

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ



DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

**Estimación de Dirección de Llegada Basada en
Métodos de Optimización Metaheurística
Mediante un Único Muestreo**

Borja Errasti Alcalá

TESIS DOCTORAL

Alcalá de Henares 2012

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ



DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

**Estimación de Dirección de Llegada Basada en
Métodos de Optimización Metaheurística
Mediante un Único Muestreo**

Autor: Borja Errasti Alcalá
Directores: Raúl Fernández Recio
Carlos Delgado Hita

Tesis Doctoral presentada en la
Universidad de Alcalá para la obtención del
Título de Doctor Ingeniero de Telecomunicación

Alcalá de Henares 2012

CERTIFICADO DEL DIRECTOR DE LA TESIS

Dr. Raúl Fernández Recio, Científico Superior de la Defensa.

Dr. Carlos Delgado Hita, Profesor Interino Titular de Universidad del Departamento de Ciencias de la Computación de la Universidad de Alcalá.

HACEN CONSTAR:

Que la tesis titulada “*Estimación de Dirección de Llegada Basada en Métodos de Optimización Metaheurística Mediante un Único Muestreo*” presentada por Borja Errasti Alcalá, para optar al título de Doctor por la Universidad de Alcalá, ha sido realizada en el Departamento de Ciencias de la Computación de la Universidad de Alcalá y reúne las condiciones exigidas a los trabajos de Doctorado.

Alcalá de Henares, Diciembre de 2012

Director de Tesis	Codirector de Tesis
Fdo.: Dr. Raúl Fernández Recio	Fdo.: Dr. Carlos Delgado Hita

Dr. Manuel Felipe Cátedra Pérez, Director de la Comisión Académica del Programa de Doctorado en Computación Científica y Aplicada de la Universidad de Alcalá.

HACE CONSTAR:

Que la tesis titulada “*Estimación de Dirección de Llegada Basada en Métodos de Optimización Metaheurística Mediante un Único Muestreo*” presentada por Borja Errasti Alcalá, para optar al título de Doctor por la Universidad de Alcalá y dirigida por D. Raúl Fernández Recio y D. Carlos Delgado Hita, ha sido realizada en el Departamento de Ciencias de la Computación de la Universidad de Alcalá y reúne las condiciones exigidas a los trabajos de Doctorado.

Alcalá de Henares, Diciembre de 2012

Manuel Felipe Cátedra Pérez

A mis padres.

Agradecimientos

La realización de esta tesis doctoral ha sido posible gracias a la beca “Rafael Calvo Rodés” para Formación de Personal Investigador con código TD 05/08 concedida al autor por el Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial “Esteban Terradas”.

Agradezco en primer lugar a mi director de tesis, R. Fernández Recio, por su apoyo, su paciencia, sus consejos y sus ánimos.

Agradezco también a C. Delgado Hita, codirector de esta tesis, por su buena disposición.

Agradezco a los miembros del Laboratorio de Detectabilidad y Guerra Electrónica del INTA y a los habitantes del B-14 por los buenos momentos. Agradezco particularmente a D. Poyatos Martínez, J. A. Aguilar Rosado, D. Escot Bocanegra e I. Montiel Sánchez por todo lo aprendido. Agradezco especialmente a E. de Diego Custodio por confiar en mi para los ensayos de Guerra Electrónica en CEDEA y muy especialmente a mis compañeros destacados en el T-01, A. Jurado Lucena y M. I. Martín Galindo, con quienes el *exilio* se hizo más llevadero.

Agradezco a la Universidad de Alcalá y al Departamento de Ciencias de la Computación, por poner los medios para que esta tesis sea una realidad.

Agradezco a mis antiguos profesores en la Escuela de Ingenieros de mi *alma máter*, la Universidad de Navarra, por las buenas enseñanzas recibidas y por fomentar en mi el amor a la ciencia. Agradezco particularmente a C. Ortiz de Solórzano, A. Muñoz Barrutia, T. Pengo, J. J. de Miguel Sicilia, I. Sancho Seuma, P. Crespo Bofill, A. Muñoz Emparan y A. Salterain Ezkerra. Agradezco especialmente a A. Avello Iturriagagoitia por su excelente asesoramiento.

Agradezco también a mis antiguos profesores de la Universidad Politécnica de Madrid y a mis profesores de la Universidad Nacional de Educación a Distancia, por poner los medios para saciar, en la medida de lo posible, mi curiosidad científica y matemática

respectivamente.

Agradezco a mis fuentes de inspiración: G. F. Händel, F. Chopin y J. S. Bach, entre otros.

Agradezco a Macu, por aguantarme.

Agradezco a *los jaudos*. Particularmente a J. L. Valentín Argómaniz (*Txele*) por su activa colaboración en esta tesis mediante la aportación de tres figuras.

Agradezco finalmente a mi familia. Agradezco a mis hermanos por el buen ejemplo que siempre han sabido darme y por sus buenos y sabios consejos. A mis padres tengo tanto que agradecerles que no sabría por dónde empezar. Me limitaré, pues, a dejar por escrito que les quiero.

Abstract

Over the last few decades, important technological developments have been introduced and applied in the field of Radar and Electronic Warfare. One of the challenges that has been the aim of a big effort by the scientific community is the estimation of the Direction Of Arrival (DOA) of a set of plane waves impinging on an array using fewer *snapshots*. The extreme case in which only one snapshot is available, commonly known as *Single Snapshot* DOA estimation, is still an open problem.

This dissertation tackles that problem and proposes a method to solve it by making use of a powerful tool with applications in very diverse fields, that is, metaheuristic optimization methods.

The proposed method for solving the Single Snapshot DOA estimation consists of building and then minimizing a function whose inputs are the directions of arrival of the incoming signals, which are to be estimated, and its output is a real number. The construction of this function makes use of the induced complex voltages read at the terminals of the antennas and its main characteristic is that, in the absence of noise, it has its absolute minimum in the point where the input matches the directions of arrival of the incoming waves. Moreover, in that case, the value of the absolute minimum is exactly zero.

The potential of this function is observed all along the dissertation as it is used to estimate not only the directions of arrival of a set of incoming waves, but also their two-dimensional directions of arrival along with their frequency, both in noisy and noiseless scenarios as well as in uniform and non-uniform arrays.

A modification of this function is also presented to allow its usage in scenarios where the effects of mutual coupling and the directivity of the antennas of the array are not negligible. This modification, based on the use of numerical electromagnetic simulations, is fully consistent with the original construction of the function and permits its

straightforward extrapolation to the two-dimensional direction of arrival and frequency estimation.

The minimization of this function, which, as its construction, is one of the main points of the method, is accomplished by a metaheuristic optimization method. For that reason, a study on the application of five different metaheuristic optimization methods is included and their performance is compared using different criteria. All of the presented optimization methods are based on behaviours of phenomena present in nature: some of them are based on the *evolutionary* paradigm and some others are based on what is called *Swarm Intelligence*.

For the evaluation of the performance of the proposed method, the Cramér-Rao Bound has been obtained for the particular case of two-dimensional direction of arrival and frequency estimation using a Single Snapshot and also for the case when the mutual coupling is taken into account. In both cases, the estimation is efficient, from the statistical point of view.

Resumen

A lo largo de las últimas décadas, se han desarrollado importantes mejoras tecnológicas con aplicación en el campo del Radar y la Guerra Electrónica. Uno de los desafíos a los que la comunidad científica ha dedicado un gran esfuerzo es el de la estimación de dirección de llegada de un conjunto de ondas planas incidentes sobre un array mediante un número cada vez menor de muestreos temporales o *snapshots*. El caso extremo en el que solamente se dispone de un único muestreo de las señales incidentes, comúnmente conocido como *Single Snapshot* sigue siendo un problema que no se ha dado por resuelto.

La presente tesis aborda precisamente ese problema y propone un método para darle solución haciendo uso de una potente herramienta de aplicación en multitud de campos: los métodos de optimización metaheurística.

El método propuesto se basa en la construcción y posterior minimización de una función cuyas variables independientes son las direcciones de llegada de las señales incidentes que se desea estimar, y cuya variable dependiente es un número real. Esta función, en cuya construcción se hace uso de las tensiones complejas leídas en los bornes de las antenas que forman el array, tiene la peculiaridad de que, en ausencia de ruido, alcanza su mínimo absoluto cuando los valores de las variables independientes corresponden exactamente con valores de las direcciones de llegada de las señales incidentes. Además, en tal caso, dicho mínimo absoluto vale cero.

El potencial de esta función queda patente a lo largo de la tesis, observándose que, mediante su uso, se es capaz de estimar de forma correcta no solo la dirección de llegada de un conjunto de señales, sino la dirección de llegada bidimensional al mismo tiempo que la frecuencia, tanto en entornos sin ruido como en entornos ruidosos y tanto en arrays uniformes como no uniformes.

Se presenta también una modificación de la función basada en el uso de simulaciones

electromagnéticas que permiten su adaptación a situaciones en las que los acoplos entre los elementos del array o su directividad deban ser tenidos en cuenta. Esta modificación es plenamente coherente con la construcción original de la función y permite su extrapolación inmediata a la estimación de dos direcciones de llegada y la frecuencia.

La minimización de esta función, que al igual que su construcción es uno de los puntos claves del método propuesto, se lleva a cabo mediante el uso de métodos de optimización metaheurística. Se incluye, por tanto, un estudio de la aplicación de cinco métodos metaheurísticos distintos, todos ellos basados en fenómenos presentes en la naturaleza, y se analiza su rendimiento desde distintas perspectivas. Entre estos métodos de optimización metaheurística se encuentran algunos de los conocidos como *evolutivos* y otros basados en inteligencia de enjambres o *Swarm Intelligence*.

Para la evaluación del rendimiento del método propuesto se ha obtenido la Cota de Cramér-Rao para el caso de la estimación de dos direcciones de llegada y la frecuencia mediante un único muestreo y se ha presentado también una modificación de dicha Cota para la comparación del rendimiento del método en el caso de utilizar la modificación para entornos acoplados. En ambos casos, la estimación de los parámetros es eficiente desde el punto de vista estadístico.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Introducción	1
1.2. Objetivos	3
1.3. Hipótesis de trabajo	4
1.4. Método de trabajo	5
1.5. Descripción del método propuesto	5
1.6. Estructura de la tesis	7
2. Revisión del Estado del Arte	11
2.1. Técnicas de Estimación de Dirección de Llegada	11
2.1.1. Estimación bidimensional de dirección de llegada y de la frecuencia	17
2.1.2. Single Snapshot	18
2.2. Técnicas de compensación de acoplo mutuo	19
2.3. Técnicas metaheurísticas de optimización	21
3. Estimación Multidimensional de Dirección de Llegada	23
3.1. Introducción	23
3.2. Planteamiento y solución propuesta.	24
3.2.1. Solución propuesta	25
3.3. Estimación de un ángulo por señal	29
3.4. Estimación de la amplitud compleja	37
3.4.1. Obtención de la amplitud aumentando el espacio de solución . .	37
3.4.2. Obtención de la amplitud y la fase sin aumentar el espacio de solución	39
3.5. La Cota de Cramér-Rao	40
3.5.1. Obtención de la cota	42

3.5.2. Obtención de la cota mediante cálculo simbólico	45
3.6. Estimación de la dirección de llegada y la frecuencia	45
3.7. Estimación conjunta de dos ángulos y la frecuencia	57
3.8. Conclusión	81
4. El Problema de los Acoplos Mutuos	83
4.1. Introducción	83
4.2. El problema de los acoplos mutuos	84
4.3. Solución propuesta y metodología utilizada: una nueva función de ajuste	87
4.4. La Cota de Cramér-Rao en entornos acoplados	90
4.4.1. Obtención de la cota en el caso con acoplos	91
4.5. Evaluación del rendimiento	93
4.5.1. Array lineal logarítmico de dipolos	95
4.5.2. Array circular uniforme de dipolos	96
4.5.3. Array lineal de bocinas	98
4.5.4. Array lineal de bocinas con una estructura externa y direcciones de llegada arbitrarias	103
4.6. Conclusión	112
5. Optimización Metaheurística	115
5.1. Introducción	115
5.2. Optimización metaheurística	116
5.3. Optimización por Enjambre de Partículas	119
5.4. Optimización por Colonia de Hormigas en dominios continuos	129
5.5. Algoritmo Genético	138
5.6. Evolución Diferencial	140
5.7. Simulated Annealing	142
5.8. Comparativa de los cinco métodos	143
5.8.1. Prueba de Convergencia	144
5.8.2. Prueba de Precisión	147
5.8.3. Prueba de Resolución	153
5.9. Conclusión	154
6. Conclusiones y Futuras Líneas de Investigación	157
6.1. Conclusiones	157

Índice

6.2. Futuras líneas de investigación	159
Acrónimos	161
Lista de símbolos	163
Publicaciones del Autor	167
Bibliografía	171

Índice de figuras

3.1. Descripción del sistema de coordenadas esféricas.	25
3.2. Array Lineal Uniforme, orientado según el eje z	30
3.3. Tasa de convergencia. Umbral en la función de ajuste: $\varepsilon = 10^{-6}$. Número máximo de iteraciones: $N_{iter-lim} = 5000$	32
3.4. Error angular medio en función de los valores de la función de ajuste . .	32
3.5. Numero de iteraciones necesarias para alcanzar cierto valor de la función de ajuste	33
3.6. Error Angular frente a la SNR	34
3.7. Separación detectada vs separación incidente	35
3.8. Error Angular vs dirección de llegada	36
3.9. Distribución del error medio.	38
3.10. Array bidimensional sobre el plano $\phi = 0$	47
3.11. RMSE frente a la SNR para la simulación aleatorizada en un array bi- logarítmico con $L_x = 4$, $N_x = 2\lambda$, $L_z = 5$ y $N_z = 2.5\lambda$	50
3.12. MSE en dirección de llegada, frente al número de iteraciones para señales fijas en un array bi-logarítmico con $L_x = 6$, $N_x = 3\lambda$, $L_z = 5$ y $N_z = 2.5\lambda$	52
3.13. MSE en frecuencia, frente al número de iteraciones para señales fijas en un array bi-logarítmico con $L_x = 6$, $N_x = 3\lambda$, $L_z = 5$ y $N_z = 2.5\lambda$	52
3.14. MSE (dB) en dirección de llegada, frente a la SNR para señales fijas en un array bi-logarítmico con $L_x = 6$, $N_x = 3\lambda$, $L_z = 5$ y $N_z = 2.5\lambda$	53
3.15. MSE (dB) en frecuencia, frente a la SNR para señales fijas en un array bi-logarítmico con $L_x = 6$, $N_x = 3\lambda$, $L_z = 5$ y $N_z = 2.5\lambda$	54
3.16. MSE en dirección de llegada frente al número de iteraciones para un Array Circular Uniforme o <i>Uniform Circular Array</i> (UCA) de $L = 16$ elementos.	55

Índice de figuras

3.17. MSE en frecuencia, frente al número de iteraciones para un UCA de $L = 16$ elementos.	55
3.18. MSE (dB) en dirección de llegada, frente a la SNR para un UCA de $L = 16$ elementos.	56
3.19. MSE (dB) en frecuencia, frente a la SNR para un UCA de $L = 16$ elementos.	56
3.20. RMSE para frecuencia y dirección de llegada en función de $\Delta\theta$ y Δf , para varias SNRs.	58
3.21. Los arrays formados por los ejes coordenados ($2L$).	62
3.22. Los arrays formados por los planos coordenados(PL).	63
3.23. Los arrays cúbicos (CB).	64
3.24. Los arrays tri-logarítmicos (LOG).	65
3.25. Los arrays semiesféricos (SPH).	66
3.26. Cortes de la función de ajuste, desde el punto $\theta = 70^\circ, \phi = 210^\circ, f = 308$ MHz	70
3.27. Precisión del array $CB12$	74
3.28. Precisión del array $CB27$	75
3.29. Precisión del array $LOG12$	76
3.30. Precisión del array $LOG27$	77
3.31. Resolución para los arrays $CB12, CB27, LOG12$ y $LOG27$, en ausencia de ruido.	79
3.32. Errores medios y Varianzas de los estimadores frente al número de ejecuciones realizadas. SNR=20dB. Array SPH25	80
4.1. Array Lineal Logarítmico de Dipolos	85
4.2. Tensión inducida con y sin acoplos.	85
4.3. RMSE con las tensiones inducidas calculadas mediante dos métodos	86
4.4. Comparación entre la tensión exacta y la obtenida por interpolación.	91
4.5. Vector director, para uno de los sensores, obtenido por simulación electromagnética y los resultados obtenidos mediante la matriz de acoplo en entornos de las señales incidentes.	94
4.6. RMSE en función del ángulo de incidencia, SNR = ∞	98
4.7. Cada una de las bocinas del array. Cotas en milímetros	100
4.8. Array Lineal Uniforme de Bocinas	101

Índice de figuras

4.9. Diagrama de radiación normalizado (dB) de una bocina	101
4.10. RMSE frente a SNR para varios números de iteraciones, con $M = 1$. . .	102
4.11. RMSE frente al número de iteraciones para varios valores de la SNR, con $M = 2$	103
4.12. Array Lineal Uniforme de Bocinas con dos planos extra.	104
4.13. Gráficas de error para el primer caso $\theta_1 = 86.72375^\circ$, junto con la CRB	105
4.14. Gráficas de error para el segundo caso $\theta_1 = 138.2156^\circ$, junto con la CRB	107
4.15. Gráficas de error para el primer caso $\theta_1 = 86.7237^\circ; \theta_2 = 96.67291^\circ$, junto con la CRB	110
4.16. Gráficas de error para el segundo caso $\theta_1 = 76.1567^\circ; \theta_2 = 96.67291^\circ$, junto con la CRB	112
5.1. Representación gráfica del número de partículas en cada iteración de PSO.	124
5.2. Histogramas de los parámetros optimizados con PSO.	140
5.3. MSE (dB) tras $N_{eval-lim} = 1000$ evaluaciones de la función de ajuste . .	148
5.4. MSE (dB) tras $N_{eval-lim} = 2000$ evaluaciones de la función de ajuste . .	149
5.5. MSE (dB) para una SNR de 10dB.	150
5.6. MSE (dB) para una SNR de 20dB.	151
5.7. MSE (dB) para una SNR de 30dB.	152
5.8. Separación angular detectada y separación angular incidente junto con el comportamiento ideal y la tendencia.	154

Índice de tablas

3.1. Esquema del método propuesto	29
3.2. Nuevo esquema del método propuesto	41
3.3. Desglose de las configuraciones de los arrays semiesféricos	67
3.4. Tasa de convergencia (porcentaje) para las diferentes geometrías de array. $M = 1$. SNR=30 dB	68
3.5. Tasa de convergencia (porcentaje) para las diferentes geometrías de array. $M = 2$. SNR=30 dB	68
3.6. Tasa de convergencia (porcentaje) para diferentes geometrías de array. $M = 2$, $\varepsilon_\theta(i) = 3\sigma_\theta(i)$, $\varepsilon_\phi(i) = 3\sigma_\phi(i)$, $\varepsilon_f(i) = 3\sigma_f(i)$, $N_{eval-lim} = 6000$.	73
4.1. Tasa de convergencia (porcentaje) para diferentes radios los dipolos. $M = 1$, SNR = 20 dB, $\varepsilon_\theta(1) = 1^\circ$	96
4.2. Tasa de convergencia (porcentaje) para diferentes radios los dipolos. $M = 3$, SNR = 20 dB, $\varepsilon_\theta(i) = 3^\circ$	97
4.3. Tasa de convergencia (porcentaje) para diferentes SNRs. Primer caso: $M = 1$, $\theta_1 = 86.72375^\circ$, $\varepsilon_\theta(1) = 3\sigma_{\theta_1}$	106
4.4. Tasa de convergencia (porcentaje) para diferentes SNRs. Segundo caso. $M = 1$, $\theta_1 = 138.2156^\circ$, $\varepsilon_\theta(1) = 3\sigma_{\theta_1}$	108
4.5. Tasa de convergencia (porcentaje) para diferentes SNRs. Primer caso. $M = 2$, $\theta_1 = 86.72370^\circ$, $\theta_2 = 96.67291^\circ$, $\varepsilon_\theta(i) = 3\sigma_{\theta_i}$	110
4.6. Tasa de convergencia (porcentaje) para diferentes SNRs. Segundo caso. $M = 2$, $\theta_1 = 76.1567^\circ$, $\theta_2 = 96.67291^\circ$, $\varepsilon_\theta(i) = 3\sigma_{\theta_i}$	111
5.1. Diferentes patrones de partículas	123
5.2. Tasa de Convergencia (porcentaje). SNR = 20 dB. Umbral: $\varepsilon_\theta(i) =$ $\varepsilon_\phi(i) = 1^\circ$; $\varepsilon_f(i) = 1$ MHz	126

5.3. Tasa de Convergencia (porcentaje). SNR = 20 dB. Umbral: $\varepsilon_\theta(i) = \varepsilon_\phi(i) = 3^\circ; \varepsilon_f(i) = 3 \text{ MHz}$	126
5.4. Tasa de Convergencia (porcentaje). SNR = 20 dB. Umbral: $\varepsilon_\theta(i) = \varepsilon_\phi(i) = 5^\circ; \varepsilon_f(i) = 5 \text{ MHz}$	127
5.5. Tasa de Convergencia (porcentaje). SNR = 30 dB. Umbral: $\varepsilon_\theta(i) = \varepsilon_\phi(i) = 1^\circ; \varepsilon_f(i) = 1 \text{ MHz}$	127
5.6. Tasa de Convergencia (porcentaje). SNR = 30 dB. Umbral: $\varepsilon_\theta(i) = \varepsilon_\phi(i) = 3^\circ; \varepsilon_f(i) = 3 \text{ MHz}$	128
5.7. Tasa de Convergencia (porcentaje). SNR = 30 dB. Umbral: $\varepsilon_\theta(i) = \varepsilon_\phi(i) = 5^\circ; \varepsilon_f(i) = 5 \text{ MHz}$	128
5.8. El archivo de soluciones de $ACO_{\mathbb{R}}$	131
5.9. Tasa de convergencia (porcentaje), para $\xi = 0.4$	135
5.10. Tasa de convergencia (porcentaje), para $\xi = 0.7$	135
5.11. Tasa de convergencia (porcentaje), para $\xi = 1$	136
5.12. Tasa de convergencia (porcentaje), para $\xi = 1.3$	136
5.13. Tasa de convergencia (porcentaje), para $\xi = 1.6$	137
5.14. Tasa de convergencia (porcentaje), para $\xi = 1.9$	137
5.15. Tasa de convergencia (porcentaje), $N_{lim} = 1000, \epsilon_{\theta_i} = 1^\circ$	145
5.16. Tasa de convergencia (porcentaje), $N_{lim} = 4000, \epsilon_{\theta_i} = 1^\circ$	145
5.17. Tasa de convergencia (porcentaje), $N_{lim} = 1000, \epsilon_{\theta_i} = 3^\circ$	146
5.18. Tasa de convergencia (porcentaje), $N_{lim} = 4000, \epsilon_{\theta_i} = 3^\circ$	146

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción

Desde las técnicas interferométricas más rudimentarias, el electromagnetismo y, particularmente, las ondas de radio se han convertido en una potente herramienta tanto el ámbito militar como el civil para detectar objetos a distancia e inferir su posición. Los sistemas que realizan esta tarea reciben el nombre de *RADAR* (*RA*dio *D*etection *A*nd *R*anging) y su funcionamiento se basa en la transmisión de una onda electromagnética que incide sobre el blanco y cuya reflexión es posteriormente recibida y analizada. Esa señal recibida incorpora de forma inherente información del cuerpo sobre el que se ha producido la reflexión y en función de las características y prestaciones del radar es posible inferir gran cantidad de información: los sistemas radar más primitivos detectaban exclusivamente la distancia al blanco a partir del tiempo entre la transmisión y la recepción de la onda, no obstante, los sistemas más modernos permiten transmitir y recibir señales más complejas e inferir también la altitud, el rumbo, la velocidad e incluso la geometría del blanco [1–4].

Estas mejoras en las prestaciones de los radares son consecuencia del avance científico, técnico y tecnológico en diversas áreas. Por otra parte, esos mismos avances tecnológicos también pueden ser incorporados a los blancos con el fin de impedir o, al menos, de dificultar las tareas de detección mediante radar.

Desde el punto de vista del radar, las principales mejoras en cuanto a sus prestaciones han sido propiciadas por los avances en electrónica (de semiconductores, de vacío, digital), electromagnetismo (uso de frecuencias más altas, sistemas de medida [5]) y ma-

temática aplicada (computación, métodos numéricos [6–8], inteligencia artificial [9,10]). Estas mejoras permiten construir sistemas que transmitan más potencia, que tengan más resolución o que extraigan más información sobre el blanco.

Desde el punto de vista del blanco se han utilizado las herramientas provistas por el avance tecnológico para desarrollar estrategias de protección contra el radar, conocidas como contramedidas o de forma más general, *Guerra Electrónica*. Estas contramedidas pueden ser clasificadas como pasivas y activas. Entre las contramedidas pasivas es conocido el uso de *chaff* para impedir la detección correcta de la señal radar enmascarándola con señales indeseadas aunque, cada vez más, las técnicas pasivas se basan sencillamente en impedir que el blanco sea detectado. Para ello se diseñan aeronaves con geometrías de baja observabilidad que reflejan la señal radar en direcciones diferentes de las de incidencia, dificultando su detección por parte de los radares monoestáticos y se utilizan materiales absorbentes que hacen que la onda reflejada sea de una magnitud muy pequeña, dificultando su detección también por radares biestáticos o multiestáticos. Entre las contramedidas activas más habituales están el uso de fuentes de ruido, la transmisión de señales indeseadas o la manipulación y posterior retransmisión de la propia señal radar [11]. Esta última estrategia consigue buenos resultados ya que, además de enmascarar la señal reflejada por el propio blanco, es capaz de hacer que el radar interprete como válida una información que es deliberadamente falsa. Así, un sistema que modifica y retransmite de forma coherente la señal enviada por el radar (generalmente, mediante el uso de una memoria digital de radio frecuencia o *DRFM*) puede hacer creer al enemigo que su posición es otra, que su rumbo es otro, que en lugar de una aeronave hay varias o incluso puede enviar al receptor información que le haga creer que la geometría del blanco es la que correspondería a otro tipo de aeronave [12].

Estos últimos sistemas de contramedidas tienen, por su propia construcción, un retardo o *lag* entre el instante en que son iluminados por la señal radar y el instante en que comienzan a transmitir la señal modificada. Pese a los esfuerzos por reducir al mínimo este tiempo, existe un intervalo en el que la única señal emitida por el blanco es la reflexión de la señal radar. Paralelamente, los esfuerzos desde el lado del radar pasan por utilizar cada vez menos muestreos temporales o *snapshots*, reduciendo así la probabilidad de que la señal recibida esté *contaminada*, es decir, garantizando cada vez con mayor probabilidad que la información recibida por el radar es legítima y no incorpora ninguna modificación con la intención de perturbar o dificultar la detección del blanco.

El caso extremo es la utilización de un único muestreo temporal, lo que se conoce como *Single Snapshot* para, a partir de él, inferir toda la información que sea posible acerca del blanco. La obtención de la información del blanco consiste realmente, en extraer información de la señal reflejada por él, y que es recibida por el radar en un array de antenas. La información que se puede extraer de un único *snapshot* es muy poca, pero suficiente para estimar la dirección de llegada de la señal, es decir, la dirección del espacio desde la que esa señal fue emitida, y también su frecuencia, que por efecto *Doppler* permite conocer su velocidad radial. Si se utiliza un sistema radar multiestático, esa información recogida en al menos dos puntos distintos permite realizar una estimación de la posición, el rumbo y la velocidad del blanco.

1.2. Objetivos

El objetivo fundamental de esta tesis es desarrollar y evaluar un método que permita la estimación eficiente de la dirección de llegada y la frecuencia de un conjunto de frentes de onda planos que inciden sobre un array de antenas mediante el uso de un único muestreo temporal o *snapshot*.

Son varias las características que debe cumplir el método propuesto. En primer lugar, debe ser válido tanto para arrays uniformes como no uniformes, es decir, conjuntos de antenas cuyos elementos estén o no estén todos a la misma distancia unos de otros. En general, debe ser válido para arrays arbitrarios. En segundo lugar, el método debe ser capaz de considerar o compensar de alguna forma los efectos de los acoplos mutuos entre elementos del array. Para evitar ambigüedades en el array, sus elementos deben estar próximos y cuanto más próximos entre sí están los elementos de un array, mayores son los efectos de los acoplos mutuos. En tercer lugar, la solución debe ser computacionalmente sencilla, permitiendo que se entregue una estimación de los parámetros estimados en un tiempo de unos pocos segundos. Por último, es deseable que el método sea eficiente en el sentido estadístico del término, es decir, que las estimaciones que proporcione, además de insesgadas, tengan la mínima varianza que pueda tener un estimador de esos parámetros.

1.3. Hipótesis de trabajo

Las hipótesis de trabajo adoptadas en esta tesis pueden ser divididas en dos grupos, atendiendo a si se mantienen durante toda la tesis, es decir, si son parte fundamental de la misma, o si son hipótesis consideradas en momentos concretos para permitir un avanzar hacia el desarrollo del método propuesto en su plena expresión.

Las hipótesis de trabajo que se mantienen presentes a lo largo de toda la tesis son las siguientes:

- Las señales incidentes sobre el array son frentes de onda planos.
- El número de señales incidentes es conocido *a priori*.
- La obtención de un muestreo en bornes de las antenas que forman el array es perfectamente simultánea e instantánea.
- Las tensiones inducidas en los bornes de las antenas que forman el array se conocen en coma flotante con doble precisión (64 bits).

Entre las hipótesis que es necesario asumir durante algunos puntos de la tesis y que permiten proponer soluciones parciales antes de ser suprimidas están las siguientes:

- El array utilizado es lineal y uniforme.
- Las antenas que forman el array son isotrópicas.
- Las señales incidentes están contenidas en un mismo plano.
- La frecuencia de todas las señales incidentes es fija y conocida.
- La amplitud y fase de todas las señales incidentes es fija y conocida.
- Los efectos de los acoplos mutuos entre los elementos que forman el array son nulos.

El hecho de dividir las hipótesis de trabajo en dos grupos permite hacerse una idea clara de cuáles son las restricciones realmente necesarias para el buen funcionamiento del método y cuales son aquellas que una vez utilizadas, pueden ser desechadas, dado que el método es capaz de operar correctamente en su ausencia.

1.4. Método de trabajo

El método de trabajo consiste en seguir una estrategia de *divide et impera*, consistente en dividir el problema general en problemas más pequeños que son resueltos de forma específica pero de forma que puedan integrarse de forma conjunta.

Así, el problema a resolver se divide en tres sub-problemas o etapas: en primer lugar, la estimación multidimensional de la dirección de llegada bajo las hipótesis de sensores isotrópicos y sin acoplos mutuos. En segundo lugar, la consideración de los citados acoplos mutuos y directividades de los sensores. Finalmente se aborda el uso de los métodos de optimización metaheurística, tema no considerado en las dos primeras partes pero que es una parte fundamental del método propuesto.

Para resolver el primero de ellos, es decir, la estimación multidimensional de la dirección de llegada se comienza con un problema más sencillo en el que las hipótesis de trabajo limitan la aplicabilidad del método. Una vez que se resuelve esta versión simplificada del problema y se estudia su rendimiento, se suprimen algunas de las hipótesis para formular un problema más complejo. De esta forma, al suprimir las hipótesis de trabajo el método se enriquece al ser capaz de operar en entornos menos restringidos.

Para la compensación de los acoplos mutuos se propone, para el caso de estimación de una dirección de llegada por señal, una estrategia basada en la simulación electromagnética cuya aplicación guarda coherencia con lo visto hasta el momento, de forma que sea plenamente integrable con el desarrollo de la primera etapa y su extrapolación a la estimación de dos direcciones de llegada y la frecuencia sea inmediata.

El tercer problema consiste en la comprobación de que el método puede funcionar utilizando cualquier algoritmo de optimización metaheurística y en la elección de un algoritmo apropiado, que se elige en virtud de un estudio comparativo de rendimiento. Las conclusiones de este estudio tienen aplicabilidad inmediata a lo visto para los dos primeros sub-problemas, ya que en ellos la optimización metaheurística se considera como una *caja negra* que realiza una función definida independientemente de la implementación concreta que pueda hallarse dentro.

1.5. Descripción del método propuesto

Como se acaba de exponer en la sección 1.4, el método propuesto se plantea en tres etapas, de modo que cada una de ellas resuelve un problema concreto y el conjunto de

las tres resuelve el problema global, cumpliendo así con el objetivo de la tesis. Cada una de las partes es una unidad de conocimiento independiente y útil por sí misma: en la primera etapa se abordan las generalidades del problema y se plantean los fundamentos del método para permitir la estimación multidimensional de la dirección de llegada con un único *snapshot*. En la segunda etapa, se aborda el problema de los acoplos mutuos y se propone una solución basada en el análisis numérico que es aplicable de forma inmediata a lo visto en la primera etapa. Finalmente, en la tercera etapa, se trata uno de los mecanismos de los que se ha hecho uso a lo largo de las dos primeras fases, la optimización metaheurística, y se propone el uso de un algoritmo concreto.

De esta forma, cada etapa hace uso de los conocimientos de varias ramas de la ciencia: la primera etapa hace uso del procesado de señal y el procesado de señal de arrays. En la segunda se utilizan los fundamentos del electromagnetismo, el análisis matemático y los métodos numéricos. La algoritmia y la optimización metaheurística, como parte de las ciencias de la computación, son de uso intensivo en la tercera y última etapa, pero están presentes a lo largo de todo el desarrollo del método de igual forma que la estadística, utilizada con profusión para evaluar los resultados.

El núcleo del método propuesto se basa en la construcción de una función que se denomina *función de ajuste* y que es una aplicación entre el conjunto de los valores que pueden tomar los parámetros que se desea estimar (direcciones de llegada y frecuencias) sobre el cuerpo de los números reales. La principal característica de esta función es que, en ausencia de ruido, tiene su mínimo absoluto en el punto en el que los valores de la variable independiente coinciden con los valores de los parámetros de las señales incidentes. Además, en ese punto, la función se anula. De este modo, optimizando la función, es decir, buscando su mínimo absoluto, se encuentran los valores de los parámetros de las señales incidentes. En presencia de ruido el mínimo global de la función no coincide de forma exacta con los valores de los parámetros ni dicho mínimo vale cero exactamente, pero de igual forma la minimización de la función de ajuste proporciona una estimación válida de los parámetros de las señales.

Para la compensación de los acoplos mutuos se propone una estrategia por la cual la construcción de la función de ajuste no se realiza utilizando las posiciones de los elementos del array ni ninguna de las características constructivas del mismo, sino el resultado de una simulación electromagnética mediante métodos numéricos, que puede ser ejecutada *a priori*. Además, para garantizar la aplicabilidad de esta estrategia al núcleo del método es necesario utilizar una técnica de interpolación que permite evaluar

de forma rápida la función de ajuste.

Finalmente, para la minimización de la función de ajuste se plantea el uso de métodos de optimización metaheurística, ya que no necesitan ninguna información de la función que están optimizando al margen, claro está, de los valores que resultan de su evaluación. De esta forma, estos métodos de optimización son útiles tanto cuando no se consideran los acoplos y la función de ajuste tiene una forma como cuando estos acoplos entran en consideración y la función de ajuste se calcula de forma diferente.

1.6. Estructura de la tesis

La tesis se estructura de la siguiente forma:

Capítulo 1. Introducción: El capítulo presente comienza por presentar de forma general el ámbito en el que se desarrolla la tesis y donde queda encuadrada desde el punto de vista de la aplicabilidad de los conceptos desarrollados. A continuación, en los apartados 1.2 y 1.3 se presenta de forma clara y concisa el objetivo de la tesis y se formulan las hipótesis de trabajo. En el apartado 1.4 se describe brevemente el método de trabajo adoptado y en la sección 1.5 se presenta una descripción del método propuesto. El primer capítulo termina presentando la estructura de la tesis.

Capítulo 2. Revisión del Estado del Arte: El segundo capítulo presenta, en la sección 2.1, una revisión bibliográfica de aquellos avances científico-técnicos y métodos propuestos para la resolución del problema de la estimación de dirección de llegada y, de forma más general, para el procesado de señal de array, desde los métodos que fundaron las bases de este campo del conocimiento hasta las tendencias actuales. Se incluyen referencias bibliográficas de aquellos campos concretos abordados en la presente tesis, incluyendo la estimación multiparamétrica de dirección de llegada en la sección 2.1.1 y la estimación mediante muestreo único en la sección 2.1.2. El apartado 2.2 revisa las técnicas de compensación de acoplos aplicadas a la estimación de dirección de llegada y finalmente, en la sección 2.3, se revisan las técnicas de optimización metaheurística y la aplicación de esas técnicas al electromagnetismo y al procesado de señal de arrays.

Capítulo 3. Estimación Multidimensional de la Dirección de Llegada: Este capítulo, junto con los dos siguientes, recoge de forma detallada el funcionamiento

del método propuesto así como el proceso llevado a cabo para su desarrollo y las tareas de evaluación del mismo. Concretamente, el capítulo 3 aborda los mecanismos que, en ausencia de acoplos mutuos y suponiendo la isotropía de los elementos del array, se utilizan para la estimación de dos direcciones de llegada y la frecuencia de un conjunto de ondas planas incidentes sobre una array. Tras la introducción, en la sección 3.2 se proponen hipótesis que limitan la versatilidad del modelo y, a medida que avanza el capítulo (secciones 3.4 y 3.6), se van eliminando para, finalmente, presentar en la sección 3.7 una metodología que verifica todos los requerimientos. A lo largo del capítulo se muestran resultados de simulaciones que se comparan con la Cota de Cramér-Rao, expuesta en la sección 3.5, y que es la referencia para los análisis de rendimiento del método que se realizan en las secciones 3.6 y 3.7.

Capítulo 4. El Problema de los Acoplos Mutuos: Tras resolverse en el capítulo 3 el problema bajo la hipótesis de que los acoplos entre los elementos del array son nulos, el capítulo 4 comienza con una introducción tras la cual, se realiza un estudio que analiza si en un entorno real se puede asumir la validez de esta hipótesis. Tras observarse en la sección 4.2 que la hipótesis no puede darse por válida, en el apartado 4.3 se propone una modificación o extensión del método del capítulo anterior para, mediante el uso de técnicas numéricas, considerar los acoplos entre los elementos y mitigar su efecto nocivo sobre el rendimiento. La estrategia presentada es totalmente coherente con lo propuesto en el capítulo anterior y se presentan también los resultados de simulaciones que muestran su correcto funcionamiento en el apartado 4.5 y sus subapartados. Para evaluar su rendimiento es necesario realizar una modificación sobre la cota de Cramér-Rao que permite obtener una medida objetiva del rendimiento del algoritmo en entornos acoplados. Esta modificación de la Cota de Cramér-Rao se presenta antes de los resultados, en la sección 4.4.

Capítulo 5. Optimización Metaheurística: El capítulo 5 aborda una parte importante del método propuesto que se ha utilizado a lo largo de los dos capítulos anteriores como parte fundamental del método: los algoritmos de optimización metaheurística. Tras la introducción del capítulo, en la sección 5.2 se da una visión general del funcionamiento de este tipo de algoritmos. A continuación, en las secciones 5.3 a 5.7 se describe el funcionamiento de cinco algoritmos diferentes

basados en tres principios distintos. Con dos de ellos se realizan barridos paramétricos para evaluar la dependencia de su rendimiento en función de sus parámetros de configuración y para otro de ellos se realiza una meta-optimización para hallar un conjunto recomendable de parámetros de funcionamiento. A continuación, en la sección 5.8, los cinco algoritmos son comparados entre sí mediante simulaciones tras las que se concluye cuál de ellos es el más adecuado para ser aplicado en el método propuesto.

Capítulo 6. Conclusiones y Futuras Líneas de Investigación: El último capítulo de esta tesis recoge en la sección 6.1 las conclusiones que se derivan de los capítulos anteriores y los resultados mostrados. En el apartado 6.2 se proponen varias líneas de investigación para continuar el trabajo realizado en esta tesis.

Capítulo 2

Revisión del Estado del Arte

En este capítulo se hace una revisión del estado del arte en lo relativo a los temas abordados en esta tesis. Dado que los principales contenidos de la presente tesis se estructuran en tres capítulos, cada uno de ellos relativo a una cuestión concreta, la revisión del estado del arte también se dividirá en tres apartados.

Así, en el primero, se estudian las técnicas de estimación de dirección de llegada en todas sus formas, pero sin la consideración de acoplos entre elementos. En el segundo apartado se aborda el tema de compensación de acoplos en arrays. Finalmente, en el tercero, se hace una revisión de los principales métodos metaheurísticos y de su aplicación a problemas electromagnéticos y a la estimación de dirección de llegada.

2.1. Técnicas de Estimación de Dirección de Llegada

La estimación de Dirección de llegada o *Direction Of Arrival* (DOA) y, de forma más general, el procesado de señales recibidas en un array, son temas que ha sido afrontados a lo largo de los años mediante multitud de técnicas diferentes.

Las primeras técnicas para estimación de la posición de un blanco tenían su base en el uso de sistemas radar con antenas rotativas de alta directividad [13]. Estas técnicas, bastante rudimentarias por otra parte, consisten en la transmisión de pulsos electromagnéticos en distintas direcciones en función del tiempo, de modo que si en la dirección apuntada por la antena, se recibía un eco radar, se podía inferir que había un blanco en esa dirección. Posteriormente, las técnicas interferométricas [14, 15] permitieron, también de forma rudimentaria, estimar la dirección en la que se encontraban elementos radiantes. Estas técnicas se basan en la comparación de la fase recibida en

distintas antenas, estudiando qué desfase adicional se ha de introducir en una de ella para conseguir que su suma coherente se anule.

No obstante, las técnicas que se van a presentar se basan, como se ha adelantado, en el procesado de señales recibidas en un array. Las primeras investigaciones a este respecto surgen de aplicar el análisis de Fourier [16] considerando la lectura en cada elemento del array como una muestra temporal, de modo que se obtenga la frecuencia espacial de la señal, infiriéndose a partir de ahí la dirección de llegada.

Con un enfoque diferente, surgen los métodos basados en conformadores de haz [17]. El conformado de haz, o *beamforming* es un tipo de procesado que se aplica bien a las señales recibidas en un array, o bien a las señales que se van a transmitir desde él para manipular el diagrama de radiación resultante. En transmisión, la señal que se transmite es multiplicada por un *peso*, es decir, un fador que modifica la amplitud y la fase de esa señal, y que depende de la dirección de radiación deseada. A cada elemento del array le corresponde un peso diferente. En recepción, se multiplica también la señal recibida en cada sensor por un *peso* dependiente de la dirección en la que se desea apuntar el haz y finalmente se suman estos valores. Estas técnicas permiten apuntar el diagrama de radiación en direcciones arbitrarias así como colocar nulos del diagrama de radiación en direcciones concretas. El modo en que estas técnicas son útiles para la estimación de DOA consiste en, una vez conocida la lectura del array, aplicarle sucesivamente los pesos correspondientes al apuntamiento en cada dirección. De esta forma, se obtiene un espectro espacial de potencia, cuyos máximos se presentarán en las direcciones desde las que incida una señal. Estas técnicas se han utilizado con profusión utilizando primero el conformador de haz de Bartlett [18] y posteriormente el de Capon [19], cuya resolución espacial es significativamente mejor que la que puede obtener el primer conformador. No obstante, las técnicas basadas en conformadores de haz son aplicables con independencia del conformador concreto seleccionado, pero su limitación viene dada por la resolución espacial que son capaces de obtener, limitada por la anchura del haz, y ésta, a su vez, limitada por el número de sensores en el array.

Siguiendo una estrategia diferente surgen los métodos basados en subespacios. Estos hacen uso de la matriz de covarianzas, de la que se puede obtener una estimación a partir de varios *snapshots*. Entre las técnicas que permiten analizar la matriz de covarianzas destacan el análisis de componentes principales [20] o la Transformada de Karhunen-Loève (KLT) [21], aunque no fue hasta la publicación de los trabajos de Pisarenko [22] y, principalmente, la aparición de *MUltiple SIgnal Classification (MUSIC)* [23, 24] cuando

los métodos basados en el análisis de la matriz de covarianzas ganaron popularidad. La propuesta de Pisarenko consiste en extraer los armónicos presentes en la matriz de covarianzas y *MUSIC* descompone la matriz de covarianzas en dos sumandos: el primero representa el subespacio de señal y que es generado por los M autovectores correspondientes a los M mayores autovalores y el segundo corresponde al subespacio de ruido y por lo tanto a los $(L - M)$ autovectores correspondientes a los autovalores más pequeños (donde M es el número de señales y L es el número de elementos del array). *MUSIC* explota la ortogonalidad entre el subespacio de ruido y el vector director para cada dirección de llegada mediante la proyección del segundo sobre el primero, generando un espectro espacial cuyos máximos, que se corresponden con los puntos donde se anula esta proyección, se hallan en las direcciones por las que incide una señal. La aparición de *MUSIC* supuso, de facto, que se dejaran de emplear otros métodos para la estimación de dirección de llegada. En efecto, en entornos suficientemente poco ruidosos y con un número suficientemente alto de *snapshots*, *MUSIC* permite, en teoría, obtener estimaciones arbitrariamente precisas. No obstante, su rendimiento se ve gravemente afectado por la incidencia de señales coherentes o casi-coherentes y también sufre limitaciones en lo que respecta a resolución cuando el número de *snapshots* disponible es pequeño o la Relación Señal a Ruido o *Signal to Noise Ratio* (SNR) es baja.

Tomando *MUSIC* como base, se propusieron variantes que asignaban distintos pesos a los distintos autovectores, en lo que podría llamarse *MUSIC ponderado*. Cuando todo el peso se asigna al autovector correspondiente al mayor autovalor, *MUSIC* degenera en el método *Min-Norm*, desarrollado en primer lugar para geometrías de Array Lineal Uniforme o *Uniform Linear Array* (ULA) [25,26] y posteriormente para arrays lineales arbitrarios [27]. Sobre un ULA, el algoritmo *Min-Norm* produce estimaciones con un sesgo menor y mejor resolución que *MUSIC* [28].

También con base en *MUSIC*, se propusieron métodos que realizaban un filtrado espacial antes de aplicar *MUSIC* directamente [29]. Estos métodos reducen el error medio de la estimación pero no su varianza, aunque sí se observa una mejora en este sentido cuando el ruido es correlado, como consecuencia del filtrado espacial.

Pese a los múltiples intentos por mejorar la resolución de *MUSIC* con variantes del método original [30,31], el principal inconveniente, tanto de *MUSIC* como de todos los métodos basados en la matriz de covarianzas es su incapacidad para resolver las direcciones de llegada de señales coherentes.

En principio, no hay motivo para que, a lo largo de varios *snapshots*, dos señales

recibidas desde direcciones diferentes sean coherentes, no obstante, este fenómeno se produce muy habitualmente de forma indeseada como consecuencia del *multipath*, que es como se conoce a que una misma señal llegue al array desde dos direcciones distintas a consecuencia de haber sido reflejada por el entorno. Este hecho hace que la matriz de covarianzas tenga un rango menor que el número de elementos del array y que las estimaciones producidas sean erróneas. A pesar de que es posible decorrelar dos señales coherentes mediante el método *forward-backward* y de más de dos señales con *Spatial Smoothing* haciendo uso de subarrays [32,33], estos últimos métodos reducen la apertura efectiva del array, reduciéndose, por tanto, la resolución que se pretendía ganar. En [34] se presenta una comparación del error de estimación de los métodos basado en *MUSIC*.

Así, abandonando la estrategia de la matriz de covarianzas, surgen los métodos paramétricos [35]. Estos métodos no se basan en el espectro espacial sino en el modelo subyacente que genera los *snapshots*. El hecho de que estos métodos reciban el nombre de paramétricos es consecuencia de que, por lo general, se requiere una búsqueda multidimensional (con una dimensión por cada parámetro) para dar con el conjunto de parámetros que representan la solución.

El primero y más conocido de los métodos paramétricos es el estimador *de Máxima Verosimilitud o Maximum Likelihood (ML)*. Este estimador, utilizado para la estimación estadística general, entre otros por Gauss y Laplace, y popularizado por Fisher, es un método bien conocido para la estimación paramétrica de una familia de funciones de densidad de probabilidad. Como es claro, este método supone el conocimiento *a priori* del número de señales incidentes, aunque por otra parte es sabido que el estimador de Máxima Verosimilitud es consistente^a, asintóticamente normal^b y eficiente^c. Cuando se utiliza un método *ML* con una única señal incidente, el método degenera en el del conformador de haz de Bartlett.

El estimador *ML* se presenta en la literatura de dos formas, en forma estocástica (*SML, Stochastic ML*) [36] y en forma determinista (*DML, Deterministic ML*) [37,38]. Se ha verificado que las estimaciones basadas en *SML* resultan en un rendimiento ligeramente superior a las ofrecidas por *DML*, no obstante, esta diferencia solo es apreciable

^aEs decir, que cuando el número de muestras, o *snapshots*, tiende a infinito, el valor de la estimación converge en probabilidad al valor del parámetro estimado.

^bEs decir, que cuando el número de muestras, o *snapshots*, tiende a infinito, el error de estimación converge en distribución a una normal.

^cEs decir, que cuando el número de muestras, o *snapshots*, tiende a infinito, la varianza del error converge a la Cota de Cramér-Rao.

en arrays pequeños, con SNRs bajas y señales muy correladas [39]. Sin embargo, cuando las señales son incorreladas, el rendimiento de *SML* y el de *DML* son iguales entre sí, e iguales a su vez al ofrecido por *MUSIC* [40].

Si se considera el conjunto de los métodos basados en subespacios y el conjunto de los métodos paramétricos, en su intersección se encuentran los métodos paramétricos basados en el ajuste de subespacios (o *Subspace Fitting*) [41]. Aunque estos métodos exigen descomponer la matriz de covarianzas en autovalores y autovectores, su coste computacional es inferior al de los métodos *ML* cuando se utiliza un ULA. Estos métodos pueden estimar los parámetros de señal ajustando los subespacios de varias formas: Mediante el ajuste del subespacio de señal (*Signal Subspace Fitting*), ponderando la calidad de cada autovalor (*Weighted Subspace Fitting*) [42] o haciendo uso del modelo de ortogonalidad del subespacio de ruido propuesto para *MUSIC* (*Noise Subspace Fitting*) [43].

Todos estos métodos paramétricos eliminan el problema de la coherencia de las señales incidentes (con la excepción de *Noise Subspace Fitting*), pero convierten una búsqueda unidimensional en una búsqueda en un espacio con tantas dimensiones como direcciones de llegada se desee estimar.

De forma paralela al desarrollo de estos algoritmos, se han desarrollado métodos que solo son válidos para arrays lineales uniformes, ya que su construcción aprovecha esta condición. Todos estos métodos son capaces de estimar las direcciones de llegada de las señales, incluso si se trata de señales coherentes, a pesar de que algunos de éstos métodos están basados en principios que, por sí mismos, no son válidos en esta circunstancia.

El primero de estos algoritmos es *Root-MUSIC* [44], que se basa en el mismo principio que *MUSIC*, solo que las soluciones se obtienen como las raíces de un polinomio. Cuando el número de *snapshots* es alto, el rendimiento de *Root-MUSIC* es equivalente al de *MUSIC*, aunque sí existe un mejor funcionamiento cuando el número de muestras es pequeño.

En la misma línea, *ESPRIT* (*Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques*) [45] utiliza la semejanza entre los dos subarrays resultantes de eliminar el primer y el último elemento, respectivamente, del array original. Para obtener el resultado es necesario resolver un sistema de forma aproximada, bien por mínimos cuadrados o por mínimos cuadrados totales [46], siendo este segundo método el que proporciona resultados algo mejores cuando el número de muestras es pequeño. En [47] se

presenta una modificación de *ESPRIT* que en lugar de utilizar arrays lineales uniformes, trabaja sobre arrays circulares uniformes.

El conocido como *Propagator Method (PM)* es un método para arrays uniformes basado en subespacios y con un rendimiento similar al de *MUSIC*. En [48] se propone una extensión del método conocida como *Orthonormal Propagator Method*, que reduce la carga computacional de *MUSIC*, a la vez que muestra un buen resultado en entornos de alto ruido y mejorando la robustez de *PM* ante una sobreestimación del número de señales incidentes.

Haciendo uso de métodos ya presentados, pero aprovechando la uniformidad del array, *Iterative Quadratic Maximum Likelihood (IQML)* [49] es un algoritmo que obtiene las direcciones llegada de forma iterativa, buscando la minimización del criterio del *ML* determinista, es decir, buscando la Máxima Verosimilitud de forma iterativa. Esta misma idea, pero minimizando el criterio del *Subspace Fitting ponderado* da lugar a *Root-WSF* [41] que, curiosamente, no es un método iterativo ya que el óptimo se alcanza de forma determinista tras la segunda iteración. Por contra, la convergencia de *IQML* no está garantizada.

También para arrays uniformes y con un enfoque parecido al de *ESPRIT*, se propuso el método de *Matrix Pencil* [50] basándose en los estudios de Jain [51,52], y desarrollado posteriormente en [53–55]. En [56] se describe el conocido como *Cumulant Method*, una extensión de estos métodos que utiliza combinadamente dos estadísticos de órdenes superiores y en [57] se presenta una generalización este método. *Matrix Pencil* se ha mostrado eficiente aunque sufre la limitación de que el array deba ser uniforme. Se han propuesto y se siguen proponiendo métodos cuyo funcionamiento es exclusivo para arrays uniformes y con diferentes prestaciones: en [58] se propone un método que estima simultáneamente el número de señales coherentes incidentes.

En los últimos 15 años, la estimación de dirección de llegada unidimensional ha utilizado técnicas avanzadas de teoría de la información [59]. Estos métodos, basados en la reconstrucción de señales dispersas [60–62], ganaron popularidad rápidamente y no tardaron en aplicarse a la estimación de dirección de llegada [63, 64] con buenos resultados. Estos métodos pueden ser utilizados en cualquier geometría de array y ofrecen un buen rendimiento en casos de señales correladas y un número de *snapshots* pequeño. Los métodos basados en muestreo compresivo o *compressive sensing* [65, 66] se basan en los mismos principios que estos métodos, solo que en lugar de utilizar la representación compresiva de señales dispersas, utilizan un muestreo que aprovecha la

propia dispersión de la señal [67,68]. En [69] se presenta un compendio de las técnicas basadas en muestreo compresivo. Estas técnicas, han dado lugar a nuevos enfoques entre los que destacan el Algoritmo Re-Iterativo de Superresolución *RISR: Re-Iterative Super-Resolution algorithm* [70] que utiliza los métodos presentados en [59] junto con mínimos cuadrados ponderados (*IRLS*) [71], ofreciendo buenos resultados incluso para números muy bajos de muestreos temporales.

Otras técnicas para estimación de dirección de llegada no se basan en *snapshots* de la tensión inducida en sensores, sino en otros criterios que son menos útiles desde el punto de vista del electromagnetismo y las señales radar: los métodos que hacen uso del vector acústico, que es el equivalente para una onda de presión longitudinal al vector de poynting para una onda electromagnética transversal, son ampliamente utilizados en sistemas de sónar, pero no son de interés en el campo que nos ocupa.

2.1.1. Estimación bidimensional de dirección de llegada y de la frecuencia

El paso natural, tras conocer métodos para la estimación de la dirección de llegada, es la estimación de las dos posibles direcciones de llegada para cada señal y la detección de señales de banda ancha o de frecuencia desconocida, así como la estimación de la propia frecuencia.

Para arrays uniformes, las metodologías basadas en *Matrix Pencil* [72] bien en combinación con técnicas de *Beamspace* [73,74] o bien mediante *Unitary Matrix Pencil* o *UMP* [75] han dado buen resultado a al respecto de la estimación de azimut y elevación. En la misma línea, *Matrix Pencil* ha dado excelentes resultados en la estimación de la frecuencia junto con las dos direcciones de llegada [76] y otra variante de *MP*, *3D-Modified Unitary MP* [77], que además de reducir sustancialmente el tiempo de computación de *3D MP* propone un método automático para relacionar los parámetros que corresponden a cada señal, dado que, pese a su buen funcionamiento, uno de las principales desventajas de *MP* multidimensional es la necesidad de *pairing*, es decir, asociar los valores estimados de azimut con sus correspondientes estimaciones de elevación y las de frecuencia. También se han desarrollado métodos basados en *ESPRIT* para la estimación de dos direcciones de llegada y la frecuencia, tanto mediante *Unitary ESPRIT* [78] como mediante *Phase Averaging ESPRIT* [79], sobrepasando ampliamente el rendimiento de éste al del primero.

Para otras geometrías de array, como es el caso de dos arrays lineales uniformes paralelos se han propuesto estrategias basadas en *PM* [48] que con una carga computacional significativamente inferior a la de *2D-ESPRIT* consiguen resultados semejantes a los de este método [80] o incluso mejores [81]. A pesar de esto, los métodos basados en *ESPRIT* han demostrado ser válidos para la estimación de dos direcciones de llegada y frecuencia en arrays circulares uniformes [82].

