Vicente T. González Catalá

Análisis de las Operaciones Financieras Bancarias y Bursátiles

Ediciones Ciencias Sociales

2-0

Vicente T. González Catalá

Análisis de las Operaciones Financieras Bancarias y Bursátiles

Vicente T. González Catalá

Análisis de las Operaciones Financieras Bancarias y Bursátiles

Ediciones Ciencias Sociales

Portada: Reproducción de «El prestamista y su mujer» (detalle)
METSYS. MUSEO LOUVRE

Emilio Mario, 11. 28002 Madrid

Fotocomposición: Fernández Ciudad, S. L.
Impresión: Fernández Ciudad, S. L.
Encuadernación: E. Unidad, S. L.

ISBN: 84-87510-29-9
Depósito legal: M. 6.905/1992

Impreso en España - *Printed in Spain*

A Hugo Vicente,
mi hijo.

INDICE GENERAL

II.—RENTAS FINANCIERAS

III.—AMORTIZACION Y CONSTITUCION

III.1.—AMORTIZACION

IV.3.—EMPRESTITOS CON CARACTERISTICAS COMERCIALES TANTOS EFECTIVOS

IV.4.—EMPRESTITOS DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA OBLIGACION

IV.5.—LOS EMPRESTITOS Y LOS IMPUESTOS

V.—OPERACIONES BANCARIAS

VI.—OPERACIONES CON TITULOS VALORES: OPERACIONES DE BOLSA

VII.—OPERACIONES ESPECIALES

VII.1.—LAS OPERACIONES FINANCIERAS Y LA DEPRECIACION MONETARIA

VII.2.—PLANES DE AHORRO Y PREVISION

VII.3.—LAS OPERACIONES DE INVERSION

PROLOGO

Las investigaciones y logros alcanzados en los últimos treinta años en el entorno de la Economía Financiera se traducen en la aparición de nuevos métodos científicos y operativos para el tratamiento de la actual problemática económico-empresarial.

Una gran parte de las investigaciones se han dirigido a tratar de elaborar métodos y modelos que permitan introducir planteamientos lógico-financieros en las inversiones y en la financiación, es decir, en dos de las vertientes más decisivas en el ámbito de la Economía. Ahora bien, este campo presenta distintos niveles de problemas, por una parte, el propio de las inversiones, por otra, las distintas formas de financiación y, en tercer lugar, los que se derivan de la consideración conjunta inversión-financiación.

Como consecuencia de los avances logrados se ha llegado a enmarcar un conjunto de funciones especializadas en el ámbito de la economía con especial incidencia en la Economía de la Empresa. Cabe resaltar entre otras como necesidades de especialización concretas las siguientes:

- *Estudio de problemas financieros, comerciales y de contabilidad.*
- *Presupuestación económico-financiera.*
- *Análisis de los aspectos económico-financieros y de administración sobre ampliaciones de capital, emisiones de acciones y de empréstitos, operaciones de préstamos, operaciones de formación de capital, previsiones para renovación de equipos, amortizaciones de equipos y en general, sobre la política empresarial de crédito.*
- *Establecimiento de criterios selectivos de inversiones y de valoración de empresas con sus correspondientes modelos y aplicación de técnicas para su evaluación.*
- *Análisis y planificación de inversiones y su financiación.*
- *Financiación de medios, incluidos los criterios frente al riesgo y la incertidumbre. Técnicas de gestión y control financiero.*
- *Gestión del riesgo y del crédito.*

Al análisis, comprensión y diagnóstico de las funciones enumeradas contribuye la Matemática de las Operaciones Financieras que tiene por objeto el estudio de un importante cuerpo de fenómenos de la actividad económica conocidos con el nombre de operaciones financieras. Esta disciplina estudia los fundamentos del fenómeno financiero y leyes que lo rigen para tratar de dar una visión unitaria y profunda de la lógica y métrica financiera y así proporcionar precisión y ahorro de medios a la solución de problemas económicos.

Nuestro propósito, al elaborar el manual, ha sido el de proporcionar un instrumento de trabajo y consulta que cumpliendo la finalidad de la materia sirva a la realidad económico-financiera, es decir, compatibilice el rigor científico con el estudio práctico de las operaciones financieras en su sentido más amplio. A ello trata de responder el título asignado al manual «ANALISIS DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS, BANCARIAS Y BURSATILES», la sistematización seguida en su desarrollo y el nivel de los planteamientos teóricos desarrollados, con sus correspondientes aplicaciones empírico-prácticas.

Asimismo se ha estado en todo momento pensando en recoger las necesidades habituales del profesional, del opositor y del estudiante. Creemos por ello que está justificado desarrollar un manual en el que no se han incluido aquellos aspectos teóricos que revisten mayor complejidad o que su utilización es menos frecuente, ya que por otra parte el estudioso puede encontrarlos desarrollados con la suficiente rigurosidad, profundidad y precisión en la obra «Matemática de las Operaciones Financieras» del profesor Gil Peláez. También puede ser utilizada en la misma línea de prolongación la «Matemática de la Financiación» del profesor Rodríguez Rodríguez. Asimismo, quien se encuentre con deseos de abordar ejercicios y supuestos prácticos de mayor complejidad encontrará publicada en esta colección, del mismo autor que suscribe, la obra «Enfoque práctico de las Operaciones de la Matemática Financiera».

La obra se estructura en siete partes cuyos títulos y contenido pasamos a reseñar sintéticamente.

En la primera parte, **conceptos básicos, leyes financieras y equivalencia de capitales,** *se plantea el fenómeno financiero, el concepto de capital financiero y el intercambio de capitales, así como las leyes financieras y sus propiedades, se definen las operaciones financieras dando algunas clasificaciones de ellas. Se obtienen las leyes financieras clásicas (interés simple, interés compuesto, descuento simple comercial, descuento simple racional y descuento compuesto). También en este apartado se abordan problemas tan notables como el de la capitalización y descuento fraccionados, los tantos equivalentes, tantos nominal y efectivo, la determinación del vencimiento común y del vencimiento medio, el cálculo del tanto medio, la sustitución de un capital por otros varios, el desdoblamiento de créditos y la prórroga de vencimientos.*

Con el fin de aplicar los conceptos introducidos se resuelven cuarenta y un ejercicios.

Al estudio de las **rentas financieras** *se dedica la segunda parte. Una vez definidas y clasificadas se pasa a efectuar su valoración, con las leyes clásicas, en los puntos notables siguiendo la tipología más notable que distingue entre rentas discretas y continuas, prepagables y pospagables, inmediatas diferidas y anticipadas, constantes y variables, temporales y perpetuas. También se incluyen las rentas fraccionadas y las rentas con periodicidad superior al año. El estudio de estas rentas financieras es básico para cualquier análisis de operaciones y valoración de los flujos económicos de las inversiones y financiaciones.*

Las restantes partes de la obra se dedican al estudio de las operaciones notables.

La **amortización de préstamos y la constitución o formación de capitales** *en sus modalidades más usuales son analizadas en la tercera parte. Asimismo, en ella, también se abordan el cálculo de los denominados réditos y tantos medios efectivos de las operaciones financieras y se resuelven veinte ejercicios.*

La cuarta parte es la más extensa de la obra y en ella se estudian las **operaciones de empréstitos obligaciones** *distinguiendo entre:*

— *Normales o puros y con características comerciales.*

— *Con pago periódico de intereses o cupones (pospagables y prepagables) y con abono de intereses acumulados o cupón cero.*

Desde el punto de vista matemático, el emisor o prestatario se plantea básicamente los siguientes problemas:

a) Cantidad periódica a destinar al servicio de empréstito para su amortización.

b) Cálculo del número de obligaciones y del número de amortizadas en cada período.

c) Dadas las características comerciales del empréstito, determinar el tanto efectivo del mismo.

Para el obligacionista, la suscripción de un título de un empréstito supone una colocación de capital por lo que la decisión de invertir se basará fundamentalmente en:

1. La rentabilidad media esperada.

2. Estimación de la duración de la inversión.

Además de los problemas enunciados se estudian también los referentes a la valoración de un título en el mercado y a la fiscalidad de las obligaciones tanto desde la vertiente del emisor o financiado como desde la del obligacionista o inversor. También se resuelven cuarente y un ejercicios.

Un importante grupo de operaciones financieras está integrado por las **operaciones bancarias.** *Para analizar sus peculiares características y las fundamentales de ellas se dedica la quinta parte. Se distinguen las operaciones pasivas, las operaciones activas y los servicios bancarios. Entre las operaciones pasivas o de depósito se hace mención específica de las imposiciones a plazo, certificados de depósito, bonos de caja y cédulas hipotecarias, cuentas corrientes y de ahorro. De las operaciones activas de crédito y de préstamo se estudian en esta parte el descuento bancario (comercial y financiero) y la cuenta corriente de crédito. En cuanto a los servicios bancarios se hace mención de los más usuales.*

Como complemento al estudio teórico se desarrollan dieciséis ejercicios.

