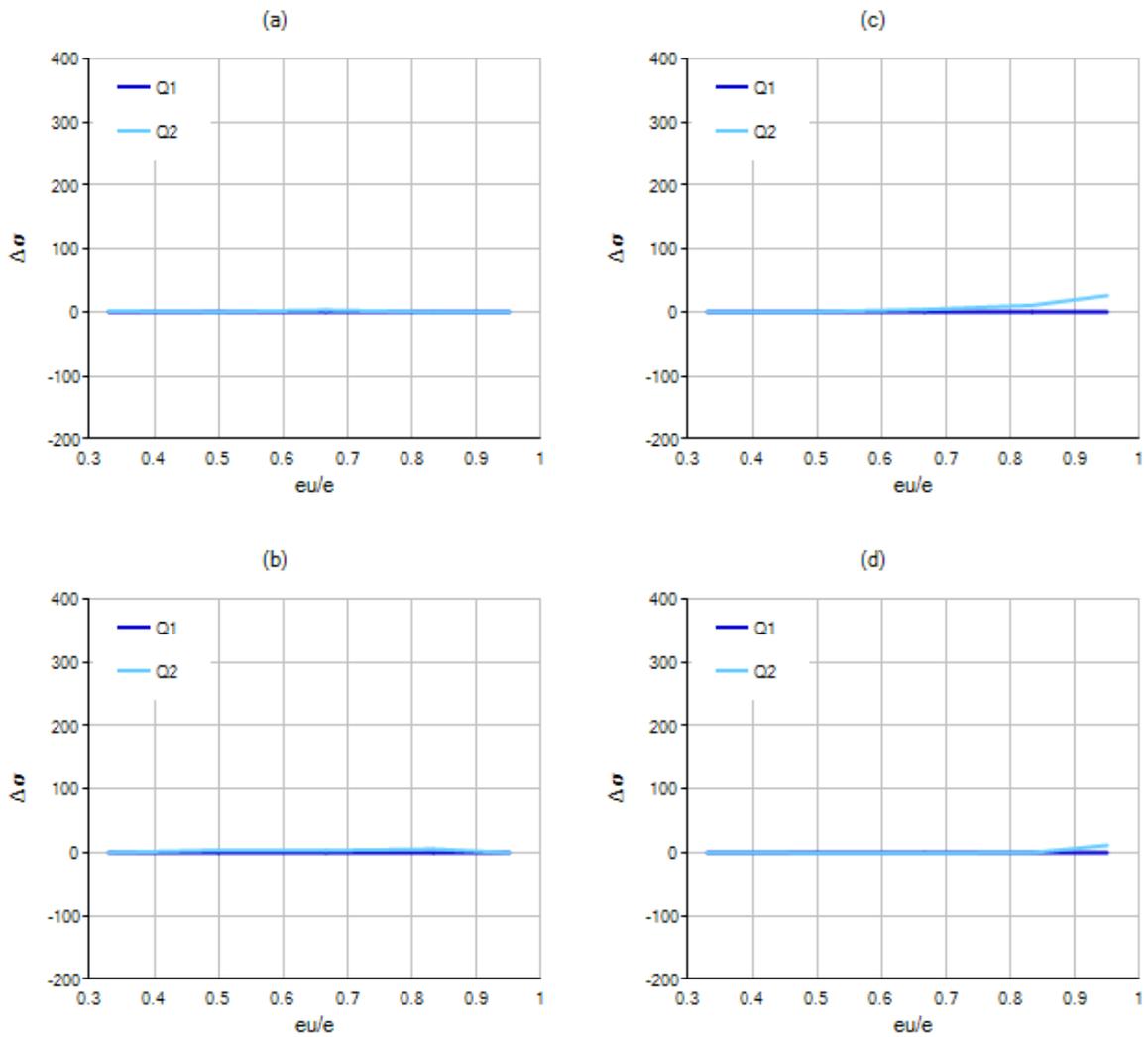


Figura 5.2. Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de acero en tracción para una sección con $h/b = 1$, $\rho_1 = 0.40$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $\nu_1 = 0.20$, $\nu_2 = 0.40$, $\nu_3 = 0.60$, $\nu_4 = 0.80$.

Imágenes a, b, c, d. Autor.

CAPÍTULO 5

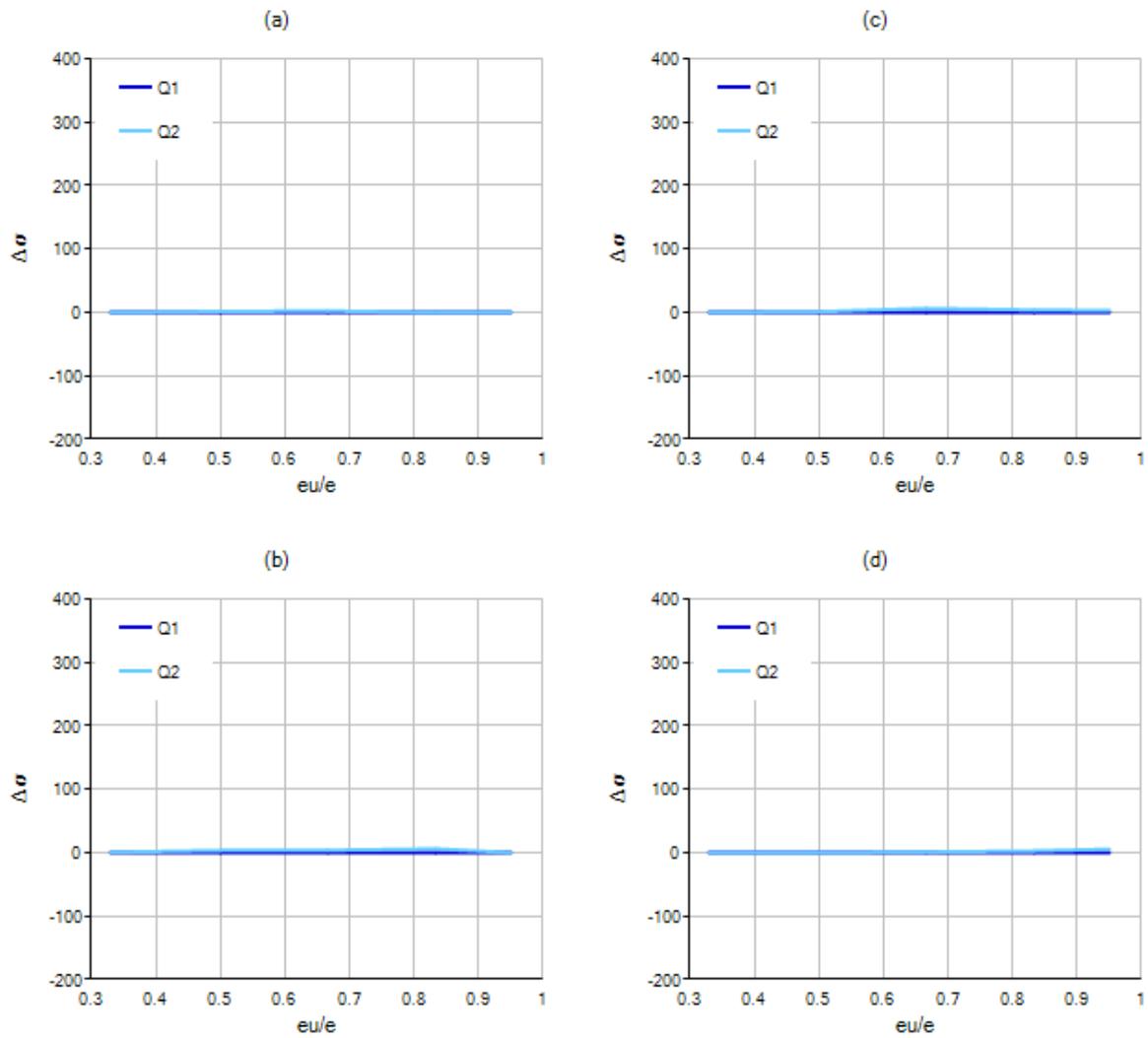


Figura 5.3. Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de acero en tracción para una sección con $h/b = 1$, $\rho_1 = 0.80$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.20$, $v_2 = 0.40$, $v_3 = 0.60$, $v_4 = 0.80$.

Imágenes a, b, c, d. Autor.

TENSIONES NORMALES EN SECCIONES ASIMÉTRICAS

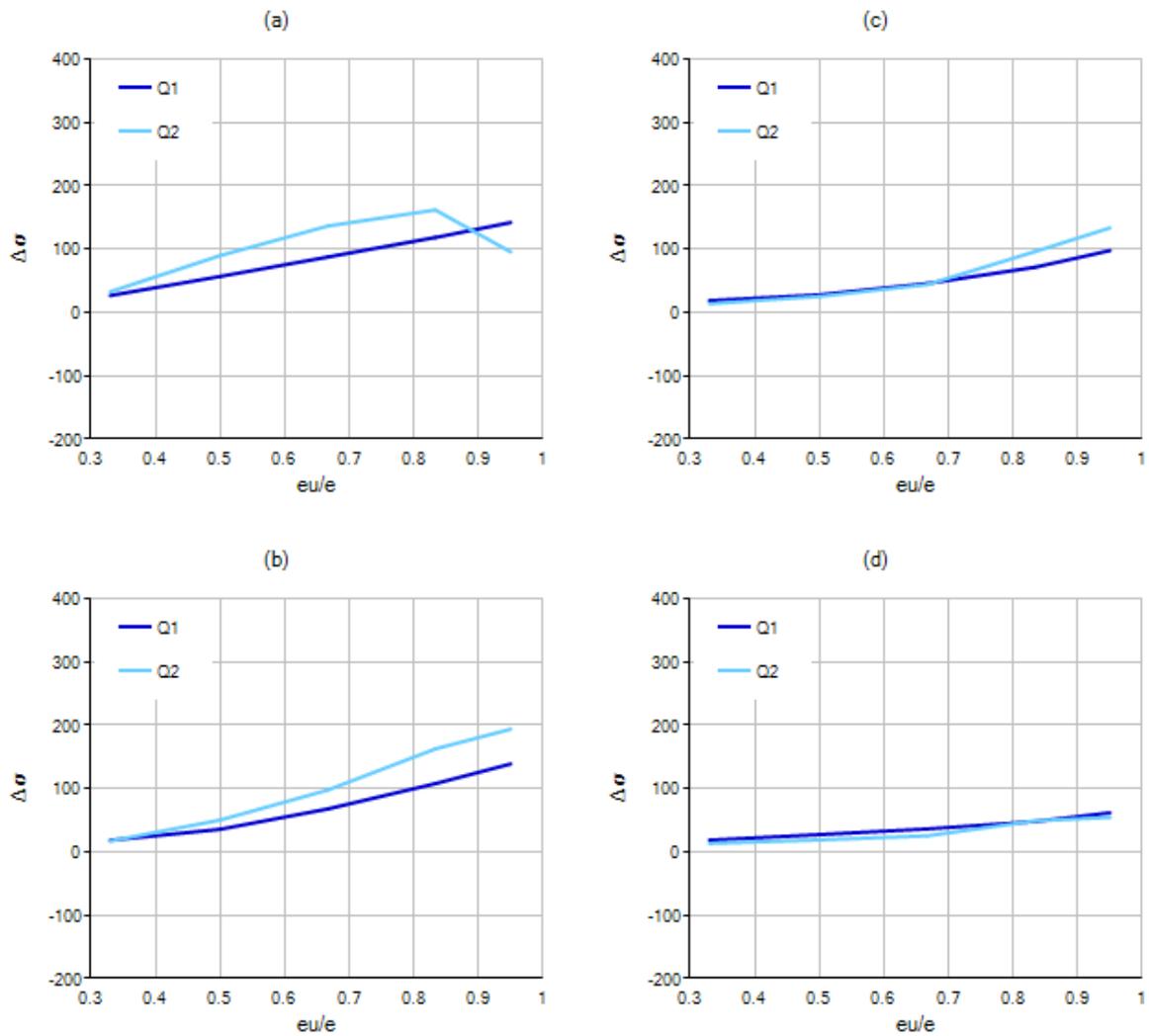


Figura 5.4. Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de acero en tracción para una sección con $h/b = 2$, $\rho_1 = 0.40$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.20$, $v_2 = 0.40$, $v_3 = 0.60$, $v_4 = 0.80$.

Imágenes a, b, c, d. Autor.

CAPÍTULO 5

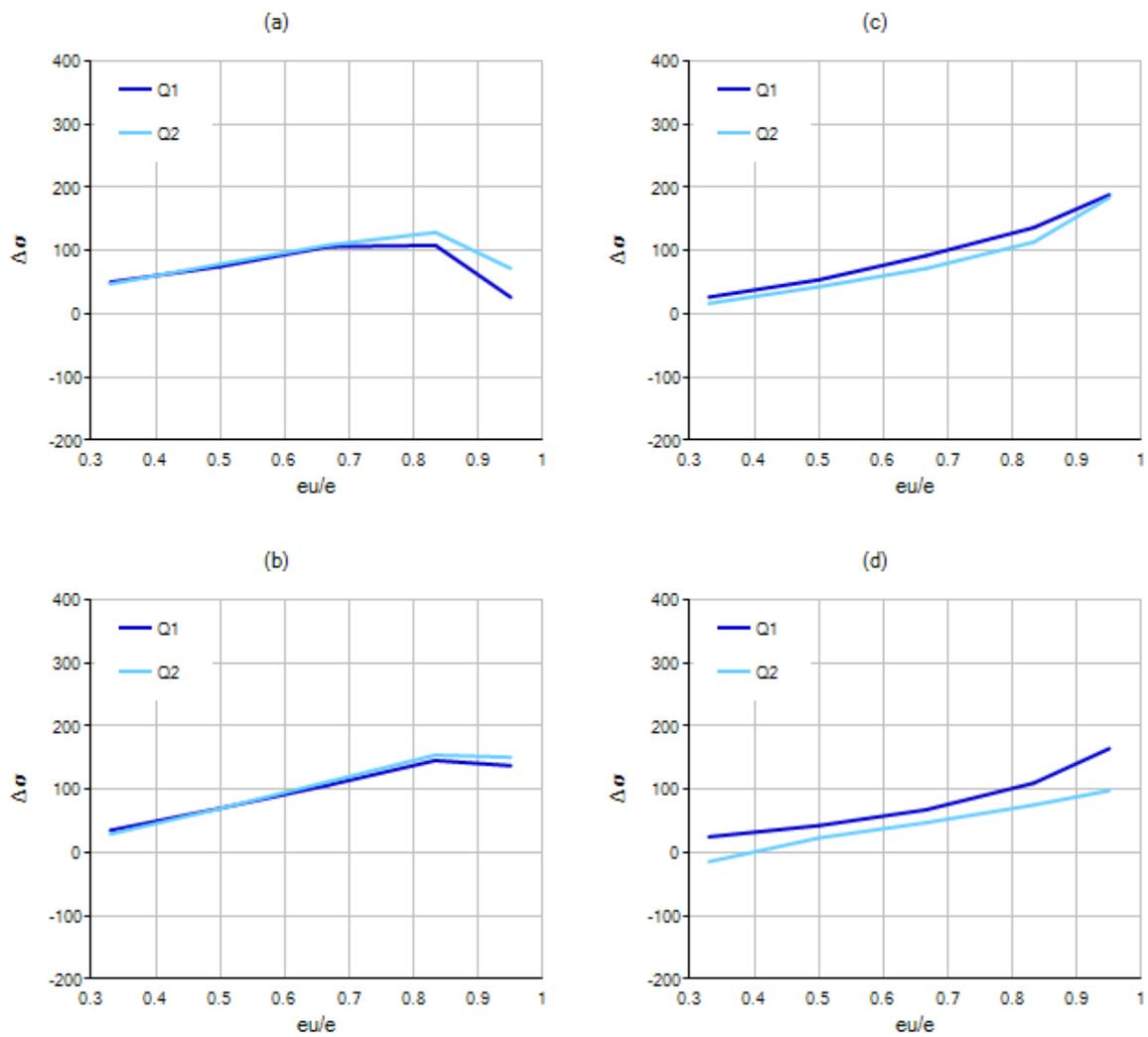


Figura 5.5. Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de acero en tracción para una sección con $h/b = 2$, $\rho_1 = 0.80$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $\nu_1 = 0.20$, $\nu_2 = 0.40$, $\nu_3 = 0.60$, $\nu_4 = 0.80$.

Imágenes a, b, c, d. Autor.

TENSIONES NORMALES EN SECCIONES ASIMÉTRICAS

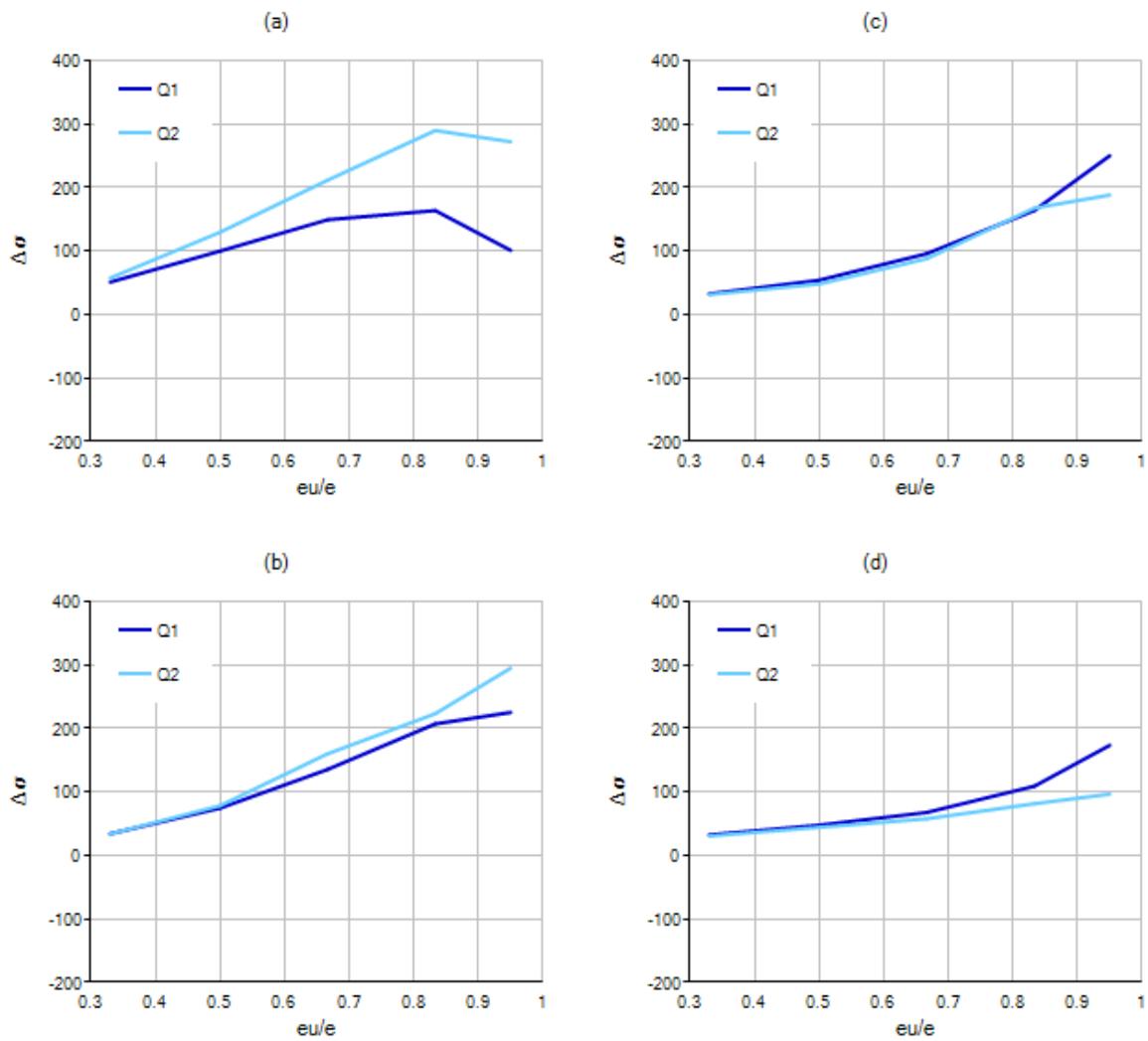


Figura 5.6. Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de acero en tracción para una sección con $h/b = 3$, $\rho_1 = 0.40$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $\nu_1 = 0.20$, $\nu_2 = 0.40$, $\nu_3 = 0.60$, $\nu_4 = 0.80$.

Imágenes a, b, c, d. Autor.

