

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ

Escuela Politécnica Superior: Grado en Ingeniería Informática



Trabajo de Fin de Grado:

ESTUDIO DE LIMITACIONES TEÓRICAS Y
APROXIMACIONES COMPUTACIONALES AL PROBLEMA
DEL COLOREADO ESPECTRAL DE GRAFOS

Autora: Ana Álvarez Suárez

Tutor: Iván Marsá Maestre
Cotutor: David Orden Martín

TRIBUNAL:

Presidente: Jose Manuel Giménez Guzmán

Vocal 1: David Orden Martín

Vocal 2: Iván Marsá Maestrere

FECHA: 11 de julio de 2016

*Dedicado a mi madre,
matemática en la sombra.
Y, por supuesto,
a Nietzsche.*

Agradecimientos

A todos aquellos que soportan mi caos, especialmente mis padres e Illán (mención aparte merece tu destreza con las capas), gracias por no tirar a la basura las montañas de papeles y bocetos de grafos esparcidos por las mesas de casa, y por no enfadaros demasiado si os decía buenos días a las 4 de la tarde.

A mis tutores, Iván y David, gracias por haberme ayudado a poder hacer un TFG un poco distinto de lo habitual para los escritores de código, aun después de la serie de catastróficas desdichas oxfordiana, por haber aguantado mis problemas de fechas, y, en general, por toda la paciente ayuda y explicaciones dadas.

Índice

Contenidos	3
Lista de figuras	4
Lista de tablas	6
1. Resumen	7
2. Abstract	8
3. Resumen extendido	9
4. Introducción	11
4.1. Teoría de grafos. Definiciones.	11
4.2. El problema de la asignación de frecuencias	12
4.3. El problema del espectro de umbrales y de la coloración del es- pectro cromático	14
4.3.1. El 'Threshold Spectrum Coloring problem' (TSC)	15
4.3.2. El 'Chromatic Spectrum Coloring problem' (CSC)	15
4.3.3. Objetivo	16
5. Cotas para casos particulares de grafos	17
5.1. Triangulaciones	17
5.1.1. Mallas triangulares	18

5.1.2. TSC	18
5.1.3. CSC	26
5.2. Triangulaciones de un ciclo	30
5.3. Cuadrangulaciones	38
5.4. Pseudo-triangulaciones	39
5.5. Malla hexagonal	43
6. Comprobación experimental de la cota para triangulaciones de un ciclo mezcla	44
6.1. Resultados experimentales	45
7. Conclusión	50
8. Anexo	54

Índice de figuras

1.	Coloreado de malla triangular	18
2.	Posibles vértices interiores	19
3.	Proceso hasta alcanzar interferencia mínima	20
4.	Consecuencias de una arista monocromática	22
5.	2-Coloreado de malla triangular	27
6.	Coloreado con $k = 4$	28
7.	Coloreado con $k = 4$	29
8.	Zig-zag (izquierda) y compuesta por orejas (derecha) con sendos árboles complementarios	31
9.	Mezcla (izquierda) y abanico o fan (derecha) con sendos árboles complementarios	31
10.	Diferentes coloraciones para fan	33
11.	Coloreados de zig-zag	34
12.	Grados mayores.	35
13.	Coloreado de cuadrangulación	38
14.	Pseudo-triángulo de 8 lados. Fuente: Cifras y Teclas	39
15.	Triangulación de grado impar y vértice puntiagudo	40
16.	4-PPT con envolvente triangular	41
17.	Coloreado de malla hexagonal	43
18.	Comparación de resultados entre los tres métodos de optimización principales	46

19.	Comparación de SATUR con las cotas artificiales	47
20.	Comparación para la matriz con los valores señalados	48
21.	Comparación para la matriz con los valores señalados	48
22.	Comparación para la matriz con los valores señalados	49
23.	Comparación para la matriz con los valores señalados	49

Índice de cuadros

1.	Tabla de resultados	45
2.	Error cota general	54
3.	Error cota mejorada	55
4.	Ejemplo obtención medias de la cota mejorada	59

1. Resumen

Dentro de los problemas de coloración de grafos, muchos existen en respuesta a una situación práctica. Para el caso de la asignación de canales en IEEE 802.11, se añade al planteamiento una matriz de distancias o “interferencias” entre los colores, lo cual da lugar al problema del espectro de umbrales, que fija el número de colores disponible y minimiza la máxima interferencia en un vértice, y a su complementario, el problema del coloreado espectral.

De ambos se conocen cotas superiores generales pero amplias. En este trabajo, se han mejorado dichas cotas para algunos tipos de grafos, utilizando herramientas teóricas y computacionales para su comprobación.

Palabras clave: coloreado de grafos, cotas superiores TSC, CSC, interferencia, número cromático, asignación de frecuencias, asignación de canales de WiFi, triangulaciones, cuadrangulaciones, pseudotriangulaciones, malla hexagonal, grafos bipartidos, TSC-DSATUR, ALHSO, ALPSO, NetworkX.

2. Abstract

In the field of graph coloring, most problems arise in response to a practical situation. For the frequency assignment problem in IEEE 802.11 (WiFi), a distance or “interference” matrix is added, which leads to the Threshold Spectrum Coloring Problem (TSC), given a fixed number of available colors, minimizes maximum interference in a vertex, and its complementary, the Chromatic Spectrum Coloring problem (CSC).

General upper bounds are known for both of them. In this paper, these bounds are improved for different types of graphs, using theoretical and computational tools to prove them.

Keywords: graph coloring, TSC upper bound, CSC, interference, chromatic number, frequency assignment, WiFi channel assignment, triangulations, pseudo-triangulations, square graph, hexagonal graph, bipartite graph, TSC-DSATUR, ALHSO, ALPSO, NetworkX.

3. Resumen extendido

El presente trabajo comienza explicando los conceptos en torno a los que gira. La teoría grafos, pares $G = (V, E)$ de vértices y aristas que los unen, el problema de la coloración o etiquetado con colores de sus vértices, sus diferentes tipos y aplicaciones. Una de éstas es la resolución de problemas de asignación de frecuencias en conexiones inalámbricas. Centrándose en las redes WiFi y la interferencia como su mayor obstáculo, surge el problema del espectro de umbrales, que fija el número de colores disponible y minimiza la máxima interferencia en un vértice, y a su complementario, el problema del coloreado espectral. Dicha interferencia está definida como una matriz de distancias no-negativas entre colores. Para la máxima interferencia o umbral y para el mínimo número de colores existen cotas superiores generales para todo tipo de grafos.

Con una motivación práctica, el desarrollo del trabajo pretende mejorar dichas cotas para tipos particulares de grafos. Se comienza por el estudio de las mallas triangulares, en las cuales se ve la importancia del número cromático del grafo y de la forma de la matriz de interferencias en el establecimiento de la cota. Se encuentra un coloreado general óptimo del cual se deriva la expresión de la nueva cota, siempre probando que es mejor que la general, para el umbral o interferencia máxima y que ayuda a resolver el problema del coloreado espectral estableciendo un número de colores a partir del cual la interferencia sólo aumenta. Por su carácter de grafos bipartidos, para las cuadrangulaciones y mallas hexagonales se encuentran también sencillas cotas mejoradas. Otros casos necesitan estudios más extensos, como pueden ser las triangulaciones de un ciclo, las cuales son divididas en tipos para los cuales se obtienen expresiones en las que los conceptos de secuencia de grados y de árbol asociado son determinante.

La cota superior para la interferencia que más casos engloba de las obtenidas es aquella que surge de las triangulaciones de un ciclo (esto es, grafos formados por polígonos de cualquier tamaño cuyos vértices se unen interiormente por aristas que no pueden cruzarse) de tipo mezcla, y que es aplicable aunque no tan buena también para pseudotriangulaciones y triangulaciones generales. En ella, se elige el vértice de mayor o tercer mayor grado como aquel que produce una interferencia máxima. Se muestra aquí un extracto de la expresión, en unas condiciones sencillas: matriz de interferencias que decrece exponencialmente con la distancia d , y cuyo tamaño k es un número impar.

Cuando el grado mayor (g_1) no es lo suficientemente grande comparado con el tercero (g_3) para ser el más influyente en el umbral del grafo, es decir, cuando $g_1 \leq g_3 \frac{2}{1 + \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}}}$, entonces la cota T para éste es:

$$T_k \leq g_3 \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}}$$

Mientras que si es lo suficientemente grande:

$$T'_k \leq \lceil \frac{g_1}{2} \rceil \left(\frac{1}{d^{k-1}} \right) + \lfloor \frac{g_1}{2} \rfloor \left(\frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} \right)$$

Este resultado en particular es elegido para, en la última parte del trabajo, ser comprobado además de teóricamente computacionalmente. Se utilizan tres algoritmos optimizadores distintos para calcular computacionalmente la interferencia máxima o umbral en una serie de grafos aleatorios de tipo triangulaciones de un ciclo mezcladas con diferentes tamaños y matrices. De esos tres, se considera sólo el que da resultados de mayor calidad, de nombre TSC-DSATUR, y se compara con los resultados obtenidos para esa serie de grafos utilizando la cota general original que se pretende mejorar y la nueva mejorada. Los resultados de esta comparación muestran como la cota mejorada coincide con un error de menos del 0,02 con los resultados de interferencia computacionales obtenidos del TSC-DSATUR, mientras que la cota general es siempre más de 10 veces mayor que esos valores.

Estudio de limitaciones teóricas y aproximaciones computacionales al problema del coloreado espectral de grafos

Ana Álvarez Suárez

Junio 2016

4. Introducción

4.1. Teoría de grafos. Definiciones.

La teoría de grafos es una de las ramas de las matemáticas que más relación tiene con las ciencias de la computación. Enmarcada en la matemática discreta, se encarga del estudio de los grafos.

Un grafo G se define [9] como un par $G = (V, E)$, donde V es un conjunto finito de elementos denominados vértices o nodos y E es un subconjunto de pares no ordenados de vértices y que reciben el nombre de aristas, lados o arcos. Si $V = v_1, \dots, v_n$, los elementos de E se representan de la forma $\{v_i, v_j\}$, donde $i \neq j$, en caso contrario hablaríamos de la existencia de lazos y aristas múltiples, que aparecen en los multigrafos. Llamamos $V(G)$ al conjunto de vértices del grafo y $E(G)$ al conjunto de aristas del grafo G . En este trabajo consideraremos grafos no dirigidos, si no hablaríamos de pares ordenados de vértices.

Se puede decir que la idea de grafo surgió con Euler y el modelado del famoso problema de los puentes de Königsberg, a mediados del siglo XVIII, pero su auge no llegó hasta principios del siglo pasado con la informática, ya que este tipo de representación es idónea para trabajar computacionalmente con ella como tipo abstracto de datos.

Los grafos tienen múltiples aplicaciones, ya que sirven para modelar efi-

cientemente problemas de relaciones, en campos como la Física, la Biología, la Sociología o los Sistemas de Información. En computación, se utilizan para representación de redes, datos, flujos y otros.

Según sus propiedades, podemos clasificar a los grafos en varios grupos. A los tipos de grafos habitualmente se les llama familias de grafos, y exploraremos algunas en el transcurso de este texto. Algunos tipos generales de grafos son los grafos conexos, simples, multigrafos, pseudografos, regulares, completos... [15]

Dentro de la teoría de grafos la coloración de grafos [14] (un caso particular de etiquetado) es uno de los principales problemas y resulta de interés tanto para investigadores del campo de las matemáticas como del campo de la ingeniería, ya que no sólo supone un desafío teórico sino que posee múltiples aplicaciones, sirviendo de modelo para muchas situaciones prácticas. El problema de coloración más común es la k -coloración propia de vértices, el etiquetado de cada vértice de un grafo con un color tomado de entre k colores, de manera que dos vértices que compartan arista tengan diferentes colores. El menor número de colores necesarios para colorear un grafo es el número cromático de éste y sobre él se conocen expresiones exactas y cotas superiores generales y para distintos tipos de grafos.

Pero no sólo existe ese tipo de coloreado. Existe una gran cantidad de variaciones, comenzando por aquella en el que se colorean aristas y no vértices, como en la Teoría de Ramsey. Pueden cambiar las condiciones de coloreado, por ejemplo, la coloración en distancia [18], en la cual dos vértices a una cierta distancia d no pueden tener el mismo color, la coloración λ [5], en la que vértices adyacentes deben tener colores que tengan una diferencia de más de 2 y vértices a distancia mayor que 2 deben tener diferentes colores... Tampoco tiene por qué ser propia la coloración, puede ocurrir que las aristas monocromáticas sean válidas en la búsqueda de otro objetivo.

En teoría de grafos, normalmente los problemas aparecen para resolver una situación práctica real. Para modelar situaciones complejas se pueden añadir diferentes restricciones.

4.2. El problema de la asignación de frecuencias

Una de las situaciones más estudiadas y de mayor interés aparece en el campo de las comunicaciones inalámbricas (con aplicaciones en radio, telefonía, TV, militares...). El problema de la asignación de frecuencias [1] surgió con la aparición de éstas en los años 60. Cada entorno tiene asociadas unas características particulares que definen los modelos. Los criterios comunes a todas son la interferencia, la disponibilidad de frecuencias y la optimización, con funciones

objetivo.

En las comunicaciones inalámbricas, una serie de conexiones o antenas tiene que tener asignadas frecuencias que permitan la transmisión de datos, las cuales provienen de un conjunto o rango de frecuencias previamente establecido, que puede variar entre conexiones. Normalmente, para radio y telefonía por ejemplo, la disponibilidad de frecuencias está regulada localmente por el gobierno y universalmente por la Unión Internacional de Telecomunicaciones (ITU).

Entre las frecuencias asignadas a dos conexiones puede existir interferencia, lo cual ocurre cuando están cerca en el espectro electromagnético, o por el efecto Doppler, y esto sólo ocurre si las conexiones están lo suficientemente cerca en distancia.