Para arrays no uniformes, también se han desarrollado variantes o extensiones de técnicas se basan en algunos de los métodos vistos anteriormente. Con base en los métodos de subespacios en [83] se presenta un método que, además, no necesita realizar la descomposición valores singulares (*SVD*) de la matriz de covarianzas^d. En [84] se presenta una revisión de métodos basados en subespacios que, sin embargo, no necesitan de una búsqueda (ni siquiera de la búsqueda unidimensional) para dar con los parámetros estimados. Este ahorro en coste computacional normalmente es preferible al que supone no realizar al *SVD*. Estas estrategias, cuyo origen se sitúa en [85] sustituyen la búsqueda del parámetro por el cálculo de las raíces de un polinomio, de forma equivalente a *Root-MUSIC* o *Root-WSF*.

2.1.2. Single Snapshot

A medida que se han desarrollado nuevos métodos para la estimación de dirección de llegada, también se han reducido las restricciones impuestas a las señales incidentes, y los nuevos métodos desarrollados son cada vez más versátiles en cuanto a los problemas que son capaces de resolver. Entre los aspectos en los que se ha avanzado es en la reducción del número de *snapshots* o muestreos temporales disponibles. Todos los métodos basados en la matriz de covarianzas necesitan, lógicamente, de una estimación de dicha matriz que será tanto más precisa cuantos más *snapshots* se conozcan. De hecho, cuando el número muestreos temporales se reduce a uno solo, lo que se conoce como *Single Snapshot* o *muestreo único*, su rendimiento sufre una severa merma [86].

No obstante, se han desarrollado métodos específicos o que ofrecen un buen rendimiento cuando únicamente se dispone de un *snapshot*. Estos algoritmos tienen su base en los vistos anteriormente para varios *snapshots*: basados en *MUSIC* [87], en subespacios [88], recursivos [89, 90], mediante *Spatial-Smoothing* [91], entre otros.

^dDado que la matriz de covarianzas es hermítica y por lo tanto normal, se puede afirmar en virtud del Teorema de Descomposición Espectral que ambas descomposiciones son idénticas.

También se han desarrollado métodos basados en *Single Snapshot* para la estimación conjunta de varios parámetros de señal.

En [92] se propone un método para la estimación conjunta de dirección de llegada y frecuencia mediante un único *snapthot* utilizando arrays virtuales bidimensionales [93] uniformes, mientras que [94] utiliza arrays paralelos uniformes para la estimación bidimensional de dirección de llegada y [95] utiliza arrays rectangulares uniformes, con el mismo fin, mediante una estrategia de doble búsqueda unidimensional que, posteriormente, necesita de *pairing* para hacer corresponder los valores de elevación con los de azimut.

2.2. Técnicas de compensación de acoplo mutuo

Es un hecho conocido que los acoplos mutuos entre elementos de un array hacen disminuir su rendimiento [96, 97]. Precisamente, en [97] se propone el *Open Circuit Voltage Method*, que es la base de los métodos de compensación de acoplos y consiste en obtener los valores de la matriz de acoplos alimentando cada uno de los elementos y leyendo las tensiones inducidas en los demás elementos cuando están en circuito abierto.

Mediante el uso de la matriz de covarianzas, en [98] se propone un método para estimar simultáneamente las direcciones de llegada a la vez que la matriz de acoplos, las ganancias y las fases de los sensores utilizando *señales de oportunidad* no necesariamente conocidas, lo que supuso un avance con respecto a las técnicas de calibración propuestas por [99], en que las señales de calibración debían ser conocidas *a priori*, además de necesitar un array lineal uniforme.

Svantesson propuso un método paramétrico que permitía estimar también la matriz de acoplos al mismo tiempo que las ganancias y las fases de las antenas, en primer término, partiendo de que la matriz de acoplos para un array lineal uniforme es una matriz Toeplitz de banda [100], posteriormente mediante el uso también de técnicas de *Máxima Verosimilitud* [101] y finalmente mediante el uso subespacios de ruido [102], siguiendo un criterio semejante al de *MUSIC*.

Paralelamente a estas técnicas, se propusieron otras que hacían uso de métodos numéricos. En [103] se hace uso del método de los momentos (*MoM*) [104] para calcular la matriz de admitancias en lugar de la matriz de acoplos. Por contra, en [105] se utilizan métodos rigurosos para obtener una matriz de transformación entre las tensiones inducidas en el array y las tensiones en un array lineal uniforme virtual. El método de

los momentos ha sido ampliamente utilizado para compensación de acoplos: en [106] se utiliza su resultado en un sistema de *Smart Antennas* para acceso múltiple con división espacial, utilizando técnicas *MUSIC* para la estimación de las direcciones de llegada y el conformador de haz de Bartlett [18] para transmitir en esa misma dirección las señales correspondientes. En [107] se propone una formulación para arrays lineales uniformes de antenas de cualquier tipo, estimándose la dirección de llegada mediante el método *Min-Norm*. También a partir del uso de *MoM* se propone una modificación de la teoría clásica de uso de una matriz de acoplos cuadrada para utilizar, en cambio, una matriz de acoplos rectangular [108] que permita tener en consideración los efectos de dispersores en campo cercano.

Posteriormente se propusieron métodos que en lugar de utilizar la habitual matriz de acoplos, hacían uso de una matriz de impedancias mutuas para estimación de dirección de llegada [109] mediante *MUSIC* y posteriormente de una matriz de impedancias mutuas en recepción (*Receiving Mutual Impedances*) [110], para extracción de señal de interés (*SoI*). Al contrario que [103], esta nueva técnica no necesita de un conocimiento previo de la elevación de las señales incidentes. Su rendimiento, además, mejora el de los métodos basados en *Open Circuit Voltage Method* tal y como el propio autor demuestra posteriormente en [111].

En cuanto a la compensación de acoplos para estimación de dirección de llegada bidimensional, cabe destacar la estrategia presentada en [112] consistente en tomar los elementos del borde de un array rectangular uniforme como elementos auxiliares para compensar los acoplos y utilizar *MUSIC* con el resto del array. Esta técnica permite, no solo estimar direcciones de llegada bidimensionales, sino también calcular los acoplos entre los elementos del array con la información de las direcciones de llegada. Otros métodos se basan en la construcción de un modelo de la matriz de acoplos tradicional bien en un array en forma de “*L*” [113] o bien en un array con la forma de los ejes coordenados [114] o array “*2L*”. Ambas estrategias, propuestas por el mismo autor, calculan los valores de la matriz de acoplo sin necesidad de ejecutar una simulación electromagnética ni de transmitir señales de calibración en lo que se conoce como *calibración ciega* o *blind calibration*.

En [115] se puede encontrar un completo compendio de las técnicas de análisis de acoplos mutuos.

2.3. Técnicas metaheurísticas de optimización

Los campos de la optimización y, como parte de él, el de la optimización metaheurística han sido una fuente inagotable de publicaciones científicas y algoritmos a lo largo de las últimas décadas: cabe destacar la Optimización por Enjambre de Partículas o *Particle Swarm Optimization (PSO)* [116], la Optimización Aleatoria o *Random Optimization (RO)* [117], el Enfriamiento Simulado o *Simulated Annealing (SA)* [118], la búsqueda local pura o *Local Search (LS)* [119], la optimización mediante Redes Neuronales Artificiales o *Artificial Neural Networks (ANN)* [120], el Algoritmo Genético o *Genetic Algorithm (GA)* [121], el algoritmo memético o *Memetic Algorithm* [122], la búsqueda Tabú o *Tabu Search* [123], la Evolución Diferencial o *Differential Evolution (DE)* [124], el Ascenso de Colinas o *Hill Climbing* [125] y la Optimización por Colonia de Hormigas o *Ant Colony Optimization (ACO)* [126] entre otros algoritmos y múltiples variantes de éstos.

Además, estos algoritmos han tenido una buena acogida en el campo del electromagnetismo, aplicándose para infinidad de tareas [127–129]. En lo que se refiere a la estimación de dirección de llegada también se ha propuesto el uso de algunos de estos métodos de optimización. El problema es abordado mediante el uso de técnicas *ML* junto con *Simulated Annealing* en [130] y con *PSO* en [131]. Con *ACO* se propone un método para estimación multidimensional de dirección de llegada en [132], mientras que [133] propone una solución al mismo problema mediante técnicas *MUSIC* y [134] utiliza este algoritmo para la estimación conjunta de dirección de llegada y frecuencia.

En lo que se refiere al uso de métodos de optimización metaheurística para la estimación de dirección de llegada mediante un único muestreo, cabe destacar [135], que podría considerarse el punto de partida de esta tesis.

Capítulo 3

Estimación Multidimensional de Dirección de Llegada

3.1. Introducción

Este capítulo detalla los mecanismos que permiten a un algoritmo metaheurístico de optimización cualquiera realizar la búsqueda de la solución al problema de la estimación de llegada mediante un único muestreo.

En primer lugar, se plantea de forma precisa el problema en la sección 3.2. Seguidamente, en la sección 3.3 se presenta el método propuesto y la *función de ajuste*, núcleo principal del método. La función de ajuste se particulariza para un caso básico en el que se aplican ciertas restricciones sobre las señales incidentes, como son la igualdad y el conocimiento de sus amplitudes y fases. En esta sección además, se presentan algunos resultados que permiten hacerse una idea de cual será el comportamiento del método propuesto.

A continuación, la sección 3.4 presenta dos estrategias diferentes para la estimación de las amplitudes y las fases de las señales incidentes. Se observa que una de ellas permite obviar la búsqueda de dichas amplitudes complejas mediante la ejecución de un cálculo matricial. Este cálculo matricial se incorpora a partir de este punto a todas las implementaciones concretas de la función de ajuste.

En el apartado 3.5 se presenta la Cota de Cramér-Rao o *Cramér-Rao Bound* (CRB) y se deduce su expresión para la estimación de dirección de llegada con varios parámetros por señal. La CRB es una herramienta estadística que acota inferiormente la

varianza de todo estimador insesgado, de modo que servirá como límite máximo de la precisión de los resultados presentados en los siguientes apartados.

En el apartado 3.6, se pone en práctica la estrategia presentada en 3.4.2, aplicándola a la estimación conjunta de la dirección de llegada y la frecuencia de las señales incidentes. Para este caso se comparan por primera vez los resultados con la CRB. Además, se presentan resultados de resolución del método.

Finalmente, en la sección 3.7, se estudia la estimación bidimensional de la dirección de llegada junto con la frecuencia. Se proponen diversas geometrías de array con diferentes números de elementos y se analiza su idoneidad mediante el análisis de la tasa de convergencia y de la precisión en comparación con la CRB. También se analiza la forma de la función de ajuste en función del número de sensores de un array y su influencia sobre la tasa de convergencia para ciertas configuraciones de array.

La forma en que se desarrolla el capítulo parte del análisis de un caso con ciertas restricciones e hipótesis que se van eliminando para terminar resolviendo el problema propuesto en la sección 3.2. No obstante, este planteamiento todavía no es coherente con las necesidades de un sistema real, ya que aquí no se consideran los efectos de los acoplos entre elementos ni de su directividad, considerándose en todo caso que los sensores del array son además, isotrópicos. La consideración de los acoplos mutuos entre elementos se llevará a cabo en el capítulo 4.

3.2. Planteamiento y solución propuesta.

Antes de entrar a describir el método en detalle, es necesario presentar los símbolos que serán utilizados a lo largo del capítulo, y dar una breve descripción de ellos. Para ello, bastará con formular el problema:

“(Sea un array formado por L antenas, consideradas isotrópicas, cuyo elemento i -ésimo tiene el centro de fase en la posición (x_i, y_i, z_i) del espacio. Sobre este array, inciden M ondas que se asumen perfectamente planas. El problema general consiste en estimar los parámetros de cada señal, $\theta_j, \phi_j, f_j, A_j, \beta_j$ para la señal j -ésima, mediante una única lectura de las tensiones complejas inducidas $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_L]^T$ en bornes de los elementos del array, donde θ_j y ϕ_j son las direcciones de llegada de la señal j -ésima, f_j es la frecuencia de dicha señal y A_j y β_j son respectivamente su amplitud y fase. ”)

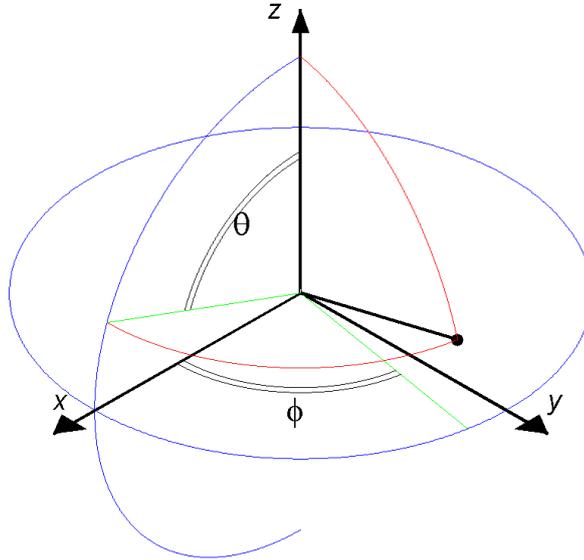


Figura 3.1: Descripción del sistema de coordenadas esféricas.

Los ángulos θ y ϕ a los que se hace referencia en la formulación del problema son los habituales de las coordenadas esféricas y se muestran en la figura 3.1.

3.2.1. Solución propuesta

La solución propuesta consiste en utilizar un algoritmo de optimización metaheurística que busque el mínimo absoluto de una función construida de tal forma que su mínimo absoluto coincida con el punto buscado. La función que debe ser minimizada recibe el nombre “función objetivo”. Un algoritmo de optimización es un conjunto de procedimientos encaminados a hallar el máximo o mínimo absolutos de una función^a. Para tal fin, diversos algoritmos utilizan distintas técnicas basadas en el gradiente, el hessiano o posibles simetrías de la función. Se dirá que un algoritmo de optimización es metaheurístico cuando se planifican los puntos de muestreo en la variable independiente y tras evaluar la función en dichos puntos se eligen unos nuevos puntos de forma iterativa hasta que se cumpla una cierta condición de parada. Los algoritmos metaheurísticos

^aLa búsqueda de un máximo o un mínimo absolutos es conceptualmente idéntica ya que solamente difiere en el signo de la función optimizada.

no disponen de ninguna información al respecto del comportamiento de la función. De este modo, pueden ser utilizados cuando no se conoce una forma cerrada de la función objetivo o cuando, por cualquier motivo, se desea tratar a la función objetivo como una *caja negra* de contenido desconocido. En particular, los algoritmos metaheurísticos son heurísticos: es decir, no hay garantía de que la solución obtenida por ellos sea la solución real buscada, no obstante, la precisión de la solución encontrada depende del tiempo de computación empleado. Así, solamente queda construir una función objetivo que tenga su mínimo absoluto en la solución buscada. La información disponible para la construcción de la citada función es la siguiente:

- Un *snapshot* o muestreo temporal en bornes de los elementos del array. Este muestreo se considera instantáneo y simultáneo para todos los elementos. El *snapshot* contiene la tensión compleja en cada elemento obtenida como la superposición de las tensiones complejas inducidas por las M señales en el instante de muestreo.
- La geometría del array, es decir, las posiciones de los centros de fase de los sensores.
- El espacio de solución, es decir, el intervalo del espacio vectorial $5M$ -dimensional en el que es posible encontrar la solución buscada. Particularmente, el espacio de solución está incluido en el dominio de la función objetivo. El espacio tiene dimensión $5M$ porque cada una de las M señales está definida por 5 parámetros.

Con esta información, es posible construir una función (3.1) del espacio de solución sobre el cuerpo de los números reales, que es un conjunto ordenado, de modo que el mínimo absoluto de la función se produzca en la solución buscada. Además, es posible normalizar la función de modo que la imagen de la función esté contenida en el intervalo $[0, 1]$, con su mínimo absoluto en 0.

$$f_{obj} : \{\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M\} \rightarrow \mathbb{R} : (\theta^M, \phi^M, f^M, A^M, \beta^M) \rightarrow [0, 1] \quad (3.1)$$

La expresión (3.1) muestra la definición de la función objetivo cuando hay M señales incidentes, y de cada señal se desconocen su dirección de llegada bi-dimensional (θ y ϕ), su frecuencia (f), su amplitud (A) y su fase (β).

Con esta información es posible reescribir (3.1) como sigue:

$$f_{obj} : \{[0^\circ, 180^\circ]^M \times [0^\circ, 360^\circ]^M \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \times [0^\circ, 360^\circ]^M\} \rightarrow [0, 1] \quad (3.2)$$

Se presenta a continuación la construcción de dicha función: para cada punto del espacio de solución, es decir, para cada conjunto de $5M$ valores que representan los 5 parámetros

de M señales, es posible obtener, a partir de las posiciones de los sensores, una hipotética lectura ideal que se obtendría en dichos sensores si las señales incidentes tuvieran esos parámetros de señal. En particular, la tensión inducida para el sensor q -ésimo, en el instante t , es la mostrada en (3.3).

$$\mathbf{g} = [g_1, g_2, \dots, g_L]^T; \quad g_q = \sum_{i=1}^M e^{j\beta_i} e^{j2\pi f_i t} A_i e^{j\frac{2\pi f_i}{c} (x_q \sin \theta_i \cos \phi_i + y_q \sin \theta_i \sin \phi_i + z_q \cos \theta_i)} \quad (3.3)$$

Dado que se produce una única lectura en el array, es posible reescribir (3.3) según (3.4) sin pérdida de generalidad.

$$\mathbf{g} = [g_1, g_2, \dots, g_L]^T; \quad g_q = \sum_{i=1}^M e^{j\beta_i} A_i e^{j\frac{2\pi f_i}{c} (x_q \sin \theta_i \cos \phi_i + y_q \sin \theta_i \sin \phi_i + z_q \cos \theta_i)} \quad (3.4)$$

Si a esta ecuación (3.4) se le añade el ruido, el resultado es la ecuación (3.5) que corresponde con la lectura que se obtendría en un sistema real (aunque sin acoplos) sobre el que inciden las M señales con los citados parámetros de señal, en un instante arbitrario. Así, la diferencia conceptual entre las dos ecuaciones es que una describe un *snapshot* sintético e ideal y la otra proporciona la lectura exacta del *snapshot* leído en el array. El ruido se considera gaussiano, de media nula e incorrelado entre los distintos sensores^b. En la ecuación (3.5) se han omitido deliberadamente los efectos de los acoplos mutuos entre los elementos del array, que serán considerados en el capítulo 4.

$$\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_L]^T; \quad s_q = \sum_{i=1}^M e^{j\beta_i} A_i e^{j\frac{2\pi f_i}{c} (x_q \sin \theta_i \cos \phi_i + y_q \sin \theta_i \sin \phi_i + z_q \cos \theta_i)} + n_q \quad (3.5)$$

El hecho de que las ecuaciones sean iguales, con la excepción del ruido, hace que sea posible comparar el verdadero *snapshot* \mathbf{s} leído en el array con distintos *snapshots* sintéticos \mathbf{g} . En un entorno no ruidoso, estaremos ante la solución cuando estos dos *snapshots* sean iguales. En un entorno ruidoso, dado que la esperanza matemática del ruido es nula, se dará por válida una solución cuando estos dos *snapshots* sean lo más parecidos posible, según algún criterio. Este parecido, o semejanza, entre *snapshots* podría definirse de varias formas, pero se ha optado por una correlación cruzada normalizada evaluada en cero. A partir de esta correlación se define la función objetivo, que a partir

^bEs habitual considerar que el ruido es también blanco, no obstante, al haber un único muestreo temporal, las características frecuenciales del ruido son irrelevantes.

de ahora será denominada función de ajuste o *función de fitness*, según las ecuaciones (3.6) a (3.8), donde \mathbf{g} se obtiene de (3.3) y \mathbf{s} es el *snapshot* leído en el array. Además, esta función de ajuste tiene por imagen el intervalo $[0, 1]$, tomando el valor 0 cuando ambos *snapshots* son iguales, el valor 1 cuando son ortogonales y valores intermedios en otros casos.

$$f_{fit}(\mathbf{g}) = 1 - \left| \frac{\text{xcorr}(\mathbf{g}, \mathbf{s})}{\|\mathbf{g}\| \|\mathbf{s}\|} \right| \quad (3.6)$$

$$= 1 - \left| \frac{\mathbf{g}^H \mathbf{s}}{\sqrt{\mathbf{g}^H \mathbf{g}} \sqrt{\mathbf{s}^H \mathbf{s}}} \right| \quad (3.7)$$

$$= 1 - \frac{\left| \sum_{q=1}^L \bar{g}_q s_q \right|}{\sqrt{\sum_{q=1}^L \bar{g}_q g_q} \cdot \sqrt{\sum_{q=1}^L \bar{s}_q s_q}} \quad (3.8)$$

Así, es claro que si se encuentra el punto del espacio de solución que anula la función de ajuste, ese punto será el buscado. No obstante, en entornos ruidosos no hay garantía de que la función se pueda anular, con lo que bastará encontrar el punto que la minimice, de forma que si este mínimo es cercano a cero, el punto del espacio de solución que da lugar a él a través de la función de ajuste también será cercano a la solución buscada.

Con el fin de clarificar y facilitar el entendimiento del método propuesto, en la tabla 3.1 se presenta un esquema con la descripción de los pasos a seguir.

Una iteración del algoritmo de optimización metaheurística abarca desde el punto (ii) hasta el punto (v) de la tabla 3.1, ambos inclusive. En función del tipo de algoritmo, del valor de sus parámetros de operación y de otros criterios que serán explicados en el capítulo 5, el número de evaluaciones de la función de ajuste en una iteración puede variar desde cero (caso muy poco habitual) hasta el valor de cualquier número natural finito, siendo habitual que su valor sea la unidad o esté en torno a unas pocas decenas.

A lo largo de este capítulo, todas las simulaciones hacen uso del mismo método de optimización metaheurística, la Optimización por Enjambre de Partículas (*Particle Swarm Optimization*, PSO) y que es desarrollado en la sección 5.3.

A continuación, se presenta la aplicación de esta estrategia de forma progresiva y con complejidad creciente.

Tabla 3.1: *Esquema del método propuesto*

(i)	Elección aleatoria de puntos iniciales del espacio de solución.
(ii)	Cálculo de los <i>snapshots</i> sintéticos correspondientes a cada punto, según la ecuación (3.4).
(iii)	Evaluación de la función de ajuste en cada punto, según la ecuación (3.6).
(iv)	Comprobación del criterio de salida:
(iv.a)	Comprobación de que el mejor valor obtenido para la función de ajuste es mayor que la tolerancia admitida.
(iv.b)	Comprobación de que el número de iteraciones del algoritmo de optimización o el número de evaluaciones de la función de ajuste no superan el máximo
	Si se cumplen estos dos criterios, pasar a (v). Si alguno no se cumple, pasar a (vi).
(v)	Cálculo de nuevos puntos del espacio de solución, según el criterio del método de optimización metaheurística. Pasar a (ii).
(vi)	Entrega de la solución como el punto del espacio de solución que proporciona el valor más bajo de la función de ajuste.

3.3. Estimación de un ángulo por señal

El primer caso considerado es aquel en que las señales incidentes y el array de antenas están contenidas en un mismo plano. Así, un único ángulo es suficiente para determinar la dirección por la que incide cada señal. El array utilizado es lineal y está orientado según el eje z de modo que los centros de fases de las antenas coincidan, precisamente, con puntos de ese eje. Además, en este primer caso, la distancia entre elementos es constante, es decir que el array es un ULA. La reformulación del problema quedaría como sigue:

“ Sea un array formado por L antenas equiespaciadas, consideradas isotrópicas, cuyo elemento q -ésimo tiene el centro de fase en la posición $(0, 0, z_q)$ del espacio. Sobre este array inciden M ondas que se asumen perfectamente planas. Se considera que las señales tienen amplitud unitaria, fase nula y

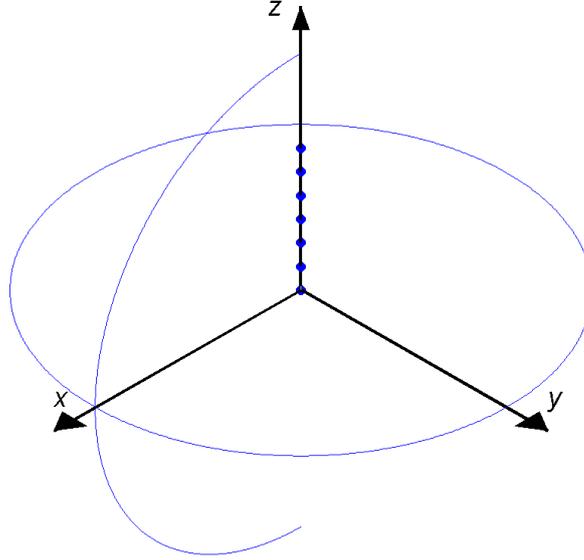


Figura 3.2: Array Lineal Uniforme, orientado según el eje z

misma frecuencia, que además es conocida. El problema consiste en estimar la dirección de llegada para cada señal, θ_j para la señal j -ésima, mediante una única lectura de las tensiones complejas inducidas $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_L]^T$ en bornes de los elementos del array. Sin pérdida de generalidad, es posible asumir que todas las señales incidentes están contenidas en el plano $\phi = 0$. ””

A raíz de las condiciones impuestas en la geometría del sistema y en los parámetros de señal, la ecuación (3.5) se reescribe según (3.9), donde s_q es la tensión compleja en bornes del elemento q -ésimo y θ_i es la dirección de llegada de la señal i -ésima. La velocidad de propagación es c y n_q es el ruido en el sensor q -ésimo, que se considera, gaussiano, de media cero e incorrelado con los ruidos en otros sensores.

$$\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_L]^T; \quad s_q = \sum_{i=1}^M e^{j \frac{2\pi f}{c} (z_q \cos \theta_i)} + n_q \quad (3.9)$$

A pesar de que el modelo de señal es conocido, los parámetros de señal que le dan forma son incógnitas y la tensión compleja \mathbf{s} será la leída en los sensores del array. Así, el *snapshot* sintético que se utilizará para calcular, en cada punto, el valor de la

función de ajuste, viene dado por la ecuación (3.10), que resulta de sustituir en (3.9) las condiciones impuestas en la formulación del problema y suprimir el ruido.

$$\mathbf{g} = [g_1, g_2, \dots, g_L]^T; \quad g_q = \sum_{i=1}^M e^{j\frac{2\pi f}{c}(z_q \cos \theta_i)} \quad (3.10)$$

Con esta información, ya es posible ejecutar una batería de simulaciones cuyo resultado permitirá conocer si el enfoque es válido o no. Las simulaciones consideradas estudian, en primer lugar, la convergencia general del algoritmo y la relación entre el número de iteraciones, el valor final de la función de ajuste y el error angular, en ausencia de ruido. En una segunda simulación se analiza la dependencia del error angular en función de la magnitud del ruido. Una tercera simulación estudia la capacidad del método para identificar de manera correcta dos señales con direcciones de llegada muy cercanas y finalmente se estudia la forma en que el error angular depende de la dirección de llegada.

La primera simulación estudia la convergencia del algoritmo. Para ello, se establece que una simulación es convergente si tras $N_{iter-lim} = 5000$ iteraciones, el valor de la función de ajuste está por debajo de un umbral $\varepsilon = 10^{-6}$ en ausencia de ruido. Se utiliza un ULA con 3 configuraciones, para $L \in \{7, 9, 11\}$ elementos, con una separación entre ellos de media longitud de onda. El número de señales se hace variar en $M \in \{1, 2, \dots, 10\}$ y para cada combinación de M y L , se llevan a cabo $R = 1000$ repeticiones independientes con diferentes conjuntos de ángulos elegidos aleatoriamente en el intervalo $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M]^T \in [10^\circ, 170^\circ]^M$.

Los resultados de esta primera simulación se muestran en la figura 3.3, donde se puede apreciar que hasta un límite de $M = 4$ ó $M = 5$ señales incidentes, la convergencia es muy buena llegando incluso al 100% por debajo de $M = 3$ señales, del mismo modo que a partir de $M = 6$ señales, este valor decrece rápidamente. También se debe hacer notar que, como es esperable, el número de simulaciones convergentes es mayor cuando se utilizan más sensores, ya que la información disponible es mayor.

Tras estudiarse la convergencia, cabe preguntarse si entre la función de ajuste y el error angular existe una relación monótona creciente en un entorno de la solución. En tal caso se verificará que, en ese entorno, una disminución del valor de la función de ajuste implica una disminución de los errores angulares medios. Para estudiar este comportamiento se utiliza un subconjunto de los resultados anteriores formado por los casos de $L = 11$ elementos y número de señales $M \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$. La figura 3.4

3. Estimación Multidimensional de Dirección de Llegada

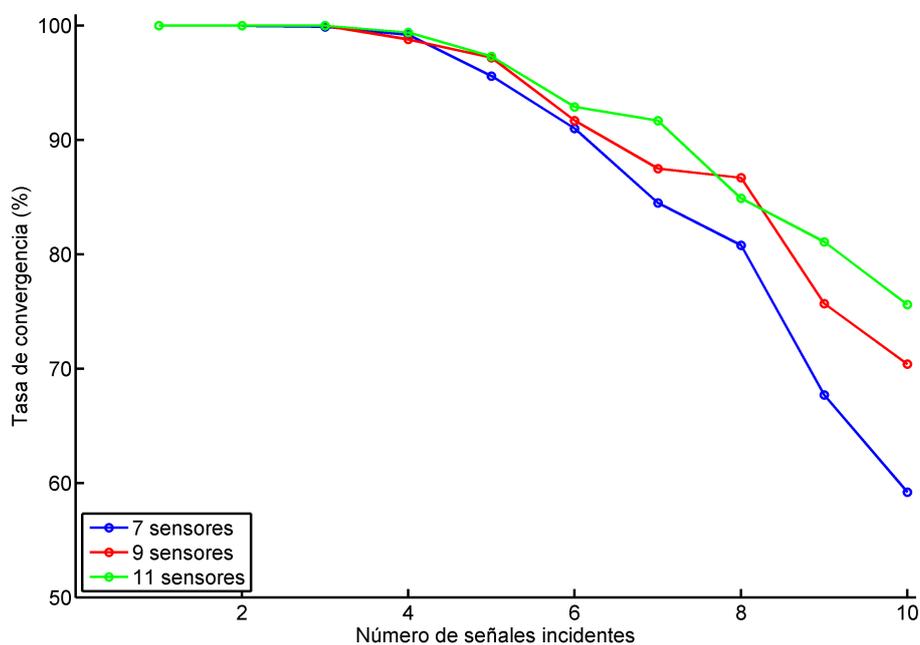


Figura 3.3: Tasa de convergencia. Umbral en la función de ajuste: $\varepsilon = 10^{-6}$. Número máximo de iteraciones: $N_{iter-lim} = 5000$

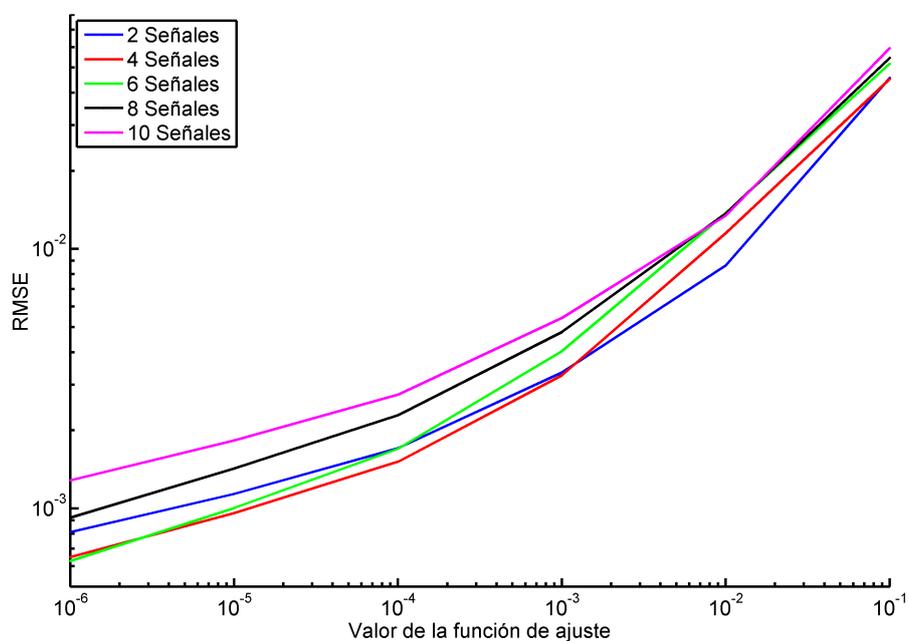


Figura 3.4: Error angular medio en función de los valores de la función de ajuste

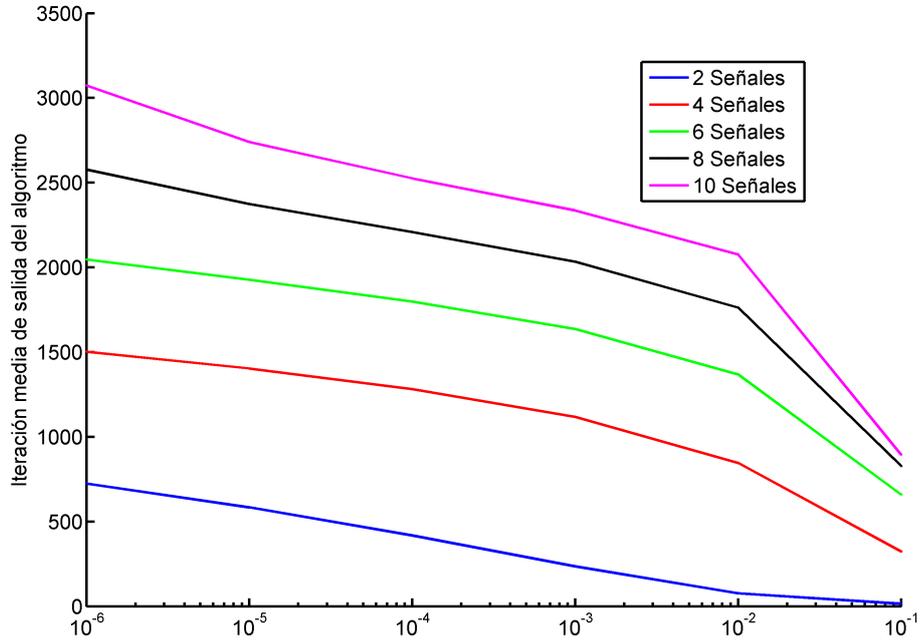


Figura 3.5: *Numero de iteraciones necesarias para alcanzar cierto valor de la función de ajuste*

muestra que a medida que el valor de la función de ajuste decrece, el error medio por señal definido según (3.11) también decrece. Así, se puede asegurar la monotonía esperada, al menos, en un entorno de la solución.

$$\text{RMSE} = \frac{1}{RM} \sum_{n=1}^R \sqrt{\sum_{i=1}^M (\theta_{i,n} - \hat{\theta}_{i,n})^2} \quad (3.11)$$

Otro postproceso de la simulación ejecutada permite relacionar el valor de la función de ajuste con el número medio de iteraciones del algoritmo de búsqueda necesarias para alcanzar dicho valor de la función de ajuste. En la figura 3.5 se puede observar que el número de iteraciones necesario para alcanzar un cierto valor de la función de ajuste depende de forma crítica del número de señales incidentes. Esto es debido a que el espacio de solución aumenta su tamaño en una dimensión cada vez que el número M de señales incidentes se incrementa en una unidad. Por lo tanto, el espacio a recorrer es mucho más grande y son necesarias más iteraciones para alcanzar un mismo valor de la función de ajuste. Lo visto hasta ahora permite concluir que, en ausencia de ruido, una búsqueda metaheurística es capaz de dar con la solución buscada o, al menos, proporcionar un punto arbitrariamente cercano a ella. No obstante, el ruido está presente en todos los sistemas eléctricos y afectará al rendimiento del método

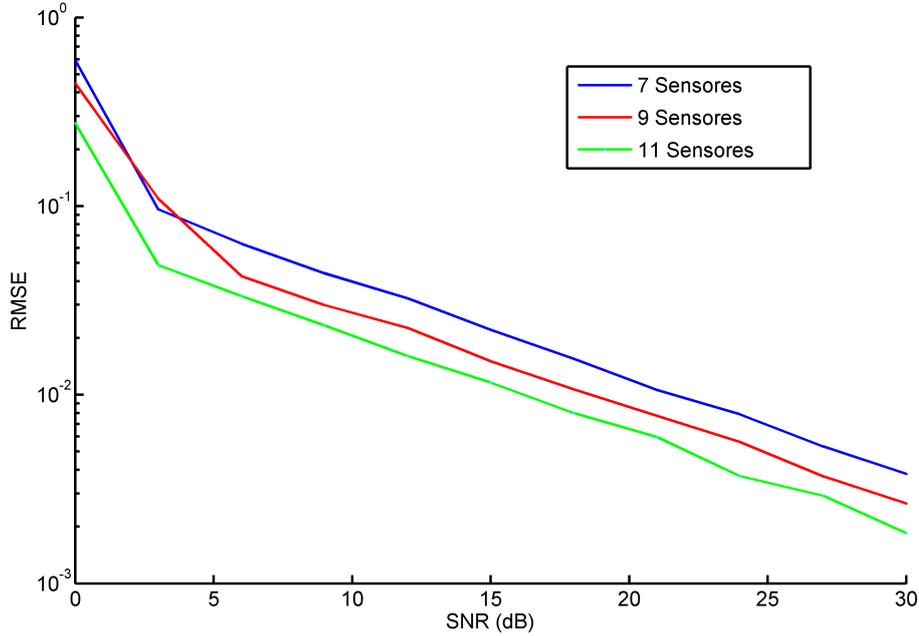


Figura 3.6: Error Angular frente a la SNR

propuesto.

Para estudiar el efecto del ruido, se ejecuta una simulación con los mismos arrays que en el caso anterior, es decir $L \in \{7, 9, 11\}$ elementos y con una única señal incidente con dirección de llegada fija $\theta_1 = 60^\circ$. La SNR se hizo variar desde 0 dB hasta 30 dB en pasos de 3 dB y para cada combinación de SNR y número de sensores, se ejecutan $R = 500$ repeticiones independientes. Se establece el criterio de parada como el número máximo de iteraciones del algoritmo $N_{iter-lim} = 1000$. La figura 3.6 muestra la forma en que el error angular, calculado según (3.12), varía con la SNR. Se aprecia que el error es menor cuando se utiliza un array con más elementos y también cuando la SNR es más alta. Al representar los datos en una escala bi-logarítmica se observa que las tres gráficas son rectas y que, además, dichas rectas tienen la misma pendiente. No obstante, para valores muy bajos de la SNR ese comportamiento se pierde debido a que no todas las simulaciones convergen en un escenario tan ruidoso.

$$\text{RMSE} = \frac{1}{R} \sqrt{\sum_{i=1}^R (\hat{\theta}_i - 60^\circ)^2} \quad (3.12)$$

Tras analizar brevemente la influencia del ruido en la estimación de la solución, cabe preguntarse si existen otros factores que alterarían negativamente el rendimiento

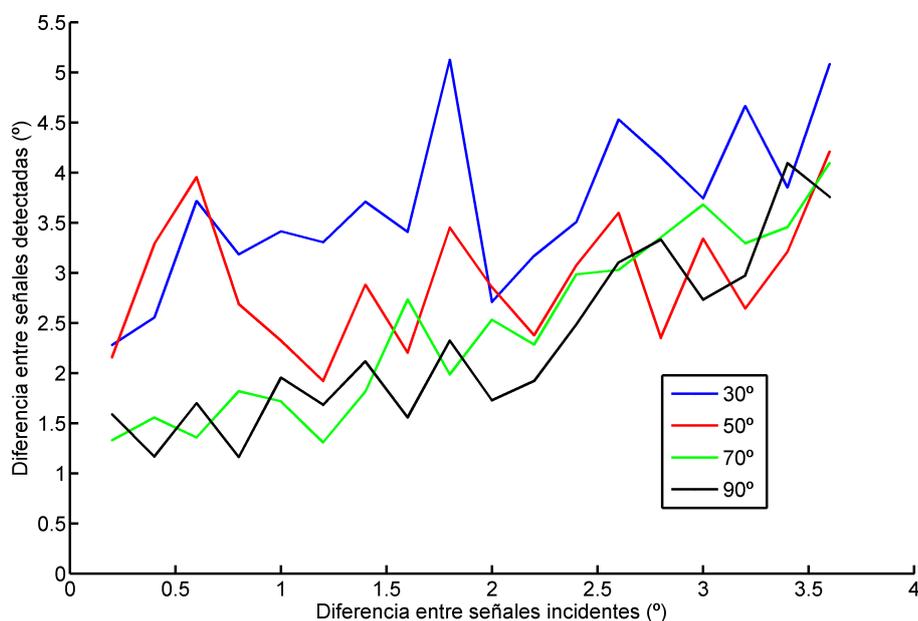


Figura 3.7: Separación detectada vs separación incidente

del algoritmo. El primero de estos factores es la proximidad de dos señales entre sí, es decir, si el algoritmo reconoce correctamente dos señales arbitrariamente juntas y, en caso de no hacerlo, cuál es su comportamiento. Para comprobar cual es la resolución efectiva del método, es decir, la mínima distancia a la que se pueden encontrar dos señales de modo que sean detectadas de forma correcta, se lleva a cabo una simulación con el array de $L = 11$ sensores y con $M = 2$ señales. El número máximo de iteraciones del algoritmo de búsqueda se fija en $N_{iter-lim} = 2000$ y se establece el mínimo valor de la función de ajuste en $\varepsilon = 10^{-4}$. En un escenario no ruidoso, se fijan las direcciones de las señales incidentes de forma simétrica a ambos lados de un ángulo central $\theta_c \in \{30^\circ, 50^\circ, 70^\circ, 90^\circ\}$ y con una separación $\Delta\theta \in \{0.2^\circ, 0.4^\circ, \dots, 3.6^\circ\}$. La gráfica 3.7 muestra la separación detectada entre las dos señales frente a la separación real entre las señales incidentes. Se aprecia una tendencia de las señales a ser detectadas con más distancia de la que en realidad hay entre ellas y se aprecia también que este comportamiento se acentúa cuando la separación entre señales se hace más pequeña o cuando las señales tienen ángulos centrales más alejados del *broadside* (90°) y más cercanos al *endfire* (0°). El hecho de que los errores sean mayores para señales que inciden cercanas al *endfire* hace pensar que tal vez el error no se distribuya de forma homogénea para todas las direcciones de llegada posibles. No obstante, se podría haber

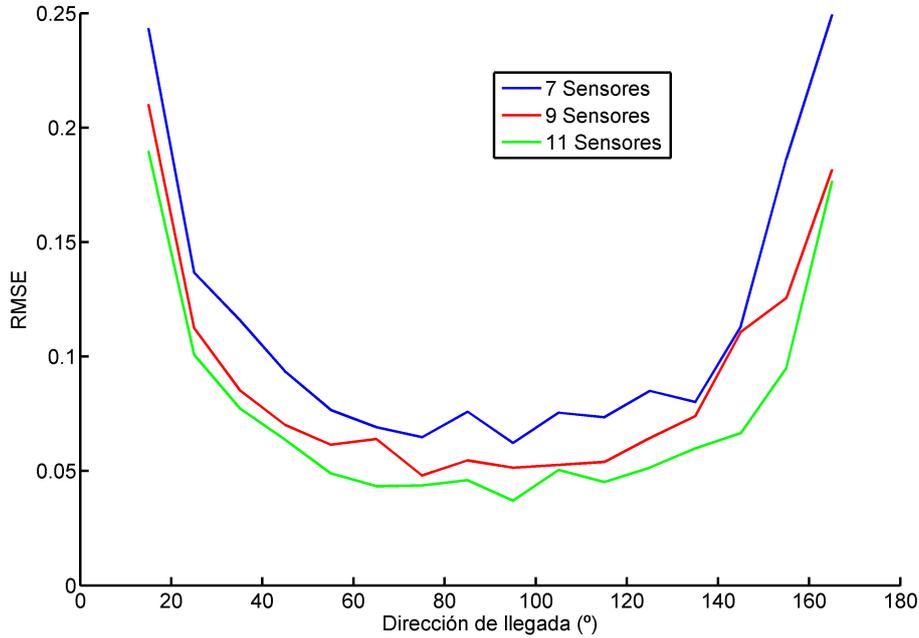


Figura 3.8: Error Angular vs dirección de llegada

intuido esta conclusión a partir del hecho de que desde una dirección cercana al *broadside* la apertura eléctrica aparente del array es mayor (sin ser ambiguo) que desde una dirección cercana al *endfire*, lo que haría que los errores fueran menores en el primer caso y mayores en el segundo.

Para verificar esta hipótesis se realiza una última simulación con los tres arrays lineales de $L \in \{7, 9, 11\}$ elementos y una única señal incidente. El número máximo de iteraciones del algoritmo es $N_{iter-lim} = 5000$ y se establece el mínimo valor de la función de ajuste en $\varepsilon = 10^{-4}$. Para cada array, se ejecutan $R = 1000$ simulaciones independientes con el ángulo de la señal incidente uniformemente distribuido entre $\theta_1 = 10^\circ$ y $\theta_2 = 170^\circ$. Para analizar los datos, las simulaciones se agrupan en bandas de 10° según la dirección de incidencia de la señal, y se calcula el error angular cuadrático medio para las señales de cada banda, según (3.13).

$$\text{RMSE} = \frac{1}{R} \sqrt{\sum_{n=1}^R (\theta_{i,n} - \hat{\theta}_{i,n})^2} \quad (3.13)$$

La figura 3.8 muestra esa distribución no uniforme del error en función del ángulo de la señal incidente. Se aprecia que el error es mayor para direcciones cercanas al *endfire* y, como en los casos anteriores, es mayor cuando el array utilizado consta de menos

elementos.

3.4. Estimación de la amplitud compleja

Hasta el momento, se ha visto que la metodología propuesta funciona correctamente en un entorno muy limitado debido a las restricciones impuestas, a saber:

- El array es lineal y uniforme.
- Los elementos que forman el array son isotrópicos.
- Todos las señales inciden por un mismo plano que, a su vez, contiene al array.
- Todas las señales tienen la misma amplitud, que es conocida e igual a la unidad.
- Todas las señales tienen la misma fase que es conocida y nula.
- Todas las señales tienen la misma frecuencia, que es también conocida.
- Los efectos de los acoplos mutuos entre elementos del array son nulos.

Todas estas restricciones hacen que el caso estudiado esté muy lejos de simular un caso real, no obstante, se verá que el modelo propuesto es capaz de funcionar sin estas restricciones con tan solo algunas modificaciones. La hipótesis de que el número de señales incidentes es conocido se mantendrá a lo largo de toda la tesis, dado que existe abundante bibliografía al respecto [136–138], incluso para *Single Snapshot* [139].

3.4.1. Obtención de la amplitud aumentando el espacio de solución

Entre las primeras ideas para dar con una estimación de la amplitud de las señales incidentes surge la de introducir una dimension adicional por señal en el espacio de solución, de modo que el algoritmo de optimización busque, para cada señal, un conjunto formado por dirección de llegada y amplitud. Así, la función de ajuste sería de la forma mostrada en (3.14) o de forma más precisa según (3.15).

$$f_{fit} : \{\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M\} \rightarrow \mathbb{R} : (\theta_1, \dots, \theta_M, A_1, \dots, A_M) \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R} \quad (3.14)$$

$$f_{fit} : \{[0^\circ, 180^\circ]^M \times (0, \infty)^M\} \rightarrow \mathbb{R} : (\theta_1, \dots, \theta_M, A_1, \dots, A_M) \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R} \quad (3.15)$$

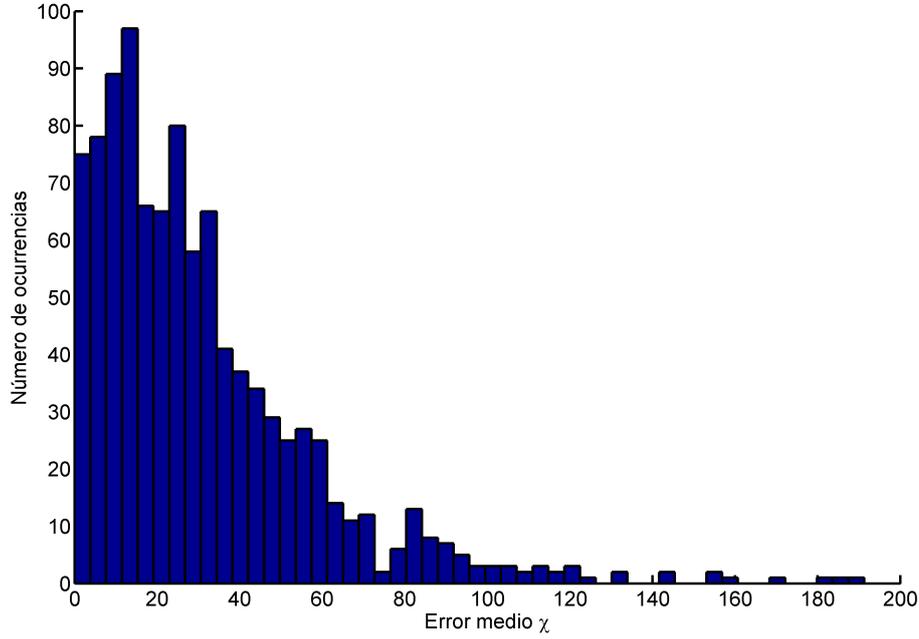


Figura 3.9: *Distribución del error medio.*

Con esta idea, se ejecuta un bloque de simulaciones en el que se hace incidir sobre un ULA de $L = 11$ elementos con una separación de media longitud de onda, $M = 4$ señales con dirección de llegada aleatoria y uniformemente distribuida en $[10^\circ, 170^\circ]$ y amplitud también aleatoria y uniformemente distribuida en $[1, 100]$. Se ejecutan $R = 1000$ repeticiones independientes con una SNR de 30 dB y se calcula una medida del error total según (3.16), que se inspira en la distancia entre los puntos que resultan de representar cada señal y su estimación con sus correspondientes amplitud y dirección de llegada en una gráfica polar.

$$\chi = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^M \sqrt{(A_{i,j} \cos \theta_{i,j} - \hat{A}_{i,j} \cos \hat{\theta}_{i,j})^2 + (A_{i,j} \sin \theta_{i,j} - \hat{A}_{i,j} \sin \hat{\theta}_{i,j})^2} \quad (3.16)$$

Se observa en la figura 3.9 que la distribución del parámetro χ de error muestra valores más grandes de lo deseado. Tras analizar estos resultados y observar que el rendimiento es peor de lo que cabría esperar, parece necesario utilizar otra técnica para estimar la amplitud o la amplitud compleja de las señales incidentes. Si con la amplitud y una única dirección de llegada por señal, los resultados no son buenos, con más motivo es razonable pensar que esta técnica no es adecuada para estimar dos direcciones de

llegada y la frecuencia de las señales, al mismo tiempo que la amplitud y la fase. Debe tenerse en cuenta que al aumentar en una dimensión por señal el espacio de solución, la carga computacional del método es mayor, y si además se añade otra nueva dimensión por señal para estimar la fase, la citada carga computacional crecerá aún más.

3.4.2. Obtención de la amplitud y la fase sin aumentar el espacio de solución

En primer lugar, un cálculo matricial, que será descrito a continuación, en las gráficas (3.17) a (3.19), permite inferir las amplitudes complejas de las señales incidentes a partir de las direcciones de llegada propuestas por el algoritmo de optimización. Estas amplitudes complejas se estiman independientemente para cada punto propuesto por el algoritmo, es decir, en cada evaluación de la función de ajuste se calculan unas amplitudes complejas. Estas amplitudes coinciden con las de las señales incidentes de forma precisa cuando los ángulos detectados también coinciden con los de las señales. En caso de que los ángulos propuestos no coincidan con los de las señales, las amplitudes complejas podrán coincidir o no con las de las señales, pero en cualquier caso, el mínimo global de la función de ajuste se hallará, *a fortiori*, en el punto en que los ángulos propuestos coincidan con los de las señales incidentes. Fuera de un entorno de ese punto, es esperable que el valor de la función de ajuste se incremente, facilitando así la búsqueda del mínimo global. Para un caso como el visto anteriormente, en el que señales incidentes y array están contenidos en un mismo plano, el procedimiento que debe ejecutarse en cada evaluación de la función de ajuste es el siguiente:

- El punto de partida es el conjunto de ángulos $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M]$ propuestos por el algoritmo de optimización.
- A partir de las posiciones de los elementos del array, se construye la matriz \mathbb{S} formada por la yuxtaposición de los vectores directores (o *steering vectors*) para esos ángulos propuestos, según se muestra en (3.17). Estos vectores se obtienen de asumir amplitud unitaria y fase nula en la ecuación (3.4) del *snapshot* sintético.
- En este punto, si $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_M]^T$ es un vector desconocido que contiene las amplitudes complejas de las señales incidentes, se deberá cumplir (3.18) y por tanto es posible obtener una estimación de las amplitudes complejas \mathbf{b} según

(3.19), en el supuesto de que los ángulos propuestos coincidan con los de las señales incidentes.

- Una vez que se dispone de las amplitudes complejas, o de una estimación de las mismas, es posible transformarlas a forma módulo-argumental para construir el *snapshot* sintético, ya que de él son conocidos todos los parámetros.
- Finalmente se procede a comparar los dos *snapshots* mediante (3.6).

Aquí ha sido necesario suponer que el número de señales incidentes es menor que el número de sensores en el array, es decir, que $M < L$, lo que, por otra parte, es totalmente lógico. De esta forma, la matriz \mathbb{S} tiene rango M y su pseudoinversa de Moore-Penrose (†) que coincide con su “inversa por la izquierda” no está infradeterminada. Así, es posible obtener una estimación de las amplitudes complejas de las señales. Esta estimación se puede obtener para cualquier elemento del espacio de solución, aunque, solamente se espera que la estimación de amplitudes complejas sea cercana a las amplitudes complejas de las señales incidentes cuando el punto del espacio de solución esté en un entorno de la solución buscada.

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} e^{j\frac{2\pi f}{c}(z_1 \cos \theta_1)} & \dots & e^{j\frac{2\pi f}{c}(z_1 \cos \theta_M)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j\frac{2\pi f}{c}(z_L \cos \theta_1)} & \dots & e^{j\frac{2\pi f}{c}(z_L \cos \theta_M)} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{s} \approx \mathbb{S}\mathbf{b}; \quad (3.18)$$

$$\mathbf{b} = \mathbb{S}^\dagger \mathbf{s}; \quad \mathbf{b} = \left[A_1 e^{j\beta_1} \dots A_M e^{j\beta_M} \right] \quad (3.19)$$

Con todo esto, el esquema de funcionamiento propuesto en la tabla 3.1, quedaría según se muestra ahora en la tabla 3.2, donde la diferencia respecto al anterior esquema (tabla 3.1) reside en la introducción del punto (ii).

3.5. La Cota de Cramér-Rao

En este punto en que ya se conoce un método que permite estimar las direcciones de llegada de señales con amplitud compleja arbitraria, se propone un mecanismo para

Tabla 3.2: *Nuevo esquema del método propuesto*

(i)	Elección aleatoria de puntos iniciales del espacio de solución.
(ii)	Cálculo de las amplitudes complejas correspondientes a cada punto, según el procedimiento descrito en las ecuaciones (3.17) a (3.19).
(iii)	Cálculo de los <i>snapshots</i> sintéticos correspondientes a cada punto, según la ecuación (3.4).
(iv)	Evaluación de la función de ajuste en cada punto, según la ecuación (3.6).
(v)	Comprobación del criterio de salida:
(v.a)	Comprobación de que el mejor valor obtenido para la función de ajuste es mayor que la tolerancia admitida.
(v.b)	Comprobación de que el número de iteraciones del algoritmo de optimización o el número de evaluaciones de la función de ajuste no superan el máximo
	Si se cumplen estos dos criterios, pasar a (vi). Si alguno no se cumple, pasar a (vii).
(vi)	Cálculo de nuevos puntos del espacio de solución, según el criterio del método de optimización metaheurística. Pasar a (ii).
(vii)	Entrega de la solución como el punto del espacio de solución que proporciona el valor más bajo de la función de ajuste.

evaluar la precisión de dichas estimaciones, en el sentido de que se calculará un límite para la precisión que puede ser obtenida.

De forma más precisa, la cota de Cramér-Rao (o de Frechet-Cramér-Rao) [140–142] es una cota inferior para la varianza de todo estimador insesgado. En el caso que nos ocupa, el estimador es todo el proceso que proporciona valores para los parámetros de señal a partir del *snapshot* leído en el array y demás información disponible. El hecho de que exista una cota inferior para la varianza del estimador insesgado significa que, dado un nivel de SNR, es imposible que ningún estimador centrado sea más preciso que la CRB, en el sentido de que su varianza sea menor.

3.5.1. Obtención de la cota

Sea un array formado por L antenas, consideradas isotrópicas, cuyo elemento q -ésimo tiene el centro de fase en la posición (x_q, y_q, z_q) del espacio. Sobre este array, inciden M ondas que se asumen perfectamente planas. La j -ésima señal incidente tiene dirección de llegada (θ_j, ϕ_j) , frecuencia f_j , amplitud A_j y fase β_j . Este conjunto de señales induce una tensión compleja $\mathbf{g} = [g_1, g_2, \dots, g_L]^T$ en bornes de los elementos del array.