CAPÍTULO 5

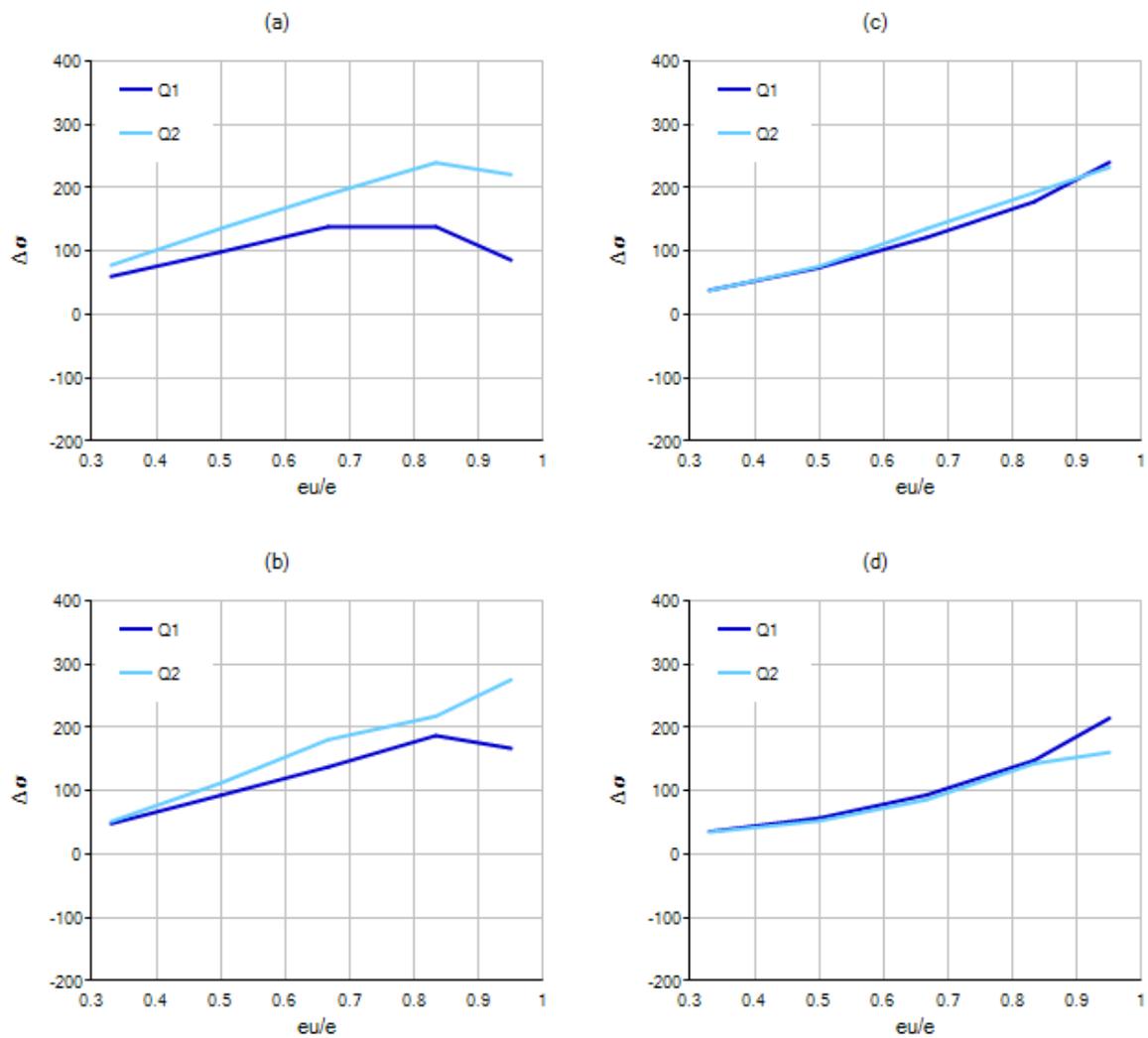


Figura 5.7. Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de acero en tracción para una sección con $h/b = 3$, $\rho_1 = 0.80$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro ejes distintos $v_1 = 0.20$, $v_2 = 0.40$, $v_3 = 0.60$, $v_4 = 0.80$.

Imágenes a, b, c, d. Autor.

TENSIONES NORMALES EN SECCIONES ASIMÉTRICAS

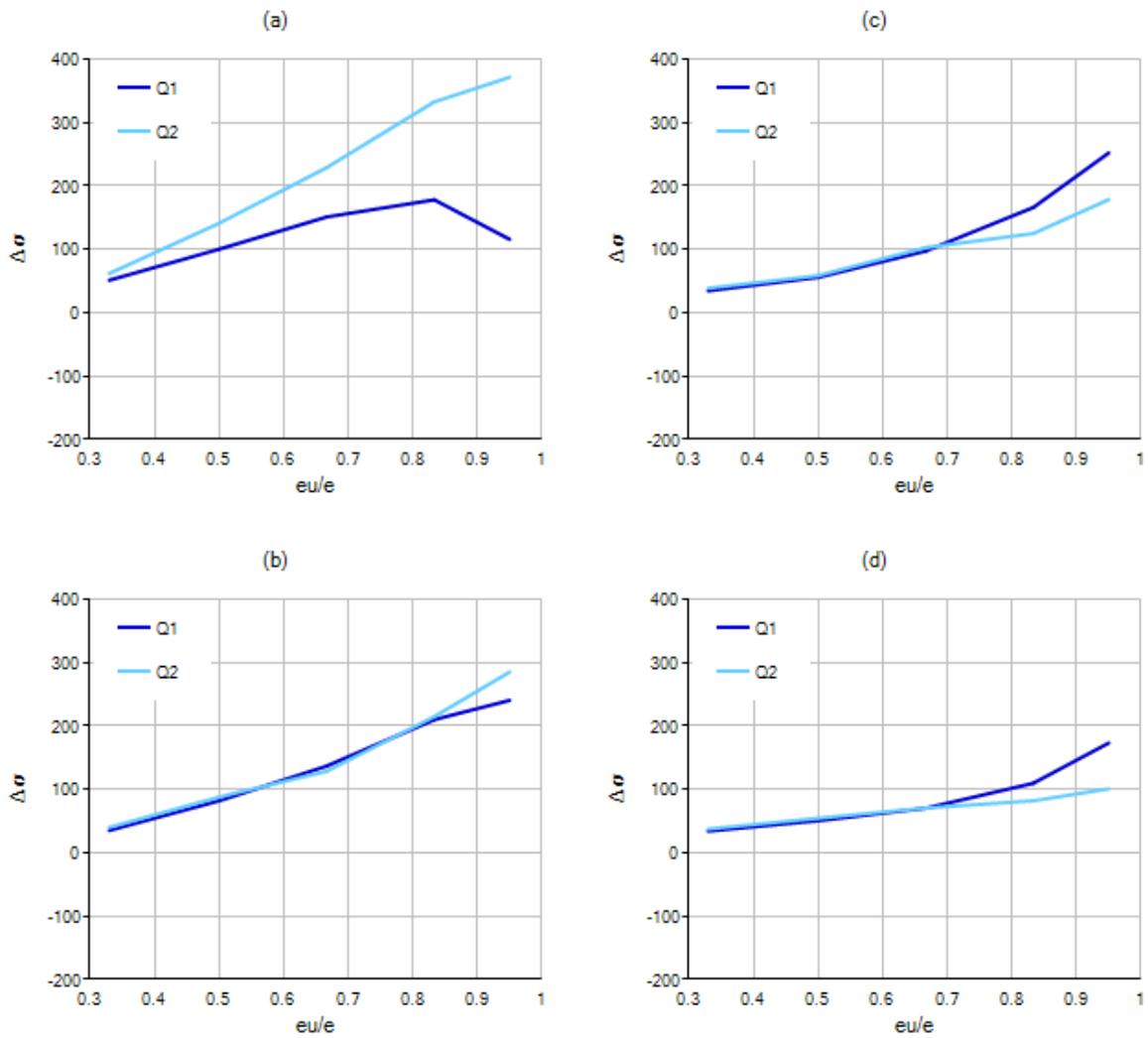


Figura 5.8. Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de acero en tracción para una sección con $h/b = 4$, $\rho_1 = 0.40$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro ejes distintos $\nu_1 = 0.20$, $\nu_2 = 0.40$, $\nu_3 = 0.60$, $\nu_4 = 0.80$.

Imágenes a, b, c, d. Autor.

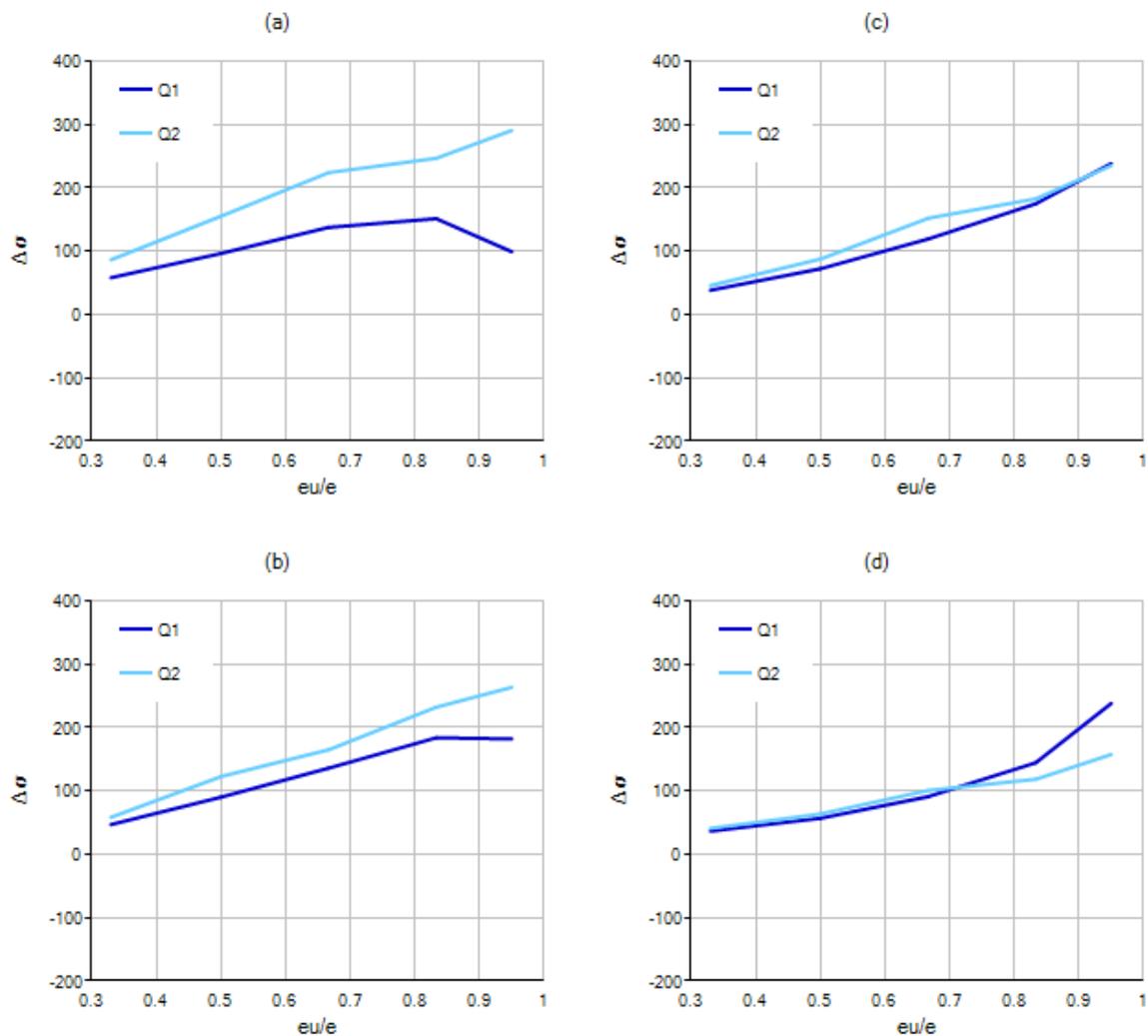


Figura 5.9. Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de acero en tracción para una sección con $h/b = 4$, $\rho_1 = 0.80$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $\nu_1 = 0.20$, $\nu_2 = 0.40$, $\nu_3 = 0.60$, $\nu_4 = 0.80$.

Imágenes a, b, c, d. Autor.

TENSIONES NORMALES EN SECCIONES ASIMÉTRICAS

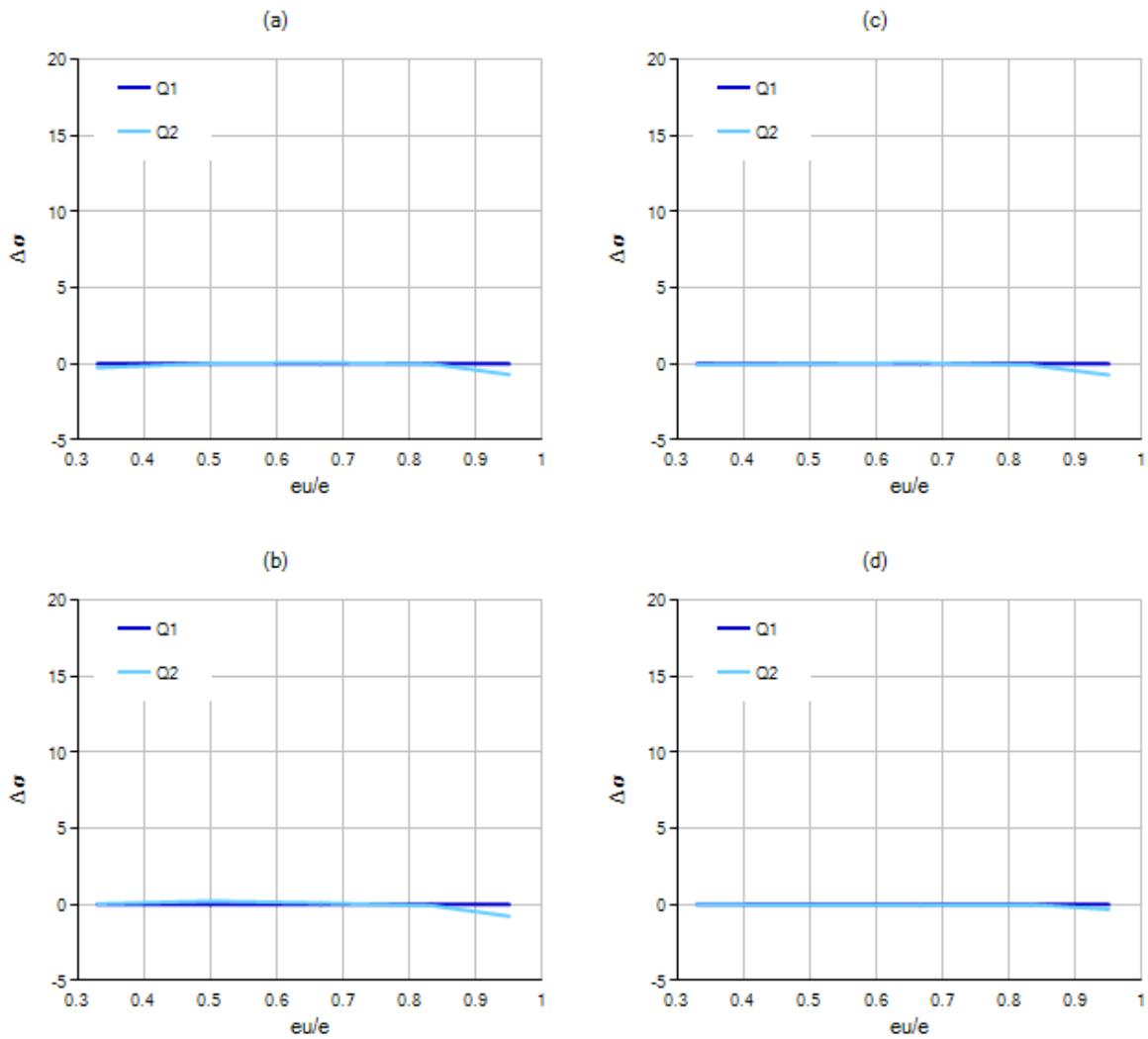


Figura 5.10. Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de hormigón en compresión para una sección con $h/b = 1$, $\rho_1 = 0.40$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $\nu_1 = 0.20$, $\nu_2 = 0.40$, $\nu_3 = 0.60$, $\nu_4 = 0.80$. Imágenes a, b, c, d. Autor.

CAPÍTULO 5

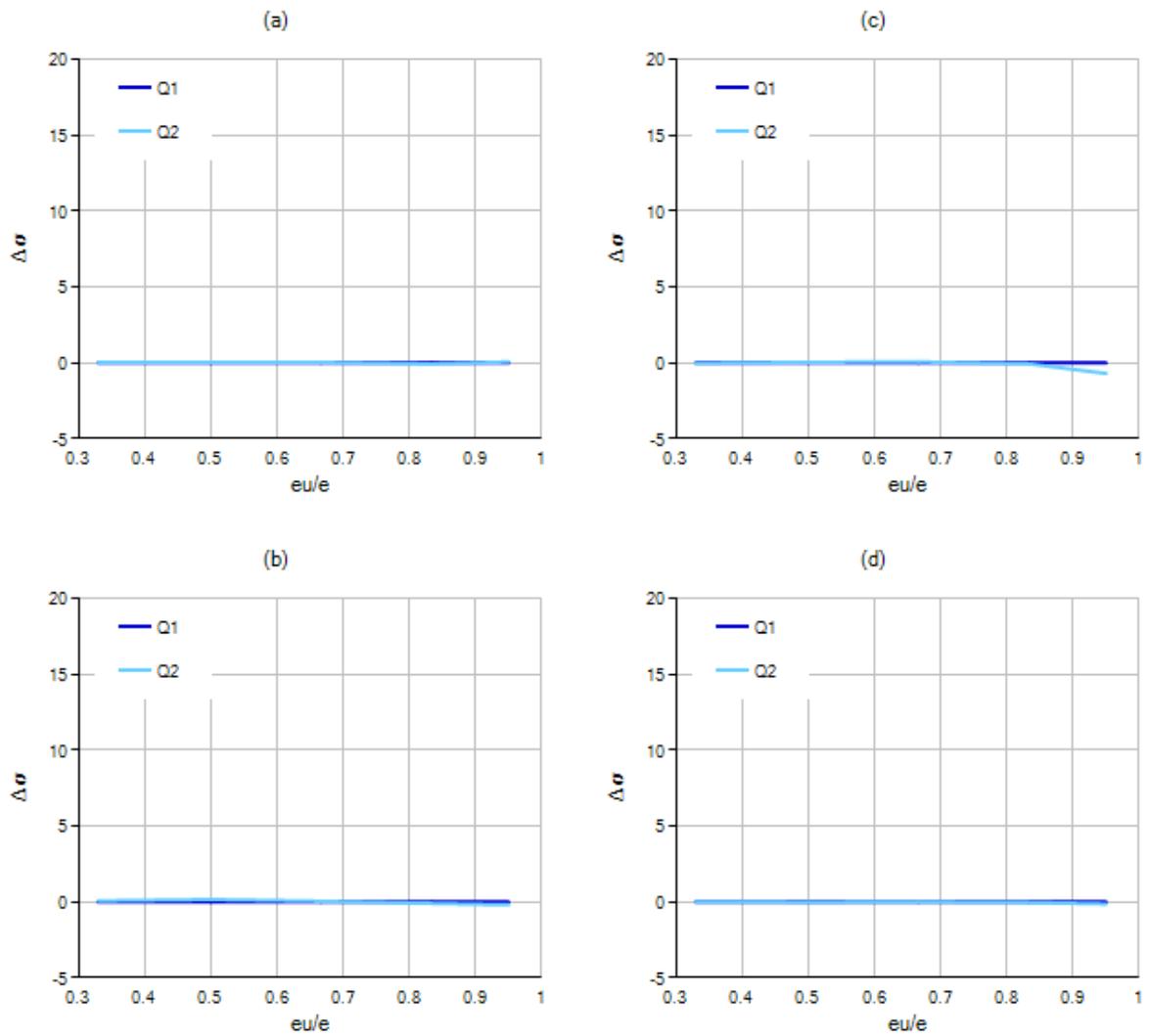


Figura 5.11. Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de hormigón en compresión para una sección con $h/b = 1$, $\rho_1 = 0.80$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $\nu_1 = 0.20$, $\nu_2 = 0.40$, $\nu_3 = 0.60$, $\nu_4 = 0.80$. Imágenes a, b, c, d. Autor.