Nos centraremos en la Asignación de Canales Fijos (FCA), aquel en el que las conexiones se mantienen, frente a los Dinámicos (DCA). Muy pronto se encontró [12] que una de las mejores aproximaciones al problema era utilizando técnicas de coloración de grafos y combinatoria: multitud de modelos y nuevos problemas de coloración aparecieron a raíz de aquello, entre ellos algunos de los anteriormente mencionados.

Tratar con la interferencia es el principal objetivo del modelo de Araujo et al. [3], uno de los modelos que más se aproximan ya al que vamos a estudiar en este trabajo, que utiliza una función w para calcular pesos asociados a cada color que representan la interferencia o ruido entre dos puntos. Considera el problema de la coloración ponderada impropia, que busca el número de colores necesario para cumplir un objetivo de interferencia, y su complementario, que para un número de colores calcula la mínima interferencia posible.

Dentro de las comunicaciones inalámbricas, un campo actualmente en auge es el relativo a las redes WIFI IEEE 802.11 (abreviado WiFi). De uso cada vez más común, es una tecnología cada vez más barata y útil, cuyo principal problema es la excesiva interferencia, que afecta directamente al rendimiento de la conexión [4].

La WiFi, al contrario que las demás tecnologías mencionadas, es un medio compartido que otorga franjas al mejor postor en frecuencias sin licencia entre 2,4 y 5GHz. Cuando un cliente escucha otra señal cualquiera en su entorno de frecuencias, pospone la transmisión, y, de suceder la interferencia en plena transmisión, ocurre pérdida de paquetes. Al ocurrir esto, lo normal es que el sistema trate de buscar un canal mejor, que minimice la interferencia, al igual que la elige para los nuevos clientes. Con el aumento de uso de la tecnología WiFi, la idea original de espaciar en el espectro lo más posible puntos de acceso cercanos es impracticable.

Como hemos dicho, el problema de la asignación de canales de frecuencia a cada punto de acceso WiFi para un cierto tiempo busca minimizar dicha interferencia. En WiFi, ya de por sí muchos canales tienen frecuencias que se superponen entre sí. Sin embargo, no se puede utilizar sólo aquellas que no se superponen, puesto que al ser los canales más típicos y haber tantos puntos de acceso WiFi, podría haber más fuentes de superposición.

Los administradores de estas redes empiezan a tener a su disposición aplicaciones que tratan de ayudarles en la gestión de la interferencia. Para minimizar el problema, al existir un número finito de canales, se podría mantener en memoria una relación de interferencias y buscar la disposición adecuada de canales [16].

4.3. El problema del espectro de umbrales y de la coloración del espectro cromático

Si se añade al planteamiento matemático una matriz de distancias no-negativas, “interferencias”, entre cada par de colores, nos encontramos con los siguientes problemas para David Orden et al. [13]: el problema del espectro de umbrales (‘Threshold Spectrum Coloring problem’, TSC por sus siglas en inglés a partir de ahora) fija el número de colores disponible y pretende minimizar el umbral de interferencia, es decir, la máxima interferencia en los vértice, mientras que el problema del coloreado del espectro cromático (‘Chromatic Spectrum Coloring problem’, CSC por sus siglas en inglés) fija un umbral ϵ e intenta minimizar el número de colores para los cuales respetar dicho umbral es posible. David Orden et al. prueban que ambos son NP-complejos y encuentra expresiones para las cotas superiores del menor umbral en el TSC y del menor número de colores en el CSC.

El modelo que usaremos, motivado como hemos dicho por la asignación de canales WiFi, considera un grafo no dirigido $G = (V, E)$, un espectro de colores $S = \{c_1, \dots, c_s\}$ y una matriz, simétrica al ser no dirigido, de interferencias $W_{i,j} = W(c_i, c_j)$.

Para un posible coloreado c , la interferencia en un vértice es la suma de las interferencias de sus vecinos:

$$I_v(G, W, c) = \sum_{u \in N(v)} W(c(u), c(v)) \quad (1)$$

4.3.1. El 'Threshold Spectrum Coloring problem' (TSC)

Una definición más formal del problema del espectro de umbrales (TSC), es la siguiente. Dado un número fijo de colores k , se pretende encontrar el mínimo umbral $t \in \mathbb{R}^+$, donde t es la mayor interferencia de un vértice del grafo, tal que (G, W) admite un k -coloreado c . Esa t es llamada umbral mínimo k -cromático, $T_k(G, W)$. Para $W = I$ nos encontramos con un problema clásico de coloreado.

Gracias al concepto de coloreado W -balanceado, se obtiene [13] una expresión general para una cota superior de dicho $T_k(G, W)$, la cual es lo más ajustada posible. Depende de la norma natural de la matriz, que es la máxima entre las sumas de los elementos de una de las filas o columnas de la matriz, del máximo grado (número de aristas incidentes al vértice) del grafo e inversamente del número de colores dado:

$$T_k(G, W) \leq \frac{\Delta(G)\|W\|_\infty}{k} \quad (2)$$

Donde $\Delta(G)$ es el máximo grado del grafo y $\|W\|_\infty$ es la norma natural de la matriz W .

4.3.2. El 'Chromatic Spectrum Coloring problem' (CSC)

En el problema del coloreado del espectro cromático (CSC desde ahora), dado un umbral t fijado y dejando que el espectro de colores tenga un tamaño igual al número de vértices, el objetivo es encontrar el mínimo número de colores $k \in \mathbb{N}^+$ tal que (G, W) admite un k -coloreado c en el cual la interferencia de sus vértices es como mucho t . A dicho k se le llama el número cromático de t -interferencia, y se escribe como χ_k .

Gracias a la cota anterior, se obtiene también una cota superior general para el número cromático de t -interferencia. Para t múltiplo del máximo común divisor de W , se obtiene la siguiente expresión:

$$\chi_k(G, W) \leq \frac{\Delta(G)\|W\|_\infty + \gcd(W)}{t + \gcd(W)} \quad (3)$$

4.3.3. Objetivo

Pese al logro matemático que suponen dichas cotas, al ser generales en la práctica no son lo suficientemente cercanas a los valores reales.

Los grafos que la disposición de los puntos de acceso y las interferencias entre ellos producen son habitualmente grafos de una complejidad no excesiva. Las formas en malla, por ejemplo son comunes en casos prácticos.

A continuación se estudiará la situación para diferentes tipos de grafos de interés, buscando cotas más cercanas al valor real gracias a su particular disposición, o incluso expresiones exactas, que ayuden a la aplicación real del modelo.

5. Cotas para casos particulares de grafos

5.1. Triangulaciones

Se llama triangulaciones a los grafos planos maximales, es decir, sin cruces. Al no tener una $\Delta(G)$ limitada o predecible, resultan más fáciles de estudiar si reconocemos en ellos distintos subtipos.

Un ejemplo sencillo de triangulaciones son las mallas triangulares, las cuales tienen una estructura definida, y en ellas gracias a eso podemos buscar cotas para los dos problemas anteriormente descritos, el TSC y el CSC, mejores que las generales. También estudiaremos las posibles triangulaciones de un ciclo, de mayor complejidad.

La forma de la matriz de interferencias W determina la bondad del umbral de interferencia de un coloreado, pues es la que otorga pesos a sus aristas. Estudiando matrices aleatorias cualesquiera sería difícil mejorar la cota máxima general que ya tenemos, al no poder mejorar la norma de la matriz en la expresión general, así que estudiaremos matrices de interferencias en las que partiendo de un valor monocromático máximo (normalizable a 1), la interferencia decae simétricamente con la distancia entre colores. Éste es un modelo aplicable a multitud de casos prácticos reales.

Es interesante añadir que las matrices en las que las interferencias crecen en lugar de decaer tienen una solución trivial que hace el estudio de su coloreado y umbral correspondiente innecesario, puesto que si el menor valor de la interferencia es el monocromático, al tomar ese único color para todo el grafo minimizaríamos siempre el umbral y el número de colores.

Los casos más interesantes son aquellos en los que la matriz decrece de forma conocida. Aquí vemos una matriz de interferencias que decrece exponencialmente, con $k, d \in \mathbb{N}$. Se representa el color intermedio para k impar.

$$W_{exp} = \begin{matrix} & \begin{matrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{\lceil \frac{k}{2} \rceil} & \dots & c_k \end{matrix} \\ \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_{\lceil \frac{k}{2} \rceil} \\ \dots \\ c_k \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{d} & & \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} & & \frac{1}{d^{k-1}} \\ \frac{1}{d} & 1 & & \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1}} & & \frac{1}{d^{k-2}} \\ & & \dots & 1 & & \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} \\ \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} & \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1}} & & & & \\ & & & & & \\ \frac{1}{d^{k-1}} & \frac{1}{d^{k-2}} & & \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} & & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (4)$$

5.1.1. Mallas triangulares

Como hemos dicho, la estructura fija de este tipo de grafos facilita la obtención de cotas para ellos. Consideramos mallas triangulares aquellos grafos con la forma del de la imagen 1, grafos en los que para un número de vértices $n \geq 10$ nos encontramos con tres tipos de vértices: los extremos o vértices, con grado $\delta(G) = 2$, los demás exteriores de 4, y los interiores, que definirán el mayor valor umbral posible, de $\delta(G) = 6$.

5.1.2. TSC

Para la matriz exponencialmente decreciente, en una malla triangular cualquier combinación de colores es mejor que el caso monocromático.

Para mostrar eso, partamos del mejor coloreado en umbral (es decir, aquel que da un menor umbral) posible sin vértices monocromáticos. El mejor coloreado no monocromático sería aquel que más veces utilice los colores que menor interferencia producen. Como el número cromático de este tipo de grafo es 3 [19], inicialmente podríamos decidir utilizar sólo tres colores, e intuitivamente estos podrían ser los dos que menor interferencia produzcan con un tercero de la matriz de interferencias.

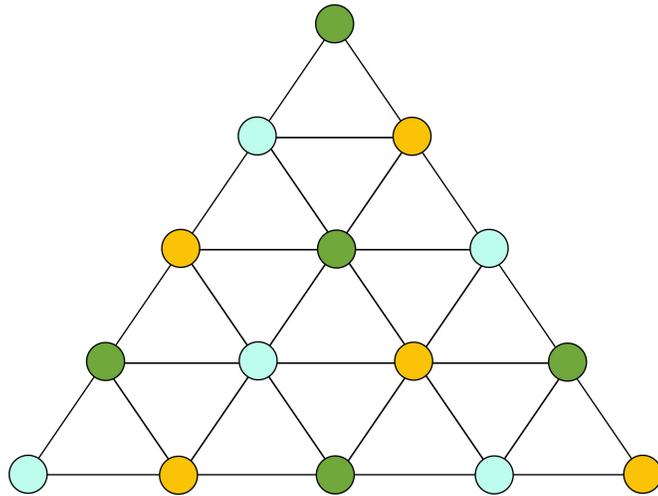


Figura 1: Coloreado de malla triangular

Evitando pues aristas monocromáticas, si consideramos $k = 3$, una elección inicial para dos vértices adyacentes determinará el coloreado del resto del grafo, como se ve en la Figura 1. En cada triángulo dos vértices determinarán el de su opuesto.

Llamamos vértice dominante (o vértices dominantes si varios producen la misma) a aquel que produce la interferencia más alta y que es por tanto el que define el umbral del grafo. Parece inteligente suponer que en una malla triangular con más de 3 vértices interiores (si utilizamos 3 colores para el coloreado, 3 vértices interiores, ya que, de haber menos, no habría necesidad de utilizar las peores opciones), su vértice dominante será el vértice interior, que es el tipo de vértice de mayor grado, que mayor interferencia produzca.

En el caso de 3 colores, la situación más sencilla es aquella en que tenemos una matriz de interferencias exponencialmente decreciente de tamaño 3×3 . Para un coloreado no monocromático, el vértice que produce la interferencia máxima será necesariamente aquel que tenga el color intermedio:

- c_1 Su interferencia correspondiente es $I_{v_1} = 3w_{1,2} + 3w_{1,3}$
- c_2 Su interferencia correspondiente es $I_{v_2} = 3w_{2,1} + 3w_{2,3}$
- c_3 Su interferencia correspondiente es $I_{v_3} = 3w_{3,1} + 3w_{3,2}$

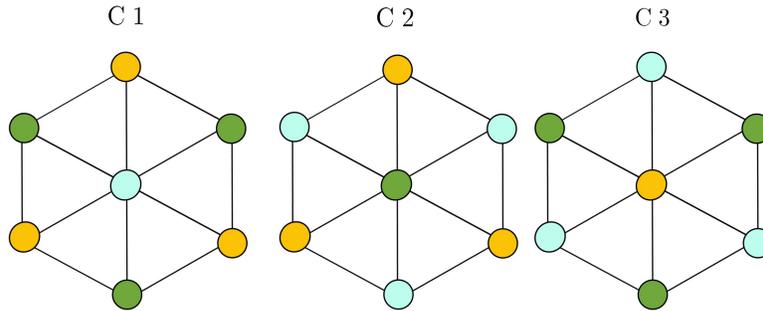


Figura 2: Posibles vértices interiores

Por la simetría de la matriz, $w_{1,2} = w_{2,1} = w_1$, $w_{2,3} = w_{3,2} = w_2$, $w_{1,3} = w_{3,1} = w_3$. Además, por la forma de la matriz que correspondería a $k = 3$, los dos tipos de aristas que se forman con el color intermedio producen igual interferencia, $w_1 = w_2 = \frac{1}{d}$, mientras que $w_3 = \frac{1}{d^2}$ se corresponde con la arista de menor interferencia.

Es fácil ver entonces que el tipo de vértice que define el máximo umbral del grafo es el vértice interior (tipo de vértice de mayor grado), cuyo color es el intermedio, puesto que producirá interferencia máxima, en este caso, para una matriz como la anterior, de tamaño 3:

$$T_3 = 3w_{2,1} + 3w_{2,3} = 6w_1 = 6\frac{1}{d} \quad (5)$$

Mientras que la interferencia de los demás vértices es la suma de 4 o menos valores de interferencias no monocromáticas, como se puede comprobar en la figura, y por tanto resultará siempre inferior.