Sea $f(\mathbf{g}, \vartheta)$ la función de densidad de probabilidad del *snapshot* \mathbf{g} , donde ϑ es un vector columna que contiene los $5M$ parámetros de señal (3.20)^c.

$$\vartheta = \underbrace{[\theta_1, \phi_1, f_1, A_1, \beta_1]}_{\text{Señal 1}}, \underbrace{[\theta_2, \phi_2, f_2, A_2, \beta_2]}_{\text{Señal 2}}, \dots, \underbrace{[\theta_M, \phi_M, f_M, A_M, \beta_M]}_{\text{Señal M}}]^T \quad (3.20)$$

$$\vartheta_r = [\theta_r, \phi_r, f_r, A_r, \beta_r]^T \quad (3.21)$$

Se define la matriz de información de Fisher de ϑ , de tamaño $5M \times 5M$ según (3.22), donde E es la esperanza matemática.

$$I(\vartheta) = [I_{rt}]; \quad I_{rt} = E \left[\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \vartheta_r} \right) \left(\frac{\partial \ln f}{\partial \vartheta_t} \right) | \vartheta \right] \quad (3.22)$$

Esta Matriz de Información de Fisher se construye a partir de la función de densidad de probabilidad del *snapshot* condicionada por la elección de los parámetros de señal ϑ , que es precisamente la función de densidad de probabilidad del ruido (\mathbf{n}): una variable aleatoria gaussiana multivariante (L -dimensional) compleja circular^d. El modelo para esta función de densidad de probabilidad se ha obtenido de [143] y [144].

$$f(\mathbf{g}|\vartheta) = f_{\mathbf{N}}(\mathbf{n}) = \frac{1}{\pi^L |\Sigma|} e^{-((x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu))} \quad (3.23)$$

Dado que el ruido se modela como gaussiano, incorrelado, circular y de media cero es posible modelarlo según (3.24) y afirmar que el vector de medias verificará (3.25). La matriz de covarianzas se obtiene según (3.26) y es una matriz diagonal (3.29), donde

^cDesde luego, es inmediato estimar menos parámetros de señal, con tan solo aplicar el procedimiento con menos parámetros

^dCon *circular* se hace referencia a que la parte real y la parte imaginaria del ruido son independientes, tienen la misma varianza y la distribución conjunta es invariante a la rotación

σ^2 es la varianza del ruido para la parte real y para la parte imaginaria que, dado que el ruido es circular, son iguales.

$$\mathbf{z} = \mathbf{n}_x + j\mathbf{n}_y = [x_1, x_2, \dots, x_L]^T + j[y_1, y_2, \dots, y_L]^T \quad (3.24)$$

$$\mu = 0 \quad (3.25)$$

$$\Sigma = \mathbf{E}(zz^H) \quad (3.26)$$

$$\Sigma_{r,s} = \begin{cases} 0, & \text{si } r \neq t \\ \mathbf{E}((x_r + jy_r)(x_t - jy_t)), & \text{si } r = t \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\Sigma_{r,r} = \mathbf{E}((x_r + jy_r)(x_r - jy_r)) = \mathbf{E}(x_r^2 + y_r^2) = \mathbf{E}(x_r^2) + \mathbf{E}(y_r^2) = \sigma^2 + \sigma^2 = 2\sigma^2 \quad (3.28)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2\sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2\sigma^2 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Así, la inversa de la matriz de covarianzas verificará (3.30).

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sigma^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2\sigma^2} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Y su determinante (3.31).

$$|\Sigma| = 2^L \sigma^{2L} \quad (3.31)$$

Así, la función de densidad de probabilidad del *snapshot*, condicionada por la elección de los parámetros quedará según (3.32), donde $|\cdot|_2$ es la 2-norma, o norma euclídea:

$$f(\mathbf{g}|\vartheta) = f_{\mathbf{N}}(\mathbf{n}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^L} e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}(\bar{z}_1 z_1 + \bar{z}_2 z_2 + \dots + \bar{z}_L z_L)\right)} \quad (3.32)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^L} e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + \dots + x_L^2 + y_L^2)\right)} \quad (3.33)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^L} e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}(2n_1^2 + 2n_2^2 + \dots + 2n_L^2)\right)} \quad (3.34)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^L} e^{-\left(\frac{1}{\sigma^2}|\mathbf{n}|_2^2\right)} \quad (3.35)$$

Con esto, es posible construir la Matriz de Información de Fisher a partir de su elemento genérico según (3.36), donde \mathbf{g} se calcula, para el sensor q -ésimo, según (3.38). Esta matriz es real, semidefinida positiva y simétrica.

$$I(\vartheta)_{r,t} = -\mathbf{E} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_r \partial \vartheta_t} \ln(f(\mathbf{s}|\vartheta)) \quad (3.36)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\partial g^H}{\partial \vartheta_r} \frac{\partial g}{\partial \vartheta_t} \right) \quad (3.37)$$

$$g_q(\theta_1, \phi_1, f_1, A_1, \beta_1, \dots, \theta_M, \phi_M, f_M, A_M, \beta_M) = \sum_{i=1}^M e^{j\beta_i} A_i e^{j\frac{2\pi f_i}{c}(x_q \sin \theta_i \cos \phi_i + y_q \sin \theta_i \sin \phi_i + z_q \cos \theta_i)} \quad (3.38)$$

En este punto, los parámetros de señal son sustituidos por su valor real, de modo que la matriz de información de Fisher, $I(\vartheta)$, resulta ser una matriz numérica. Esta matriz, se invierte obteniéndose la matriz G .

$$G = I(\vartheta)^{-1} \quad (3.39)$$

A continuación, se establece una partición de la matriz G en $M \times M$ submatrices de orden 5×5 , denotadas $G_{m,n}$.

$$G = \begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,M} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{M,1} & G_{M,2} & \dots & G_{M,M} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

La submatriz $G_{n,n}$ se corresponde con la señal n -ésima y contiene en su diagonal principal las cotas de la varianza del estimador correspondientes a los cinco parámetros de esa señal.

Si se denota por $\hat{\kappa}$ el estimador del parámetro κ , las cotas para la n -ésima señal estimada serán las mostradas en las expresiones (3.41) a (3.45).

$$\text{Var}(\hat{\theta}_n) \geq G_{n,n}(1, 1) \quad (3.41)$$

$$\text{Var}(\hat{\phi}_n) \geq G_{n,n}(2, 2) \quad (3.42)$$

$$\text{Var}(\hat{f}_n) \geq G_{n,n}(3, 3) \quad (3.43)$$

$$\text{Var}(\hat{A}_n) \geq G_{n,n}(4, 4) \quad (3.44)$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}_n) \geq G_{n,n}(5, 5) \quad (3.45)$$

3.5.2. Obtención de la cota mediante cálculo simbólico

Dado el elevado número de operaciones necesarias para calcular la CRB y lo tedioso de las mismas, se ha optado por utilizar cálculo simbólico asistido por ordenador, mediante la librería de cálculo simbólico de MatLab [145]. Entre las ventajas, destacan la rapidez para realizar los cálculos, la rápida generalización a cualquier número de señales, la facilidad para particularizar los cálculos a un número menor de parámetros estimados y, por encima de todo, el hecho de que no es necesario utilizar manualmente ni introducir a un ordenador las enormes fórmulas que resultan de este cálculo y que podrían ser una fuente de errores.

3.6. Estimación de la dirección de llegada y la frecuencia

En este apartado se trata el caso de la estimación de los parámetros de señal de un conjunto de frentes de onda contenidos en un mismo plano que a su vez contiene al array. La principal diferencia con el primer caso es que en éste, las frecuencias de las señales incidentes son variables desconocidas, al igual que las amplitudes complejas, que serán estimadas con el método presentado en la sección 3.4.2. Dado que una variación en la frecuencia daría el mismo resultado en un array lineal que una variación en la dirección de llegada, se deduce que un array lineal (de una sola dimensión) sería incapaz de resolver este problema sin ambigüedades. Así, en este caso se utilizarán arrays bidimensionales, cuyos elementos están contenidos en el plano que contiene a las señales. La reformulación del problema resultaría la siguiente:

⌈⌈ Sea un array formado por L antenas, consideradas isotrópicas, cuyo elemento i -ésimo tiene el centro de fase en la posición $(x_i, 0, z_i)$ del espacio. Sobre este array, inciden M ondas que se asumen perfectamente planas y que están contenidas en el plano $\phi = 0$. El problema consiste en estimar los parámetros de cada señal, θ_j, f_j para la señal j -ésima, mediante una única lectura simultánea e instantánea de las tensiones complejas inducidas $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_L]^T$ en bornes de los elementos del array. Como en los casos anteriores, el acoplo entre los elementos del array se supone nulo. ⌋⌋

Si en el caso anterior, el espacio de búsqueda del algoritmo de optimización era un subconjunto $E \subset \mathbb{R}^M$ y la solución un punto de ese espacio, en este caso el espacio de búsqueda es un subconjunto $E \subset \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M = \mathbb{R}^{2M}$ y la solución contiene M parejas de valores de θ y f , es decir, para cada señal, una dirección de llegada y una frecuencia. El modelo de señal se muestra en la ecuación (3.46), donde s_q es la tensión compleja en bornes del elemento q -ésimo, f_i, A_i, β_i y θ_i son respectivamente la frecuencia, amplitud, fase y dirección de llegada de la señal i -ésima. La velocidad de propagación es c y n_q es el ruido en el sensor q -ésimo, que se considera, gaussiano, de media cero e incorrelado con el ruido en los otros sensores.

$$\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_L]^T; \quad s_q = \sum_{i=1}^M e^{j\beta_i} A_i e^{j\frac{2\pi f_i}{c}(x_q \sin \theta_i + z_q \cos \theta_i)} + n_q \quad (3.46)$$

Los elementos del array se sitúan en el plano XZ , o equivalentemente, $\phi = 0$, tal y como muestra la figura 3.10 en la que se aprecia un array plano bi-logarítmico. Se ha de notar que esta metodología no requiere que los elementos del array estén equiespaciados. En este caso, el *snapshot* sintético (3.47) coincide exactamente con el modelo de señal, con la excepción, claro está, del ruido.

$$\mathbf{g} = [g_1, g_2, \dots, g_L]^T; \quad g_q = \sum_{i=1}^M e^{j\beta_i} A_i e^{j\frac{2\pi f_i}{c}(x_q \sin \theta_i + z_q \cos \theta_i)} \quad (3.47)$$

No obstante, este *snapshot* sintético contiene los valores de amplitud y fase de las señales, que son incógnitas. Para obtener una estimación de las mismas se debe realizar el cálculo matricial presentado en el apartado 3.4.2, *mutatis mutandis*: en este caso \mathbb{S} también es la matriz formada por la yuxtaposición de los M vectores directores, solo que en esta ocasión, estos vectores dependen de las M direcciones de llegada y las M

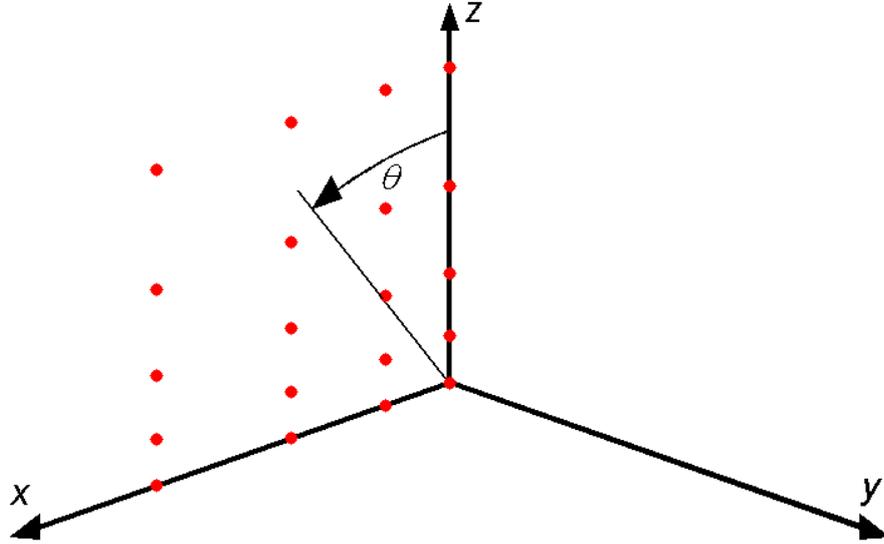


Figura 3.10: Array bidimensional sobre el plano $\phi = 0$

frecuencias propuestas por el algoritmo de optimización.

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} e^{j\frac{2\pi f_1}{c}(x_1 \sin \theta_1 + z_1 \cos \theta_1)} & \dots & e^{j\frac{2\pi f_M}{c}(x_1 \sin \theta_M + z_1 \cos \theta_M)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j\frac{2\pi f_1}{c}(x_L \sin \theta_1 + z_L \cos \theta_1)} & \dots & e^{j\frac{2\pi f_M}{c}(x_L \sin \theta_M + z_L \cos \theta_M)} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Con esto, pasando \mathbf{b} a forma módulo-argumental, se obtiene la amplitud y fase estimadas. A continuación, estos módulo y fase, para cada señal, se introducen junto a los parámetros propuestos por el algoritmo de optimización en el modelo de señal, obteniéndose así el *snapshot* sintético que será comparado con el *snapshot* leído en el array, mediante (3.6). Para comprobar la validez de este nuevo enfoque, se ejecutan cuatro bloques de simulaciones, incluyendo simulaciones aleatorizadas y no aleatorizadas, así como un breve análisis de la resolución del algoritmo.

El primer bloque de simulaciones pretende verificar el funcionamiento del nuevo enfoque en condiciones generales, para lo cual, los parámetros de las señales incidentes se eligen de forma aleatoria. El rendimiento del algoritmo se mide haciendo uso del RMSE (*Root Mean Square Error*), o la raíz del error cuadrático medio, según se muestra en (3.49), donde R es el número de simulaciones independientes y κ representa cualquiera

de los parámetros de señal, a saber, la dirección de llegada (θ) o la frecuencia (f).

$$\text{RMSE}_\kappa = \frac{1}{MR} \sum_{n=1}^R \sqrt{\sum_{i=1}^M (\kappa_{i,n} - \hat{\kappa}_{i,n})^2} \quad (3.49)$$

Para estas simulaciones, se elige un array de elementos isotrópicos, plano y bi-logarítmico, como el mostrado en la figura 3.10. Diremos que un array es “bi-logarítmico” cuando las proyecciones ortogonales sobre los ejes coordenados sean arrays logarítmicos, es decir, que la separación entre un elemento y el siguiente es el producto de una constante por la separación entre ese elemento y el anterior. Concretamente, para este caso se utiliza un array bi-logarítmico de 20 elementos, con cuatro elementos y una apertura eléctrica de dos longitudes de onda a lo largo del eje x , es decir, $L_x = 4$ y $\aleph_x = 2\lambda$ y cinco elementos y una apertura eléctrica de cinco semilongitudes de onda a lo largo del eje z , es decir, $L_z = 5$ y $\aleph_z = 2.5\lambda$. Entiéndase por longitud de onda, la correspondiente a la frecuencia central de la banda considerada.

La definición de un array logarítmico a partir de su apertura \aleph y su número de elementos L queda totalmente determinada de la siguiente forma: se establece que la posición del primer elemento, a lo largo del eje z , será $z_1 = 0$ y la del último $z_L = \aleph$. Se calculan unas posiciones auxiliares \tilde{z} dividiendo el intervalo $[0 \ln(\aleph + 1)]$ en L subintervalos iguales (3.51). Las posiciones finales z , resultan de la exponenciación de las posiciones auxiliares \tilde{z} , a las que se resta una unidad (3.52) para cumplir las premisas de $z_1 = 0$ y $z_L = \aleph$. En forma cerrada, las posiciones z_i de los sensores se pueden calcular según (3.53). Es posible comprobar que el cociente de dos distancias entre pares de elementos consecutivos (3.54)(3.55) es constante y no depende de los elementos considerados, tal y como se observa en (3.58)

$$\tilde{\mathbf{z}} = [\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_L]^T \quad (3.50)$$

$$\tilde{z}_n = \frac{n-1}{L-1} \ln(\aleph + 1) \quad (3.51)$$

$$\mathbf{z} = e^{\tilde{\mathbf{z}}} - 1 \quad (3.52)$$

$$z_n = e^{\frac{n-1}{L-1} \ln(\aleph+1)} - 1 = (\aleph + 1)^{\frac{n-1}{L-1}} - 1 \quad (3.53)$$

$$\forall n : 1 \leq n \leq i - 2 : \quad (3.54)$$

$$\frac{z_{n+2} - z_{n+1}}{z_{n+1} - z_n} = \frac{(\aleph + 1)^{\frac{n+1}{L-1}} - (\aleph + 1)^{\frac{n}{L-1}}}{(\aleph + 1)^{\frac{n}{L-1}} - (\aleph + 1)^{\frac{n-1}{L-1}}} \quad (3.55)$$

$$= \frac{(\aleph + 1)^{\frac{1}{L-1}} (\aleph + 1)^{\frac{n}{L-1}} - (\aleph + 1)^{\frac{1}{L-1}} (\aleph + 1)^{\frac{n-1}{L-1}}}{(\aleph + 1)^{\frac{n}{L-1}} - (\aleph + 1)^{\frac{n-1}{L-1}}} \quad (3.56)$$

$$= (\aleph + 1)^{\frac{1}{L-1}} \frac{(\aleph + 1)^{\frac{n}{L-1}} - (\aleph + 1)^{\frac{n-1}{L-1}}}{(\aleph + 1)^{\frac{n}{L-1}} - (\aleph + 1)^{\frac{n-1}{L-1}}} \quad (3.57)$$

$$= (\aleph + 1)^{\frac{1}{L-1}} \quad (3.58)$$

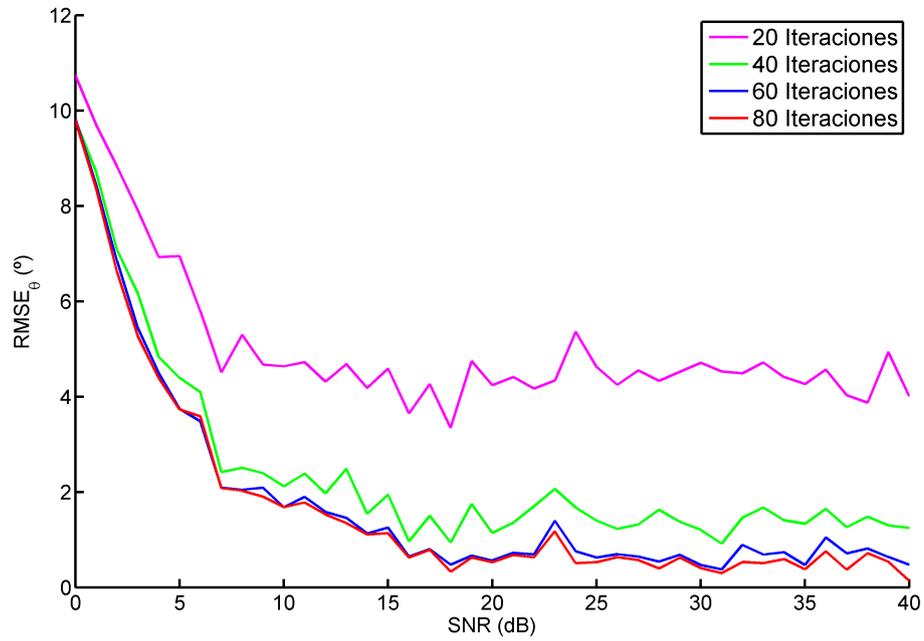
Para la primera prueba, todos los parámetros de señal se eligen de forma aleatoria y uniforme en los intervalos descritos en (3.59). Se ejecutan $R = 500$ simulaciones independientes, para cada valor de la SNR, que se hace variar desde 0 dB hasta 40 dB en pasos de 1 dB. No obstante, se utilizan los mismos R conjuntos de señales para cada valor de la SNR.

$$\forall i : 1 \leq i \leq M; \forall n : 1 \leq n \leq R : \begin{cases} \theta_{i,n} \in [10^\circ, 170^\circ] \\ f_{i,n} \in [280, 320] \text{ MHz} \\ A_{i,n} \in [1, 5] \\ \beta_{i,n} \in [0^\circ, 360^\circ] \end{cases} \quad (3.59)$$

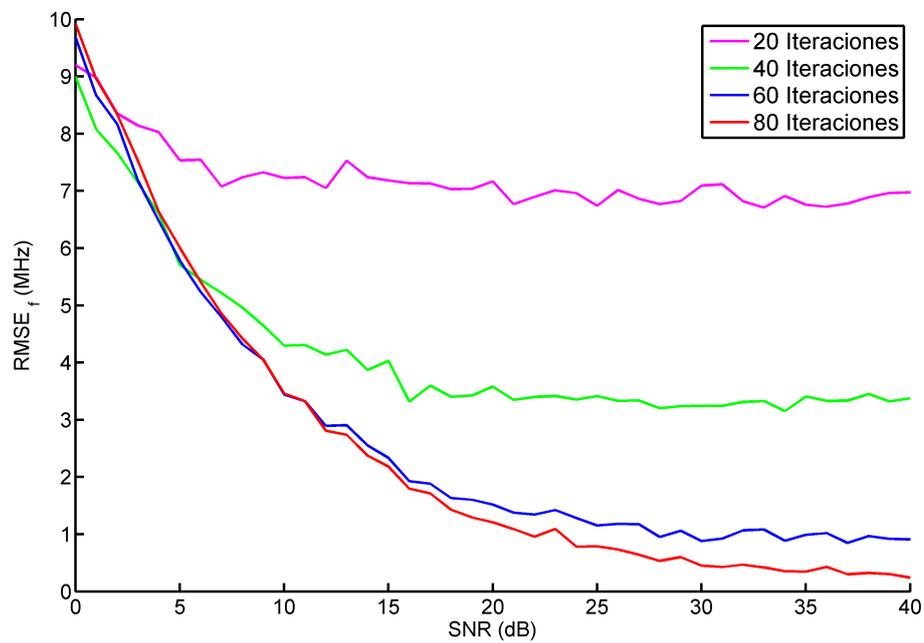
Los resultados son los mostrados en las figuras 3.11(a) y 3.11(b), que muestran el RMSE para la dirección de llegada (θ) y la frecuencia (f) respectivamente. Se puede observar que con un número de iteraciones no especialmente alto, se obtienen precisiones angulares medias del orden de un grado y precisiones en frecuencia del orden de un megahercio, para valores de la SNR por encima de 25dB. Se observa también que el hecho de que el algoritmo realice más iteraciones tiene más importancia cuanto más alto sea el valor de la SNR, ya que para valores de la SNR muy bajas, la precisión está limitada por el ruido y no tanto por el número de iteraciones.

En un segundo bloque de simulaciones, se compara la varianza de los estimadores con la CRB, límite teórico de la varianza de un estimador insesgado, de modo que sea posible conocer cuán precisa es la estimación de los parámetros en comparación con todo lo precisa que podría ser. En este caso, también se utiliza un array bi-logarítmico,

3. Estimación Multidimensional de Dirección de Llegada



(a) RMSE en dirección de llegada



(b) RMSE en frecuencia

Figura 3.11: RMSE frente a la SNR para la simulación aleatorizada en un array bi-logarítmico con $L_x = 4$, $N_x = 2\lambda$, $L_z = 5$ y $N_z = 2.5\lambda$

pero de $L = 30$ elementos, con la misma configuración en el eje z que el anterior ($L_z = 5$ elementos, apertura de $\aleph_z = 2.5\lambda$), pero con $L_x = 6$ elementos a lo largo del eje x y una apertura eléctrica de $\aleph_x = 3\lambda$. Como en el caso anterior, queda patente que no es necesario utilizar arrays con sus elementos distanciados uniformemente para aplicar esta metodología. Se utilizan $M = 2$ señales incidentes con parámetros de señal fijos, según (3.60). Para equilibrar el efecto del ruido en las dos señales, las amplitudes se eligen iguales entre sí.

$$\begin{cases} \theta_1 = 115^\circ; & \theta_2 = 40^\circ \\ f_1 = 307 \text{ MHz}; & f_2 = 295 \text{ MHz} \\ A_1 = 1; & A_2 = 1 \\ \beta_1 = 270^\circ; & \beta_2 = 40^\circ \end{cases} \quad (3.60)$$

Se ejecutan $R = 1000$ simulaciones independientes para cada valor de la SNR, que barre el rango desde los 0 dB hasta los 40 dB, en pasos de 1 dB. Como se ha mencionado anteriormente, el error para cada estimador se estudia en términos de la varianza o, equivalentemente, del Error Cuadrático Medio o *Mean Square Error* (MSE), que se define para cada parámetro (κ) y para cada señal en (3.61) y en decibelios en (3.62).

$$\text{MSE}_{\kappa,i} = \frac{1}{R} \sum_{n=1}^R (\kappa_i - \hat{\kappa}_{i,n})^2 \quad (3.61)$$

$$\text{MSE}_{\kappa,i}(\text{dB}) = -10 \log \frac{1}{R} \sum_{n=1}^R (\kappa_i - \hat{\kappa}_{i,n})^2 \quad (3.62)$$

Los resultados de este bloque de simulaciones se presentan de dos formas. En la primera, para valores concretos de la SNR $\in \{10, 20, 30, 40\}$ dB, se muestra el MSE en escala logarítmica como función del número de iteraciones en las figuras 3.12 y 3.13. En línea discontinua, se presenta la CRB para cada SNR y se observa cómo a medida que crece el número de iteraciones, el MSE converge a la CRB. El comportamiento del algoritmo durante las primeras iteraciones depende muy poco del nivel de ruido, no obstante, debe observarse que aunque se alcance la CRB para todos los valores de la SNR, son necesarias más iteraciones cuanto mayor sea la SNR, dado que el algoritmo de optimización necesita alcanzar la solución de forma más precisa.

En la segunda representación, se toman los datos de todas las SNR, pero se fija el número de iteraciones del algoritmo para las que se presentan los resultados, mostrados

3. Estimación Multidimensional de Dirección de Llegada

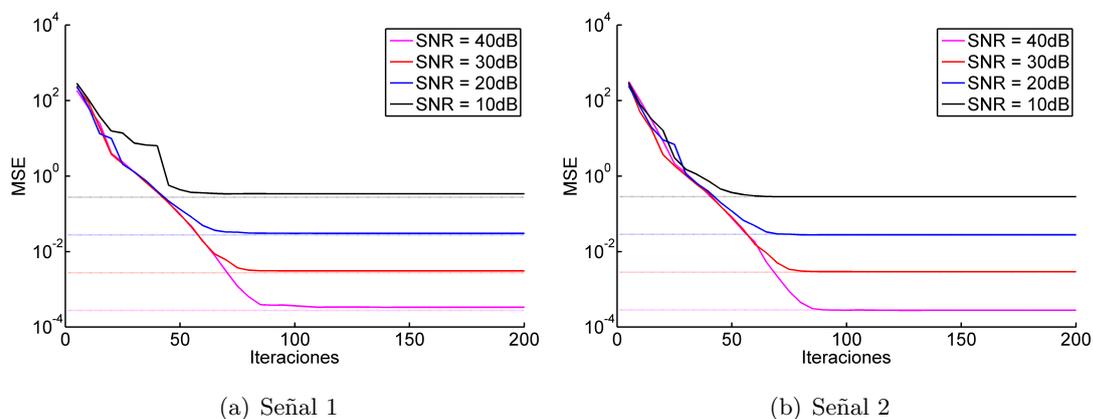


Figura 3.12: MSE en dirección de llegada, frente al número de iteraciones para señales fijas en un array bi-logarítmico con $L_x = 6$, $N_x = 3\lambda$, $L_z = 5$ y $N_z = 2.5\lambda$

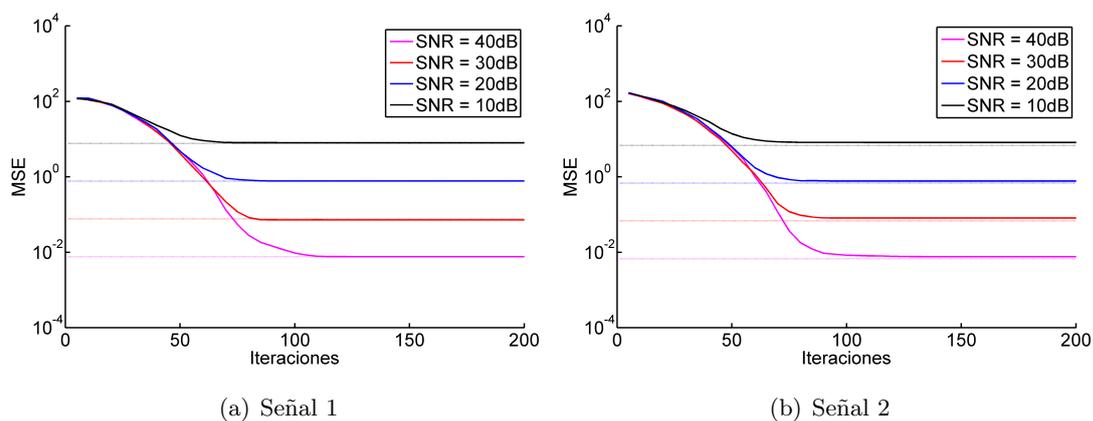


Figura 3.13: MSE en frecuencia, frente al número de iteraciones para señales fijas en un array bi-logarítmico con $L_x = 6$, $N_x = 3\lambda$, $L_z = 5$ y $N_z = 2.5\lambda$

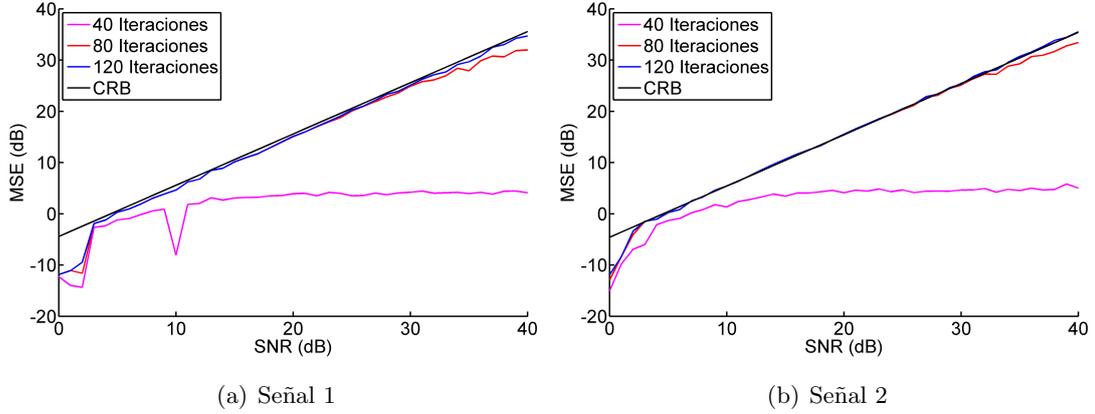


Figura 3.14: *MSE (dB) en dirección de llegada, frente a la SNR para señales fijas en un array bi-logarítmico con $L_x = 6$, $\aleph_x = 3\lambda$, $L_z = 5$ y $\aleph_z = 2.5\lambda$*

en las figuras 3.14 y 3.15. En este caso, y como es habitual en la literatura científica, los datos se presentan una escala lineal de decibelios, con el error calculado según (3.62).

Estos resultados, si bien no demuestran de forma analítica la eficiencia de los estimadores, sí permiten observar que apenas existe rango de mejora. Se aprecia también que existe un límite inferior en la SNR, en torno a los 4 dB, por debajo del cual la estimación se aleja de la cota en dirección de llegada. Por encima de esa SNR, se puede observar que los resultados alcanzan la CRB, tanto para dirección de llegada como para frecuencia, a partir de 120 iteraciones del algoritmo y en muchos casos, principalmente para valores pequeños de la SNR, a partir de tan solo 80. Como en las anteriores gráficas, los valores de SNR más altos, requieren un mayor número de iteraciones para alcanzar la precisión proporcionada por la CRB. Este mismo grupo de simulaciones se ejecuta con varios conjuntos de $M = 2$ señales con parámetros diferentes, y en todos los casos los resultados son semejantes, en el sentido de que se obtienen las mismas conclusiones: buen funcionamiento y convergencia a la CRB por encima de los 4 dB de SNR y de las 120 iteraciones del algoritmo de optimización.

En la misma línea que este bloque de simulaciones, se ejecuta otro semejante en el que se cambia la geometría del array por un UCA de $L = 16$ elementos, con su centro en el origen de coordenadas y radio según (3.63), de modo que la distancia entre elementos adyacentes sea de media longitud de onda en el centro de la banda.

$$r = \frac{1}{4 \sin \frac{\pi}{L}} \quad (3.63)$$

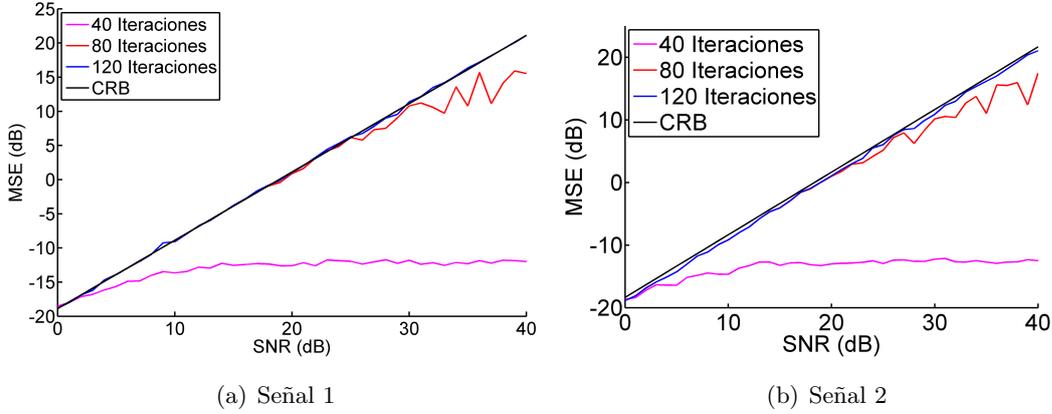


Figura 3.15: *MSE (dB) en frecuencia, frente a la SNR para señales fijas en un array bi-logarítmico con $L_x = 6$, $N_x = 3\lambda$, $L_z = 5$ y $N_z = 2.5\lambda$*

Como en el caso anterior, se ejecutan $R = 1000$ simulaciones independientes con los mismos parámetros de señal que los propuestos en (3.60) y se presentan gráficas del mismo tipo. El cambio en la estructura del array y, principalmente, la reducción en el número L de elementos del mismo (de $L = 30$ a $L = 16$), se refleja en una disminución de la precisión de los estimadores como se aprecia en las figuras 3.16 a 3.19. No obstante, aunque en términos absolutos se produzca un menoscabo en las prestaciones, en términos relativos es lo esperable, ya que también la CRB ha cambiado su valor y la nueva varianza del estimador se ajusta a la nueva cota. En las gráficas de frecuencia (Figuras 3.15 y 3.19), se observa que para valores muy bajos de la SNR, las estimaciones superan la CRB. Este efecto, que en condiciones ideales es imposible, será abordado al final del apartado 3.7.

Estas dos últimas simulaciones en que se utilizan dos geometrías de array tan diferentes y en las que, sin embargo, los resultados se ajustan de forma tan semejante a la CRB permiten inferir que el funcionamiento de la metodología propuesta es adecuado y también lo será para otras geometrías. En el apartado 3.7, relativo a la estimación conjunta de dos direcciones de llegada y la frecuencia, se analizan más geometrías, también con buenos resultados.

No obstante, se pretende ir más lejos en este análisis estudiando también de qué forma influyen en el rendimiento ciertas circunstancias especiales, como es el caso de que dos señales tengan unos parámetros de señal muy cercanos, tanto en frecuencia como en dirección de llegada. Para ello, se ejecuta una simulación paramétrica utilizando el

3.6. Estimación de la dirección de llegada y la frecuencia

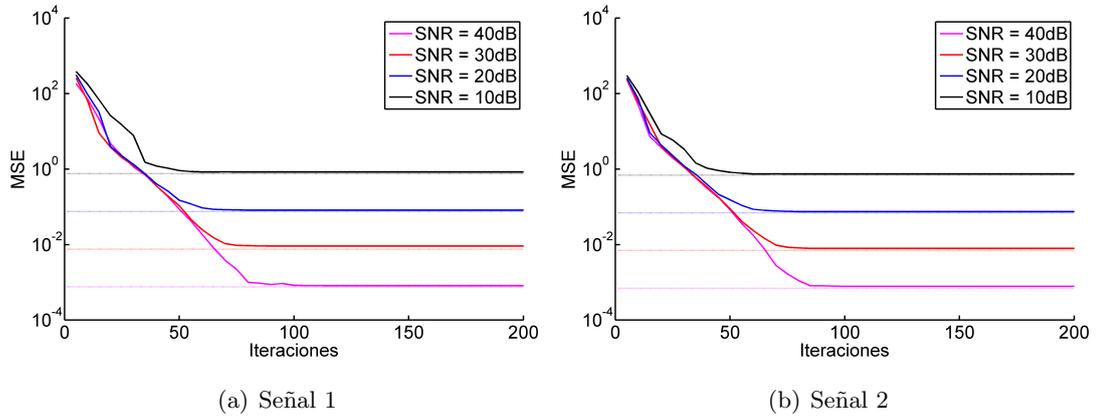


Figura 3.16: *MSE en dirección de llegada frente al número de iteraciones para un UCA de $L = 16$ elementos.*

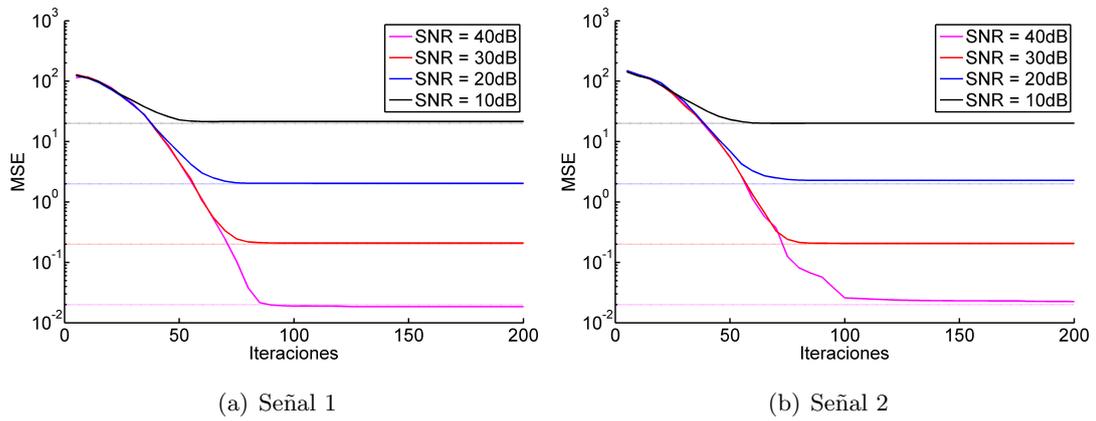


Figura 3.17: *MSE en frecuencia, frente al número de iteraciones para un UCA de $L = 16$ elementos.*

3. Estimación Multidimensional de Dirección de Llegada

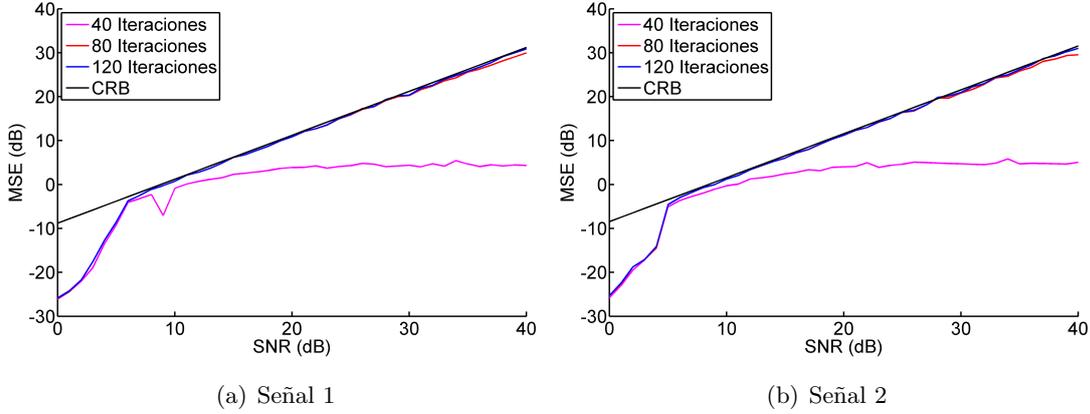


Figura 3.18: *MSE (dB) en dirección de llegada, frente a la SNR para un UCA de $L = 16$ elementos.*

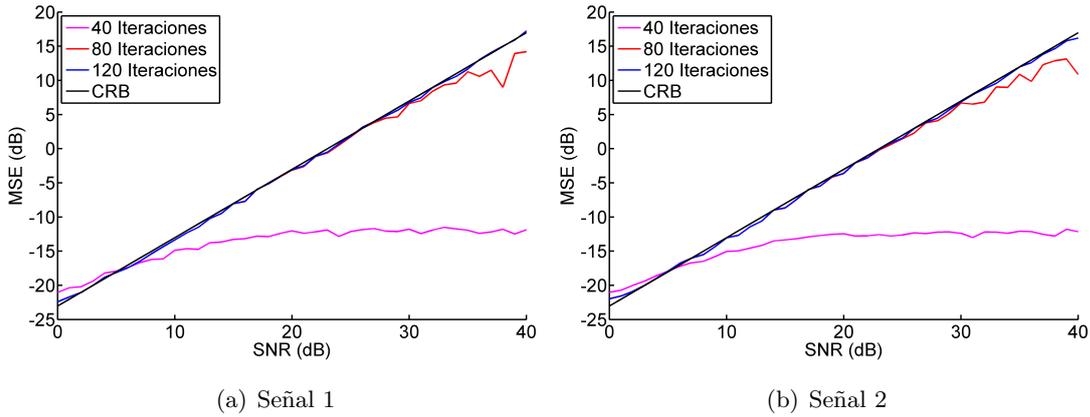


Figura 3.19: *MSE (dB) en frecuencia, frente a la SNR para un UCA de $L = 16$ elementos.*

array circular de $L = 16$ elementos presentado en la simulación anterior. Se definen así las variables Δ_θ y Δ_f que representan, respectivamente, la separación en dirección de llegada y frecuencia de $M = 2$ señales. Se definen también dos parámetros, θ_c y f_c , que son respectivamente la media de las dos direcciones de llegada y la media de las dos frecuencias. De esta forma, fijando estos cuatro parámetros, quedan perfectamente definidos los cuatro parámetros de señal (dos direcciones de llegada y dos frecuencias)

que se pretenden estimar.

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_c - \frac{\Delta_\theta}{2} & f_1 = f_c - \frac{\Delta_f}{2} \\ \theta_2 = \theta_c + \frac{\Delta_\theta}{2} & f_2 = f_c + \frac{\Delta_f}{2} \end{cases} \quad (3.64)$$

Para el desarrollo de la simulación, se eligen $R = 100$ parejas de valores para los parámetros centrales de forma aleatoria y uniformemente distribuida en los intervalos mostrados en (3.65).

$$\begin{cases} \theta_c \in [15^\circ, 165^\circ] \\ f_c \in [285 \text{ MHz}, 315 \text{ MHz}] \end{cases} \quad (3.65)$$

Para tres valores de la SNR fijos en $\text{SNR} \in \{10, 20, 30\}$ dB, se hace un barrido en los dos parámetros Δ_θ y Δ_f según (3.66).

$$\begin{cases} \Delta_\theta \in \{1, 2, 3, \dots, 8\}^\circ \\ \Delta_f \in \{0.4, 0.8, 1.2, \dots, 4\} \text{ MHz} \end{cases} \quad (3.66)$$

De esta forma, para cada caso de SNR se obtienen dos gráficas con la Raíz del Error Cuadrático Medio o *Root Mean Square Error* (RMSE), una para la dirección de llegada y otra para la frecuencia. En los tres pares de gráficas 3.20 es posible apreciar, además de que los errores son más pequeños cuando la SNR es mayor, que tanto el error en dirección de llegada como el error en frecuencia depende principalmente de lo pequeño que sea el parámetro Δ_θ y no del valor de Δ_f . En otras palabras, que el rendimiento del método es más susceptible de cometer errores cuando las señales incidentes tienen una dirección de llegada cercana, y sin embargo se muestra más robusto cuando las señales incidentes tienen frecuencia semejante. Además, en el caso en que las señales tienen direcciones de llegada muy cercanas, el error aparece tanto para la estimación de dirección de llegada como para la estimación de frecuencia.

3.7. Estimación conjunta de dos ángulos y la frecuencia

En este apartado se trata el problema de la estimación conjunta de los dos ángulos de llegada θ y ϕ al mismo tiempo que la frecuencia de las señales incidentes. La estrategia utilizada es similar a la del apartado 3.6, en el sentido de que las amplitudes

3. Estimación Multidimensional de Dirección de Llegada

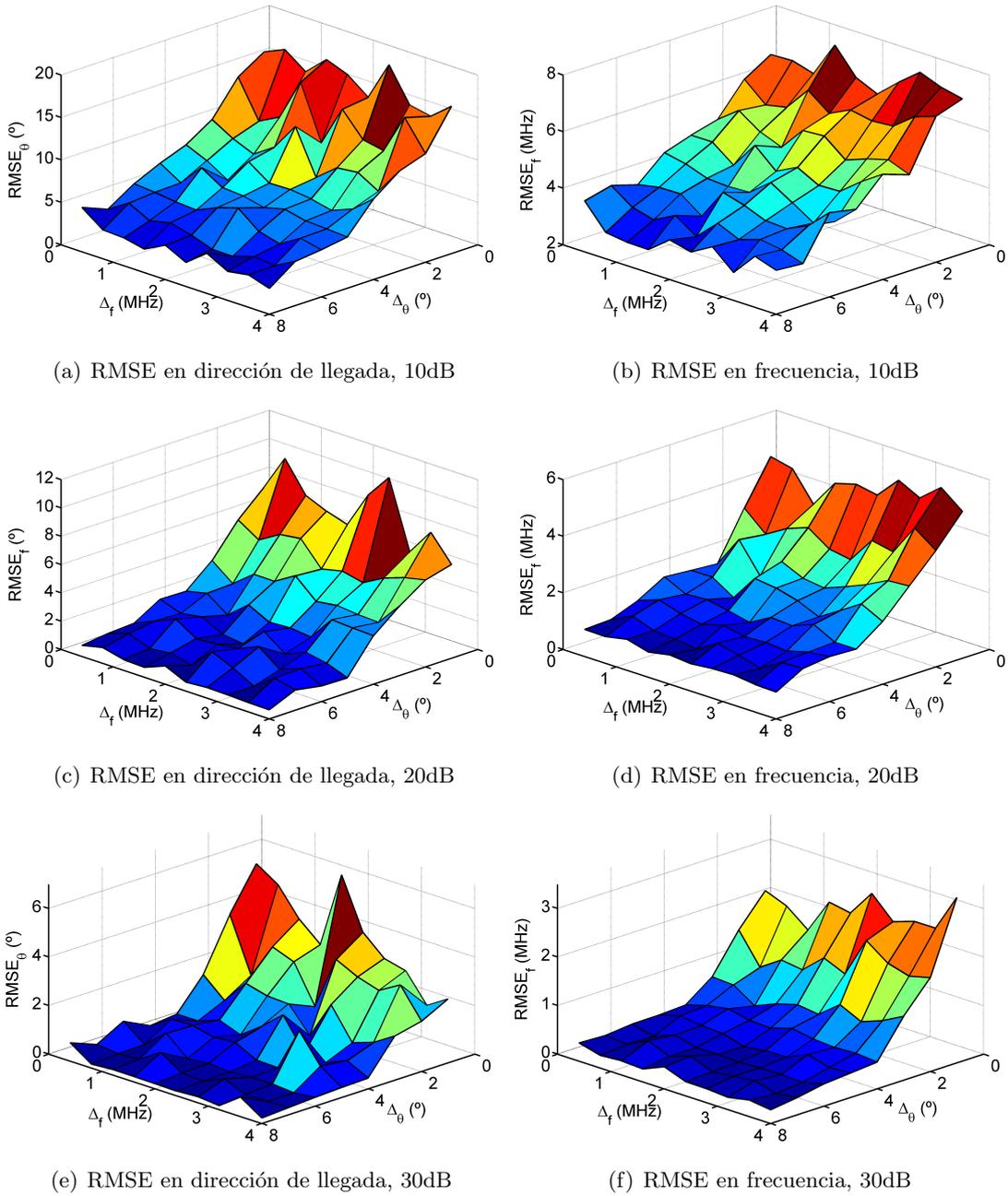


Figura 3.20: *RMSE para frecuencia y dirección de llegada en función de $\Delta\theta$ y Δf , para varias SNRs.*

complejas se obtienen de la forma presentada en 3.4.2, pero introduciendo una nueva dimensión para cada señal incidente en el espacio de búsqueda para representar ese segundo ángulo. Razonando también de forma semejante al apartado anterior, se deduce que la utilización de arrays planos (aquellos cuyos elementos tienen su centro de fase contenido en un mismo plano) no es válida para estimar tres parámetros de señal, así que se utilizarán arrays tridimensionales. Una vez más, se reformula el problema:

“ Sea un array formado por L antenas, consideradas isotrópicas, cuyo elemento i -ésimo tiene el centro de fase en la posición (x_i, y_i, z_i) del espacio. Sobre este array, inciden M ondas que se asumen perfectamente planas. El problema consiste en estimar los parámetros de cada señal, θ_j, ϕ_j, f_j para la señal j -ésima, mediante una única lectura simultánea e instantánea de las tensiones complejas inducidas $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_L]^T$ en bornes de los elementos del array. Como en los casos anteriores, el acoplo entre los elementos del array se supone nulo. ”

Con esto, se establece el modelo del *snapshot* sintético para el problema completo (3.67), que coincide exactamente con (3.4). De la misma forma, el modelo de la señal leída en el array es (3.68), que coincide con (3.5).

$$\mathbf{g} = [g_1, g_2, \dots, g_L]^T; \quad g_q = \sum_{i=1}^M e^{j\beta_i} e^{j2\pi f_i t} A_i e^{j\frac{2\pi f_i}{c}(x_q \sin \theta_i \cos \phi_i + y_q \sin \theta_i \sin \phi_i + z_q \cos \theta_i)} \quad (3.67)$$

$$\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_L]^T; \quad s_q = \sum_{i=1}^M e^{j\beta_i} A_i e^{j\frac{2\pi f_i}{c}(x_q \sin \theta_i \cos \phi_i + y_q \sin \theta_i \sin \phi_i + z_q \cos \theta_i)} + n_q \quad (3.68)$$

En este caso, el espacio de búsqueda es $3M$ -dimensional, dado que para señal incidente es necesario estimar su dirección de llegada bidimensional (θ, ϕ) y su frecuencia f . De esta forma, la función de ajuste tiene la forma mostrada en (3.69) y puede ser reescrita según (3.70).

$$f_{fit} : \{\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M\} \rightarrow \mathbb{R} : \{\theta^M, \phi^M, f^M\} \rightarrow [0, 1] \quad (3.69)$$

$$f_{fit} : \{[0, 180]^M \times [0, 360]^M \times \mathbb{R}^M\} \subset \mathbb{R}^{3M} \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R} \quad (3.70)$$

La matriz \mathbb{S} para el cálculo de las amplitudes complejas tiene la forma presentada en (3.71).

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} e^{j\frac{2\pi f_1}{c}(x_1 \cos\phi_1 \sin\theta_1 + y_1 \sin\phi_1 \sin\theta_1 + z_1 \cos\theta_1)} & \dots & e^{j\frac{2\pi f_M}{c}(x_1 \cos\phi_M \sin\theta_M + y_1 \sin\phi_M \sin\theta_M + z_1 \cos\theta_M)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j\frac{2\pi f_1}{c}(x_L \cos\phi_1 \sin\theta_1 + y_L \sin\phi_1 \sin\theta_1 + z_L \cos\theta_1)} & \dots & e^{j\frac{2\pi f_M}{c}(x_L \cos\phi_M \sin\theta_M + y_L \sin\phi_M \sin\theta_M + z_L \cos\theta_M)} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Con esta información, ya es posible llevar a cabo simulaciones para conocer el rendimiento del método. No obstante, es necesario definir en primer lugar el conjunto de arrays tridimensionales sobre los que se ejecutarán las simulaciones. Se utilizan cinco geometrías de array diferentes, y cada una de ellas, con cinco números de elementos diferentes. Para denotar cada array en concreto, se hará uso de un código que identifique la geometría seguido del número de elementos de ese array en particular. Las geometrías son las siguientes:

En primer lugar se presenta el array que será notado como $2L$ y cuyos elementos están situados en puntos de los ejes coordenados, incluyendo el origen. La distancia entre elementos adyacentes en este array se ha fijado en media longitud de onda para el centro de la banda. En cada eje coordenado hay el mismo número de elementos, con la excepción de uno, arriba o abajo, en caso de que el número de elementos L no pueda ser escrito como $L = 3n + 1$; con $n \in \mathbb{N}$. Estas geometrías de array se muestran en la figura 3.21.

En segundo lugar, se define el array PL . El nombre hace referencia a los planos ya que los elementos de este array están situados sobre los planos coordenados. Es decir, todo elemento de este array tiene al menos una coordenada nula. La distancia entre elementos adyacentes, como en el caso anterior, se establece en media longitud de onda para el centro de la banda, y sobre cada plano coordenado, el array es plano uniforme y, por lo tanto, rectangular. Podría decirse que las posiciones de los elementos de este array están sobre las tres caras de una superficie cúbica que comparten un mismo vértice, siendo este vértice el origen de coordenadas. Estos arrays se muestran en la figura 3.22.

En tercer lugar, se presenta el array CB , que es un array cúbico en el sentido de que las posiciones de sus sensores forman un cubo, o un paralelepípedo en el caso de que L no pueda ser escrito como el cubo de un número natural. La distancia entre cada elemento y sus elementos contiguos es media longitud de onda. Estas geometrías

se muestran en la figura 3.23.

La cuarta geometría de array, denotada por *LOG*, se define a partir de la anterior, ya que tiene la misma apertura eléctrica y el mismo número de elementos a lo largo de cada dimensión, con la salvedad de que la distancia entre elementos contiguos no es constante, sino que responde al patrón de array logarítmico presentado en el apartado 3.6. Este array es una generalización a 3 dimensiones del array plano bi-logarítmico y podría ser llamado array tri-logarítmico. Estos arrays se muestran en la figura 3.24.

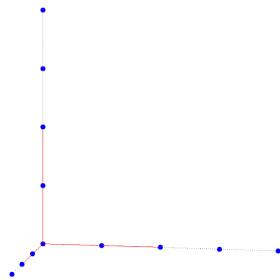
Finalmente, se define una quinta geometría de array, *SPH*, en la que todos los elementos están situados sobre la superficie de una semiesfera centrada en el origen. La forma en que los elementos se distribuyen sobre la semiesfera es la siguiente: para ciertos valores del ángulo θ se fija un número de sensores y éstos se sitúan de forma equiespaciada en la circunferencia que resulta como intersección entre la semiesfera y el cono. Independientemente del número L de elementos en el array, se establece que hay un solo elemento para $\theta = 0$. Las coordenadas de ese elemento son $(0, 0, z_1)$, donde z_1 es el radio de la semiesfera, que depende del valor de L . Los arrays de este tipo se muestran en la figura 3.25.

Tras presentar las geometrías de array que se utilizan en las simulaciones, solo queda presentar los arrays concretos, asignando valores al número de elementos L . Se utilizan cinco valores distintos para el número de elementos, que son $L \in \{12, 27, 64, 125, 216\}$. Cada array concreto queda definido mediante su geometría y su número de elementos, obteniéndose, precisamente, los arrays mostrados en las figuras 3.21 a 3.25.

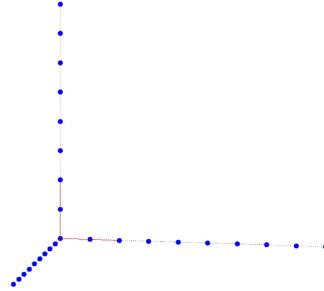
Con la intención de mantener constante el número L de elementos en todas las configuraciones, es necesario suprimir algunos elementos de los arrays *PL*, de modo que no todos los sub-arrays planos son en realidad arrays rectangulares. El criterio utilizado para eliminar estos elementos consiste en suprimir aquellos que estén más lejos del origen de coordenadas.

Para el caso concreto del array semiesférico, el radio de la semiesfera se ha elegido de modo que la distancia media entre cada elemento y los cinco elementos más cercanos a él, sea media longitud de onda. Para cada número L de elementos, las configuraciones por ángulo θ y número de elementos L_θ para cada ángulo y los radios correspondientes se muestran en la tabla 3.3, con el radio r expresado en longitudes de onda.

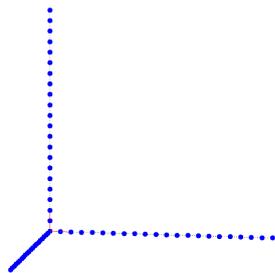
Con estas configuraciones de array, se realizan tres bloques de simulaciones. El primer bloque aborda la convergencia del método, en el segundo se estudia la precisión del mismo y finalmente, en el tercero, se hace un análisis de su resolución.