TENSIONES NORMALES EN SECCIONES ASIMÉTRICAS

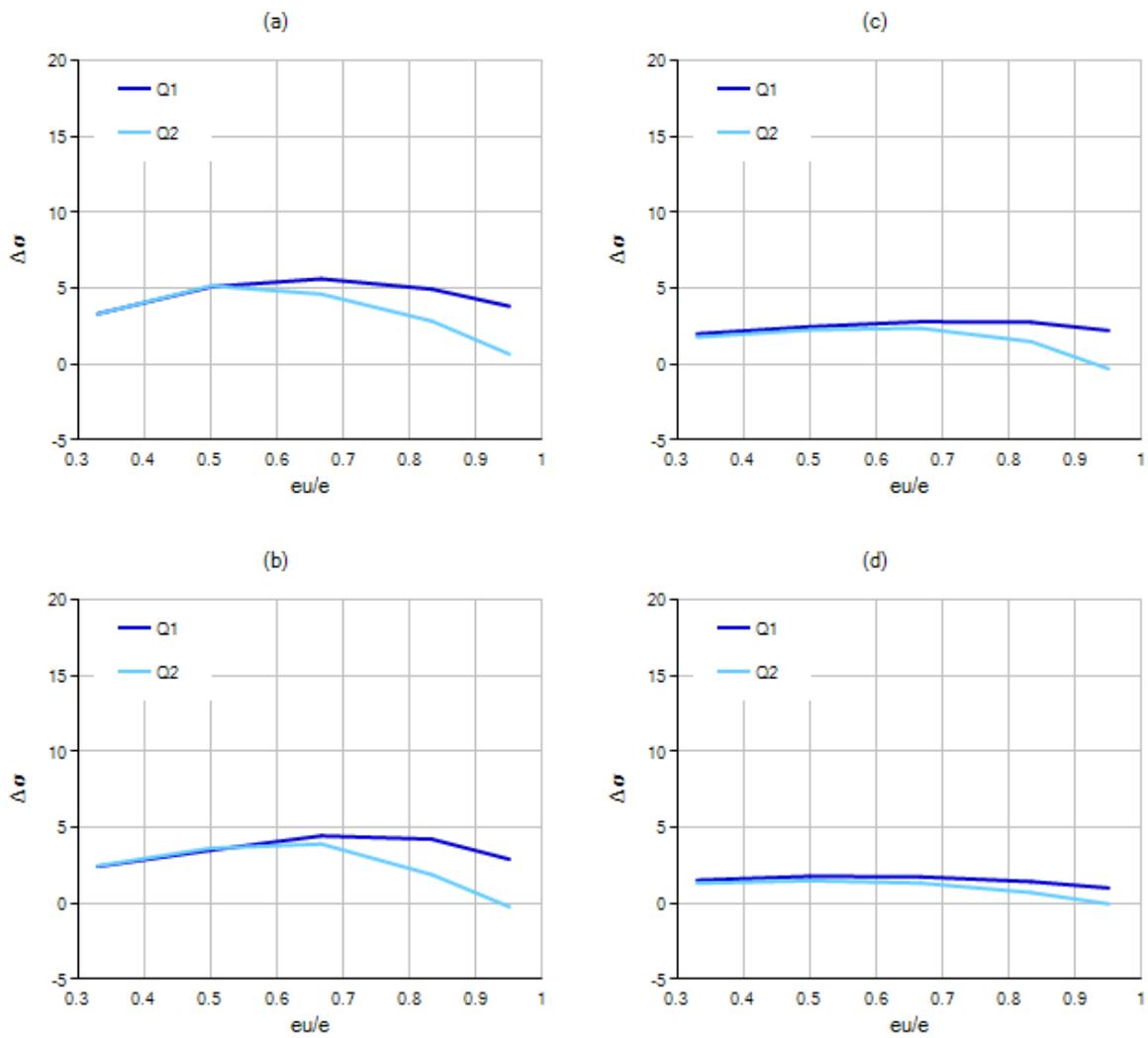


Figura 5.12. Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de hormigón en compresión para una sección con $h/b = 2$, $\rho_1 = 0.40$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $\nu_1 = 0.20$, $\nu_2 = 0.40$, $\nu_3 = 0.60$, $\nu_4 = 0.80$. Imágenes a, b, c, d. Autor.

CAPÍTULO 5

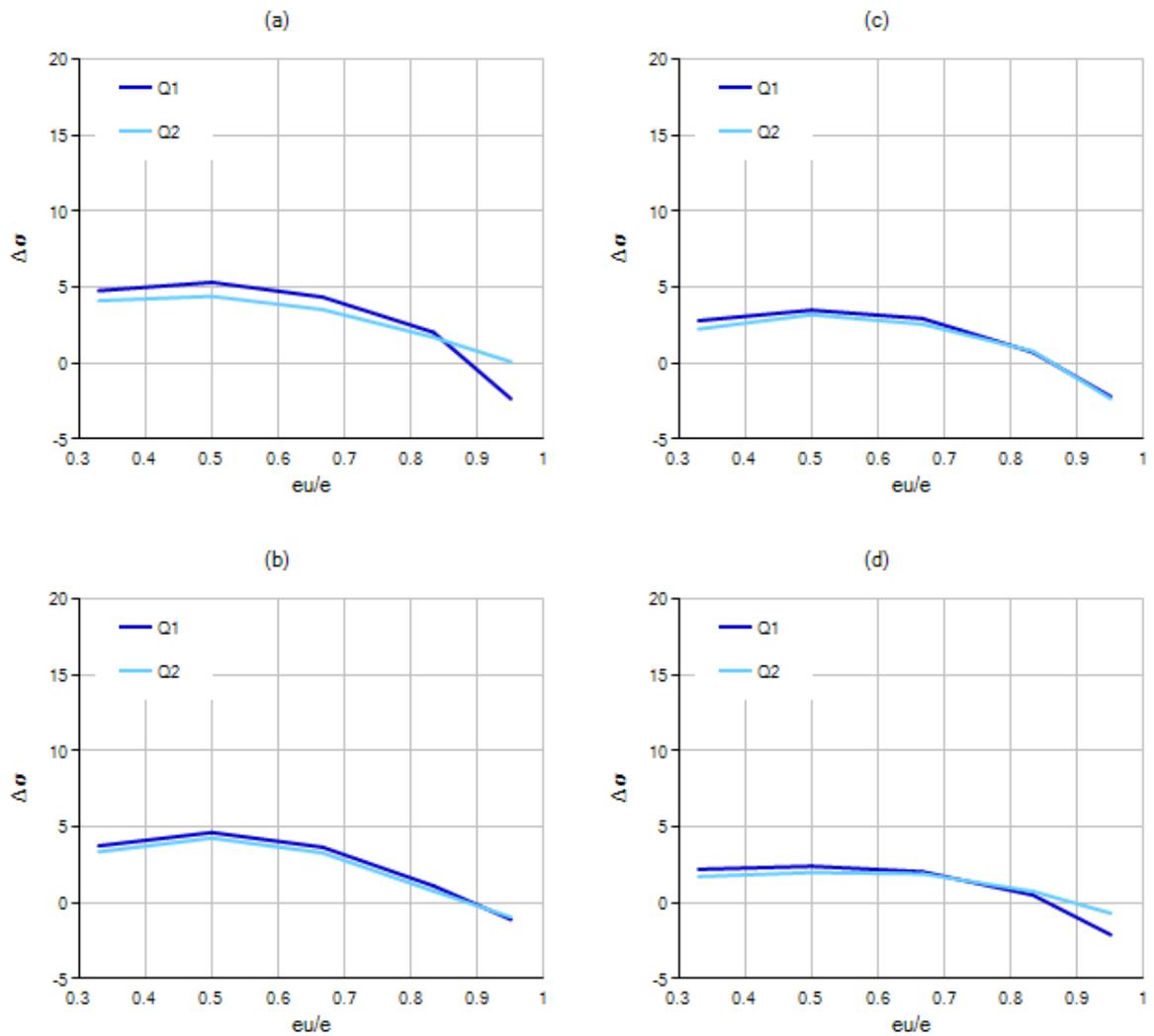


Figura 5.13. Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de hormigón en compresión para una sección con $h/b = 2$, $\rho_1 = 0.80$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $\nu_1 = 0.20$, $\nu_2 = 0.40$, $\nu_3 = 0.60$, $\nu_4 = 0.80$. Imágenes a, b, c, d. Autor.

TENSIONES NORMALES EN SECCIONES ASIMÉTRICAS

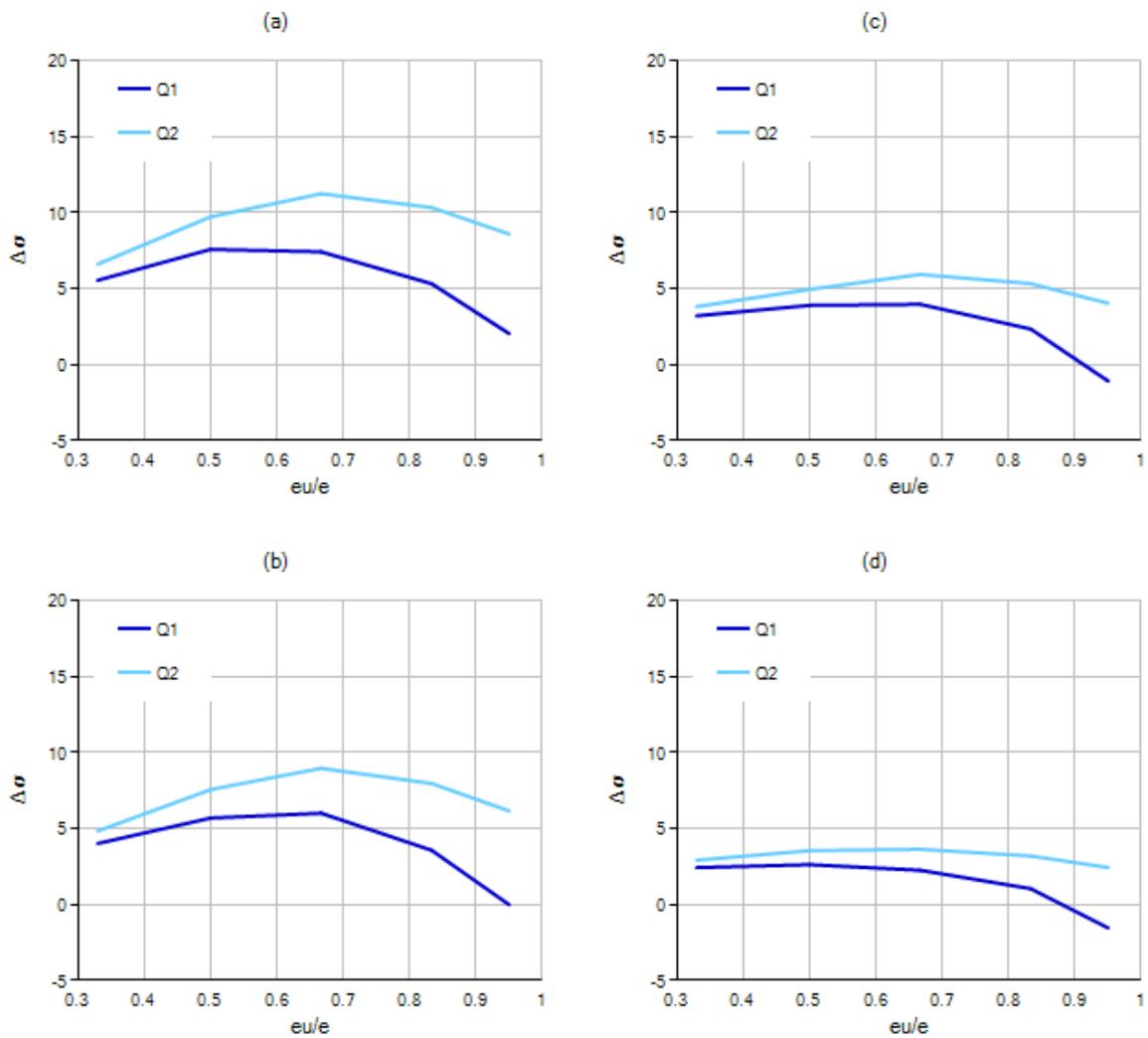


Figura 5.14. Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de hormigón en compresión para una sección con $h/b = 3$, $\rho_1 = 0.40$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $\nu_1 = 0.20$, $\nu_2 = 0.40$, $\nu_3 = 0.60$, $\nu_4 = 0.80$. Imágenes a, b, c, d. Autor.

CAPÍTULO 5

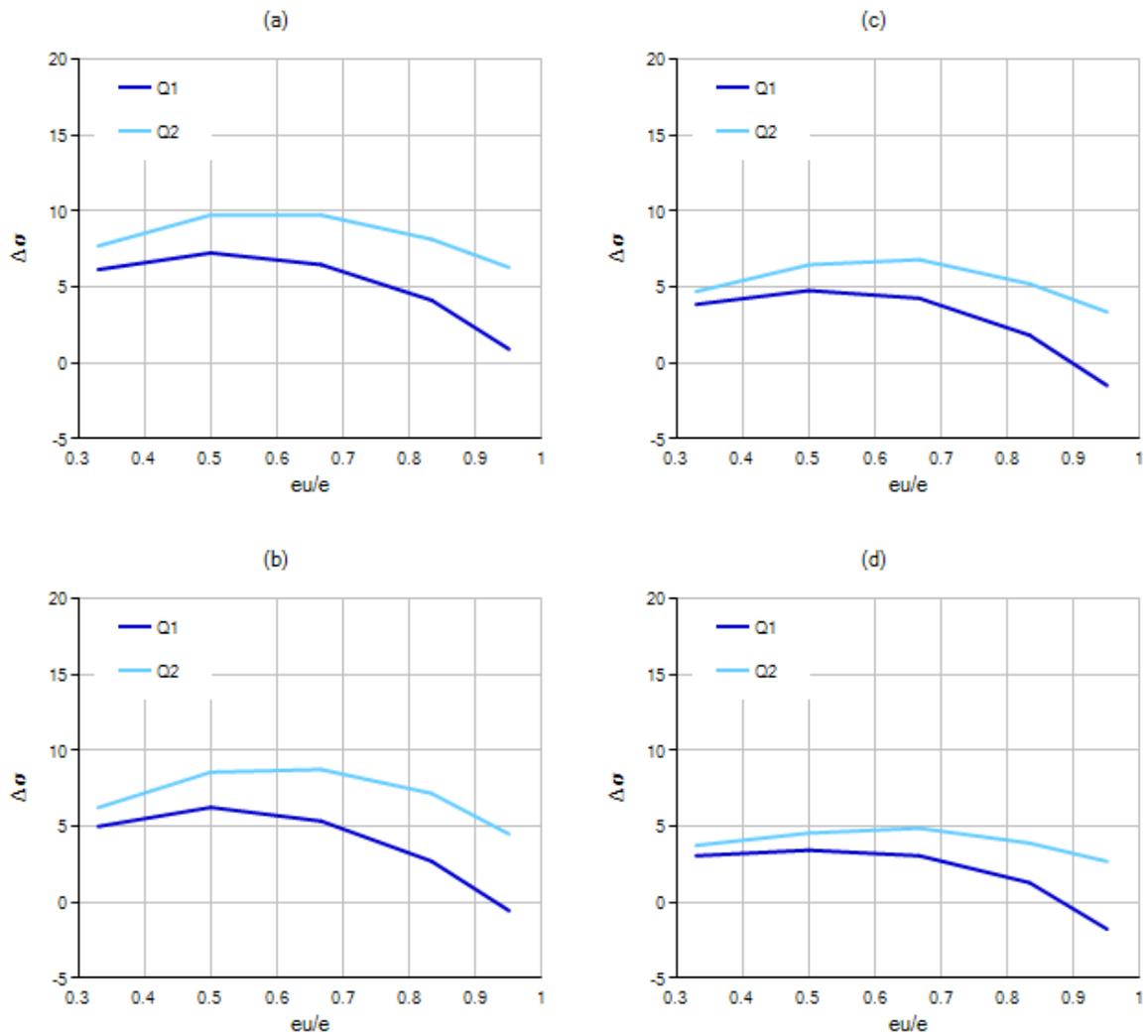


Figura 5.15. Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de hormigón en compresión para una sección con $h/b = 3$, $\rho_1 = 0.80$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $\nu_1 = 0.20$, $\nu_2 = 0.40$, $\nu_3 = 0.60$, $\nu_4 = 0.80$. Imágenes a, b, c, d. Autor.

TENSIONES NORMALES EN SECCIONES ASIMÉTRICAS

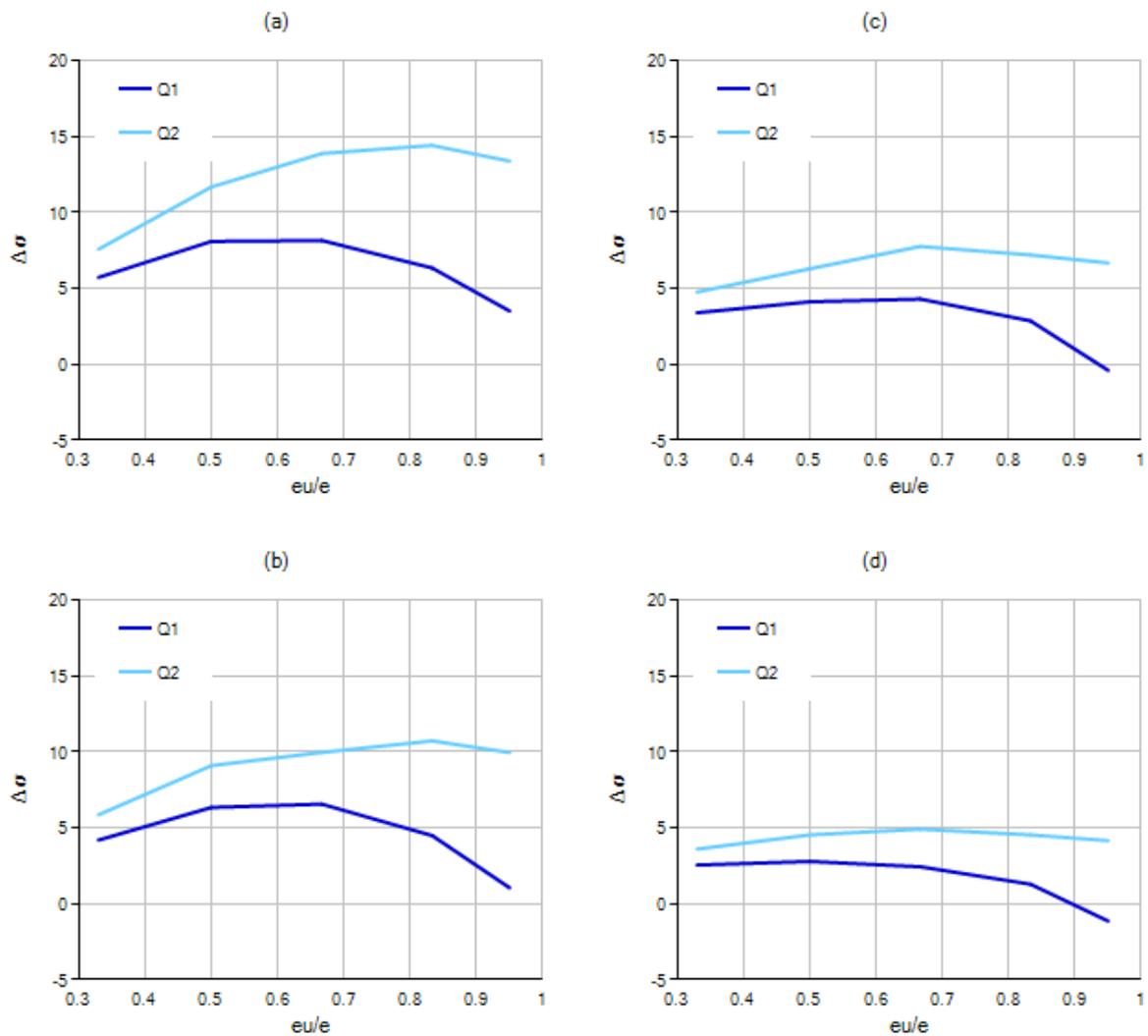


Figura 5.16. Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de hormigón en compresión para una sección con $h/b = 4$, $\rho_1 = 0.40$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro ejes distintos $\nu_1 = 0.20$, $\nu_2 = 0.40$, $\nu_3 = 0.60$, $\nu_4 = 0.80$. Imágenes a, b, c, d. Autor.

CAPÍTULO 5

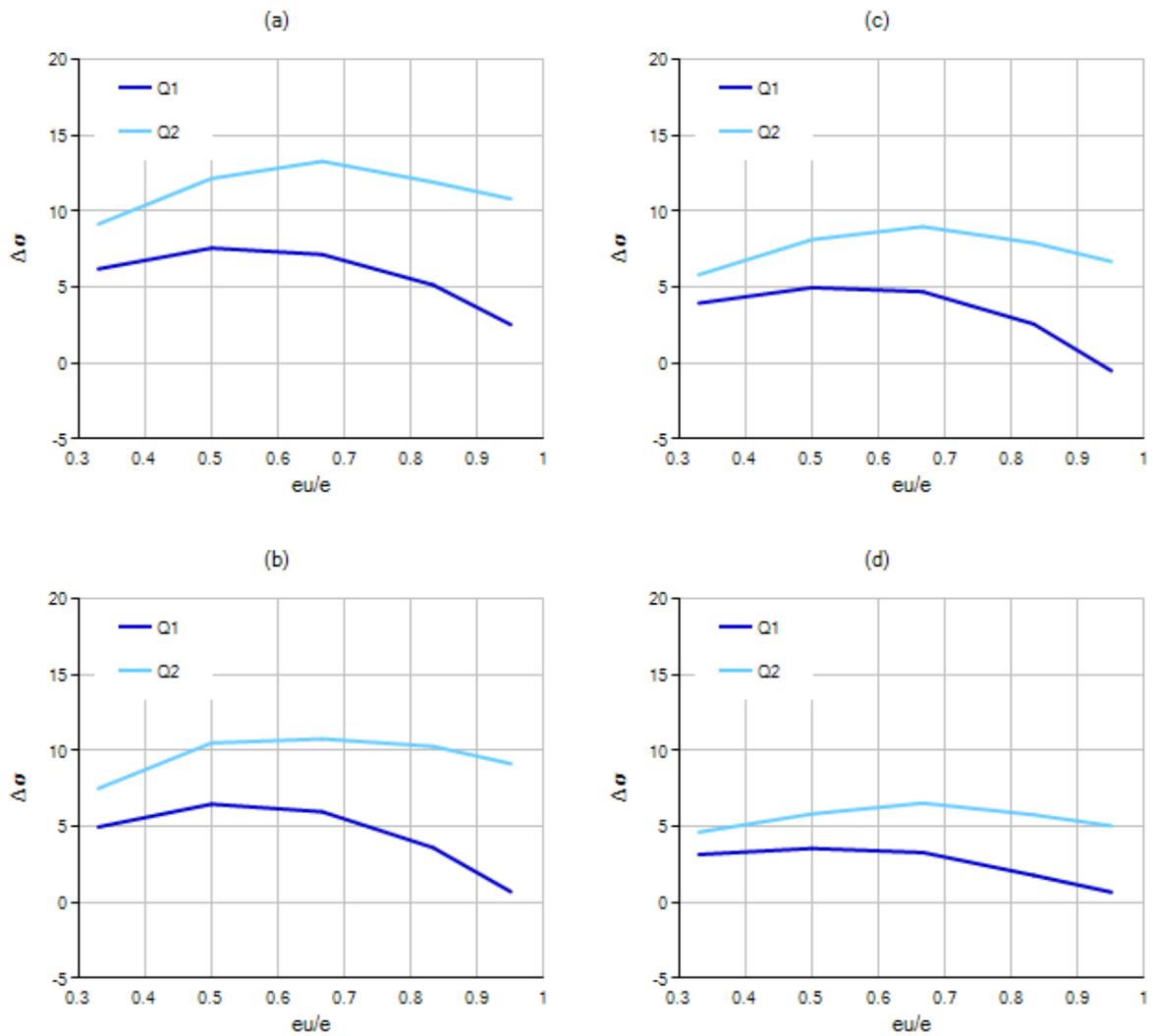


Figura 5.17. Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de hormigón en compresión para una sección con $h/b = 4$, $\rho_1 = 0.80$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $\nu_1 = 0.20$, $\nu_2 = 0.40$, $\nu_3 = 0.60$, $\nu_4 = 0.80$. Imágenes a, b, c, d. Autor.