De forma más general, para cualquier otro número de colores dado k en el mismo tipo de matriz, es decir, para matrices de otros tamaños mayores, si queremos minimizar el umbral podríamos ahora sí tratar de escoger los dos colores que menor interferencia produzcan con un tercero:

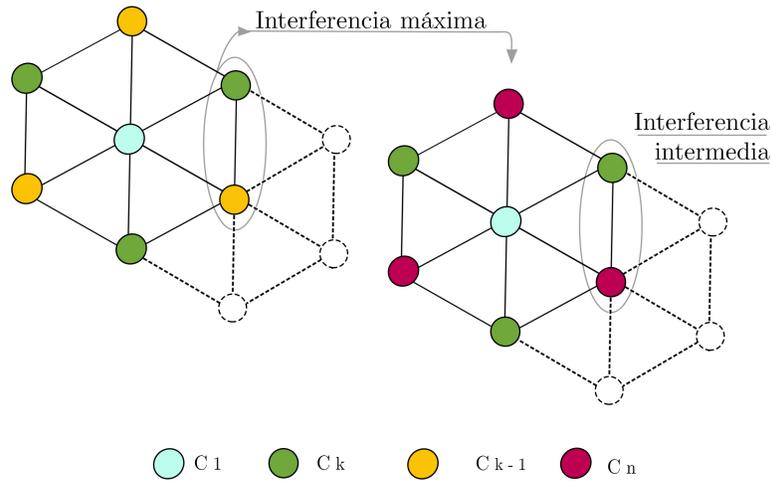


Figura 3: Proceso hasta alcanzar interferencia mínima

Sin embargo, como vemos, esto produciría en los vértices adyacentes una interferencia muy grande, por ser colores tan poco separados en la matriz. El color que menos interferencia produciría en este caso sería pues el que tenga una distancia intermedia a los extremos.

Si no usáramos los colores extremos, es obvio que no sólo la distancia entre ellos sería menor, sino que la distancia del tercer color con cualquiera de ellos

siempre sería menor que utilizando el color intermedio, y por tanto la interferencia total producida bastante mayor.

La solución para k mayor que 3 es pues escoger los dos colores que menor interferencia den entre sí y aquel que da una interferencia intermedia con los dos y utilizar el mismo coloreado.

Una formulación general del problema es entonces la siguiente:

Para una matriz exponencialmente decreciente de tamaño k , los colores c_1, c_k son aquellos que corresponden a una interferencia mínima y c_m el intermedio.

Si k es impar, $c_m = c_{\lceil \frac{k}{2} \rceil}$ y su interferencia con los extremos c_1, c_k será la misma por la simetría mencionada para el caso $k=3$:

$$T'_k = 6W_{\lceil \frac{k}{2} \rceil, 1} = 6W_{\lceil \frac{k}{2} \rceil, k} \quad (6)$$

Si k es par, $c_m = c_{\frac{k}{2}}$ y su interferencia con los extremos c_1, c_k será distinta, dando lugar a:

$$T'_k = 3W_{\frac{k}{2}, 1} + 3W_{\frac{k}{2}, k} \quad (7)$$

Recordemos que se pretendía mostrar que la existencia de ejes monocromáticos era siempre peor, lo cual es el último paso antes de afirmar que la coloración es óptima. Si quisiéramos mejorar el umbral del grafo, tendríamos que mejorar la interferencia de las aristas del vértice dominante, cambiando su color o el de alguno de sus vértices adyacentes. Se pretende mostrar que añadir una arista monocromática no mejoraría nunca la situación.

Partiendo de las expresiones (6) y (7) para el umbral de coloración que hemos obtenido:

Si añadimos un arco monocromático (o cualquier número posible de ellos) al peor caso de los vértices intermedios, es decir, aquel con color intermedio, es trivial ver que el umbral producido por éste será mayor que la expresión general, pues sustituiríamos uno de sus términos por uno mayor.

Si se lo añadimos al mejor caso de los vértices intermedios, a continuación veremos que también resulta en un umbral que ya de por sí es peor que el proporcionado por nuestra coloración anterior.

En un vértice central de uno de los colores extremos, sustituiríamos una de las aristas de mayor interferencia por una monocromática. Queremos saber si su interferencia es mayor que la máxima de la coloración encontrada.

Para k impar,

$$6 \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} \leq 1 + 2 \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} + 3 \frac{1}{d^{k-1}} \quad (8)$$

Como, si k impar, $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor = k - 1$, reduciendo a común denominador y simplificando un denominador siempre positivo:

$$d^{k-1} - 4d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \geq -3 \quad (9)$$

Lo cual como d pertenece a los naturales tales que $d \geq 2$ y k a los impares mayores o iguales que 3, se cumple siempre salvo para $d = 2$ y $k = 3$.

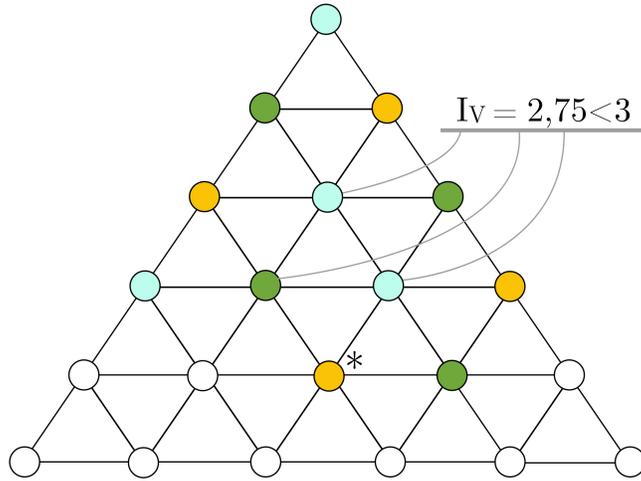


Figura 4: Consecuencias de una arista monocromática

Pensemos pues en ese caso. Si quisiéramos mejorar el umbral del grafo, tendríamos que mejorar la interferencia de las aristas del vértice dominante, cambiando su color o el de alguno de sus vértices adyacentes. Si cambiáramos el color de uno, todos o varios de los vecinos del vértice dominante, al mismo que el central (color intermedio), es trivial ver que simplemente aumentaríamos

la interferencia en el central, lo cual no es nuestro objetivo. Si cambiáramos el color de alguno de los vecinos al restante, no se produciría cambio alguno en el umbral, ya que ambos dan $\frac{1}{2}$.

La única forma de mejorarlo sería, pues, cambiando el propio color del vértice dominante. Si sólo cambiamos el color del vértice central, no mejoraría mucho la situación, puesto que se crearían 3 vértices monocromáticos: $I'_{v1/v3} = 3 + \frac{3}{2}$, lo cual es peor que $I_{v2} = 6\frac{1}{2} = 3$. Para evitar la aparición simultánea de 3 vértices monocromáticos en el hexágono dominante, podríamos cambiar los colores de dos de ellos al restante. Esto es efectivamente mejor, ya que nos encontramos con una interferencia $I''_{v1/v3} = 1 + 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} = 2,75 < I_{v2} = 3$

Sin embargo, para $n \geq 20$, como vemos en la imagen, el vértice señalado hace que el umbral se sobrepase. Si lo pintamos del color intermedio, igualaría el umbral de nuestro coloreado, si lo pintamos del c_1 , el vértice superior izquierdo superaría el umbral ($I'''_{v1/v3} = 2 + \frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} = 3,25 > I_{v2} = 3$), y con c_3 , el propio vértice originaría un umbral superior, $I'''_{v1/v3} = 2 + \dots$

Para k par,

$$3\frac{1}{d^{\frac{k}{2}}} + 2\frac{1}{d^{\frac{k}{2}}} \leq 1 + 2\frac{1}{d^{\frac{k}{2}}} + 3\frac{1}{d^{k-1}} \quad (10)$$

De nuevo operando, llegamos a:

$$d^{\frac{k}{2}-1} + 3d^{\frac{k}{2}} - d^{k-1} \leq 3 \quad (11)$$

Lo cual, al igual que en el caso anterior, se cumple siempre para los posibles valores de d y k salvo para $k = 4$ y $d = 2$, situación que se resolvería análogamente al caso impar.

Las aristas de los vértices exteriores de grado 4 forman parte de los hexágonos de los vértices intermedios y ya han sido tenidas en cuenta.

Sólo en las inmediaciones de los vértices esquina es posible añadir un lado monocromático sin empeorar el umbral anteriormente conseguido. Sin embargo, no supone ninguna mejora en el umbral total, ni diferencia alguna, ya que sólo modifica el valor de la interferencia en sus vértices vecinos, y ninguno de ellos es dominante.

De modo que, por la interconexión y el bajo grado de este tipo de grafos, la existencia de aristas monocromáticas perjudica a su umbral.

Queda demostrar que las expresión (6), (7) hallada es inferior a la cota general T_k .

$$\text{En el caso impar, } T'_k = 6W_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor, 1} = 6 \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}}$$

Para una matriz exponencialmente decreciente como la (3), la norma natural de la misma, es decir, el valor máximo entre los sumatorios de los elementos de sus filas (o columnas, por simetría), se corresponde con el asociado al color intermedio. Continuamos con el caso k impar: $\|W\|_\infty = \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} + \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1}} + \dots + \frac{1}{d} + 1 + \frac{1}{d} + \dots + \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1}} + \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} = 1 + 2 \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{1}{d^i}$

$$T'_k \leq 6 \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} \leq T'_k \leq \frac{\Delta(G)\|W\|_\infty}{k} = 6 \frac{1}{k} \left(1 + 2 \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{1}{d^i}\right) \quad (12)$$

$$\wp k \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} \leq \wp \left(1 + 2 \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{1}{d^i}\right) \quad (13)$$

$$\underbrace{\frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} + \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} + \dots + \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}}}_{k \text{ veces}} \leq 1 + \underbrace{\frac{1}{d} + \frac{1}{d^2} + \dots + \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}}}_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor \text{ terminos}} + \underbrace{\frac{1}{d} + \frac{1}{d^2} + \dots + \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}}}_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor \text{ terminos}} \quad (14)$$

Si k es impar, $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor = k - 1$. Podemos establecer una biyección término a término entre los primeros $k - 1$ términos del lado izquierdo de la inecuación y todos los términos señalados del lado derecho. Estos últimos siempre son mayores (o iguales en el caso de $\frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}}$) que sus correspondencias en el lado izquierdo, al ser d un número natural con exponentes siempre menores que $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. Quedando sólo pues por probar:

$$\frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} \leq 1 \quad (15)$$

Lo cual se cumple trivialmente siempre.

En el caso par, $T'_k = 3W_{\frac{k}{2}, 1} + 3W_{\frac{k}{2}, k} = 3\left(\frac{1}{d^{\frac{k}{2}}} + \frac{1}{d^{\frac{k}{2} - 1}}\right)$ y también al cambiar el color intermedio ocurre que $\|W\|_\infty = \frac{1}{d^{\frac{k}{2}}} + \frac{1}{d^{\frac{k}{2} - 1}} + \dots + \frac{1}{d} + 1 + \frac{1}{d} + \dots + \frac{1}{d^{\frac{k}{2} - 1}}$, por lo que lo que hay que probar es:

$$\mathfrak{Z}^k \left(\frac{1}{d^{\frac{k}{2}}} + \frac{1}{d^{\frac{k}{2}-1}} \right) \leq \mathfrak{Z} \left(1 + \frac{1}{d} + \frac{1}{d^2} + \dots + \frac{1}{d^{\frac{k}{2}}} + \frac{1}{d} + \frac{1}{d^2} + \dots + \frac{1}{d^{\frac{k}{2}-1}} \right) \quad (16)$$

$$\underbrace{\frac{1}{d^{\frac{k}{2}}} + \dots}_{\frac{k}{2} \text{ terminos}} + \underbrace{\frac{1}{d^{\frac{k}{2}-1}} + \dots}_{\frac{k}{2} \text{ terminos}} \leq 1 + \underbrace{\frac{1}{d} + \frac{1}{d^2} + \dots + \frac{1}{d^{\frac{k}{2}}}}_{\frac{k}{2} \text{ terminos}} + \underbrace{\frac{1}{d} + \frac{1}{d^2} + \dots + \frac{1}{d^{\frac{k}{2}-1}}}_{(\frac{k}{2}-1) \text{ terminos}} \quad (17)$$

Aquí también podemos establecer una biyección, los primeros $\frac{k}{2}$ términos del lado izquierdo de la inecuación son siempre menores o iguales que los primeros del lado derecho y lo mismo ocurre con los primeros $\frac{k}{2} - 1$ del segundo grupo respecto al segundo grupo del lado derecho, obteniendo:

$$\frac{1}{d^{\frac{k}{2}-1}} \leq 1 \quad (18)$$

Esto es nuevamente trivial y completa la demostración.

Sería válido también, no como expresión para el umbral sino únicamente como cota superior, para otros tipos de matrices, como aquella que decrece linealmente, ya que esa coloración, aunque no sea óptima, sí que es una coloración posible:

$$W_{lin} = \begin{matrix} & c_1 & c_2 & \dots & c_{\lceil \frac{k}{2} \rceil} & \dots & c_k \\ \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{\lceil \frac{k}{2} \rceil} \\ \vdots \\ c_k \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & & \frac{1}{\lceil \frac{k}{2} \rceil} & & \frac{1}{k} \\ \frac{1}{2} & 1 & & \frac{1}{\lceil \frac{k}{2} \rceil - 1} & & \frac{1}{k-1} \\ & & & & & \\ & & & 1 & & \frac{1}{\lceil \frac{k}{2} \rceil} \\ & & & & & \\ \frac{1}{k} & \frac{1}{k-1} & & \frac{1}{\lceil \frac{k}{2} \rceil} & & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (19)$$

$$T_k \leq 6 \frac{1}{\lceil \frac{k}{2} \rceil} \quad (20)$$

Donde de forma paralela al desarrollo anterior, para k impar nos encontramos con:

$$\theta k \frac{1}{\lceil \frac{k}{2} \rceil} \leq \theta \left(\frac{1}{\lceil \frac{k}{2} \rceil} + \dots + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\lceil \frac{k}{2} \rceil} \right) \quad (21)$$

Lo cual, desarrollando el lado izquierdo y con una biyección término a término resulta cierto siempre.