La sexta parte del manual se dedica a las **operaciones con títulos valores.** *Se introduce la nomenclatura propia de este grupo de operaciones, se determinan sus rentabilidades y se estudian las valoraciones de obligaciones y fondos públicos, acciones, letras y pagarés. Seguidamente se describen las operaciones distinguiendo entre operaciones de bolsa y operaciones basadas en los resultados de las operaciones de bolsa. En las primeras se hace mención de las operaciones al contado, al contado con crédito, a plazo (en firme y condicionales) y dobles. Entre las operaciones que se apoyan en los resultados bursátiles se tratan las ampliaciones y reducciones de capitales, las pignoraciones, conversiones y suscripciones.*

Además, intercalados en el texto se resuelven cincuenta ejercicios.

La séptima y última parte se dedica al estudio de operaciones de máxima actualidad con el fin de introducirnos en la economía financiera real. Se estudian las operaciones financieras *en un contexto con inflación, los planes de ahorro y previsión, una introducción al análisis de inversiones como operaciones financieras especiales, se analizan los valores mobiliarios teniendo presente el efecto de la inflación, los títulos indizados y los convertibles y se termina con las operaciones de cobertura de riesgos de cambio y de tipo de interés.*

También se efectúan las correspondientes aplicaciones prácticas.

Con el fin de servir de orientación a aquellos que por primera vez van a abordar el estudio de esta disciplina vamos a reflejar una parte importante de estudios, profesiones, oposiciones y actividades en las que se utilizan total o parcialmente las materias, de este manual, debiendo tener presente que esta relación no agota todas las posibilidades. A saber:

a) **Estudios.**

Economista o Actuario (Facultades de Ciencias Económicas y Empresariales - Rama de Economía de la Empresa y Rama Actuarial).
Diplomado en Estudios Empresariales (Escuelas Universitarias de Ciencias Empresariales).
Directivo-Técnico de Empresas, Abogado Empresarial, Abogado Directivo-Técnico de Empresas (ICADE).
Diplomado en Técnica Empresarial (CESEA).
Diplomado en Dirección y Administración de Empresas: Dirección Económico-Financiera (ESADE).
Ingeniero Técnico de Dirección de Empresas Agrarias (INEA).
Técnico de Empresas Turísticas y Actividades (Escuela Oficial de Turismo).
Formación Profesional de Segundo Grado, Especialidad Administrativa.

b) **Oposiciones** *en el ámbito del Sector Público.*

Corredores Colegiados de Comercio.
Cuerpo Superior de Inspectores de Finanzas del Estado (se integran en él los Cuerpos Técnicos de Inspección de Seguros y Ahorro, Inspectores de Aduanas e Impuestos Especiales, Intervención y Contabilidad de la Administración Civil del Estado).
Cuerpo de Gestión de la Hacienda Pública.
Interventores del Ejército, de la Armada, del Aire, de la Seguridad Social.
Interventores y Depositarios de Fondos de Administración Local.
Técnicos Titulados del Servicio de Estudios del Banco de España.
Inspectores del Banco de España.
Censores del Tribunal de Cuentas.
Técnicos Contables del INI.
Profesores de Formación Profesional (Rama Administrativa).
Consejo Superior de Transportes Terrestres.

c) Otras profesiones y actividades con acceso diverso (oposición, pruebas selectivas, concursos de méritos, acceso directo).

Agentes de la Propiedad Inmobiliaria.
Agentes Libres de Seguros.
Registro Oficial de Auditores de Cuentas (ROAC)

Censores Jurados de Cuentas.
Registro de Economistas Auditores.
Banca Oficial, Banca Privada, Cajas de Ahorros, Caja Postal, Cajas Rurales.
Compañía Telefónica Nacional de España.
Compañías de Seguros y Mutuas.
Analistas de Inversión Bursátil.
Analistas Financieros.
Auditor Contable.
Gerente de Cooperativas.
Técnicos Financieros y Contables de Empresas.

. . . .

Es un grato deber expresar mi reconocimiento a todos los que con sus enseñanzas, observaciones, críticas y ayuda han contribuido a que este trabajo vea la luz. A nuestro maestro y amigo, el profesor Lorenzo Gil Peláez de quien recibimos enseñanzas durante más de diez años, a los prestigiosos compañeros Eugenio Prieto Pérez, Andrés de Pablo López, Vicente Meneu Ferrer, Nines Gil Luenzas, de imborrable recuerdo, M.ª Paz Jordá Durá, Ana Vicente Merino y Francisco Prieto Pérez. También quiero recordar al amigo Teodoro Carretero Lorenzo, de quien siempre he recibido atinadas observaciones y críticas y que nos acaba de abandonar.

Mención especial merece mi esposa Lola, pues su constante colaboración y estímulo han hecho posible superar todas las dificultades.

Por último quiero agradecer la especial colaboración de la profesora Esperanza Vitón Hernanz, que ha participado directamente en el estudio de los Planes de Ahorro y Previsión y en las Operaciones de Cobertura de Riesgo de Cambio y de Tipo de Interés. Además sobre ella y sobre la profesora Inmaculada Martín Villoria ha recaído la siempre ingrata labor de corrección y comprobación.

Madrid, enero de 1992

VICENTE T. GONZÁLEZ CATALÁ
Catedrático de Matemáticas de las Operaciones Financieras en la Universidad de Alcalá. Catedrático de Análisis Matemático y Matemática Financiera de Escuelas de Comercio. Actuario de Seguros.

Primera parte

CONCEPTOS BASICOS, LEYES FINANCIERAS, EQUIVALENCIAS DE CAPITALES

I.—CONCEPTOS BASICOS, LEYES FINANCIERAS, EQUIVALENCIAS DE CAPITALES

1.—El fenómeno financiero. Capital financiero. Intercambio de capitales financieros.
2.—Leyes financieras. Propiedades.
3.—Operaciones financieras. Clasificación.
4.—Magnitudes derivadas.
    4.1.—Factores, réditos y tantos en capitalización.
    4.2.—Factores, réditos y tantos en descuento.
    4.3.—El precio financiero: intereses y descuentos.
        4.3.1.—Intereses.
        4.3.2.—Descuentos.
5.—Leyes financieras clásicas.
6.—Ley de capitalización simple o del interés simple.
    6.1.—Obtención de la ley.
    6.2.—Interpretación del parámetro i.
    6.3.—Cálculo del montante, del valor actual, del tiempo y del tanto.
    6.4.—Intereses anticipados.
    6.5.—Cálculo de los intereses simples. Métodos abreviados.
7.—Ley de capitalización compuesta o del interés compuesto.
    7.1.—Obtención de la ley.
    7.2.—Interpretación de los parámetros i y k.
    7.3.—Cálculo del montante, del valor actual, del tiempo y del tanto.
        7.3.1.—Cálculo del montante.
        7.3.2.—Cálculo del valor actual.
        7.3.3.—Cálculo del tiempo.
        7.3.4.—Cálculo del tanto.
    7.4.—Cálculo del interés compuesto.
8.—Ley del descuento simple comercial.
    8.1.—Obtención de la ley.
    8.2.—Interpretación del parámetro d.
    8.3.—Cálculo del valor actual, del tiempo y del tanto.
    8.4.—Cálculo del descuento simple comercial. Métodos abreviados.

9.—Ley de descuento simple racional.
  9.1.—Obtención de la ley. Cálculo del valor actual y del descuento.
  9.2.—Métodos abreviados para calcular el descuento simple racional.
10.—Ley de descuento compuesto.
  10.1.—Obtención de la ley.
  10.2.—Interpretación del parámetro d.
  10.3.—Cálculo del valor actual, del tiempo y del tanto.
    10.3.1.—Cálculo por logaritmos.
    10.3.2.—Cálculo por tablas financieras.
  10.4.—Cálculo del descuento.
11.—Capitalización y descuento fraccionados: Tanto nominal y tanto efectivo. Tantos equivalentes.
  11.1.—Capitalización fraccionada.
  11.2.—Descuento fraccionado.
  11.3.—Tanto de interés y tanto de descuento equivalentes.
12.—Capitalización y descuento continuos.
13.—El equilibrio financiero: Principio general de equivalencia de capitales. Reserva matemática o saldo financiero.
14.—Vencimiento común y vencimiento medio.
  14.1.—Vencimiento común y vencimiento medio con la ley de descuento compuesto.
  14.2.—Vencimiento común y vencimiento medio con la ley de descuento simple comercial.
15.—Tanto medio.
16.—Sustitución de un capital por otros varios: Desdoblamiento de créditos.
  16.1.—Desdoblamiento de créditos con la ley de descuento compuesto.
  16.2.—Desdoblamiento de créditos con la ley de descuento simple comercial.
17.—Prórroga de vencimientos.