5.2 Discusión de los resultados.

Se puede apreciar (figuras 5.2 a 5.17) que la diferencia medida en la tensión de las fibras características analizadas aumenta a medida que la diferencia entre capacidades de la sección referidos a sus dos ejes de simetría es incrementada. Y se han observado diferencias que llegan a ser de 371 Mpa en fibras de acero y 14.39 Mpa en fibras de hormigón, valores que referidos a los valores reales de tensión en equilibrio de estas mismas fibras implican desvíos porcentuales de 700 % y 50 % para acero y hormigón respectivamente.

En las figuras 5.18 (a), y 5.18 (b) se ha representado los valores medios de las diferencias de tensión en las fibras características de acero y hormigón frente a la relación (h/b). Puede observarse que, a pesar de que los valores medios no son de utilidad práctica en cuanto a la toma de decisiones de diseño de secciones por la diferencia de sus valores extremos (la varianza es elevada), se evidencia de manera clara la imposibilidad de estimar arbitrariamente el rumbo que adopta el eje neutro en equilibrio. También es posible apreciar como la diferencia en la estimación de la tensión aumenta al tiempo que lo hace la asimetría mecánica de la sección

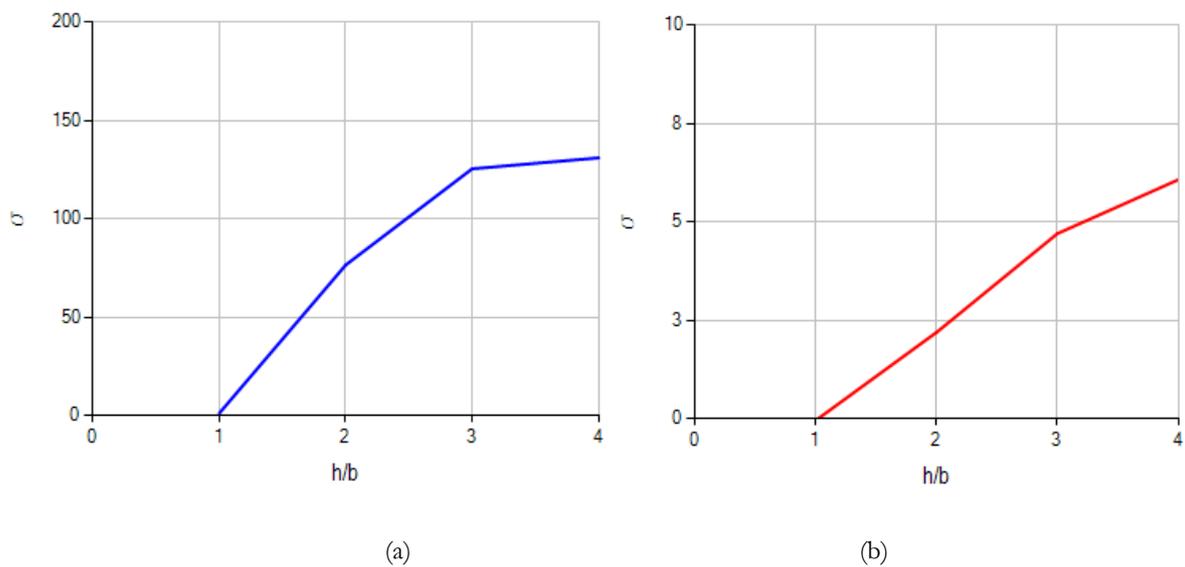


Figura 5.18. Diferencia de valores medios en la tensión (Mpa) en las fibras extremas de acero (a) y hormigón (b) en equilibrio para la muestra de excentricidades, axiles, y direcciones analizadas entre el giro de equilibrio real y la dirección perpendicular a la acción del vector momento, frente a la relación (h/b) de la sección. Autor.

CAPÍTULO 5

El error que se comete aumenta con la asimetría de la sección, y tal como ha sido demostrado este error puede ser de dos tipos:

- Error en la estimación del ángulo que adopta la fibra neutra (traza del plano de equilibrio) en cualquier situación de sollicitación exterior, incluso alejadas del agotamiento.
- Como consecuencia de la adopción errónea del rumbo del eje neutro se pueden llegar a cometer errores muy significativos en la estimación de la deformación y la tensión de las fibras características de la sección analizada.

6. CONCLUSIONES

6.1 Conclusiones

Se traen a este punto nuevamente los objetivos marcados inicialmente para esta investigación, así como las conclusiones más relevantes a las que se han llegado.

“Establecer un procedimiento numérico para la determinación del plano de equilibrio de una sección de hormigón estructural sometida a solicitaciones de compresión o flexión compuesta esviada. El método buscado trata de ser universal de manera que dé solución secciones con geometría, ecuaciones constitutivas de los materiales empleados, y estado de sollicitación en tensiones normales cualesquiera”.

Se ha presentado un algoritmo (MDMC) que ha resultado ser un método válido para evaluar secciones de hormigón armado o pretensado sometidas a estados de compresión o flexión compuesta esviada. Se trata de un modelo de aplicación general en cuanto a la geometría de la sección, las solicitaciones exteriores y los modelos constitutivos empleados. Este modelo presenta dos aspectos relevantes:

- Se trata de un método intuitivo y transparente en cuanto al espíritu de la búsqueda del plano de equilibrio, trazable, y de moderada dificultad de aplicación de manera extensiva en la práctica habitual del diseño de secciones de hormigón estructural.

CONCLUSIONES

- El modelo de cálculo establecido en el MDMC no sólo es de aplicación en la resolución de secciones de hormigón estructural sino que es exportable a otros tipos estructurales habituales como son el diseño de placas base y de cimentaciones rígidas superficiales.

“Descrito el algoritmo, y luego de haber desarrollado un software en la plataforma .Net, (c#), llevar a cabo una campaña de ensayos numéricos que permitan llegar a contrastarlo frente a un modelo de referencia que pueda asumirse como cierto”.

Se ha desarrollado un software (FCE) en el que se ha implementado el algoritmo propuesto en esta tesis (MDMC). Tanto la robustez del propio algoritmo como la fiabilidad del software se han evaluado respecto a las soluciones obtenidas por el modelo de cálculo considerado de referencia (Farah y Huggins), hallándose que en un 96.5% de los casos evaluados, se han medido diferencias inferiores al 2.00% respecto a aquél. En el proceso de evaluación del modelo se ha observado que al tiempo que aumenta la asimetría mecánica entre los dos ejes principales de la sección, la diferencia entre el rumbo que adopta el eje neutro y la dirección perpendicular a la dirección del momento exterior aumenta. Se ha observado que para secciones con relación canto/base de 4, la diferencia entre estas dos direcciones alcanza valores de 72°.

Por otra parte, se ha observado que la diferencia entre la normal a la dirección del vector momento exterior y el rumbo que adopta la fibra neutra en equilibrio disminuye al tiempo que aumenta el ratio de utilización de la sección analizada. Esto implica que los errores que se pueden cometer por adoptar un rumbo para el eje neutro en equilibrio no correcto, son mayores en umbrales de estados de sollicitación de servicio de la sección, situación en el que realmente es útil conocer la respuesta en términos de deformaciones y tensiones de las fibras características..

Llevar a cabo dos ensayos experimentales controlados en laboratorio de dos soportes cortos de hormigón armado mediante la imposición de diversos estados de sollicitación exterior de compresión compuesta esviada, y comparar los resultados observados con los que se pueden determinar numéricamente mediante el empleo del algoritmo propuesto.

Se han llevado a cabo dos ensayos experimentales sobre un mismo soporte corto de hormigón armado con una fuerte asimetría mecánica en su sección central. Ambos soportes han sido

CAPÍTULO 6

sometidos a estados de compresión compuesta esviada, y de la observación y análisis de los resultados obtenidos se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Se constata experimentalmente que la dirección que adopta el eje neutro del plano de respuesta en equilibrio no discurre según la perpendicular a la dirección de aplicación del vector momento exterior.
- Se observa que la diferencia entre la normal a la dirección del vector momento exterior y el rumbo que adopta la fibra neutra en equilibrio disminuye al tiempo que aumenta el ratio de utilización de la sección analizada. Esto implica que los errores que se pueden cometer por adoptar un rumbo para el eje neutro en equilibrio no correcto, son mayores en umbrales de estados de sollicitación de servicio de la sección, situación en el que realmente es útil conocer la respuesta en términos de deformaciones y tensiones de las fibras características

Analizar las implicaciones que se derivan de llevar a cabo la determinación de la estimación de la tensión por la elección errónea del giro del eje neutro en equilibrio en soportes apantallados de edificación en los que existe una diferencia elevada entre las capacidades de agotamiento de la sección transversal entre los dos ejes de simetría de la misma.

Se ha demostrado esencial llevar a cabo el análisis de secciones de hormigón armado sometidas a estados de compresión o flexión compuesta esviada mediante una aproximación no lineal, mediante la cual sea posible conocer el rumbo que adopta el eje neutro en equilibrio. En la determinación de la tensión de las fibras características de la sección, postular un rumbo del eje neutro según la dirección normal a la dirección del vector momento frente al rumbo real de equilibrio puede producir errores muy elevados.

Se han medido diferencias del orden de 700% y 50% en la tensión de acero y hormigón por la adopción de la dirección normal a la dirección del vector momento frente a la tensión real que se alcanza en la sección si esta se determina con el giro real de equilibrio.

CONCLUSIONES

Los errores que se comenten en la estimación de la tensión por la adopción de un rumbo para el eje neutro distinto al real de equilibrio aumenta al aumentar la relación (h/b) de la sección transversal.

Poner en crisis la propiedad de convexidad de diagramas de interacción y demostrar que la capacidad máxima frente al agotamiento en compresión o flexión compuesta esviada en una sección con dos ejes de simetría no tiene por qué situarse, en contra de lo esperado, según una de estas direcciones, aparentes ejes principales de inercia máxima de la sección.

En la determinación de diagramas de interacción de agotamiento (M_x, M_y) de secciones doblemente simétricas y modelos hiperbólicos de hormigón armado, no se cumple de manera universal la propiedad de convexidad (figura 6.1). Para las direcciones próximas a los ejes de simetría de la sección, el empleo de modelos hiperbólicos, en situaciones de axiles elevados, la tensión en la fibra extrema de la sección adquiere un valor inferior al máximo (deformación de agotamiento), lo cual implica que el centro de gravedad de la resultante del bloque comprimido baje, reduciéndose el brazo mecánico y lográndose un momento resistente menor que el que se hubiera obtenido con modelos simplificados para la caracterización del hormigón (parábola-rectángulo, rectangular).

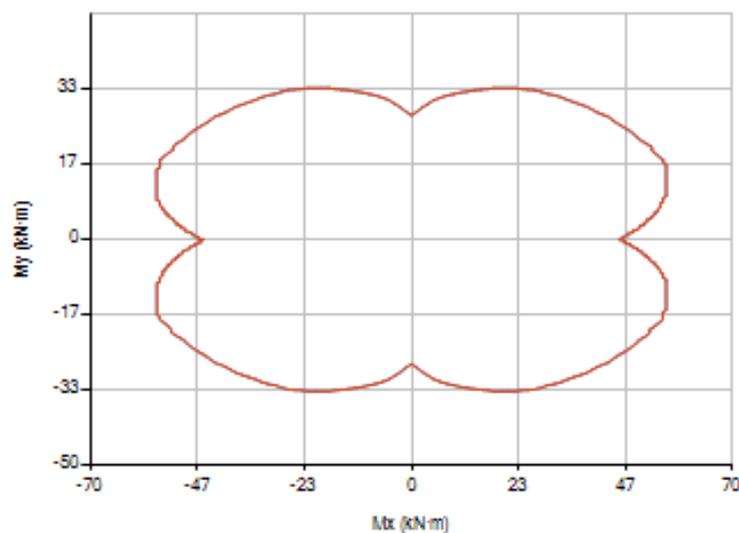


Figura 6.1. Diagrama de interacción de una sección para un modelo hiperbólico de hormigón.

CAPÍTULO 6

El uso de modelos hiperbólicos para la caracterización del comportamiento del hormigón en compresión conduce a que, para secciones doblemente simétricas la dirección principal de inercia en agotamiento presenta, para axiles elevados un cierto desvío respecto al eje principal de simetría de la sección en agotamiento, tal como se detalla en el Anexo II de esta tesis.

6.2 Corolario

La cúpula del Panteón de Roma fue diseñada desde la intuición, la experiencia, y la tradición constructiva acumulada durante siglos por los arquitectos del Imperio. Los procesos de diseño no contaban con el nivel de análisis del que hoy disponemos y sortearon esta carencia de forma brillante. De haber tenido el conocimiento, modelos matemáticos, y medios técnicos, Apolodoro de Damasco habría incorporado en su diseño desde el origen la verificación no lineal a nivel de sección. Habría definido cada sección transversal de su cúpula, geométrica y mecánicamente, y habría establecido y resuelto las ecuaciones de equilibrio, incorporado en el proceso igualmente la compatibilidad de las deformaciones y las curvas tensión-deformación de sus materiales, incluso evolucionando en el tiempo.

La honestidad de la arquitectura en cuanto al diseño estructural y relativo a la forma en la que se comportan los tipos, y la huida de la ocultación en elementos superfluos que ocultan el espíritu resistente de cada elemento y material debe ser tomado en cuenta un paso antes. No se trata solamente de mostrar la forma de la estructura y hacerla coincidir con su aparente comportamiento mecánico. No debemos conformarnos sólo con eso. Tenemos la obligación moral de conocer nuestras estructuras a todos los niveles e incorporar todo el conocimiento del que disponemos en el diseño desde la génesis misma del proceso. Poseer esta capacidad nos conmina a usarla y nos hace responsables de no hacerlo.

Tal vez el gran Apolodoro de Damasco de haber podido llevar a cabo un análisis no lineal de las secciones habría concluido su cúpula en otros términos y hoy contemplaríamos una obra distinta, hermana de la nuestra heredada. Y la ucronía de esa cúpula que no llegó a ser pesa sobre nosotros, arquitectos, y nos hace tenedores de una deuda contraída con la historia que hemos de resolver. Incluso cuando no sea estrictamente necesario debemos aspirar a conocer la tensión a la

CONCLUSIONES

que se encuentran las fibras de las secciones que diseñemos, determinar a qué profundidad se sitúa el eje neutro y que rumbo adquiere en equilibrio, aunque sólo por un motivo: Dios si lo ve.

7. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURA.

Existen tres posibles categorías de líneas de investigación que pueden desarrollarse tomando como punto de partida la presente tesis:

- Líneas de investigación relacionadas con la optimización y mejora del algoritmo presentado.
- Problemas estructurales abordables mediante la aplicación del algoritmo presentado.
- Análisis crítico de secciones de hormigón estructural diseñadas en épocas en las que no existía capacidad de computación.

7.1 Optimización del algoritmo.

En el capítulo 3 de esta tesis se ha expuesto el método de manera el proceder mediante el cual es posible determinar las coordenadas del plano de equilibrio de una sección cualquiera sometida a un estado arbitrario de tensiones normales. Ha quedado resuelto de manera universal el conocimiento de la deformación y la tensión de cada fibra de la sección transversal en estados de sollicitación no necesariamente de agotamiento.

Igualmente se han expuesto las debilidades que presenta el modelo desde el punto de vista de la las incertidumbres en cuanto a la diferencia de la solución lograda respecto a la exacta al

problema. En este campo es posible llevar a cabo trabajos de investigación que mejoren el algoritmo, optimizándolo. Algunos de estos aspectos se detallan seguidamente:

7.1.1 Análisis de la discretización del bloque comprimido.

Los desarrollos numéricos llevados a cabo en esta tesis se basan de una división de la zona comprimida de la sección en franjas paralelas a la fibra neutra postulada. Se han expuesto las ventajas de este proceder frente a una división en elementos rectangulares de dimensión reducida si bien, podrían investigarse dos cuestiones en relación a este asunto:

- Diferencia en el nivel de precisión respecto a la solución exacta en función del sistema de discretización escogido.
- Diferencia en el tiempo de computación entre los dos sistemas de discretización.

7.1.2 Búsqueda de tendencias en la diferencia de curvaturas por regresión múltiple.

En la búsqueda del giro de equilibrio es preciso establecer a priori el número de familias de diagramas momento-curvatura entre los que seleccionar aquella que conduzca al valor mínimo de diferencia entre las curvaturas referidas a los ejes de la sección.

Por la ausencia de tendencia en función que relaciona la diferencia de curvaturas y el giro analizado tal como se muestra en la figura 3.7, y ante la imposibilidad de realizar una búsqueda no secuencial de la solución, se abre la posibilidad de establecer un método de búsqueda del giro solución mediante algún sistema más racional. La investigación podría explorar el valor del número mínimo de familias de diagramas momento-curvatura con la que determinar una nube de punto suficiente con la que definir la expresión algebraica de la función relación entre la diferencia de curvaturas y el giro analizado. El giro de equilibrio se encontraría en el mínimo absoluto de dicha función. De esta manera, se lograría dos mejoras significativas respecto al método expuesto:

- Tiempo de computación, pues se reduciría el número de diagramas momento-curvatura a determinar.

CAPÍTULO 7

- Precisión en la solución, pues se determinaría el mínimo absoluto de una función definida de manera continua evitando que el error sea al menos de la mitad de la diferencia entre el valor de dos giros consecutivos establecidos a priori.

7.1.3 Utilización de diagramas $M-\chi$ simplificados.

A pesar de la alta no linealidad de los modelos constitutivos de los materiales de una sección de hormigón estructural, los diagramas momento-curvatura para determinados modelos constitutivos de hormigón (parábola-rectángulo) son sensiblemente lineales entre puntos característicos su curva tensión-deformación.

Los desarrollos numéricos llevados a cabo en esta tesis han sido realizados con diagramas momento-curvatura definidos por 20 puntos cada uno de ellos. La curvatura de equilibrio se ha inferido linealmente entre las curvaturas adyacentes a la curvatura solución.

Se abre la posible investigación sobre la diferencia en la precisión que se alcanzaría si se emplearan diagramas momento-curvatura simplificados. Para cada diagrama se determinarían los puntos característicos de los mismos:

- Curvatura en el origen, no necesariamente nula (secciones no simétricas con axiles de pretensado iniciales).
- Curvatura en la que se alcanza una deformación nula en la fibra extrema de la sección de hormigón (inicio de la fisuración).
- Curvatura en la que se alcanza el límite elástico de la armadura con mayor profundidad.
- Curvatura en la que se alcanza el límite elástico de la armadura con menor profundidad.
- Curvatura de agotamiento.

7.2 Problemas de análisis estructural abordables con el algoritmo propuesto.

La tenencia de un algoritmo robusto con el que poder determinar la respuesta en equilibrio de una sección de hormigón estructural sometida a sollicitaciones normales, posibilita abordar

distintos problemas estructurales tratados de manera tradicional por los códigos desde un punto de vista simplificado. Algunos de estos problemas se exponen seguidamente.

7.2.1 Análisis de inestabilidad de soportes en flexión compuesta esviada. Universalización del método de la columna modelo.

La verificación de la integridad de soportes de hormigón frente a situaciones de inestabilidad es abordada por los códigos normativos de manera independiente para cada una de las direcciones principales de simetría. Los métodos propuestos se basan en la amplificación de la excentricidad inicial de cálculo de manera que se simule la deformada a nivel de estructura y se logren una capacidad resistente de la sección capaz de equilibrar las solicitaciones exteriores en segundo orden.