Y lo mismo ocurre con k par, utilizando el mismo argumento que para la matriz exponencial:

$$\beta \frac{k}{2} \left(\frac{1}{\frac{k}{2}} + \frac{1}{\frac{k}{2} + 1} \right) \leq \theta \left(\frac{1}{\lceil \frac{k}{2} \rceil} + \dots + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\lceil \frac{k}{2} \rceil} \right) \quad (22)$$

Lo mismo, aunque sólo queda demostrado como cota superior y no expresión exacta, se cumple para variaciones de la forma expuesta siguiendo la construcción equilátera, siguiendo el esquema en torno a los vértices de mayor grado, ya que en cualquier caso los hexágonos son la unidad dominante base.

5.1.3. CSC

Comenzaremos el estudio del CSC para este tipo de grafos asociando a cada número de colores su rango de umbrales posibles, es decir, a cada umbral, por intervalos, le asignaremos un número de colores para obtenerlo. Obtener una expresión general para el CSC, como veremos, no siempre es necesario.

Sabemos que el valor χ_k para un t dado siempre dependerá de la matriz de interferencias sobre la cual se calcula. Para evitar que el tamaño de esa matriz esté relacionado con el número de colores resultante y nos encontremos ante un razonamiento circular, consideraremos una matriz de tamaño $n \times n$, donde n es el número de vértices del grafo, algo que nos daría la posibilidad de escoger un color distinto para cada vértice. Trataremos de encontrar pues dentro de esa matriz una submatriz de tamaño $k \times k$ que nos determine el número de colores y sus interferencias para un espectro de umbrales.

Además, si se pretende obtener valores concretos es necesario tener información sobre la forma de la matriz. De nuevo escogeremos como ejemplo a estudiar una matriz que decrece exponencialmente como la (3).

- En el caso trivial $k = 1$ los vértices interiores estarían siempre rodeados por seis aristas monocromáticas, dando lugar a un umbral $T_1 = 6$.

- Para $k = 2$, es inevitable la existencia aristas monocromáticas, y por tanto el objetivo es minimizarlas. De la matriz $n \times n$ se escogerían los dos colores extremos, los cuales entre sí suponen una interferencia mínima en la matriz. El valor mínimo de umbral lo encontraríamos coloreando alternativamente en cada piso con ambos colores, lo cual, por el esquema triangular que siguen los vértices, nos lleva a encontrarnos vértices interiores rodeados por 4 aristas de interferencia mínima y dos monocromáticas. Existen múltiples coloreados posibles, dependiendo de por qué color se comience en cada fila, que proporcionan el mismo umbral: $T_2 = \frac{4}{d^{k-1}} + 2$. Uno de dichos coloreados es el del siguiente ejemplo:

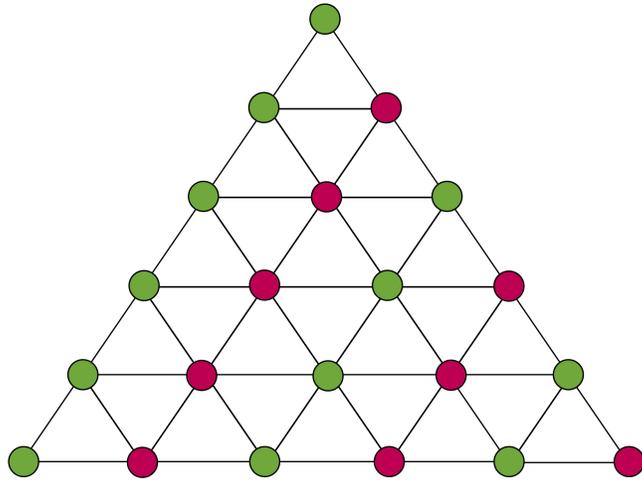


Figura 5: 2-Coloreado de malla triangular

Si en los hexágonos interiores intentamos disminuir dicho umbral cambiando cualquiera de las aristas monocromáticas por una de mínima interferencia, esto llevaría a la creación de un vértice de mayor umbral que el conseguido con la composición anterior, y por ello la consideramos mínima. El valor máximo de umbral será tanto en este caso como para cualquier otro k , el caso monocromático.

- El coloreado mínimo para $k = 3$ es el que ya estudiamos en el apartado anterior. Con la matriz de tamaño n , el umbral mínimo sería: en el caso de n impar, $T_3 = 6 \frac{1}{d^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$, y para n par, $T_3 = 3(\frac{1}{d^{\frac{n}{2}}} + \frac{1}{d^{\frac{n}{2}-1}})$
- Si consideramos un número de colores mayor que 3 tendremos varias opciones no monocromáticas en el coloreado, de las cuales habría que escoger aquellas que hagan mínima la interferencia. En el caso de $k = 4$, habría que escoger cuatro colores de la matriz. Para que la interferencia entre

ellos sea mínima, escogeremos siempre los extremos c_1 y el c_n , y, entre ambos, podemos escoger los dos valores intermedios, correspondientes al $c_{\lceil \frac{n}{3} \rceil}$ y al $c_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil}$. Nuestra submatriz sería pues:

$$\begin{matrix}
 & c_1 & c_{\lceil \frac{n}{3} \rceil} & \dots & c_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil} & \dots & c_n \\
 c_1 & \left(\begin{array}{cccccc}
 1 & \frac{1}{d^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}} & & \frac{1}{d^{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}} & & \frac{1}{d^{n-1}} \\
 \frac{1}{d^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}} & 1 & & \frac{1}{d^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}} & & \frac{1}{d^{n-2}} \\
 \dots & & & & & \\
 \frac{1}{d^{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}} & \frac{1}{d^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}} & & 1 & & \frac{1}{d^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}} \\
 \dots & & & & & \\
 \frac{1}{d^{n-1}} & \frac{1}{d^{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}} & & \frac{1}{d^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}} & & 1
 \end{array} \right) & & & & & & \\
 c_{\lceil \frac{n}{3} \rceil} & & & & & & \\
 \dots & & & & & & \\
 c_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil} & & & & & & \\
 \dots & & & & & & \\
 c_n & & & & & &
 \end{matrix} \quad (23)$$

Pensando en un coloreado no monocromático, veamos qué puede ocurrir en los vértices interiores, que son aquellos que determinan el umbral de este tipo de triangulaciones. Comencemos por uno de los colores extremos, pongamos c_1 (rojo en la imagen). Buscando evitar aristas monocromáticas y a la vez minimizar la interferencia del vértice central, la disposición ideal sería tres vértices con c_n (azul) y tres con $c_{\lceil \frac{2n}{3} \rceil}$ (amarillo).

Si del propio hexágono estudiamos un vértice de color azul y los tres vértices restantes de su hexágono correspondiente, dos de ellos tendría que ser pintados de c_1 y el tercero de $c_{\lceil \frac{n}{3} \rceil}$ (verde), para minimizar la interferencia del central, como se ve en la imagen:

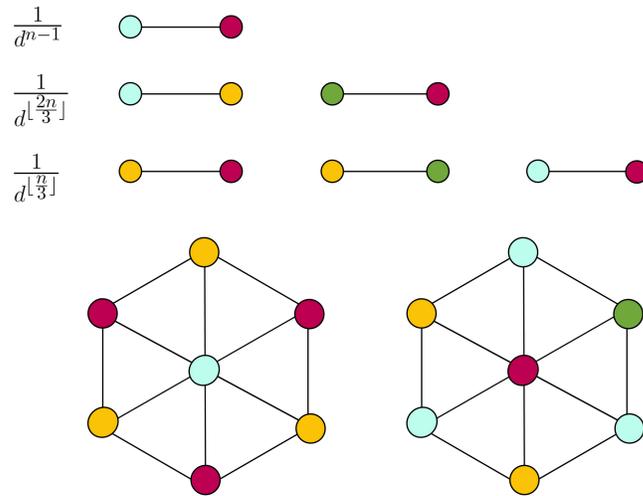


Figura 6: Coloreado con $k = 4$

Para estos dos colores de vértices interiores hay más combinaciones, pero no nos resultan de interés, pues cualquiera de ellas resultaría en una

interferencia inferior a la mejor combinación posible para uno de los colores intermedios como vértice central. Es indiferente el hecho de que haya cuatro colores puesto que los dos restantes tras utilizar el máximo número posible de vértices con la menor interferencia producen la misma, como en la figura 3.

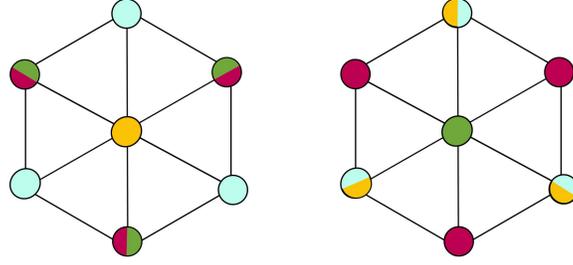


Figura 7: Coloreado con $k = 4$

La expresión para el mínimo umbral posible con $k = 4$, para un valor de n que sea una unidad mayor que un múltiplo de 3:

$$T_4 = 3 \frac{1}{d^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}} + 3 \frac{1}{d^{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}} \quad (24)$$

Pese a utilizar más colores, éste umbral parece estar dentro del intervalo de umbrales de $k = 3$. Comprobémoslo.

Para n impar y una unidad mayor que un múltiplo de 3:

$$\not\leq 2 \frac{1}{d^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \leq \not\leq \frac{1}{d^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}} + \not\leq \frac{1}{d^{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}} \quad (25)$$

$$\frac{d^{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}}{d^{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}} \leq \frac{2d^{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}}{d^{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}} = \frac{2}{d^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \leq \frac{1 + d^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}}{d^{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}} \quad (26)$$

Como d y n son números naturales, eso es lo mismo que decir lo siguiente, lo cual es cierto siempre para cualquier n y d :

$$d^{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor} \leq 1 + d^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \quad (27)$$

- Con el caso anterior como ejemplo, si $k \geq 4$, salvo que escojamos los tres colores del caso $k = 3$ y a medida que aumentas el k escojas otros que no utilizarás, lo cual lo convertiría en el caso $k = 3$, siempre habrá una arista con un color que será exponencialmente peor que el de la interferencia intermedia, y esto es mayor que cualquier configuración de aristas. Así

pues, todos los casos en los que k es mayor que 4 se encuentran dentro del intervalo de umbrales que proporciona el caso 3, es decir, entre el mínimo T_3 y el máximo 6.

Esto se muestra en el hecho de que a medida que k aumenta, disminuye la máxima distancia entre colores que podemos escoger, siendo $n/4$ para $k = 5$ (lo más separado posible es), $n/5$ para $k = 6, \dots$. De modo que si aparece una arista con esa interferencia mínima, lo cual ocurre necesariamente si utilizas la totalidad de colores (y si no los utilizas, siempre va a ser mejor usar $k = 3$, por lo demostrado en el apartado anterior) siempre será peor. Evitando arcos monocromáticos, la menor interferencia que se podría conseguir, comparada con la de $k = 3$, siempre será mayor:

$$3 \frac{1}{d^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} + 3 \frac{1}{d^{n-1}} < \frac{1}{d^{\lfloor \frac{n}{k-1} \rfloor}} + 3 \frac{1}{d^{n-1}} + 2 \frac{1}{d^{\lfloor \frac{(k-2)n}{k-1} \rfloor}} \quad (28)$$

Lo cual se cumple claramente para el caso mínimo $d = 2$, $k = 5$, $n = 15$ (gráficamente, para que haya 3 vértices interiores, es el mínimo n posible), y más ampliamente para cualquier caso mayor.

5.2. Triangulaciones de un ciclo

Un tipo de triangulación de la cual se pueden extraer conclusiones fácilmente es aquel que divide el interior de un polígono en triángulos, con los vértices del polígono como únicos vértices de la triangulación, unidos entre sí inicialmente en un ciclo.

Por su forma, nos encontramos con varios tipos de triangulaciones de un ciclo, de composiciones posibles de las mismas:

- El tipo fan o abanico divide el polígono a partir de un único vértice (figura 9).
- El zig-zag añade triángulos opuestos uniendo vértices opuestos (figura 8).
- El formado por orejas, que es como se llama al pequeño triángulo que une dos vértices que sólo tienen uno entre ellos (figura 8).
- Y por supuesto, la mezcla de los anteriores (figura 9).

Sabemos que el número de triángulos que dividen un polígono de n vértices es $n - 2$, y por la fórmula de Euler sabemos pues también el número de aristas, no importa la forma o composición. Y sin embargo, el valor de t será diferente

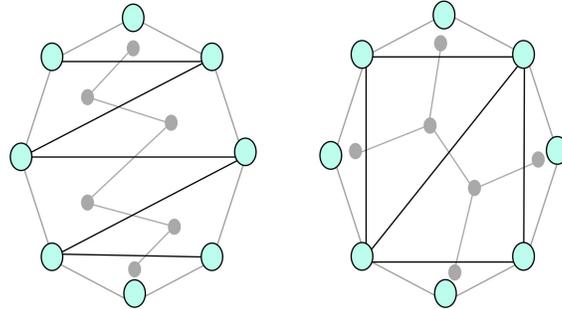


Figura 8: Zig-zag (izquierda) y compuesta por orejas (derecha) con sendos árboles complementarios

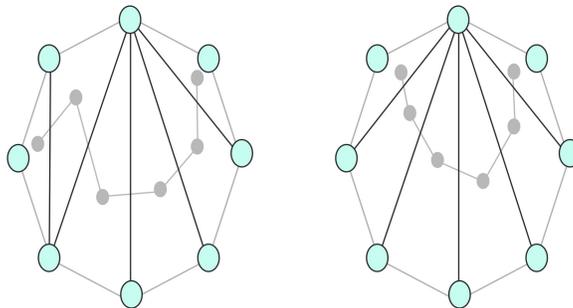


Figura 9: Mezcla (izquierda) y abanico o fan (derecha) con sendos árboles complementarios

para el mismo valor de n según la forma de la triangulación. ¿Cómo podemos distinguirlas?