1.—EL FENOMENO FINANCIERO. CAPITAL FINANCIERO. INTERCAMBIO DE CAPITALES FINANCIEROS

En las economías monetarias, el dinero desempeña la función de ser unidad de cuenta, medio de pago e instrumento de cambio y depósito de valor o activo financiero.

Los bienes económicos pueden ser expresados en unidades monetarias con lo que se establece una valoración, o precio de los bienes, a través del número de unidades monetarias en que se expresa; pero esta apreciación queda incompleta si no se hace referencia al momento en el cual se puede disponer o disfrutar del bien económico.

Fijar el momento de la posesión del bien es necesario, pues todo sujeto económico sigue como norma de comportamiento la **ley de la subestimación de las necesidades futuras,** respecto de las del presente, lo que equivale a considerar o interpretar el tiempo como un bien económico negativo, pues la apreciación de todo bien disminuye a medida que el tiempo de disponibilidad está más alejado. Por tanto, a todo bien económico se le puede asociar una utilidad que dependerá de su medida monetaria y del tiempo en que se toma posesión del bien.

Todo intercambio de bienes económicos en el que interviene el tiempo se conoce con el nombre de **fenómeno financiero** y el estudio de estos fenómenos es el objeto fundamental de la materia.

La no simultaneidad de los intercambios —característica de los fenómenos financieros— supone que para estimar los bienes objeto de intercambio haga falta, además de la medida monetaria, conocer el momento del tiempo al que va referida dicha medida o valoración. Como consecuencia, surge la necesidad de identificar los bienes económicos por un par de números reales, positivos (C, t), indicando con C el número de unidades monetaria y con t el momento de valoración o vencimiento de C.

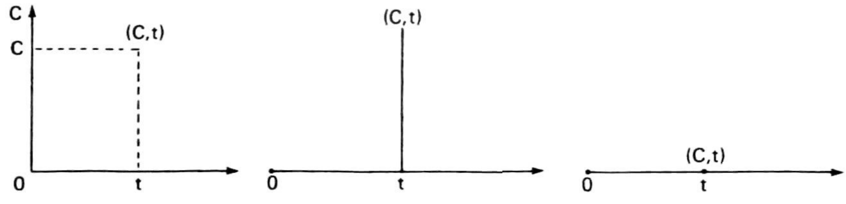
Siguiendo a L. Gil Peláez (*) se define al **capital financiero** como la «medida de un bien económico referida al momento de su disponibilidad o vencimiento».

Es, por tanto, una magnitud bidimensional (C, t) con $C \geqslant 0$, $t \geqslant 0$. Con C se indica la cuantía del capital o número de unidades monetarias (pesetas, dólares, marcos, etc.) del bien, y con t se indica el momento de vencimiento, debiendo precisarse la unidad de tiempo que se considere (normalmente el año) y el origen de ésta. La referida definición de capital financiero permite asociar a todo bien económico un capital financiero y todo intercambio de bienes económicos será un intercambio de capitales financieros.

Se representará al capital financiero por puntos, en coordenadas cartesianas, por

(*) L. Gil Peláez: **Matemática de las Operaciones Financieras,** pág. 24.

niveles sobre un eje de tiempos o, en forma abreviada, por puntos sobre un eje de tiempos, es decir:



El sujeto económico necesita intercambiar capitales financieros y sin más que recurrir a la ley de la subestimación de las necesidades futuras puede tomar decisiones lógicas en algunos casos concretos.

Así, dados dos capitales financieros $(C_1; t_1)$ y $(C_2; t_2)$ se tiene:

$(C_1; t_1)$ es preferible a $(C_2; t_2 = t_1)$ si $C_1 > C_2$

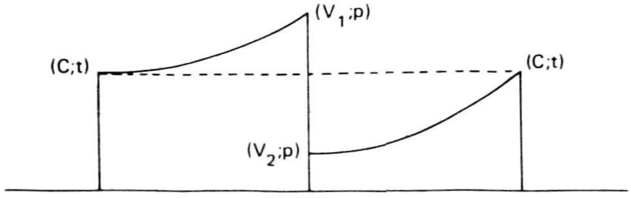
$(C_1; t_1)$ es preferible a $(C_2 = C_1; t_2)$ si $t_1 < t_2$

$(C_1; t_1)$ es indiferente a $(C_2 = C_1; t_2 = t_1)$

pero cuando las cuantías y vencimientos son distintos dándose algunas de estas situaciones $C_1 < C_2$ y $t_1 < t_2$ ó $C_1 > C_2$ y $t_1 > t_2$ no es posible, en principio, decidir necesitando, en consecuencia, elaborar criterios objetivos de comparación para efectuar intercambios lógicos.

Con objeto de definir relaciones de equivalencia que permitan poder intercambiar capitales con la mayor generalidad el profesor Gil Peláez postula que «el sujeto económico es capaz de establecer un criterio de comparación entre capitales de una forma indirecta a través de la proyección o valoración en un punto de referencia p». De esta manera fijado p, se dispone de un criterio mediante el cual es posible encontrar para un capital cualquiera $(C; t)$ su sustituto $(V; p)$, tanto para $t < p$ como para $t > p$. La cuantía V será la proyección en p de $(C; t)$ y se escribirá $V = \text{Proy}_p\,(C; t)$.

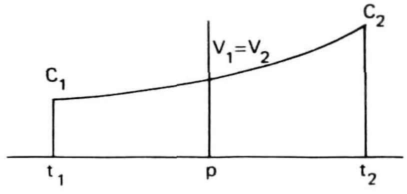
Gráficamente se tiene:

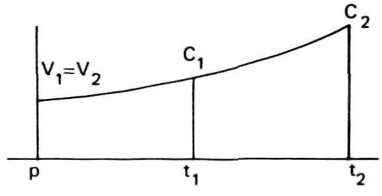


siendo $V_1 = \text{Proy}_p\,(C; t) > C$, al ser $t < p$, y $V_2 = \text{Proy}_p\,(C; t) < C$, si $t > p$.

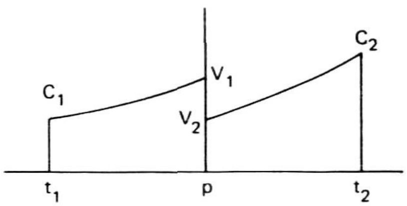
En base a este criterio, dados dos capitales $(C_1; t_1)$ y $(C_2; t_2)$ cuyas proyecciones son $(V_1; p)$ y $(V_2; p)$ se dirá que **los capitales $(C_1; t_1)$ y $(C_2; t_2)$ son equivalentes y, por tanto, intercambiables si** $V_1 = V_2$ (se puede comprobar que la relación definida es de equivalencia), y no serán equivalentes cuando se da $V_1 \neq V_2$. Para $V_1 > V_2$ se dirá que el capital $(C_1;\ t_1)$ es más valioso y, por tanto, preferible al $(C_2;\ t_2)$ y cuando se dé $V_1 < V_2$ será preferible $(C_2;\ t_2)$.

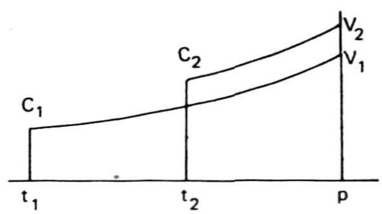
Son ejemplos de capitales intercambiables o equivalentes





y no son intercambiables por no ser equivalentes:





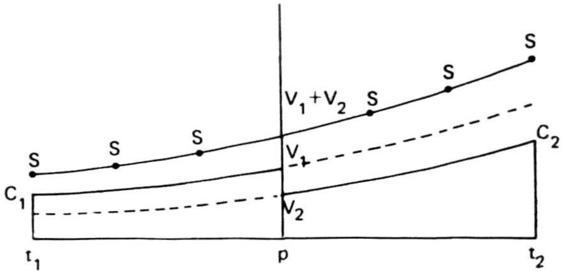
De igual manera que es posible valorar capitales también cabe sumarlos. El caso más elemental sería el de dos o más capitales con el mismo vencimento y su suma sería el capital con igual vencimiento y cuantía, suma aritmética de cuantías. En el caso de dos capitales es:

$$(C_1;\ t_1) + (C_2;\ t_1) = (C_1 + C_2;\ t_1)$$

Cuando los vencimientos son distintos, el criterio de proyección permite homogeneizar vencimientos en p y en consecuencia también sumar, así:

$$(C_1;\ t_1) + (C_2;\ t_2) = (V_1 + V_2;\ p)$$

También tendría la consideración de suma, de $(C_1;\ t_1)$ y $(C_2;\ t_2)$, todo capital $(S;\ t)$ cuya proyección en p fuese $V_1 + V_2$. El siguiente gráfico recoge lo expuesto.