El Código Modelo¹¹² establece un método con el que abordar de manera directa la estabilidad de soportes y la verificación de la sección, esto es, establece un procedimiento con el que analizar a nivel de estructura y a nivel de sección la integridad del soporte frente a fenómenos de inestabilidad. El método se basa en la determinación de la directriz mecánica (respuesta resistente de la sección), y directriz geométrica del soporte (ecuación de la recta de la excentricidad exterior a nivel de estructura).

El método es de aplicación en situaciones de compresión o flexión compuesta recta pues, la directriz mecánica ha de construirse partiendo de una dirección establecida del eje neutro. La universalización del planteamiento a soportes con secciones transversales asimétricas, o de compresión o flexión compuesta esviada, implica la determinación del giro del eje neutro en equilibrio en inestabilidad, lo cual como ha quedado demostrado en esta tesis no es posible.

Se abre la posibilidad de investigar la verificación directa de soportes de hormigón armado de secciones asimétricas o sometidas a estados de sollicitación de compresión o flexión compuesta esviada mediante un procedimiento iterativo en el que intervenga la variable libre del giro del eje neutro en equilibrio en el fallo del soporte por inestabilidad.

¹¹² CEB-FIP Model Code, Comité Euro-International du Béton, (1990).Comité Europeo de Normalización: "Eurocódigo 2, Proyecto de Estructuras de Hormigón", AENOR (1992).

7.2.2 .Placas de anclaje.

Es posible adoptar como válida la hipótesis de Bernouilli-Navier en la evaluación del plano de equilibrio para elementos de conexión entre estructuras de acero y elementos de cimentación, como son las placas base, y es verosímil tratar este elemento como una sección de hormigón armado con ciertas particularidades. El tratamiento que los códigos normativos hacen de estos elementos es limitado, y en todo caso insuficiente.

El Eurocódigo 3¹¹³ establece un casquillo de respuesta bajo la placa en función de su rigidez. A pesar de que la definición de este contorno está descrito con profusión, la realidad es que, el problema de llevar a cabo la determinación del plano de equilibrio en condiciones de sollicitación de compresión o flexión compuesta esviada puede volverse complejo. La figura 7.1 está tomada del cuerpo de esta norma y define la sección de cálculo para una placa de anclaje y un perfil H. La superficie de respuesta máxima posible (toda la superficie de contacto en compresión) puede ganar en complejidad si se diseña una placa con elementos de rigidización en uno o ambos planos de simetría del soporte.

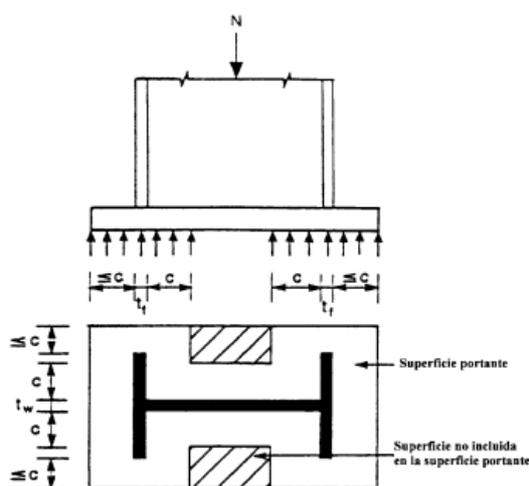


Figura 7.1. Definición de la superficie portante en una placa de anclaje para un soporte de acero laminado en H. Comité Europeo de Normalización: "Eurocódigo 3, Proyecto de Estructuras de Acero", AENOR (1993).

¹¹³ Comité Europeo de Normalización: "Eurocódigo 3, Proyecto de Estructuras de Acero", AENOR (1993).

El documento Base Plate and Anchor Rod Design¹¹⁴ no contempla esta circunstancia lo cual puede llevar a modelos de cálculo alejados del comportamiento real de este elemento estructural. Es posible pensar en placas delgadas con grandes vuelos donde la hipótesis de Bernoulli-Navier no se vería satisfecha.

Por otra parte tanto el Eurocódigo 3 como el documento Base Plate and Anchor Rod Design abordan esta elemento estructural desde un punto de vista de la compresión o flexión compuesta recta. En este punto, podría llevarse a cabo un análisis paramétrico comparativo entre estos dos modelos normativos con ayuda del MDMC y determinar en qué rangos de relación espesor/vuelo de las placas, nivel de excentricidad exterior, cantidad y distribución de pernos de anclaje, conducen a soluciones más precisas.

7.3 Análisis crítico de secciones construidas.

La obra construida en momentos de la historia en los que no se disponían de grandes medios de computación puede llevar a pensar que determinadas secciones podrían no haber sido diseñadas desde un punto de vista óptimo. Mediante la utilización del algoritmo presentado en esta tesis sería posible determinar un mapa completo de deformaciones y tensiones en todas las fibras de cualquier sección transversal de hormigón estructural construida.

7.3.1 Análisis de la obra de Miguel Fisac.

La cubierta de la Nave del Centro de Estudios Hidrográficos (1961-1963), es diseñada por Miguel Fisac en colaboración con Julián González Montesinos y José María Pliego. La estructura se resuelve con vigas de 22 metros de luz apoyadas en sus extremos y ejecutadas por dovelas postesadas mediante el procedimiento Barreda.

La geometría de la sección transversal (figura 2.50), motiva la necesidad de plantear algún procedimiento numérico para su análisis. El diseño original se basa en la determinación de la posición del centro de gravedad geométrico de la sección así como el cálculo de los momentos

¹¹⁴ Base Plate and Anchor Rod Design, Steel Design Guide 1, American Institute of Steel Construction (AISC), (2006).

CAPÍTULO 7

de inercia principales referidos al mismo. A pesar de tratarse de una sección comprimida (la acción del postesado induce un axil de compresión que evita la aparición de tracciones en la fibra extrema en las zonas de momento flector positivo), este tratamiento lineal de la sección parece ser insuficiente para la determinación exacta de la tensión de las fibras características para un estado de sollicitación exterior inferior al de agotamiento. Asimismo ha quedado demostrado (anexo II), que la dirección de inercia de la sección en agotamiento no depende únicamente de la geometría de la sección, sino que es función de la ecuación constitutiva del hormigón.

Es claro que a pesar de haberse diseñado con éxito, una sección transversal tan compleja requiere de la aplicación de un modelo numérico más amplio que permita determinar con precisión las coordenadas del plano de equilibrio, y establecer de manera unívoca la deformación y la tensión de cada fibra en equilibrio. Esto permitiría la verificación de los estados límites de servicio con mayor precisión y abundar en la optimización del diseño. Se abre la posible línea de investigación de establecer los niveles de seguridad con los que realmente fueron calculadas las secciones transversales de las estructuras de Miguel Fisac.

LISTA DE FIGURAS

Capítulo primero

- 1.1 Panteón de Roma. Marco Vipsanio Agripa. 27 a.C.
- 1.2 Sistema de ejes de coordenadas concordante con las expresiones expuestas.
- 1.3 Deformada elástica de una viga en voladizo. Modelo de Jacob Bernouilli.
- 1.4 Curva tensión-deformación de un material elástico y lineal.
- 1.5 Curvas tensión-deformación características de hormigón. Modelo parábola-rectángulo y modelo hiperbólico.
- 1.6 Curvas tensión-deformación características de acero. Modelo bi-lineal con pérdida total y parcial de rigidez de la rama plástica.
- 1.7 Soportes de hormigón armado en el nivel inferior del Pabellón Suizo.

Capítulo segundo

- 2.1 Esquema de tensiones normales en una sección en compresión o flexión compuesta esviada.
- 2.2 Métodos de superposición para análisis de secciones en compresión o flexión compuesta esviada.
- 2.3 Diagrama de interacción para compresión o flexión compuesta esviada y excentricidad uniaxial equivalente.

LISTA DE FIGURAS

- 2.4 Esquema conceptual de los modelos analizados según clasificación de Row y Paulay en línea temporal.
- 2.5 Superficie de agotamiento para un par de momentos $M_x - M_y$ y la superficie de revolución correspondiente al eje de inercia mayor de la sección.
- 2.6 Valores de N para diferentes valores de cuantía y axil sobre la sección analizada.
- 2.7 Relación de $\frac{r'}{h}$ y F, $\frac{h}{b}$ y $\emptyset \frac{b}{h}$ para diferentes cuantías.
- 2.8 Valores de N calculados para el modelo de Parnnell en función de la cuantía y el axil concomitante de la sección.
- 2.9 Relación de $\frac{r'}{h}$ y F para diferentes cuantías.
- 2.10 Relación $\frac{h}{b}$ y $\emptyset \frac{b}{h}$ para diferentes cuantías.
- 2.11 Diagrama de interacción adimensional para el análisis de secciones sometidas a flexión compuesta recta para diversas cuantías de armadura.
- 2.12 Boris Bresler
- 2.13 Superficies de rotura propuestas por Bresler.
- 2.14 Representación gráfica para el método A.
- 2.15 Representación gráfica para el método B.
- 2.16 Curvas de interacción de Bresler para diferentes valores de α .
- 2.17 Diagrama de interacción (P, M) y excentricidades de cálculo para las dos direcciones principales de inercia de la sección.
- 2.18 Richard Furlong.
- 2.19 Esquema de tensiones y resultantes en una sección para el modelo de Furlong.
- 2.20 Superficie típica de interacción.
- 2.21 Diagrama de interacción para un axil P_u constante.
- 2.22 Desvío entre un arco de circunferencia y el diagrama de interacción calculado para $f_c = 20.68$ MPa, $f_y = 275.79$ MPa, $d = 0.75$, $v_1 = 0.20$, $v_2 = 0.50$, $v_3 = 0.80$.
- 2.23 Desvío entre un arco de circunferencia y el diagrama de interacción calculado para $f_c = 34.47$ MPa, $f_y = 275.79$ MPa, $d = 0.75$, $v_1 = 0.20$, $v_2 = 0.50$, $v_3 = 0.80$.

LISTA DE FIGURAS

- 2.24 Desvío entre un arco de circunferencia y el diagrama de interacción calculado para $f_c = 20.68$ MPa, $f_y = 344.44$ MPa, $d = 0.75$, $v_1 = 0.20$, $v_2 = 0.50$, $v_3 = 0.80$.
- 2.25 Desvío entre un arco de circunferencia y el diagrama de interacción calculado para $f_c = 34.47$ MPa, $f_y = 344.44$ MPa, $d = 0.75$, $v_1 = 0.20$, $v_2 = 0.50$, $v_3 = 0.80$.
- 2.26 Diagrama de interacción para el desvío máximo de valores medido para las hipótesis de Furlong. $f_c = 20.68$ MPa, $f_y = 344.44$ MPa, $d = 0.75$, $v = 0.50$, $\rho = 1.00$.
- 2.27 Valores de α para el modelo de Bresler determinados por Pannell para diferentes axiles y cuantías de una sección
- 2.28 Secciones de soportes con distintas distribuciones de armadura.
- 2.29 Valores de N para diferentes valores de cuantía y axil sobre la sección analizada para distribución no simétrica en las cuatro caras de la sección.
- 2.30 Alfred L. Parme.
- 2.31 Relación de momentos según los dos ejes de la sección para el rango de valores de β posible.
- 2.32 Curvas de interacción teóricas y halladas por Parme para la formulación de Bresler.
- 2.33 Valores de β propuestos por Parme.
- 2.34 Diagrama de interacción en flexión recta para la sección analizada.
- 2.35 Valores de β calculados según el modelo de Parme.
- 2.36 Relación de momentos según los dos ejes de la sección para el rango de valores de β posible calculados según el modelo de Parme.
- 2.37 Superficie de interacción y línea de contorno de carga para un nivel de axil determinado.
- 2.38 Diagrama de interacción publicado por Weber para análisis de una sección cuadrada solicitada según la dirección de la diagonal.
- 2.39 Diagrama de interacción publicado por Weber para análisis de una sección cuadrada con doce barras de armadura y $g=0.7$, analizada según la dirección de su diagonal.
- 2.40 Diagrama de interacción publicado por Weber para análisis de una sección cuadrada con doce barras de armadura y $g=0.8$, analizada según la dirección de su diagonal.

LISTA DE FIGURAS

- 2.41 Diagrama de interacción de una sección cuadrada con doce barras de armadura, $g=0.736$, analizada según la dirección principal de inercia
- 2.42 Familia de diagramas momento-curvatura para una sección analizada según una dirección principal de inercia.
- 2.43 Sistemas de coordenadas adoptado por Warner en su modelo de tensiones, deformaciones y curvaturas en la sección.
- 2.44 Familia de curvas adimensionales momento-curvatura para axiles crecientes y una dirección del vector momento de 30° .
- 2.45 Diferencia entre los ángulos de aplicación del vector momento y el giro del eje neutro para una dirección de aplicación de la carga de 30° .
- 2.46 Distribución de tensiones de hormigón en una sección rectangular sometida a un estado de sollicitación de compresión o flexión compuesta esviada.
- 2.47 Modelos constitutivos para hormigón y acero descritos en forma polinómica empleados por Anis Farah y M. W. Huggins
- 2.48 Área y límites de integración de la sección tipo analizada por Farah.
- 2.49 Diagrama de interacción determinado para las hipótesis de Farah.
- 2.50 Imagen del plano original de la sección transversal de viga hueso para el Centro de Estudios Hidrográficos, 1961, Miguel Fisac.
- 2.51 Diagrama $M_x - \chi_x$ para diversos valores M_y y un axil exterior P .
- 2.52 Francisco Morán Cabré.
- 2.53 Ecuaciones constitutivas de hormigón y acero empleadas por Morán.
- 2.54 Diseño óptimo de armadura para un estado de sollicitación exterior arbitrario (P, M_x, M_y) .
- 2.55 Deformación de las fibras extremas de hormigón y acero en relación a la profundidad relativa del eje neutro para todo el espectro posible de deformaciones en estado límite último de agotamiento.
- 2.56 Thomas Paulay.
- 2.57 Definición geométrica de una sección para el modelo de Row y Paulay.

LISTA DE FIGURAS

- 2.58 Diagrama adimensional para comprobación o dimensionamiento en compresión o flexión compuesta esviada propuesto por Row y Paulay.
- 2.59 Simulación de los diagramas de interacción propuestos por Row y Paulay para direcciones de 15° y 30°.
- 2.60 Simulación de los diagramas de interacción propuestos por Row y Paulay para direcciones de 30° y 45°.
- 2.61 Planos posibles de agotamiento de una sección establecidos por el Manual CEB/FIP on Bending and Compression”, Bulletin D’Information n°141, Construction Press, 1981
- 2.62 Cargas exterior y distribución estimada interna de deformaciones y tensiones para una sección de geometría y armadura cualquiera.
- 2.63 Diagrama adimensional de interacción para una sección rectangular.
- 2.64 Planos posibles de agotamiento de una sección establecidos por el Codel Mode 90.
- 2.65 Planos posibles de agotamiento de una sección establecidos por el Eurocódigo 2.
- 2.66 Planos posibles de agotamiento de una sección establecidos por la EHE-08.
- 2.67 Medida del error en % respecto al modelo de Farah y Huggins para los modelos analizados frente a cuantía de armadura creciente y un axil reducido $\vartheta = 0.20$.
- 2.68 Medida del error en % respecto al modelo de Farah y Huggins para los modelos analizados frente a cuantía de armadura creciente y un axil reducido $\vartheta = 0.40$.
- 2.69 Medida del error en % respecto al modelo de Farah y Huggins para los modelos analizados frente a cuantía de armadura creciente y un axil balanceado $\vartheta = 0.42$
- 2.70 Medida del error en % respecto al modelo de Farah y Huggins para los modelos analizados frente a cuantía de armadura creciente y un axil reducido $\vartheta = 0.60$.
- 2.71 Medida del error en % respecto al modelo de Farah y Huggins para los modelos analizados frente a cuantía de armadura creciente y un axil reducido $\vartheta = 0.80$.
- 2.72 Curvatura inferior a la curvatura de agotamiento en una sección con simetría en el eje vertical.
- 2.73 Simplificación del bloque comprimido según la hipótesis de Whitney y equilibrio de esfuerzos en una sección con simetría vertical para un axil excéntrico según dicho eje.

- 2.74 División de la sección transversal en elementos discretos para la integración de la tensión normal.
- 2.75 Lectura de la curvatura de equilibrio para un par de esfuerzos exteriores de diseño (P, M_x) .
- 2.76 Perfil de tensiones normales en una sección transversal arbitraria.

Capítulo tercero

- 3.1 Sección rotada el ángulo del vector momento para su hipotético tratamiento en flexión o compresión compuesta recta
- 3.2 Diagrama momento curvatura de una sección genérica sometida a un axil exterior constante P y excentricidad variable (rumbo constante del eje neutro).
- 3.3 Lectura de la curvatura de equilibrio χ_1 en un diagrama momento-curvatura para el giro de equilibrio f y esfuerzos de diseño M_{x1}, M_{y1}
- 3.4 Búsqueda del giro de equilibrio del eje neutro mediante la lectura de la diferencia mínima de curvaturas para los esfuerzos de diseño M_x, M_y en una sección cualquiera.
- 3.5 Puntos de agotamiento indicados en verde de un diagrama de interacción para los que el giro del eje neutro es compatible con la búsqueda del giro de equilibrio.
- 3.6 Lectura de la diferencia de curvaturas en tres diagramas momento curvatura para tres giros del eje neutro, sin lectura posible de diferencia de curvaturas (a), con lectura posible de diferencia de curvaturas (b), y con solución exacta de equilibrio (c).
- 3.7 Representación idealizada de la diferencia de curvaturas leídas en un diagrama de interacción frente al giro del eje neutro.
- 3.8 Esquema del método de discretización del bloque comprimido en la sección transversal.
- 3.9 Detalle de una franja horizontal en la zona comprimida y el volumen de tensiones acotado superiormente por la aproximación lineal al perfil real.
- 3.10 Detalle de una franja horizontal en la zona comprimida referidas al sistema de coordenadas rotado el ángulo φ (a), y referido al sistema de coordenadas original de la sección (b).

LISTA DE FIGURAS

- 3.11 Convenio de notación adoptado por Marín para su propuesta de resolución de integrales dobles mediante momentos de área Joaquín Marín.
- 3.12 Joaquín Marín.
- 3.13 Esquema lógico para el desarrollo de una rutina para la determinación del plano de equilibrio de una sección solicitada frente a tensiones normales.
- 3.14 Determinación del giro de equilibrio por inferencia lineal entre los giros adyacentes al mínimo absoluto de diferencia de curvaturas.
- 3.15 Posibles errores en la discretización de la sección analizada por el empleo de franjas horizontales. (a) Error por exceso, se considera una superficie mayor a la real. (b) Error por defecto, se considera una superficie menor a la real.
- 3.16 Error cometido en la integración de la tensión en el hormigón por asimilación del perfil real de tensión a la poligonal secante inferior.
- 3.17 Posible definición del contorno de una franja considerando la presencia de armadura en la zona comprimida de la sección analizada.
- 3.18 Pantalla de ingreso de datos correspondientes al tipo de elemento y normativa en el software desarrollado (FCE).
- 3.19 Pantalla de ingreso de datos geométricos en una sección rectangular en el software desarrollado (FCE) según la normativa 318-14.
- 3.20 Pantalla de ingreso de datos de una sección Genérica definida por las coordenadas de los puntos de sus contornos en el software desarrollado (FCE).
- 3.21 Sección original de la sección SIGMA.
- 3.22 Vivienda Casacuberta (Santa Eugènia de Berga). Miguel Fisac Serna. González Blanco Fermín. “Los huesos de Fisac”. COAM. Madrid. (2007).
- 3.23 Pantalla de definición de ecuaciones constitutivas de hormigón (a) y acero activo (b) en el software desarrollado (FCE). Curva de hormigón definida por puntos por el usuario
Pantalla de salida de resultados para una sección analizada en flexión compuesta esviada en el software desarrollado (FCE).
- 3.24 Esquema leyenda para la interpretación de la salida gráfica del análisis efectuado mediante FCE.

LISTA DE FIGURAS

- 3.25 Salida gráfica de distribución de tensiones normales, diagrama de agotamiento en flexión compuesta esviada, y diagramas momento-curvatura para la posición de equilibrio.
- 3.26 Ecuaciones constitutivas de hormigón y acero empleadas en el análisis comparativo para los modelos de Farah y Huggins y el método propuesto.
- 3.27 Sección tipo correspondiente al ensayo comparativo entre el modelo de Farah y Huggins y el método propuesto.
- 3.28 Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 1$, $\rho = 0.20$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.40$, $v_2 = 0.60$, $v_3 = 0.80$, $v_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d.
- 3.29 Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 1$, $\rho = 0.40$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.40$, $v_2 = 0.60$, $v_3 = 0.80$, $v_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d.
- 3.30 Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 1$, $\rho = 0.60$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.40$, $v_2 = 0.60$, $v_3 = 0.80$, $v_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d.
- 3.31 Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 1$, $\rho = 0.80$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.40$, $v_2 = 0.60$, $v_3 = 0.80$, $v_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d.