- La forma más sencilla de distinguirlos es por su secuencia de grados asociada. Una secuencia de grados de un grafo no dirigido es la secuencia numérica ordenada de los grados de sus vértices. La lista de grados es un invariante, aunque en general no implica que dos grafos sean isomorfos, sí lo hace cuando sabemos de antemano que el grafo es una triangulación de un ciclo. Saberla, además, nos da datos que hacen más sencillo obtener una expresión para T .
 - Para tipo fan, es fácil ver que su secuencia de grados está formada

por $(n-1, \underbrace{3}_{n-3 \text{ veces}}, \underbrace{2}_{2 \text{ veces}})$. En este tipo, el vértice de mayor grado es el que define el umbral del grafo, siempre y cuando sea $n > 6$, para evitar que sea uno de los vértices de grado 3 el que dirige. Considerando un 3-coloreado que evite monocromáticas nos quedaríamos con la mitad de aristas de un color y la mitad de otro. Para minimizar el umbral, hay que hacer el color de ese vértice uno de los que forman aristas de mínimo peso, y si resulta un grado impar, hacer que el mayor número de vértices unidos al generador posible sea del color que produce dicho mínimo, esto es:

$$T \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil \left(\frac{1}{d^{k-1}} \right) + \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \left(\frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} \right) \quad (29)$$

Es menester probar que también esta cota es mejor que la general. Para n impar, k par y matriz de interferencias exponencialmente decreciente:

$$T \leq k \left(\frac{n-1}{2} \right) \left(\frac{1}{d^{k-1}} \right) + \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} \leq T_k \leq \frac{(n-1) \|W\|_\infty}{k} \quad (30)$$

$$\underbrace{\frac{1}{d^{\frac{k}{2}}} + \dots}_{\frac{k}{2} \text{ terminos}} + \underbrace{\frac{1}{d^{k-1}} + \dots}_{\frac{k}{2} \text{ terminos}} \leq 1 + \underbrace{\frac{1}{d} + \dots + \frac{1}{d^{\frac{k}{2}}}}_{\frac{k}{2} \text{ terminos}} + \underbrace{\frac{1}{d} + \dots + \frac{1}{d^{\frac{k}{2}-1}}}_{\left(\frac{k}{2}-1\right) \text{ terminos}} \quad (31)$$

Con un argumento similar al de (16), quedaría probado. El caso k impar, que sólo variaría ligeramente uno de esos términos, es también claramente mejor. Con n par, para facilitar el cálculo podríamos sustituir $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ por $\frac{n}{2}$ y $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ por $\frac{n}{2} - 1$, lo cual dejaría un término residual que terminaría siendo despreciable y nos llevaría al mismo resultado.

$$T = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil \left(\frac{1}{d^{k-1}} \right) + \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \left(\frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} \right) \leq T_k \leq \frac{\Delta(G) \|W\|_\infty}{k} \quad (32)$$

Sin embargo, en este tipo de triangulación un coloreado con aristas monocromáticas es también posible, para un valor de n lo suficientemente grande.

Cuando añadir una arista monocromática (del tipo que produciría una interferencia mínima con el generador, para disminuir su umbral) a uno de los vértices no generadores no empeora la interferencia total anterior sino que la mejora, es decir:

$$1 + \frac{1}{d^{k-1}} + \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil \left(\frac{1}{d^{k-1}} \right) + \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \left(\frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} \right) \quad (33)$$

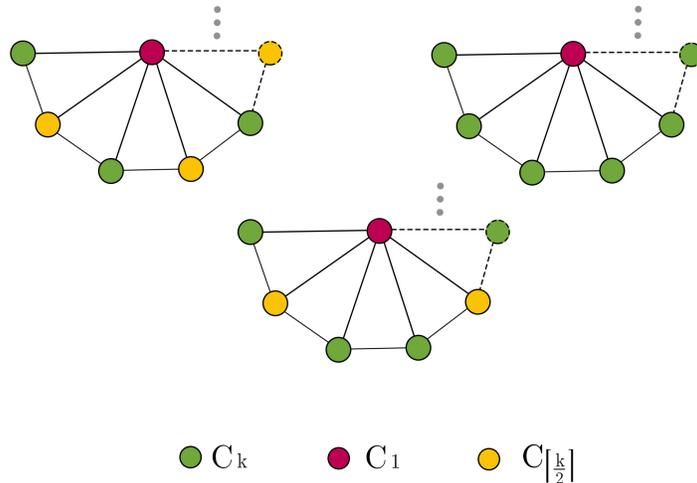


Figura 10: Diferentes coloraciones para fan

Entonces nos encontramos con la situación del centro de la imagen. No añadimos sólo una arista a un vértice en particular para mejorarlo sino a todos, ya que en términos de umbral es indiferente y para el vértice generador añadirse a todos es lo más adecuado, de manera que hay dos vértices de un color extremo por cada vértice intermedio. Se produce un umbral de:

$$T' \leq \lceil \frac{2(n-1)}{3} \rceil \left(\frac{1}{d^{k-1}} \right) + \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor \left(\frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} \right) \quad (34)$$

La situación que vemos en la parte derecha de la Figura 10 es la óptima cuando, pese a tener los vértices no generadores dos aristas monocromáticas, n es tal que la interferencia en el dominante supera a su vez la anterior :

$$2 + \frac{1}{d^{k-1}} \leq \lceil \frac{2(n-1)}{3} \rceil \left(\frac{1}{d^{k-1}} \right) + \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor \left(\frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} \right) \quad (35)$$

Dando lugar a un umbral de:

$$T'' \leq (n-1) \left(\frac{1}{d^{k-1}} \right) \quad (36)$$

Como ya probamos que la primera cota T era mejor que la general, no es necesario probar éstas, ya que como están formadas cambiando

aristas del vértice dominante por otras que dan una interferencia mejor, son estrictamente menores que la T , y por propiedad transitiva, que la general.

- Los tipo zigzag van creando triángulos de extremo a extremo de manera que ningún vértice domine, así que nos llevan a la siguiente secuencia de grados: $(\underbrace{4}_{n-4 \text{ veces}}, \underbrace{3}_{2 \text{ veces}}, \underbrace{2}_{2 \text{ veces}})$. Su umbral depende de un vértice de grado 4 siempre y cuando uno de ellos lleve necesariamente el color intermedio, es decir, de nuevo cuando $n > 6$, ya que entonces habría 3 vértices de grado 4 unidos entre sí. Su sencilla expresión es pues:

$$T = 4 \left(\frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} \right) \quad (37)$$

Y su demostración es análoga a la de (13).

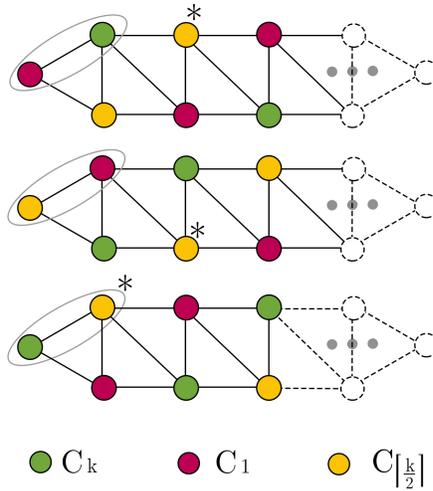


Figura 11: Coloreados de zig-zag

En este caso, al ser el máximo grado como mucho 4, un vértice monocromático nunca mejoraría la situación, las posibilidades de coloreado dependen pues de la elección de dos vértices adyacentes. Como tanto el color c_1 como el c_k son intercambiables, para esa arista sólo existen las siguientes posibilidades, que llevan a los coloreados mostrados en la imagen. Todos ellos, a partir de un cierto n , tienen el mismo umbral, marcado por el vértice dominante (*) y expresado anteriormente.

- En los formados completamente por orejas, la secuencia de grados se crea recursivamente. Siempre habrá $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ de grado 2, y entre los vértices que queden se volverán a crear orejas, dejando $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ vértices de grado 4 creados, y así sucesivamente en grados múltiplos de 2. Cuando quede un número de vértices impar, quedará además un vértice de grado impar correspondiente al grado común a los demás de su “vuelta” menos uno. Podemos decir que el vértice dominante en interferencia será aquel que corresponda al tercer mayor grado, puesto que será el de mayor grado al que le corresponde el valor intermedio y no es posible que haya una diferencia del doble entre el segundo y el tercer mayores grados. El grado del mismo depende del número de vértices restantes en la última vuelta y de las rondas impares que haya habido. Si el número de vértices restantes es 6 o 3, se añadirán 2 o ninguna aristas a cada uno, si es 4, una arista a 2 vértices, si es 5, dos aristas a 1 vértice y una a otros dos vértices. Dada la dificultad de encontrar el valor exacto de dicho grado, utilizaremos una cota superior pero muy cercana, que nos da el valor más alto entre los posibles en la misma vuelta, lo cual como hemos dicho se asocia al número de vueltas ya dadas, obtenidas del logaritmo con una corrección para los decimales.

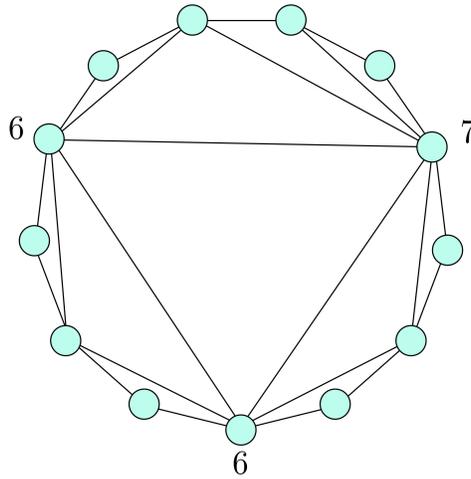


Figura 12: Grados mayores.

$$T \leq \lceil \log_2(n) - 1 \rceil \left(\frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} \right) \quad (38)$$

El hecho de no tener una expresión exacta para el máximo grado del grafo dificulta la demostración de la mejora de la cota del umbral. Utilizando la cota superior para el tercer vértice como la expresión

para el máximo grado, nos encontraríamos con la siguiente expresión, que al simplificarla lleva según la paridad de k a los mismos casos (13) y (16). Por supuesto siempre podríamos obtener la expresión directamente obteniendo los grados de la secuencia de grados, pero el interés aquí es que sólo depende de el número de vértices n .

$$T \leq \lceil \log_2(n) - 1 \rceil \left(\frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} \right) \leq (\lceil \log_2(n) - 1 \rceil) \|W\|_\infty \frac{1}{k} \quad (39)$$

- Cuando la secuencia de grados no cumple con ninguna de las estructuras anteriores, decimos que nos encontramos ante una mezcla. Éstas pueden tener orejas, vértices en forma de abanico o triángulos en zig zag, sin seguir un esquema claro. En las mezclas es complicado obtener una única expresión independiente, pero sí podemos obtener una cota para el umbral que mejore la general.

Si el grado mayor d_1 es dos veces más grande que el tercero en grado, consideraremos que ese vértice es dominante tipo fan y se usará su expresión, sustituyendo en ella $n - 1$ por el grado correspondiente. En caso contrario, la elección del tercer vértice en grado como dominante es siempre correcta, pues le correspondería una interferencia del grado veces el valor intermedio de interferencia. Un desarrollo más extenso de esta idea con un intervalo de grados más exacto se encuentra en el apartado 2.5 de pseudo-triangulaciones.

- Si unimos los centros de las caras entre sí, lo cual da lugar a un árbol, formaremos un árbol binario asociado a la triangulación, como podemos ver en las imágenes 8 y 9. Un árbol con todo hijos únicos que sean siempre derechos o izquierdos corresponderá a un tipo abanico, si van alternando derecho e izquierdo, a un zigzag, un árbol en el que todos los nodos salvo quizás uno tengan dos hijos será completamente orejudo. Existe una biyección entre dicho árbol y su triangulación [6, 11], así que por tanto es posible extraer la secuencia de grados de la triangulación a partir del árbol.

Una forma de hacerlo es con el siguiente algoritmo sencillo voraz. Éste recorre el árbol y cada vez que encuentra un nodo añade un vértice y aumenta en un grado los vértices adecuados, según si el triángulo se añadiría a la derecha o a la izquierda.

```
ALGORITMO CalcularSecuenciaGrados (raiz);
VAR
    lista  secuenciaGrados;
    entero v1,v2,v3; % vértices del triángulo anterior
    nodo actual;
    pila pila;
```

```

INICIO
  secuenciaGrados<-(2,2,2); %triangulo inicial, 3 vértices grado 2
  v1<- 1;v2<- 2;v3<- 3; %pos en secuenciaGrados de vertices padre

  SI raiz.hijoDerecho ENTONCES
    pila<- pila.add (raiz.derecho)
  SI raiz.hijoIzquierdo ENTONCES
    pila<- pila.add (raiz.izquierdo)
  FIN SI

  MIENTRAS(pila) HACER

    actual<- pila.get
    (v1,v2,v3)<- actual.padre.referencias

    SI actual.esHijoDerecho ENTONCES
      secuenciaGrados.add(2) % añadido vértice del nuevo triángulo
      secuenciaGrados[v2]<- secuenciaGrados[v1]+ 1 % añadido aristas
      secuenciaGrados[v3]<- secuenciaGrados[v3]+ 1
      v1=v2 % cambio la arista de referencia
      v2=secuenciaGrados.size

    SI actual.esHijoIzquierdo ENTONCES
      secuenciaGrados.add(2) % añadido vértice del nuevo triángulo
      secuenciaGrados[v1]<- secuenciaGrados[v1]+ 1 % añadido aristas
      secuenciaGrados[v3]<- secuenciaGrados[v3]+ 1
      v1=secuenciaGrados.size
      v2=v1
    FIN SI

    pila<- pila.add(actual.derecho)
    pila<- pila.add(actual.izquierdo)

  FIN MIENTRAS

  secuenciaGrados<-secuenciaGrados.ordenar;
FIN

```

5.3. Cuadrangulaciones

Las cuadrangulaciones o square grid graph son aquellos grafos planos que dividen una superficie en unidades mínimas con forma de cuadriláteros. Son grafos bipartidos ya que no contienen ciclos impares (escojas el camino que escojas, siempre añades un múltiplo de dos de aristas). En la siguiente imagen podemos ver los dos conjuntos de vértices en los que se divide:

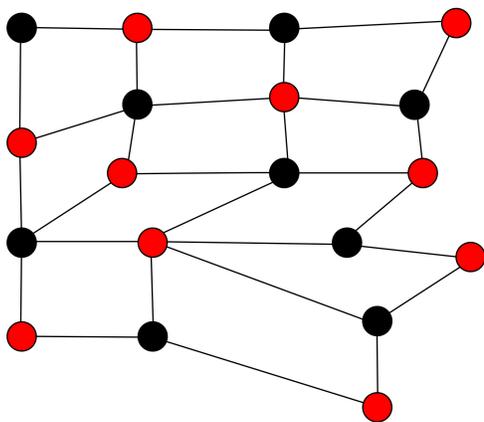


Figura 13: Coloreado de cuadrangulación

Un grafo es bipartido si y sólo si se puede colorear con dos colores, es decir, su número cromático es menor o igual que 2 [9]. Los conjuntos de vértices de la imagen anterior suponen también un coloreado de la cuadrangulación.