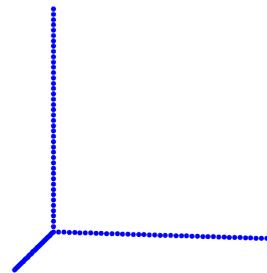
(a) $2L12$



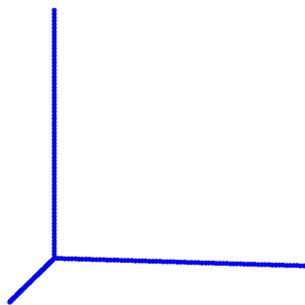
(b) $2L27$



(c) $2L64$

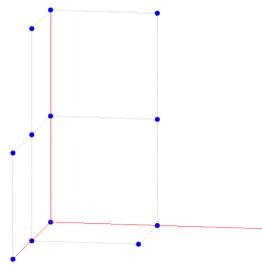


(d) $2L125$

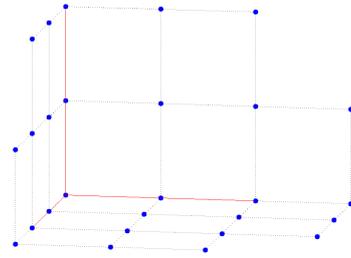


(e) $2L216$

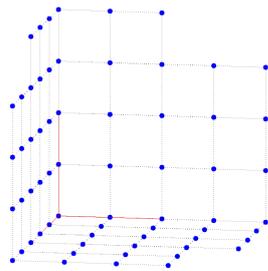
Figura 3.21: *Los arrays formados por los ejes coordenados (2L).*



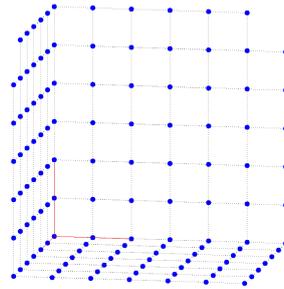
(a) PL_{12}



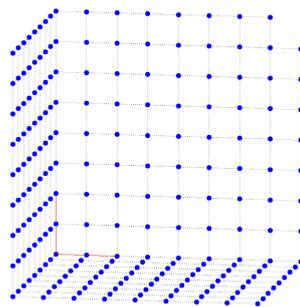
(b) PL_{27}



(c) PL_{64}

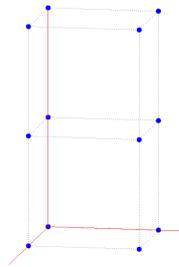


(d) PL_{125}

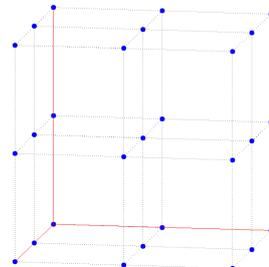


(e) $2L_{216}$

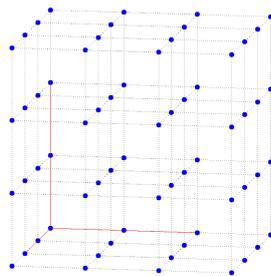
Figura 3.22: Los arrays formados por los planos coordenados(PL).



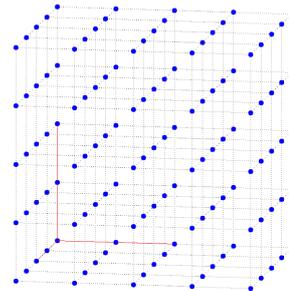
(a) *CB12*



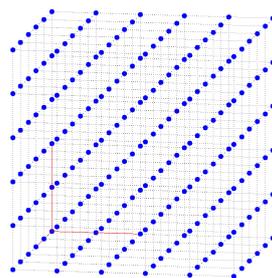
(b) *CB27*



(c) *CB64*

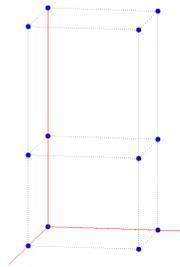


(d) *CB125*

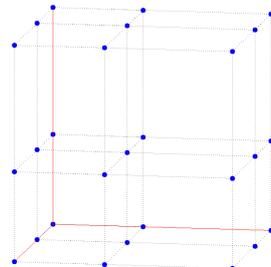


(e) *CB216*

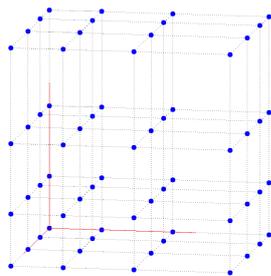
Figura 3.23: *Los arrays cúbicos (CB).*



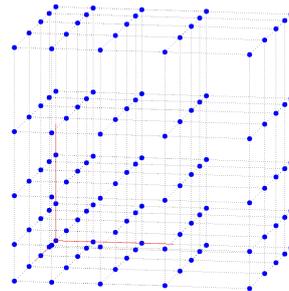
(a) LOG_{12}



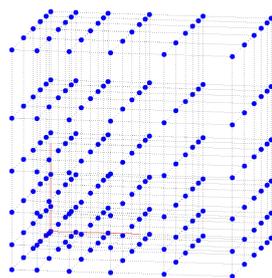
(b) LOG_{27}



(c) LOG_{64}

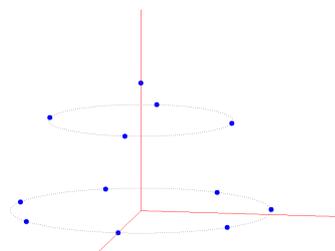


(d) LOG_{125}

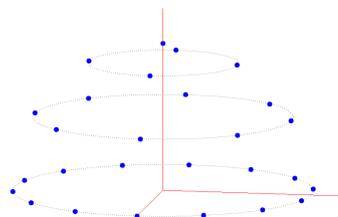


(e) LOG_{216}

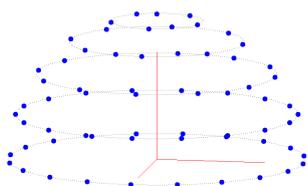
Figura 3.24: *Los arrays tri-logarítmicos (LOG).*



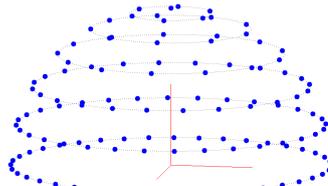
(a) *SPH12*



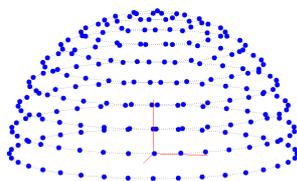
(b) *SPH27*



(c) *SPH64*



(d) *SPH125*



(e) *SPH216*

Figura 3.25: *Los arrays semiesféricos (SPH).*

Tabla 3.3: Desglose de las configuraciones de los arrays semiesféricos

L	θ	L_θ	r
12	{90, 45, 0}	{7, 4, 1}	0.5085
27	{90, 60, 30, 0}	{14, 8, 4, 1}	0.8096
64	{90, 72, 54, 36, 18, 0 }	{20, 18, 12, 8, 5, 1 }	1.3589
125	{90, 75, 60, 45, 30, 15, 0 }	{40, 32, 24, 13, 9, 6, 1 }	1.9418
216	{90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10, 0 }	{36, 34, 32, 30, 26, 21, 18, 12, 6, 1 }	2.6017

Para el estudio de convergencia se realizan dos simulaciones, la primera con $M = 1$ señal incidente, y la segunda con $M = 2$. En ambos casos se fijan umbrales de convergencia para cada parámetro estimado: $\varepsilon_\theta = 1^\circ$, $\varepsilon_\phi = 1^\circ$ y $\varepsilon_f = 1$ MHz. Una simulación concreta se considera convergente cuando todos los parámetros estimados cumplen los criterios de convergencia, es decir, si para todo $i \in \{1, \dots, M\}$ y para todo parámetro $\kappa_i \in \{\theta_i, \phi_i, f_i\}$, la estimación del parámetro κ_i dista menos de ε_κ del valor real de dicho parámetro. El criterio de parada del algoritmo de búsqueda se establece ahora a partir del número máximo de evaluaciones de la función de ajuste, que es una medida más adecuada que el número de iteraciones del algoritmo, dado que la primera tiene una relación más directa con el tiempo de computación al no existir una proporción fija entre el número de iteraciones del algoritmo y el número de evaluaciones de la función de ajuste. Para el caso de $M = 1$ se toma $N_{eval-lim} = 2000$ y para $M = 2$, $N_{eval-lim} = 3000$. Los parámetros de señal se eligen de forma aleatoria y uniformemente distribuida en los intervalos mostrados en (3.72). Para ambos casos, se ha fijado el valor de la SNR en 30 dB. Para cada valor de M y cada array, el número total de simulaciones independientes realizadas es $R = 1000$, siendo los 1000 conjuntos de parámetros de

3. Estimación Multidimensional de Dirección de Llegada

Tabla 3.4: Tasa de convergencia (porcentaje) para las diferentes geometrías de array. $M = 1$. $SNR=30$ dB

Array	$2L$	PL	CB	LOG	SPH
12	71.3	55.1	52.4	55.8	55.4
27	83.3	79.1	78.8	90.1	85.9
64	68.6	84.5	85.8	96.6	97.8
125	46.3	84.3	85.4	98	97
216	30.8	85.6	85.8	98.2	98.3

Tabla 3.5: Tasa de convergencia (porcentaje) para las diferentes geometrías de array. $M = 2$. $SNR=30$ dB

Array	$2L$	PL	CB	LOG	SPH
12	13.1	7.2	6.8	8.7	10.2
27	20.9	31.7	34.2	45.6	43.8
64	5.7	42.9	53.6	73.1	65.4
125	1.4	38.3	50.2	69.3	48.3
216	0.2	30.5	44	62.2	48.9

señal los mismos para todos los arrays.

$$\forall i : 1 \leq i \leq M : \begin{cases} \theta_i \in [0^\circ, 180^\circ] \\ \phi_i \in [0^\circ, 360^\circ] \\ f_i \in [280, 320] \text{ MHz} \\ A_i = 1 \\ \beta_i \in [0^\circ, 360^\circ] \end{cases} \quad (3.72)$$

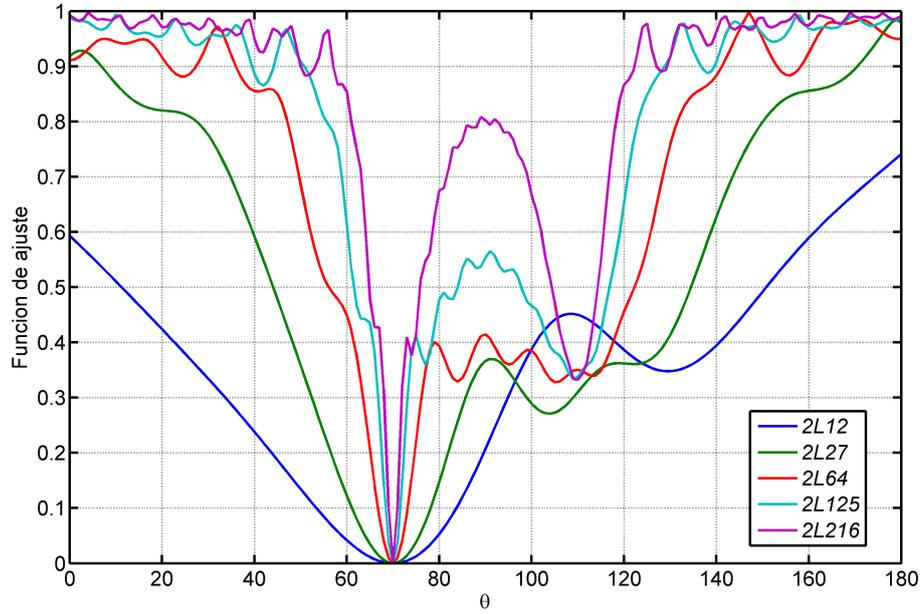
Los datos de convergencia para $M = 1$ se muestran en la tabla 3.4 y para $M = 2$ en la tabla 3.5.

Para el caso de una sola señal incidente, los arrays tri-logarítmicos (*LOG*) y semiesféricos (*SPH*) con $L \geq 64$ son los que mejor resultado ofrecen, con una tasa de convergencia por encima del 95% en todos los casos.

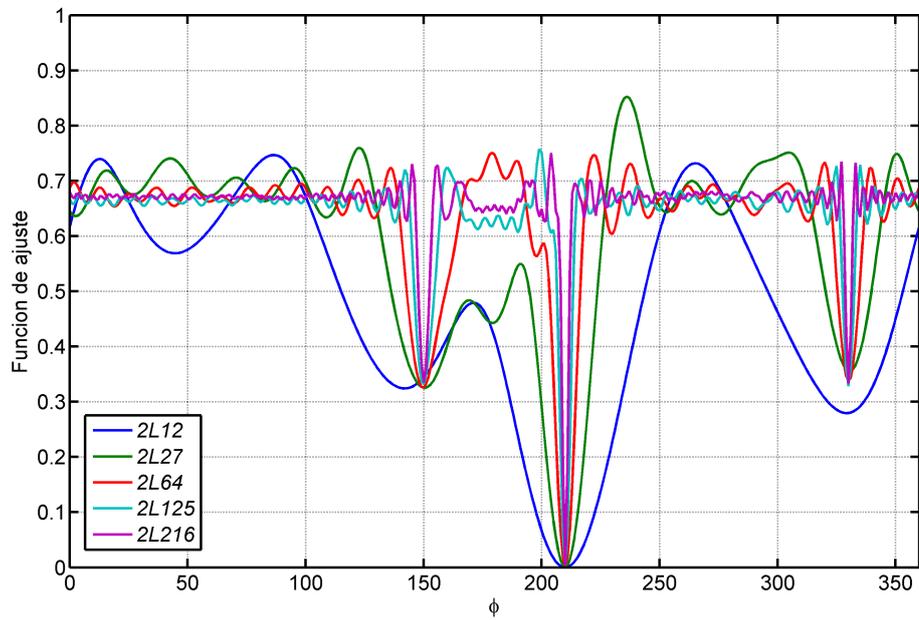
Dado que los umbrales de convergencia son fijos y no dependen del número de elementos, parece claro que cuanto mayor sea L , mayor debería ser la tasa de convergencia. Este comportamiento es cierto en general, pero en el caso del array $2L$ se aprecia una disminución de la tasa de convergencia a partir de cierto número de elementos (particularmente, $L = 27$) en el array. La explicación a este fenómeno se puede inferir de las figuras 3.26(a) y 3.26(b). En ellas se muestran dos cortes de la función de ajuste (haciéndose variar θ y ϕ respectivamente) para el caso de una señal incidente sobre las distintas configuraciones del array $2L$. Los parámetros de señal son $\theta = 70^\circ$, $\phi = 210^\circ$ y $f = 308$ MHz. Como es de esperar, la función de ajuste se anula en el punto en que sus variables independientes coinciden con los parámetros de señal. La función de ajuste muestra diferencias significativas entre los casos correspondientes a un valor de L pequeño y uno grande. En el primer caso, la función de ajuste tiene un comportamiento suave y con pocos mínimos locales, mientras que, a medida que crece el número L de sensores, la gráfica se muestra más puntiaguda, con más rizado y más mínimos relativos, de modo que cada vez es más difícil para el algoritmo de optimización dar con la solución correcta. La relación entre el rizado y el número de elementos del array también depende de la apertura eléctrica total del array: si ésta es muy grande, una cierta variación en la variable independiente de la función de ajuste producirá variaciones de fase más rápidas en los elementos más lejanos del origen, que si esa apertura eléctrica fuera más pequeña. A consecuencia de esto, en el caso del array $2L$, la función de ajuste presentará más mínimos locales cuanto mayor sea el número de elementos en el array y de ahí, que la tasa de convergencia sea menor.

Para el caso de $M = 2$ señales incidentes, los arrays con mejores resultados son los mismos que en el caso $M = 1$, pero la tasa de convergencia es más baja. La causa de esta disminución en la tasa de convergencia no es solamente que ahora el espacio de búsqueda sea mayor (ha pasado de tener dimensión 3 a tener dimensión 6), sino que además, los 6 parámetros deben estar dentro del margen de convergencia para que cada simulación sea considerada convergente. El efecto de una apertura eléctrica muy grande es ahora más notable, no solo en el array $2L$, donde se produce una importante degradación de los resultados, sino también en las otras geometrías de array. Las geometrías *PL*, *CB*, *LOG* y *SPH*, al tener sus elementos distribuidos a lo largo de superficies o volúmenes,

3. Estimación Multidimensional de Dirección de Llegada



(a) Corte con $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$



(b) Corte con $\phi \in [0^\circ, 360^\circ]$

Figura 3.26: Cortes de la función de ajuste, desde el punto $\theta = 70^\circ$, $\phi = 210^\circ$, $f = 308$ MHz

crecen en apertura eléctrica de forma más lenta que el array $2L$, que tiene sus elementos distribuidos a lo largo de rectas, de forma que los efectos producidos por una excesiva longitud eléctrica del array, se muestran antes y con más intensidad en este último array.

Durante la ejecución de las simulaciones para $M = 2$ y el array tri-logarítmico, se estudia también el tiempo necesario para obtener la solución, que incluye el tiempo requerido por el algoritmo de optimización para proponer puntos y el tiempo necesario para evaluar la función de ajuste las $N_{eval-lim}$ veces. Para los cinco valores del número de sensores $L \in \{12, 27, 64, 125, 216\}$, el tiempo total necesario es 1.88, 1.98, 2.22, 2.63 y 3.24 segundos, respectivamente, ejecutando las simulaciones en MatLab [145] en un solo hilo de un Pentium IV a 2.66GHz con 3GB de RAM. Se ha observado que si estas simulaciones se ejecutan en MatLab ejecutado un hilo de un Intel Core 2 Quad a 3GHz con 8GB de RAM, los tiempos de ejecución son menores. No obstante, estos tiempos se podrían reducir ejecutando las simulaciones en código C compilado o sobre una plataforma *hardware*.

El segundo bloque de simulaciones estudia la precisión del algoritmo y su robustez frente al ruido. Como en el caso anterior, el análisis frente al ruido se hace utilizando la referencia de la CRB, sin embargo, en este caso no se hace una comparación directa del error de todas las simulaciones con la cota, sino que primero se filtran los resultados para analizar solamente los correspondientes a simulaciones convergentes. El criterio de convergencia que se establece en este caso es función de la SNR: para la señal i -ésima y el parámetro κ_i , el umbral de convergencia se define como $\varepsilon_{\kappa_i} = \gamma\sigma_{\kappa_i}$, donde γ es una constante y σ_{κ_i} es el valor de la desviación típica proporcionada por la CRB para ese parámetro κ_i de la señal i -ésima. De esta forma, el umbral de convergencia para una simulación concreta será mayor cuanto mayor sea el ruido, esperándose así que la tasa de convergencia sea la misma para todos los arrays y todos los valores de la SNR. En este punto se debe recalcar que una simulación será considerada convergente solo si los 6 parámetros de señal estimados distan menos que su umbral de convergencia respecto al valor real de dicho parámetro. De esta manera si, por ejemplo, solo 5 de esos parámetros están en el rango permitido, la simulación no se considera convergente.

Eligiendo un umbral de convergencia con $\gamma = 3$, se ejecutan simulaciones para un conjunto fijo de $M = 2$ señales, con los parámetros mostrados en (3.73). Las señales se hacen incidir sobre las 25 geometrías de array presentadas anteriormente para valores

de SNR desde 0 dB hasta 40 dB en pasos de 2 dB.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta_1 = 40^\circ & \theta_2 = 126^\circ \\ \phi_i = 35^\circ & \phi_2 = 283^\circ \\ f_1 = 295 \text{ MHz} & f_2 = 291 \text{ MHz} \\ A_1 = 1 & A_2 = 1 \\ \beta_1 = 210^\circ & \beta_2 = 316^\circ \end{array} \right. \quad (3.73)$$

El número máximo de evaluaciones de la función de ajuste queda establecido en $N_{eval-lim} = 6000$, y se ejecutan $R = 100$ simulaciones independientes para cada combinación de SNR y array. En la tabla 3.6 se muestran las tasas de convergencia para aquellos arrays cuya tasa media es superior al 70 %. Los restantes 16 arrays muestran una tasa de convergencia muy dispar: superior al 60 % en algunos casos, e inferior al 20 % para algunos casos de las geometrías $2L$.

Conocidas las tasas de convergencia, para cada configuración de array y cada valor de SNR, se denota por Λ al conjunto de índices $\Lambda \subset \{1, 2, \dots, R\}$ que indican las simulaciones que han convergido. Si para algún caso, ninguna simulación hubiera convergido, sería $\Lambda = \emptyset$, si solo hubiera convergido la n -ésima sería $\Lambda = \{n\}$ y en caso de converger las $R = 100$, sería $\Lambda = \{1, 2, \dots, 100\}$. Se denota por $|\Lambda|$ al cardinal de Λ , es decir, al número de elementos de Λ que, dado que $R = 100$, coincide con la tasa de convergencia para cada combinación de SNR y geometría de array.

De estas 9 configuraciones de array cuya tasa de convergencia media (para todas las SNR) es superior al 70 %, se toman las cuatro mejores y sus resultados convergentes (es decir, tras suprimir los no convergentes) se comparan con la CRB para los tres parámetros de señal estimados. Estas cuatro configuraciones son las siguientes: *CB12*, *CB27*, *LOG12*, *LOG27*. En las figuras 3.27 a 3.30 se muestra la varianza del error, en dB, de las simulaciones convergentes, que se calcula, para la señal i -ésima y cada SNR según (3.74). Los resultados mostrados corresponden a la primera de las dos señales estimadas, siendo muy semejantes los resultados para la segunda señal. Se puede observar que 3000 evaluaciones de la función de ajuste son, por lo general, suficientes para que las gráficas

3.7. Estimación conjunta de dos ángulos y la frecuencia

converjan a la CRB.

$$\text{MSE}_{\kappa,i}(\text{dB}) = -10 \log \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{r \in \Lambda} (\kappa_i - \hat{\kappa}_{r,i})^2 \quad (3.74)$$

Tabla 3.6: Tasa de convergencia (porcentaje) para diferentes geometrías de array. $M = 2$, $\varepsilon_{\theta}(i) = 3\sigma_{\theta}(i)$, $\varepsilon_{\phi}(i) = 3\sigma_{\phi}(i)$, $\varepsilon_f(i) = 3\sigma_f(i)$, $N_{eval-lim} = 6000$

Array	PL27	CB12	CB27	CB64	LOG12	LOG27	LOG64	SPH12	SPH27
0 dB	36	47	66	68	52	66	57	23	53
2 dB	62	62	74	64	64	68	69	38	73
4 dB	64	77	84	66	80	78	80	48	74
6 dB	79	87	80	78	83	87	82	67	75
8 dB	72	86	86	74	87	86	82	79	74
10 dB	86	87	94	84	90	85	81	84	81
12 dB	69	92	90	69	89	92	82	84	79
14 dB	79	93	86	76	93	92	77	88	81
16 dB	75	91	89	76	92	92	83	86	85
18 dB	87	85	89	79	93	94	71	94	83
20 dB	80	91	90	76	94	85	70	87	80
22 dB	63	91	88	76	90	86	79	94	77
24 dB	74	85	91	78	93	89	80	92	80
26 dB	65	92	84	73	90	89	79	88	81
28 dB	78	85	84	73	91	93	84	84	80
30 dB	78	80	83	79	90	85	78	91	79
32 dB	69	87	84	73	92	86	82	85	63
34 dB	68	80	88	77	86	89	77	88	73
36 dB	68	86	81	71	84	85	80	87	71
38 dB	63	82	84	71	79	83	78	91	66
40 dB	59	90	84	72	87	88	70	83	66
Media	70,19	83,62	84,71	73,95	85,67	85,62	77,19	79,10	74,95

3. Estimación Multidimensional de Dirección de Llegada

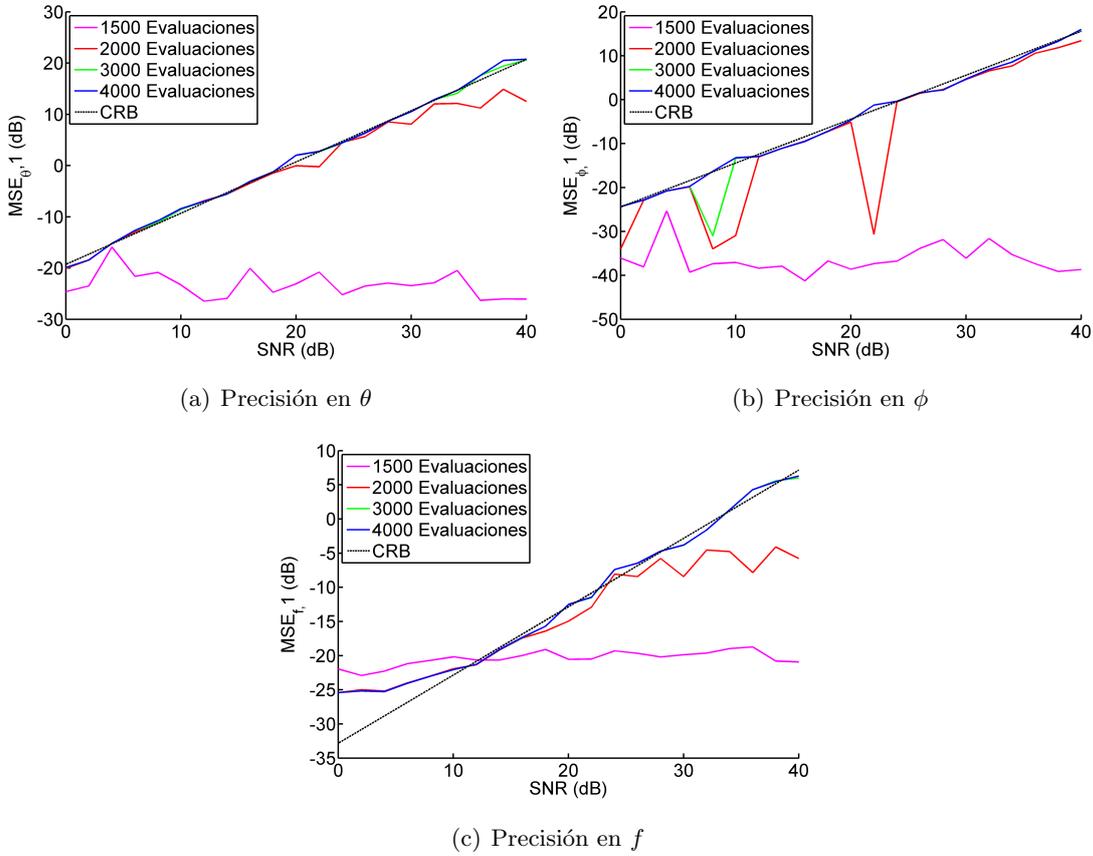


Figura 3.27: *Precisión del array CB12*

Es posible observar que, en algunos casos, las gráficas de la varianza del estimador sobrepasan a las de la CRB. Este comportamiento puede ser dividido en dos efectos diferentes, cada uno con causas diferentes. En primer lugar, se aprecia que en las gráficas correspondientes a la precisión en frecuencia y para los valores más bajos de SNR (vease 3.27(c) a 3.30(c)), la varianza de la estimación es más pequeña (en la gráfica, se muestra por encima) que la CRB. Este efecto se produce porque cualquier valor de frecuencia estimada por el algoritmo está limitado por los límites del espacio de solución: para cada señal, $f_i \in [280, 320]$ MHz. De esta forma, para valores muy pequeños de la SNR, la desviación típica que resulta de la CRB es un valor mayor que la desviación típica de las frecuencias, que está acotada por estarlo el intervalo en que existen esas frecuencias. En efecto, se puede observar en las figuras mencionadas, que el comportamiento del estimador por debajo de 5 dB de SNR, es el mismo independientemente del array

3.7. Estimación conjunta de dos ángulos y la frecuencia

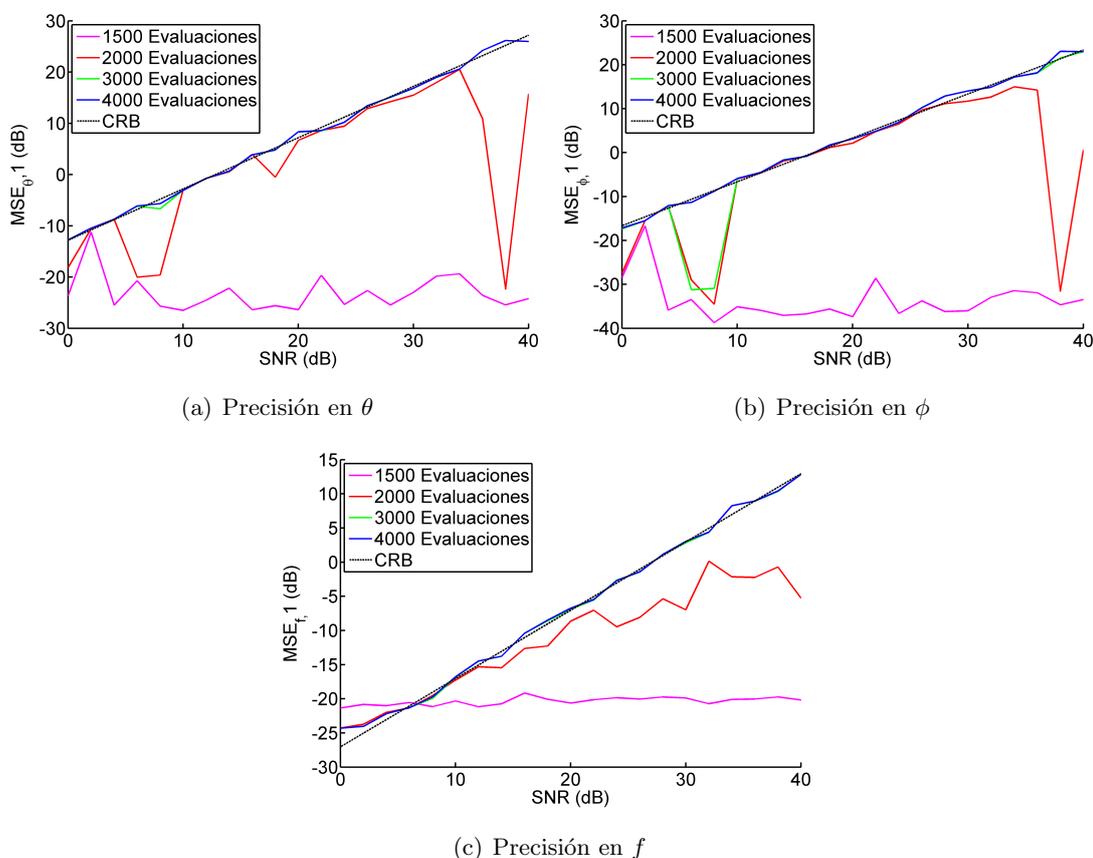


Figura 3.28: Precisión del array CB27

utilizado y de la CRB en esos puntos. En segundo lugar, este mismo comportamiento de las gráficas de varianza del estimador sobrepasando en ciertos puntos a las de la CRB se observa de forma menos acusada que en el caso anterior pero más distribuida a lo largo de las gráficas y, además, presente en las estimaciones de todos los parámetros. Este segundo efecto tiene dos causas simultáneas: la primera causa es la finitud de R , ya que al ser R finito, la varianza calculada considerando solo R casos estará en un entorno de la varianza real del estimador, en algunos casos por encima y en otros casos por debajo. La segunda causa es el filtrado de resultados por convergencia. Al filtrar los resultados en función de cuán lejos se hallen las estimaciones del valor real, quedan suprimidas aquellas simulaciones en las que el valor estimado está muy lejos del valor real, pero también es posible que sea suprimida una simulación cuyo resultado esté muy cerca del límite de convergencia y para la que el algoritmo sí había convergido o estaba

3. Estimación Multidimensional de Dirección de Llegada

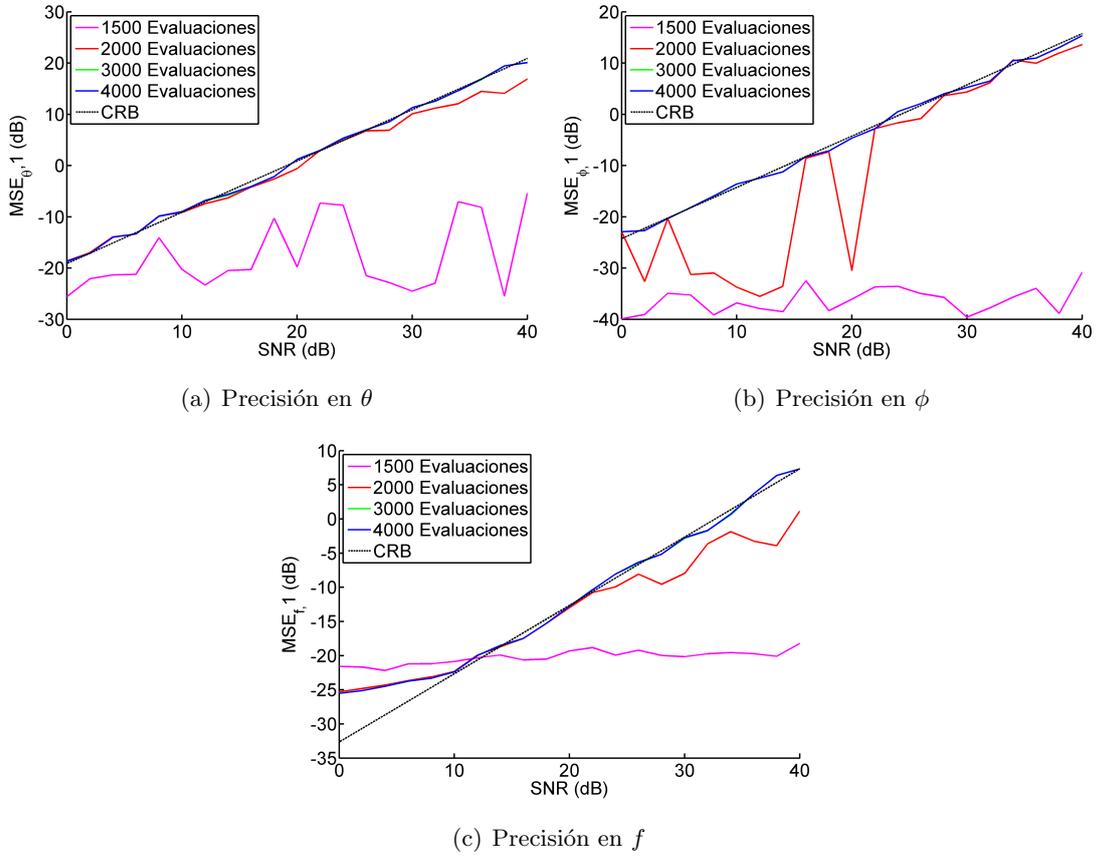


Figura 3.29: *Precisión del array LOG12*

convergiendo. Dado que la función de distribución del ruido tiene soporte no finito, no es posible establecer un umbral de convergencia concreto a partir del cual la desviación del estimador sea atribuible a las características del algoritmo y no al efecto aleatorio del ruido.

El siguiente bloque de simulaciones tiene por objeto estudiar el comportamiento del método en un entorno adverso, en las que $M = 2$ señales incidentes comparten dos parámetros y solamente se diferencian en el tercero. Estas simulaciones se ejecutan en ausencia de ruido y cada una de ellas se considera convergente si cumple con unos umbrales de convergencia definidos como $\varepsilon_\theta = 1^\circ$, $\varepsilon_\phi = 1^\circ$ y $\varepsilon_f = 1$ MHz. En función de qué parámetro sea diferente entre las señales incidentes, podemos agrupar las simulaciones en tres grupos que analizan respectivamente la resolución en θ , en ϕ y en f y cuyos parámetros se detallan en las ecuaciones (3.75) a (3.77), donde para el primer grupo $\theta_c = 60^\circ$

3.7. Estimación conjunta de dos ángulos y la frecuencia

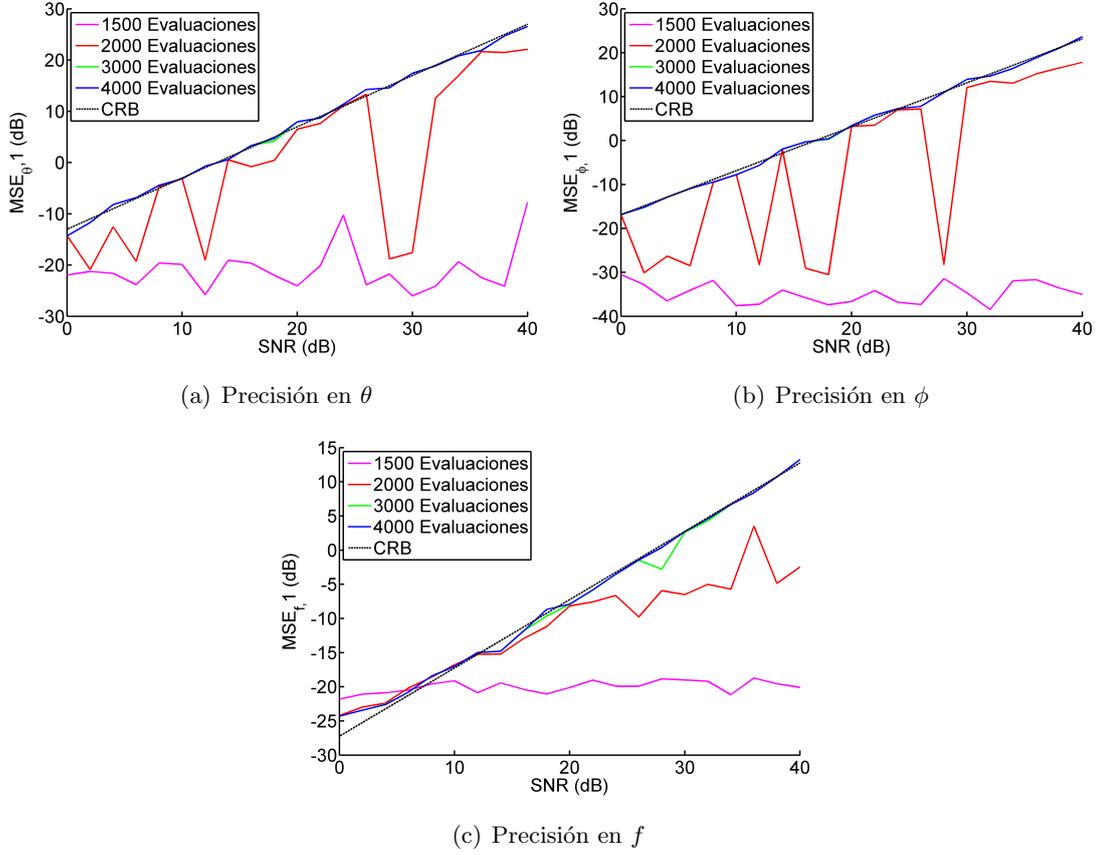


Figura 3.30: *Precisión del array LOG27*

y $\Delta_\theta \in \{1^\circ, 2^\circ, \dots, 30^\circ\}$, para el segundo grupo $\phi_c = 40^\circ$ y $\Delta_\phi \in \{1^\circ, 2^\circ, \dots, 30^\circ\}$ y para el tercer grupo $f_c = 303$ MHz y $\Delta_f \in \{0.5 \text{ MHz}, 1 \text{ MHz}, \dots, 10 \text{ MHz}\}$.

$$\text{Resolución en } \theta \left\{ \begin{array}{l} (\theta_1, \theta_2) = (\theta_c - \frac{\Delta_\theta}{2}, \theta_c + \frac{\Delta_\theta}{2}) \\ (\phi_1, \phi_2) = (40^\circ, 40^\circ) \\ (f_1, f_2) = (303, 303)\text{MHz} \end{array} \right. \quad (3.75)$$

$$\text{Resolución en } \phi \left\{ \begin{array}{l} (\theta_1, \theta_2) = (60^\circ, 60^\circ) \\ (\phi_1, \phi_2) = (\phi_c - \frac{\Delta_\phi}{2}, \phi_c + \frac{\Delta_\phi}{2}) \\ (f_1, f_2) = (303, 303)\text{MHz} \end{array} \right. \quad (3.76)$$

$$\text{Resolución en } f \left\{ \begin{array}{l} (\theta_1, \theta_2) = (60^\circ, 60^\circ) \\ (\phi_1, \phi_2) = (40^\circ, 40^\circ) \\ (f_1, f_2) = (f_c - \frac{\Delta f}{2}, f_c + \frac{\Delta f}{2}) \text{MHz} \end{array} \right. \quad (3.77)$$

Para cada valor de la separación entre señales Δ_κ , se ejecutan $R = 100$ simulaciones independientes con un número máximo de evaluaciones de la función de ajuste $N_{eval-lim} = 6000$. Además, todas estas simulaciones se ejecutan sobre los cuatro arrays que mejor resultado han proporcionado en la etapa anterior, es decir, *CB12*, *CB27*, *LOG12* y *LOG27*.

Los resultados de estos grupos de simulaciones se muestran respectivamente en las figuras 3.31(a), 3.31(b) y 3.31(c). En la figura 3.31(a), de resolución en θ , se puede observar que los arrays con $L = 12$ elementos presentan una convergencia mayor que los arrays de $L = 27$ elementos. Esto puede ser debido a que, comparativamente, los primeros tienen más elementos a lo largo del eje z que los segundos. Este comportamiento se invierte en la figura 3.31(b), de resolución en ϕ , aunque con una tasa de convergencia significativamente inferior.

De la observación general de los resultados es posible deducir que se ha hallado el límite del método en el sentido de que no se puede garantizar con cierta probabilidad que la solución encontrada sea fiable cuando cuatro los seis parámetros de las señales incidentes son iguales dos a dos y la diferencia en el tercero se hace tender a cero. No obstante, para algunas geometrías de array, el método todavía ofrece resultados aceptables cuando los dos parámetros iguales son la frecuencia y el ángulo ϕ . En este caso, los resultados son tanto mejores cuanto mayor sea la separación en el ángulo θ .

Finalmente, se presenta un último grupo de simulaciones cuya finalidad es la de estudiar las características asintóticas del método presentado, es decir, su comportamiento desde el punto de vista estadístico cuando se ejecuta un número elevado de veces.

Para ello, se elige un array de tipo *SPH*, es decir, semiesférico, y $L = 25$ elementos, que se distribuyen de la siguiente forma sobre una semiesfera de radio $r = \lambda$: para cada ángulo $\theta_i \in \{0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ\}$, se sitúa sobre la semiesfera un cierto número $L_i \in \{1, 4, 8, 12\}$ de elementos equiespaciados.

Se elige una única señal incidente cuyos parámetros son $\theta_1 = 126^\circ$, $\phi_1 = 283^\circ$ y $f_1 = 291$ MHz. Su amplitud se elige unitaria y su fase es $\beta_1 = 193^\circ$. El número de

3.7. Estimación conjunta de dos ángulos y la frecuencia

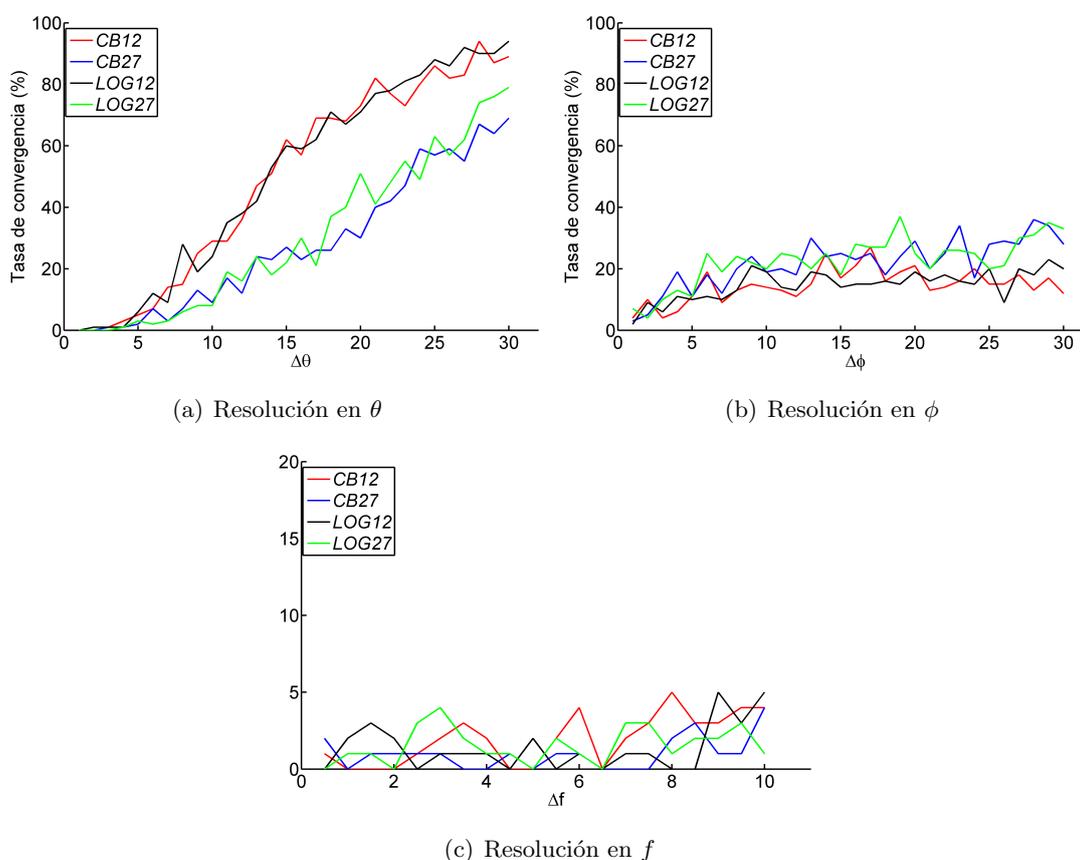


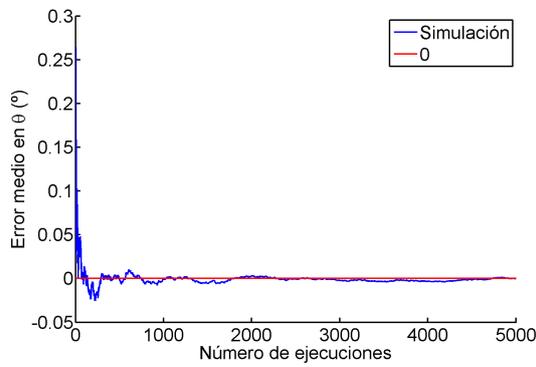
Figura 3.31: Resolución para los arrays CB12, CB27, LOG12 y LOG27, en ausencia de ruido.

ejecuciones independientes totales es $R = 5000$ y se calcula, para cada uno de los parámetros, la media y la varianza de la estimación.

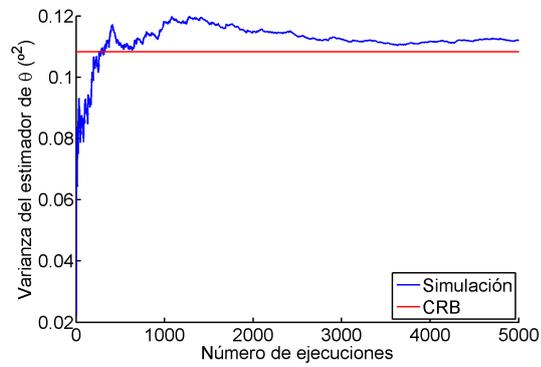
Las figura 3.32 muestran la evolución de los errores medios y de las varianzas de los estimadores según aumenta el número R de ejecuciones independientes. Es posible observar que la tendencia del error medio es hacia el cero y la tendencia de la varianza del estimador es hacia la CRB.

Pese a que estas simulaciones no demuestran estrictamente la eficiencia del método en el sentido de sesgo nulo y convergencia a la CRB, para lo cual sería necesaria o bien una simulación infinita o bien un estudio analítico del método, sí son válidas para comprobar que existe esa tendencia de convergencia, tanto a la nulidad del error medio como a la CRB, con lo que el método propuesto puede ser considerado eficiente.

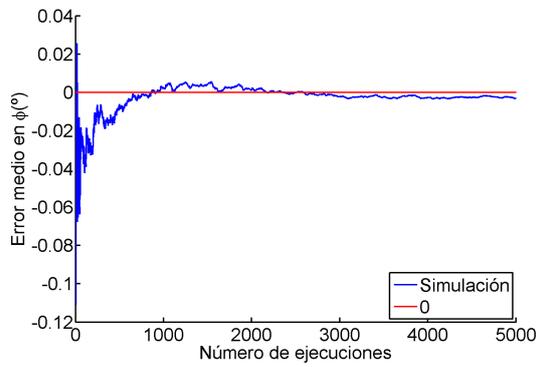
3. Estimación Multidimensional de Dirección de Llegada



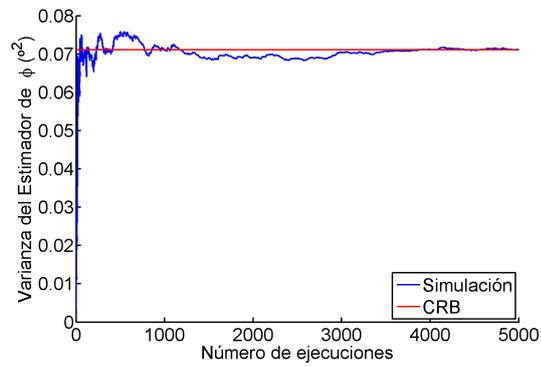
(a) Error medio en la estimación de θ



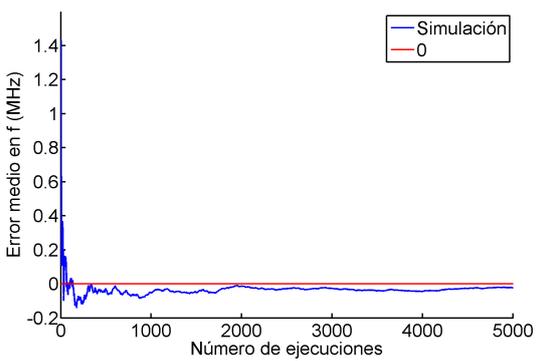
(b) Varianza de la estimación de θ



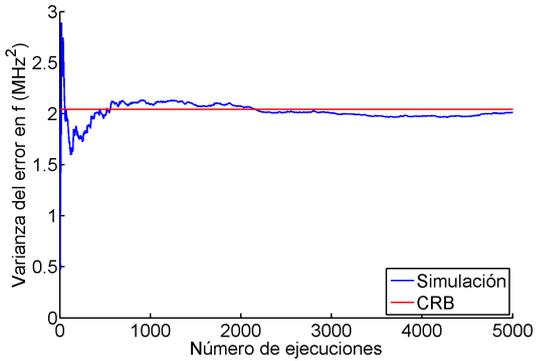
(c) Error medio en la estimación de ϕ



(d) Varianza de la estimación de ϕ



(e) Error medio en la estimación de frecuencia



(f) Varianza de la estimación de frecuencia

Figura 3.32: Errores medios y Varianzas de los estimadores frente al número de ejecuciones realizadas. $SNR=20dB$. Array SPH25

3.8. Conclusión

A lo largo de este capítulo se ha presentado una metodología basada en algoritmos metaheurísticos que permite estimar de forma eficiente la dirección de llegada de un conjunto de señales utilizando tanto arrays con geometrías uniformes como no uniformes y mediante un único *snapshot*.

La metodología presentada se basa en la construcción y posterior minimización de una función de ajuste que tiene su mínimo absoluto en el punto del espacio de solución que corresponde con los parámetros de las señales incidentes. Esta metodología se combina con un cálculo matricial para inferir las amplitudes complejas de las señales, de modo que no sea necesario ampliar el espacio de solución en dos dimensiones más por señal para estimar también la amplitud y la fase.

El método propuesto se ha demostrado válido para la estimación, no solo de una dirección de llegada, sino del problema global de dirección de llegada bidimensional a la par que la frecuencia. Además, por la construcción del método, no es necesario realizar ningún tipo de *pairing* o postproceso entre los parámetros estimados, ya que la correspondencia de cada parámetro con cada señal es inmediata e inherente al método.

A lo largo de este capítulo, se han llevado a cabo simulaciones para estudiar el rendimiento del algoritmo. Para ellas, ha sido necesario utilizar un algoritmo de optimización metaheurística que, en todos los casos ha sido Optimización por Enjambre de Partículas o *Particle Swarm Optimization* (PSO). El funcionamiento de este algoritmo y sus parámetros de funcionamiento están descrito en detalle en la sección 5.3.

El rendimiento del método, en combinación con PSO se ha estudiado en términos de su tasa de convergencia en distintos escenarios de ruido. También se ha estudiado la precisión alcanzable y se ha observado que tiende a la CRB. El análisis el método es completo al incluirse un estudio tanto de su resolución como de la forma de la función de ajuste.

No obstante, la aplicabilidad real del método no queda verificada mientras no se estudie su comportamiento en un entorno que considere todos efectos presentes en un sistema real. En el siguiente capítulo se estudia este método, precisamente, cuando entran en consideración los acoplos mutuos entre elementos, sus directividades y los efectos de estructuras circundantes.

Parte de los resultados presentados en este capítulo han sido aceptados para su publicación en una revista científica de ámbito internacional [146], han sido publicados

3. Estimación Multidimensional de Dirección de Llegada

como parte de un libro [147] y han sido también presentados en congresos internacionales [148–150] y nacionales [151].

Capítulo 4

El Problema de los Acoplos Mutuos

4.1. Introducción

En el capítulo anterior se estudia el modo en que, bajo ciertas hipótesis, se estima la dirección de llegada de varios conjuntos de señales con diversas características. Entre las hipótesis que se mantienen a lo largo de todo el capítulo anterior se encuentra la de nulos acoplos entre los elementos del array y otros posibles elementos del entorno. Esta suposición puede ser válida en ciertas circunstancias, pero en el caso general de un sistema real funcional, los efectos de los acoplos mutuos entre elementos pueden no ser y, en general, no son despreciables.

El presente capítulo aborda este problema. En la sección 4.2 se estudia la influencia que tienen los acoplos en la estimación de dirección de llegada mediante simulaciones basadas en el método propuesto en el capítulo anterior. Tras observarse que el método, tal y como se presentó en el capítulo 3 es incapaz de resolver satisfactoriamente este problema, en la sección 4.3 se presenta una nueva estrategia basada en simulación electromagnética mediante métodos numéricos. Esta estrategia se presenta para el caso de estimación de una dirección de llegada para cada señal incidente. No obstante, se diseña de forma que por su propia construcción sea coherente con el planteamiento anterior de modo que su extrapolación a la estimación de dirección de llegada bidimensional y de frecuencia sea inmediata.

A continuación, en la sección 4.4 se deriva la CRB para entornos acoplados a partir

de resultados también obtenidos de la simulación electromagnética, de modo que se obtenga una medida con la que comparar los resultados en las secciones posteriores.

En la sección 4.5 se evalúa el rendimiento de este nuevo planteamiento en entornos acoplados. Primeramente, en un array logarítmico de dipolos en la sección 4.5.1, donde se observa la mejora introducida por el método presentado en el presente capítulo respecto al método presentado en el capítulo anterior. En el apartado 4.5.2 se prueba el nuevo método sobre un array circular uniforme de dipolos. En estos dos casos, al hacerse incidir la señal de forma perpendicular a los dipolos, se manifiestan los efectos de los acoplos entre elementos del array, pero no los de la directividad. En las secciones 4.5.3 y 4.5.4 se pone a prueba el método en arrays lineales de bocinas acopladas, donde entran en juego todos los efectos y se pone a prueba su rendimiento.

Para obtener un valor objetivo del máximo rendimiento alcanzable, en este capítulo se presenta, además, una estrategia que permite obtener la CRB en entornos acoplados.

4.2. El problema de los acoplos mutuos

A la hora de considerar los acoplos entre elementos, el primer paso consiste en observar si, al aplicar el método presentado en el capítulo 3, se obtienen resultados válidos también al suprimir la hipótesis de nulidad de acoplos entre elementos.

Para observar si la aproximación inicial es válida en un entorno con acoplos, se calcula la tensión inducida por una única señal que incide con polarización horizontal sobre un array lineal logarítmico de $L = 7$ dipolos con una longitud de $\lambda/2$, con una apertura de $\aleph = 3\lambda$ (Figura 4.1), mediante dos técnicas distintas. La dirección de la señal incidente forma un ángulo de 25° con el eje del array. En el primer caso, se calcula haciendo uso del método base visto en el capítulo 3 y que no considera los acoplos mutuos entre elementos. En el segundo caso, se calcula haciendo uso de una simulación electromagnética basada en el método de los momentos (*MoM*) [104] que sí tiene en cuenta los citados acoplos. Las gráficas 4.2 muestran la diferencia entre las tensiones inducidas en amplitud y fase en ambos casos. En la gráfica de la amplitud 4.2(a) se puede apreciar que con el enfoque que no considera los acoplos, la amplitud de la tensión inducida sobre todos los elementos es la misma, al tratarse de elementos iguales e iluminados por una onda plana, mientras que en el caso con acoplos, la amplitud de la tensión inducida varía entre los elementos del array. En cuanto a la gráfica de fase 4.2(b), es posible observar que, aunque las fases son parecidas, no hay un desfase común

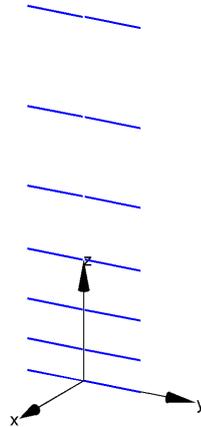


Figura 4.1: Array Lineal Logarítmico de Dipolos

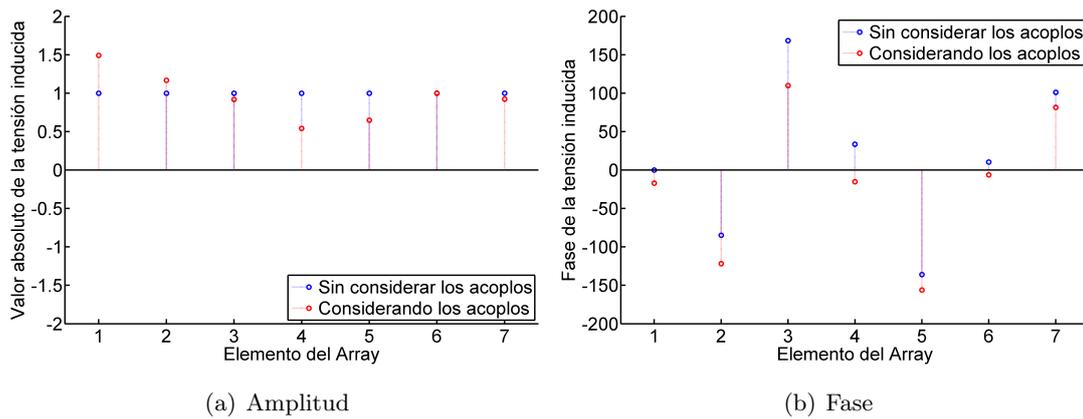


Figura 4.2: Tensión inducida con y sin acoplos.

en todos los elementos.