2.—LEYES FINANCIERAS. PROPIEDADES

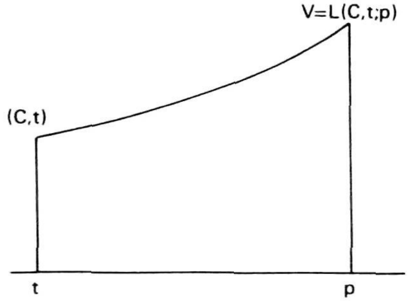
La expresión analítica o modelo matemático que permite obtener V, conocido (C; t) y fijado p recibe el nombre de **ley financiera** de valoración en p y es una función de la forma $V=F(C, t; p)=\mathrm{Proy}_p(C, t)$.

Cuando es $t<p$ se dice que V es la cuantía en p que resulta de capitalizar (C, t). La ley se representa en este caso por $V=L(C, t; p)$ y recibe el nombre de **ley financiera de capitalización** en p; V se denomina valor capitalizado o montante.

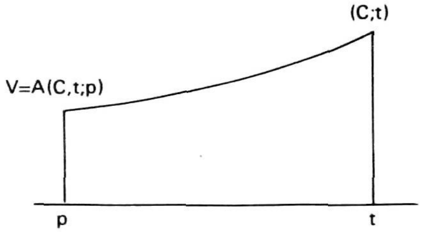
Para $p<t$, el valor V es la cuantía en p resultado de actualizar o descontar (C, t) y por ello, se denomina valor descontado o valor actual. La ley financiera, representada por: $V=A(C, t; p)$, se llama **ley financiera de descuento** en p.

Al dejar indeterminado p, $L(C, t; p)$ y $A(C, t; p)$ simbolizan familias de leyes financieras del mismo modelo, que reciben el nombre de sistemas financieros de capitalización o de descuento.

Gráficamente se tiene:



Capitalización



Descuento

Obsérvese (*) que según lo expuesto un capital (C, t) se capitaliza o se descuenta en p y no es correcto decir se capitaliza o se descuenta desde t. El punto fijo de referencia es el de llegada, p, y no el de partida t.

Para que las funciones L y A interpreten los fenómenos económico financieros y sirvan para regir los intercambios de capitales deben cumplir determinadas propiedades generales:

1.ª Las leyes deben ser positivas y además tomar los valores

$$L(C, t; p)\geqslant C \quad \text{y} \quad 0\leqslant A(C, t; p)\leqslant C$$

2.ª La lógica financiera considera que debe existir proporcionalidad entre V y C, por lo que las funciones tendrán que cumplir:

$$V=L(C, t; p)=CL(1, t; p) \quad ; \quad V=A(C, t; p)=CA(1, t; p)$$

(*) Véase L. Gil Peláez, op. cit., pág. 31.

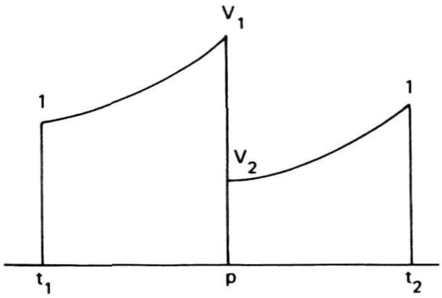
Para $C = 1$ se tiene el modelo unitario, que por comodidad se representa por $L(t; p)$ y por $A(t; p)$. En lo sucesivo será suficiente estudiar la ley unitaria puesto que los resultados completos se obtienen de forma inmediata debido a la proporcionalidad.

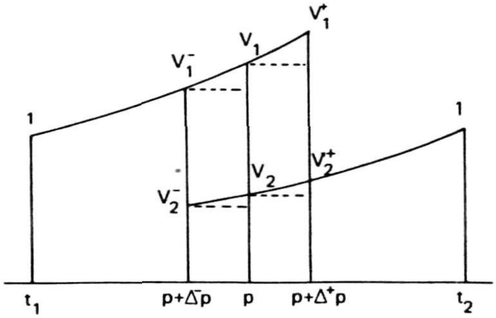
3.ª Cuando no ha transcurrido tiempo interno en el intervalo $(t; p)$ y coinciden en consecuencia t y p se está en presencia de un intercambio en un mismo momento del tiempo en donde no existirá subestimación del futuro, por ser $t = p$. La ley debe cumplir que

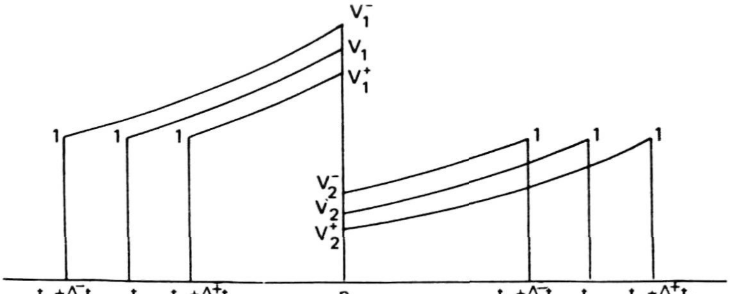
$$L(t; p) = L(p; p) = 1 \quad ; \quad A(t; t) = A(p; p) = 1$$

4.ª El principio económico de la subestimación de los capitales futuros hace que la función $V = L(t; p)$ ó $V = A(t; p)$ aumente (disminuya) si p crece (decrece) y que disminuya (aumente) si t crece (decrece).

La comprobación de lo enunciado es inmediata sin más que observar los gráficos que se exponen. El primero representa una situación inicial concreta, el segundo los efectos cuando varía p y el tercero los efectos cuando varía t.







Para que la función financiera interprete el fenómeno económico descrito debe ser creciente con p y decreciente con t. En el caso de ser derivable la propiedad exigiría que:

$$L'_t(t; p) < 0,\ L'_p(t; p) > 0 \quad ; \quad A'_t(t; p) < 0,\ A'_p(t; p) > 0$$

5.ª El paso de la cuantía del capital $(1; t)$ a la cuantía V se efectúa tomando todos los puntos intermedios entre 1 y V y es consecuencia de todo el tiempo que hay en el intervalo $(t; p)$. Esto exigirá que la ley financiera sea continua respecto a t y repecto a p.

Las propiedades enunciadas facilitan la obtención de leyes financieras a partir de funciones matemáticas que las satisfagan. También existen posibilidades de obtener leyes financieras por otros medios uno de los cuales es el que se expone a continuación.

Mediante una ley de capitalización $L(t; p)$, dado un capital (C, t) se puede obtener su proyección o sustituto (V, p) por la relación $V = CL(t; p)$. De esta expresión se sigue $C = V \dfrac{1}{L(t; p)}$, lo que significa que con la fracción $\dfrac{1}{L(t; p)}$ se puede calcular la cuantía C del capital próximo conocida la cuantía V del capital más alejado. Dicha utilización hace pensar en la posibilidad de que $\dfrac{1}{L(t; p)}$ pueda servir como ley financiera de descuento siempre que satisfaga las propiedades exigidas para toda ley de descuento.

Las propiedades primera, segunda, tercera y quinta se cumplen pues:

- Si $L(t; p)$ es proporcional también lo es $1/L(t; p)$.
- Si $L(t; p) > 1$ será $0 < 1/L(t; p) < 1$.
- De $L(t; t) = L(p; p) = 1$ se sigue $1/L(t; t) = 1/L(p; p) = 1$.
- Si $L(t; p)$ es continua respecto t y p también lo será $1/L(t; p)$.

La exigencia de la cuarta propiedad «ser la función creciente con p y decreciente con t» no se satisface, pues $1/L(t; p)$ es decreciente con p y creciente con t. Para que la cumpla será necesario intercambiar los papeles que juegan t y p, es decir, pasar a desempeñar t el cometido de punto fijo o de aplicación y p el de punto variable. Nótese que el intercambio de misiones entre t y p supone saltar al campo asignado para el descuento en donde p es anterior a t.

En consecuencia, la expresión obtenida a partir de una ley de capitalización

$$A(t; p) = \frac{1}{L(p; t)}$$

es una ley de descuento que se denomina conjugada o recíproca de una de capitalización.