Todos los grafos 2-coloreables y por tanto todos los grafos bipartidos tienen una interferencia máxima muy sencilla de calcular. Siempre que la matriz de interferencias sea simétrica, lo cual ocurre necesariamente por definición de interferencia, sólo va a ser necesario un tipo de arista: aquel que ofrezca la interferencia más baja. Y por tanto su umbral, independiente de la matriz, estará dado por el vértice de mayor grado:

$$T = \Delta(G) \min(W) \tag{40}$$

Para que esta cota sea mejor que la general (1), tiene que cumplirse que:

$$\Delta(G) \min(W) \leq \frac{\Delta(G) \|W\|_\infty}{k} \quad (41)$$

Lo cual implica que:

$$k \min(W) \leq \|W\|_\infty \quad (42)$$

Si el tamaño de W es mayor o igual que k , lo cual tiene que cumplirse por la propia definición del problema, entonces la norma natural de W , que es el mayor de los sumatorios de los elementos de cada fila de la matriz, será en el caso límite en el que todos los elementos de la misma valgan igual que su mínimo, $\|W\|_\infty = k \min(W)$, y mayor en todos los demás casos, puesto que sus elementos serán mayores que el mínimo.

Para el problema CSC complementario, está claro que el uso de cualquier número de colores mayor que 2 da lugar a un intervalo de umbrales contenido en el de $k = 2$, cuyo máximo, en el caso de matrices decrecientes, es el mismo que el de $k = 1$, todas las aristas monocromáticas.

$$T_1 = \Delta(G) \quad (43)$$

5.4. Pseudo-triangulaciones

Encontrar cotas concretas para triangulaciones generales es complicado, y por tanto más difícil será encontrarlas para pseudo-triangulaciones, que son a su vez una generalización de las triangulaciones.

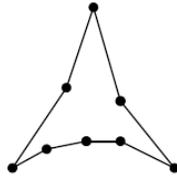


Figura 14: Pseudo-triángulo de 8 lados. Fuente: Cifras y Teclas

Un pseudo-triángulo se define como un polígono cerrado con exactamente tres vértices tales que el ángulo interior en cada uno de ellos es menor que 180 grados (convexos), llamados esquinas. Una pseudo-triangulación es el teselado de una región del plano en pseudo-triángulos.

Un tipo importante de pseudo-triangulación es la pseudo-triangulación mínima o puntiaguda, que es aquella en la que en cada vértice tiene una región incidente, ya sea la cara interna o la cara externa, cuyo ángulo es mayor de π radianes, lo que se llama vértice puntiagudo, y tal que no se puede insertar ninguna arista entre dos vértices sin quebrantar esta propiedad. Es mínima puesto que tiene el menor número de aristas posible para el conjunto de puntos.

Consideraremos para este estudio el caso de las 4-PPT [17], que son las pseudo-triangulaciones puntiagudas con caras de tamaño 4 como máximo, es decir, que incluyen como figuras el pseudotriángulo de 4 lados y el triángulo.

Si una 4-PPT sólo estuviera compuesta de triángulos, nos encontraríamos con una triangulación puntiaguda. Cómo colorear sin vértices monocromáticos una triangulación depende del grado de los vértices del mismo, pero sin embargo para una triangulación puntiaguda se puede decir que es coloreable sin vértices monocromáticos con 3 colores, ya que los casos que fuerzan el añadido de más colores son los de la imagen, y la condición de vértice puntiagudo obliga a que esto nunca ocurra.

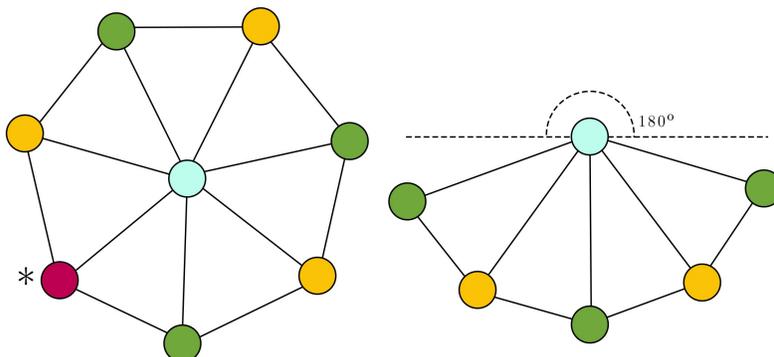


Figura 15: Triangulación de grado impar y vértice puntiagudo

Si una 4-PPT sólo estuviera compuesta de pseudo-triángulos de tamaño cuatro, sería un grafo bipartito isomorfo a la cuadrangulación, y por ello 2-coloreable.

Al añadir triángulos que no violen la propiedad de vértices puntiagudos, sería necesaria la aparición de un tercer color para evitar aristas monocromáticas, pero nunca de un cuarto, como hemos dicho en el párrafo anterior. Así pues, una 4-PPT es 3-coloreable. Podemos encontrar una demostración formal en la bibliografía [2]

Es difícil sacar conclusiones generales sobre la forma de una 4-PPT o sobre el grado de sus vértices, al igual que encontrar subtipos en los que dividirlos que sí reúnan unas condiciones comunes, así que se estudiará el peor caso.

Suponemos de nuevo las condiciones del apartado de mallas triangulares, matrices de interferencias decrecientes, particularmente de tipo exponencial (3) y lineal (14), y la elección de los mismos tres colores, los dos que producen una interferencia mínima entre sí o y uno intermedio.

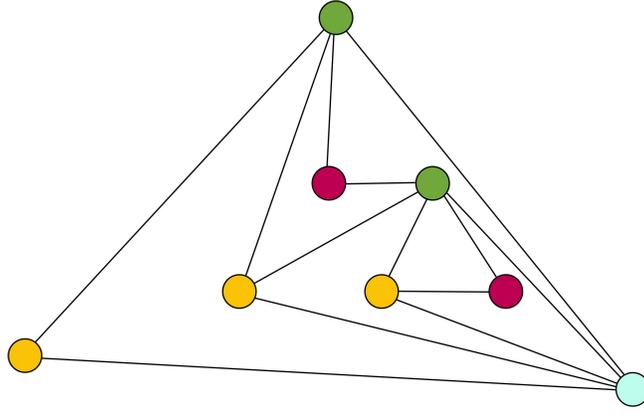


Figura 16: 4-PPT con envolvente triangular

El peor caso es aquel en el que los tres vértices de mayor grado (de grados g_1 , g_2 y g_3) estén unidos triangularmente entre sí, y por tanto uno de ellos se ve forzado a adoptar el color intermedio que produce interferencia máxima con los otros dos. La elección obvia que da una menor interferencia es, como en el caso de las triangulaciones mezcladas de ciclos, asignar al tercer vértice en orden de grado el color intermedio. Este último vértice será el dominante en la mayoría de los casos, pero en ciertos casos, si la diferencia en grados es lo suficientemente alta, el dominante será el vértice de mayor grado. La condición para que el tercero sea dominante es que su interferencia total, dada por su grado veces la interferencia intermedia sea mayor o igual que la del primero, la cual, en el peor caso, en el que está rodeado únicamente por triángulos, tiene asignada a la mitad de sus aristas un valor extremo y a la otra mitad el intermedio. En una matriz exponencialmente decreciente:

$$g_3 \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} \geq \lceil \frac{g_1}{2} \rceil \frac{1}{d^{k-1}} + \lfloor \frac{g_1}{2} \rfloor \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} \quad (44)$$

Lo cual tiene como resultado:

- Para g_1 par, resulta $g_1 \leq g_3 \frac{2}{1 + \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}}}$ con k impar y $g_1 \leq g_3 \frac{2}{1 + \frac{1}{d^{\frac{k}{2}-1}}}$ para k par.
- Para g_1 impar, $g_1 \leq (g_3 + 1 - \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}}) \frac{2}{1 + \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}}}$ con k impar y $g_1 \leq (g_3 + 1 - \frac{1}{d^{\frac{k}{2}}}) \frac{2}{1 + \frac{1}{d^{\frac{k}{2}-1}}}$ para k par.

Por supuesto, por definición, $g_1 \geq g_3$, así que hemos establecido un intervalo.

Así pues, mientras exista esa diferencia de grado, el umbral para k impar será:

$$T_k \leq g_3 \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} \quad (45)$$

La demostración de que es menor que la cota general es casi análoga a la de (13) en mallas triangulares. Está claro que si, como se demuestra a partir de (14), $k \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} \leq (1 + 2 \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{1}{d^i})$, entonces también $k \frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} \leq (1 + 2 \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{1}{d^i}) \leq (\frac{g_1}{g_3})(1 + 2 \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{1}{d^i})$, puesto que $\frac{g_1}{g_3}$ es siempre positivo.

Lo mismo ocurre para k par, a partir de (16), cambiando la expresión a:

$$T_k \leq \lceil \frac{g_3}{2} \rceil \frac{1}{d^{\frac{k}{2}}} + \lfloor \frac{g_3}{2} \rfloor \frac{1}{d^{\frac{k}{2}-1}} \quad (46)$$

Y en caso contrario, consideraríamos dominante al vértice de mayor grado:

$$T'_k \leq \lceil \frac{g_1}{2} \rceil (\frac{1}{d^{k-1}}) + \lfloor \frac{g_1}{2} \rfloor (\frac{1}{d^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}}) \quad (47)$$

A la hora de demostrar que esta expresión es también menor que la cota general, como g_1 es el grado máximo en ambos lados, es fácil ver la similitud con (29).

5.5. Malla hexagonal

El caso de las mallas o teselaciones hexagonales es muy similar al de las cuadrangulaciones. De nuevo, nos encontramos con un grafo plano que no tiene ciclos de tamaño impar, ya que como las caras del mismo tienen un número par de aristas, cualquier camino desde un vértice hasta sí mismo resultará en un ciclo par, y por tanto son grafos bipartidos. De hecho, un grafo plano es bipartido si y sólo si sus caras tienen un número par de aristas [9]. Así pues, todos los grafos planos con caras pares verificarían el umbral (25) expuesto en la sección anterior. Por supuesto, con cualquier grafo bipartido se podría llegar a esa expresión, que podemos decir general para ese tipo de grafos.

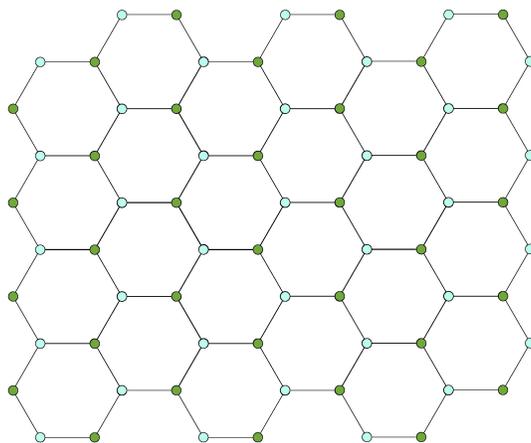


Figura 17: Coloreado de malla hexagonal

Para el teselado regular hexagonal, podemos perfeccionar ligeramente la cota, ya que sabemos que el grado de los vértices es 3 para todos los vértices interiores y 2 para los de la capa más exterior.

$$T = 3 \min(W) \tag{48}$$

6. Comprobación experimental de la cota para triangulaciones de un ciclo mezcla

Para las triangulaciones en general, triangulaciones en ciclo de tipo mezcla y pseudotriangulaciones puntiagudas, ante la dificultad de obtener una expresión exacta para el TSC, se propuso una cota superior en la que vértice de mayor grado domina cuando es lo suficientemente grande, y en caso contrario lo hace el tercer vértice en grado, al cual se le asocia el color intermedio. Las expresiones son de la (45) a la (48). Buscando mostrar la bondad de las mismas e incluso su exactitud en muchos casos, se decidió realizar una aproximación experimental al problema.

En particular, para la prueba se escogieron las triangulaciones de un ciclo de tipo mezcla, cuya construcción era simple y cuyos resultados esperados los más prometedores. Gracias al paquete NetworkX [8] del lenguaje de programación Python se facilitó la creación de grafos aleatorios en formato GML como la población del estudio. Fueron creados para tal propósito 10 grafos de conexiones aleatorias para cada uno de los siguientes tamaños: $n = 60, 70, 80, 90$ y 100 , y dentro de esos tamaños, para los siguientes valores de la matriz de interferencias (de tipo exponencial decreciente para cumplir las condiciones de la cota): $d = 2, k = 3; d = 2, k = 9; d = 4, k = 3; d = 4, k = 9$. Dando lugar a un total de 200 grafos.