Estos hechos indican que la estimación de dirección de llegada en un sistema real con acoplos entre elementos podría no ser correcta si se utiliza el enfoque puramente geométrico presentado en el capítulo 3. No obstante para verificar este hecho, se presenta a continuación un conjunto de simulaciones en el que se intenta estimar la dirección de llegada mediante el método presentado en el capítulo 3, con unas tensiones inducidas calculadas mediante simulación electromagnética.

Así, el bloque de simulaciones queda definido de la siguiente forma: a lo largo del eje z se sitúa un array lineal logarítmico (y por lo tanto, no uniforme) de $L = 7$ elementos y una apertura eléctrica de $\aleph = 3\lambda$. El array está formado por dipolos de

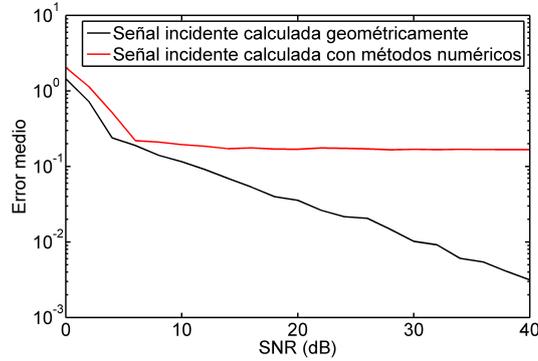


Figura 4.3: *RMSE con las tensiones inducidas calculadas mediante dos métodos*

media longitud de onda alineados según el eje y , según se muestra en 4.1. Sobre este array se hace incidir una señal de frecuencia fija y conocida (300 MHz) cuya dirección de llegada se elige de forma aleatoria y uniforme en $\theta \in [10^\circ, 170^\circ]$ y su fase es también aleatoria en $\beta \in [0^\circ, 360^\circ]$. La señal, que se elige con amplitud unitaria $A = 1$, está contenida en el plano $\phi = 0$ y su polarización es horizontal. Se ejecutan $R = 200$ simulaciones independientes y se fija el número de iteraciones del algoritmo de búsqueda en $N_{lim-iter} = 100$. Las tensiones inducidas en bornes de los dipolos se calculan de dos formas diferentes: en primer lugar, mediante el método propuesto en el capítulo 3, considerando exclusivamente la geometría del array y suponiendo nulos los acoplos y en segundo lugar mediante una simulación electromagnética, fijando los parámetros para una frecuencia de funcionamiento de $f = 300$ MHz y un radio de $r_d = 0.1$ mm para los dipolos. Al calcular el error medio de la dirección de llegada según (4.1), se obtiene la gráfica 4.3, en la que se puede apreciar como, en el caso en que las tensiones inducidas son obtenidas mediante la simulación electromagnética el error en ningún caso es inferior a unas pocas décimas de grado, mientras que en el otro caso puede ser reducido aumentando la SNR.

$$\text{RMSE} = \frac{1}{R} \sqrt{\sum_{i=1}^R (\theta_i - \hat{\theta}_i)^2} \quad (4.1)$$

De esta forma, se verifica que en un sistema real, en que las tensiones inducidas sobre los elementos del array dependen de los acoplos entre elementos, la metodología presentada en el capítulo 3 no es todo lo efectiva que cabría esperar, ya que, según se observa en la figura 4.3, la utilización de esta metodología tiene un efecto equivalente

al de una SNR de 5 dB en un sencillo caso de un array lineal con un único parámetro a estimar y una única señal. Así, es esperable que en casos más complejos el rendimiento disminuya haciendo necesario afrontar este problema mediante una nueva técnica.

4.3. Solución propuesta y metodología utilizada: una nueva función de ajuste

En el capítulo 3 quedó resuelto el problema de la estimación de dirección de llegada mediante el uso de un modelo geométrico que no consideraba los acoplos entre elementos. El mismo modelo era utilizado para calcular las tensiones inducidas en los bornes de los arrays y para calcular los *snapshots* sintéticos que se introducirían en la función de ajuste. A partir de este punto, las tensiones inducidas sobre los elementos del array incorporan todos los efectos presentes y corresponden con las que se obtendrían en un sistema físico. De esta forma, parece lógico que para calcular los *snapshots* sintéticos con los que se comparará el *snapshot* leído en el array deberá usarse una simulación electromagnética que considere todos los efectos producidos por los acoplos y el hecho de que las antenas no sean isotrópicas. Así, aunque la forma de obtener los *snapshots* sintéticos sea diferente, la estructura básica del algoritmo (comparación del *snapshot* leído en el array con un *snapshot* sintético para cada punto del espacio de solución) es equivalente a la presentada en el capítulo 3. De esta forma, mientras se mantenga este paralelismo, el desarrollo visto para varios parámetros de señal seguirá siendo válido y bastará con plantear la solución al caso en que los centros de fases de los elementos del array y las señales están contenidas sobre un mismo plano. Este problema quedaría reformulado de la siguiente forma:

“(Sea un array formado por L antenas, cuyo elemento i -ésimo tiene el centro de fase en la posición $(x_i, 0, z_i)$ del espacio. Sobre este array, inciden M ondas que se asumen perfectamente planas, que están contenidas en el plano $\phi = 0$ y cuya frecuencia f es conocida e igual para todas las señales. El problema consiste en estimar la dirección de llegada de cada señal, θ_j para la señal j -ésima, mediante una única lectura simultánea e instantánea de las tensiones complejas inducidas $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_L]^T$ en bornes de los elementos del array. ”)

Respecto a los casos anteriores, en esta reformulación se han suprimido dos hipó-

tesis relativas a los elementos del array: en primer lugar, ya no es necesario que los elementos sean isotr3picos, sino que los elementos pueden tener diagramas de radiaci3n arbitrarios. En caso de que los diagramas de radiaci3n sean conocidos, es sencillo incluir sus efectos en el desarrollo presentado en el cap3tulo anterior, no obstante, si a pesar de conocerse los diagramas de radiaci3n de los elementos, los acoplos entre ellos son todav3a desconocidos, el m3todo seguir3a sin ser fiel a la realidad al no tener en consideraci3n un efecto que, como se ha visto en la figura 4.3, es de gran importancia. En segundo lugar, se suprime, precisamente, la hip3tesis de que los acoplos entre elementos son nulos. De esta forma, el array tiene todas las caracter3sticas de un array real.

La lectura en bornes del array en el caso de no haber acoplos, pero considerando la ganancia ϱ , es la mostrada en (4.2). Para considerar los efectos de los acoplos, es necesario utilizar una notaci3n matricial donde la matriz $\mathbb{S}(\boldsymbol{\theta})$ se define seg3n (4.3), a partir de la yuxtaposici3n de los vectores directores para cada direcci3n de llegada y la matriz C es la matriz de acoplos entre elementos a la frecuencia f de funcionamiento. La matriz C es una matriz cuadrada de tama3o $L \times L$ y sim3trica en la que el elemento $c_{i,j}$ representa el acoplo mutuo entre los elementos i -3simo y j -3simo. As3, mediante el uso de esta notaci3n, la tensi3n inducida en bornes de los elementos, cuando se consideran los acoplos, viene dada por (4.4).

$$\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_L]^T; \quad s_q = \sum_{i=1}^M A_i e^{j\beta_i} \varrho(\theta) e^{j\frac{2\pi f}{c}(x_q \sin \theta_i + z_q \cos \theta_i)} + n_q \quad (4.2)$$

$$\mathbb{S}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \varrho(\theta_1) e^{j\frac{2\pi f}{c}(x_1 \sin \theta_1 + z_1 \cos \theta_1)} & \dots & \varrho(\theta_M) e^{j\frac{2\pi f}{c}(x_1 \sin \theta_M + z_1 \cos \theta_M)} \\ \varrho(\theta_1) e^{j\frac{2\pi f}{c}(x_2 \sin \theta_1 + z_2 \cos \theta_1)} & \dots & \varrho(\theta_M) e^{j\frac{2\pi f}{c}(x_2 \sin \theta_M + z_2 \cos \theta_M)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varrho(\theta_1) e^{j\frac{2\pi f}{c}(x_L \sin \theta_1 + z_L \cos \theta_1)} & \dots & \varrho(\theta_M) e^{j\frac{2\pi f}{c}(x_L \sin \theta_M + z_L \cos \theta_M)} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{s} = C\mathbb{S} \begin{bmatrix} A_1 e^{j\beta_1} \\ A_2 e^{j\beta_2} \\ \dots \\ A_M e^{j\beta_M} \end{bmatrix} + \mathbf{n} \quad (4.4)$$

Tras ver la ecuaci3n (4.4), parece claro que la estrategia a seguir deber3a consistir en obtener una estimaci3n de la matriz de acoplos que ser3a introducida en el modelo

de señal con el que se generarían los nuevos *snapshots* sintéticos. En tal caso, estos *snapshots* sintéticos incorporarían el citado efecto de los acoplos y también el efecto del diagrama de radiación de cada elemento en la ecuación (4.3). No obstante, la matriz de acoplos es única para cada frecuencia, de forma que esta estrategia no sería paralela a la propuesta en el capítulo 3 y por tanto no sería extrapolable de forma inmediata a la estimación de dos direcciones de llegada y la frecuencia de la señal.

Tras verse que esta estrategia no cumple con el requerimiento de ser extensible a tres parámetros por señal de forma inmediata, se plantea otra diferente. Para llevarla a cabo, en primer lugar es necesario calcular mediante simulación electromagnética un conjunto V de vectores directores (4.5) para un conjunto P de p direcciones de llegada (4.6). El vector director j -ésimo (v_{θ_j}), con $1 \leq j \leq p$ es un vector de tamaño $L \times 1$ y en cuya posición q -ésima se almacena la tensión compleja inducida sobre el sensor q -ésimo cuando incide sobre el array una señal procedente de la dirección θ_j . Las p direcciones de llegada en P se eligen equiespaciadas y si $p = \text{card}(V) = \text{card}(P)$ es un número suficientemente alto, es posible obtener el vector director para direcciones que no se encuentren en P con un error suficientemente pequeño, mediante interpolación.

$$V = \{\mathbf{v}_{\theta_1}, \mathbf{v}_{\theta_2}, \dots, \mathbf{v}_{\theta_p}\} \quad (4.5)$$

$$P = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p\} \subset [0^\circ, 180^\circ] \quad (4.6)$$

En caso de que deban ser estimadas dos direcciones de llegada junto con la frecuencia, bastará con que el conjunto P contenga, ya no direcciones de llegada, sino ternas de dos direcciones de llegada (θ y ϕ) y una frecuencia (f), formadas por el producto cartesiano de tres conjuntos, correspondientes cada uno de ellos a un parámetro a estimar. Así, también mediante interpolación se obtendría el vector director para un conjunto de parámetros arbitrario, pudiéndose utilizar los M vectores directores, correspondientes a las M señales incidentes, de forma equivalente a como han sido utilizados en el capítulo 3 para obtener el *snapshot* sintético y así realizar la comparación con el *snapshot* medido, tras obtener las amplitudes complejas mediante el método presentado en 3.4.2.

Así, esta estrategia es equivalente a la presentada en el anterior capítulo, y puede ser extendida de forma inmediata a cada caso concreto siguiendo los pasos vistos en el citado capítulo.

El motivo por el que se propone utilizar técnicas de interpolación para obtener el

vector director para calcular las tensiones inducidas por una onda incidente con parámetros de señal arbitrarios es que ejecutar una simulación electromagnética, mediante cualquier método, es una tarea con un elevado coste computacional. De esta forma, para cada conjunto de parámetros de señal propuesto por el algoritmo de optimización, no es necesario ejecutar tal simulación en tiempo de ejecución, sino que basta con tomar los datos del conjunto P y realizar una interpolación, que incluso en el caso de que las señales queden caracterizadas por tres parámetros (θ , ϕ y f) será un proceso mucho más rápido y computacionalmente ligero. De esta forma, el conjunto V de vectores directores deberá ser calculado antes de que el sistema entre en funcionamiento, a partir de la geometría y características del array y de sus elementos.

Existen multitud de técnicas diferentes de interpolación [152], no obstante, se ha optado por utilizar interpolación lineal, es decir, polinómica de grado 1 entre dos puntos presentes en la lista. Así, durante la etapa de cálculo de los vectores directores, es posible también calcular las pendientes de las rectas, planos o hiperplanos de interpolación en función de si se está ejecutando una estimación de uno, dos o tres parámetros por señal incidente, de modo que los cálculos que deban ser realizados en tiempo de ejecución sean los mínimos posibles. Dado que la función de ajuste se debe ejecutar un gran número de veces para cada estimación, se ha elegido la interpolación lineal, precisamente, porque es la que menor coste computacional presenta.

Para el caso de un UCA de $L = 8$ dipolos de media longitud de onda, se ha calculado la tensión inducida en uno de sus elementos mediante simulación numérica para una señal incidente desde la dirección $\theta = 0^\circ$ hasta $\theta = 8^\circ$ en pasos de 0.1° y se presenta en las figuras 4.4 junto con la interpolación lineal con una distancia entre puntos calculados de 1° . Al observarse que apenas existe diferencia entre la tensión inducida calculada para cada ángulo y la obtenida mediante interpolación, es razonable pensar que una distancia de 1° entre dos direcciones de llegada consecutivas en P es un valor que permitirá una precisión suficientemente buena. No obstante, esta hipótesis y el propio funcionamiento del algoritmo se comprobarán a continuación en varios conjuntos de simulaciones.

4.4. La Cota de Cramér-Rao en entornos acoplados

La cota desarrollada en la sección 3.5 proporciona un criterio objetivo para la validación de los resultados en el caso en que los acoplos entre elementos de un array se

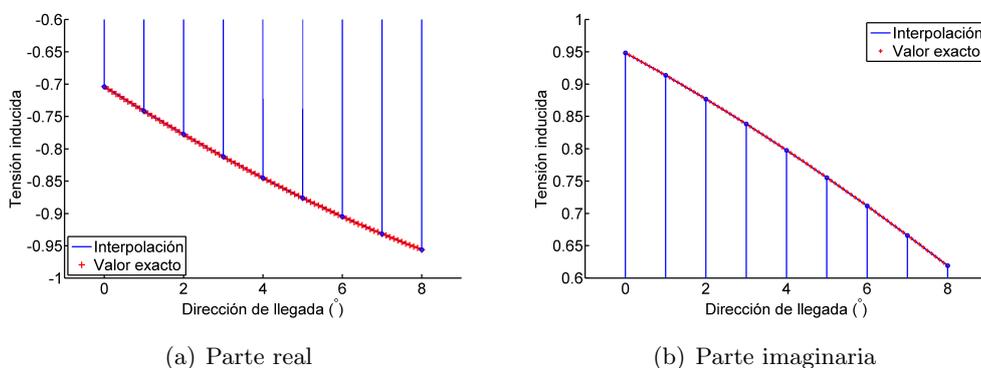


Figura 4.4: Comparación entre la tensión exacta y la obtenida por interpolación.

suponen nulos. Cuando estos acoplos entran en consideración, la teoría definida allí ya no es válida, porque no se conoce una forma cerrada de las tensiones inducidas en los elementos. No obstante, es posible modificar la estrategia vista allí para aplicarla al caso con acoplos.

4.4.1. Obtención de la cota en el caso con acoplos

Dado que en la sección 3.5 se presentó la obtención de la CRB para la estimación de tres parámetros de señal (θ, ϕ, f) junto con la amplitud y la fase (A, β) , en este apartado se obtendrá la CRB para sistemas con acoplos en el caso de una única dirección de llegada por señal (θ) , junto con la amplitud y la fase, sabiendo que la extrapolación de lo aquí presentado a los casos en que se estime, aún con acoplos, más de un parámetro por señal, es inmediata. Se asume también que los centros de fases de los elementos considerados están en puntos del eje z .

En el caso sin acoplos, era necesario construir la matriz de información de Fisher mediante derivadas del *snapshot* \mathbf{g} . En este caso, el *snapshot* \mathbf{g} no se ha obtenido considerando los acoplos entre elementos, así pues, la matriz de información de Fisher se ha de calcular con un hipotético *snapshot* \mathbf{v} , según (4.7). No obstante, no existe una forma cerrada derivable del vector \mathbf{v} , sino que se conocen valores concretos de los vectores directores (\mathbf{v}_{θ_i}) para ciertos ángulos θ_i que pertenecen al conjunto P .

$$I(\vartheta)_{r,t} = \frac{1}{\sigma^2} 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \mathbf{v}^H}{\partial \vartheta_r} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \vartheta_t} \right) \quad (4.7)$$

Para obtener una forma derivable, es decir, no numérica, del *snapshot*, se plantea

calcular la matriz de acoplos del sistema. Si notamos por \mathbf{g} a la tensión inducida en el array obtenida mediante la fórmula geométrica (3.38) y notamos por \mathbf{v} a la tensión inducida que se obtendría mediante simulación electromagnética, podemos establecer la relación entre ambos vectores a partir de la matriz de acoplo (4.9).

$$\mathbf{g}(\theta_1, A_1, \beta_1, \dots, \theta_M, A_M, \beta_M) = \sum_{i=1}^M A_i e^{j\beta_i} e^{j\frac{2\pi f_i}{c}(z_q \cos \theta_i)} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{v} = C\mathbf{g} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{g}_{\theta_i} = \mathbf{g}(\theta_i, A_i, \beta_i) = A_i e^{j\beta_i} e^{j\frac{2\pi f_i}{c}(z_q \cos \theta_i)} \quad (4.10)$$

De esta forma, si se obtiene la matriz de acoplo, que es puramente numérica, obtener las derivadas de \mathbf{v} resulta inmediato. Para obtener la matriz de acoplo basta con utilizar los vectores directores del conjunto V correspondientes a ángulos del conjunto P , y los vectores directores correspondientes a esos mismos ángulos, pero obtenidos mediante (4.10) para, mediante una pseudoinversa de Moore-Penrose, obtener la matriz C según las ecuaciones (4.11) y (4.12).

$$[\mathbf{v}_{\theta_1}, \mathbf{v}_{\theta_1}, \dots, \mathbf{v}_{\theta_p}] = C[\mathbf{g}_{\theta_1}, \mathbf{g}_{\theta_1}, \dots, \mathbf{g}_{\theta_p}] \quad (4.11)$$

$$[\mathbf{v}_{\theta_1}, \mathbf{v}_{\theta_1}, \dots, \mathbf{v}_{\theta_p}][\mathbf{g}_{\theta_1}, \mathbf{g}_{\theta_1}, \dots, \mathbf{g}_{\theta_p}]^\dagger = C \quad (4.12)$$

Dado que el número de elementos L en un array real es, por lo general, mucho menor que el número de direcciones en el conjunto P , es decir, p , esta pseudoinversa de Moore-Penrose da lugar a un sistema muy sobredeterminado, ya que una matriz de acoplo de tamaño $L \times L$ debe mapear de forma precisa los p vectores directores \mathbf{g} calculados mediante (4.10) en los p vectores directores \mathbf{v} calculados mediante simulación electromagnética. Esta sobredeterminación generaría una aproximación desde el punto de vista de los mínimos cuadrados para todos los vectores \mathbf{v} del conjunto V y, desde luego, esta aproximación no permitiría obtener de forma precisa el valor de las derivadas de los vectores \mathbf{v} para su uso en la ecuación (4.7).

Tras descartar esta idea, se observa que solamente es necesario que la ecuación (4.11) se verifique en entornos de las señales incidentes, que son los puntos donde se evaluará la derivada.

Así, se plantea crear una matriz de acoplo para cada señal incidente, de modo que en un entorno de esa señal, la transformación de los vectores directores obtenidos mediante (4.10) en los vectores directores calculados mediante simulación electromagnética sea precisa, aunque para otras direcciones de llegada no lo sea. Así, basta con elegir tantos vectores del conjunto V como elementos L haya en el array para convertir la pseudo-inversa de Moore-Penrose en (4.12) en la inversión estándar de una matriz cuadrada de orden L , problema sin ningún grado de sobredeterminación. Para ello, basta con elegir los L ángulos del conjunto P más cercanos a cada dirección de llegada θ_i para obtener una estimación de la matriz de acoplo C_i válida en un entorno de esa dirección de llegada θ_i .

La figura 4.2 muestra, para la configuración de array que será presentada en la sección 4.5.4, el valor de la tensión en su tercer elemento, calculado a partir de simulación electromagnética y mediante el mecanismo recién presentado para señales incidentes por $\theta_1 = 86.72370$ y $\theta_2 = 96.67291$. Se aprecia claramente como en un entorno de las direcciones de llegada, tanto el valor absoluto como la fase de los vectores directores \mathbf{v} y de las aproximaciones $C_1\mathbf{s}$ y $C_2\mathbf{s}$ coinciden.

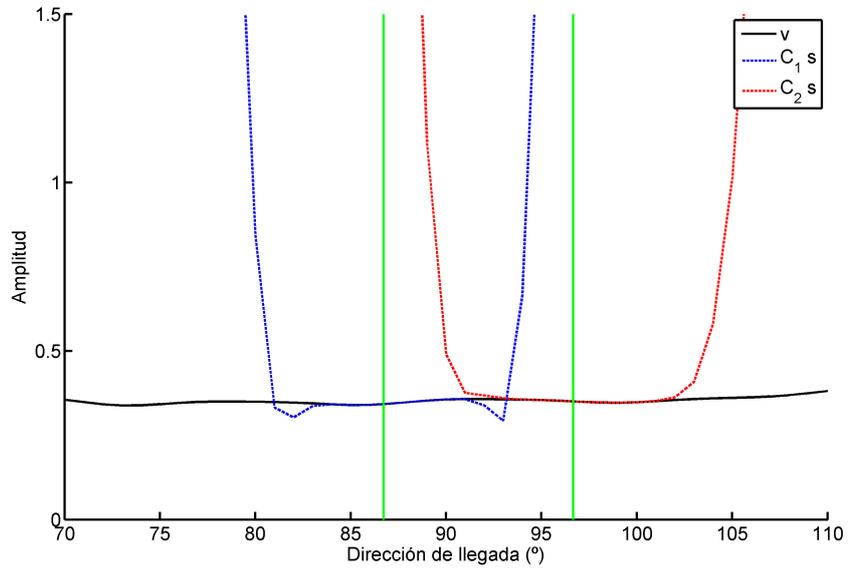
Conocidas las matrices de acoplos C_i , una para cada señal incidente, ya es posible construir el *snapshot* \mathbf{v} mediante una forma cerrada y derivable, según se muestra en (4.13).

$$\mathbf{v}(\theta_1, A_1, \beta_1, \dots, \theta_M, A_M, \beta_M) = \sum_{i=1}^M C_i e^{j\beta_i} A_i e^{j\frac{2\pi f_i}{c}(z_q \cos \theta_i)} \quad (4.13)$$

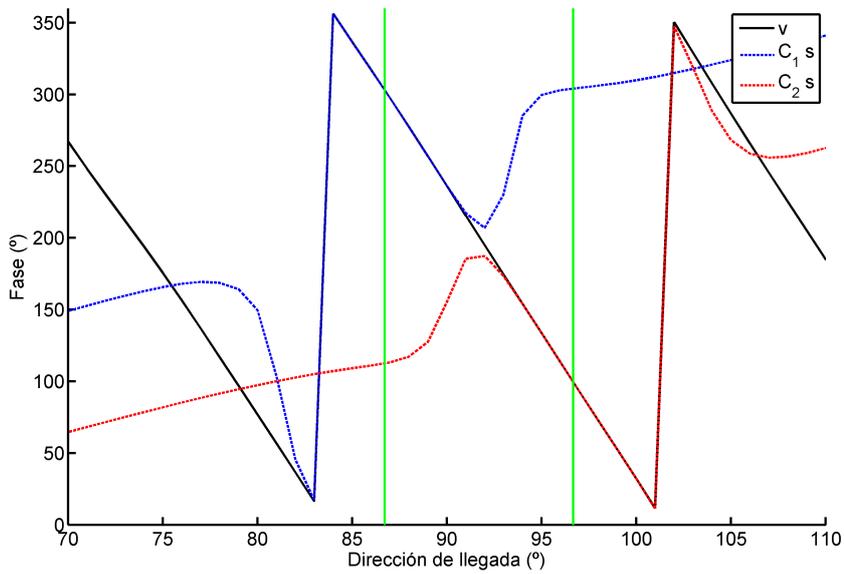
El procedimiento es ahora el mismo que en el caso de la CRB sin acoplo: la cota para cada parámetro está en la matriz que resulta de invertir la matriz de información de Fisher. No obstante, debe tenerse en cuenta, a la hora de calcular la varianza de ruido, que la potencia de la señal incidente debe ser calculada también a partir de la expresión (4.13).

4.5. Evaluación del rendimiento

Una vez se ha presentado la técnica, es momento de verificar que su rendimiento cumple con las expectativas. Para ello, se ejecutan varios conjuntos de simulaciones.



(a) Amplitud. Señales incidentes por $\theta_1 = 86.72370$ y $\theta_2 = 96.67291$



(b) Fase. Señales incidentes por $\theta_1 = 86.72370$ y $\theta_2 = 96.67291$

Figura 4.5: Vector director, para uno de los sensores, obtenido por simulación electromagnética y los resultados obtenidos mediante la matriz de acoplo en entornos de las señales incidentes.

4.5.1. Array lineal logarítmico de dipolos

En primer lugar, se estudia el rendimiento del método cuando las señales inciden sobre el array visto en la sección 4.2, es decir, un array lineal logarítmico con una apertura $\aleph = 3$ longitudes de onda y $L = 7$ dipolos de media longitud de onda situados a lo largo del eje z y orientados según el eje y . La polarización de las señales es horizontal. En un primer bloque de simulaciones, se estudia la convergencia del algoritmo con una única señal incidente ($M = 1$) y una SNR fija de 20 dB. La dirección de llegada de la señal, según el ángulo θ se elige de forma aleatoria y equiprobable entre todos los valores enteros del intervalo $[10^\circ, 170^\circ]$, con $\phi_1 = 0^\circ$ y frecuencia fija $f_1 = 300$ MHz. La amplitud de la señal se fija en $A_1 = 1$ y su fase se elige de forma aleatoria y uniforme en $[0^\circ, 360^\circ)$. Se ejecutan $R = 200$ simulaciones independientes y se establece un umbral de convergencia fijo de $\varepsilon_\theta = 1^\circ$. Además de simular la nueva técnica basada en métodos numéricos, se intenta también resolver el problema mediante el enfoque presentado en el capítulo 3 y que no considera los acoplos. En este caso, el conjunto P de direcciones de llegada cuyos vectores directores se obtienen de forma numérica es $P = \{0^\circ, 1^\circ, \dots, 180^\circ\}$, es decir, $p = 181$ y la distancia entre dos ángulos en V es de un grado. El criterio de parada del algoritmo de optimización se establece en $N_{iter-lim} = 50$ iteraciones para ambos casos. Para realizar una primera validación del modelo, se han elegido valores de las direcciones de llegada incluidas en el conjunto P , aunque el espacio de búsqueda se ha mantenido continuo en todos los casos.

La tabla 4.1 recoge las tasas de convergencia para los dos métodos y para nueve valores distintos del radio de los dipolos. En la tabla, la leyenda *enfoque numérico* hace referencia a la técnica presentada en este capítulo, y *enfoque geométrico* hace referencia a las técnicas presentadas en el capítulo anterior y r_d es el radio de los dipolos, expresado en longitudes de onda.

Se deduce de los resultados mostrados en la tabla 4.1, como ya se había visto en la sección 4.2, que el método del capítulo 3 no es válido en un entorno real, ya que sufre una degradación en sus prestaciones cuando existe acoplo mutuo entre los elementos. De la misma forma, se verifica que el nuevo enfoque es válido y los resultados son buenos. Es posible apreciar, además, que la tasa de convergencia en el caso en el que se consideran los acoplos se mantiene más o menos constante e independiente del valor de los radios de los dipolos, mientras que cuando estos no son tenidos en cuenta por el algoritmo (*enfoque geométrico*) la convergencia es menor cuanto mayor es el radio de

Tabla 4.1: Tasa de convergencia (porcentaje) para diferentes radios los dipolos. $M = 1$, SNR = 20 dB, $\varepsilon_\theta(1) = 1^\circ$

Radio (λ)	$r_d = 0.0001\lambda$	$r_d = 0.0002\lambda$	$r_d = 0.0005\lambda$
Enfoque numérico	97.5	97.5	97.5
Enfoque geométrico	36.5	34	33.5
Radio (λ)	$r_d = 0.001\lambda$	$r_d = 0.002\lambda$	$r_d = 0.005\lambda$
Enfoque numérico	97.5	97.5	97.5
Enfoque geométrico	36.5	36.5	31.5
Radio (λ)	$r_d = 0.01\lambda$	$r_d = 0.02\lambda$	$r_d = 0.05\lambda$
Enfoque numérico	97.5	96.5	97.5
Enfoque geométrico	32	34	29

los dipolos, como consecuencia de que los acoplos entre elementos son mayores.

Con las mismas configuraciones de array que en este caso y la misma SNR, pero con $M = 3$ señales incidentes y un umbral de convergencia de $\varepsilon_\theta(i) = 3^\circ$, se ejecutan otras $R = 200$ simulaciones y se obtienen los resultados mostrados en la tabla 4.2. De nuevo, se observa que el enfoque numérico proporciona unas tasas de convergencia más elevadas que el enfoque geométrico y que, además, éstas no dependen del radio de los dipolos.

4.5.2. Array circular uniforme de dipolos

Visto que el método funciona de forma correcta para el array lineal logarítmico, se ejecutan a continuación simulaciones sobre un array circular uniforme de $L = 8$ elementos. Este array está centrado en el origen de coordenadas y sus elementos son dipolos de media longitud de onda paralelos al eje y y con sus centros de fase contenidos en el plano XZ ó, equivalentemente, $\phi = 0$. Para el radio del array se eligen dos valores distintos $r_a = \{0.2, 0.4\}\lambda$ y los radios de los dipolos se toman iguales a $r_d = 0.02\lambda$. En este caso se utiliza una única señal ($M = 1$) cuya dirección de llegada, en lugar de ser elegida de forma aleatoria, se hace barrer el intervalo $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$ tomando valores enteros en 91 pasos de dos grados, con polarización horizontal y $R = 100$ simulaciones

4.5. Evaluación del rendimiento

Tabla 4.2: Tasa de convergencia (porcentaje) para diferentes radios los dipolos. $M = 3$, SNR = 20 dB, $\varepsilon_{\theta}(i) = 3^{\circ}$

Radio (λ)	$r_d = 0.0001\lambda$	$r_d = 0.0002\lambda$	$r_d = 0.0005\lambda$
Enfoque numérico	73	70.5	72.5
Enfoque geométrico	13	11	8.5
Radio (λ)	$r_d = 0.001\lambda$	$r_d = 0.002\lambda$	$r_d = 0.005\lambda$
Enfoque numérico	74.5	72	73.5
Enfoque geométrico	7.5	7	6
Radio (λ)	$r_d = 0.01\lambda$	$r_d = 0.02\lambda$	$r_d = 0.05\lambda$
Enfoque numérico	73.5	73.5	72.5
Enfoque geométrico	7	7.5	3

independientes para cada dirección de llegada. El criterio de parada del algoritmo de optimización se ha establecido en $N_{iter-lim} = 70$ iteraciones.

En esta simulación, se introduce una variación respecto a las anteriores, consistente en que el espacio de solución no sea el intervalo $\theta \in \{[0^{\circ}, 180^{\circ}] \times \{\phi = 0^{\circ}\}\} \cup \{[0^{\circ}, 180^{\circ}] \times \{\phi = 180^{\circ}\}\}$, sino que, fijando $\phi = 0^{\circ}$ se toma la licencia de permitir $\theta \in [0^{\circ}, 360^{\circ})$ uniéndose además los dos extremos de este intervalo de modo que dos direcciones de llegada θ_1 y θ_2 sean la misma si verifican $\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{360^{\circ}}$.

Al igual que en el caso del array lineal logarítmico, la distancia entre dos direcciones de llegada cuyo vector director se ha obtenido mediante simulación electromagnética es de un grado, resultando en este caso el conjunto $P = [0^{\circ}, 1^{\circ}, \dots, 359^{\circ}]$.

$$\text{RMSE} = \frac{1}{R} \sqrt{\sum_{i=1}^R ((\theta_i - \hat{\theta}_i)_{360})^2} \quad (4.14)$$

El RMSE se ha calculado según (4.14), donde el subíndice $(\cdot)_{360}$ significa *módulo 360*, de modo que la diferencia entre una señal incidente con $\theta = 2^{\circ}$ y una detectada de $\hat{\theta} = 358^{\circ}$, la distancia sea de 4° y no de 356° .

Así, la gráfica 4.6 muestra el RMSE en función del ángulo de incidencia en ausencia de ruido (SNR = ∞). Para apreciar mejor los resultados la gráfica se muestra en escala

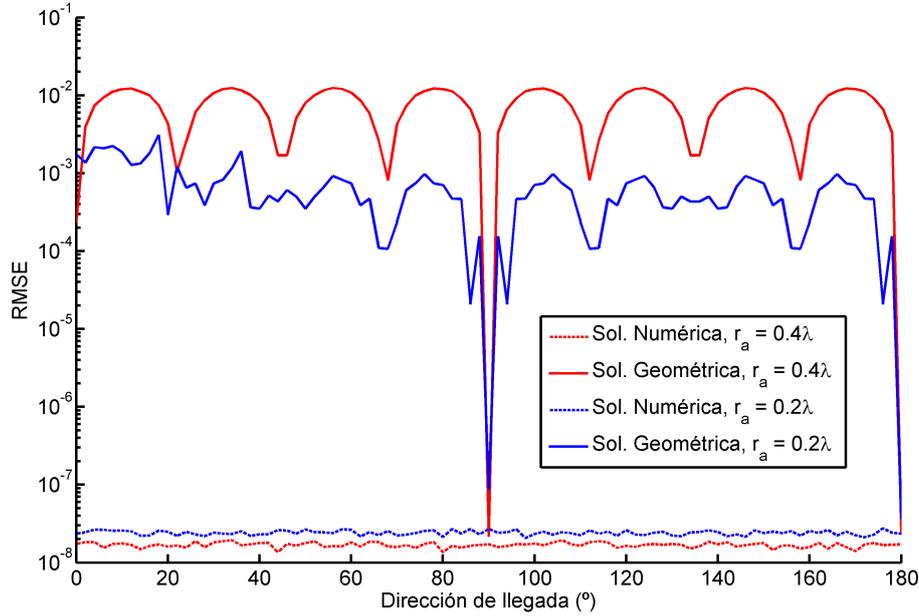


Figura 4.6: RMSE en función del ángulo de incidencia, $\text{SNR} = \infty$

logarítmica. Se aprecia que la solución *geométrica* del problema ofrece peores resultados que la solución propuesta en este capítulo. Además, se observa un comportamiento periódico en las curvas que representan la estimación por el método *geométrico*. Este comportamiento es debido a que el array tiene $L = 8$ elementos distribuidos a lo largo de 360° y por tanto 16 ejes de simetría. De esta forma, se observan 8 ciclos de la señal a lo largo de los 180° considerados. Este comportamiento solo aparece en el caso de la estimación por el método *geométrico* del capítulo 3: en efecto, en las curvas correspondientes al método propuesto en este capítulo, no tiene sentido que aparezcan ya que todos los ángulos son equivalentes, en el sentido de que se conocen los vectores directores para todos ellos y éstos ya incorporan la información sobre los acoplos, con lo que el hecho de que los acoplos tengan más influencia cuando inciden señales por determinados ángulos ya está considerado en los propios vectores directores.

4.5.3. Array lineal de bocinas

Tras estos ejemplos, en los que se observa que el método propuesto funciona correctamente con dipolos, se propone estudiar su rendimiento con diferentes elementos radiantes. Particularmente, los siguientes conjuntos de simulaciones utilizan un array lineal de $L = 7$ antenas de bocina. En los casos estudiados hasta este punto, la directi-

vidad de los dipolos no ha tenido efectos relevantes, al estar la señal incidente contenida en el plano de simetría de los dipolos. Sin embargo, en este caso, mediante la utilización de bocinas piramidales, se verifica la efectividad del método en entornos arbitrarios, con elementos acoplados y altamente directivos. Cada bocina individual, definida en [153], tiene el tamaño mostrado en las figuras 4.7 y el array completo es el mostrado en la figura 4.8.

Éste es un sistema realista con una frecuencia de operación de 2.3 GHz. Para cada bocina, el alimentador se sitúa a la habitual distancia de $\lambda/4$ del fondo de la guía y se trata de un dipolo corto orientado paralelamente al eje y . La separación entre los alimentadores de las bocinas es de 0.6846λ , o, equivalentemente, de 89.3 mm. Este array ha sido diseñado para ser instalado sobre una superficie de modo que las bocinas están conectadas entre sí mediante placas de Conductor Eléctrico Perfecto o *Perfect Electric Conductor* (PEC), que es el mismo material del que están hechas, resultando en un mayor acoplo entre ellas. El diagrama de radiación normalizado de una bocina, considerada individualmente, se muestra en la figura 4.9.

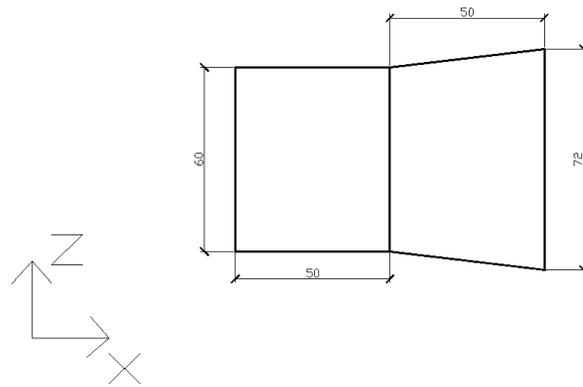
Con este sistema de bocinas se ejecutan dos bloques de simulaciones, con $M = 1$ y $M = 2$ señales incidentes, respectivamente. En ambos casos, la señal incidente tiene una dirección de llegada elegida equiprobablemente en el conjunto $\theta_i \in \{30^\circ, 31^\circ, \dots, 150^\circ\}$, amplitud unitaria y fase aleatoria uniformemente en $\beta_i \in [0^\circ, 360^\circ)$. En todos los casos, la frecuencia de la señal es la frecuencia central de operación $f_i = 2.3$ GHz y tanto las señales incidentes como los centros de fase de las bocinas están contenidas en el plano $\phi = 0^\circ$. El error se calcula en ambos casos según (4.15):

$$\text{RMSE} = \frac{1}{RM} \sum_{n=1}^R \sqrt{\sum_{i=1}^M (\theta_{i,n} - \hat{\theta}_{i,n})^2} \quad (4.15)$$

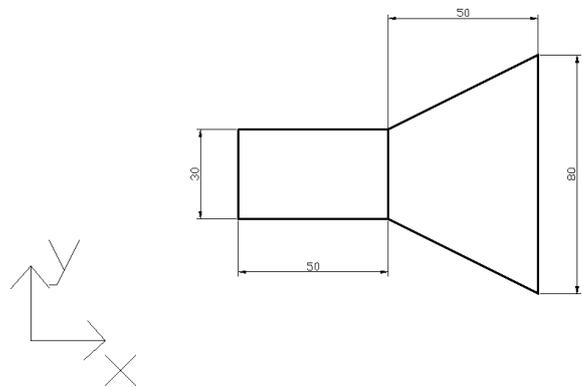
En el primer caso, con una sola señal incidente, se ejecutan $R = 500$ simulaciones independientes para cada valor de la SNR, que se hace variar desde 0 dB hasta 30 dB en pasos de 2 dB. Se establecen varios criterios de parada en el número de iteraciones según $N_{iter-lim} \in \{1, 5, 10, 15, 20, 100\}$ y para cada uno de ellos, se calcula el RMSE para cada valor de la SNR. Los resultados se muestran en la gráfica 4.10, en la que se puede apreciar que, para valores de la SNR por encima de 16dB, normalmente 20 iteraciones del algoritmo de optimización son suficientes para alcanzar una precisión media por debajo de un grado.

En el segundo caso, con $M = 2$ señales incidentes, se ejecutan también $R = 500$

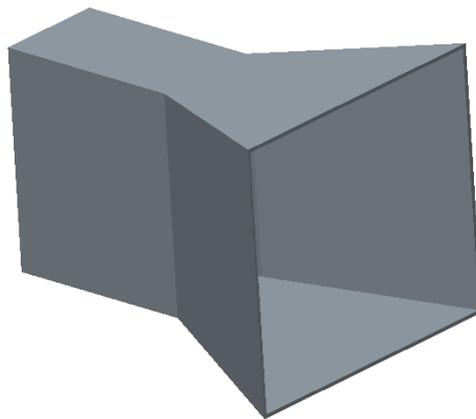
4. El Problema de los Acoplos Mutuos



(a) Alzado de una bocina del array



(b) Planta de una bocina del array



(c) Vista en perspectiva

Figura 4.7: Cada una de las bocinas del array. Cotas en milímetros



Figura 4.8: *Array Lineal Uniforme de Bocinas*

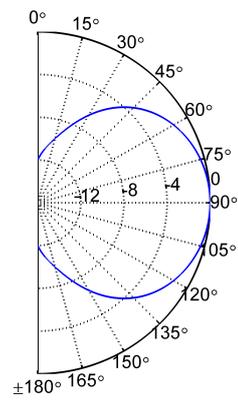


Figura 4.9: *Diagrama de radiación normalizado (dB) de una bocina*

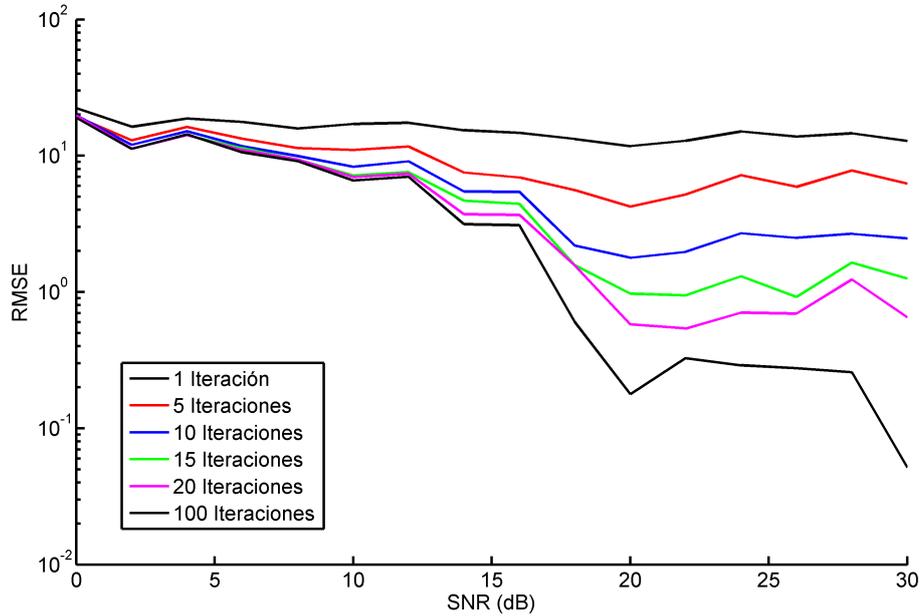


Figura 4.10: *RMSE frente a SNR para varios números de iteraciones, con $M = 1$*

simulaciones independientes, pero en este caso la SNR se hace variar entre 6 dB hasta 30 dB en pasos de 6 dB y se considera también el caso sin ruido ($SNR = \infty$). En la gráfica 4.11 se puede apreciar la evolución del error medio en función del número de iteraciones ejecutadas por el algoritmo de optimización, comprobándose que normalmente, 60 iteraciones son suficientes para alcanzar errores del orden de la décima de grado con una SNR de 30 dB. El mínimo error medio alcanzable para una SNR de 6 dB ronda los dos grados, mientras que para valores de la SNR de 12 dB y superiores, en ningún caso el error medio es mayor que el grado, obteniéndose esta precisión con tan solo 20 iteraciones.

En la gráfica 4.11 se puede observar que el RMSE para los casos con SNR finita termina convergiendo a un cierto valor, mientras que para el caso de SNR infinita (sin ruido) el error medio sigue bajando indefinidamente. Esta diferencia de comportamientos viene dada por que la estimación en los casos ruidosos tiene su precisión limitada por la presencia de ruido, y a mayor ruido, menor precisión. En el caso no ruidoso, esta precisión puede ser arbitrariamente grande (es decir, el error puede ser arbitrariamente pequeño) tan solo aumentando el número de iteraciones. No obstante, esto ocurre porque los ángulos de las señales incidentes pertenecen al conjunto P de direcciones de llegada cuyo vector director se ha calculado mediante métodos numéricos. En el caso,

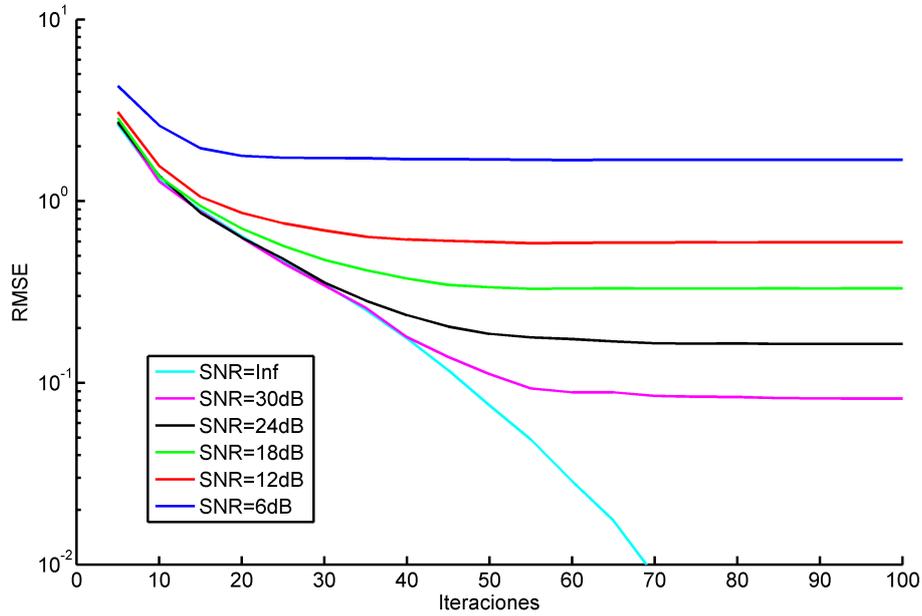


Figura 4.11: *RMSE frente al número de iteraciones para varios valores de la SNR, con $M = 2$*

más general, de que la dirección de llegada sea arbitraria y, por tanto, pueda no pertenecer a P , este efecto de precisión ilimitada desaparecería al verse ésta limitada por el error de interpolación.

4.5.4. Array lineal de bocinas con una estructura externa y direcciones de llegada arbitrarias

Para completar este capítulo, los últimos grupos de simulaciones se ejecutan con ángulos no pertenecientes al conjunto P , de modo que se observe el efecto de la interpolación sobre la precisión del método. Además para dar validez a la hipótesis de que el método es capaz de tener en cuenta los efectos debidos a estructuras no pertenecientes al array, al array lineal uniforme de $L = 7$ bocinas mostrado en 4.8 se le ha añadido dos placas planas de PEC: la primera de ellas contiene las aberturas de todas las bocinas y es la prolongación de los planos que las unían, ya presentes en el modelo anterior del array. Esta placa tiene unas dimensiones de $1700 \text{ mm} \times 400 \text{ mm}$, o equivalentemente, $13.03\lambda \times 3.07\lambda$. La segunda placa, es perpendicular a la primera y se extiende en la dirección del *broadside* del array, con dimensiones $1700 \text{ mm} \times 925 \text{ mm}$, o equivalentemente, $13.03\lambda \times 7.09\lambda$. Con esto, el nuevo array queda según se muestra en la figura 4.12.

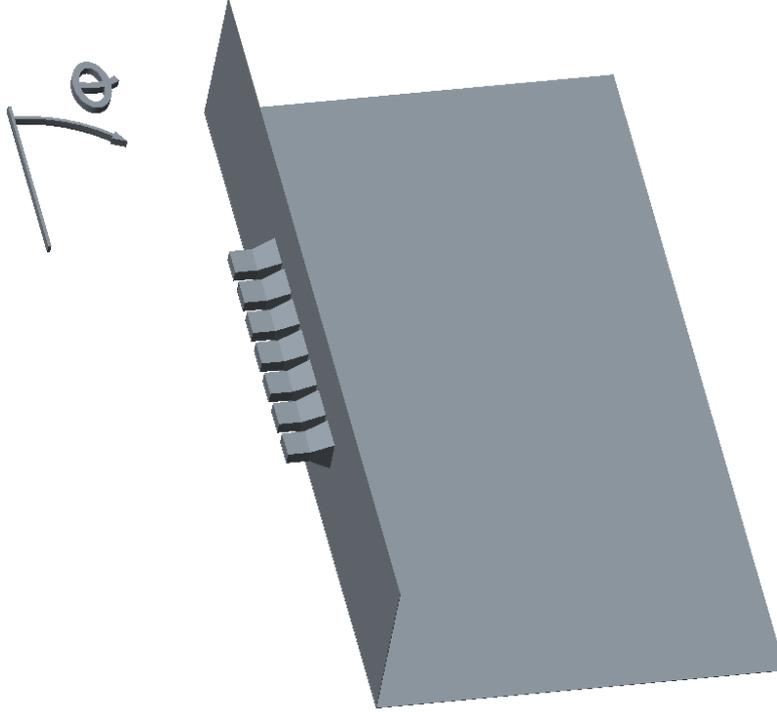


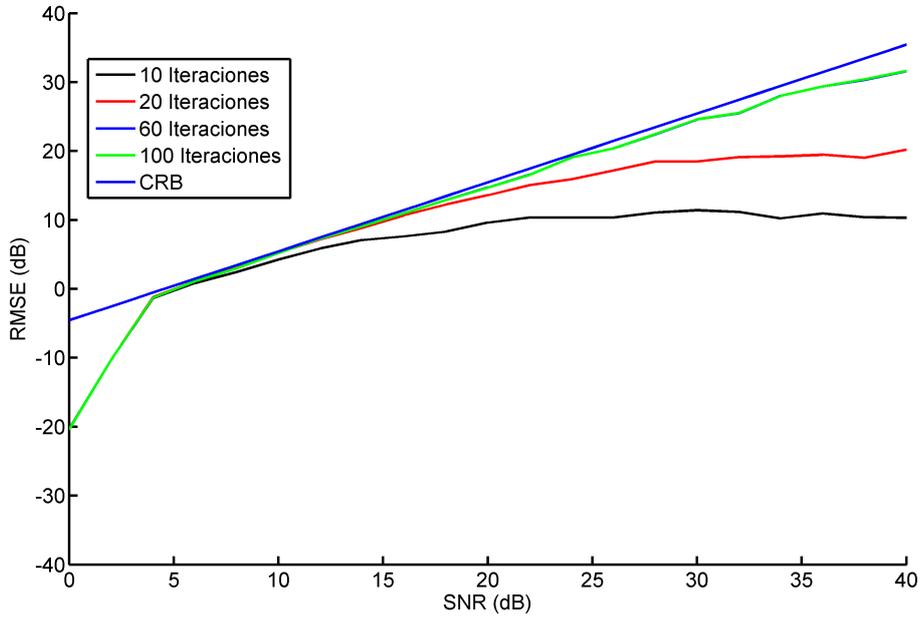
Figura 4.12: *Array Lineal Uniforme de Bocinas con dos planos extra.*

A lo largo de esta sección, y para observar con más claridad los resultados de las simulaciones y la CRB, las gráficas se muestran en una escala lineal en dB y el error se calcula, para cada señal incidente haciendo uso de (4.16).

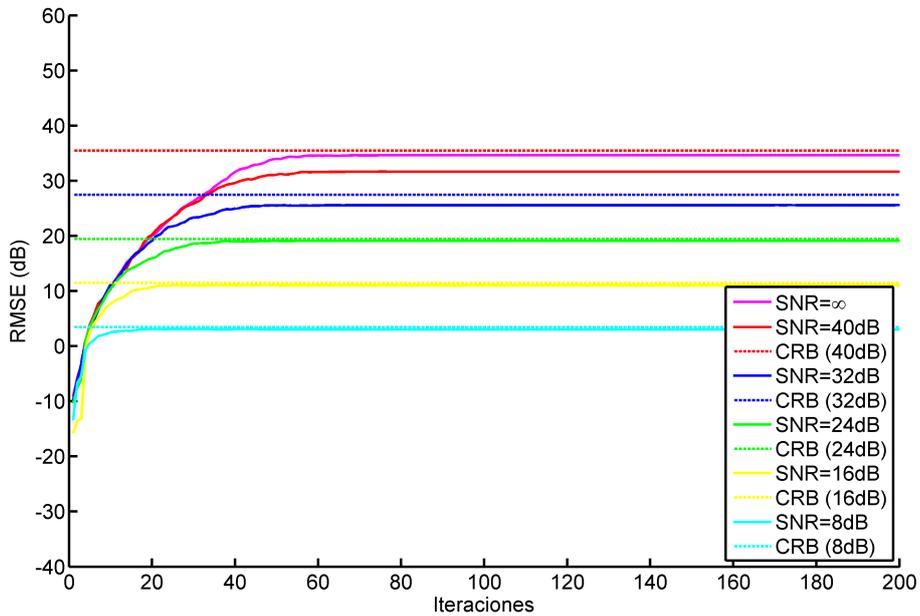
$$\text{RMSE}_{\theta,i}(\text{dB}) = -10 \log \frac{1}{R} \sum_{n=1}^R (\theta_i - \hat{\theta}_{i,n})^2 \quad (4.16)$$

En primer lugar se ejecuta un bloque de simulaciones con $M = 1$ señal incidente por el plano $\phi = 0$ y polarización horizontal. Se eligen dos valores aleatorios en el intervalo $\theta_1 \in [30^\circ, 150^\circ]$ y para cada uno de ellos, se ejecutan $R = 500$ simulaciones independientes. La fase de la señal se fija en 0° y se toma amplitud unitaria. La frecuencia de las señales es la de operación de las bocinas, es decir, 2.3 GHz. El valor de la SNR se hace variar desde 0 dB hasta 40 dB en pasos de 2 dB, y se ejecuta también un caso en ausencia de ruido, es decir, $\text{SNR} = \infty$. Las direcciones de llegada de las señales elegidas son, para el primer caso, $\theta_1 = 86.72375^\circ$, es decir, una señal cercana al *broadside* del array, y para el segundo, $\theta_1 = 138.21560^\circ$.