De igual manera a partir de una ley financiera de descuento $A(t; p)$ se puede obtener su conjugada o recíproca de capitalización $L(t; p) = 1/A(p; t)$.

Aunque sería posible encontrar múltiples funciones que satisfaciendo las propiedades anteriores pudiesen ser utilizadas como leyes financieras solamente nos referiremos, en epígrafes posteriores, a las utilizadas en la práctica o leyes clásicas que son:

— Capitalización simple o del interés simple.
— Capitalización compuesta o del interés compuesto.
— Descuento simple comercial.
— Descuento simple racional.
— Descuento compuesto.

Estos modelos satisfacen las propiedades enunciadas anteriormente y además cumplen la **propiedad de estacionariedad** que consiste en poder sustituir las variables t y p por una única variable z cuyo valor en capitalización es $z = p - t$ y en descuento $z = t - p$; es decir, se dependerá de una única variable que es la medida del intervalo o tiempo interno.

Ejemplo 1.—Comprobar que la función $G(t; p) = (1 + i)^{p-t}$ puede ser utilizada como ley financiera de capitalización.

Si $i > 0$ cumple la primera propiedad ya que al ser $p - t > 0$, será $G(t; p) = (1 + i)^{p-t} > 1$.

La propiedad tercera se satisface ya que $G(t; t) = (1 + i)^{t-t} = 1$ y $G(p; p) = (1 + i)^{p-p} = 1$.

La función es creciente con p, pues $G'_p(t; p) = (1 + i)^{p-t} > 0$ y decreciente con t al ser

$$G'_t(t; p) = -(1 + i)^{p-t} < 0$$

La función es continua por ser de tipo exponencial.

La función puede ser utilizada como ley de capitalización

$$L(t; p) = (1 + i)^{p-t}, \quad \text{con } i > 0$$

Además es estacionaria, pues admite la sustitución $z = p - t$, y queda

$$L(0; z) = (1 + i)^z$$

Ejemplo 2.—Idem que en el caso anterior para $G(t; p) = 1 + k(p - t)$.

Si $k > 0$ es $G(t; p) = 1 + k(p - t) > 1$

$G(t; t) = G(p; p) = 1 + k(t - t) = 1 + k(p - p) = 1$

$G'_t(t; p) = -k < 0 \quad ; \quad G'_p(t; p) = k > 0$

$G(t; p)$ es la ecuación de una recta y, por tanto, es continua

$G(t; p)$ es estacionaria

La función, para $k > 0$, puede ser ley financiera de capitalización y se tiene:

$$L(t; p) = 1 + k(p - t) = 1 + kz = L(0; z)$$

Ejemplo 3.—Obtener las leyes de descuento recíprocas de las de capitalización de los ejercicios anteriores.

Estas son:

$$A(t; p) = \frac{1}{(1 + i)^{t-p}} = (1 + i)^{-(t-p)}$$

$$A(t; p) = \frac{1}{1 + k(t - p)}$$

y también son estacionarias, siendo sus expresiones

$$A(z; 0) = (1 + i)^{-z} \quad ; \quad A(z; 0) = \frac{1}{1 + kz}$$

3.—OPERACION FINANCIERA. CLASIFICACION

Se entiende por **operación financiera** (*) «toda acción que intercambia o sustituye unos capitales por otros de distinto vencimiento, o más abreviadamente, todo cambio no simultáneo de capitales».

El **origen** de la operación coincide con el vencimiento del primer capital y el **final** de ella con el vencimiento del último. La duración es el tiempo que media entre fin y origen.

Se denomina **prestamista** o **acreedor** a la persona que entrega el primer capital y **prestatario** o **deudor** a la que lo recibe. El compromiso total del acreedor es la **prestación** y el del deudor la **contraprestación**.

En esquema la operación consiste en la entrega por la persona A acreedora a la deudora D del conjunto de capitales que forman la prestación

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & \ldots\ldots & C_n & \\ \hline t_1 & t_2 & \ldots\ldots & t_n & t'_m \end{array}$$

a cambio de que la persona D entregue a la A el conjunto de capitales

$$\begin{array}{ccccc} & C'_1 & C'_2 & \ldots\ldots & C'_m \\ \hline t_1 & t'_1 & t'_2 & \ldots\ldots & t'_m \end{array}$$

o contraprestación. Ahora bien, este intercambio presupone que acreedor y deudor han elegido una ley financiera que posibilita valorar los capitales y que, en base a dicha valoración, son equivalentes los compromisos de A y D.

Por tanto, para realizar el estudio de toda operación financiera es necesario establecer el postulado de equivalencia financiera que el profesor Gil Peláez transcribe en los siguientes términos: «Toda operación financiera implica la existencia de una equivalencia financiera de las sumas de capitales respectivas de la prestación y contraprestación en base a una ley financiera previamente establecida.»

1.—En base a la clase de capitales que la integran se puede distinguir entre operaciones **ciertas** y operaciones **financiero-aleatorias**. En las primeras todos los capitales que intervienen son ciertos, si hay al menos uno aleatorio la operación es del segundo tipo.

2.—Observando la distribución de los compromisos de las partes se puede hablar de operaciones **simples** y **compuestas**. Cuando prestación y contraprestación están formadas por un solo capital la operación se llama simple o elemental, en caso contrario se dice compuesta.

3.—Por la duración se clasifican en **a corto plazo** y **a largo plazo**. Criterio subjetivo que agrupa en las primeras a aquéllas cuya duración suele ser inferior al año y en el segundo tipo a las de plazo más largo.

(*) Véase L. Gil Peláez, op. cit., pág. 25.

4.—Por la ley que interviene en la operación cabe hablar de operaciones de **capitalización** y operaciones de **descuento**.

5.—En base al sentido crediticio de la operación cabe hablar de operaciones de **crédito unilateral** y de **crédito recíproco**. Las primeras son aquellas en las que el acreedor inicial conserva este carácter en toda la operación y las segundas cuando así no ocurre.

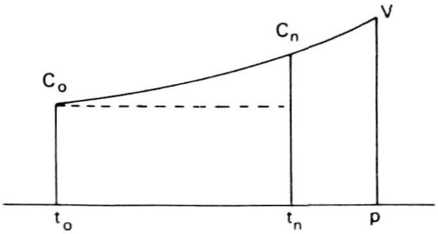
4.—MAGNITUDES DERIVADAS

Las componentes del capital financiero —señala L. Gil Peláez— es decir, la cuantía y el vencimiento serán consideradas como magnitudes primarias y fundamentales. Toda magnitud obtenida como resultado de operaciones realizadas con las fundamentales se denomina magnitud derivada.

A continuación se exponen una síntesis de las consideradas de interés especial distinguiendo entre capitalización y descuento.

4.1.—FACTORES REDITOS Y TANTOS EN CAPITALIZACION

Dos capitales $(C_0;\ t_0)$ y $(C_n;\ t_n)$, con $t_0 < t_n$, son equivalentes en base a la ley $L(t;\ p)$ si tienen una misma valoración o proyección V, es decir, es:



$$V = C_0 L(t_0;\ p) = C_n L(t_n;\ p) \qquad (1)$$

De la igualdad de valoraciones se sigue el cociente

$$\frac{C_n}{C_0} = \frac{L(t_0;\ p)}{L(t_n;\ p)} = u(t_0,\ t_n;\ p) > 1 \qquad (2)$$

llamado **factor de capitalización** asociado al intervalo $(t_0;\ t_n)$. Su finalidad es calcular la cuantía C_n del capital más alejado conocida la cuantía C_0 del capital más próximo mediante la capitalización expresada por $C_n = C_0 u(t_0,\ t_n;\ p)$.

La expresión inversa de (2) recibe el nombre de **factor de contracapitalización** o capitalización anticipada

$$u^*(t_0,\ t_n;\ p) = \frac{1}{u(t_0,\ t_n;\ p)} = \frac{C_0}{C_n} = \frac{L(t_n;\ p)}{L(t_0;\ p)} < 1 \qquad (3)$$

y proporciona el valor de la cuantía C_0 del capital más próximo en función de C_n pues es $C_0 = C_n u^*(t_0,\ t_n;\ p)$.