Como algoritmos para el cálculo del valor de umbral de TSC se utilizarán los siguientes:

- La implementación TSC-DSATUR del algoritmo voraz DSATUR realizada en [13], empieza con una coloración indefinida e itera añadiendo color al vértice v que más vecinos coloreados tenga, al de mayor grado en caso de empate, o uno aleatorio de haber varios de mayor grado, buscando siempre que la interferencia para v sea mínima. Es un algoritmo determinista.
- El optimizador genérico no-lineal ALHSO [7], al que se le añade como función objetivo la interferencia máxima por vértice. Este algoritmo está basado en la búsqueda armónica y utiliza multiplicadores Lagrangianos aumentados para las restricciones.
- El optimizador de 'particle swarm' o nube de partículas ALPSO [10], que combina los métodos de nube de partículas con el del anterior ALHSO.

Se realizan 10 ejecuciones de cada algoritmo, para cada caso. En la siguiente tabla vemos como valores la media de la interferencia máxima por nodo para los 10 grafos de un determinado tamaño y tipo y para esas 10 ejecuciones.

Los valores de las dos cotas para cada caso fueron añadidos posteriormente tras su obtención aplicando las fórmulas para cada grafo con la ayuda de las herramientas de análisis de NetworkX.

Cuadro 1: Tabla de resultados

n	d	k	TSCDSATUR	ALHSO	ALPSO	C. mejorada	C. general
60	2	3	4,125	5,175	5,38	4	7
60	2	9	0,454296875	1,339023	1,682891	0,49375	3,354166667
60	4	3	1,89375	3,373125	3,65125	1,975	5,25
60	4	9	0,02775116	0,386571	0,796376	0,03125	1,94140625
70	2	3	4,25	5,1625	5,5675	4,05	7
70	2	9	0,5125	1,296641	1,85207	0,50625	3,354166667
70	4	3	1,95	3,3325	3,843125	2,025	5,25
70	4	9	0,030859375	0,366811	0,965319	0,031640625	1,94140625
80	2	3	4,4	5,235	5,5975	4,25	7,133333333
80	2	9	0,51484375	1,282305	1,882461	0,53125	3,418055556
80	4	3	2,1	3,29	3,83375	2,125	5,35
80	4	9	0,03243103	0,357847	1,017096	0,033203125	1,978385417
90	2	3	4,375	5,435	5,765	4,3	7,333333333
90	2	9	0,5125	1,336953	2,115938	0,5375	3,513888889
90	4	3	2,05	3,385625	4,09875	2,125	5,5
90	4	9	0,031640625	0,379555	1,162684	0,033203125	2,033854167
100	2	3	4,425	5,4	5,8525	4,3	7,533333333
100	2	9	0,5375	1,325977	2,121367	0,5375	3,609722222
100	4	3	2,15	3,44	4,2875	2,15	5,65
100	4	9	0,03359375	0,54248	1,280804	0,03359375	2,089322917

6.1. Resultados experimentales

En la gráfica (figura 18) se muestran, tomando cada caso como una prueba independiente numerada, los diferentes resultados para el TSC para los distintos algoritmos empleados. Podemos ver cómo, siguiendo las líneas verticales, los algoritmos ALHSO y ALPSO, dan unos valores muy superiores a los proporcionados por TSC-DSATUR. Al ser ésta una implementación determinista que da un resultado mejor, se procede a descartar los resultados obtenidos por los otros dos algoritmos en el resto del estudio.

Una posible causa de estos malos resultados es el hecho de que ese tipo de optimizadores parecen funcionar mejor cuando se utilizan funciones objetivo con gradientes más suaves, como podría haber sido la suma total de la interferencia de todos los vértices en lugar del máximo [13]. Sin embargo, para la comparación de cotas, era necesario obtener el umbral máximo.

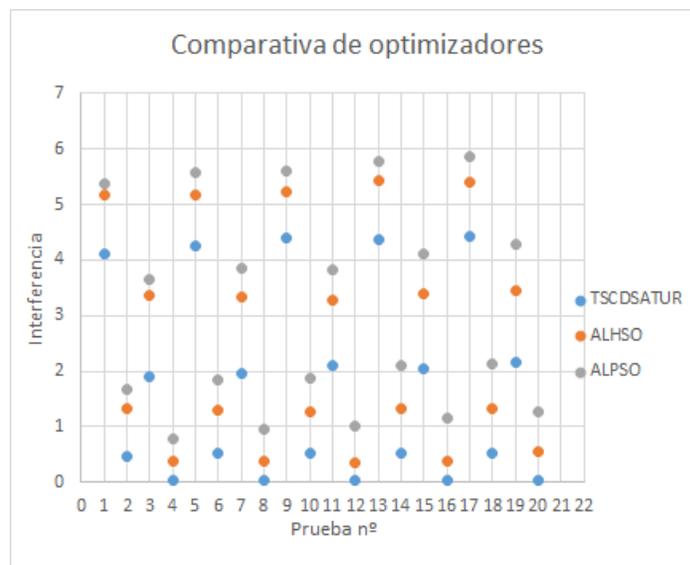


Figura 18: Comparación de resultados entre los tres métodos de optimización principales

Para probar la bondad de la cota planteada, compararemos pues sus valores con aquellos obtenidos computacionalmente con el TSC-DSATUR, y a su vez con los obtenidos calculando la cota general.

Ya a primera vista encontramos que los valores computacionales prácticamente se solapan con los proporcionados por la cota mejorada que se planteaba en este trabajo, mientras que los que proporciona la cota general están casi un orden de magnitud por encima. Todo ello se muestra en la siguiente gráfica, siguiendo de nuevo las líneas verticales para cada prueba.

Estudiando las diferencias más profundamente, se comprueba que entre la cota mejorada y el valor computacional hay una media de error del 1,573%. Las desviación máxima encontrada es de un 10% respecto del valor computacional, mientras que en los valores para n grande el error es casi inexistente. Las mayores diferencias aparecen para valores con número de colores k grande. Entre la cota mejorada y la cota general original encontramos que ésta es de media unas 18 veces más grande.

Para que las gráficas sean más representativas y los resultados más coherentes, estudiaremos ahora cada caso de matriz por separado, representando la interferencia máxima T en función del número de vértices n para los cuatro casos.

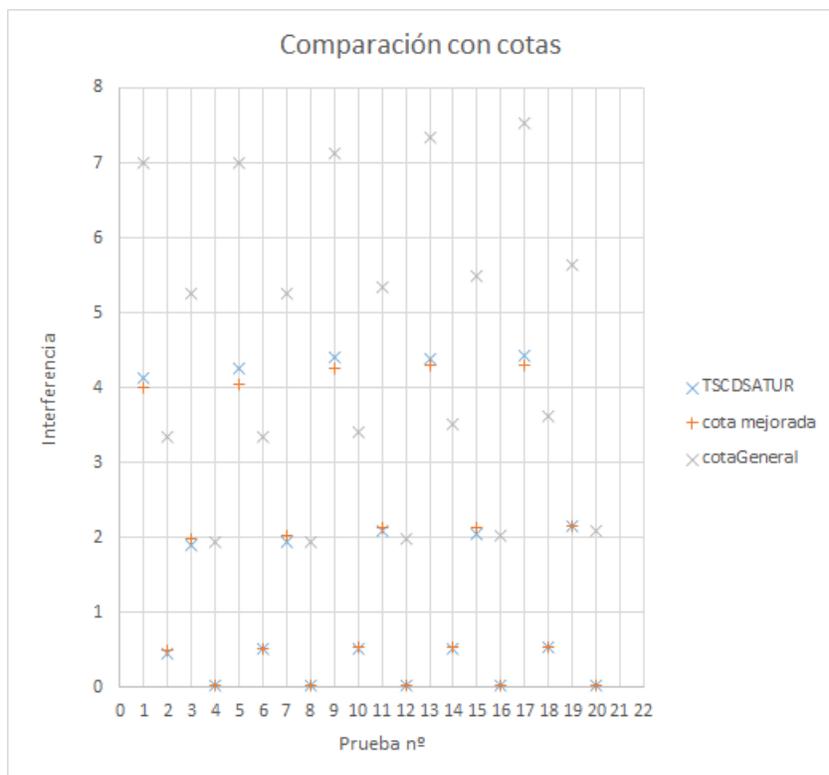


Figura 19: Comparación de SATUR con las cotas artificiales

En las siguientes imágenes (20-23) veremos cómo aparece una relación lineal entre T y el número de nodos n , aumentando ligeramente T a medida que aumenta el tamaño del grafo. Esto es porque la probabilidad de que aparezca un vértice de grado mayor aumenta a medida que aumenta n y todas las medidas tienen relación con este dato.

También nos encontramos con que en los casos en los que $k = 9$ hay una menor diferencia entre la interferencia computacional y la cota mejorada que en los de $k = 3$, mientras que para $k = 3$ hay menor diferencia entre los valores de la cota general y la mejorada que en los demás casos. En la cota general, a medida que la diferencia entre los valores de colores extremos aumenta, es decir, aumentan k y/o d , más exagerada será la cota, ya que siempre se conserva el valor 1 monocromático en la norma matricial que es parte de su expresión.

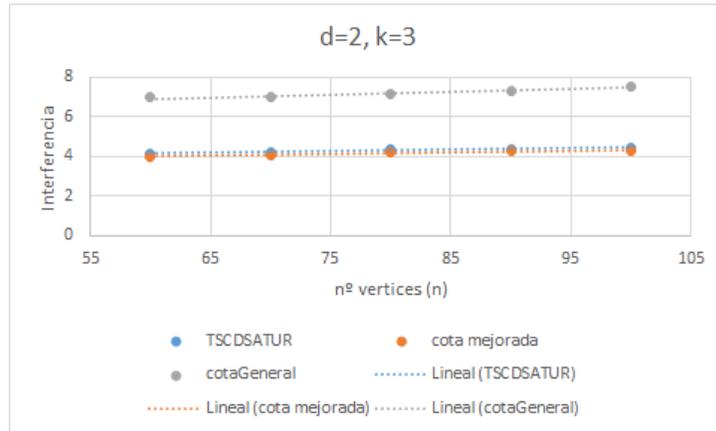


Figura 20: Comparación para la matriz con los valores señalados

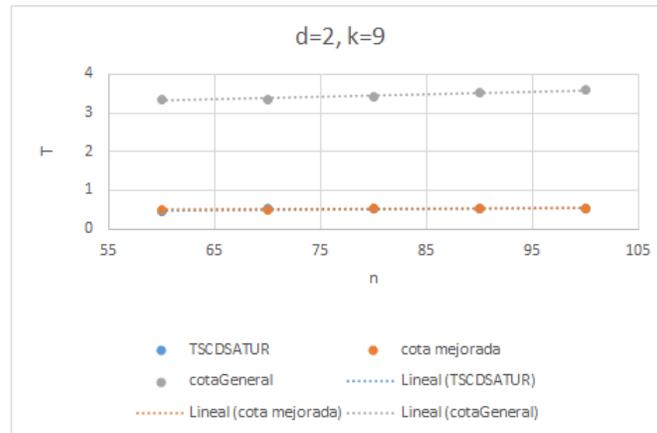


Figura 21: Comparación para la matriz con los valores señalados

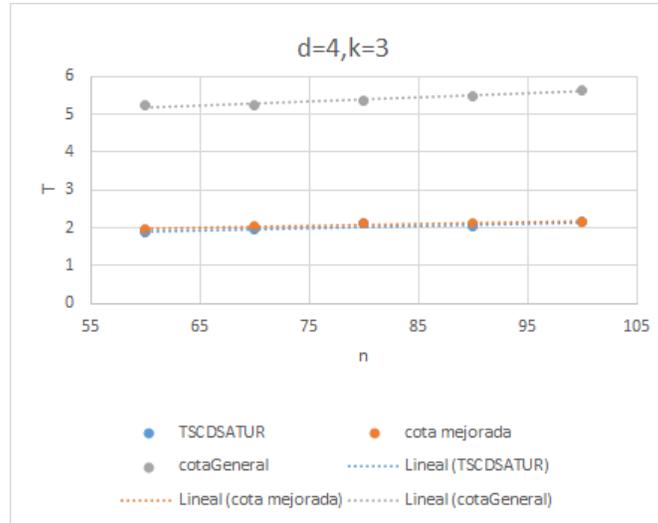


Figura 22: Comparación para la matriz con los valores señalados

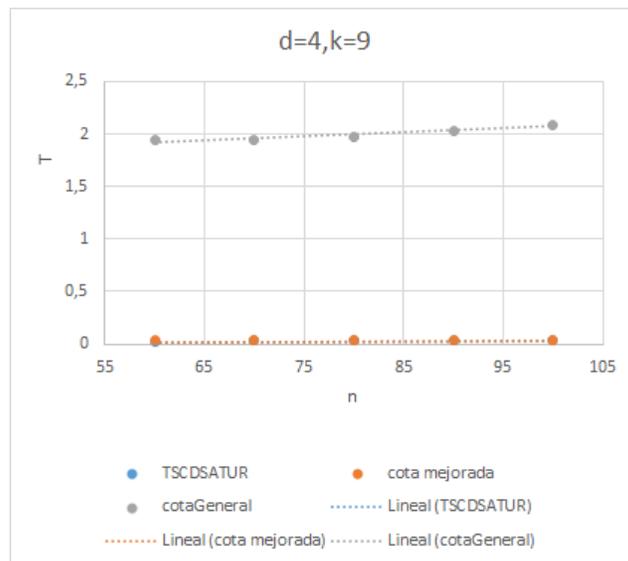


Figura 23: Comparación para la matriz con los valores señalados

7. Conclusión

Se han obtenido expresiones mejores que la expresión general del TSC para cotas en todos los casos anteriormente mencionados: mallas triangulares, triangulaciones de un ciclo, triangulaciones, cuadrangulaciones, pseudo-triangulaciones puntiagudas, mallas hexagonales. La posibilidad de obtener una expresión exacta parece factible en muchos casos, lo cual hace a algunas de las anteriores mejorables. La dificultad de la formalización matemática, mi gran descubrimiento como estudiante de informática en este trabajo, ha hecho que sólo haya podido considerar algunas posibles expresiones exactas como cotas, aun con la intuición de que eran exactas.