4.5. Evaluación del rendimiento



(a) RMSE(dB), en función de la SNR



(b) RMSE(dB), en función del número de iteraciones

Figura 4.13: Gráficas de error para el primer caso $\theta_1 = 86.72375^\circ$, junto con la CRB

Así, los resultados se muestran para el primer caso en las figuras 4.13. La tabla 4.3 muestra la tasa de convergencia con un umbral de tres desviaciones típicas proporciona-

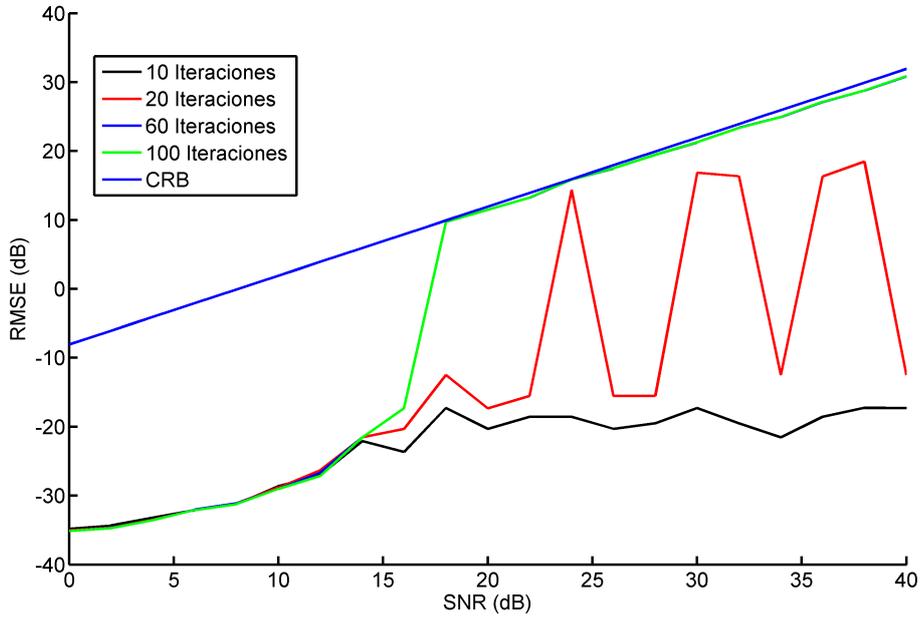
Tabla 4.3: Tasa de convergencia (porcentaje) para diferentes SNRs. Primer caso: $M = 1$, $\theta_1 = 86.72375^\circ$, $\varepsilon_\theta(1) = 3\sigma_{\theta_1}$

SNR (dB)	40	38	36	34	32	30	28
Convergencia (%)	95.6	97.6	98.2	98.4	99.0	99.2	99.6
SNR (dB)	26	24	22	20	18	16	14
Convergencia (%)	98.6	99.8	99.4	99.8	99.4	100	99.8
SNR (dB)	12	10	8	6	4	2	0
Convergencia (%)	99.8	99.6	99.8	98.6	98.8	97.8	90.8

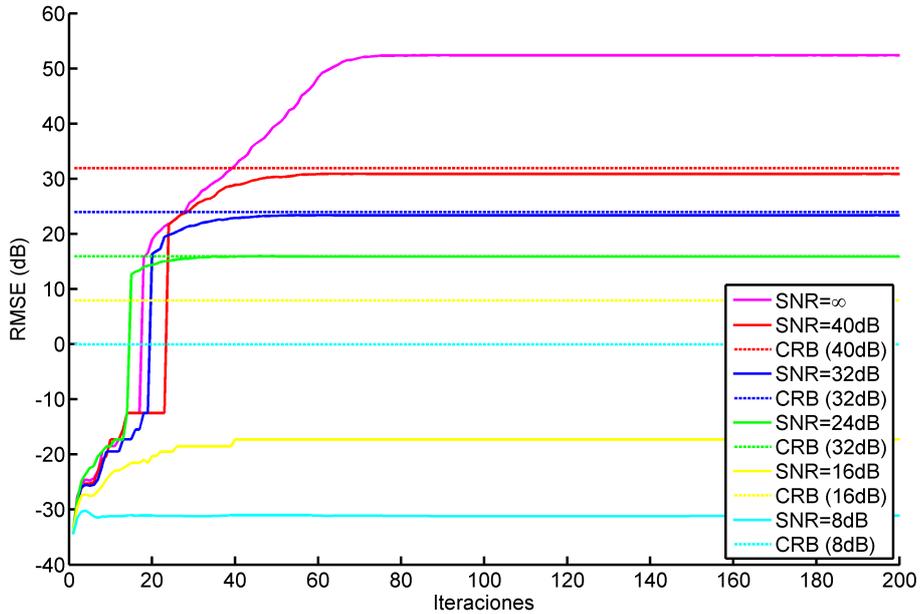
das por la CRB, es decir, $\varepsilon_{\theta_1} = 3\sigma_{\theta_1}$. Al contrario que en casos anteriores, los resultados de las gráficas incluyen todos los resultados, convergentes y no convergentes con el umbral fijado. Se puede apreciar en la figura 4.13(a) que el error converge a la CRB para valores de la SNR entre 4 dB y 30 dB, ejecutando tan solo $N_{iter-lim} = 60$ iteraciones. Se observa que el número de iteraciones necesarias para alcanzar la máxima precisión disminuye a medida que aumenta el nivel de ruido, efecto que también puede apreciarse en la figura 4.13(b). Se observa que la precisión para los valores más elevados de la SNR se aleja unos pocos decibelios de la cota. En efecto, se estabiliza tras $N_{iter-lim} = 60$ iteraciones, independientemente del nivel de ruido y de si se ha alcanzado o no la CRB. En ausencia de ruido, la gráfica del error también se estabiliza tras 60 iteraciones.

Los resultados para el segundo caso se muestran, para la precisión, en las figuras 4.14 y, para la convergencia, con un umbral calculado también como tres desviaciones típicas de la CRB ($\varepsilon_{\theta_1} = 3\sigma_{\theta_1}$), en la tabla 4.4. En ellas se aprecia que la convergencia a la CRB es menos uniforme, aunque, como en el caso anterior, tras $N_{iter-lim} = 60$ iteraciones, ya se ha alcanzado el punto de máxima precisión para todos los casos con SNR finita. Este punto de máxima precisión solamente coincide con la CRB para valores de SNR por encima de los 18dB, pero no se observa un límite superior para niveles de ruido inferiores a 40dB. En este segundo caso, la señal no incide por una dirección cercana al broadside del array, que es la dirección de máxima directividad de las antenas. No obstante, dado que el nivel de ruido se establece, para cada SNR, en función del nivel de señal leído en bornes de las bocinas, la diferente magnitud de los ruidos no es una fuente de divergencia entre las gráficas del primer caso y las del segundo. Esta diferencia

4.5. Evaluación del rendimiento



(a) RMSE(dB), en función de la SNR



(b) RMSE(dB), en función del número de iteraciones

Figura 4.14: Gráficas de error para el segundo caso $\theta_1 = 138.2156^\circ$, junto con la CRB

en la convergencia a la CRB para los valores más bajos de SNR es consecuencia del mayor número de simulaciones no convergentes, tal y como se aprecia al comparar las

Tabla 4.4: Tasa de convergencia (porcentaje) para diferentes SNRs. Segundo caso. $M = 1$, $\theta_1 = 138.2156^\circ$, $\varepsilon_\theta(1) = 3\sigma_{\theta_1}$

SNR (dB)	40	38	36	34	32	30	28
Convergencia (%)	99.6	99.6	99.0	99.8	99.4	100	99.8
SNR (dB)	26	24	22	20	18	16	14
Convergencia (%)	100	100	99.2	99.6	99.8	99.0	98.0
SNR (dB)	12	10	8	6	4	2	0
Convergencia (%)	94.2	90.2	85.4	81.2	74.4	65.2	55.6

tablas 4.3 y 4.4, en las que se observan tasas de convergencia muy dispares para los casos más ruidosos.

Se observa, no obstante, una diferencia significativa entre las gráficas correspondientes al primer caso ($\theta_1 = 86.72375^\circ$) y al segundo ($\theta_1 = 138.21560^\circ$): en el segundo caso, las curvas de error se ajustan de forma mucho más cercana a la CRB mientras que en el primero, existe una diferencia mayor. Paralelamente, se observa que la precisión para el caso de $\text{SNR} = \infty$ no es infinita, sino que está limitada por el hecho de que las direcciones de las señales incidentes no pertenecen al conjunto P , es decir, su vector director no ha sido obtenido mediante simulación electromagnética. La mayor o menor precisión de la estimación en el caso de que la limitación no venga dada por la SNR dependerá entonces del error de interpolación. Este error de interpolación depende de varios factores: en primer lugar, de la distancia entre la dirección de llegada incidente y el elemento en P más cercano. El error de interpolación será menor cuanto menor sea esta distancia. En segundo lugar, el error de interpolación depende del valor absoluto de la derivada segunda del vector director respecto a la dirección de llegada. Dado que se está utilizando una interpolación basada en el polinomio de Taylor de grado uno, es conocido que el error depende del valor absoluto de la derivada segunda de la función interpolada. Lógicamente, si se utilizara interpolación de orden superior n , el error dependería del valor absoluto de la derivada $n + 1$ -ésima, siendo además más pequeño cuanto mayor fuera el orden de la interpolación. Volviendo a la diferencia entre las dos gráficas, es posible deducir que algunos ángulos son detectados con mayor precisión que otros, a consecuencia de que, para esos valores, la derivada segunda del vector director

en el intervalo en el que se realiza la interpolación puede tomar valores mayores o menores y, en consecuencia, resultar en que direcciones de llegada que no coincidan con las de máxima directividad de las bocinas, sean estimadas con mayor precisión que otras que sí coincidan con esa máxima directividad.

En cualquier caso, la interpolación es una fuente de errores adicional al error generado por el ruido. De las gráficas 4.13 y 4.14 se deduce que esta nueva fuente de error solamente tiene efectos equiparables a los del ruido para valores de SNR muy altos. En entornos ruidosos, la falta de precisión debida al ruido enmascara el error de interpolación.

Tras ver que el método funciona de forma correcta para $M = 1$ señal incidente, se realizan nuevas simulaciones con $M = 2$ señales. Dado que se están utilizando bocinas, que son elementos radiantes altamente directivos, se eligen aleatoriamente señales que incidan por los puntos de máxima directividad. Así, para el primer caso, se toma $\theta_1 = 86.72370^\circ$ y $\theta_2 = 96.67291^\circ$. Las amplitudes se eligen unitarias y la fase nula. La SNR se hace variar desde los 0 dB hasta los 40 dB en pasos de 2 dB. Para cada valor de la SNR se ejecutan $R = 500$ simulaciones independientes y se calcula el RMSE en decibelios según la ecuación (4.16).

Se muestran pues cuatro gráficas, dos para cada señal, en la figura 4.15. Al igual que en el caso anterior, para cada señal, la primera gráfica muestra el RMSE en función del número de iteraciones para ciertos valores de $\text{SNR} \in \{8, 16, 24, 32, 40, \infty\}$ dB. La segunda, muestra el RMSE en función de la SNR para varios valores del número de iteraciones del algoritmo de optimización $N_{iter-lim} \in \{10, 20, 60, 100\}$. Los resultados de convergencia se presentan en la tabla 4.5, con el mismo criterio anterior.

El comportamiento de las dos señales es semejante, dado que ambas inciden por las direcciones de máxima directividad de las bocinas. Se aprecia la convergencia a la CRB con $N_{iter-lim} = 80$ iteraciones (figuras 4.15(c) y 4.15(d)) y se observa un umbral mínimo de convergencia en SNR en los 14 dB, por debajo del cual el error medio es grande, dado que, según se aprecia en la tabla 4.5, la tasa de convergencia a tres desviaciones típicas disminuye al disminuir la SNR. De nuevo, en las curvas con $\text{SNR} = \infty$ se verifica que la precisión no tiende a infinito al aumentar el número de iteraciones debido a que el conjunto P es discreto o, equivalentemente, finito.

Para el segundo caso, se ejecuta un conjunto de simulaciones con una de las señales del caso anterior y otra con algo más de separación. Las direcciones de llegada elegidas son $\theta_1 = 76.1567^\circ; \theta_2 = 96.67291^\circ$. Las señales tienen amplitud unitaria y fase nula

4. El Problema de los Acoplos Mutuos

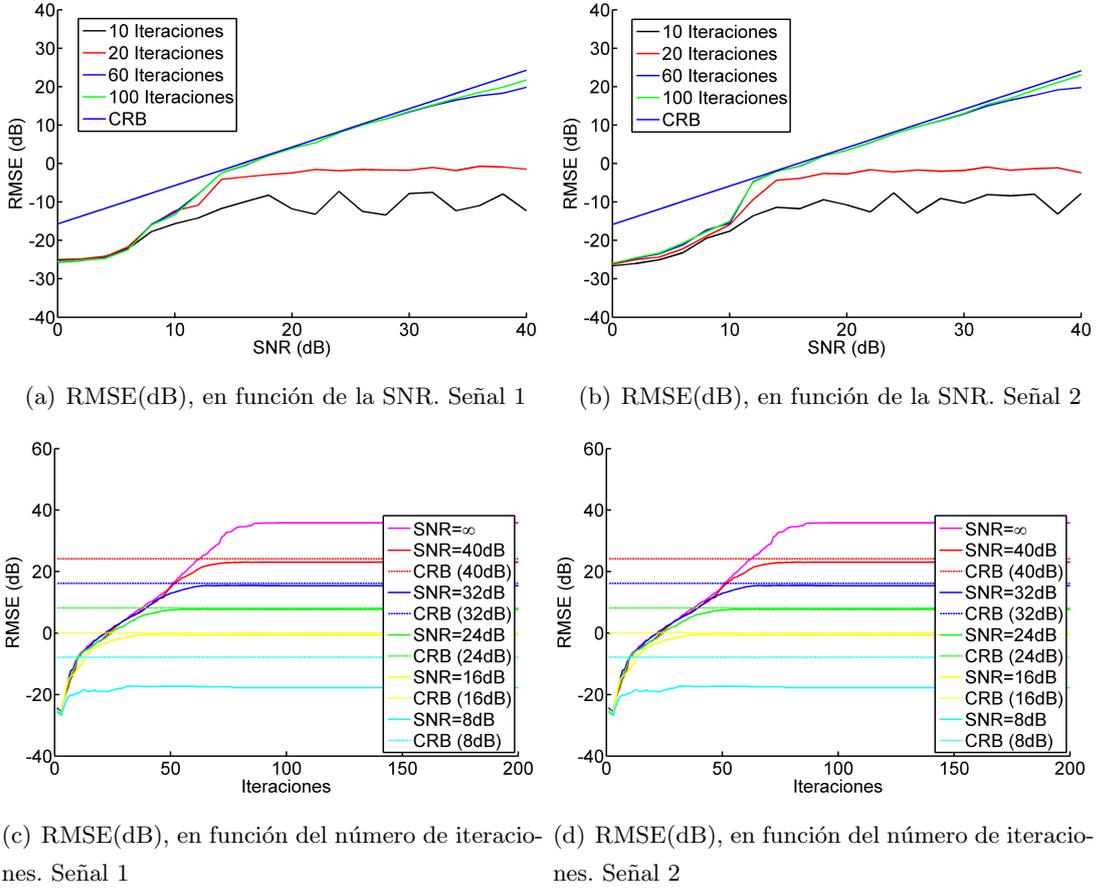


Figura 4.15: Gráficas de error para el primer caso $\theta_1 = 86.7237^\circ; \theta_2 = 96.67291^\circ$, junto con la CRB

Tabla 4.5: Tasa de convergencia (porcentaje) para diferentes SNRs. Primer caso. $M = 2$, $\theta_1 = 86.72370^\circ$, $\theta_2 = 96.67291^\circ$, $\varepsilon_\theta(i) = 3\sigma_{\theta_i}$

SNR (dB)	40	38	36	34	32	30	28
Convergencia (%)	97.6	97.8	97.8	98.2	99.0	99.2	99.2
SNR (dB)	26	24	22	20	18	16	14
Convergencia (%)	99.8	98.6	98.4	98.4	99.8	98.4	97.2
SNR (dB)	12	10	8	6	4	2	0
Convergencia (%)	96.4	91.6	85.4	72.6	58.2	56.0	51.8

4.5. Evaluación del rendimiento

Tabla 4.6: Tasa de convergencia (porcentaje) para diferentes SNRs. Segundo caso. $M = 2$, $\theta_1 = 76.1567^\circ$, $\theta_2 = 96.67291^\circ$, $\varepsilon_{\theta}(i) = 3\sigma_{\theta_i}$

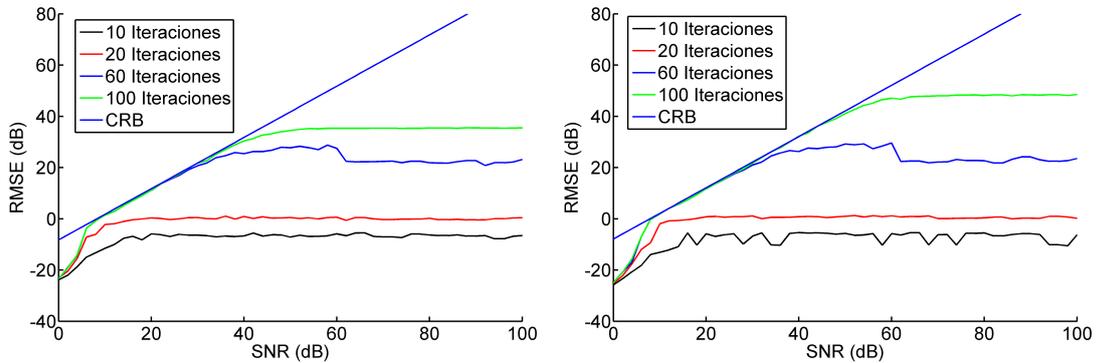
SNR (dB)	68	66	64	62	60	58	56
Convergencia (%)	0	0	0	0	0	2.0	11.2
SNR (dB)	54	52	50	48	46	44	42
Convergencia (%)	38.6	66.4	81.4	90.6	94.8	98.2	98.4
SNR (dB)	40	38	36	34	32	30	28
Convergencia (%)	99.4	99.6	99.4	99.2	99.2	100	99.6
SNR (dB)	26	24	22	20	18	16	14
Convergencia (%)	99.4	99.2	99.6	99.0	99.2	98.6	99.6
SNR (dB)	12	10	8	6	4	2	0
Convergencia (%)	99.2	99.0	98.6	98.2	94.0	78.8	57.0

y la SNR se hace variar desde 0 dB hasta los 100 dB en pasos de 2 dB. El número de simulaciones independientes para cada valor de la SNR se fija en $R = 500$.

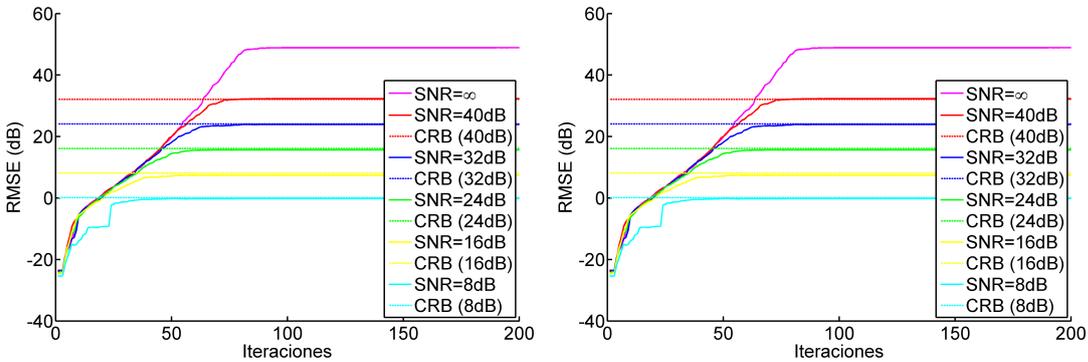
Con estos parámetros, los resultados se muestran en las gráficas 4.16. Los resultados son semejantes a los presentados en el primer caso con $M = 2$ señales, pero se aprecia alguna diferencia significativa. Como consecuencia de que la separación entre señales incidentes es mayor el umbral en SNR para el que las señales empiezan a converger a la CRB es más bajo. De hecho, esta convergencia se puede observar a partir de 8 dB. Al aumentar la SNR hasta los 100 dB se observa con claridad el límite máximo de la precisión del algoritmo en la curva de $N_{iter-lim} = 100$ iteraciones. Esta diferencia respecto a la CRB para valores de la SNR por encima de 40 dB es causada por la interpolación.

Con todo esto, cabe concluir que la metodología propuesta para resolver el problema de los acoplos mutuos desarrolla un estimador eficiente en el sentido de que el error de estimación converge a la CRB para un rango de SNR limitado superiormente a consecuencia del error de interpolación, que puede hacerse arbitrariamente pequeño tomando un conjunto P con más elementos, y cuyo límite inferior depende de la separación entre las señales incidentes, aunque con gran probabilidad, la estimación es eficiente.

4. El Problema de los Acoplos Mutuos



(a) RMSE(dB), en función de la SNR. $\theta_1 = 76.1567^\circ$ (b) RMSE(dB), en función de la SNR. $\theta_2 = 96.67291^\circ$



(c) RMSE(dB), en función del número de iteraciones. $\theta_1 = 76.1567^\circ$ (d) RMSE(dB), en función del número de iteraciones. $\theta_2 = 96.67291^\circ$

Figura 4.16: Gráficas de error para el segundo caso $\theta_1 = 76.1567^\circ; \theta_2 = 96.67291^\circ$, junto con la CRB

4.6. Conclusión

Al comienzo de este capítulo se ha estudiado si el método, tal y como fue propuesto en el capítulo 3, era capaz de estimar las direcciones de llegada de un conjunto de señales incidentes en un entorno en que se consideran los acoplos mutuos entre los elementos que forman el array. Al observarse una respuesta negativa, se plantea extender el citado método haciendo uso de simulación electromagnética.

A lo largo del capítulo se describe una modificación del método propuesto que, mediante el uso de los resultados de la simulación electromagnética, considera los acoplos entre elementos de modo que estos no mermen las prestaciones del método. La extensión propuesta se desarrolla para el caso de estimación de un único parámetro por señal

incidente (dirección de llegada unidimensional), no obstante, mantiene una coherencia con el método presentado en el capítulo 3 de modo que es extensible de forma inmediata a la estimación de dirección de llegada bidimensional y frecuencia. Además, la propia construcción del método permite considerar, no solo los acoplos entre elementos, sino también la influencia de la directividad de los sensores y también los posibles efectos nocivos causados por objetos ajenos al array, tales como estructuras de sujeción mecánica.

Se realizan varios tipos de simulaciones entre las que destacan, en primer lugar, la estimación de señales incidentes por ángulos que han sido simulados numéricamente y en segundo lugar, la estimación de señales arbitrarias. En ambos casos, las señales inciden sobre un array de bocinas acopladas, al que, en el segundo caso, se le ha añadido una estructura externa.

Al añadir en la sección 4.5.4 esta estructura externa y permitir la llegada de señales arbitrarias se simula un caso real que considera todos los efectos. Además, se comprueba que el método propuesto es capaz de contrarrestar todos los efectos relativos a la geometría del array, su construcción física y la presencia de objetos externos a él, que en situaciones normales supondrían una merma en sus prestaciones.

El método extendido se pone a prueba en diversos entornos en los que afloran los efectos recién mencionados y se observa que sus prestaciones son buenas ya que se alcanza la CRB en un amplio rango de valores de la SNR.

Para realizar este análisis de rendimiento y compararlo con un valor objetivo, ha sido necesario obtener la Cota de Cramér-Rao en entornos acoplados mediante una técnica que amplía la ya presentada en la sección 3.5.

Parte de los resultados presentados en este capítulo han sido enviados para su revisión y publicación en una revista científica de ámbito internacional [154].

Capítulo 5

Optimización Metaheurística

5.1. Introducción

En los dos capítulos anteriores se han desarrollado técnicas para la estimación de dirección de llegada mediante un único muestreo, tanto en entornos sin acoplos como en entornos acoplados. Dichas técnicas se basan en la minimización de una función mediante un mecanismo que todavía no ha sido abordado, pero al que se ha hecho referencia como *algoritmo de optimización metaheurística*.

En el presente capítulo se estudia, precisamente, qué es un algoritmo de optimización metaheurística y se presentan algunos ejemplos con la intención última, no solo de demostrar que la metodología propuesta es independiente del algoritmo en cuestión, sino de elegir uno que sea preferible a los demás, para resolver este problema, en función de varios criterios.

En la sección 5.2 se introducen de forma general los citados algoritmos y se ilustran sus diferencias con respecto a otros algoritmos mediante un ejemplo: la búsqueda de una raíz de una función real. Además, en esta sección se presentan y clasifican los cinco algoritmos de optimización metaheurística presentados en las secciones 5.3 a 5.7. Estos cinco algoritmos tienen en común el hecho de estar inspirados en fenómenos presentes en la naturaleza: bien en el comportamiento voluntario de algunos seres vivos como en su proceso evolutivo o bien en el comportamiento de un sistema físico.

En las secciones 5.3 a 5.7 se presentan los algoritmos individualmente, describiendo su modo de funcionamiento y proponiendo parámetros de operación para todos ellos.

Finalmente, en la sección 5.8 se realiza una comparativa del rendimiento de los

cinco algoritmos presentados atendiendo a tres criterios diferentes: en el apartado 5.8.1 se realiza una prueba de convergencia, en el 5.8.2 se realiza una prueba de precisión y, finalmente, en el apartado 5.8.3 se realiza una prueba de resolución.

Para completar el capítulo, se recogen las conclusiones en la sección 5.9.

5.2. Optimización metaheurística

Se conoce como “algoritmo de optimización” a aquel algoritmo que busca el valor de la variable independiente que resulta en el máximo o mínimo absoluto de una función en un dominio. En términos más generales, un algoritmo de optimización elige el elemento de un conjunto que mejor cumple ciertas características, siendo la función objetivo la función real que mide la adecuación de ese elemento a las citadas características.

Como un subconjunto de los algoritmos de optimización, los algoritmos *heurísticos* son aquellos algoritmos de optimización que sacrifican alguna característica de la solución para cumplir con otro requisito: habitualmente, el coste computacional. Así, la solución de un algoritmo heurístico puede no ser óptima en varios sentidos: en primer lugar, puede que la solución entregada cumpla *suficientemente bien* con las características deseadas sin ser óptima, es decir, sin ser la solución que mejor las cumple. En segundo lugar puede ser que la solución no sea completa, es decir, que no se entregan todas las soluciones que cumplan el criterio de optimización (aunque en el caso de estudio, la solución sea única). En tercer lugar, puede ser que el algoritmo entregue, con una cierta probabilidad, una solución que no es siquiera cercana a la solución buscada. Lógicamente, todas estas desventajas deben ser compensadas por otras características que hagan deseable el algoritmo. La contrapartida habitual es la reducción del coste computacional respecto a otros algoritmos, que se traduce en que la solución se entrega en un tiempo significativamente menor.

Como subconjuntos de los algoritmos de optimización heurísticos, los algoritmos *metaheurísticos* son aquellos algoritmos heurísticos que no utilizan ninguna característica de la función que desean optimizar, a excepción, claro está, de los propios valores de la función para elementos propuestos por el propio algoritmo. En otras palabras, un algoritmo metaheurístico propone una serie de puntos de la variable independiente y utiliza el valor de la función de ajuste evaluada en esos puntos para proponer nuevos puntos. Estos algoritmos almacenan una solución y tratan de mejorarla mediante nuevas evaluaciones de la función de ajuste, de modo que si una solución candidata

es mejor que la solución almacenada, se almacena esta solución candidata. Así, el funcionamiento de un algoritmo metaheurístico está determinado por el modo en que se eligen nuevas soluciones candidatas a partir de los valores conocidos de la función de ajuste para valores conocidos de la variable independiente.

La gran mayoría de los algoritmos de optimización metaheurísticos son, al mismo tiempo, *algoritmos estocásticos*, es decir, son algoritmos que hacen uso de variables aleatorias durante su ejecución. Como consecuencia de esto, el resultado de un algoritmo estocástico no es determinista, pudiéndose obtener distintos resultados tras aplicar varias veces el mismo algoritmo al mismo problema.

Es posible ilustrar estos conceptos con algunos ejemplos sencillos en los que se busca la raíz de una función:

- Si se desea obtener las raíces reales de una función polinómica real de grado dos (suponiendo que existan) con la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, es posible obtenerlas de forma analítica y con total precisión mediante el uso de la conocida fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. La computación de esta fórmula se ejecuta en un número finito de pasos y la solución es exacta. Con esto se puede deducir que este método de optimización no es heurístico, ya que la solución se obtiene de forma exacta en tiempo finito.
- El método de Newton-Raphson para la obtención de la raíz de una función continua y con derivada continua de una variable es un algoritmo de optimización heurístico no metaheurístico. La función de ajuste es el valor absoluto de la función y el procedimiento hace uso de la derivada de la función cuya raíz se desea obtener. Es posible obtener una raíz con precisión arbitraria ejecutando un número arbitrariamente alto de pasos, pero en tiempo finito la precisión del método está limitada por el comportamiento de la función y el número de pasos dados. Dado que la solución debe ser entregada en tiempo finito, no hay garantía de que ésta sea exacta. Además, el método de Newton-Raphson no es estocástico, ya que no hace uso de ninguna variable aleatoria y no es metaheurístico, porque utiliza el valor de la derivada de la función.
- Un algoritmo metaheurístico y estocástico para obtener una raíz de una función continua de una variable consiste en elegir aleatoriamente puntos en la variable independiente hasta que, para dos valores concretos, el valor de la función tenga

distinto signo. A continuación, en el intervalo delimitado por esos dos valores se elige un punto al azar y se define un nuevo intervalo limitado por este nuevo punto y el punto, de los dos anteriores, con signo contrario a éste. De esta forma, en todo momento existe un intervalo, cada vez más pequeño, que contiene la raíz buscada. En tiempo infinito, es posible obtener una solución con cualquier precisión, pero en tiempo finito esta precisión está limitada. Evidentemente, puede darse el caso de que, en algún momento, se obtenga un punto para el que la función valga cero exactamente. En tal circunstancia, el algoritmo habrá finalizado obteniendo una solución exacta, pero en ningún caso hay garantía de que esto ocurra. Es importante notar que en ningún caso se hace uso de ningún conocimiento de la función, a excepción de los valores que resultan de evaluarla. También se ha de tener en cuenta que para este algoritmo los valores de la función de ajuste son desconocidos: la función de ajuste se puede definir como la distancia desde la raíz buscada a cualquiera de los extremos del intervalo considerado. Así, aunque esa distancia sea desconocida, se verifica que la función de ajuste solamente puede decrecer.

Estos tres ejemplos ilustran cómo, a medida que crece la complejidad del problema a resolver y se reducen las hipótesis de trabajo (polinomio de grado dos, función continua con derivada continua, función computable), es necesario abordar el problema con herramientas diferentes que arrojan resultados diferentes. En el primer caso, se hace uso de la propia definición de la función y siempre se obtiene una solución exacta. En el segundo caso, se evalúa la función y se evalúa su derivada y la solución puede no ser exacta, pero es determinista. En el tercer caso, solamente se evalúa la función y la solución muy probablemente no sea exacta y con toda seguridad, no será determinista.

En esta tesis se ha optado por utilizar algoritmos metaheurísticos. Así, la forma en que la función de ajuste sea construida resulta irrelevante para el algoritmo de optimización siempre y cuando ésta pueda ser evaluada en cualquier punto de su dominio, es decir, el único requisito es que la función de ajuste sea computable.

A continuación, se presentan cinco algoritmos metaheurísticos, todos ellos inspirados en fenómenos presentes, de una u otra forma, en la naturaleza. Los cuatro primeros se basan en el comportamiento de seres vivos, aunque de forma diferente. Los dos primeros algoritmos, Optimización por Enjambre de Partículas y Optimización por Colonia de Hormigas se basan en la Inteligencia de Enjambres (o *Swarm Intelligence*) [155, 156],

o agentes individuales que realizan tareas sencillas e iguales y que combinadas entre sí permiten al algoritmo obtener la solución. En estos algoritmos, cada agente comparte información con los demás en aras de encontrar la solución buscada y reciben por tanto el nombre de Algoritmos Colaborativos. Los dos siguientes algoritmos, el Algoritmo Genético y la Evolución Diferencial se basan, como se deduce de su nombre, en el proceso de evolución de un conjunto de individuos, incluyéndose la generación de nuevos individuos a través de individuos ya existentes así como la mutación aleatoria. Son dos de los conocidos como Algoritmos Evolutivos (o *Evolutionary Algorithms*) [157]. En el algoritmo genético, los agentes compiten por mantenerse con vida a lo largo de generaciones, lo que hace que este algoritmo se clasifique como puramente competitivo, mientras que en la Evolución Diferencial, los agentes luchan entre sí pero también comparten información, con lo que el algoritmo puede ser clasificado como híbrido colaborativo-competitivo. Finalmente se presenta un último algoritmo, el *Simulated Annealing* (Recocido Simulado o Enfriamiento Simulado) que se basa en un comportamiento presente en la naturaleza pero no tiene como base ningún ser vivo, sino el proceso por el cual una red cristalina metálica tiende a estados de mínima energía cuando se eleva su temperatura y se hace descender lentamente.

El conjunto de algoritmos metaheurísticos es muy amplio y de cada algoritmo surgen continuamente nuevas modificaciones. Se han elegido estos cinco algoritmos, además de porque tienen el punto común de estar inspirados en comportamientos presentes en la naturaleza, porque son representativos de la diversidad de algoritmos en ese campo. Uno de ellos se basa en el comportamiento de sistemas físicos y con los otros cuatro se cubren dos grandes grupos de los algoritmos conocidos como *bio-inspirados*: los de inteligencia de enjambres y los evolutivos. Para cada uno de estos enfoques, se estudian dos algoritmos distintos.

A lo largo de los dos capítulos anteriores, se ha presentado una serie de simulaciones, para las que ha sido necesario hacer uso de un algoritmo de optimización metaheurística. En todos los casos presentados hasta este punto, ese algoritmo ha sido la Optimización por Enjambre de Partículas.

5.3. Optimización por Enjambre de Partículas

El algoritmo metaheurístico del que se ha hecho uso hasta ahora es PSO, presentado por Kennedy y Eberhart en 1997 [116]. Éste es un algoritmo de los que se conocen

como *bio-inspirados* o *inspirados en la naturaleza* en el sentido de que su modo de funcionamiento está basado en algún comportamiento propio de los seres vivos. Particularmente, PSO se basa en el modo en que un grupo de abejas busca el punto con mayor concentración de flores en un campo.

El paralelismo entre el fenómeno biológico y el algoritmo es el siguiente: la concentración de flores hace el papel de función objetivo (aunque se busque su minimización, en lugar de su maximización). El campo de flores corresponde con el espacio de solución, es decir, el conjunto donde se debe buscar la solución (con estructura de subconjunto conexo de un espacio vectorial de dimensión finita arbitraria). El hecho de que cada abeja se desplace a un punto del campo e informe al enjambre de la concentración de flores en ese punto tiene su equivalente en los *agentes* o *partículas*, que recorren el espacio de solución y evalúan la función de ajuste en esos puntos, informando al resto de partículas del valor observado.

En detalle, el funcionamiento del algoritmo es el siguiente: antes de la primera iteración, a cada agente, de un total de N_{par} , se le asignan unas posiciones y velocidades aleatorias dentro del espacio de solución. Estas posiciones y velocidades son vectores con la dimensión del espacio de solución. Cada agente, dispone de una *memoria particular* y una *memoria general* donde se almacenan dos puntos del espacio de solución: la mejor posición que él ha visitado y la mejor posición visitada por cualquier agente del enjambre. Estos dos puntos del espacio de solución funcionan como *atractores* en el sentido de que, durante las iteraciones del algoritmo, las partículas tienden a moverse hacia esos puntos, aunque de una forma estocástica.

En cada iteración, se actualiza la velocidad de todos los agentes. Así, en la iteración $(n + 1)$ -ésima, la velocidad del agente k -ésimo, según la dimensión i -ésima, se actualiza según la ecuación (5.1), donde $w_p(n + 1)$ es la masa inercial de las partículas, un parámetro del algoritmo, C_p y C_g son también parámetros del algoritmo, $rand()$ son variables aleatorias continuas, unidimensionales, independientes y uniformes entre 0 y 1, $x_{k,i}(best)$ es el valor de la memoria particular del agente k -ésimo en la dimensión i , es decir, el punto de la dimensión i donde el agente k ha encontrado el mejor valor de la función de ajuste y, finalmente, $x_i(best)$ es el valor de la memoria general en la dimensión i , es decir, la coordenada i del punto del espacio de solución con mejor

función de ajuste que ha encontrado todo el enjambre.

$$v_{k,i}(n+1) = w_p(n+1)v_{k,i}(n) + C_p \text{rand}() (x_{k,i}(\text{best}) - x_{k,i}(n)) + C_g \text{rand}() (x_i(\text{best}) - x_{k,i}(n)) \quad (5.1)$$

El valor absoluto de esta velocidad se limita, para cada dimensión, mediante un umbral fijo. Tras este paso, se actualizan las posiciones de las partículas según la ecuación (5.2), donde Δt es el incremento temporal. Algunos autores omiten el incremento temporal asumiendo que vale $\Delta t = 1$. Con ese valor de Δt el umbral para la velocidad máxima en la dimensión i se fija en el propio tamaño del espacio de búsqueda según esa dimensión [158].

$$x_{k,i}(n+1) = x_{k,i}(n) + v_{k,i}(n+1)\Delta t \quad (5.2)$$

Con esto, es posible deducir que en algunos casos, las partículas pueden salir del espacio de solución. Para solucionar este problema existen tres propuestas: paredes absorbentes, paredes reflectantes y paredes invisibles. Al utilizar paredes absorbentes, si una partícula tiene como su nueva posición un punto fuera del espacio de solución porque rebasa los límites del espacio de búsqueda según la dimensión i , entonces su posición según esa dimensión se hace coincidir con el límite del espacio de solución y su velocidad, también según esa dimensión, se iguala a cero. En las mismas circunstancias, pero utilizando paredes reflectantes, la nueva posición de la partícula según la dimensión i será la simétrica respecto al límite del espacio de solución y su velocidad, según esa dimensión, será la misma pero de signo contrario. Por último, si se utilizan paredes invisibles, se permite a las partículas viajar por puntos externos al espacio de solución, pero en ellos no se evalúa la función de ajuste (ya que el punto no pertenece al dominio), sino que se le asigna un valor infinito de modo que un punto externo al espacio de solución nunca pueda ocupar los valores de memoria particular ni general.

Los parámetros del algoritmo utilizados en las simulaciones de los capítulos 3 y 4 se eligen a partir de valores propuestos en la literatura [128]. El número de partículas se fija en $N_{par} = 30$ y la masa inercial, que representa cuánto porcentaje de la actual velocidad de una partícula se conserva en la siguiente iteración se hace variar de forma lineal desde $w_p = 0.9$ en la primera iteración hasta $w_p = 0.4$ en la última iteración. De este modo, las gráficas en las que algún valor se representa como función del número de iteraciones corresponden con el número de iteraciones hasta ese punto sobre el total, y no con una

ejecución de PSO con ese número máximo de iteraciones. Es decir, que si se presenta un valor para un número de iteraciones menor que el valor final, en ese punto la masa inercial de las partículas no es $w_p = 0.4$, sino el que corresponda, proporcionalmente, a ese número de iteración. Los valores de las constantes multiplicativas C_p y C_g , modifican la forma en que se mueve cada agente. Valores altos de C_p hacen que cada partícula tienda a visitar con mayor probabilidad mejor el punto del espacio de solución que ella ha encontrado, mientras que valores altos de C_g hacen que las partículas se desplacen con mayor probabilidad al mejor punto observado por todo el enjambre. Se recomienda utilizar valores iguales para estas dos constantes, a las que algunos autores asignan los valores $C_p = C_g = 2$, otros $C_p = C_g = 1.49$, etc. Dado que la influencia de estos parámetros no es crítica siempre que su valor se mantenga semejante y dentro de ciertos márgenes, las simulaciones presentadas en esta tesis utilizan $C_p = C_g = 1$ en todos los casos.

Estos valores han proporcionado buenos resultados y han sido utilizados a lo largo de todas las simulaciones presentadas a lo largo de los capítulos 3 y 4. A pesar de que estos valores se consideran buenos, se realiza un conjunto de simulaciones para estudiar si el número de partículas N_{par} tiene una importancia significativa sobre el rendimiento del algoritmo. Al mismo tiempo, se estudia si una transformación del espacio de solución para el problema de la estimación de dos direcciones de llegada y la frecuencia puede redundar en una mejora de las prestaciones.

Así, se ejecuta un bloque de simulaciones en el que el número de partículas N_{par} del algoritmo sigue distintos *patrones de partículas*, es decir, que el número de partículas en el algoritmo es diferente e incluso puede ser variable a lo largo de las iteraciones del algoritmo. En ningún caso se crean nuevos agentes a lo largo de una simulación, así pues, en los casos en los que el número de partículas es variable, los agentes que son eliminados son aquellos cuyo valor de memoria particular es el peor entre los agentes existentes.

Se establecen 7 patrones de partículas diferentes, definidos por tramos según la tabla 5.1 y mostrados en la figura 5.1.

Las cinco geometrías de array utilizadas en este caso son las siguientes: el primero es un array tri-logarítmico de $L = 60$ elementos (*LOG60*) con $L_x = 3$, $L_y = 4$ y $L_z = 5$ elementos a lo largo de cada dimensión y aperturas $\aleph_x = 1.5\lambda$, $\aleph_y = 2\lambda$, $\aleph_z = 2.5\lambda$ respectivamente. El segundo es un array semiesférico de $L = 43$ elementos (*SPH43*), donde para cada valor de $\theta_i \in \{0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ\}$ sobre la semiesfera, se sitúa un

Tabla 5.1: *Diferentes patrones de partículas*

Número de Patrón	Desglose por Tramos	
	Número de partículas	Número de iteraciones
Patrón 1	$N_{par} = 30$	en $N_{iter} \in [1, 400]$
Patrón 2	$N_{par} = 90$	en $N_{iter} \in [1, 59]$
	$N_{par} = \{90 \rightarrow 30\}$	en $N_{iter} \in [60, 120]$
	$N_{par} = 30$	en $N_{iter} \in [121, 221]$
Patrón 3	$N_{par} = 90$	en $N_{iter} \in [1, 59]$
	$N_{par} = \{90 \rightarrow 39\}$	en $N_{iter} \in [60, 162]$
Patrón 4	$N_{par} = 90$	en $N_{iter} \in [1, 133]$
Patrón 5	$N_{par} = 240$	en $N_{iter} \in [1, 50]$
Patrón 6	$N_{par} = 240$	en $N_{iter} \in [1, 25]$
	$N_{par} = 60$	en $N_{iter} \in [26, 75]$
	$N_{par} = 30$	en $N_{iter} \in [76, 175]$
Patrón 7	$N_{par} = 240$	en $N_{iter} \in [1, 25]$
	$N_{par} = 30$	en $N_{iter} \in [26, 225]$

cierto número $L_i \in \{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ de elementos equiespaciados. El radio de la semiesfera se toma $r = \lambda$. El tercero es un array formado por planos de $L = 91$ elementos ($PL91$) donde en cada plano coordenado hay un array plano de 6×6 elementos, siendo comunes los elementos en los ejes coordenados y con una separación entre elementos adyacentes de 0.5λ . El cuarto array es un array tri-logarítmico de $L = 210$ elementos ($LOG210$) con $L_x = 5$, $L_y = 6$ y $L_z = 7$ elementos a lo largo de cada dimensión y aperturas $\aleph_x = 2.5\lambda$, $\aleph_y = 3\lambda$, $\aleph_z = 3.5\lambda$ respectivamente. Finalmente, el quinto array es un array tipo $2L$, con sus elementos sobre los ejes coordenados, de $L = 37$ elementos ($2L37$), es decir, 13 elementos a lo largo de cada eje coordenado, siendo común a todos ellos el elemento del origen de coordenadas.

Para estos patrones de partícula, y las cinco geometrías de array diferentes, se hacen incidir $R = 100$ conjuntos de dos señales cuya dirección de llegada en θ y ϕ es aleatoria y uniforme en todo el rango ($\theta_i \in [0^\circ, 180^\circ]$; $\phi_i \in [0^\circ, 360^\circ]$) y su frecuencia es también aleatoria en $f \in [280, 320]$ MHz. Para dos valores distintos de la SNR (20dB y 30dB), se

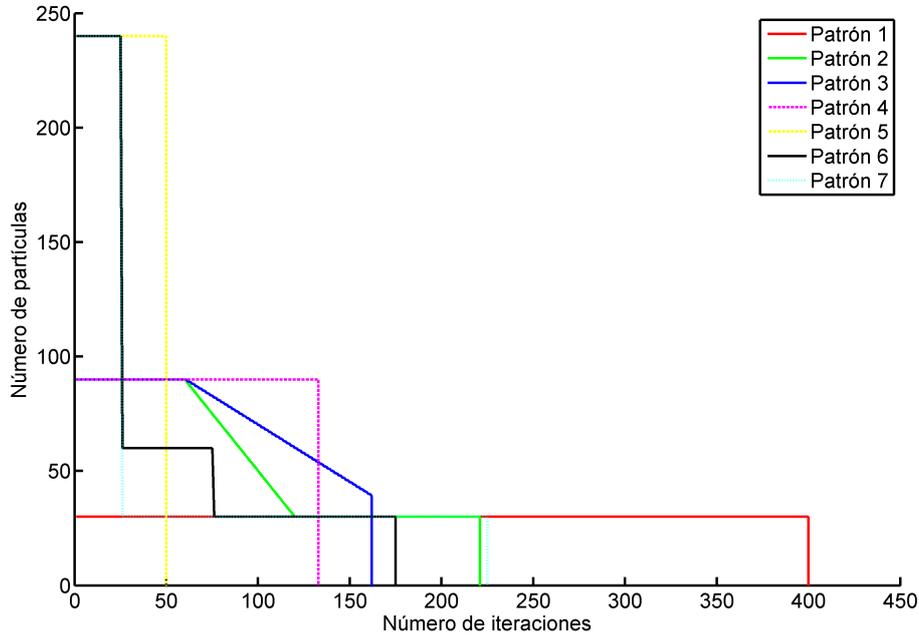


Figura 5.1: Representación gráfica del número de partículas en cada iteración de PSO.

realiza un análisis de convergencia en los 6 parámetros, tomando tres umbrales sucesivos de convergencia para cada uno de los parámetros, según se muestran, para la señal i -ésima, en las expresiones (5.3) a (5.5).

$$\varepsilon_1(i) \equiv \{\varepsilon_\theta(i) = 1^\circ; \varepsilon_\phi(i) = 1^\circ; \varepsilon_f(i) = 1 \text{ MHz}\} \quad (5.3)$$

$$\varepsilon_2(i) \equiv \{\varepsilon_\theta(i) = 3^\circ; \varepsilon_\phi(i) = 3^\circ; \varepsilon_f(i) = 3 \text{ MHz}\} \quad (5.4)$$

$$\varepsilon_3(i) \equiv \{\varepsilon_\theta(i) = 5^\circ; \varepsilon_\phi(i) = 5^\circ; \varepsilon_f(i) = 5 \text{ MHz}\} \quad (5.5)$$

En estas simulaciones no se consideran los efectos de los acoplos entre elementos y además, todas ellas se ejecutan dos veces. La primera con el espacio de búsqueda natural, cuyas 6 dimensiones corresponden directamente con los 6 parámetros a buscar $(\theta_1, \phi_1, f_1, \theta_2, \phi_2, f_2)$ y paredes invisibles. En las tablas, este espacio de solución se indica con la etiqueta “*Nat.*”. La segunda ejecución se utiliza el resultado de aplicar una transformación al espacio de solución, de modo que las 6 dimensiones de cada partícula no sean esas, sino que a cada señal le corresponda un subespacio de dimensión tres generado por $\{x_i, y_i, z_i\}$, que surgen de transformar el subespacio generado por $\{\theta_i, \phi_i, f_i\}$ mediante la ecuación (5.6), que corresponde con el cambio de coordenadas esféricas a coordenadas cartesianas. En este caso, el espacio de búsqueda sigue siendo

conexo, aunque en lugar de ser un hiperparalelepípedo de dimensión 6, sería el producto cartesiano de dos esferas con centro hueco. Para este nuevo espacio de solución, que se indica en las tablas con la etiqueta “*Modif.*” también se utilizan paredes invisibles.

$$\forall i : 1 \leq i \leq M : \begin{cases} x_i = f_i \sin(\theta_i) \cos(\phi_i) \\ y_i = f_i \sin(\theta_i) \sin(\phi_i) \\ z_i = f_i \cos(\theta_i) \end{cases} \text{ con } \begin{cases} \theta_i \in [0^\circ, 180^\circ] \\ \phi_i \in [0^\circ, 360^\circ] \\ f_i \in [280 \text{ MHz}, 320 \text{ MHz}] \end{cases} \quad (5.6)$$

Se debe tener en cuenta que pese a que los patrones de partículas son diferentes, el número máximo total de evaluaciones de la función de ajuste es el mismo para todos ellos ($N_{eval-lim} = 12.000$), con la excepción de pequeñas variaciones debidas al número concreto de partículas ($N_{eval-lim} = 11.979$ y $N_{eval-lim} = 11.970$ para los patrones 3 y 4, respectivamente).

Para una SNR de 20dB, los resultados se muestran para un umbral de un grado en las direcciones de llegada y un megahercio en frecuencia, en la tabla 5.2, para tres grados y tres megahercios en la tabla 5.3 y para cinco grados y cinco megahercios en la tabla 5.4. Para una SNR de 30dB, los resultados se muestran, con los mismos umbrales, en las tablas 5.5, 5.6 y 5.7, respectivamente.

De los resultados mostrados en las tablas se extraen varias conclusiones. En primer lugar, queda claro que la modificación del espacio de solución no es beneficiosa, al observarse que en la gran mayoría de los casos, los resultados de convergencia son mejores para el espacio de solución natural que para el espacio de solución modificado. En segundo término, también se observa que la tasa de convergencia es, por lo general, ligeramente mayor con el patrón de partículas número 6, que en las primeras iteraciones tiene un número muy elevado de agentes ($N_{par} = 240$), pasa a una cifra considerablemente inferior ($N_{par} = 60$) y termina con el mínimo número ($N_{par} = 30$). De esta forma, durante las primeras iteraciones, que corresponden con el periodo de diversificación, el número de agentes es muy alto, lo que permite recorrer las 6 dimensiones del espacio de solución, mientras que al final del proceso de optimización, durante el periodo de intensificación y cuando se espera haber alcanzado un entorno del mínimo absoluto, solo unas pocas partículas bastan para obtener una solución suficientemente precisa. Dentro de lo esperable, se observa que la convergencia es mayor con 30dB de SNR que con 20dB y además se observa un comportamiento reseñable: la variación de la conver-

Tabla 5.2: Tasa de Convergencia (porcentaje). SNR = 20 dB. Umbral: $\varepsilon_\theta(i) = \varepsilon_\phi(i) = 1^\circ$; $\varepsilon_f(i) = 1$ MHz

Array	Esp. Sol.	Pat. 1	Pat. 2	Pat. 3	Pat. 4	Pat. 5	Pat. 6	Pat. 7
LOG60	Nat.	43	56	57	51	49	56	50
	Modif.	23	29	26	35	38	36	33
SPH43	Nat.	13	12	13	13	11	13	12
	Modif.	5	10	5	10	9	11	8
PL91	Nat.	25	29	30	28	28	29	28
	Modif.	25	30	27	27	28	28	28
LOG210	Nat.	69	78	81	70	65	82	74
	Modif.	31	37	39	34	30	39	42
2L37	Nat.	21	23	23	24	27	23	24
	Modif.	1	16	15	13	16	17	18

Tabla 5.3: Tasa de Convergencia (porcentaje). SNR = 20 dB. Umbral: $\varepsilon_\theta(i) = \varepsilon_\phi(i) = 3^\circ$; $\varepsilon_f(i) = 3$ MHz

Array	Esp. Sol.	Pat. 1	Pat. 2	Pat. 3	Pat. 4	Pat. 5	Pat. 6	Pat. 7
LOG60	Nat.	70	87	83	81	78	83	80
	Modif.	33	51	44	54	62	56	52
SPH43	Nat.	65	66	67	68	63	69	72
	Modif.	37	52	51	53	50	59	56
PL91	Nat.	78	81	82	85	80	83	78
	Modif.	65	81	82	79	81	82	83
LOG210	Nat.	74	83	88	75	73	88	79
	Modif.	38	40	44	40	35	44	46
2L37	Nat.	57	61	71	67	61	73	63
	Modif.	41	48	49	46	42	53	52

5.3. Optimización por Enjambre de Partículas

Tabla 5.4: Tasa de Convergencia (porcentaje). SNR = 20 dB. Umbral: $\varepsilon_\theta(i) = \varepsilon_\phi(i) = 5^\circ$; $\varepsilon_f(i) = 5$ MHz

Array	Esp. Sol.	Pat. 1	Pat. 2	Pat. 3	Pat. 4	Pat. 5	Pat. 6	Pat. 7
<i>LOG60</i>	Nat.	73	90	86	84	85	86	83
	Modif.	35	53	44	57	68	59	55
<i>SPH43</i>	Nat.	84	83	84	87	81	89	91
	Modif.	45	68	62	66	66	76	73
<i>PL91</i>	Nat.	82	85	86	89	86	87	83
	Modif.	71	85	86	83	88	87	88
<i>LOG210</i>	Nat.	74	84	89	77	74	88	80
	Modif.	38	41	45	40	36	45	47
<i>2L37</i>	Nat.	58	65	71	70	62	76	66
	Modif.	44	49	50	46	46	56	55

Tabla 5.5: Tasa de Convergencia (porcentaje). SNR = 30 dB. Umbral: $\varepsilon_\theta(i) = \varepsilon_\phi(i) = 1^\circ$; $\varepsilon_f(i) = 1$ MHz

Array	Esp. Sol.	Pat. 1	Pat. 2	Pat. 3	Pat. 4	Pat. 5	Pat. 6	Pat. 7
<i>LOG60</i>	Nat.	69	80	80	79	78	86	76
	Modif.	37	51	54	54	49	63	56
<i>SPH43</i>	Nat.	67	71	72	75	76	74	78
	Modif.	44	55	54	55	59	53	61
<i>PL91</i>	Nat.	85	82	88	86	84	84	85
	Modif.	77	86	84	85	85	82	88
<i>LOG210</i>	Nat.	60	80	76	79	74	80	79
	Modif.	29	51	44	39	42	43	35
<i>2L37</i>	Nat.	58	69	62	65	60	75	65
	Modif.	31	48	53	35	36	46	48

Tabla 5.6: Tasa de Convergencia (porcentaje). SNR = 30 dB. Umbral: $\varepsilon_\theta(i) = \varepsilon_\phi(i) = 3^\circ$; $\varepsilon_f(i) = 3$ MHz

Array	Esp. Sol.	Pat. 1	Pat. 2	Pat. 3	Pat. 4	Pat. 5	Pat. 6	Pat. 7
LOG60	Nat.	73	85	85	82	84	90	79
	Modif.	40	53	57	57	56	67	60
SPH43	Nat.	82	87	91	90	93	90	94
	Modif.	52	71	69	72	72	69	76
PL91	Nat.	89	89	94	92	89	91	92
	Modif.	83	92	91	92	92	88	93
LOG210	Nat.	60	82	77	80	76	83	79
	Modif.	29	52	45	41	48	44	36
2L37	Nat.	62	73	68	71	65	80	69
	Modif.	36	50	62	39	46	47	56

Tabla 5.7: Tasa de Convergencia (porcentaje). SNR = 30 dB. Umbral: $\varepsilon_\theta(i) = \varepsilon_\phi(i) = 5^\circ$; $\varepsilon_f(i) = 5$ MHz

Array	Esp. Sol.	Pat. 1	Pat. 2	Pat. 3	Pat. 4	Pat. 5	Pat. 6	Pat. 7
LOG60	Nat.	73	85	86	82	86	91	80
	Modif.	41	54	58	58	59	68	61
SPH43	Nat.	82	87	91	90	94	90	94
	Modif.	52	71	70	72	73	70	77
PL91	Nat.	90	91	95	93	92	92	92
	Modif.	84	94	93	95	93	89	94
LOG210	Nat.	60	82	77	80	76	83	79
	Modif.	29	53	45	41	49	44	36
2L37	Nat.	63	75	68	72	67	81	71
	Modif.	40	55	66	42	53	49	57

gencia con un umbral u otro no es muy dispar, lo que supone que cuando las señales convergen para un umbral grande, también lo hacen para un umbral pequeño, es decir, que en los casos en que la simulación es convergente, la estimación de los parámetros es muy precisa.

Pese a que este patrón de partículas muestra un resultado significativamente mejor para el caso de estimación de tres parámetros por señal y $M = 2$ señales, debe tenerse en cuenta que si la dimensión del espacio de solución es menor (por incidencia de menos señales o estimación de menos parámetros), un número menor de partículas obtendrá buenos resultados.

5.4. Optimización por Colonia de Hormigas en dominios continuos

Tras estudiar PSO y realizar un análisis de su funcionamiento, se plantea la posibilidad de utilizar otro algoritmo de optimización metaheurística. En línea con el primero, basado en el comportamiento de las abejas en su búsqueda de flores, se propone utilizar $ACO_{\mathbb{R}}$ [159], una modificación de Optimización por Colonia de Hormigas o *Ant Colony Optimization* (ACO) [126], algoritmo originalmente desarrollado para optimización combinatoria o de dominios finitos y que tiene como inspiración el modo en que las colonias de hormigas buscan el camino más corto entre su hormiguero y un alimento.

Cuando una hormiga se desplaza, lo hace de forma aleatoria y con dirección equiprobable, a menos que en su camino encuentre rastros de feromonas, en cuyo caso, la hormiga tomará con mayor probabilidad aquel camino en el que el rastro de feromona sea más intenso. Al mismo tiempo, las propias hormigas liberan esa feromona durante sus desplazamientos. De este modo, si varias hormigas inician simultáneamente su periplo hacia el alimento y de vuelta al hormiguero, pasado un cierto tiempo, aquellos caminos más cortos habrán sido recorridos más veces y tendrán, por lo tanto, una cantidad de feromona mayor, haciendo que otras hormigas tomen ese camino con mayor probabilidad que los demás. Al aumentar el número de hormigas recorriendo ese camino, el rastro de feromonas crecerá haciendo que aún más hormigas elijan ese camino. En este fenómeno se puede apreciar una clara retroalimentación positiva de aquellos caminos más cortos, que son, a la postre, los únicos que las hormigas terminan recorriendo.

La Optimización por Colonia de Hormigas funciona básicamente igual y, de la misma

manera que PSO, también está basada en partículas o agentes que simulan el comportamiento de un miembro de la colonia. La aplicación de ACO al Problema del Viajante o *Traveling Salesman Problem* (TSP) [160] es inmediata: los agentes (o partículas) son distribuidos de forma aleatoria por los nodos y se establece que no pueden regresar a un nodo en el que ya hayan estado en el presente ciclo. Un ciclo debe terminar en el nodo de origen tras visitar todos los demás nodos. En cada nodo, cada partícula elige el camino a tomar con una probabilidad que es mayor cuanto mayor sea la proporción de partículas que hayan tomado ese camino. Tras un cierto tiempo, se observa que todas las partículas recorren exactamente el mismo camino, independientemente de cual fuera su punto de origen. Indudablemente, si se considera el TSP simétrico, algunas partículas recorrerán ese camino óptimo en un sentido y otras en otro, sin que ello tenga ninguna consecuencia.