El suplemento a la unidad del factor de capitalización se conoce con el nombre de **rédito de capitalización**, magnitud que también está asociada al intervalo $(t_0; t_n)$ y que se expresa por:

$$i(t_0, t_n; p) = u(t_0, t_n; p) - 1 = \frac{C_n - C_0}{C_0} = \frac{L(t_0; p) - L(t_n; p)}{L(t_n; p)} > 0 \tag{4}$$

Al complemento a la unidad del factor de contracapitalización se le llama **rédito anticipado de capitalización** y es:

$$i^*(t_0, t_n; p) = 1 - u^*(t_0, t_n; p) = \frac{C_n - C_0}{C_0} = \frac{L(t_0; p) - L(t_n; p)}{L(t_n; p)} > 0 \tag{5}$$

Los réditos van asociados al intervalo (t_0, t_n) de amplitud $t_n - t_0$, y al dividirlos por ésta se obtienen los réditos por unidad de tiempo o **tantos**. El tanto de capitalización es:

$$\rho(t_0, t_n; p) = \frac{i(t_0, t_n; p)}{t_n - t_0} = \frac{C_n - C_0}{C_0(t_n - t_0)} = \frac{L(t_0; p) - L(t_n; p)}{(t_n - t_0)\, L(t_0; p)} \tag{6}$$

Para períodos infinitesimales cuando existe el límite $\lim\limits_{h \to 0} \rho(t, t+h; p) = \rho(t; p)$, el correspondiente valor se llama **tanto instantáneo de capitalización**. En la hipótesis de ser $L(t; p)$ derivable se tiene:

$$\rho(t; p) = -\frac{\dfrac{\partial L(t; p)}{\partial t}}{L(t; p)} = -\frac{\partial \lg_e L(t; p)}{\partial^t} \tag{7}$$

Si la expresión (7) es integrable resulta:

$$u(t_0, t_n; p) = e^{\int_{t_0}^{t_n} \rho(x; p)dx} \quad ; \quad L(t; p) = e^{\int_t^p \rho(x; p)dx} \tag{8}$$

expresiones utilizables en los procesos de capitalización continua en base al tanto instantáneo $\rho(t; p)$.

Ejemplo 1.—Calcular el capital $(C_n; t_n) = (C_8; 8)$ equivalente al $(C_0; t_0) = (100.000; 0)$ con la ley $L(t; p) = (1 + 0{,}09)^{p-t}$ y especificar las magnitudes derivadas.

$$C_8 = C_0 u(t_0, t_8; p) = 100.000 \frac{(1+0{,}09)^{p-0}}{(1+0{,}09)^{p-8}} = 100.000(1+0{,}09)^8 = 199.256{,}26$$

$$u(0, 8, p) = \frac{(1+0{,}09)^{p-0}}{(1+0{,}09)^{p-8}} = (1+0{,}09)^8 = 1{,}9925626$$

$$u^*(0, 8; p) = (1+0{,}09)^{-8} = 0{,}501866$$

$$i(0, 8; p) = 0{,}9925626 \quad ; \quad i^*(0, 8; p) = 0{,}498134$$

$$\rho(0, 8; p) = 0{,}124070 \quad ; \quad \rho(t; p) = \lg_e(1+0{,}09) = 0{,}086178$$

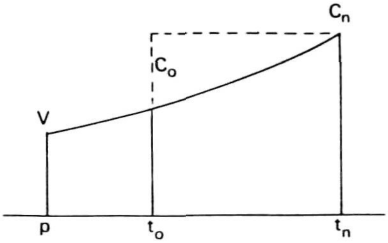
Si $p=t_n$, las expresiones (2) a (7) toman los siguientes valores:

$$u(t_0, t_n)=L(t_0; t_n) \quad ; \quad u^*(t_0, t_n)=\frac{1}{L(t_0, t_n)} \quad ; \quad i(t_0, t_n)=L(t_0; t_n)-1$$

$$i^*(t_0, t_n)=\frac{L(t_0, t_n)-1}{L(t_0, t_n)} \quad ; \quad \rho(t_0, t_n)=\frac{L(t_0, t_n)-1}{t_n-t_0} \quad ; \quad \rho(t; t_n)=-\frac{\partial \lg_e L(t, t_n)}{\partial t}$$

4.2.—FACTORES, REDITOS Y TANTOS EN DESCUENTO

Dos capitales $(C_0; t_0)$ y (C_n, t_n), con $t_0<t_n$ son equivalentes de acuerdo con la ley $(A(t; p)$ si se verifica



$$V=C_0A(t_0; p)=C_nA(t_n; p) \tag{9}$$

De (9) se deduce el cociente

$$\frac{C_0}{C_n}=\frac{A(t_n; p)}{A(t_0; p)}=v(t_0, t_n; p)<1 \tag{10}$$

denominado **factor de descuento**. Este factor, asociado al intervalo $(t_0; t_n)$, proporciona el cálculo de la cuantía C_0 del capital más próximo conocida la cuantía C_n del capital más alejado a través de la expresión $C_0=C_n v(t_0, t_n; p)$.

El complemento a la unidad del factor de descuento es el **rédito de descuento**

$$d(t_0, t_n; p)=1-v(t_0, t_n; p)=\frac{C_n-C_0}{C_n}=\frac{A(t_0; p)-A(t_n; p)}{A(t_0; p)} \tag{11}$$

y al dividirlo por la amplitud del intervalo $(t_0; t_n)$ se obtiene el **tanto de descuento**

$$\delta(t_0, t_n; p)=\frac{d(t_0, t_n; p)}{t_n-t_0}=\frac{C_n-C_0}{C_n(t_n-t_0)}=\frac{A(t_0; p)-A(t_n; p)}{A(t_0; p)(t_n-t_0)} \tag{12}$$

Dado un intervalo infinitesimal $(t, t+h)$, se llama **tanto instantáneo de descuento** al límite si existe dado por $\lim_{h\to 0}\delta(t, t+h; p)=\delta(t; p)$. Si $A(t; p)$ es derivable el tanto instantáneo es:

$$\delta(t;\, p) = -\frac{\dfrac{\partial A(t;\, p)}{\partial t}}{A(t;\, p)} = -\frac{\partial \lg_e A(t;\, p)}{\partial t} \tag{13}$$

En la hipótesis de ser integrable (13) se obtienen las expresiones

$$A(t;\, p) = e^{-\int_p^t \delta(x;\, p)dx} \quad ; \quad v(t_0,\, t_n;\, p) = e^{-\int_{t_0}^{t_n} \delta(x;\, p)dx} \tag{14}$$

utilizables en los procesos de descuento continuos en base al tanto instantáneo $\delta(t;\, p)$.

Ejemplo 2.—La ley de descuento $A(t;\, p) = 1 - 0{,}08(t - p)$, con $p = 0$, tiene como factores, réditos y tantos de descuento en el intervalo ($t_0 = 2$; $t_n = 10$) los siguientes:

$$v(2,\, 10;\, 0) = \frac{1 - 0{,}08(10 - 0)}{1 - 0{,}08(2 - 0)} = 0{,}238095 \quad ; \quad d(2,\, 10;\, 0) = 0{,}761905$$

$$\delta(2,\, 10;\, 0) = 0{,}095238 \quad ; \quad \delta(t;\, 0) = \frac{0{,}08}{1 - 0{,}8t}$$

Cuando es $p = t_0$ las fórmulas (10) a (13) quedan así:

$$v(t_0,\, t_n) = A(t_n;\, t_0) \quad ; \quad d(t_0,\, t_n) = 1 - A(t_n,\, t_0)$$

$$\delta(t_0,\, t_n) = \frac{1 - A(t_n,\, t_0)}{t_n - t_0} \quad ; \quad \delta(t,\, t_0) = -\frac{\partial \lg_e A(t,\, t_0)}{\partial t}$$

4.3.—EL PRECIO FINANCIERO: INTERESES Y DESCUENTOS

La fijación del precio de un bien o servicio (*) se suele realizar de dos formas:

a) De forma global indicando su precio total.

b) De forma unitaria informando del precio de cada unidad de producto.

Conviene diferenciar el precio unitario del medio. Si se trata de un bien homogéneo el precio será unitario, pero si el bien no es homogéneo será un precio medio resultado de dividir el precio total por el número de unidades de bien.

Por otra parte, se encuentra implícito en toda operación el siguiente convenio: El precio es el número de unidades monetarias de una unidad de producto y se abona, en general, al realizar la entrega del producto. No obstante, y con el fin de facilitar la operación, es usual que se acuerden formas de pago del precio que supongan aplazamientos o anticipaciones respecto de su devengo.

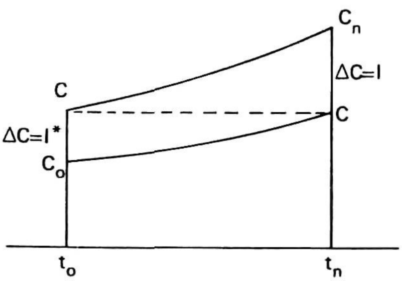
(*) Véase A. Rodríguez: **Matemática de la Financiación,** págs. 86 y sig., y V. Meneu y V. Cuñat: **El Mercado de Renta Fija,** págs. 35 y sig.