LISTA DE FIGURAS

- 3.32 Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 2$, $\rho = 0.20$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.40$, $v_2 = 0.60$, $v_3 = 0.80$, $v_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d.
- 3.33 Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 2$, $\rho = 0.40$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.40$, $v_2 = 0.60$, $v_3 = 0.80$, $v_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d.
- 3.34 Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 2$, $\rho = 0.60$, axiles creciente según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.40$, $v_2 = 0.60$, $v_3 = 0.80$, $v_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d.
- 3.35 Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 2$, $\rho = 0.80$, axiles creciente según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.40$, $v_2 = 0.60$, $v_3 = 0.80$, $v_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d.
- 3.36 Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 3$, $\rho = 0.20$, axiles creciente según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.40$, $v_2 = 0.60$, $v_3 = 0.80$, $v_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d.
- 3.37 Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 3$, $\rho = 0.40$, axiles creciente según las

- direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.40$, $v_2 = 0.60$, $v_3 = 0.80$, $v_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d.
- 3.38 Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 3$, $\rho = 0.60$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.40$, $v_2 = 0.60$, $v_3 = 0.80$, $v_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d.
- 3.39 Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 3$, $\rho = 0.80$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.40$, $v_2 = 0.60$, $v_3 = 0.80$, $v_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d.
- 3.40 Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 4$, $\rho = 0.20$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.40$, $v_2 = 0.60$, $v_3 = 0.80$, $v_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d.
- 3.41 Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 4$, $\rho = 0.40$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.40$, $v_2 = 0.60$, $v_3 = 0.80$, $v_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d.
- 3.42 Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 4$, $\rho = 0.60$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones

LISTA DE FIGURAS

- θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.40$, $v_2 = 0.60$, $v_3 = 0.80$, $v_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d.
- 3.43 Giro de equilibrio del eje neutro obtenido mediante el MDMC y por el modelo de Farah y Huggins para una sección con $h/b = 4$, $\rho = 0.80$, según las direcciones θ_1, θ_2 de aplicación de la carga y giro correspondiente a la perpendicular a las direcciones θ_1, θ_2 frente a excentricidad creciente y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.40$, $v_2 = 0.60$, $v_3 = 0.80$, $v_4 = 1.00$. Imágenes a, b, c, d.
- 3.44 Esquema de la aplicación de la carga al soporte de hormigón ensayado por Furlong.

Capítulo cuarto

- 4.1 Diseño del prototipo de hormigón ensayado
- 4.2 Armadura de uno de los soportes construidos previo a su hormigonado.
- 4.3 Probeta de hormigón ensayada a compresión hasta su agotamiento.
- 4.4 Curva tensión-deformación del hormigón de los prototipos ensayados.
- 4.5 Curva tensión-deformación modificada numéricamente mediante la expresión facilitada en la EHE-08.
- 4.6 Curva tensión-deformación para el hormigón empleada en el análisis numérico.
- 4.7 Curva tensión-deformación para el acero empleada en el análisis numérico.
- 4.8 Imagen del soporte antes de comenzar el ensayo 1.
- 4.9 Esquema de aplicación de la carga en los tres escalones de excentricidad en el ensayo 1.
- 4.10 Detalle del apoyo inferior del soporte durante el ensayo 1.
- 4.11 Esquema de las coordenadas del plano de equilibrio sobre la sección analizada en el ensayo 1.
- 4.12 Posición y designación de bandas extensométricas en el soporte en el ensayo 1. Círculos designan bandas colocadas en las barras de armadura. Cuadrados designan bandas situadas en la cara exterior del prototipo.
- 4.13 Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de excentricidad 1 en el ensayo 1.
- 4.14 Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de excentricidad 2 en el ensayo 2.
- 4.15 Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de excentricidad 3 en el ensayo 3.

LISTA DE FIGURAS

- 4.16 Posición de la fibra neutra obtenida de manera experimental y numérica para los escalones de excentricidad 2 y 3 correspondientes al ensayo 1.
- 4.17 Esquema de aplicación del axil sobre el eje Y de la sección transversal en el ensayo 2.
- 4.18 Esquema de las coordenadas del plano de equilibrio sobre la sección analizada en el ensayo 2.
- 4.19 Soporte de hormigón colocado para la aplicación de la carga exterior en el plano débil de la sección transversal y el axil de tesado exterior aplicado.
- 4.20 Soporte de hormigón colocado para la aplicación de la carga exterior en el plano débil de la sección transversal y el axil de tesado exterior aplicado.
- 4.21 Tensiones normales en la sección de contacto entre el la chapa colocada bajo el perfil UPN-160 y el soporte de hormigón en el ensayo 2.
- 4.22 Esquema de aplicación del momento según el eje Y de la sección transversal en el ensayo 2.
- 4.23 Imagen del soporte con el axil exterior aplicado sobre la barra exterior, colocado en la posición de la aplicación de la carga vertical perpendicular a su eje Y.
- 4.24 Convenio de notación de dirección de aplicación del vector momento en el ensayo 2.
- 4.25 Posición y designación de bandas extensométricas en el soporte y en la barra exterior en el ensayo 2. Círculos designan bandas colocadas en las barras de armadura. Cuadrados designan bandas situadas en la cara exterior del prototipo.
- 4.26 Lectura de deformación de las diez galgas instaladas en el soporte y la barra exterior de tesado frente al tiempo durante la primera fase del ensayo 2.
- 4.27 Lectura de deformación de las diez galgas instaladas en el soporte y la barra exterior de tesado frente al tiempo durante la segunda fase del ensayo 2.
- 4.28 Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 1 en el ensayo 2.
- 4.29 Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 2 en el ensayo 2.
- 4.30 Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 3 en el ensayo 2.
- 4.31 Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 4 en el ensayo 2.
- 4.32 Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 5 en el ensayo 2.
- 4.33 Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 6 en el ensayo 2.

LISTA DE FIGURAS

- 4.34 Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 7 en el ensayo 2.
- 4.35 Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 8 en el ensayo 2.
- 4.36 Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 9 en el ensayo 2.
- 4.37 Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 10 en el ensayo 2.
- 4.38 Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 11 en el ensayo 2.
- 4.39 Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 12 en el ensayo 2.
- 4.40 Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 13 en el ensayo 2.
- 4.41 Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 14 en el ensayo 2.
- 4.42 Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 15 en el ensayo 2.
- 4.43 Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 16 en el ensayo 2.
- 4.44 Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 17 en el ensayo 2.
- 4.45 Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 18 en el ensayo 2.
- 4.46 Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 19 en el ensayo 2.
- 4.47 Análisis a nivel de sección correspondiente al escalón de carga 20 en el ensayo 2.
- 4.48 Diferencia en grados entre la normal a la dirección del vector momento exterior y el rumbo de la fibra neutra en equilibrio frente al ratio de agotamiento de la sección, obtenidos en la simulación numérica del ensayo 2.
- 4.49 Medida de la diferencia entre la carga de agotamiento experimental y numérica sobre un diagrama de interacción (M_x, M_y) para el axil exterior aplicado N en el ensayo 2.
- 4.50 Soporte ensayado instantes después de alcanzarse su agotamiento en el ensayo 2.
- 4.51 Posición de la fibra neutra obtenida de manera experimental y numérica para los escalones de carga 1, 2, 3, y 4 correspondiente al ensayo 2 (a, b, c, d).
- 4.52 Posición de la fibra neutra obtenida de manera experimental y numérica para los escalones de carga 5, 6, 7, y 8 correspondiente al ensayo 2 (a, b, c, d).
- 4.53 Posición de la fibra neutra obtenida de manera experimental y numérica para los escalones de carga 9, 10, 11, y 12 correspondiente al ensayo 2 (a, b, c, d).
- 4.54 Posición de la fibra neutra obtenida de manera experimental y numérica para los escalones de carga 13, 14, 15, y 16 correspondiente al ensayo 2 (a, b, c, d).

- 4.55 Posición de la fibra neutra obtenida de manera experimental y numérica para los escalones de carga 17, 18, 19, y 20 correspondiente al ensayo 2 (a, b, c, d).

Capítulo quinto

- 5.1 Esquema de la sección analizada en la estimación de la tensión en las fibras características para un rumbo del eje neutro perpendicular a la dirección de la excentricidad frente a la tensión real para el giro de equilibrio.
- 5.2 Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de acero en tracción para una sección con $h/b = 1$, $\rho_1 = 0.40$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.20$, $v_2 = 0.40$, $v_3 = 0.60$, $v_4 = 0.80$. Imágenes a, b, c, d.
- 5.3 Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de acero en tracción para una sección con $h/b = 1$, $\rho_1 = 0.80$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.20$, $v_2 = 0.40$, $v_3 = 0.60$, $v_4 = 0.80$. Imágenes a, b, c, d.
- 5.4 Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de acero en tracción para una sección con $h/b = 2$, $\rho_1 = 0.40$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.20$, $v_2 = 0.40$, $v_3 = 0.60$, $v_4 = 0.80$. Imágenes a, b, c, d.
- 5.5 Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de acero en tracción para una sección con $h/b = 2$, $\rho_1 = 0.80$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.20$, $v_2 = 0.40$, $v_3 = 0.60$, $v_4 = 0.80$. Imágenes a, b, c, d.

LISTA DE FIGURAS

- 5.6 Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de acero en tracción para una sección con $h/b = 3$, $\rho_1 = 0.40$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.20$, $v_2 = 0.40$, $v_3 = 0.60$, $v_4 = 0.80$. Imágenes a, b, c, d.
- 5.7 Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de acero en tracción para una sección con $h/b = 3$, $\rho_1 = 0.80$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.20$, $v_2 = 0.40$, $v_3 = 0.60$, $v_4 = 0.80$. Imágenes a, b, c, d.
- 5.8 Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de acero en tracción para una sección con $h/b = 4$, $\rho_1 = 0.40$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.20$, $v_2 = 0.40$, $v_3 = 0.60$, $v_4 = 0.80$. Imágenes a, b, c, d.
- 5.9 Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de acero en tracción para una sección con $h/b = 4$, $\rho_1 = 0.80$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.20$, $v_2 = 0.40$, $v_3 = 0.60$, $v_4 = 0.80$. Imágenes a, b, c, d.
- 5.10 Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de hormigón en compresión para una sección con $h/b = 1$, $\rho_1 = 0.40$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.20$, $v_2 = 0.40$, $v_3 = 0.60$, $v_4 = 0.80$. Imágenes a, b, c, d.
- 5.11 Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de hormigón en compresión para una sección con $h/b = 1$, $\rho_1 = 0.80$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para

- direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.20, v_2 = 0.40, v_3 = 0.60, v_4 = 0.80$.
Imágenes a, b, c, d.
- 5.12 Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de hormigón en compresión para una sección con $h/b = 2, \rho_1 = 0.40$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.20, v_2 = 0.40, v_3 = 0.60, v_4 = 0.80$.
Imágenes a, b, c, d.
- 5.13 Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de hormigón en compresión ara una sección con $h/b = 2, \rho_1 = 0.80$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.20, v_2 = 0.40, v_3 = 0.60, v_4 = 0.80$.
Imágenes a, b, c, d.
- 5.14 Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de hormigón en compresión para una sección con $h/b = 3, \rho_1 = 0.40$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.20, v_2 = 0.40, v_3 = 0.60, v_4 = 0.80$.
Imágenes a, b, c, d.
- 5.15 Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de hormigón en compresión para una sección con $h/b = 3, \rho_1 = 0.80$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.20, v_2 = 0.40, v_3 = 0.60, v_4 = 0.80$.
Imágenes a, b, c, d.
- 5.16 Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de hormigón en compresión para una sección con $h/b = 4, \rho_1 = 0.40$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e

LISTA DE FIGURAS

- del eje neutro y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.20$, $v_2 = 0.40$, $v_3 = 0.60$, $v_4 = 0.80$.
Imágenes a, b, c, d.
- 5.17 Diferencia en MPa de la tensión de la fibra extrema de hormigón en compresión para una sección con $h/b = 4$, $\rho_1 = 0.80$ para el giro φ_1 del eje neutro medida para direcciones θ_1, θ_2 de excentricidad respecto a la tensión real determinada para el giro φ_e del eje neutro y cuatro axiles distintos $v_1 = 0.20$, $v_2 = 0.40$, $v_3 = 0.60$, $v_4 = 0.80$.
Imágenes a, b, c, d.
- 5.18 Diferencia de valores medios en la tensión (Mpa) en las fibras extremas de acero (a) y hormigón (b) en equilibrio para la muestra de excentricidades, axiles, y direcciones analizadas entre el giro de equilibrio real y la dirección perpendicular a la acción del vector momento, frente a la relación (h/b) de la sección.

Capítulo sexto

- 6.1 Diagrama de interacción de una sección para un modelo hiperbólico de hormigón.

Capítulo séptimo

- 7.1 Definición de la superficie portante en una placa de anclaje para un soporte de acero laminado en H.

Anexos

- A.1 Valores de N para diferentes valores de cuantía y axil sobre la sección analizada.
- A.2 (a) Ecuación tensión deformación para un modelo hiperbólico. (b) Ecuación tensión deformación para un modelo parábola-rectángulo.
- A.3 Esquema de la sección transversal analizada.
- A.4 Diagramas de interacción determinados para las secciones descritas en la tabla 1. Línea continua denota modelo hiperbólico, línea discontinua denota modelo parábola-rectángulo.

- A.5 Perfil de tensiones de la sección analizada $\frac{h}{b} = 1$, $\rho = 0.30$, $\nu = 0.95$, para los dos modelos constitutivos empleados, y $500 \times 500 \text{ mm}^2$ de dimensiones analizada según los dos modelos constitutivos descritos. (a) Ecuación parábola-rectángulo. (b) Ecuación hiperbólica.

LISTA DE TABLAS

Capítulo segundo

- 2.1 Matriz de coordenadas, deformaciones y tensiones de los puntos característicos de una sección para unos esfuerzos conocidos, determinados por el modelo de Farah.
- 2.2 Resultados de las iteraciones en la búsqueda del dimensionado óptimo de la sección según el modelo de diseño óptimo de armadura de una sección de Morán.
- 2.3 Valores de α para análisis de soportes con axil y dos excentricidades en el modelo propuesto por el Eurocódigo 2.
- 2.4 Valores de β_{EHE} para análisis de soportes con axil y dos excentricidades en el modelo propuesto por la Instrucción de hormigón estructural EHE.
- 2.5 Medida del error en % respecto al modelo de Farah y Huggins para los modelos analizados frente a cuantía de armadura creciente y un axil reducido $\nu = 0.20$.
- 2.6 Medida del error en % respecto al modelo de Farah y Huggins para los modelos analizados frente a cuantía de armadura creciente y un axil reducido $\nu = 0.40$.
- 2.7 Medida del error en % respecto al modelo de Farah y Huggins para los modelos analizados frente a cuantía de armadura creciente y axil balanceado $\nu = 0.42$.
- 2.8 Medida del error en % respecto al modelo de Farah y Huggins para los modelos analizados frente a cuantía de armadura creciente y un axil reducido $\nu = 0.60$.

- 2.9 Medida del error en % respecto al modelo de Farah y Huggins para los modelos analizados frente a cuantía de armadura creciente y un axil reducido $\nu = 0.80$.
- 2.10 Resumen de los modelos analizados y alcance de los mismos.

Capítulo cuarto

- 4.1 Definición de los estados de carga a los que se somete el soporte en el ensayo 1.
- 4.2 Valores medios de deformación en las tres barras de armadura para los tres escalones de excentricidad ensayados.
- 4.3 Coordenadas del plano de equilibrio obtenidas en el análisis experimental para los tres escalones de excentricidad establecidos.
- 4.4 Valores de tensión en las los siete instrumentos instalados en el prototipo para los tres escalones de excentricidad ensayados.
- 4.5 Coordenadas del plano de equilibrio obtenidas en el análisis numérico para los tres escalones de excentricidad establecidos.
- 4.6 Deformaciones obtenidas numéricamente en las siete fibras instrumentadas en el prototipo para los tres escalones de excentricidad ensayados.
- 4.7 Tensiones obtenidas numéricamente en las siete fibras instrumentadas en el prototipo para los tres escalones de excentricidad ensayados.
- 4.8 Valores de sollicitaciones exteriores considerados sobre la sección de referencia para el análisis de los resultados del ensayo 2.
- 4.9 Valores medios de deformación en cinco puntos característicos de la sección de referencia para los 20 estados de sollicitación exterior elegidos en el ensayo 2.
- 4.10 Coordenadas del plano de equilibrio obtenidas en el análisis experimental para los 20 estados de sollicitación elegidos en el ensayo 2.
- 4.11 Valores de tensión en la posición de los instrumentos instalados y punto de la sección con mayor deformación de compresión en el ensayo 2.
- 4.12 Coordenadas del plano de equilibrio obtenidas en el análisis numérico para los veinte niveles de carga establecidos en el ensayo 2.

LISTA DE TABLAS

- 4.13 Deformaciones obtenidas numéricamente en las siete fibras instrumentadas en el prototipo para los veinte niveles de carga establecidos en el ensayo 2.
- 4.14 Tensiones obtenidas numéricamente en las siete fibras instrumentadas en el prototipo para los veinte niveles de carga establecidos en el ensayo 2.

Anexos

- A.1 Esfuerzos de agotamiento y coordenadas del plano de equilibrio para la dirección principal de inercia de la sección y según la diagonal de la misma.
- A.2 Valores significativos calculados para los 24 casos analizados.

LISTA DE ABREVIATURAS

Letras minúsculas romanas

a_{ci} : Elemento de hormigón de dimensiones finitas.

$a_{m,n}$: En el modelo de Marín coeficiente genérico de la función del contorno de la sección.

b : Base de la sección transversal.

c_M : En el modelo de Morán, coste de la función cuyo valor mínimo arroja el diseño óptimo de la sección.

d : Canto útil.

h : Canto total de la sección transversal.

m : En el modelo de Row y Paulay relación entre límite elástico de acero y la tensión de agotamiento de hormigón.

r : Cuantía geométrica de acero en el modelo de Pannell.

r' : Recubrimiento mecánico.

x : Profundidad del bloque comprimido.

LISTA DE ABREVIATURAS

x^m : En el modelo de Marín coordenada genérica cartesiana.

x_M : En el modelo de Morán, profundidad relativa de la fibra neutra.

y : Distancia entre el centro de gravedad de una sección y su fibra extrema.

y_{FN} : En el modelo de Farah y Huggins, profundidad de la fibra neutra.

y^m : En el modelo de Marín coordenada genérica cartesiana.

z : Brazo mecánico de una sección.

Letras mayúsculas romanas

A : En el modelo de Marín, dominio de la integración para el cálculo de los momentos de área.

A : En el modelo de Marín, área del contorno analizado.

A_s : Área de una barra o grupo de barras de acero de la sección trasversal.

E : Módulo elástico.

E_c : Módulo elástico del hormigón

F : Parámetro adimensional en el modelo de Pannell.

I : Momento de inercia.

I_z : Momento de inercia de la sección transversal respecto al centro de gravedad respecto al eje z .

I_y : Momento de inercia de la sección transversal respecto al centro de gravedad respecto al eje y .

I_{xy} : Producto de inercia de la sección transversal respecto a las ejes x , y .

I_{yz} : Producto de inercia de la sección transversal respecto a las ejes y , z .

LISTA DE ABREVIATURAS

M_{fy} : En el modelo de Pannell, es el momento de diseño equivalente para llevar a cabo un análisis en compresión o flexión recta.

$M_{m,n}$: En el modelo de Marín, momentos de área de un región.

M_x : Momento flector aplicado según el eje x de la sección.

\overline{M}_x : En el modelo de Farah y Huggins, momento según el eje x resultante en una sección para un plano de equilibrio postulado.

M_y : Momento flector aplicado según el eje y de la sección.

\overline{M}_y : En el modelo de Farah y Huggins, momento según el eje y resultante en una sección para un plano de equilibrio postulado.

M_{ux} : Momento flector de agotamiento aplicado según el eje x de la sección.

M_{uy} : Momento flector de agotamiento aplicado según el eje y de la sección.

$M_{y(x)}$: Momento flector aplicado alrededor del eje y a lo largo de la directriz de la pieza (x).

$M_{z(x)}$: Momento flector aplicado alrededor del eje z a lo largo de la directriz de la pieza (x).

N : En el modelo de Pannell, factor de relación entre el momento de agotamiento de una sección para cualquier dirección y el correspondiente al momento de agotamiento según la dirección principal de inercia de la sección.

$N_{(x)}$: Ley de esfuerzo axial a lo largo de la directriz de la pieza (x).

N_c : Axil resultante del bloque comprimido de hormigón.

$N_{c,i}$: Axil resultante de un elemento comprimido de la sección transversal analizada.

N_s : Axil de una barra de acero o de un grupo de barras.

P : Axil aplicado en el centro de gravedad de la sección.

\bar{P} : En el modelo de Farah y Huggins, axil resultante en una sección para un plano de equilibrio postulado.

P_i : Axil resultante de la sección transversal analizada.

P_0 : Axil de agotamiento de una sección en el caso de compresión pura.

P_b : Axil balanceado de una sección.

P_u : Axil de agotamiento de una sección.

S_x : Momento estático del contorno analizado respecto al eje x.

S_y : Momento estático del contorno analizado respecto al eje y.

Legras minúsculas griegas

α : Exponente adimensional para la determinación del contorno de cargas en la formulación de Bresler.

β : Exponente adimensional para la determinación del contorno de cargas en la formulación de Bresler.

β_{EHE} : En la EHE-08, coeficiente adimensional para determinar la excentricidad ficticia equivalente recta para secciones sometidas a compresión o flexión compuesta esviada.

φ : Giro del eje neutro.

φ_e : Giro del eje neutro en condiciones de equilibrio.