El algoritmo en cuestión necesita almacenar, para cada nodo, una tabla que asigne una probabilidad a cada posible destino desde ese nodo, es decir, una función de probabilidad. Las partículas se desplazarán haciendo uso de esa tabla de probabilidades que se irán actualizando de forma dinámica, durante la ejecución del algoritmo, hasta que en cada nodo, uno de los caminos aglutine toda la probabilidad.

La modificación de este algoritmo para el caso de optimización en dominios continuos es inmediata. Cada nodo del problema discreto se transforma en una dimensión del problema continuo y la función de probabilidad (discreta) se transforma en una función de densidad de probabilidad. Con esto, ya no es necesario hablar de agentes que se mueven por los nodos, ya que la elección de un valor para cada dimensión proporciona la información suficiente para evaluar la función de ajuste. En el caso discreto del TSP, la función de ajuste era introducida en el modelo aumentando la probabilidad de aquellos caminos más elegidos, y por lo tanto, correspondientes a ciclos más cortos junto con la restricción de que cada agente debe completar un ciclo antes de repetir un nodo.

En este punto, cabe recordar que un algoritmo de optimización metaheurística se puede resumir en el método que se sigue para elegir nuevas soluciones candidatas en las que se evaluará la función de ajuste. Con este planteamiento, la implementación la Optimización por Colonia de Hormigas para Dominios Continuos (a partir de ahora, $ACO_{\mathbb{R}}$) se realiza como sigue: se construye un *archivo de soluciones*, como el mostrado en la tabla 5.8, y que está compuesto por una tabla con k filas y n columnas y dos vectores de k elementos cada uno, donde k es un parámetro del algoritmo y n es la

Tabla 5.8: El archivo de soluciones de $ACO_{\mathbb{R}}$

s_1	s_1^1	s_1^2	...	s_1^i	...	s_1^n	$f(s_1)$	w_1
s_2	s_2^1	s_2^2	...	s_2^i	...	s_2^n	$f(s_2)$	w_2
	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
s_l	s_l^1	s_l^2	...	s_l^i	...	s_l^n	$f(s_l)$	w_l
	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
s_k	s_k^1	s_k^2	...	s_k^i	...	s_k^n	$f(s_k)$	w_k
	G^1	G^2	...	G^i	...	G^n		

dimensión espacio de solución. En cada iteración, la fila l -ésima de la tabla almacena las n componentes de la l -ésima mejor solución obtenida hasta ese instante, es decir, el l -ésimo valor más pequeño (el l -ésimo mayor valor en caso de maximización). El primer vector almacena en su posición l -ésima el valor de la función de ajuste correspondiente a esa solución y el segundo vector, en esa posición, almacena el *peso relativo* de esa solución. Se deduce, pues, que el vector que almacena los valores de la función de ajuste está ordenado de menor a mayor. En caso de que el algoritmo se utilizara para maximizar en lugar de para minimizar la función de ajuste, el vector estaría ordenado de mayor a menor.

Así, antes de la primera iteración del algoritmo, es necesario completar la tabla del archivo de soluciones con k puntos del espacio de solución elegidos aleatoriamente que ocupan una u otra fila de la tabla en función de lo pequeño que sea el valor de la función de ajuste en ese punto. Paralelamente, se completa también el vector de valores de la

función de ajuste y se calculan los pesos relativos de cada solución mediante (5.7), donde k es el ya conocido tamaño del archivo de solución y q es un parámetro del algoritmo. El vector de pesos también es un vector ordenado, pero de mayor a menor en todo caso, dado que a la primera solución, que es la mejor de las soluciones conocidas, se le otorga el peso relativo más alto y a la última, que es la peor de las soluciones almacenadas se le otorga el peso más bajo.

$$\omega_l = \frac{1}{qk\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(l-1)^2}{2q^2k^2}} \quad (5.7)$$

Una vez que es conocido el funcionamiento y contenido del archivo de soluciones, ya es posible detallar el procedimiento completo de una iteración. Una iteración de $\text{ACO}_{\mathbb{R}}$ consiste en calcular un nuevo punto del espacio de solución, calcular el valor de la función de ajuste en ese punto y, si procede, añadir esa solución al archivo de soluciones en el lugar que le corresponda, eliminando, por tanto, la que hasta entonces ocupaba el último lugar.

El cálculo de una solución propuesta a partir del archivo de soluciones se realiza, para cada dimensión, mediante la realización una variable aleatoria cuyos parámetros solamente dependen de los datos almacenados correspondientes a esa dimensión. La variable aleatoria correspondiente a la dimensión i -ésima, $G^i(x)$, tiene la función de densidad de probabilidad de un *kernel gaussiano*, es decir, la suma ponderada de varias funciones gaussianas $g_l^i(x)$, cada una de ellas con su media, su desviación típica y su peso relativo. Así, el kernel gaussiano para la dimensión i -ésima se calcula según (5.8), donde μ_l^i es el l -ésimo elemento de $\boldsymbol{\mu}^i$, vector de medias y σ_l^i es el l -ésimo elemento de $\boldsymbol{\sigma}^i$, vector de desviaciones típicas. Estos dos vectores tienen tamaño k , al igual que el vector de pesos $\boldsymbol{\omega}$.

$$G^i(x) = \sum_{l=1}^k \omega_l g_l^i(x) = \sum_{l=1}^k \omega_l \frac{1}{\sigma_l^i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_l^i)^2}{2\sigma_l^i{}^2}} \quad (5.8)$$

Los valores del vector de medias $\boldsymbol{\mu}^i$ corresponden con los valores almacenados en el archivo de soluciones, de modo que las crestas del kernel gaussiano se produzcan, precisamente, en los valores de las soluciones que se han encontrado. De esta forma, al tener las primeras soluciones más peso, su cresta será mayor, haciendo que las nuevas soluciones tiendan a salir, precisamente, en un entorno de las mejores soluciones

conocidas.

$$\boldsymbol{\mu}^i = \{\mu_1^i, \dots, \mu_l^i, \dots, \mu_k^i\} = \{s_1^i, \dots, s_l^i, \dots, s_k^i\} \quad (5.9)$$

El elemento l -ésimo del vector de desviaciones típicas $\boldsymbol{\sigma}^i$ se calcula según la ecuación (5.10). Esta ecuación asigna la desviación típica l -ésima, un valor igual a la media de las distancia entre la solución l -ésima y las demás soluciones. De esta forma, cuando las componentes de la dimensión i -ésima del archivo de soluciones estén muy próximas entre sí, la desviación típica será pequeña y cuando estén muy separadas, será grande. El símbolo $\xi > 0$ es un parámetro del algoritmo y es igual para todas las dimensiones. Su significado se verá más adelante, junto al de k y q .

$$\sigma_l^i = \xi \sum_{e=1}^k \frac{|s_e^i - s_l^i|}{k-1} \quad (5.10)$$

Con todo esto, ya es posible calcular nuevas soluciones propuestas en las que se evaluará la función de ajuste. No obstante, el procedimiento real que se ejecuta para calcular las soluciones propuestas no es éste, sino uno equivalente en dos etapas: en la primera etapa se elige cual de las gaussianas que forma el kernel será muestreada. La gaussiana l -ésima se elegirá con probabilidad p_l , calculada a partir de los pesos relativos mediante la ecuación (5.11), mediante un generador de números aleatorios. Una vez seleccionada una gaussiana, en una segunda etapa se calcula su desviación típica mediante (5.10), de modo que la carga computacional es menor ya que no es necesario calcular k desviaciones típicas. Conocida la media y la desviación típica que corresponden a esa gaussiana en particular, ya solo queda utilizar de nuevo un generador de números aleatorios para, mediante el método de Box-Muller [161] o el algoritmo Ziggurat [162], por ejemplo, obtener el valor de la realización de la gaussiana.

$$p_l = \frac{\omega_l}{\sum_{r=1}^k \omega_r} \quad (5.11)$$

Debido a las propiedades de las distribuciones normales, este procedimiento en dos etapas con muestreo en una única distribución normal y el anterior, basado en un kernel de k gaussianas, son equivalentes.

El funcionamiento de este algoritmo queda determinado por tres parámetros: el tamaño del archivo de soluciones k , el valor q y el valor ξ . El valor de k debe ser un número natural mayor o igual que el número de dimensiones del problema. El valor de

k está ligado con el de q en el sentido de que funcionan de forma semejante, ya que en la fórmula (5.7), de los pesos relativos, aparecen como un producto. Cuando el producto kq es pequeño, las primeras entradas del archivo de soluciones ganan peso relativo y cuando el producto kq es grande, el peso relativo de todas las soluciones se equilibra haciendo que sus probabilidades sean más uniformes. La influencia del parámetro ξ en el algoritmo es la siguiente: dado que es un factor multiplicativo de la desviación típica de las gaussianas utilizadas para el muestreo, valores pequeños de ξ hacen que las soluciones candidatas sean muy cercanas a los valores ya propuestos, mientras que valores grandes de ξ hacen que el algoritmo sea más propenso a proponer valores en zonas del espacio de solución que aún no han sido visitadas.

Podría decirse que tanto el producto kq como el parámetro ξ regulan el algoritmo en el sentido de diversificación o intensificación, con la diferencia de que un valor elevado del producto kq diversifica hacia valores que ya están en el archivo de soluciones mientras que un valor elevado del parámetro ξ diversifica hacia puntos cualesquiera del espacio de solución.

Para estudiar la influencia de estos parámetros sobre el rendimiento del algoritmo se ejecuta un conjunto de simulaciones en el que cada uno de estos parámetros barre un cierto conjunto de valores.

Así, se toman $R = 100$ conjuntos de $M = 2$ señales cuya dirección de llegada es aleatoria uniforme en el intervalo $[10^\circ, 170^\circ]$ con una separación mínima de $\Delta\theta = 10^\circ$. La fase de las señales se elige también de forma aleatoria y su amplitud se fija a uno. El array utilizado es un array lineal logarítmico de $L = 7$ elementos y una apertura $\aleph = 3\lambda$.

Los parámetros k y ξ barren los siguientes rangos de forma lineal $k \in \{5, 10, 15, \dots, 50\}$, $\xi \in \{0.4, 0.7, 1, 1.3, 1.6, 1.9\}$ y para el valor q , se realiza un barrido logarítmico desde 10^{-2} hasta 10 en 10 pasos. Se muestran resultados de convergencia con un umbral fijo de 1° en cada señal con una SNR de 30dB. El número máximo de iteraciones, y por tanto, de evaluaciones de la función de ajuste se fija en $N_{eval-lim} = 2000$.

Al observar las tablas 5.9 a 5.14, lo primero que llama la atención es que el rango de parámetros que ofrecen resultados satisfactorios es amplio, es decir, que dentro de ciertos márgenes, el rendimiento del algoritmo apenas depende de los valores concretos asignados a los parámetros. Si bien es cierto que algunas combinaciones pueden ser descartadas, a la vista de los resultados, y por sencillez, se toma el siguiente conjunto de parámetros: $k = 30$, $\xi = 1.3$, $q = 10^0 = 1$.

5.4. Optimización por Colonia de Hormigas en dominios continuos

Tabla 5.9: Tasa de convergencia (porcentaje), para $\xi = 0.4$

q \ k	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
10^{-2}	8	40	65	77	73	70	70	71	76	78
$10^{(-23/9)}$	8	33	70	74	75	75	73	73	75	73
$10^{(-19/9)}$	5	33	65	72	76	65	69	73	79	73
$10^{(-5/3)}$	7	41	64	70	72	67	72	79	71	74
$10^{(-11/9)}$	4	36	67	66	73	70	77	69	76	68
$10^{(-7/9)}$	10	37	53	63	69	66	68	75	69	71
$10^{(-1/3)}$	11	35	63	64	69	68	72	75	72	68
$10^{(1/9)}$	13	48	56	73	68	72	74	74	71	72
$10^{(5/9)}$	12	38	59	62	64	73	71	79	72	72
10	14	40	59	61	73	65	74	70	69	78

Tabla 5.10: Tasa de convergencia (porcentaje), para $\xi = 0.7$

q \ k	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
10^{-2}	12	71	73	76	75	77	71	72	76	68
$10^{(-23/9)}$	20	68	76	71	66	74	70	76	73	72
$10^{(-19/9)}$	20	73	69	72	71	70	78	73	76	68
$10^{(-5/3)}$	20	61	72	72	75	73	73	71	78	70
$10^{(-11/9)}$	22	67	73	73	75	74	71	66	73	67
$10^{(-7/9)}$	18	65	66	72	74	76	71	75	77	75
$10^{(-1/3)}$	29	66	75	71	75	72	72	76	70	72
$10^{(1/9)}$	31	55	68	72	73	73	73	70	78	74
$10^{(5/9)}$	23	67	74	67	70	69	73	75	68	71
10	32	59	69	73	72	73	68	74	71	76

Tabla 5.11: Tasa de convergencia (porcentaje), para $\xi = 1$

q \ k	k									
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
10^{-2}	54	67	78	71	73	77	74	75	75	75
$10^{(-23/9)}$	58	74	71	74	72	76	76	71	71	72
$10^{(-19/9)}$	54	73	75	73	75	68	78	70	75	78
$10^{(-5/3)}$	50	71	73	77	71	74	74	73	68	77
$10^{(-11/9)}$	59	71	75	70	67	75	68	72	74	71
$10^{(-7/9)}$	51	69	72	70	78	75	72	75	74	77
$10^{(-1/3)}$	45	68	72	75	70	75	77	72	62	70
$10^{(1/9)}$	47	73	72	73	71	74	74	72	68	76
$10^{(5/9)}$	55	71	71	73	74	72	66	65	71	72
10	51	67	73	73	73	72	71	76	66	68

Tabla 5.12: Tasa de convergencia (porcentaje), para $\xi = 1.3$

q \ k	k									
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
10^{-2}	68	78	70	71	73	70	72	68	71	77
$10^{(-23/9)}$	74	71	74	74	77	67	78	81	78	75
$10^{(-19/9)}$	69	73	76	71	72	73	74	74	74	69
$10^{(-5/3)}$	71	71	67	74	66	77	67	77	65	70
$10^{(-11/9)}$	68	79	77	72	77	76	70	73	76	66
$10^{(-7/9)}$	73	74	71	70	74	75	71	73	68	72
$10^{(-1/3)}$	73	73	67	72	75	69	70	66	63	60
$10^{(1/9)}$	62	68	73	70	70	64	67	59	67	58
$10^{(5/9)}$	68	76	80	63	70	77	69	70	57	59
10	65	68	71	70	71	67	65	59	67	63

5.4. Optimización por Colonia de Hormigas en dominios continuos

Tabla 5.13: Tasa de convergencia (porcentaje), para $\xi = 1.6$

$q \backslash k$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
10^{-2}	72	78	78	68	71	72	67	70	74	75
$10^{(-23/9)}$	68	71	71	76	69	72	72	67	74	70
$10^{(-19/9)}$	75	69	75	78	73	67	72	64	69	71
$10^{(-5/3)}$	71	68	78	73	65	70	70	71	68	63
$10^{(-11/9)}$	71	65	75	72	69	69	75	62	58	62
$10^{(-7/9)}$	73	75	73	69	63	65	60	62	61	59
$10^{(-1/3)}$	69	78	68	64	60	69	55	54	56	50
$10^{(1/9)}$	75	71	71	74	59	57	56	61	51	43
$10^{(5/9)}$	67	74	72	67	57	63	53	52	56	52
10	64	69	63	65	62	55	52	51	47	38

Tabla 5.14: Tasa de convergencia (porcentaje), para $\xi = 1.9$

$q \backslash k$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
10^{-2}	72	71	68	69	69	61	60	65	54	60
$10^{(-23/9)}$	71	73	70	67	72	61	62	65	68	54
$10^{(-19/9)}$	71	69	68	67	66	69	63	71	66	58
$10^{(-5/3)}$	76	72	69	71	67	63	61	55	48	54
$10^{(-11/9)}$	73	68	72	56	59	63	54	55	53	49
$10^{(-7/9)}$	66	61	65	66	55	48	54	47	40	38
$10^{(-1/3)}$	70	65	57	58	53	46	44	39	42	35
$10^{(1/9)}$	72	62	58	65	51	48	43	37	33	32
$10^{(5/9)}$	63	60	64	55	43	42	44	32	35	35
10	76	66	54	51	54	46	35	41	25	27

5.5. Algoritmo Genético

Siguiendo con los algoritmos de optimización metaheurística, y en línea con los dos vistos hasta este punto, se propone la utilización del Algoritmo Genético o *Genetic Algorithm* (GA) [121], también basado en comportamientos existentes en la naturaleza. Como su propio nombre indica, simula mecanismos que se dan en la herencia genética y en la evolución: la recombinación, la mutación y la selección.

Cada individuo de una población de una misma especie contiene unos caracteres genéticos propios. Los nuevos individuos de esa población contienen material genético obtenido a partir de la recombinación de los caracteres genéticos de sus progenitores y, además, pueden producirse, de forma aleatoria, mutaciones en el material genético de un individuo. Esto hace que, a medida que avanza el tiempo y nacen nuevas generaciones, el material genético pueda ser diferente al que tenía la generación original. También es conocido que, ante un cambio en las condiciones ambientales, toda población tiende a adaptarse al ambiente y que esta adaptación se realiza a través de la selección natural, de forma que aquellos individuos con caracteres genéticos más aptos para las nuevas circunstancias seguirán con vida y procrearán, mientras que aquellos menos aptos tendrán menos descendencia y sus caracteres genéticos se perderán. De esta forma, tras un cierto número de generaciones, los individuos supervivientes tendrán aquellos caracteres genéticos más aptos para el entorno en el que están.

De forma semejante, el algoritmo genético utiliza poblaciones de N_{pob} individuos, donde la configuración genética de cada uno de ellos es un punto del espacio de solución. En cada iteración del algoritmo se crea una nueva generación de individuos según ciertas reglas y se seleccionan aquellos individuos cuya configuración genética es la más apta, es decir, aquellos que tienen un valor más pequeño para la función de ajuste.

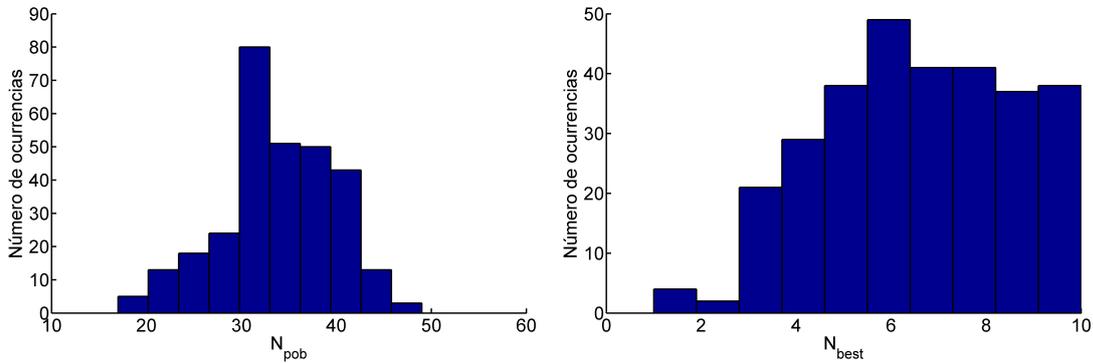
De forma detallada, cada iteración consta de cuatro etapas diferentes: en la primera, se eligen de forma estocástica los individuos, y de ellos, los cromosomas que se cruzarán, donde cada cromosoma representa una dimensión del espacio de solución. En una segunda etapa, se produce la recombinación creándose una cantidad de individuos nuevos, que suponen una fracción f_{CR} respecto al total de la población. En la tercera etapa, se producen mutaciones de forma estocástica sobre algunos de los individuos. Esto permite explorar zonas del espacio de solución que pudieran no estar cubiertas por la población inicial. Finalmente, de todos los individuos existentes en este punto, se toman los N_{pob} cuyo valor de la función de ajuste es más baja. A lo largo de estos cuatro

pasos, los N_{best} individuos cuya función de ajuste ha sido la más baja en la generación anterior, permanecen inalterados hasta el instante de la selección. Las mutaciones se realizan siguiendo una distribución gaussiana y la selección de individuos para recombinación se lleva a cabo mediante Muestro Estocástico Universal o *Stochastic Universal Sampling* (SUS) [163].

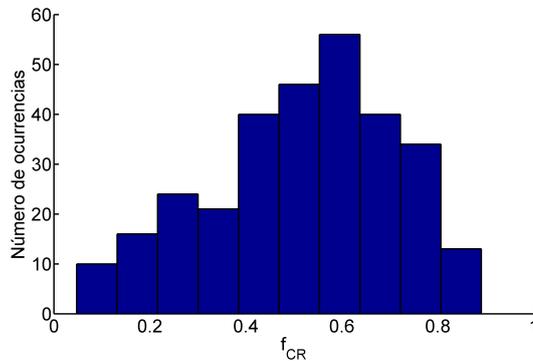
Al contrario que los dos algoritmos precedentes, no ha sido necesario desarrollar el código de este, sino que se ha empleado la implementación provista en la *Global Optimization Toolbox* de MatLab [145].

Para encontrar un conjunto de parámetros válido, es decir, valores de N_{pob} , f_{CR} y N_{best} que proporcionaran un buen resultado, no se emplea la técnica anterior de realizar un barrido paramétrico, sino que utiliza PSO para realizar una búsqueda de los valores óptimos, es decir, una meta-optimización según lo propuesto en [164]. Para ello, se ejecuta PSO sobre un espacio de solución de dimensión 3, como 3 son los parámetros de GA que deben ser optimizados. La función de ajuste de PSO se elige, para cada conjunto de los tres parámetros de GA, como el peor valor de la función de ajuste de GA obtenido tras 3 ejecuciones independientes de GA con unas direcciones de llegada fijas para cada ejecución de PSO. La optimización con GA se hace con un ULA de $L = 7$ elementos y $M = 2$ señales incidentes. Al elegir el peor valor final de la función de ajuste tras tres ejecuciones distintas de GA, se garantiza la validez de ese conjunto de parámetros de forma más robusta que si solamente se ejecutara GA una vez. Por otra parte, al elegir conjuntos de ángulos aleatorios para cada una de las $R = 300$ ejecuciones de PSO, se garantiza que los parámetros de GA encontrados son válidos en todos los casos. Los resultados óptimos encontrados cada vez para cada parámetro se muestran en forma de histograma en la figura 5.2.

Es posible apreciar que existen algunos picos en los histogramas, es decir, que algunos valores destacan sobre los demás en el sentido de que PSO los ha encontrado más veces como los que mejor minimizan la función de ajuste. Así, los valores que se eligen son $N_{pob} = 32$, $f_{CR} = 60\%$ y $N_{best} = 6$. También debe tenerse en cuenta que algunos parámetros tienen una influencia mayor sobre el algoritmo, no siendo recomendable utilizar poblaciones de menos de 30 individuos. Al margen de esto, la influencia de los parámetros sobre el rendimiento del algoritmo es limitada, siempre que éstos estén dentro de ciertos márgenes.



(a) Distribución del óptimo en función del tamaño de la población (b) Distribución del óptimo en función del tamaño del número de elementos inalterados



(c) Distribución del óptimo en función de la fracción de recombinación

Figura 5.2: Histogramas de los parámetros optimizados con PSO.

5.6. Evolución Diferencial

El algoritmo que se presenta en esta sección también está basado, como el anterior, en la evolución de un grupo de individuos, con la salvedad de que Evolución Diferencial o *Differential Evolution* (DE) [124] prescinde en cierto modo de la componente biológica y está más enfocado hacia la obtención de una solución.

En este caso, las mutaciones no son del todo aleatorias, sino que se basan en las configuraciones genéticas de otros agentes, es decir, en el punto del espacio de solución que ocupan. Tras una inicialización aleatoria de los N_p individuos de la población, en cada iteración del algoritmo se realizan varias etapas, que se llevan a cabo para cada individuo Z : en primer lugar, se eligen de forma aleatoria otros tres individuos de la

población (D, E, F) de modo que los cuatro sean diferentes entre sí. En este punto, se crea un nuevo individuo Y , copia de Z , cuyas componentes se modifican de la siguiente forma: se elige aleatoriamente un índice m entre 1 y el número de dimensiones de la solución y se actualiza la componente i -ésima del nuevo individuo Y con el valor $Y_i = D_i + f(E_i - F_i)$ en caso de la dimensión actual i coincida con el valor de la dimensión elegida aleatoriamente m . Si no coinciden, es decir, si $i \neq m$, se asigna ese mismo valor a Y_i con probabilidad C_r , siendo C_r la probabilidad de recombinación y f_d el peso diferencial, ambos, al igual que el tamaño de la población, parámetros de funcionamiento del algoritmo. Una vez creado el nuevo elemento Y , que podrá compartir con Z algunas de sus componentes, se calcula el valor de la función de ajuste para el nuevo individuo Y y se compara con el del individuo original Z . El individuo con peor valor de la función de ajuste es descartado y el otro se conserva.

De forma sintética, si n es el tamaño del espacio de solución:

$$m = rand(\{1, 2, \dots, n\}) \quad (5.12)$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \begin{cases} \text{Si } i = m \Rightarrow Y_i = D_i + f_d(E_i - F_i) \\ \text{Si } i \neq m \Rightarrow \begin{cases} Y_i = D_i + f(E_i - F_i) & \text{con probabilidad } C_r \\ Y_i = Z_i & \text{con probabilidad } 1 - C_r \end{cases} \end{cases} \quad (5.13)$$

El parámetro f_d , o peso diferencial, controla la tasa de mutación: puede tomar cualquier valor en $(0, 2]$, siendo los valores más pequeños aquellos que apenas permiten la mutación de los individuos (permitiéndose solamente la recombinación). El parámetro C_r es la probabilidad de recombinación, es decir, para cada dimensión, además de una, la probabilidad con la que esa dimensión sufre recombinación.

Existe abundante literatura [165, 166] acerca de los valores óptimos para los parámetros de DE, no obstante, para el caso que se presentará al final del presente capítulo, los valores para los parámetros se eligen según las recomendaciones en [167], de donde además se tomó la implementación de este algoritmo. Dichos valores son un tamaño de población de $N_p = 13$ individuos, una probabilidad de recombinación de $C_r = 0.4862$ y un peso diferencial de $f_d = 1.18992$. Un análisis de sensibilidad al respecto de estos parámetros mostró que los valores propuestos son válidos.

5.7. Simulated Annealing

Se presenta a continuación un algoritmo que también está basado en un comportamiento presente en la naturaleza. El *Recocido Simulado*, *Enfriamiento Simulado* o *Simulated Annealing* (SA) [118] no se basa en enjambres ni tiene un componente evolutivo, de hecho, no se inspira en ningún fenómeno en el que intervengan seres vivos, sino que su inspiración viene del mecanismo que ocurre durante el proceso de enfriamiento de un metal.

Los átomos que forman una estructura con enlace metálico están en permanente vibración y su vibración es tanto más amplia cuanto mayor sea la energía del metal, es decir, su temperatura. Cuando la temperatura es alta, los átomos tienen más facilidad para variar su posición dentro de la estructura cristalina de modo que la estructura puede reorganizarse con facilidad a un estado de menor energía. A medida que la temperatura disminuye, las variaciones de posición de los átomos dentro de la red cristalina son cada vez más improbables.

El recocido del acero se basa precisamente en esta respuesta de los metales a un incremento y posterior descenso paulatino de la temperatura, obteniéndose materiales con propiedades mecánicas concretas.

Es posible utilizar este comportamiento para diseñar un algoritmo de optimización metaheurística con los mismos principios. En todo instante de la optimización, se conoce un punto del espacio de solución, correspondiente a un estado de la estructura cristalina del metal, que es la solución candidata. En cada iteración, se calculan un punto cercano a esta solución y se salta a ella con probabilidad uno si la nueva solución mejora la actual y de forma estocástica si la nueva solución es peor que la actual, siendo mayor la probabilidad de transición a un estado peor cuanto mayor sea la temperatura en cada iteración.

La implementación de SA es la incluida en la *Global Optimization Toolbox* de MatLab [145] y se utilizan las funciones incluidas en dicha *toolbox*: la elección de nuevas soluciones propuestas, vecinas de la solución actual, se realiza mediante la función *annealingfast*, que elige los nuevos puntos haciendo uso de la distribución t de Student. La actualización de la temperatura se lleva a cabo mediante la función *temperaturefast*, que calcula la temperatura en la iteración i -ésima como $T_i = T_0/i$, siendo T_0 la temperatura inicial del sistema. Cada vez que se han aceptado I_{ra} puntos nuevos, se vuelve a aumentar la temperatura, en lo que se conoce como *reannealing*. El intervalo

de estancamiento I_{stall} es el número de puntos consecutivos en los que el valor de la función de ajuste debe variar menos que una cierta cantidad, para que el algoritmo asuma que ha encontrado la solución, no obstante, para impedir que el algoritmo termine prematuramente, se fija $I_{stall} = \infty$. Tras un análisis de los parámetros, la temperatura inicial se fija en $T_0 = 1024$, y el intervalo de *reannealing* se fija en $I_{ra} = 50$.

La función de actualización de temperatura y la temperatura inicial influyen en la forma en que se comporta el algoritmo: en cada iteración, valores más elevados de la temperatura permiten con mayor probabilidad cambios hacia soluciones peores facilitando la exploración de nuevas áreas del espacio de solución, mientras que cuando la temperatura tiende a cero, SA degenera en el *algoritmo voraz* [168].

5.8. Comparativa de los cinco métodos

Tras estudiar cinco algoritmos de optimización metaheurística diferentes, solamente queda realizar una comparación entre ellos en un entorno común para poder elegir aquel que mejor resuelve el problema de la estimación dirección de llegada con un único muestreo.

Con este fin, se preparan tres bloques de simulaciones, encaminados a dilucidar cuál de estos algoritmos es el más recomendable. Los tres grupos de simulaciones estudiarán las capacidades de los algoritmos en términos de convergencia, precisión y resolución. En todos los casos, se realizan simulaciones en las que se estima un único parámetro de las señales incidentes, la dirección de llegada θ , haciendo que los otros dos parámetros de señal, la otra dirección de llegada y la frecuencia de las señales sean conocidas y fijas con los valores $\phi_i = 0^\circ$ y $f_i = 300$ MHz. Para estos bloques de simulaciones se estiman $M = 2$ señales y se asume que los resultados se pueden extrapolar de forma cualitativa a la estimación de más parámetros de señal o a un número diferente de señales incidentes, realizando los cambios oportunos en los parámetros de cada algoritmo.

Para estas simulaciones en las que se estima un único parámetro de señal y hay $M = 2$ señales incidentes, los parámetros utilizados para las simulaciones, en cada algoritmo, son los siguientes: para PSO, se fija el número de partículas en $N_{par} = 30$, las constantes multiplicativas valen $C_g = C_p = 1$, la masa inercial se hace variar linealmente desde $w_p = 0.9$ en la primera iteración hasta $w_p = 0.4$ en la última, el incremento temporal vale $\Delta t = 1$ y se utilizan límites del espacio de solución invisibles. Para $ACO_{\mathbb{R}}$ se utiliza un tamaño del archivo de soluciones de $k = 30$ y los parámetros de

configuración toman los valores $k = 1$ $\xi = 1.3$. Para el algoritmo genético se toma una población de $N_{pob} = 32$ individuos, con una fracción de recombinación $f_{CR} = 0.6$ y un número $N_{best} = 6$ de individuos que cada iteración no se modifican. Para DE, se toma una población de $N_p = 13$ individuos, con una probabilidad de recombinación de $C_r = 0.4862$ y un peso diferencial de $f_d = 1.18992$. Para SA se toma una temperatura inicial de $T_0 = 1024$ que se actualiza para la iteración i -ésima según $T_i = T_0/i$. Se establece el intervalo de reincremento de temperatura en $I_{ra} = 50$ iteraciones y el límite de estancamiento en $I_{stall} = \infty$.

5.8.1. Prueba de Convergencia

Para el análisis de convergencia se hace incidir sobre un ULA de $L = 7$ elementos separados media longitud de onda, $R = 500$ grupos aleatorios de $M = 2$ señales comprendidas en el intervalo $\theta_i \in [15^\circ, 165^\circ]$. Además, se garantiza una separación mínima entre las señales incidentes es de $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 > 10^\circ$, ya que el comportamiento para señales cercanas se estudiará en detalle en la sección 5.8.3. La fase de las señales se elige de forma aleatoria y uniforme en $\beta_i \in [0^\circ, 360^\circ]$ y se toma amplitud unitaria para todas las señales.

Dado que las señales incidentes se eligen de forma aleatoria, se eligen dos umbrales de convergencia fijos, de uno grado y tres grados respectivamente. Los resultados, además, se muestran para dos valores distintos del número evaluaciones de la función de ajuste, $N_{eval-lim} = 1000$ y $N_{eval-lim} = 4000$. Los resultados, para varios valores de la SNR se presentan en las tablas 5.15 a 5.18.

Es posible extraer varias conclusiones de estos resultados. En primer lugar, se observa que, al tratarse de umbrales de convergencia fijos, la tasa de convergencia depende de forma crítica del valor de la SNR, cuando este valor es bajo.

De las tablas con un umbral de $\varepsilon_\theta = 1^\circ$ se desprende que con $N_{eval-lim} = 1000$ (Tabla 5.15) evaluaciones de la función de ajuste, los resultados son buenos para $ACO_{\mathbb{R}}$, aceptables para PSO, GA y DE, en ese orden e insuficientes para SA. Al subir el número de evaluaciones de la función de ajuste a $N_{eval-lim} = 4000$ (Tabla 5.16), se observa que la tasa de convergencia de $ACO_{\mathbb{R}}$ apenas ha variado, mientras que PSO y DE son los que mejores resultados ofrecen. GA no mejora de forma sustancial y aunque SA muestra una gran mejora, sus resultados siguen sin alcanzar los proporcionados por los otros métodos.

5.8. Comparativa de los cinco métodos

Tabla 5.15: Tasa de convergencia (porcentaje), $N_{lim} = 1000$, $\epsilon_{\theta_i} = 1^\circ$

Método \ SNR	PSO	ACO _R	SA	GA	DE
0 dB	3.8	4	1.8	3.8	3.2
5 dB	13	13.8	9.2	11.6	12.4
10 dB	36	38.4	19.2	37	36.8
15 dB	56.8	66	26.6	64.8	57.2
20 dB	75.4	85.2	30.8	82.4	71.2
25 dB	88.4	95.6	36	89.8	81
30 dB	91.4	97	35.2	90.6	82.4
35 dB	90.8	98.2	34.6	94	82
40 dB	92	98.6	34.6	90.4	83.6
∞	94.2	98.2	36.8	93	82.6

Tabla 5.16: Tasa de convergencia (porcentaje), $N_{lim} = 4000$, $\epsilon_{\theta_i} = 1^\circ$

Método \ SNR	PSO	ACO _R	SA	GA	DE
0 dB	3.8	3.6	2.8	3.8	3.6
5 dB	13.8	13.8	12.8	11.6	13.6
10 dB	39.4	38.8	31.8	37.2	39
15 dB	68.4	68.4	48.8	65.4	68.2
20 dB	86.6	85.8	63.8	84	86.6
25 dB	97	96	75.8	93.2	96.4
30 dB	98.6	98	76.4	94.2	98.6
35 dB	99.6	98.4	78	96	99.8
40 dB	99.6	99.2	76.6	94	99.8
∞	100	98.6	79.6	95.6	99.8

5. Optimización Metaheurística

Tabla 5.17: Tasa de convergencia (porcentaje), $N_{lim} = 1000$, $\epsilon_{\theta_i} = 3^\circ$

Método SNR	PSO	ACO _R	SA	GA	DE
0 dB	22.4	22.6	20.8	21.8	21.8
5 dB	59.2	58.2	46.8	52.6	56.6
10 dB	85.2	84.6	74.4	80.2	83.8
15 dB	95.2	94.2	82	90.8	92.6
20 dB	97.6	95.4	90.4	93.6	96.6
25 dB	98.8	98.4	90.8	94	98.2
30 dB	99.6	99.4	91.2	93.8	98.6
35 dB	99.6	99.4	92.6	95.2	98.6
40 dB	99.6	99.6	91.2	92.4	98.8
∞	100	99	89.8	94.2	99

Tabla 5.18: Tasa de convergencia (porcentaje), $N_{lim} = 4000$, $\epsilon_{\theta_i} = 3^\circ$

Método SNR	PSO	ACO _R	SA	GA	DE
0 dB	23.4	23	24	22	23.6
5 dB	60.4	59.4	57.8	52.6	60.2
10 dB	85.8	84.8	84	81	85.6
15 dB	94.6	94.4	93.2	90.6	95
20 dB	97.8	96.2	97.2	94.2	97.8
25 dB	99.4	98.6	99.2	95.6	99.4
30 dB	99.8	99.6	99.8	95.4	99.6
35 dB	100	99.4	100	96.4	100
40 dB	100	99.6	99.8	94.2	100
∞ dB	100	99.2	100	95.6	100

De la observación de las tablas con un umbral de $\varepsilon_\theta = 3^\circ$ se desprende que los cinco métodos propuestos presentan buenos valores de convergencia, incluso tras solo $N_{eval-lim} = 1000$ (Tabla 5.17) evaluaciones de la función de ajuste, destacando particularmente PSO, ACO $_{\mathbb{R}}$ y DE. No obstante, si con ese mismo margen se aumenta el número de evaluaciones de la función de ajuste hasta $N_{eval-lim} = 4000$ (Tabla 5.18), SA alcanza tasas de convergencia comparables a las de estos tres métodos, siendo GA el que ofrece un peor resultado.

5.8.2. Prueba de Precisión

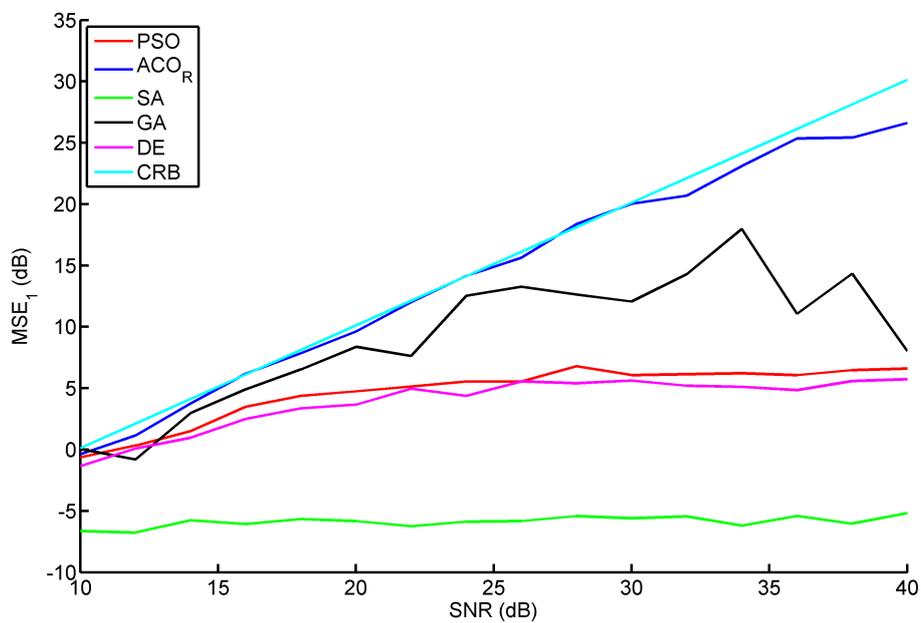
En este apartado se estudia la capacidad de cada algoritmo para alcanzar la solución de forma precisa, comparando su precisión con la CRB. Para ello, se elige un conjunto fijo de $M = 2$ señales, con direcciones de llegada $\theta_1 = 40^\circ, \theta_2 = 70^\circ$, amplitudes unitarias y fases $\beta_1 = 45^\circ, \beta_2 = 270^\circ$. Se ejecutan $R = 500$ casos independientes y se realiza un filtrado por convergencia, definiendo Λ como el conjunto de aquellos índices $r \in \{1, 2, \dots, R\}$ para los que una vez ejecutadas $N_{eval-lim} = 4000$ evaluaciones de la función de ajuste, el error en ambas señales es inferior a $\varepsilon_\theta = 3^\circ$. Con esto, el error cuadrático medio, en decibelios, se calcula según (5.14).

$$\text{MSE}_{\theta,i}(\text{dB}) = -10 \log \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{r \in \Lambda} (\theta_i - \hat{\theta}_{r,i})^2 \quad (5.14)$$

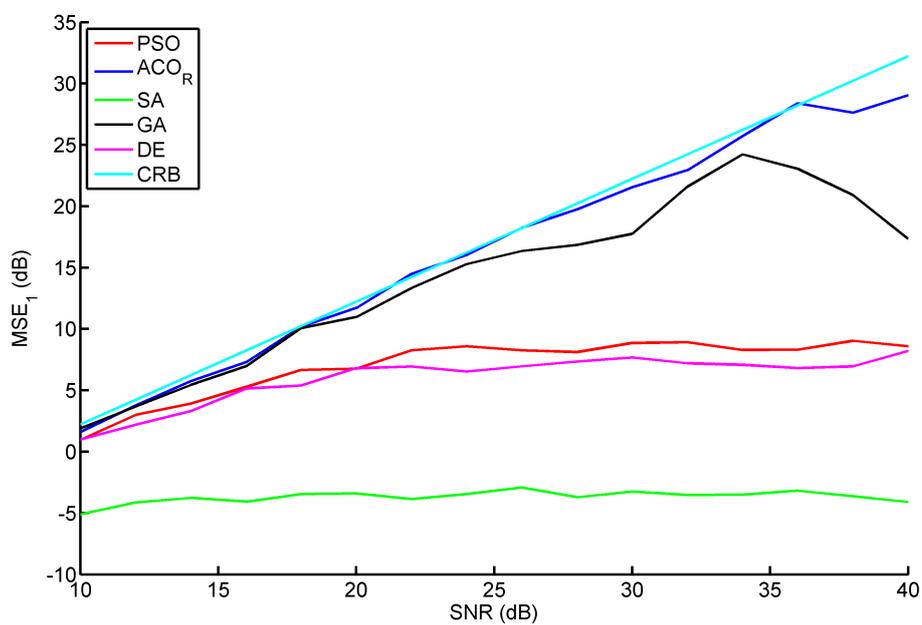
Los resultados se presentan, para las dos señales, en dos tipos de gráficas: para un número fijo de evaluaciones de la función de ajuste $N_{eval-lim} = \{1000, 2000\}$ con la SNR en las abscisas o bien para un valor concreto de la SNR (10, 20, 30 dB), representando el eje de abscisas el número de evaluaciones de la función de ajuste.

En las gráficas de precisión para $N_{eval-lim} = 1000$ evaluaciones de la función de ajuste (Figura 5.3), se observa que ACO $_{\mathbb{R}}$ es el método que más cerca está de la CRB para cualquier valor de la SNR, siendo el siguiente mejor GA. PSO y DE obtienen resultados semejantes y SA obtiene resultados muy poco precisos. De las gráficas con $N_{eval-lim} = 2000$ (Figura 5.4) se pueden extraer conclusiones semejantes, solo que en este caso la precisión alcanzada por ACO $_{\mathbb{R}}$ y por GA es muy parecida a la vez que cercana a la cota. PSO y DE siguen mostrando resultados semejantes y a pesar del incremento del número de evaluaciones de la función de ajuste, SA queda muy lejos de los demás métodos.

En las gráficas para una SNR fija se observan comportamientos que ratifican estas



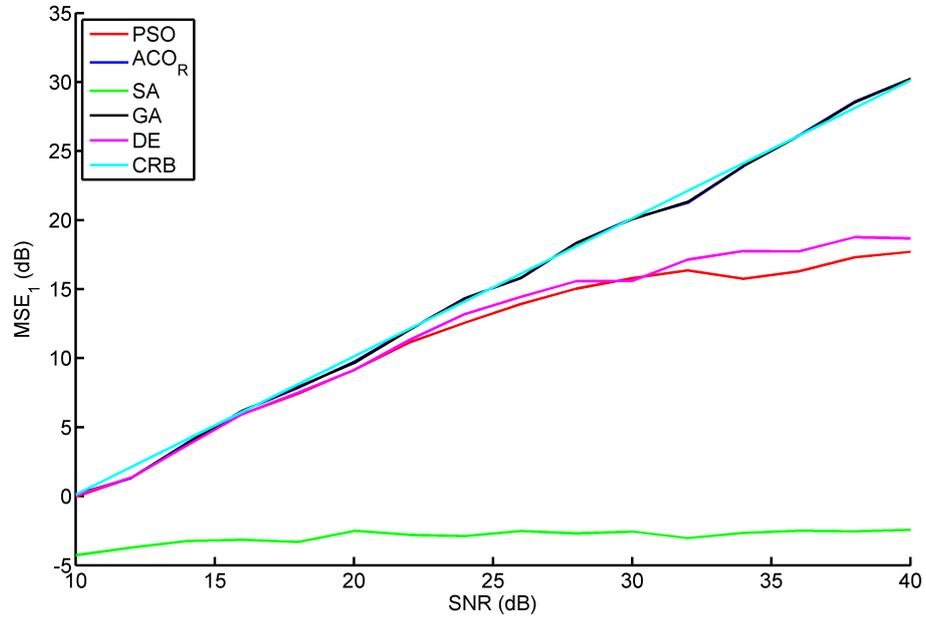
(a) Primera señal



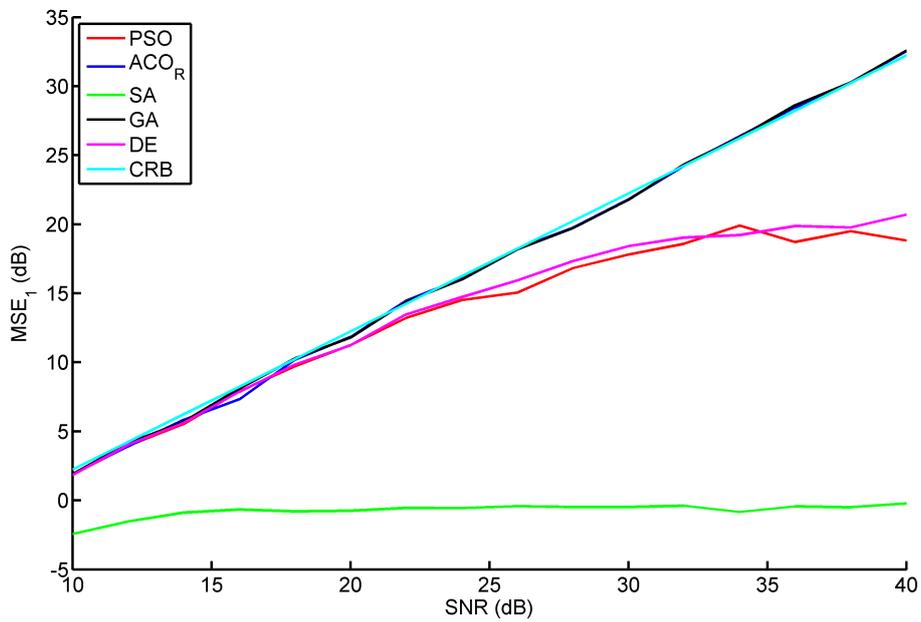
(b) Segunda señal

Figura 5.3: MSE (dB) tras $N_{eval-lim} = 1000$ evaluaciones de la función de ajuste

5.8. Comparativa de los cinco métodos

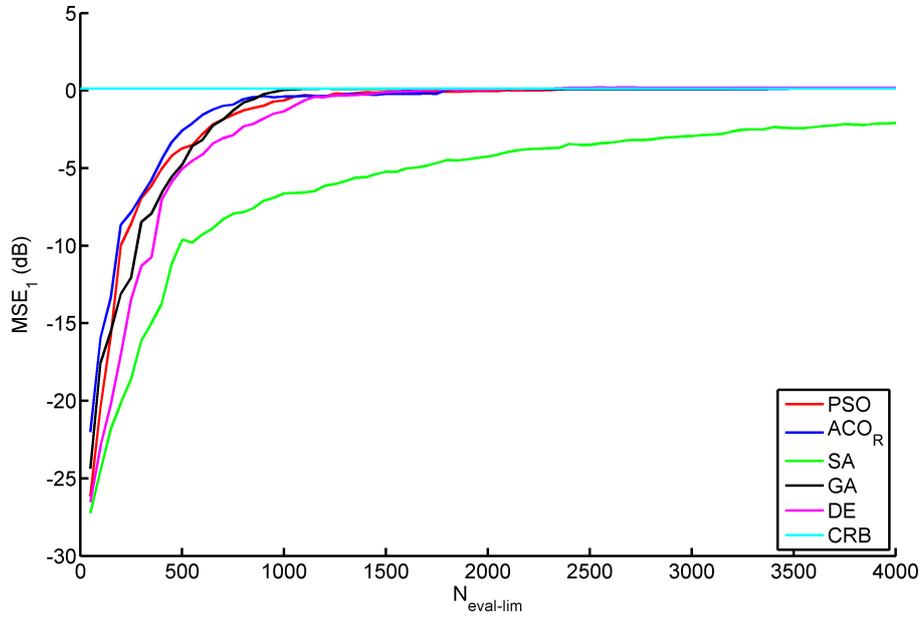


(a) Primera señal

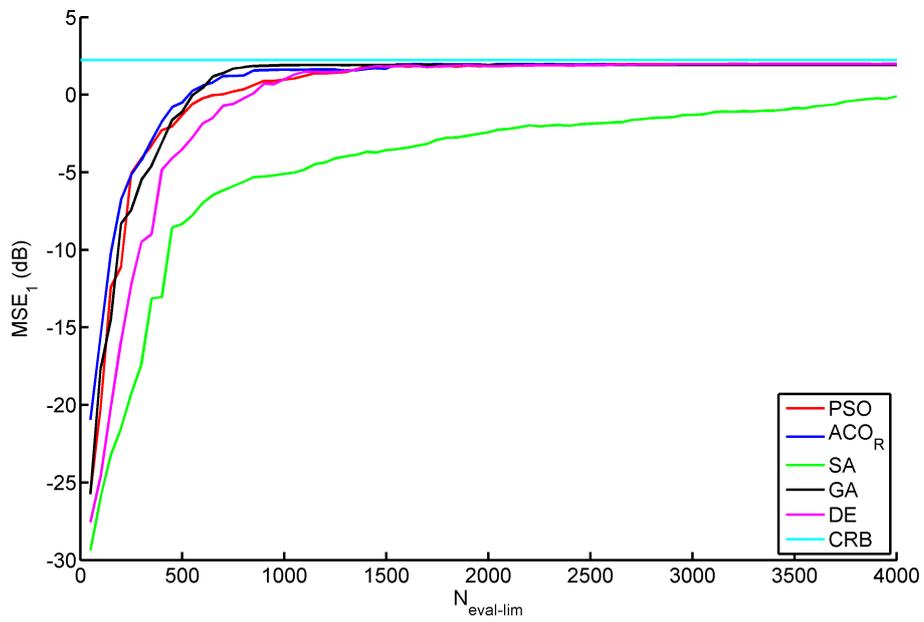


(b) Segunda señal

Figura 5.4: MSE (dB) tras $N_{eval-lim} = 2000$ evaluaciones de la función de ajuste



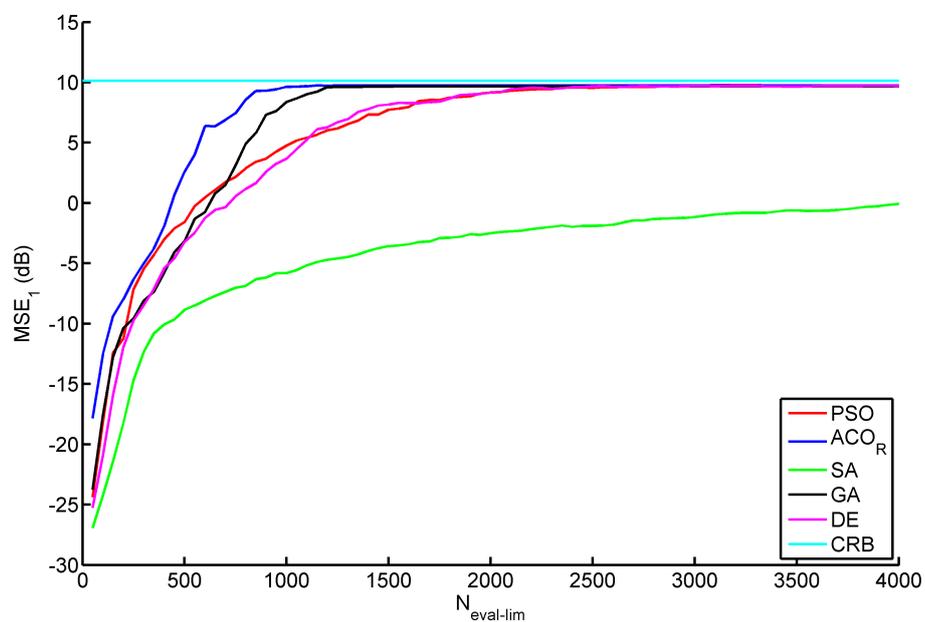
(a) Primera señal



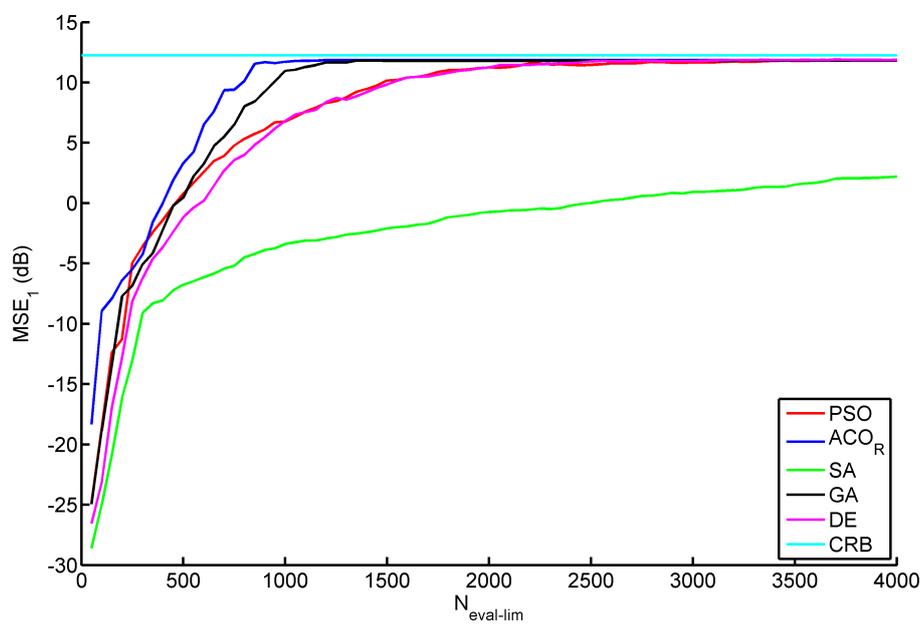
(b) Segunda señal

Figura 5.5: MSE (dB) para una SNR de 10dB.

5.8. Comparativa de los cinco métodos

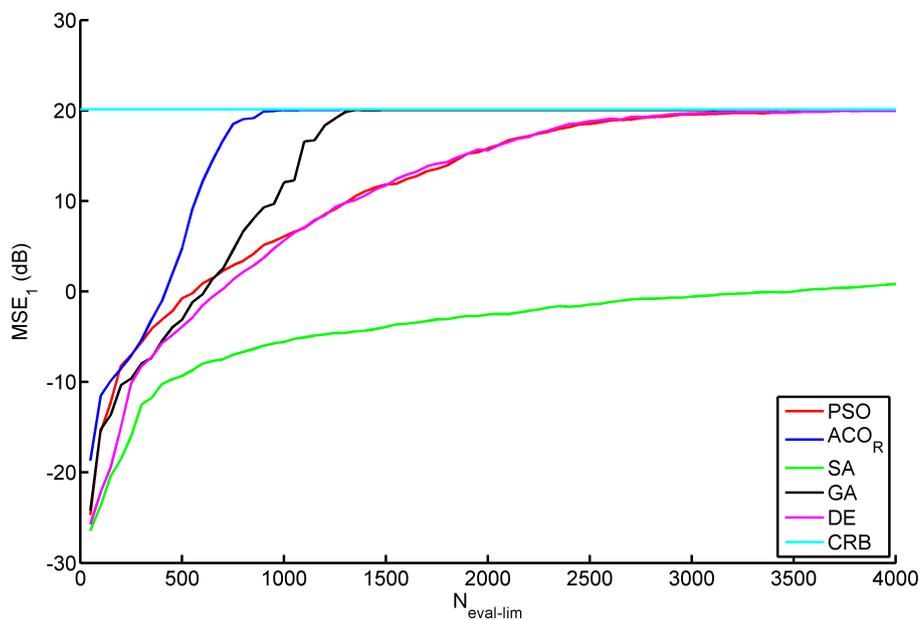


(a) Primera señal

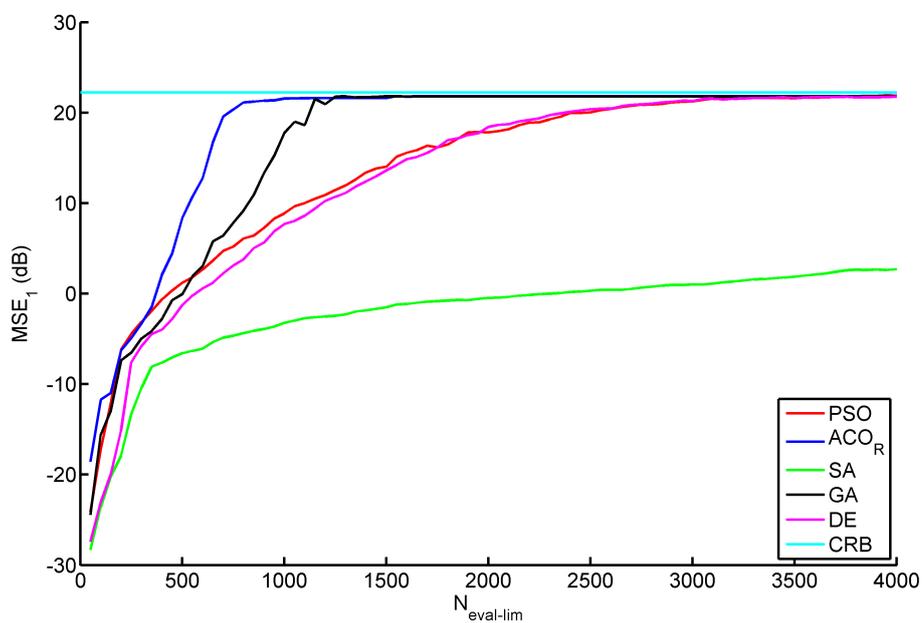


(b) Segunda señal

Figura 5.6: MSE (dB) para una SNR de 20dB.