Cuando el precio tiene como finalidad retribuir un servicio que se realiza en un intervalo de tiempo de forma continua, como es el caso de la prestación de un capital (C_0, t_0) en un intervalo (t_0, t_n) al no ser posible ni operativo abonar el precio en cada instante del tiempo se suele acordar abonar el precio financiero en forma discreta en uno o varios pagos, a efectuar normalmente en los extremos t_0 o t_n o en un punto interior comprendido entre t_0 y t_n.

4.3.1.—Intereses

Sea una operación financiera de capitalización en la que se presta el capital (C, t_0) en el intervalo (t_0, t_n). A cambio de ello se exigirá la devolución de C, en t_n, y el pago de un precio ΔC que podría vencer en distintos puntos pero lo usual es que se concrete en t_0 o en t_n.

Si el precio se paga en t_n la cuantía total a parcibir sería $C_n = C + \Delta C$ recibiendo entonces $\Delta C = I$ el nombre de interés pospagable, o aplazado o simplemente interés.



Cuando el precio se abona en t_0 se llama interés anticipado y en t_n sólo vencerá el principal C. En este caso se tiene $\Delta C = I^*$.

Las cuantías de los **intereses totales** y sus relaciones son:

$$I = C_n - C = C[u(t_0, t_n; p) - 1] = Ci(t_0, t_n; p) \tag{15}$$

$$I^* = C - C_0 = C[1 - u^*(t_0, t_n; p)] = Ci^*(t_0, t_n; p) \tag{16}$$

Dividiendo (15) y (16) por la cuantía C se tiene los **precios financiero unitario**

$$\frac{I}{C} = \frac{C_n - C}{C} \quad ; \quad \frac{I^*}{C} = \frac{C - C_0}{C} \tag{17}$$

Estos intereses por unidad prestada o precios unitarios coinciden con los réditos vistos en 4.1, fórmulas (4) y (5).

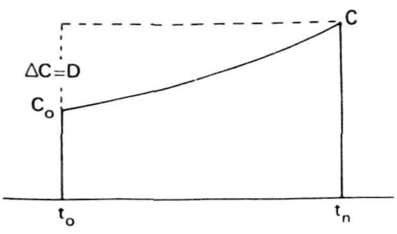
Al intervenir el tiempo, el precio financiero debe expresarse por unidad de capital y por unidad de tiempo (generalmente el año), obteniendo en consecuencia el **precio financiero medio**.

$$\frac{I}{C(t_n - t_0)} = \frac{C_n - C}{C(t_n - t_0)} \quad ; \quad \frac{I^*}{C(t_n - t_0)} = \frac{C - C_0}{C(t_n - t_0)} \tag{18}$$

que coincide con el tanto de capitalización.

En la práctica suele hablarse de tipo de interés al referirse al tanto de capitalización, precio financiero de uso normal y habitualmente pospagable.

4.3.2.—Descuento



Sea una operación de descuento en la que se anticipa el capital (C, t_n), hasta el principio del intervalo (t_0, t_n). A cambio de ello se exige un precio ΔC con vencimiento en t_0 por lo que la cuantía a recibir en t_0 será $C_0 = C - \Delta C$. La diferencia $\Delta C = D$, denominada descuento prepagable o normal es:

$$D = C - C_0 = C[1 - v(t_0, t_n; p)] = Cd(t_0, t_n; p) \tag{19}$$

y representa al **precio financiero total** de una operación de descuento.

El **precio financiero unitario** coincide con el rédito de descuento ya que

$$\frac{D}{C} = \frac{C - C_0}{C} = d(t_0, t_n; p) \tag{20}$$

y el **precio financiero medio** es:

$$\frac{D}{C(t_n - t_0)} = \frac{C - C_0}{C(t_n - t_0)} = \delta(t_0, t_n; p) \tag{20'}$$

Este es el precio financiero de uso común que se designa con el nombre de tipo de descuento.

5.—LEYES FINANCIERAS CLASICAS

En el epígrafe segundo se anunciaba la posibilidad de que existiesen múltiples funciones que pudiesen ser aplicadas en la valoración financiera. Basta elegir una expresión f(t; p) que cumpla las propiedades exigidas a las leyes financieras, pero en la práctica la utilización de las posibles leyes se reduce a cinco casos. Estas conocidas como leyes o modelos financieros clásicos son:

1.—Ley de capitalización simple o del interés simple.
2.—Ley de capitalización compuesta o del interés compuesto.
3.—Ley de descuento simple comercial.
4.—Ley de descuento simple racional.
5.—Ley de descuento compuesto.

Estos modelos financieros, que serán estudiados en los próximos epígrafes, suelen tener tipificada su utilización empírica según el tipo de operación financiera de que se trate.

Es normal valorar las operaciones financieras a corto plazo (su duración suele ser inferior al año) con la ley de capitalización simple, si la operación es de capitalización, o con las leyes de descuento simple comercial o de descuento simple racional cuando la operación es de descuento.

Si la operación es a largo plazo lo normal es utilizar, en capitalización, la ley de capitalización compuesta y, en descuento, la ley de descuento compuesto.

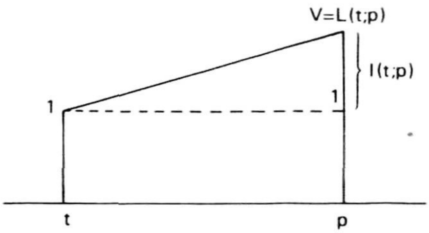
Además, en capitalización se suele tomar como punto de aplicación el vencimiento del último de los capitales o final de la operación. Cuando se trate del descuento es normal tomar como punto de aplicación el origen de la operación. En lo sucesivo cuando no se especifique en forma explícita el punto de aplicación se entiende que nos estamos refiriendo a los acabados de indicar.

6.—LEY DE CAPITALIZACION SIMPLE O DEL INTERES SIMPLE

6.1.—OBTENCION DE LA LEY

La ley financiera del interés simple o capitalización simple se define como aquella en la que los intereses de un período cualquiera son proporcionales a la duración del período y al capital colocado.

Supuesto un capital unitario (1, t) y el punto p de valoración se tiene:



entonces, los intereses del período (t; p) a interés simple son:

$$I(t;\ p) = i(p - t) = L(t;\ p) - 1 \qquad (21)$$

siendo i el factor de proporcionalidad que representa el interés producido por una unidad monetaria en una unidad de tiempo, lo que implica para su validez que el parámetro i y el tiempo $z = p - t$ estén referidos a la misma unidad de tiempo, usualmente el año.

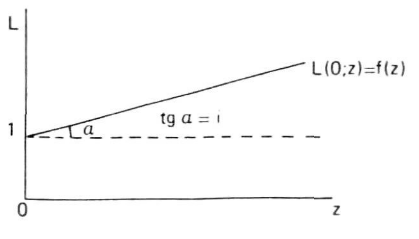
De (21) se sigue la expresión de la ley financiera de capitalización simple:

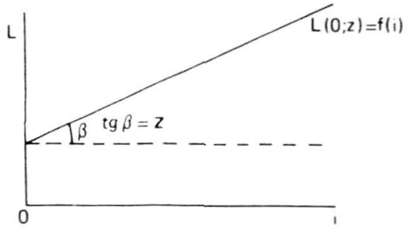
$$L(t;\ p) = 1 + I(t;\ p) = 1 + i(p - t) \qquad (22)$$

que puede escribirse en forma estacionaria como

$$L(0,\ z) = 1 + iz \qquad (23)$$

La ley es una función lineal del tiempo z y de parámetro i, creciendo cuando crezca alguno de los dos parámetros o ambos, por lo que será su representación gráfica:





6.2.—INTERPRETACION DEL PARAMETRO i

El **factor** de capitalización asociado al intervalo $(t_0;\ t_n)$, con

$$\longleftarrow\quad p - t_0 = z \quad\longrightarrow$$

$$t_0 \quad \leftarrow \quad t_n - t_0 = n \quad \rightarrow \quad t_n \quad \leftarrow \quad p - t_n = z - n \quad \rightarrow \quad p$$

es:

$$u(t_0,\ t_n;\ p) = \frac{1+i(p-t_0)}{1+i(p-t_n)} = \frac{1+iz}{1+i(z-n)} = u(n;\ z) \tag{24}$$

y su valor es inferior a $L(0;\ z)$ siempre que sea $z > n$, es decir, p posterior a t_n.