φ_t : Giro teórico del eje neutro según la dirección perpendicular a la dirección del vector momento.

LISTA DE ABREVIATURAS

λ : Diferencia entre el ángulo teórico del eje neutro según la perpendicular a la dirección del vector momento y el giro del eje neutro en condiciones de equilibrio.

ε : Deformación unitaria.

ε_{c0} : Deformación en el límite elástico teórico del hormigón.

ε_{cu} : Deformación de agotamiento por compresión del hormigón.

ε_y : Deformación en el límite elástico del acero.

ε_{yu} : Deformación de agotamiento del acero.

ν : Axil reducido.

μ : Momento flector reducido.

ρ : Cuantía de acero de la sección transversal.

σ : Tensión normal.

σ_c : Tensión normal en el hormigón.

σ_s : Tensión normal en el acero.

Legras mayúsculas griegas

χ : Curvatura de la sección transversal.

$\Delta P_{\text{Objetivo}}$: Diferencia de axiles admisible en la búsqueda de la posición de la fibra neutra en el proceso iterativo.

\emptyset : En la instrucción ACI-318, coeficiente de reducción de la capacidad de la sección.

LISTA DE ABREVIATURAS

\emptyset : En el modelo de Pannell, relación entre el momento de agotamiento de una sección según su eje principal de inercia y según la dirección de su diagonal.

\emptyset : En el modelo de Warner, curvatura de la sección.

θ : Ángulo de la excentricidad del axil.

BIBLIOGRAFÍA.

Fuentes primarias.

1. Timoshenko Stephen. "History of strength of materials". Mc Graw Hill, (1953).
2. R. Park & T. Paulay. "Reinforced concrete structures". John Wiley & sons, (1975).
3. David Kincaid, Ward Cheney. "Análisis numérico", Addison-Wesley, Iberoamericana (1994).
4. Gerald L. Bradley, "Cálculo de varias variables". Prentice-Hall, (1998).
5. Choisi Auguste. "El arte de construir en Roma". Instituto Juan de Herrera, (1999).
6. Pedro Jiménez Montoya, Álvaro García Meseguer, Francisco Morán Cabré. "Hormigón Armado", Gustavo Gili, (2001).
7. Ortiz Berrocal Luís. "Resistencia de materiales". Mc Graw Hill, (2002).
8. Tusquets Óscar, "Dios lo ve". Anagrama (2003).
9. Golvin Jean-Claude. "Historia del mundo antiguo". Desperta Ferro Ediciones, (2005).
10. Chu-Kia Wang, Salmon G. Charles, Pincheira A. José "Reinforced Concrete Design", John Wiley & Sons, Inc. (2007).
11. González Blanco Fermín. "Los huesos de Fisac". COAM. Madrid.(2007).
12. Calavera Ruiz José. "Proyecto y Cálculo de Estructuras de Hormigón", Intemac Ediciones, (2008).
13. Arthur H. Nilson, David Darwing, Charles W. Dolan, "Design of concrete structures", McGraw Hill (2010).

14. Caballos Sierra Francisco Javier. “Microsoft C#: curso de programación”, RA-MA, (2011).
15. Argüelles Álvares Ramón, “Estructuras de Acero”, Bellisco, (2015).

Artículos y publicaciones

1. Hognestad, E. “A Study of Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Members”, Bulletin N° 399, Engineering Experimental Station, University of Illinois, Urbana, 128 pp, (November 1951).
2. Anderson, P. and Lee, H. N., “A Modified Plastic Theory of Reinforced Concrete”, Bulletin N° 33, Engineering Experiment Station, University of Minnesota, Minneapolis, (April 1951).
3. ACI-ASCE Committee 327, “Report of ASCE-ACI Joint Committee on Ultimate Strength Design”. Proceedings, ASCE, V. 81, Paper N° 809 (January 1955).
4. ACI Committee 318, Appendix of “Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-56)”, American Concrete Institute (1956).
5. Whitney, Charles S and Cohen, Edward, “Guide for Ultimate Strength Design of Reinforced Concrete”, ACI Journal, V.28, N° 5, Proceedings V. 53, 455-490, (November 1956).
6. Pannel, F. N. Discussion of “Biaxially Loaded Reinforced Concrete Columns”, ACI Journal, Proceedings, ASCE V. 85, ST6, pp. 47-54 (June 1959).
7. Bresler Boris. “Design criteria for reinforced columns under axial load and biaxial bending”, ACI Journal, Proceedings, 57, 481-490. Disc., 1621-1638, (Novembre 1960).
8. R. W. Furglong. “Ultimate strength of square columns under biaxially eccentric loads”, ACI Journal, Proceedings, 60, 1129-1140, (March 1961).
9. H. Rüsçh, E. Grasser, P. Rao. “Principes de calcul du béton armé sous des états de contraintes monoaxiaux”. Bulletin n° 36 of CEB. París (June 1962).
10. F. N. Pannell. “Failure surfaces for members in compression and biaxial bending”, ACI Journal, Proceedings, 60, 129-140, (January 1963).
11. Meek, John L. “Ultimate Strength of Columns with Biaxially Eccentric Loads”. ACI Journal, Proceedings V60, N8, pp 1053-1064, (August 1963).
12. Plock, H. J. “Fast way to find pressure under footings”. Eng. News Rec., 25,50-5, (1963).

BIBLIOGRAFÍA

13. Aas-Jakobsen A. "Biaxial Eccentricities in Ultimate Load Design". ACI Journal, Proceedings V61, N3, pp 293-316 (January 1964).
14. Alfred L. Parme, Jose M. Nieves, and Albert Gouwens. "Capacity of Reinforced Rectangular Columns Subject to Biaxial Bending". ACI Journal, Proceedings, 63, 911- 923, (September 1966).
15. Donald C. Weber. "Ultimate Strength Design Charts for Columns with Biaxial Bending", ACI Journal, Proceedings, 63, 1205-1320, Disc., 1538-1586, (November 1966).
16. Gurfinkel, G., Robinson, A. "Determination of Strain Distribution and Curvature in a Reinforced Concrete Section Subjected to Bending Moment and Longitudinal Load", ACI Journal, Proceedings V. 64, N° 7, pp 398-402, (July 1967).
17. R. F. Warner. "Biaxial Moment Thrust Curvature Relation". Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 95, N° ST5, 923-940, (May 1969).
18. Anis Farah and M. W. Huggins. "Analysis of Reinforced Concrete Columns Subjected to Longitudinal Load and Biaxial Bending". ACI Journal, Proceedings, 66, 569-575, (July 1969).
19. Morán Cabré Francisco, Verde A. "Flexión Esviada: estado actual del tema", Informes de la Construcción, CSIC, Vol 22, n°217, (Enero Febrero 1970).
20. CEB / FIP "Recommandations pratiques unifies pour le calcul et l'execution des ouvrages en béton armé", Paris, (1970).
21. Kent, D. C. and Park, R., "Flexural Members With Confined Concrete", Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineers, ST7, pp 1969-1990. (July 1971).
22. Santathadaporn, S., Chen, W. F. "Tangent Stiffness Method for Biaxial Bending" Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 98, N° ST1, pp. 153-156, (January 1972).
23. W. F. Chen, M. T. Shoraka, "Tangent Stiffness Method for Biaxial Bending of Reinforced Concrete Columns", Fritz Engineering Laboratoy Report N° 389.1, (October 1972).
24. Moran Cabré Francisco, "Design of reinforced concrete sections under normal loads and stresses in the ultimate state". CEB Bulletin d'Information N° 83, (Abril 1972).

BIBLIOGRAFÍA

25. Paulay Thomas, "Biaxial flexure and axial load interaction in short rectangular reinforced concrete columns", Bulletin of New Zealand Society for Earthquake Engineering, (September 1973).
26. J. C. Smith. "Biaxially Loaded Concrete Interaction Curve". Computers and Structures, 3, 1461-1464, (1973).
27. S. I. Abdel-Sayed and N. J. Gardner. "Design of Symmetric Square Slender Reinforced Concrete Columns under Biaxially Eccentric Loads". Reinforced Concrete Columns (SP-50). American Concrete Institute. (pp. 149-164), (1975).
28. J. A. Desai and R. W. Furlong. "Strength and Stiffness of Reinforced Rectangular Columns under Biaxially Excentric Thrust". Center for Highway Research, The University of Texas, Austin, (January 1976).
29. V. Mavichak and R. W. Furlong. "Strength and Stiffness of Reinforced Rectangular Columns under Biaxially Eccentric Thrust". Center for Highway Research, The University of Texas, Austin, (November 1976).
30. Chang, Donald D., unpublished doctoral dissertation, The University of Texas at Austin. (1977).
31. R. W. Furlong. "Concrete Columns under Biaxially Eccentric Thrust", ACI Journal, Proceedings, 76, 1093-1118, (October 1979).
32. Juan José Arenas de Pablo. "Cálculo de soportes de hormigón armado en teoría de segundo orden". Editores Técnicos Asociados. Barcelona, (1980).
33. Hugo Corres Peiretti. "Dimensionado de soportes de sección constante de hormigón armado en estado límite último de agotamiento o inestabilidad. Método de las curvaturas de referencia", Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Madrid, (1980).
34. E. Grasser. "Manual CEB/FIP on Bending and Compression", Bulletin D'Information n°141, Construction Press, (1981).
35. Francisco Javier León González. "Comportamiento teórico y experimental, en servicio y en agotamiento, de forjados unidireccionales de hormigón armado", Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Madrid, (1987).

BIBLIOGRAFÍA

36. Chu-Kia-Wang. "Solving the Biaxial Bending Problem in Reinforced Concrete by a Three-Level Iteration Procedure". *Microcomputers in Civil Engineering*, 3, 311-320, (1988).
37. Joaquín Marín, "Computing double integrals with moments of area", *Boletín IMME* (Instituto de Materiales y Modelos Estructurales), nº76, 144-155, (1988).
38. J. Y. Richard Yen. "Quasi-Newton Method for Reinforced Concrete Columns Analysis and Design". *Journal of Structural Engineering*, 10.1061/(ASCE)0733-9445(1991)117:3(657), 657-666, (March 1991).
39. Sarma KC, Adeli H. Cost optimization of concrete structures. *J Struc Eng ASCE*; 124(5):570-8 (1998).
40. Rodriguez J.A., Ariztizabal-Ochoa. "Biaxial Interaction Diagrams for Short R/C of Any Cross Section". *Journal of Structural Engineering* 1999.125:672-683. (June 1999).
41. P.F. Miguel, J.L. Bonet y M.A. Fernández. "Integración de tensiones en secciones de hormigón sometidas a flexocompresión esviada", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 16, Nº 2, pp. 209-225. (2000).
42. Rodriguez Gutierrez J. Aristizabal Ochoa J. "M-P-F Diagrams for Reinforced, Partially, and Fully Prestressed Concrete Sections under Biaxial Bending and Axial Load". *Journal of Structural Engineering* 10.1061/(ASCE)0733-9445(2001)127:7(763), 763-773, (July 2001).
43. Tomoaki Sato, Iaso Shimada, Harutoshi Kobayashi. "A Simple Numerical Method for Biaxial Bending Moment-Curvature Relations of Reinforced Concrete Columns Sections". *Osaka City University*, (September 2002).
44. J. L. Bonet, M. H. F. M. Barros, M. L. Romero, "A fast stress integration algorithm for reinforced concrete sections with axial loads and biaxial bending", *Computers and Structures* 82, 213-225, (January 2004).
45. Barros M. H. F. M., "Closed form solution of optimal design of rectangular reinforced concrete sections", *Engineering Computations*; 2004; 21, 7/8 ABI/INFORM Collection, pag. 761, (March 2004).
46. L. Cedolin, G. Cusatis, S. Eccheli, M. Roveda. "Biaxial Bending of Concrete Columns: an Analytical Solution". *Graduate School in Concrete Structures-Fratelly Pesenti, Instituto Politécnico de Milán*, (2006).

47. J. L. Bonet, M. H. F. M. Barros, M. L. Romero, “Comparative study of analytical and numerical algorithms for designing reinforced concrete sections under biaxial bending”, *Computers and Structures* 84, 2184-2193, (2006).
48. Bernardo A. Lejano. “Investigation of Biaxial Bending of Reinforced Concrete Columns Through Fiber Method Modeling”. *Journal of Research in Science, Computing, and Engineering* 4:3, 61-73, (2007).
49. Eduardo Cortés Moreno. “Propuesta de Esbeltez Límite en Flexión Esviada de Soportes Rectangulares de Hormigón Armado”. Universidad Politécnica de Valencia, (Diciembre 2009).
50. L. Pallarés, Pedro F. Miguel, Miguel A. Fernández-Prada, “A numerical method to design reinforced concrete sections subjected to axial forces and biaxial bending based on ultimate strain limits”, *Engineering Structures*, Volume 31, 3065-3071, (Diciembre 2009).
51. Gil-Martín LM, Hernández-Montes E, Aschheim M. Optimal reinforcement of RC columns for biaxial bending. *Material and Structures* 2010;43(9):1245-56.
52. Gil-Martín LM, Aschheim M, Hernández-Montes E, Pasadas-Fernández M. Recent developments in optimal reinforcement of RC beam and column sections. *Engineering Structures* 2011;33(4): 1170-80.
53. Fermín González Blanco. “Los Huesos de Fisac. La búsqueda de la pieza ideal”, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, (2010).
54. Papanikolaou VK. Analysis of arbitrary composite sections in biaxial bending and axial load. *Computers and Structures* 2012;98-99:33-54.
55. Luis Carlos Leite, José Luis Bonet Senach, Pedro F. Miguel Sosa, Luís Pallarés Rubio. “Estudio experimental de soportes de hormigón armado sometidos a flexo-compresión con excentricidades y ángulos de esviaje desiguales en los extremos”. *Encuentro Nacional BETAU ESTRUCTURAL – BE2012 FEUP*, (Octubre 2012).
56. F. Salguero, S. Romero, S. G. Melgar, F. Prat, F. Moreno, “Stress-strain curves of concrete under monotonic uniaxial compression: a systematic review”, *Informes de la Construcción*, Vol 65, 529, 41-54 (Enero-Marzo 2013).

BIBLIOGRAFÍA

57. Cosmin G. Chiorean, "A Computer Method for Rapid Design of Composite Steel-concrete Cross-sections", *The Open Civil Engineering Journal*, 7, 1-17, (2013).
58. Sánchez-Olivares, G. Tomás, A. "Improvements in meta-heuristic algorithms for minimum cost design of reinforced concrete rectangular sections under compression and biaxial bending". *Engineering Structures*, 130, pp 162-179, (2017).
59. M. Martínez, R. Lanti, T. Echeverría, "Flexión compuesta esviada en secciones de hormigón armado doblemente simétricas. Dirección de capacidad máxima", *Informes de la Construcción*, Vol 71, 553, (Abril-Junio 2019).

Normativa

1. CEB-FIP Model Code, Comité Euro-International du Béton, (1990).
2. Comité Europeo de Normalización: "Eurocódigo 2, Proyecto de Estructuras de Hormigón", AENOR (1992).
3. Comité Europeo de Normalización: "Eurocódigo 3, Proyecto de Estructuras de Acero", AENOR (1993).
4. Japan Road Association: Specification for Highway Bridges; Part V-Seismic Design, April 2002.
5. Base Plate and Anchor Rod Design, Steel Design Guide 1, American Institute of Steel Construction (AISC), (2006).
6. Saudi Building Code. Saudi Building Code National Committee. (2007).
7. Comisión Permanente del Hormigón: "Instrucción de Hormigón Estructural.EHE-08", Ministerio de Fomento, (2008).
8. ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-08)" American Concrete Institute, (2008).
9. ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-14)" American Concrete Institute, (2014).
10. ANSI/AISC 360-16, "Specification for Structural Steel Buildings", American Institute of Steel Construction, 2016.

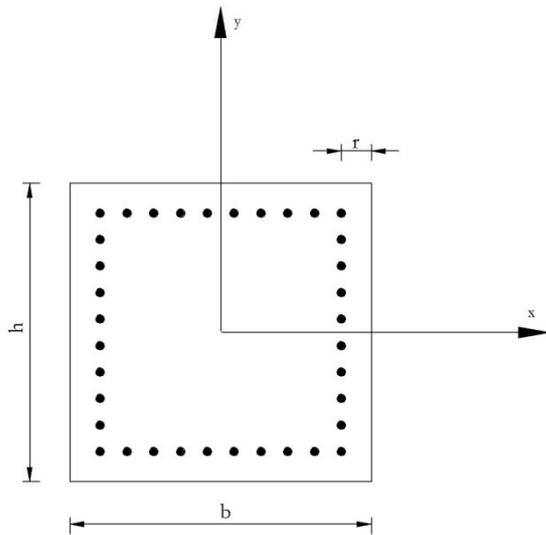
ANEXOS.

Anexo I. Desarrollo justificado de un valor de N para el modelo de F. N. Pannell.

Se expone a continuación el cálculo para un valor de N correspondiente al ábaco descrito por Pannell¹¹⁵ con el que cuantificar la diferencia máxima entre las curvas de interacción correspondientes a la superficie teórica de revolución (a partir de los momentos de agotamiento de la sección según sus ejes principales de inercia), y la curva real de agotamiento según la diagonal de la misma. El cálculo de los esfuerzos de agotamiento para las dos direcciones analizadas y todos los casos expuestos se ha llevado a cabo con el algoritmo expuesto en el capítulo 3 de esta tesis.

Se ha analizado la sección cuadrada cuyo esquema valores geométricos y mecánicos se muestran a continuación:

¹¹⁵ F. N. Pannell. Discussion of "Biaxially Loaded Reinforced Concrete Columns", ACI Journal, Proceedings, ASCE V. 85, ST6, pp. 47-54 (June 1959).



$$b = 500 \text{ mm.}$$

$$h = 500 \text{ mm.}$$

$$r = 50 \text{ mm.}$$

$$f'_c = 17.58 \text{ MPa.}$$

$$f_y = 275.79 \text{ MPa.}$$

Armadura: 36 \emptyset 13.298 mm (2.00 %).

Se ha determinado el valor de N para un axil de valor $P = 2197.50 \text{ KN}$ ($\nu = 0.50$). Para las direcciones principales de inercia de la sección y diagonal de la misma, se han obtenido los valores de agotamiento recogidos en la tabla A.1. En esta tabla se recogen los valores correspondientes al giro del eje neutro y a la profundidad del mismo referido al centro de gravedad de la sección.

φ	y_{FN}	χ	M_{ux}	M_{uy}
($^\circ$)	(mm)	(1/km)	KN·m	KN·m
0.00	-40.50	12.02	464.24	0.00
45.00	-53.26	8.60	288.54	288.54

Tabla A.1. Esfuerzos de agotamiento y coordenadas del plano de equilibrio para la dirección principal de inercia de la sección y según la diagonal de la misma.

La magnitud de los módulos de los momentos en los términos formulados por Pannell son:

$$M_{fy} = 464.24 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

$$M_d = \sqrt{288.54^2 + 288.54^2} \rightarrow M_d = 408.05 \text{ KNm}$$

ANEXOS

Finalmente, es posible determinar el valor de N :

$$N = 1 - \frac{408.05}{464.24} \rightarrow N = 0.121$$

Sobre el ábaco original publicado por Pannell, (figura A.1), se ha marcado un punto correspondiente al valor calculado N (punto rojo). El punto azul representa el valor de N que se lee del ábaco, entrando con un axil reducido $\nu = 0.50$ y un porcentaje de acero en la sección transversal de valor 2.00%.

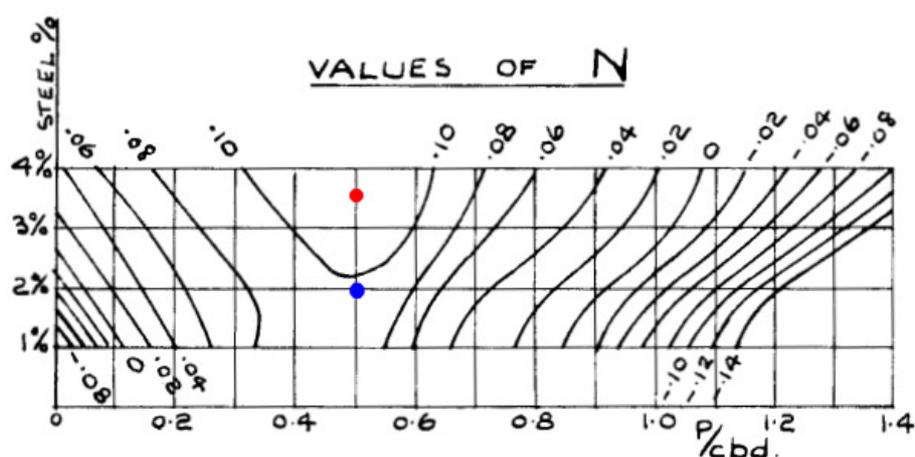


Figura A.1. Valores de N para diferentes valores de cuantía y axil sobre la sección analizada. F. N. Pannell. Discussion of "Biaxially Loaded Reinforced Concrete Columns", ACI Journal, Proceedings, ASCE V. 85, ST6, pp. 47-54 (Jun 1959).

A la luz de los resultados obtenidos, pareciera que el desvío que se logra en esta tesis entre los esfuerzos medidos según la dirección principal de inercia de la sección y sobre la diagonal de la misma, son mayores a los obtenidos por Pannell.