(a) Primera señal



(b) Segunda señal

Figura 5.7: MSE (dB) para una SNR de 30dB.

conclusiones. La gráfica de 10dB (Figura 5.5) muestra un comportamiento parecido para todos los algoritmos, excepto para SA, que converge de forma mucho más lenta. Dentro del parecido entre todos los métodos, se observa que $\text{ACO}_{\mathbb{R}}$ y GA son los primeros métodos en alcanzar los valores más cercanos a la cota, necesitando menos de 1000 evaluaciones de la función de ajuste, mientras que PSO y DE necesitan en torno a 1300.

Estos mismos comportamientos se aprecian con más claridad en las gráficas para 20dB (Figura 5.6) y 30dB (Figura 5.7). En ellas llama la atención la semejanza entre las gráficas de PSO y DE y el mal comportamiento de SA. De nuevo, GA y $\text{ACO}_{\mathbb{R}}$ muestran la convergencia más rápida, con una clara ventaja para este último, que es capaz de alcanzar la CRB en menos de 1000 iteraciones.

5.8.3. Prueba de Resolución

Finalmente, se presenta una prueba de resolución para estudiar la capacidad de los distintos algoritmos para estimar correctamente dos señales que inciden muy próximas entre sí.

Sobre un array lineal logarítmico de $L = 9$ elementos con una apertura de $\aleph = 3\lambda$, inciden dos señales a igual distancia respecto a un ángulo central $\theta_c = 60^\circ$. La distancia total entre las señales es $\Delta\theta$, parámetro que se hace variar desde $\Delta\theta = 0.25^\circ$ hasta $\Delta\theta = 8^\circ$. Para cada valor de $\Delta\theta$ se ejecutan $R = 100$ simulaciones independientes y se calcula una estimación del propio parámetro $\Delta\theta$ según (5.15). Las simulaciones se ejecutan en un entorno con SNR de 30dB.

$$\hat{\Delta\theta} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \left| \hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1 \right| \quad (5.15)$$

Los resultados se muestran en la figura 5.8, junto con el comportamiento ideal (la separación angular estimada es la misma que la de las señales incidentes) y la tendencia observada en los mismos. Estos resultados indican que para valores de separación entre las señales incidentes por encima de $\Delta\theta = 1.5^\circ$, la estimación es válida para todos los métodos excepto para GA, que comienza a fallar para valores angulares mayores.

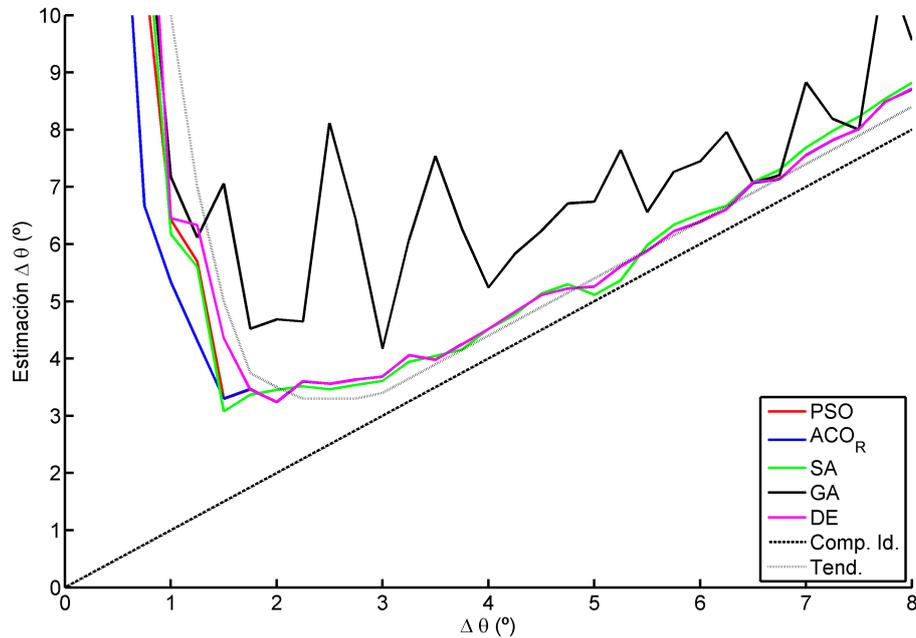


Figura 5.8: Separación angular detectada y separación angular incidente junto con el comportamiento ideal y la tendencia.

5.9. Conclusión

En este capítulo se han presentado de forma general los algoritmos de optimización metaheurística, describiendo sus propiedades y su modo de funcionamiento, ilustrando sus diferencias con otros algoritmos mediante un ejemplo.

Además, se han presentado en detalle cinco algoritmos metaheurísticos concretos, todos ellos basados en comportamientos presentes en la naturaleza. Los dos primeros, PSO y ACO_R están basados en Inteligencia de Enjambres, es decir, en la forma en que poblaciones de individuos que realizan tareas sencillas son capaces de trabajar como una única entidad. Los dos algoritmos siguientes, GA y DE, se clasifican como Algoritmos Evolutivos, ya que se basan en la forma en que se produce la evolución natural de una población de individuos de modo que los menos adaptados al entorno son eliminados y sustituidos por otros más aptos. Finalmente, SA se basa en el modo en que la estructura cristalina de un metal tiende a estados de mínima energía (por otra parte, como cualquier sistema físico) cuando se eleva la temperatura y se hace decrecer de manera paulatina.

Para algunos de estos algoritmos se realiza un análisis en el que se estudia su com-

portamiento bajo ciertas condiciones. Para PSO se analiza el rendimiento de una posible modificación del número de partículas a medida que el algoritmo se ejecuta para un caso de estimación de 6 parámetros de señal. Para $ACO_{\mathbb{R}}$ se realiza una simulación paramétrica que permite obtener unos parámetros de funcionamiento adecuados y para GA, se realiza una elección de los parámetros de funcionamiento mediante una metaoptimización realizada con PSO, lo que además da una idea de la versatilidad que caracteriza a los algoritmos metaheurísticos.

Finalmente, los cinco algoritmos se ponen a prueba entre sí y se evalúan según tres criterios: convergencia, precisión y resolución. De la observación de los resultados de estas simulaciones se desprende que $ACO_{\mathbb{R}}$ es, de los estudiados, el algoritmo de optimización metaheurística más apropiado para resolver el problema de la estimación de llegada mediante un muestreo único. El hecho de que los métodos presentados en los capítulos 3 y 4 consideren la optimización metaheurística como un proceso transparente, junto con los resultados de este capítulo, demuestran que cualquier método podría ser apropiado para resolver este problema, no obstante, $ACO_{\mathbb{R}}$ destaca, en general, como el más adecuado.

Parte de los resultados presentados en este capítulo han sido enviados a una revista científica de ámbito internacional donde su publicación ya ha sido aceptada [169].

Capítulo 6

Conclusiones y Futuras Líneas de Investigación

6.1. Conclusiones

En la presente tesis se ha abordado el problema de la estimación de dirección de llegada mediante un único muestreo, haciendo uso de algoritmos de optimización metaheurística.

El método se ha desarrollado en tres etapas, de modo que cada una de ellas resuelve una parte del problema.

En la primera etapa se estudia la estimación de dirección de llegada en entornos sin acoplos y se demuestra que, bajo esta hipótesis, es posible realizar una estimación, no solo de la dirección de llegada, sino de la dirección de llegada bidimensional al mismo tiempo que la frecuencia de las señales incidentes. La base de este método consiste en la construcción de una función de ajuste con unas características especiales y su minimización mediante un algoritmo de optimización metaheurística, que busca su mínimo absoluto en un espacio de solución compuesto por todas las combinaciones posibles de los parámetros que definen las señales incidentes. Como parte de este desarrollo, se incluye un mecanismo que permite para cada señal, reducir en dos el número de dimensiones del espacio de búsqueda, haciendo que no sea necesaria la búsqueda de la amplitud y la fase.

Para comprobar la bondad de estas estimaciones, se ha desarrollado la Cota de Cramér-Rao multidimensional para la estimación de dirección de llegada y se ha obser-

vado que el método propuesto, bajo la hipótesis de nulos acoplos, es eficiente.

La segunda etapa comienza estudiando si el método que se ha desarrollado bajo la hipótesis de que los acoplos son nulos, podría funcionar adecuadamente en un entorno real en el que dichos acoplos no son nulos y además se utilizan sensores altamente directivos. Al observarse que el rendimiento del método sufre un severo menoscabo, se opta por modificar la forma en la que se construye la función de ajuste y se decide utilizar un *software* de simulación electromagnética, cuyos resultados se incorporan a la construcción de la función. Tras esta modificación, que es plenamente coherente con el desarrollo anterior para estimación de dos direcciones de llegada y frecuencia, el rendimiento del método se pone a prueba mediante arrays de bocinas altamente acopladas.

Para estudiar que, tras la modificación, las estimaciones provistas por el método siguen siendo eficientes, se desarrolla una variante de la Cota de Cramér-Rao para sistemas en los que los acoplos están presentes. Los resultados de las simulaciones y su comparación con la nueva cota de Cramér-Rao permiten observar, de nuevo, que las estimaciones presentadas por este método son eficientes.

Finalmente se realiza un estudio de varios métodos de optimización metaheurística para elegir aquel que mejor se adapta al problema de la optimización de la función de ajuste, siendo la Optimización por Colonia de Hormigas para Dominios Continuos el algoritmo que mejor rendimiento ofrece.

Así pues, en resumen, se ha desarrollado y evaluado un método que, mediante el uso de un único *snapshot* o muestreo temporal, permite la estimación eficiente de la dirección de llegada y de la frecuencia de un conjunto señales incidentes sobre un array. El método se ha demostrado válido en arrays uniformes y no uniformes, su funcionamiento es bueno en entornos con sensores altamente acoplados y directivos y es computacionalmente sencillo, entregándose la solución del problema en un tiempo del orden unos pocos segundos. Además, el método presentado es estadísticamente eficiente.

Los resultados de investigación presentados en esta tesis han sido publicados en diferentes revistas de ámbito internacional [146,154,169], han formado parte de capítulos de libros [147] y han sido expuestos en varios congresos internacionales [148–150] y nacionales [151].

6.2. Futuras líneas de investigación

La presente tesis y el método propuesto en ella se han desarrollado bajo ciertas hipótesis, de uso muy habitual y, por otra parte, necesarias. Las primeras líneas de investigación propuestas pasan, precisamente, por estudiar el rendimiento del método en entornos en que esas hipótesis no son válidas, es decir, cuando la adquisición de un *snapshot* no es totalmente síncrona en todos los elementos, o bien cuando las tensiones inducidas sobre el array se conocen con precisión limitada.

En cuanto a la suposición de que el número de señales es conocido, aunque existen métodos para su estimación, una vía de trabajo posible es la ejecución simultánea del método propuesto suponiendo diferentes números de señales incidentes. En unas simulaciones preliminares se ha observado que cuando el número de señales incidentes es inferior al número de las señales estimadas, las señales restantes se proyectan sobre el espacio de ruido y la amplitud estimada correspondiente se hace muy pequeña.

En lo relativo a la suposición de que las señales incidentes sobre el array no son ondas planas, cabría hacer un estudio para saciar la curiosidad científica, no obstante, esta hipótesis es inherente al campo de aplicación del método propuesto.

Otras líneas de investigación podrían estudiar el uso de arrays de antenas polari-métricas, la aplicación de nuevos algoritmos de optimización metaheurística o el uso de interpolación de órdenes superiores en el cómputo de la función de ajuste.

Como parte del trabajo de desarrollo necesario en caso de desear implementar un sistema de alerta temprana basado en este método, todavía quedan abiertas algunas vías de investigación como son la elección de una geometría de array concreta y la realización de un estudio en profundidad para fijar los parámetros de operación del algoritmo de optimización que mejor resultado ofrecen para esa geometría de array concreta, sin olvidar las dos líneas propuestas al comienzo de esta sección: la influencia de la precisión finita en el muestreo y el efecto de un muestreo no absolutamente simultáneo. Todo esto, claro está, sobre un sistema desarrollado para la estimación de dos direcciones de llegada y frecuencia, que considera los acoplos mutuos entre elementos y utiliza $ACO_{\mathbb{R}}$ como método de optimización metaheurística.

También sería de interés cambiar la plataforma sobre la que se ejecuta el método propuesto, originalmente desarrollado en MatLab. Si se desea ejecutar en un sistema basado en *software*, se propone utilizar los lenguajes ANSI-C o Fortran, por su rápida velocidad de ejecución, no obstante, el desarrollo final del método para un sistema real

debería realizarse sobre una plataforma *hardware*, recomendándose el uso de FPGAs para asegurar tanto una rápida implementación del método como que cada ejecución del mismo se realice en un tiempo muy breve. Las soluciones basadas en *software* proporcionarían un tiempo de ejecución inferior al provisto por MatLab y las basadas en *hardware* reducirían este tiempo de forma muy significativa.

En la fase de implementación se podría recurrir a técnicas de paralelización que redujeran aún más el tiempo necesario para entregar la solución. Además, dado que dos soluciones son iguales con independencia del orden en que aparezcan las señales, sería posible agilizar la optimización metaheurística reduciendo el espacio de solución en un factor igual al factorial del número de señales estimadas.

Cabría también considerar las posibles opciones que plantea el método en el caso de disponer de más de un *snapshot*. Las vías de trabajo serían dos: en primer lugar, mediante un procedimiento similar al que se utiliza para construir la matriz de covarianzas, se podría construir un *snapshot robusto* con la información de todos los anteriores y para el que, por lo tanto, habría un nivel esperado de ruido menor, ya que la esperanza de éste es nula. El método se podría aplicar de forma directa a este *snapshot* obteniendo una estimación equivalente a la que se obtendría en un entorno menos ruidoso. La otra vía de trabajo consistiría en aplicar el método cada *snapshot* por separado, y a partir de las soluciones obtenidas, calcular cuál de ellas es la más probable. No obstante, sería posible crear una técnica a partir de estas dos que, en una primera etapa, buscara el intervalo del espacio de solución donde con mayor probabilidad se obtiene la solución y, posteriormente, aplicar el método con el nuevo *snapshot robusto* para realizar la búsqueda local en ese intervalo.

Como última vía de trabajo propuesta en caso de que el sistema sea construido, y a pesar de la gran labor necesaria para ello, se propone no utilizar simulación numérica para la compensación de acoplos sino llevar a cabo una campaña de medidas que permita que los equipos estén perfectamente calibrados de acuerdo con sus características constructivas.

Acrónimos

DEWLab Laboratorio de Detectabilidad y Guerra Electrónica o *Detectability and Electronic Warfare Laboratory*

INTA Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial “Esteban Terradas”

MUSIC MUltiple SIgnal Classification

MoM Método de los Momentos o *Method of Moments*

ULA Array Lineal Uniforme o *Uniform Linear Array*

SNR Relación Señal a Ruido o *Signal to Noise Ratio*

CRB Cota de Cramér-Rao o *Cramér-Rao Bound*

MSE Error Cuadrático Medio o *Mean Square Error*

RMSE Raíz del Error Cuadrático Medio o *Root Mean Square Error*

UCA Array Circular Uniforme o *Uniform Circular Array*

PEC Conductor Eléctrico Perfecto o *Perfect Electric Conductor*

PSO Optimización por Enjambre de Partículas o *Particle Swarm Optimization*

ACO Optimización por Colonia de Hormigas o *Ant Colony Optimization*

TSP Problema del Viajante o *Traveling Salesman Problem*

GA Algoritmo Genético o *Genetic Algorithm*

SUS Muestro Estocástico Universal o *Stochastic Universal Sampling*

DE Evolución Diferencial o *Differential Evolution*

ACRÓNIMOS

SA *Recocido Simulado, Enfriamiento Simulado o Simulated Annealing*

DOA *Dirección de llegada o Direction Of Arrival*

ML *de Máxima Verosimilitud o Maximum Likelihood*

IQML *Iterative Quadratic Maximum Likelihood*

KLT *Transformada de Karhunen-Loève*

Lista de Símbolos

M	Número de señales incidentes
L	Número de sensores en el array
L_x	Número de sensores respecto al eje x
L_y	Número de sensores respecto al eje y
L_z	Número de sensores respecto al eje z
\aleph	Apertura eléctrica (longitud) del array, en longitudes de onda
\aleph_x	Apertura eléctrica (longitud) del array, respecto al eje x
\aleph_y	Apertura eléctrica (longitud) del array, respecto al eje y
\aleph_z	Apertura eléctrica (longitud) del array, respecto al eje z
θ	Ángulo respecto a la vertical
ϕ	Ángulo horizontal respecto al eje x
λ	Longitud de onda
f	Frecuencia
A	Amplitud
β	Fase
\mathbb{R}	El conjunto de todos los números reales
\mathbb{N}	El conjunto de todos los números naturales
f_{obj}	Función objetivo
\mathbf{g}	<i>Snapshot</i> sintético a partir de cálculos geométricos
\mathbf{s}	<i>Snapshot</i> real, leído en bornes del array
\mathbf{v}	<i>Snapshot</i> sintético a partir de métodos numéricos
\mathbf{n}	Vector de ruido

Lista de Símbolos

$\bar{\cdot}$	Traspuesta
\cdot^H	Traspuesta conjugada
$\hat{\cdot}$	Estimado
\cdot^\dagger	Pseudoinversa de Moore-Penrose
R	Número de repeticiones
χ	Error mixto de estimación de ángulo y amplitud
\mathcal{S}	Matriz formada por la yuxtaposición de los vectores directores
c	Velocidad de propagación de la onda, velocidad de la luz
ϑ	Conjunto de todos los parámetros estimados
κ	Cualquiera de los parámetros estimados
I	Matriz de Información de Fisher
$E(\cdot)$	Esperanza matemática
μ	Media de una distribución de probabilidad
σ	Desviación típica de una distribución de probabilidad
$\text{Var}(\cdot)$	Varianza de una variable aleatoria
Σ	Matriz de covarianzas
$ \cdot _2$	Norma euclídea
\ln	Logaritmo natural
\log	Logaritmo decimal
γ	Constante multiplicativa del umbral de la CRB
ε	Umbral de convergencia
Λ	Conjunto de índices de las simulaciones convergentes
$ \cdot $	Valor absoluto y cardinal de un conjunto
Δ	Incremento o separación
ϱ	Ganancia de una antena
C	Matriz de acoplos
$\text{card}(\cdot)$	Cardinal de un conjunto
V	Conjunto de vectores directores calculado por métodos numéricos
P	Conjunto de direcciones correspondientes a los vectores en V
\mathbf{v}_θ	Cada uno de los elementos del conjunto V

Lista de Símbolos

$N_{iter-lim}$	Número máximo de iteraciones del algoritmo
$N_{eval-lim}$	Número máximo de evaluaciones de la función de ajuste
N_{par}	Número de partículas de PSO
w_p	Masa inercial de las partículas de PSO
C_p	Constante de ponderación particular de PSO
C_g	Constante de ponderación general de PSO
k	Tamaño del archivo de soluciones de $ACO_{\mathbb{R}}$
ω	Peso relativo de cada solución de $ACO_{\mathbb{R}}$
q	Parámetro de ajuste de pesos de $ACO_{\mathbb{R}}$
ξ	Parámetro de diversificación de $ACO_{\mathbb{R}}$
N_{pob}	Tamaño de la población de GA
f_{CR}	Fracción de nuevos elementos de GA
N_{best}	Número de elementos inalterados de GA
N_p	Tamaño de la población de DE
C_r	Probabilidad de recombinación de DE
f_d	Peso diferencial de DE
T_0	Temperatura inicial de SA
T_i	Temperatura actual de SA
I_{ra}	Intervalo de reincremento de temperatura de SA
I_{stall}	Límite de estancamiento de SA

Publicaciones del Autor

- B. Errasti-Alcala y R. Fernandez-Recio, “Metaheuristic Approach for Single Snapshot 2D-DOA and Frequency Estimation: Array Topologies and Performance Analysis,” *IEEE Antennas and Propagation Magazine*. Aceptado, publicación prevista para abril de 2013.
- B. Errasti-Alcala y R. Fernandez-Recio, “Performance Analysis of Metaheuristic Approaches for Single Snapshot DOA Estimation,” *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters (AWPL)*. Aceptado, pendiente de publicación.
- B. Errasti-Alcala y R. Fernandez-Recio, “Use of PSO and EM Numerical Analysis for Single Snapshot DOA Estimation on the Presence of Mutual Coupling,” *Progress In Electromagnetic Research*. Enviado, pendiente de aprobación.
- R. Fernandez-Recio, D. Escot-Bocanegra, D. Poyatos-Martinez, A. Jurado-Lucena, B. Errasti-Alcala, y I. Montiel-Sanchez, “Application of FDTD to HRRP Generation of a Cavity Model for NCTI Purposes,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 47, pp. 1985–1695, jul 2011.
- B. Errasti-Alcalá, A. Jurado-Lucena, D. Escot-Bocanegra, D. Poyatos-Martínez, R. Fernández-Recio, y I. Montiel-Sánchez, “Application of PSO to Electromagnetic and Radar-Related Problems in Non Cooperative Target Identification,” en *Applications of Swarm Intelligence* (L. P. Walters, ed.), pp. 179–192, Engineering Tools, Techniques and Tables, Nova Science Publishers, Inc., 2011.

- A. Jurado-Lucena, B. Errasti-Alcalá, D. Escot-Bocanegra, R. Fernández-Recio, D. Poyatos-Martínez, y I. Montiel Sánchez, “Methodology to Achieve Accurate Non-Cooperative Target Identification Using High Resolution Radar and a Synthetic database,” en *XXIII International Conference on Industrial, Engineering & Other Applications of Applied Intelligent Systems (IEA-AIE)* (N. García-Pedrajas, F. Herrera, C. Fyfe, J. Benítez, y M. Ali, eds.), Lecture Notes in Computer Science, pp. 427–436, Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- D. Poyatos, A. Jurado, B. Errasti, R. Fernández, y D. Escot, “RTO-SET-112: Identificación no cooperativa de aeronaves mediante radar,” *Boletín de Observación Tecnológica en Defensa*, pp. 11–13, oct 2011.
- B. Errasti-Alcala y R. Fernandez-Recio, “On the use of Particle Swarm Optimization for single snapshot DOA and frequency estimation,” en *European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP)*, pp. 3635–3639, mar 2012.
- B. Errasti-Alcalá, D. Escot-Bocanegra, D. Poyatos-Martínez, A. Jurado-Lucena y R. Fernández-Recio, “Joint Direction of Arrival and amplitude estimation using Particle Swarm Optimization and a single snapshot,” en *14th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC)*, may 2010.
- B. Errasti, D. Escot, D. Poyatos y I. Montiel, “Performance analysis of the Particle Swarm Optimization algorithm when applied to direction of arrival estimation,” en *International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*, pp. 447–450, sept 2009.
- R. Fernández-Recio, A. Jurado-Lucena, B. Errasti-Alcalá, D. Escot-Bocanegra, y D. Poyatos-Martínez, “Study of the scattering mechanisms of a set of cospheres,” en *Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC)*, may 2010.

- R. Fernandez-Recio, A. Jurado-Lucena, B. Errasti-Alcala, D. Poyatos-Martinez, D. Escot-Bocanegra, y I. Montiel-Sanchez, “RCS measurements and predictions of different targets for radar benchmark purpose,” en *International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*, pp. 443–446, sept 2009.
- A. Jurado-Lucena, D. Poyatos-Martínez, D. Escot-Bocanegra, B. Errasti-Alcalá, R. Fernández-Recio, y I. Montiel-Sánchez, “On the non cooperative target identification challenge by means of a synthetic database,” en *NATO-RTO SET-160 Symposium on NCI/ATR in Air-Ground and Maritime Applications based on Radar and Acoustics*, 2010.
- P. Gonzalez-Blanco, E. de Diego, E. Millan, B. Errasti, y I. Montiel, “Stepped-frequency waveform radar demonstrator and its jamming,” en *International Waveform Diversity and Design Conference*, pp. 192–196, feb 2009.
- P. Gonzalez-Blanco, E. Millán, E. de Diego, B. Errasti, y I. Montiel, “Synthetic high resolution radar for target identification,” en *IET International Radar Conference*, abr 2009.
- B. Errasti, D. Escot, D. Poyatos, I. González, y I. Montiel, “Rendimiento del Algoritmo del Enjambre (PSO) aplicado a la Estimación del Ángulo de Llegada,” en *XXIII Simposium Nacional URSI 2008*, sept 2008.

Bibliografía

- [1] D. Wehner, *High resolution radar*. Artech House radar library, Artech House, 1987.
- [2] P. Gonzalez-Blanco, E. Millan, E. de Diego, B. Errasti, y I. Montiel, “Synthetic high resolution radar for target identification,” en *IET International Radar Conference*, Abril 2009.
- [3] A. Jurado-Lucena, D. Poyatos-Martínez, D. Escot-Bocanegra, B. Errasti-Alcalá, R. Fernández-Recio, y I. Montiel-Sánchez, “On the non cooperative target identification challenge by means of a synthetic database,” en *NATO-RTO SET-160 Symposium on NCI/ATR in Air-Ground and Maritime Applications based on Radar and Acoustics*, 2010.
- [4] D. Poyatos, A. Jurado, B. Errasti, R. Fernández, y D. Escot, “RTO-SET-112: Identificación no cooperativa de aeronaves mediante radar,” *Boletín de Observación Tecnológica en Defensa*, pp. 11–13, Oct. 2011.
- [5] D. Escot-Bocanegra, *Sistema de Medida Polivalente con Configuración Biestática para Ensayos Electromagnéticos*. Tesis Doctoral. Universidad de Alcalá, 2012.
- [6] R. Fernández-Recio, *Método Híbrido FEM-UTD para el Análisis de Estructuras Radiantes en Entornos Complejo*. Tesis Doctoral. Universidad de Alcalá, 2007.
- [7] R. Fernandez-Recio, D. Escot-Bocanegra, D. Poyatos-Martinez, A. Jurado-Lucena, B. Errasti-Alcala, y I. Montiel-Sanchez, “Application of FDTD to HRRP Generation of a Cavity Model for NCTI Purposes,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 47, pp. 1985–1695, Jul. 2011.
- [8] R. Fernandez-Recio, A. Jurado-Lucena, B. Errasti-Alcala, D. Poyatos-Martinez, D. Escot-Bocanegra, y I. Montiel-Sanchez, “RCS measurements and predictions

BIBLIOGRAFÍA

- of different targets for radar benchmark purpose,” en *International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*, pp. 443–446, Sept. 2009.
- [9] A. Jurado-Lucena, *Desarrollo y Evaluación de Algoritmos de Identificación No Cooperativa de Blancos Radar Reales Mediante Una Base de Datos Sintética: Aproximación Hacia Una Solución Operativa*. Tesis Doctoral. Universidad de Alcalá, 2011.
- [10] A. Jurado-Lucena, B. Errasti-Alcalá, D. Escot-Bocanegra, R. Fernández-Recio, D. Poyatos-Martínez, y I. M. Sánchez, “Methodology to Achieve Accurate Non-Cooperative Target Identification Using High Resolution Radar and a Synthetic database,” en *XXIII International Conference on Industrial, Engineering & Other Applications of Applied Intelligent Systems (IEA-AIE)* (N. García-Pedrajas, F. Herrera, C. Fyfe, J. Benítez, y M. Ali, eds.), Lecture Notes in Computer Science, pp. 427–436, Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [11] P. Gonzalez-Blanco, E. de Diego, E. Millan, B. Errasti, y I. Montiel, “Stepped-frequency waveform radar demonstrator and its jamming,” en *International Waveform Diversity and Design Conference*, pp. 192–196, Feb. 2009.
- [12] R. Schroer, “Electronic warfare. [a century of powered flight: 1903-2003],” *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, vol. 18, pp. 49–54, Jul. 2003.
- [13] J. A. Ratcliffe, “Aerials for radar equipment,” *Journal of the Institution of Electrical Engineers - Part I: General*, vol. 93, pp. 458–459, Oct. 1946.
- [14] W. R. J. DiFranco, “A high-resolution interferometer radar with low angle ambiguity,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 11, pp. 197–198, Marzo 1963.
- [15] D. R. Wells, “Determination of source features by means of interferometry,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 51, p. 1245, Sept. 1963.
- [16] S. Bochner y K. Chandrasekharan, *Fourier Transforms*. Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1949.
- [17] B. D. Van Veen y K. M. Buckley, “Beamforming: a versatile approach to spatial filtering,” *IEEE Acoustics, Speech and Signal Processing Magazine*, vol. 5, pp. 4–24, Abril 1988.

BIBLIOGRAFÍA

- [18] M. S. Bartlett, "Smoothing periodograms from Time-Series with continuous spectra," *Nature*, vol. 161, pp. 686–687, Mayo 1948.
- [19] J. Capon, "High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis," *Proceedings of the IEEE*, vol. 57, pp. 1408–1418, Jun. 1969.
- [20] H. Hotelling, "Analysis of a complex of statistical variables into principal components," *Journal of Educational Psychology*, vol. 24, 1933.
- [21] K. Karhunen, *Ueber lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. A. 1, Mathematica-physica, Annales Academiae scientiarum Fennicae, 1947.
- [22] V. F. Pisarenko, "The retrieval of harmonics from a covariance function," *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, vol. 33, no. 3, pp. 347–366, 1973.
- [23] G. Bienvenu y L. Kopp, "Adaptivity to background noise spatial coherence for high resolution passive methods," en *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pp. 307–310, Abril 1979.
- [24] R. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 34, pp. 276–280, Marzo 1986.
- [25] R. Kumaresan y D. W. Tufts, "Estimating the angles of arrival of multiple plane waves," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 19, pp. 134–139, Enero 1983.
- [26] S. S. Reddi, "Multiple source location-A digital approach," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-15, pp. 95–105, Enero 1979.
- [27] F. Li, R. J. Vaccaro, y D. W. Tufts, "Min-Norm Linear Prediction for Arbitrary Sensor Arrays," en *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pp. 2613–2616, Mayo 1989.
- [28] M. Kaveh y A. Barabell, "The statistical performance of the MUSIC and the minimum-norm algorithms in resolving plane waves in noise," *Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 34, pp. 331–341, Abril 1986.
- [29] K. M. Buckley y X. L. Xu, "Spatial-spectrum estimation in a location sector," *Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 38, pp. 1842–1852, 1990.

BIBLIOGRAFÍA

- [30] D. R. Farrier y L. R. Prosser, "A signal subspace beamformer," en *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1990.
- [31] X. L. Xu y K. Buckley, "An analysis of beam-space source localization," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, pp. 501–504, Enero 1993.
- [32] N. Wiener, *Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series: with engineering applications*. Technology press books in science and engineering, Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology, 1964.
- [33] T. J. Shan, M. Wax, y T. Kailath, "On spatial smoothing for direction-of-arrival estimation of coherent signals," *Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 33, pp. 806–811, Ago. 1985.
- [34] W. Xu y M. Kaveh, "Comparative study of the biases of MUSIC-like estimators," *Signal Processing*, vol. 50, no. 1–2, pp. 39–55, 1996.
- [35] H. Krim y M. Viberg, "Two decades of array signal processing research: the parametric approach," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 13, pp. 67–94, Jul. 1996.
- [36] M. Wax, "Detection and localization of multiple sources via the stochastic signals model," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39, pp. 2450–2456, Nov. 1991.
- [37] J. Bohme, "Estimation of source parameters by maximum likelihood and nonlinear regression," en *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 9, pp. 271–274, 1984.
- [38] M. Wax, "Detection and localization of multiple sources in noise with unknown covariance," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, no. 1, pp. 245–249, 1992.
- [39] P. Stoica y A. Nehorai, "Performance study of conditional and unconditional direction-of-arrival estimation," *Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 38, pp. 1783–1795, Oct. 1990.

BIBLIOGRAFÍA

- [40] P. Stoica y N. Arye, "MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound," *Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 37, pp. 720–741, Mayo 1989.
- [41] P. Stoica y K. Sharman, "Novel eigenanalysis method for direction estimation," en *IEE Proceedings Radar and Signal Processing*, pp. 19–26, 1990.
- [42] M. Viberg, B. Ottersten, y T. Kailath, "Detection and estimation in sensor arrays using weighted subspace fitting," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39, pp. 2436–2449, Nov. 1991.
- [43] A. Swindlehurst y M. Viberg, "Subspace fitting with diversely polarized antenna arrays," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 41, pp. 1687–1694, 1993.
- [44] A. Barabell, "Improving the resolution performance of eigenstructure-based direction-finding algorithms," en *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 8, pp. 336–339, Abril 1983.
- [45] R. Roy y T. Kailath, "Esprit-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques," *Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 37, pp. 984–995, Jul. 1989.
- [46] G. Golub y C. Van Loan, *Matrix Computations*. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences, Johns Hopkins University Press, 1996.
- [47] Q. Cheng, R. Yang, y H. Zhang, "Optimally weighted esprit using uniform circular arrays," *Computers and Electrical Engineering*, vol. 31, no. 4–5, pp. 272–281, 2005.
- [48] S. Marcos, A. Marsal, y M. Benidir, "The propagator method for source bearing estimation," *Signal Processing*, vol. 42, no. 2, pp. 121–138, 1995.
- [49] Y. Bresler y A. Macovski, "Exact maximum likelihood parameter estimation of superimposed exponential signals in noise," *Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 34, pp. 1081–1089, Oct. 1986.
- [50] Y. Hua y T. K. Sarkar, "Further analysis of three modern techniques for pole retrieval from data sequence," en *Proceedings of 30th Midwest Symposium on Circuits and Systems*, pp. 793–797, 1987.

BIBLIOGRAFÍA

- [51] V. K. Jain, "Filter Analysis by use of pencil-of-functions: Part I," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 21, pp. 574–579, Sept. 1974.
- [52] V. K. Jain, "Filter Analysis by use of pencil-of-functions: Part II," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 21, pp. 580–583, Sept. 1974.
- [53] Y. Hua y T. K. Sarkar, "Matrix Pencil Method for Estimating Parameters of Exponentially Damped–Undamped Sinusoids in Noise," *Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 38, pp. 814–824, Mayo 1990.
- [54] Y. Hua y T. K. Sarkar, "Parameter estimation of multiple transient signals," *Signal Processing*, vol. 28, pp. 109–115, Jul. 1992.
- [55] T. K. Sarkar y O. Pereira, "Using the matrix Pencil method to estimate the parameters of a sum of Complex exponentials," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 37, no. 1, 1995.
- [56] A. Swami y J. M. Mendel, "Cumulant-based approach to harmonic retrieval and related problems," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39, pp. 1099–1109, Mayo 1991.
- [57] G. Scarano y G. Jacovitti, "Applications of generalized cumulants to array processing," *Signal Processing*, vol. 53, no. 2–3, pp. 179–193, 1996.
- [58] F. Liu, C. Sun, J. Wang, y R. Du, "A robust algorithm based on spatial differencing matrix for source number detection and doa estimation in multipath environment," *Physics Procedia*, vol. 33, pp. 991–999, 2012.
- [59] I. F. Gorodnitsky y B. D. Rao, "Sparse signal reconstruction from limited data using focuss: A re-weighted minimum norm algorithm," *IEEE Transactions on Signal Processing*, pp. 600–616, 1997.
- [60] C. La y M. N. Do, "Signal reconstruction using sparse tree representation," en *Proceedings on Wavelets XI at SPIE Optics and Photonics*, 2005.
- [61] S. F. Cotter, B. D. Rao, K. Engan, y K. Kreutz-delgado, "Sparse solutions to linear inverse problems with multiple measurement vectors," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, pp. 2477–2488, jul 2005.

BIBLIOGRAFÍA

- [62] M. F. Duarte, S. Sarvotham, D. Baron, M. B. Wakin, y R. G. Baraniuk, “Distributed compressed sensing of jointly sparse signals,” en *Conference Record of the Thirty-Ninth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, pp. 1537–1541, 2005.
- [63] D. Malioutov, “A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays,” en *M.S. Thesis, Massachusetts Institute of Technology*, 2003.
- [64] D. Malioutov, M. Cetin, y A. S. Willsky, “A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, pp. 3010–3022, Ago. 2005.
- [65] D. L. Donoho, “Compressed sensing,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, pp. 1289–1306, Abril 2006.
- [66] R. Baraniuk, “Compressive sensing, [lecture notes],” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 24, pp. 118–121, 2007.
- [67] Y. Wang, G. Leus, y A. Pandharipande, “Direction estimation using compressive sampling array processing,” en *IEEE/SP 15th Workshop on Statistical Signal Processing*, pp. 626–629, 2009.
- [68] Z. Weng y X. Wang, “Support recovery in compressive sensing for estimation of direction-of-arrival,” en *Conference Record of the Forty Fifth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, 2011.
- [69] B. Li, Y. Zou, y Y. Zhu, “Direction estimation under compressive sensing framework: A review and experimental results,” en *IEEE International Conference on Information and Automation (ICIA)*, pp. 63–68, 2011.
- [70] S. Blunt, T. Chan, y K. Gerlach, “Robust doa estimation: The reiterative superresolution (risr) algorithm,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 47, pp. 332–346, Enero 2011.
- [71] I. Dotlic y A. Zejak, “Pattern sidelobe level suppression on antenna array with arbitrary geometry by the irls algorithm,” en *EUROCON, International Conference on Trends in Communications*, vol. 1, pp. 167–177 vol.1, 2001.

BIBLIOGRAFÍA

- [72] M. F. Khan y M. Tufail, “Computationally efficient 2D beamspace matrix pencil method for direction of arrival estimation,” *Digital Signal Processing*, vol. 20, no. 6, pp. 1526–1534, 2010.
- [73] B. V. Veen y B. Williams, “Structured covariance matrices and dimensionality reduction in array processing,” en *Fourth Annual ASSP Workshop on Spectrum Estimation and Modeling*, pp. 168–171, Ago. 1988.
- [74] S. Anderson, “On optimal dimension reduction for sensor array signal processing,” *Signal Processing*, vol. 30, no. 2, pp. 245–256, 1993.
- [75] N. Yilmazer y T. K. Sarkar, “2-D unitary matrix pencil method for efficient direction of arrival estimation,” *Digital Signal Processing*, vol. 16, no. 6, pp. 767–781, 2006.
- [76] N. Yilmazer, R. Fernández-Recio, y T. K. Sarkar, “Matrix pencil method for simultaneously estimating azimuth and elevation angles of arrival along with the frequency of the incoming signals,” *Digital Signal Processing*, vol. 16, no. 6, pp. 796–816, 2006.
- [77] M. F. Khan y M. Tufail, “3D modified unitary matrix pencil method with automatic grouping of unknown parameters of far field signals,” *Digital Signal Processing*, vol. 23, no. 1, pp. 355–363, 2013.
- [78] M. Haardt y J. A. Nossek, “3-D unitary esprit for joint 2-D angle and carrier estimation,” en *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pp. 255–258, Abril 1997.
- [79] P. Strobach, “Total least squares phased averaging and 3-D ESPRIT for joint azimuth-elevation-carrier estimation,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, pp. 54–62, 2001.
- [80] Y. Wu, G. Liao, y H. So, “A fast algorithm for 2-D direction-of-arrival estimation,” *Signal Processing*, vol. 83, no. 8, pp. 1827–1831, 2003.
- [81] J. Li, X. Zhang, y H. Chen, “Improved two-dimensional DOA estimation algorithm for two-parallel uniform linear arrays using propagator method,” *Signal Processing*, vol. 92, no. 12, pp. 3032–3038, 2012.

BIBLIOGRAFÍA

- [82] R. J. Weber y Y. Huang, “A wideband circular array for frequency and 2D angle estimation,” en *IEEE Aerospace Conference*, pp. 1–8, 2010.
- [83] M. A. Hasan, “DOA and frequency estimation using fast subspace algorithms,” *Signal Processing*, vol. 77, no. 1, pp. 49–62, 1999.
- [84] A. B. Gershman, M. RübSamen, y M. Pesavento, “One- and two-dimensional direction-of-arrival estimation: An overview of search-free techniques,” *Signal Processing*, vol. 90, no. 5, pp. 1338–1349, 2010.
- [85] G. Hatke y K. Forsythe, “A class of polynomial rooting algorithms for joint azimuth/elevation estimation using multidimensional arrays,” en *Conference Record of the Twenty-Eighth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, 1994.
- [86] P. Häcker y B. Yang, “Single snapshot DOA estimation,” *Advances in Radio Science*, vol. 8, pp. 251–256, 2010.
- [87] Q. S. Ren y A. Willis, “Extending MUSIC to single snapshot and on line direction finding applications,” *Radar 97, Conference Publications*, pp. 783–787, Oct. 1997.
- [88] E. A. Marengo y F. K. Gruber, “Single snapshot signal subspace method for target location,” en *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, pp. 660–663, Jul. 2005.
- [89] R. O’Brien y K. Kiriakidis, “Single-snapshot robust direction finding,” en *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pp. 93–6, vol 2, Mayo 2004.
- [90] R. O’Brien y K. Kiriakidis, “Single-snapshot robust direction finding,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, pp. 1974–1978, Jun. 2005.
- [91] A. Thakre, M. Haardt, y K. Giridhar, “Single snapshot spatial smoothing with improved effective array aperture,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 16, pp. 505–508, Jun. 2009.
- [92] R. Fernández-Recio, L. Garcia-Castillo, T. K. Sarkar, y M. Salazar-Palma, “Estimation of the direction of arrival of broadband signals using a single snapshot,” en *7th European Conference on Wireless Technology*, pp. 337–340, Oct. 1994.

- [93] L. Vaskelainen, "Virtual array synthesis method for planar array antennas," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 46, pp. 391–396, 1998.
- [94] H. Zhang y L. G. . Y. Wu, "Two-dimension direction finding using single-snapshot data," en *International Conference on Communication Technology*, pp. 1–4, Nov. 2006.
- [95] H. Semira, H. Belkacemi, y N. Doghmane, "Single snapshot projection based method for azimuth/elevation directions of arrival estimation," en *International Symposium on Signal Processing and Its Applications*, pp. 1–4, Feb. 2007.
- [96] I. Gupta y A. Ksienski, "Dependence of adaptive array performance on conventional array design," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 30, pp. 449–553, Jul. 1982.
- [97] I. Gupta y A. Ksienski, "Effect of mutual coupling on the performance of adaptive arrays," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 31, pp. 785–791, Sept. 1983.
- [98] B. Friedlander y A. J. Weiss, "Direction finding in the presence of mutual coupling," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 39, pp. 273–284, Marzo 1991.
- [99] A. Paulraj y T. Kailath, "Direction of arrival estimation by eigenstructure methods with unknown sensor gain and phase," en *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 10, pp. 640–643, Abril 1985.
- [100] T. Svantesson, "The effects of mutual coupling using a linear array of thin dipoles of finite length," en *Proceedings of the Ninth IEEE SP Workshop on Statistical Signal and Array Processing*, pp. 232–235, Sept. 1998.
- [101] T. Svantesson, "Modeling and estimation of mutual coupling in a uniform linear array of dipoles," en *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 5, pp. 2961–2964, 1999.
- [102] T. Svantesson, "Mutual coupling compensation using subspace fitting," en *Proceedings of the 2000 IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop*, pp. 494–498, 2000.

BIBLIOGRAFÍA

- [103] R. S. Adve y T. K. Sarkar, "Compensation for the effects of mutual coupling on direct data domain adaptive algorithms," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 48, pp. 86–94, Enero 2000.
- [104] R. F. Harrington, *Time Harmonic Electromagnetic Fields*. McGraw-Hill, Inc., 1961.
- [105] K. Kim, T. K. Sarkar, y M. Salazar-Palma, "Adaptive processing using a single snapshot for a nonuniformly spaced array in the presence of mutual coupling and near-field scatterers," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 50, pp. 582–590, Mayo 2002.
- [106] K. R. Dandekar, H. Ling, y G. Xu, "Experimental study of mutual coupling compensation in smart antenna applications," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 1, pp. 480–487, Jul. 2002.
- [107] C. K. E. Lau, R. S. Adve, y T. K. Sarkar, "Minimum norm mutual coupling compensation with applications in direction of arrival estimation," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 52, pp. 2034–2041, Ago. 2004.
- [108] S. Henault y Y. M. Y. Antar, "Accurate evaluation of mutual coupling for array calibration," en *Computational Electromagnetics International Workshop*, pp. 34–37, Jul. 2009.
- [109] H. T. Hui, "Improved compensation for the mutual coupling effect in a dipole array for direction finding," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 51, pp. 2498–2503, Sept. 2003.
- [110] H. T. Hui, "A practical approach to compensate for the mutual coupling effect in an adaptive dipole array," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 52, pp. 1262–1269, Mayo 2004.
- [111] H. S. Lui y H. T. Hui, "Mutual coupling compensation for direction-of-arrival estimations using the receiving-mutual-impedance method," *International Journal of Antennas and Propagation*, vol. 2010, Mayo 2010.
- [112] Z. Ye y C. Liu, "2-D DOA estimation in the presence of mutual coupling," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 56, pp. 3150–3158, Oct. 2008.

BIBLIOGRAFÍA

- [113] J. Liang, X. Zeng, W. Wang, y H. Chen, “L-shaped array-based elevation and azimuth direction finding in the presence of mutual coupling,” *Signal Processing*, vol. 91, pp. 1319–1328, Oct. 2011.
- [114] J. Liang y D. Liu, “Two L-shaped array-based 2-D DOAs estimation in the presence of mutual coupling,” *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 112, pp. 273–298, 2011.
- [115] C. Craeye y D. González-Ovejero, “A review on array mutual coupling analysis,” *Radio Science*, vol. 46, RS2012, 2011.
- [116] J. Kennedy y R. Eberhart, “Particle swarm optimization,” en *Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks*, vol. 4, pp. 1942–1948 vol.4, nov/dic 1995.
- [117] J. Matyas, “Random optimization,” *Automation and Remote Control*, vol. 26, pp. 264–253, 1965.
- [118] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, y M. P. Vecchi, “Optimization by Simulated Annealing,” *Science*, vol. 220, pp. 671–680, Mayo 1983.
- [119] D. Solow y P. Sengupta, “A finite descent theory for linear programming, piecewise linear convex minimization, and the linear complementarity problem,” *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 32, no. 3, pp. 417–431, 1985.
- [120] J. Ramanujam y P. Sadayappan, “Optimization by neural networks,” en *IEEE International Conference on Neural Networks*, pp. 325–332, Jul. 1988.
- [121] D. E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison-Wesley Professional, 1 ed., Enero 1989.
- [122] P. Moscato, “On evolution, search, optimization, genetic algorithms and martial arts - towards memetic algorithms,” tech. rep., Caltech Concurrent Computation Program. Technical Reports 826, 1989.
- [123] F. Glover, “Tabu search - part I,” *ORSA Journal on Computing*, vol. 1, pp. 190–206, 1989.

- [124] R. Storn y K. Price, "Differential evolution - a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces," *Journal of Global Optimization*, 1995.
- [125] A. W. Johnson, *Generalized Hill Climbing algorithms for discrete optimization problems*. PhD Dissertation, Department of Industrial and Systems Engineering. Virginia Polytechnic Institute and State University, 1996.
- [126] M. Dorigo, V. Maniezzo, y A. Colorni, "The Ant System: Optimization by a colony of cooperating agents," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Part B: Cybernetics*, vol. 26, no. 1, pp. 29–41, 1996.
- [127] A. Fanni, A. Manunza, M. Marchesi, y F. Pilo, "Tabu search metaheuristics for global optimization of electromagnetic problems," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 34, pp. 2960–2963, Sept. 1989.
- [128] J. Robinson y Y. Rahmat-Samii, "Particle swarm optimization in electromagnetics," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 52, no. 2, pp. 397–407, 2004.
- [129] S. Devi, D. G. Jadhav, y S. S. Pattnaik, "Memetic algorithm and its application to function optimization and noise removal," en *2011 World Congress on Information and Communication Technologies (WICT)*, pp. 748–7533, Dic. 2011.
- [130] K. Sharman, "Maximum likelihood parameter estimation by simulated annealing," en *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pp. 2741–2744, Abril 1988.
- [131] Z. Jiankui, H. Zishu, y L. Benyong, "Maximum likelihood DOA estimation using particle swarm optimization algorithm," en *International Conference on Radar*, pp. 1–4, Oct. 2006.
- [132] Y. Yang, Y. Hou, y X. Liu, "Two dimensional DOA estimation by ant colony optimization," en *International Conference on Intelligent System Design and Engineering Application (ISDEA)*, pp. 789–792, Oct. 2010.
- [133] Y. Jiao, J. Huang, y Y. Hou, "Multidimensional MUSIC DOA estimation using ant colony optimization algorithm," en *IEEE International Conference on Signal Processing (ICSP)*, pp. 291–294, Oct. 2010.

BIBLIOGRAFÍA

- [134] Y. Jin, Y. Hou, y M. Jiang, “Frequency-DOA joint estimation by ant colony optimization,” en *International Conference on Computer Application and System Modeling (ICCAASM)*, pp. 122–125, Oct. 2010.
- [135] D. Escot, D. Poyatos, I. Gonzalez, F. S. de Adana, y M. F. Catedra, “Application of particle swarm optimization (PSO) to single-snapshot direction of arrival (DOA) estimation,” en *Antennas and Propagation International Symposium*, pp. 5287–5290, Jun. 2007.
- [136] J.-J. Fuchs, “Estimation of the number of signals in the presence of unknown correlated sensor noise,” *Trans. Sig. Proc.*, vol. 40, pp. 1053–1061, Mayo 1992.
- [137] M. Suzuki, H. Sanada, y N. Naga, “Detection of signal number based on statistics of maximum likelihood,” en *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 2 of *ICASSP '00*, (Washington, DC, USA), pp. II733–II736, IEEE Computer Society, 2000.
- [138] Z. An, H. Su, y Z. Bao, “A new method for fast estimation of number of signals,” en *Proceedings of the 2008 Congress on Image and Signal Processing*, vol. 5 of *CISP '08*, (Washington, DC, USA), pp. 390–393, IEEE Computer Society, 2008.
- [139] B. M. Radich y K. M. Buckley, “Single-snapshot DOA estimation and source number detection,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 4, pp. 109–111, Abril 1997.
- [140] C. R. Rao, “Information and accuracy attainable in the estimation of statistical parameters,” *Bulletin of Calcutta Mathematical Society*, vol. 37, pp. 81–91, 1945.
- [141] H. Cramer, *Mathematical methods of statistics*. Princeton University Press, Princeton, 1946.
- [142] S. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*, vol. 1 of *Prentice Hall Signal Processing Series*. Prentice Hall, 1993.
- [143] A. van den Bos, “The multivariate complex normal distribution—a generalization,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 41, pp. 537–539, Marzo 1995.
- [144] R. A. Wooding, “The multivariate distribution of complex normal variables,” *Biometrika*, vol. 4, no. 1-2, pp. 212–215, 1956.

- [145] MATLAB, “version 7.10.0.449 (r2010a),” 2010.
- [146] B. Errasti-Alcala y R. Fernandez-Recio, “Metaheuristic Approach for Single Snapshot 2D-DOA and Frequency Estimation: Array Topologies and Performance Analysis,” *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Abril 2013. Aceptado.
- [147] B. Errasti-Alcalá, A. Jurado-Lucena, D. Escot-Bocanegra, D. Poyatos-Martínez, R. Fernández-Recio, y I. Montiel-Sánchez, “Application of PSO to Electromagnetic and Radar-Related Problems in Non Cooperative Target Identification,” en *Applications of Swarm Intelligence* (L. P. Walters, ed.), pp. 179–192, Engineering Tools, Techniques and Tables, Nova Science Publishers, Inc., 2011.
- [148] B. Errasti-Alcala y R. Fernandez-Recio, “On the use of Particle Swarm Optimization for single snapshot DOA and frequency estimation,” en *European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP)*, pp. 3635–3639, Marzo 2012.
- [149] B. Errasti-Alcalá, D. Escot-Bocanegra, D. Poyatos-Martínez, A. Jurado-Lucena, y R. Fernández-Recio, “Joint Direction of Arrival and amplitude estimation using Particle Swarm Optimization and a single snapshot,” en *14th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC)*, Mayo 2010.
- [150] B. Errasti, D. Escot, D. Poyatos, y I. Montiel, “Performance analysis of the Particle Swarm Optimization algorithm when applied to direction of arrival estimation,” en *International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*, pp. 447–450, Sept. 2009.
- [151] B. Errasti, D. Escot, D. Poyatos, I. González, y I. Montiel, “Rendimiento del Algoritmo del Enjambre (PSO) aplicado a la Estimación del Ángulo de Llegada,” en *XXIII Simposium Nacional URSI 2008*, Sept. 2008.
- [152] R. Schmidt, “Multilinear array manifold interpolation,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, pp. 857–866, Abril 1992.
- [153] T. Sarkar, M. Wicks, y R. Bonneau, *Smart Antennas*. Wiley Series in Microwave and Optical Engineering, Wiley, 2003.
- [154] B. Errasti-Alcala y R. Fernandez-Recio, “Use of PSO and EM Numerical Analysis for Single Snapshot DOA Estimation on the Presence of Mutual Coupling,” *Progress In Electromagnetic Research*. Enviado, pendiente de aprobación.

BIBLIOGRAFÍA

- [155] A. P. Engelbrecht, *Fundamentals of Computational Swarm Intelligence*. John Wiley & Sons, 2006.
- [156] L. Walters, *Applications of Swarm Intelligence*. Engineering Tools, Techniques and Tables Series, Nova Science Publishers Incorporated, 2011.
- [157] K. De Jong, *Evolutionary computation: a unified approach*. Bradford Books, MIT Press, 2006.
- [158] Eberhart y Y. Shi, “Particle swarm optimization: developments, applications and resources,” en *Congress on Evolutionary Computation*, vol. 1, pp. 81–86, 2001.
- [159] K. Socha y M. Dorigo, “Ant colony optimization for continuous domains,” *European Journal of Operational Research*, vol. 185, pp. 1155–1173, Marzo 2008.
- [160] R. Johnson y M. G. Pilcher, “The traveling salesman problem,” en *Networks* (E. Lawler, J. Lenstra, A. R. Kan, y D. Shmoys, eds.), vol. 18 of *Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company*, pp. 253–254, John Wiley & Sons, 1985.
- [161] G. E. P. Box y M. E. Muller, “A Note on the Generation of Random Normal Deviates,” *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 29, pp. 610–611, Jun. 1958.
- [162] G. Marsaglia y W. W. Tsang, “The Ziggurat Method for Generating Random Variables,” *Journal of Statistical Software*, vol. 5, pp. 1–7, Oct. 2000.
- [163] J. E. Baker, “Reducing bias and inefficiency in the selection algorithm,” en *Proceedings of the Second International Conference on Genetic Algorithms on Genetic algorithms and their application*, (Hillsdale, NJ, USA), pp. 14–21, L. Erlbaum Associates Inc., 1987.
- [164] R. Mercer y J. Sampson, “Adaptive search using a reproductive metaplan,” *The International Journal of Systems and Cybernetics*, vol. 7, pp. 215–228, 1978.
- [165] R. Storn, “On the usage of differential evolution for function optimization,” en *Biennial Conference of the NAFIPS '96*, pp. 519–523, IEEE, 1996.
- [166] D. Zaharie, “Critical values for the control parameters of differential evolution algorithm,” en *Proceedings of MENDEL 2002, 8th International Mendel Conference on Soft Computing* (R. Matouek y P. Omera, eds.), pp. 62–67, Jun. 2002.

BIBLIOGRAFÍA

- [167] M. E. H. Pedersen, "Swarmops, numerical and heuristic optimization," 2012. *Online*. <http://www.hvass-labs.org/projects/swarmops/>.
- [168] G. Brassard y P. Bratley, *Fundamentals of algorithmics*. Prentice Hall, 1996.
- [169] B. Errasti-Alcala y R. Fernandez-Recio, "Performance Analysis of Metaheuristic Approaches for Single Snapshot DOA Estimation," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters (AWPL)*. Aceptado. Pendiente de publicación.