Esa intuición, si no ya de la exactitud al menos de la bondad de la cota establecida, se ha intentado probar también computacionalmente, para un tipo de grafo particular. Los resultados obtenidos han sido satisfactorios, las medidas prácticamente se solapan con dicha cota mejorada, con la que existen diferencias mínimas que pueden ser achacadas a errores del método, como pérdida de decimales.

La búsqueda de una cota para el umbral de un tipo particular de grafo ha supuesto un proceso que comenzaba con pruebas de casos particulares, queriendo encontrar los vértices dominantes del mismo y un coloreado mínimo que lleve a ellos, gracias al cual se encontraban expresiones para interferencia de dichos vértices, las cuales posteriormente se probaban.

Esas expresiones dependían habitualmente de una serie de características comunes, siendo éstas: los grados del grafo y el esquema del mismo, el número de vértices totales del grafo, el número cromático del mismo y por supuesto de los valores de la matriz de interferencias. Como trabajo futuro, se pueden obtener fácilmente expresiones para más tipos de matrices decrecientes. Un poco más complicado pero posible a partir de los estudios de este trabajo es buscar una cota para matrices decrecientes generales, o incluso para matrices generales simétricas donde todos sus valores sean menores que los monocromáticos (ya que como se explica al principio del trabajo, si los monocromáticos son los mínimos de la matriz la solución es trivial), por ejemplo a través del orden de menor a mayor de las interferencias de la matriz, mínimo valor, segundo... etc.

Podemos ver que a menudo existe una clara relación con el número cromático del grafo, ya que aunque no siempre sea necesario o mejor evitar aristas monocromáticas, sí que está claro que para matrices decrecientes suponen la mayor interferencia posible, y como poco se querrá minimizar su existencia. Sería fácil pues obtener una cota superior mejor que la general para todos los grafos planos, independientemente de su composición, partiendo del conocido teorema de los cuatro colores, el cual dice que todo grafo plano es 4-coloreable. Si consideramos

los coloreados propios para un tipo de matriz de interferencias, obtendríamos posiblemente una expresión que sería un poco más cercana que la general a la real, lo cual supone otro planteamiento para la continuación del estudio.

Por otro lado, obtener expresiones como tal para el CSC no ha sido necesario, ya que en la mayor parte de los casos existía un número de colores a partir del cual el umbral ya no mejoraba, es decir, que para otros números mayor que ese, de usar específicamente todos los colores, y sin embargo una expresión dependiente del umbral dado t seguiría aumentando, así que se ha optado por la obtención de intervalos de umbral para cada color. Esto es en gran parte por la naturaleza de las matrices que se han estudiado.

Los problemas del TSC y el CSC dan lugar a coloraciones que a menudo se alejan de lo que podría ser considerado intuitivo en la búsqueda de la minimización de la interferencia. Por ejemplo, pueden a menudo ser impropias, y como lo que determina la interferencia máxima es el vértice dominante, existe una gran cantidad de posibles coloraciones para el mismo umbral o número cromático espectral. Esto último, en la práctica, por ejemplo en lo que a un sistema de comunicación inalámbrica se refiere, no es una característica deseable, ya que todos los clientes quieren disponer de la mejor conexión posible y por tanto de la menor interferencia. Es por eso que en lugar de hablar de la menor interferencia máxima en un vértice, resultaría interesante hablar de la menor interferencia total posible, y transformar los problemas estudiados en unos derivados de este concepto.

Obviamente, una continuación posible sería estudiar todavía más tipos de grafos. Especialmente, hacer un estudio de casos prácticos de redes WiFi, de varios AP de una zona geográfica por ejemplo, sus interferencias reales y la forma en que se distribuyen los nodos, de manera que obtengamos tipos de grafos y matrices para resolver según el modelo.

Para finalizar, personalmente he de decir que este trabajo me ha mostrado la belleza y la dificultad de tratar con los aspectos más teóricos de mi campo. Problemas, que como infinitas muñecas rusas se esconden uno dentro de otro sorprendiéndote con su aparición, dan lugar a soluciones en las que hay que tratar de aunar conocimiento e imaginación, obligándote a una mejora continua.

Referencias

- [1] Karen I. Aardal, Stan P.M. van Hoesel, Arie M.C.A. Koster, Carlo Mannino, and Antonio Sassano. Models and solution techniques for frequency assignment problems. *Annals of Operations Research*, 153(1):79–129, 2007.
- [2] Oswin Aichholzer, Franz Aurenhammer, Thomas Hackl, Clemens Huemer, Alexander Pilz, and Birgit Vogtenhuber. 3-colorability of pseudo-triangulations. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 25(04):283–298, 2015.
- [3] Julio Araujo, Jean-Claude Bermond, Frédéric Giroire, Frédéric Havet, Dorian Mazauric, and Remigiusz Modrzejewski. Weighted improper colouring. *Journal of Discrete Algorithms*, 16:53–66, 2012.
- [4] Alessandro Bazzi. On uncoordinated multi user multi RAT combining. In *Vehicular technology conference (VTC Fall), 2011 IEEE*, pages 1–6. IEEE, 2011.
- [5] Hans L Bodlaender, Ton Kloks, Richard B Tan, and Jan van Leeuwen. λ -coloring of graphs. In *Lecture Notes in Computer Science*, volume 1770, pages 395–406. Springer, 2000.
- [6] Sean Cleary, Andrew Rechnitzer, and Thomas Wong. Common edges in rooted trees and polygonal triangulations. *The electronic journal of combinatorics*, 20(1):P39, 2013.
- [7] Zong Woo Geem, Joong Hoon Kim, and GV Loganathan. A new heuristic optimization algorithm: Harmony search. *Simulation*, 76(2):60–68, 2001.
- [8] A Hagberg, D Schult, and P Swart. Networkx: Python software for the analysis of networks. Technical report, Mathematical Modeling and Analysis, Los Alamos National Laboratory, <http://networkx.lanl.gov>, 2005.
- [9] Frank Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley Series in Mathematics. Addison Wesley, 1969.
- [10] C. Li and S. Yang. An adaptive learning particle swarm optimizer for function optimization. In *2009 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, pages 381–388, May 2009.
- [11] Jesús A. De Loera, Jörg Rambau, and Francisco Santos Leal. *Triangulations of point sets – applications, structures, algorithms*. 2003.
- [12] B. H. Metzger. Spectrum management technique, 1970. Presentation at 38th National ORSA meeting (Detroit, MI).
- [13] David Orden, Ivan Marsá-Maestre, José Manuel Giménez-Guzmán, and Enrique de la Hoz. Spectrum graph coloring and applications to WiFi channel assignment. *arXiv preprint arXiv:1602.05038*, 2016.

- [14] Panos M. Pardalos, Thelma Mavridou, and Jue Xue. *The Graph Coloring Problem: A Bibliographic Survey*, pages 1077–1141. Springer US, Boston, MA, 1999.
- [15] R.C. Read and R.J. Wilson. *An Atlas of Graphs*. Oxford science publications. Clarendon Press, 1998.
- [16] Sebastian Robitzsch, John Fitzpatrick, Seán Murphy, and Liam Murphy. Behind-the-scenes of ieee 802.11 a based multi-radio mesh networks: a measurement driven evaluation of inter-channel interference. 2010.
- [17] Gunter Rote, Francisco Santos, and Ileana Streinu. Pseudo-triangulations-a survey. *Contemporary Mathematics*, 453:343–410, 2008.
- [18] Alexa Sharp. Distance coloring. In *Lecture Notes in Computer Science*, volume 4698, pages 510–521. Springer, 2007.
- [19] Larry Stockmeyer. Planar 3-colorability is polynomial complete. *SIGACT News*, 5(3):19–25, July 1973.

8. Anexo

A.

Cuadro 2: Error cota general

Cota mejorada	Cota general	Error
4	7	175
0,49375	3,354166667	679,3249
1,975	5,25	265,8228
0,03125	1,94140625	6212,5
4,05	7	172,8395
0,50625	3,354166667	662,5514
2,025	5,25	259,2593
0,031640625	1,94140625	6135,802
4,25	7,133333333	167,8431
0,53125	3,418055556	643,3987
2,125	5,35	251,7647
0,033203125	1,978385417	5958,431
4,3	7,333333333	170,5426
0,5375	3,513888889	653,7468
2,125	5,5	258,8235
0,033203125	2,033854167	6125,49
4,3	7,533333333	175,1938
0,5375	3,609722222	671,5762
2,15	5,65	262,7907
0,03359375	2,089322917	6219,38
		1806,104

B.

Cuadro 3: Error cota mejorada

TSCDSATUR	ALHSO	ALPSO	Cota mejorada	Cota general	Error
4,125	5,175	5,38	4	7	103,125
0,454296875	1,339023	1,682891	0,49375	3,354166667	92,00949
1,89375	3,373125	3,65125	1,975	5,25	95,88608
0,02775116	0,386571	0,796376	0,03125	1,94140625	88,80371
4,25	5,1625	5,5675	4,05	7	104,9383
0,5125	1,296641	1,85207	0,50625	3,354166667	101,2346
1,95	3,3325	3,843125	2,025	5,25	96,2963
0,030859375	0,366811	0,965319	0,031640625	1,94140625	97,53086
4,4	5,235	5,5975	4,25	7,133333333	103,5294
0,51484375	1,282305	1,882461	0,53125	3,418055556	96,91176
2,1	3,29	3,83375	2,125	5,35	98,82353
0,03243103	0,357847	1,017096	0,033203125	1,978385417	97,67463
4,375	5,435	5,765	4,3	7,333333333	101,7442
0,5125	1,336953	2,115938	0,5375	3,513888889	95,34884
2,05	3,385625	4,09875	2,125	5,5	96,47059
0,031640625	0,379555	1,162684	0,033203125	2,033854167	95,29412
4,425	5,4	5,8525	4,3	7,533333333	102,907
0,5375	1,325977	2,121367	0,5375	3,609722222	100
2,15	3,44	4,2875	2,15	5,65	100
0,03359375	0,54248	1,280804	0,03359375	2,089322917	100
					98,42642

C.

```
#Parte del código de generación de cotas generales
fo = open("cotasGenerales_n100.txt", "wb")

d=2
k=3
cont=0

for i in range(1,int(math.floor(k/2))+1):
    cont= cont + 1.0/(d**i)
    print i
    print cont

print "Norma w"
normaW=1+2*cont;
print normaW
print "Para d=2, k=3"
fo.write("Para d=2, k=3 \n")
```

D.

```
#Parte del código para cotas mejoradas
fo = open("cotas_n100.txt", "wb")

d=2
k=3

print "Para d=2, k=3"
fo.write("Para d=2, k=3 \n")

for x in range(0, 10):

    string= "grafo_n60_"+str(x)+".gml"
    mygraph=nx.read_gml(string)
    degrees=sorted(nx.degree(mygraph).values())
    degrees.reverse()
    g1= degrees[0]
    g3= degrees[2]
```

```

#Para k impar
if g1<=g3*2/(1+1/(d**(math.floor(k/2)))):
    T= g3*(1/d**(math.floor(k/2)))
else:
    T=math.ceil(g1/2)*(1/d**(k-1))+math.floor(g1/2)*(1/d**(math.floor(k/2)))

print T
fo.write( str(T)+"\n")

```

E.

#Generación de triangulaciones

```

def triangulaciones(G): #es innecesario que guarde el grafo, con los nodos valdria

    vertices=sorted(random.sample(G.nodes(), 3))
    v1=vertices[0]
    v2=vertices[1]
    v3=vertices[2]

    print "triang"
    print v1
    print v2
    print v3

    D=nx.DiGraph()
    D.add_cycle(sorted(G.nodes()))

    if nx.shortest_path_length(D,source=v1,target=v2)>=3:

        restoGrafo=copy.deepcopy(G) #de nuevo innecesario si guardara solo nodos
        #me quedo con lso nodos que todavia queden que esten comprendidos entre v1 y v2
        escogidos=[elem for elem in G.nodes() if elem >= v1 and elem <=v2]
        restoGrafo.remove_nodes_from(list(set(G.nodes()) - set(escogidos)))
        triangulaciones(restoGrafo)

    if nx.shortest_path_length(D,source=v2,target=v3)>=3:

        restoGrafo2=copy.deepcopy(G)
        escogidos2=[elem for elem in G.nodes() if elem >= v2 and elem <=v3]
        restoGrafo2.remove_nodes_from(list(set(G.nodes()) - set(escogidos2)))
        triangulaciones(restoGrafo2)

    if nx.shortest_path_length(D,source=v3,target=v1)>=3:

```

```

    restoGrafo3=copy.deepcopy(G)
    escogidos3=[elem for elem in G.nodes() if elem >= v3 or elem <=v1]
    restoGrafo3.remove_nodes_from(list(set(G.nodes()) - set(escogidos3)))
    triangulaciones(restoGrafo3)

H.add_edge(v1,v2)
H.add_edge(v2,v3)
H.add_edge(v3,v1)

total=100

for x in range(0, 10):

    H=nx.cycle_graph(total)

    triangulaciones(H)
    string= "grafo_n100_"+str(x)+".gml"
    nx.write_gml(H,string)

```

F.

Cuadro 4: Ejemplo obtención medias de la cota mejorada

n=60			
caso 1	caso 2	caso 3	caso 4
3,5	0,4375	1,75	0,027344
3,5	0,4375	1,75	0,027344
4	0,5	2	0,03125
3,5	0,4375	1,75	0,027344
4	0,5	2	0,03125
4	0,5	2	0,03125
4,5	0,5625	2,25	0,035156
5	0,5625	2,5	0,039063
4	0,5	1,75	0,03125
4	0,5	2	0,03125
40	4,9375	19,75	0,3125