Anexo II. No convexidad de diagramas de interacción M_x, M_y ¹¹⁶.

Los modelos constitutivos simplificados para caracterizar el comportamiento del hormigón en compresión (parábola rectángulo, bloque rectangular), frente a modelos hiperbólicos en los que la tensión de agotamiento se alcanza para el valor de deformación última, condicionan la capacidad de la sección en agotamiento frente a sollicitaciones normales.

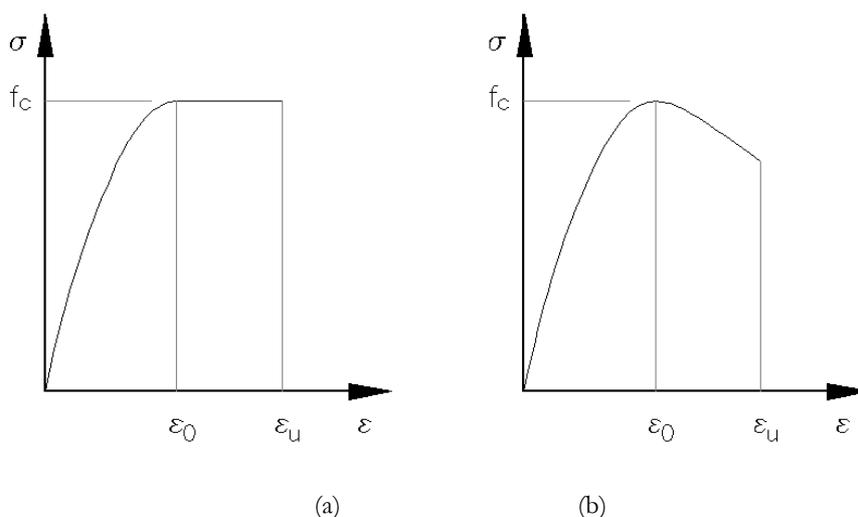


Figura A.2. (a) Ecuación tensión deformación para un modelo parábola-rectángulo. (b) Ecuación tensión deformación para un modelo hiperbólico.

Así, si se determinan diagramas de interacción (M_x, M_y) de una sección con dos ejes de simetría y un nivel de axil constante con modelos constitutivos de hormigón simplificados (figura A.2 (a)), parece verificarse la propiedad postulada por Morán¹¹⁷ respecto a la convexidad de dichos diagramas. En estas situaciones, el valor de resistencia máxima coincide con el eje principal de simetría de la sección (eje x).

¹¹⁶ M. Martínez, R. Lanti, T. Echeverría, "Flexión compuesta esviada en secciones de hormigón armado doblemente simétricas. Dirección de capacidad máxima", Informes de la Construcción, Vol 71, 533, (Enero-Marzo 2019).

¹¹⁷ Moran Cabré Francisco, "Design of reinforced concrete sections under normal loads and stresses in the ultimate state". CEB Bulletin d'Information N° 83, (Abril 1972).

ANEXOS

Sin embargo se observa que en situaciones de axiles elevados y modelos constitutivos hiperbólicos (figura A.2 (b)) en los que la tensión de agotamiento se alcanza para deformaciones alejadas de deformación de rotura, y en los que para la deformación de agotamiento se alcanza una tensión menor a la última, la capacidad máxima a flexión en concomitancia con el axil de diseño no tiene por qué situarse en la dirección que marca el aparente eje principal de inercia de la sección (eje de simetría principal), sino que presenta un cierto desvío respecto de éste. Esto implica que, en estas circunstancias, los diagramas de interacción pueden presentar concavidades en las zonas próximas a las direcciones que marcan los ejes de simetría de la sección, aparentes ejes principales de inercia.

Para observar este fenómeno, se han determinado diagramas de interacción de agotamiento para secciones con doble simetría, cuantías crecientes, y diversos niveles de axil de compresión. Cada diagrama se determina para dos modelos constitutivos de hormigones diferentes, correspondientes a los empleados por Farah y Huggins¹¹⁸.

Para los diagramas calculados se han escogido los siguientes valores característicos de hormigón y acero:

$$f_c = 30 \text{ MPa}$$

$$f_y = 400 \text{ MPa}$$

Se determinan un total de 24 diagramas de interacción correspondientes a dos escuadrías diferentes de sección transversal cuyas relaciones entre sus lados son $\frac{h}{b} = 1$, y $\frac{h}{b} = 2$. Para cada una de estas secciones se analizan tres cuantías diferentes de armadura longitudinal de valores $\rho_1 = 0.30$, $\rho_2 = 0.40$, $\rho_3 = 0.50$, y dos axiles reducidos de valores $\nu_1 = 0.85$, $\nu_2 = 0.95$. En todos los casos se ha considerado un recubrimiento mecánico de valor $r = 0.10 b$.

¹¹⁸ Anis Farah and M. W. Huggins. "Analysis of Reinforced Concrete Columns Subjected to Longitudinal Load and Biaxial Bending". ACI Journal, Proceedings, 66, 569-575, (July 1969).

La armadura se ha supuesto distribuida en el perímetro de la sección, y con objeto de poder llevar a cabo la integración de las tensiones se han considerado un total de 36 elementos de igual superficie. Para la simulación de la zona de hormigón se ha dividido la sección en un total de 625 elementos de igual superficie, distribuidos según una matriz de 25x25. La figura A.3 muestra el esquema de la sección transversal analizada.

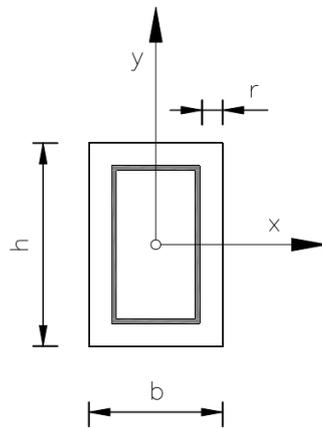


Figura A.3. Esquema de la sección transversal analizada.

Para cada curva de interacción determinada y representada en la figura A.3, se han calculado un total de 181 puntos correspondientes a un espectro de giros del eje neutro que varía desde 0°-90°. Esto equivale a la obtención de una serie de planos de agotamiento cuyas trazas (fibras neutras) en dos puntos consecutivos difieren 0.50°.

Para evitar dotar de una capacidad no real a la sección, la tensión de cada elemento de acero se ha modificado para simular el área de hormigón desplazada reduciendo su valor según la expresión [A.1], para los elementos de acero comprimidos.

$$\sigma_{s,i} = \frac{f_y}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_y} + 1\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_y} - 1\right)^2} \right) - f_c' [k_1 \varepsilon + k_2 \varepsilon^2 + k_3 \varepsilon^3 + k_4 \varepsilon^4] \quad [A.1]$$

ANEXOS

Cada uno de los puntos de los diagramas se ha calculado mediante la imposición a priori de cuatro condiciones:

- Se ha fijado el rumbo del eje neutro (φ).
- Se ha impuesto que el agotamiento de la sección se alcanza por compresión en el hormigón en la fibra extrema, lo cual implica dotar de ductilidad ilimitada al acero. Desde un punto de vista operativo es preciso acotar el valor de deformación para describir la ecuación constitutiva, y este se ha fijado en $\varepsilon_{yu} = 0.020$. Se verifica que en ningún plano de agotamiento determinado se alcanza dicho valor. Este modelo es el empleado por la ACI-318¹¹⁹.
- No se han empleado coeficientes de minoración en los materiales.
- No se han empleado coeficientes de minoración de la capacidad de la sección.

La figuras A.4 muestra los 24 diagramas de interacción determinados.

¹¹⁹ ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Structural Concrete(ACI 318-14)" American Concrete Institute, (2014).

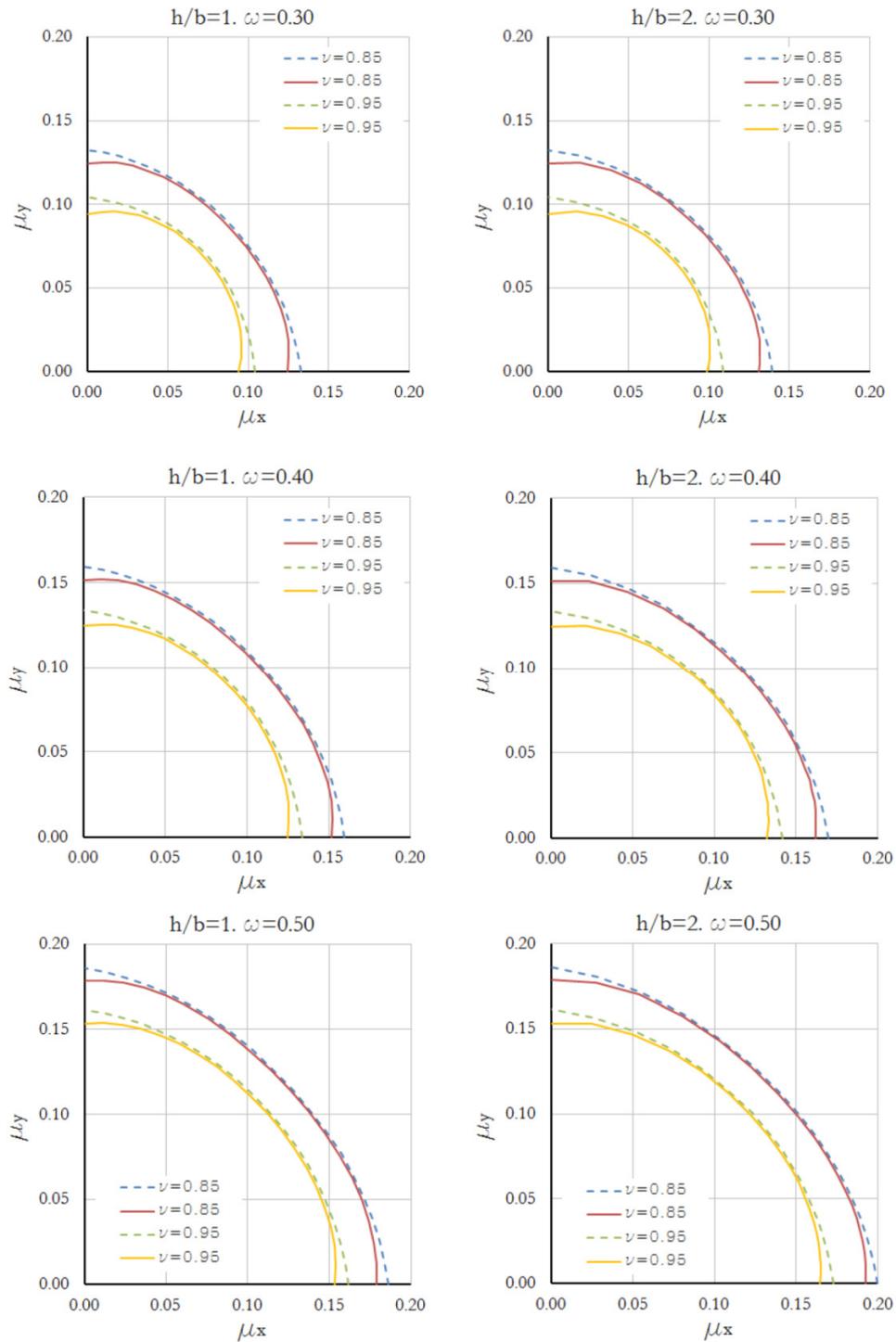


Figura A.4. Diagramas de interacción determinados para las secciones descritas en la tabla 12.1. Línea continua denota modelo hiperbólico, línea discontinua denota modelo parábola-rectángulo. Autor.

ANEXOS

Para los 24 casos analizados se ha determinado el valor máximo de la resultante del momento resistente de la sección como composición vectorial de las componentes referidas a los ejes de simetría según la expresión [A.2] (en términos adimensionales), así como el giro para el que se ha encontrado dicho valor máximo. Como cabía esperar, para todas las secciones en las que se ha empleado un modelo constitutivo parábola-rectángulo, el valor máximo se ha encontrado para el eje de simetría de mayor inercia, eje x.

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \quad [A.2]$$

En la tabla A.2 se muestran los valores significativos de los diagramas calculados cuyos significados se detallan seguidamente:

$\frac{h}{b}$: Relación entre el canto y la base de la sección transversal.

ρ : Cuantía mecánica.

Modelo Hormigón: tipo de diagrama tensión deformación empleado.

ν : Axil característico reducido.

$\mu(\alpha = 0^\circ)$: Resultante reducida del vector momento resistente referido al eje x de la sección.

$\mu(\alpha = 90^\circ)$: Resultante reducida del vector momento resistente referido al eje y de la sección.

\emptyset : Ángulo de resistencia máxima de la sección referido al eje principal de simetría de la sección.

$\mu(\alpha = \emptyset)$: Resultante reducida del vector momento resistente para la dirección de resistencia máxima de la sección (\emptyset).

$\Delta\mu_x(\%)$: diferencia en porcentaje entre las resultantes de momentos resistentes referidos al eje x de dos secciones idénticas para los dos modelos constitutivos analizados.

$\frac{h}{b}$	ω	Modelo Hormigón	ν	μ ($\alpha = 0^\circ$)	μ ($\alpha = 90^\circ$)	ϕ ($^\circ$)	μ ($\alpha = \phi$)	$\Delta\mu_x$ (%)
1	0.30	Parabólico	0.85	0.133	0.133	0.00	0.133	6.767
1	0.30	Hiperbólico	0.85	0.124	0.124	13.00	0.126	
1	0.30	Parabólico	0.95	0.104	0.104	0.00	0.104	9.615
1	0.30	Hiperbólico	0.95	0.094	0.094	40.00	0.100	
1	0.40	Parabólico	0.85	0.159	0.159	0.00	0.159	4.403
1	0.40	Hiperbólico	0.85	0.152	0.152	10.00	0.153	
1	0.40	Parabólico	0.95	0.134	0.134	0.00	0.134	6.716
1	0.40	Hiperbólico	0.95	0.125	0.125	16.50	0.127	
1	0.50	Parabólico	0.85	0.186	0.186	0.00	0.186	3.763
1	0.50	Hiperbólico	0.85	0.179	0.179	3.00	0.179	
1	0.50	Parabólico	0.95	0.161	0.161	0.00	0.161	4.969
1	0.50	Hiperbólico	0.95	0.153	0.153	8.50	0.155	
2	0.30	Parabólico	0.85	0.139	0.133	0.00	0.139	5.755
2	0.30	Hiperbólico	0.85	0.131	0.124	19.00	0.133	
2	0.30	Parabólico	0.95	0.109	0.104	0.00	0.109	9.174
2	0.30	Hiperbólico	0.95	0.099	0.094	50.00	0.104	
2	0.40	Parabólico	0.85	0.170	0.159	0.00	0.170	4.706
2	0.40	Hiperbólico	0.85	0.162	0.152	13.50	0.163	
2	0.40	Parabólico	0.95	0.141	0.134	0.00	0.141	6.383
2	0.40	Hiperbólico	0.95	0.132	0.125	21.50	0.134	
2	0.50	Parabólico	0.85	0.200	0.186	0.00	0.200	4.000
2	0.50	Hiperbólico	0.85	0.192	0.179	10.00	0.193	
2	0.50	Parabólico	0.95	0.173	0.161	0.00	0.173	5.202
2	0.50	Hiperbólico	0.95	0.164	0.153	16.50	0.165	

Tabla A.2. Valores significativos calculados para los 24 casos analizados.

Como puede apreciarse en los valores de la tabla A.2, para las secciones en las que se ha empleado un modelo constitutivo hiperbólico en el hormigón, el valor de resistencia máximo de la sección no coincide con la dirección del eje principal de simetría, y en todos los casos el valor de la resultante de momento resistente referido al eje de simetría principal (eje x) es inferior al

ANEXOS

valor de la resultante de momento resistente según dicha dirección para un modelo constitutivo tipo parábola-rectángulo.

Este hecho se produce debido a que en situaciones de axiles elevados, empleando un modelo hiperbólico, la tensión máxima en la sección transversal no coincide con la fibra extrema ya que en esa posición ha de lograrse la deformación última ε_{cu} , y esto provoca que el baricentro de la resultante del bloque comprimido de hormigón se aproxime a la posición de la fibra neutra reduciéndose el brazo mecánico y provocando que el momento resultante se reduzca. En la figura A.5 se muestra el perfil de tensiones en el hormigón sobre la sección analizada $\frac{h}{b} = 1$, $\omega = 0.30$, $\nu = 0.95$, para los dos modelos constitutivos empleados, y $500 \times 500 \text{ mm}^2$ de dimensiones, situación en la que se ha obtenido la mayor diferencia entre los momentos resistentes de la sección referidos a su eje principal de simetría (9.615 %). Es posible apreciar como el brazo mecánico de la sección en la figura A.5 (b) es menor que en la figura A.5 (a). También se observa como en la zona de máxima deformación (fibra superior de la figura A.5 (b)), el perfil de tensiones disminuye de valor, haciendo compatible la tensión según el diagrama tensión deformación hiperbólico mostrado en la figura A.2 (b).

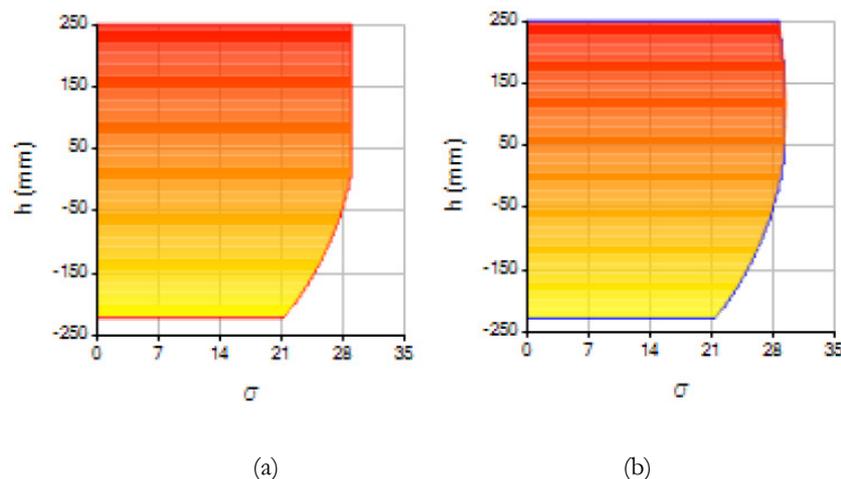


Figura A.5. Perfil de tensiones de la sección analizada $\frac{h}{b} = 1$, $\rho = 0.30$, $\nu = 0.95$, para los dos modelos constitutivos empleados, y $500 \times 500 \text{ mm}^2$ de dimensiones analizada según los dos modelos constitutivos descritos.

(a) Ecuación parábola-rectángulo. (b), Ecuación hiperbólica. Autor.

CONCLUSIONES.

A la luz de los resultados expuestos en la tabla A.2, es posible realizar las siguientes afirmaciones:

A la luz de los resultados obtenidos, es posible realizar las siguientes afirmaciones:

- En secciones de hormigón armado con dos ejes de simetría no es posible afirmar que el diagrama de interacción de agotamiento sea convexo en toda su dominio, y esta afirmación es cierta al menos en situaciones en las que se empleen modelos constitutivos de hormigón en los que la deformación en rotura tenga asociados valores de tensión inferiores a los máximos
- El eje principal de simetría de una sección rectangular de hormigón armado no tienen necesariamente por qué ser el eje de mayor inercia de la sección, y como consecuencia de este hecho, el valor resistente máximo de la sección no necesariamente se encuentra según la dirección esperada (eje x).
- El giro de desvío entre el eje de máxima resistencia y el eje principal de simetría de una sección de hormigón armado doblemente simétrica aumenta al tiempo que se incrementa el axil.
- La diferencia de capacidad de la sección a flexión compuesta respecto al eje principal de simetría de la sección para los modelos parábola-rectángulo e hiperbólico aumenta al tiempo que disminuye la cuantía de armadura. Expresado en otros términos es posible afirmar que para cuantías bajas, la reducción de la capacidad de la sección en flexión compuesta recta respecto al eje principal de simetría de la sección aumenta.
- El giro de desvío entre el eje de resistencia máxima y el eje principal de simetría de hormigón armado doblemente simétrica, aumenta al tiempo que la diferencia entre la tensión máxima del hormigón en compresión y la tensión para la deformación de agotamiento se incrementa.
- El empleo de modelos simplificados para la caracterización del hormigón en compresión conduce, en secciones doblemente simétricas de hormigón armado y axiles elevados, a

ANEXOS

otorgar una resistencia mayor a la real a la sección frente a esfuerzos de flexión compuesta recta.

- No se descarta la hipótesis de convexidad en diagramas de interacción de secciones de hormigón armado con doble simetría para modelos constitutivos de hormigón en los que la tensión máxima se produzca para la deformación de agotamiento. Expresado en otros términos no es posible afirmar que los ejes principales de inercia no coincidan con los ejes de simetría de una sección cuando se emplean modelos constitutivos para la descripción del hormigón del tipo parábola-rectángulo o rectangulares (hipótesis de Whitney¹²⁰).

¹²⁰ Whitney, Charles S and Cohen, Edward, “Guide for Ultimate Strength Design of Reinforced Concrete”, ACI Journal, V.28, N° 5, Proceedings V. 53, 455-490, (November 1956).