Los **réditos** y **tantos** de capitalización son:

$$\left.\begin{aligned} i(n;\ z) &= \frac{in}{1+i(z-n)} \\ \rho(n;\ z) &= \frac{i}{1+i(z-n)} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

En su utilización habitual es frecuente que p tome el menor de sus posibles valores y coincida con t_n, verificándose, en consecuencia: $p = t_n$, $z = n$. En este caso los factores, réditos y tantos son:

$$\left.\begin{aligned} &u(n=z) = 1 + in = L(0;\ n) \\ &i(n=z) = in \\ &\rho(n=z) = i \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

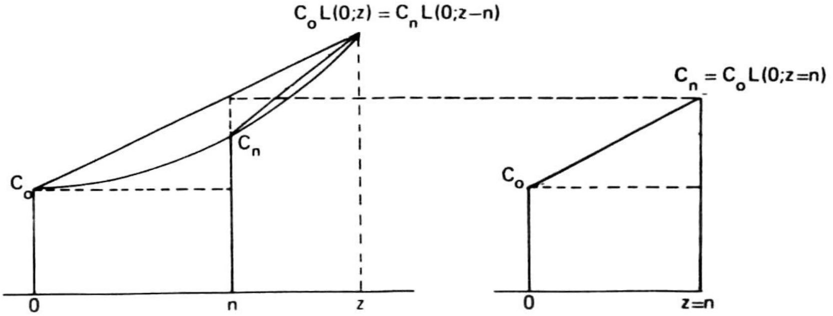
significando que el factor de proporcionalidad i es el tanto de capitalización, tanto de interés o tipo de interés cuando el vencimento t_n del capital más alejado coincida con p.

6.3.—CALCULO DEL MONTANTE, DEL VALOR ACTUAL DEL TIEMPO Y DEL TANTO

Cuando se cede un capital de cuantía C_0 por n años la cuantía final alcanzada o montante es:

$$C_n = C_0 \frac{1+iz}{1+i(z-n)} \quad \text{o} \quad C_n = C_0(1+in) \tag{27}$$

según se concierte la operación con $p > t_n$ o con $p = t_n$. En este segundo caso se obtiene un montante superior al primero y ello se resalta gráficamente en la representación de las trayectorias seguidas, para calcular el capital C_n equivalente al C_0 del origen, que son:



Despejando C_0 de (27) se tiene:

$$C_0 = C_n \frac{1+i(z-n)}{1+iz} \quad ; \quad C_0 = C_n \frac{1}{1+in} \tag{28}$$

fórmulas que proporcionan el valor del capital inicial o actual si se conoce el montante, el tanto y las duraciones.

Para calcular el número de años n y el tanto i se aplicarán las fórmulas:

$$n = \frac{C_n - C_0}{C_n} \frac{1+iz}{i} \quad ; \quad n = \frac{C_n - C_0}{C_0 i} \tag{29}$$

$$i = \frac{C_n - C_0}{C_n n - (C_n - C_0)z} \quad ; \quad i = \frac{C_n - C_0}{C_0 n} \tag{30}$$

En lo sucesivo cuando no se haga mención explícita del punto de aplicación se supondrá que está situado en t_n, es decir, es $z=n$.

Ejemplo 1.—Calcular el montante de 100.000 pts. al 8% de interés anual, al cabo de 8 años en los supuestos: a) Punto de aplicación en el año 10; b) Punto de aplicación en el año 8.

Por aplicación de (27) resulta:

a) $C_8 = C_0 \dfrac{1+iz}{1+i(z-n)} = 100.000 \dfrac{1+0{,}08 \times 10}{1+0{,}08(10-8)} = 155.172{,}41.$

b) $C_8 = C_0(1+in) = 100.000(1+0{,}08 \times 8) = 164.000.$

Ejemplo 2.—Con los datos del ejemplo 1 calcular: 1.° C_0 si $C_8 = 200.000$; 2.° i si $C_0 = 100.000$ y $C_8 = 200.000$; 3.° n si $C_0 = 100.000$, $C_8 = 200.000$ e $i = 0{,}13$.

1.° Por aplicación de (28) se tiene:

$$C_0 = 200.000 \frac{1+0{,}08 \times 2}{1+0{,}08 \times 10} = 128.888{,}89 \quad ; \quad C_0 = 200.000 \frac{1}{1+0{,}08 \times 8} = 121.951{,}22$$

2.° Utilizando (30) resulta:

$$i = \frac{200.000 - 100.000}{200.000 \times 8 - 100.000 \times 10} = 0{,}1667 \quad ; \quad i = \frac{200.000 - 100.000}{100.000 \times 10} = 0{,}10$$

3.° La solución de (29) es:

$$n = \frac{100.000}{200.000} \frac{1 + 0{,}13 \times 10}{0{,}13} = 8{,}85 \quad ; \quad n = \frac{100.000}{100.000 \times 0{,}13} = 7{,}69$$

6.4.—INTERESES ANTICIPADOS

En ocasiones se plantean operaciones en las que el prestamista cobra los intereses por anticipado, es decir, en el momento en que se concierta la operación que ha de generarlos.

Si el capital prestado tiene por cuantía C_0, el tanto de interés es i^* y la duración n años, los intereses alcanzarán el importe $C_0 i^* n$ con lo que se recibe líquido en el origen $C_0 - C_0 i^* n = C_0(1 - i^* n)$. Como al cabo de los n años se han de devolver C_0 pesetas el tipo de interés pospagable realmente pagado en la operación será el valor i que verifique:

$$C_0(1 - i^* n)(1 + in) = C_0$$

de donde se sigue:

$$i = \frac{\frac{1}{1 - i^* n} - 1}{n} = \frac{i^*}{1 - i^* n} \tag{31}$$

Cuando se pretenda calcular i^*, dado i, se utilizará la relación:

$$i^* = \frac{1 - \frac{1}{1 + in}}{n} = \frac{i}{1 + in} \tag{32}$$

Si $n = 1$, la (31) y (32) se transforman en:

$$i = \frac{i^*}{1 - i^*} \quad ; \quad i^* = \frac{i}{1 + i}$$

Ejemplo 3.—Calcular el tipo de interés pospagable de una operación que se prestan 250.000 pts. por 4 años con abono de intereses anticipados al tanto del 8% anual. ¿Cuál sería el resultado si la duración de la operación es 1 año?

Como el líquido que se obtiene es

$$250.000 - 250.000 \times 0{,}08 \times 4 = 170.000$$

el tanto de interés pospagable i verificará:

$$170.000(1 + 4i) = 250.000 \Rightarrow i = 0{,}1176$$

El mismo resultado se obtiene haciendo uso de la (31) pues:

$$i = \frac{i^*}{1 - i^* n} = \frac{0,08}{1 - 0,08 \times 4} = 0,1176$$

Cuando $n = 1$ se tiene $i = \dfrac{0,08}{1 - 0,08} = 0,087.$

6.5.—CALCULO DE LOS INTERESES SIMPLES. METODOS ABREVIADOS

Los intereses normales o pospagables, como se vio en 4.3, tienen por cuantía la expresión $I = C_n - C_0$. Al sustituir el montante C_n por su valor obtenido en (27) se obtienen los intereses generados por C_0 en el intervalo de medida n que son:

$$I = C_0 \frac{in}{1 + i(z - n)} \quad ; \quad I = C_0 in \qquad (33)$$

Conviene señalar que la validez de las fórmulas (27) y (33) implica que el tiempo y el tanto están referidos a la misma unidad de tiempo. El tanto de interés es una magnitud tomada con relación al año; pero al aplicarse la ley del interés simple en operaciones a corto plazo, cuya duración es frecuente venga dada en días, n ó z representarán fracciones de año. Si el número de días que median entre t_0 y t_n es k y el que hay entre t_0 y p es h; los valores de z y n serán:

$$z = \frac{h}{365} \quad ; \quad n = \frac{k}{365} \quad ; \quad z - n = \frac{h - k}{365}$$

ya que 365 es el número de días del año civil; sin embargo, en la práctica comercial es frecuente tomar el denominado año comercial que comprende 12 meses iguales de 30 días, es decir, 360 días.

Los intereses, para $z = n$, según se tome el año civil o el comercial son:

$$I = C_0 i \frac{k}{365} \quad ; \quad I = C_0 i \frac{k}{360} \qquad (34)$$

Ejemplo 4.—Calcular los intereses producidos en 90 días por un capital de 500.000 pts., si el tanto de interés es $i = 0,08$.

$$I = 500.000 \times 0,08 \frac{90}{365} = 9.863,01 \quad ; \quad I = 500.000 \times 0,08 \frac{90}{360} = 10.000$$

Existen métodos abreviados para calcular los intereses cuya utilidad práctica se manifiesta primordialmente cuando hay que calcular los intereses producidos por varios capitales. Seguidamente se hará referencia a los más utilizados si bien el fundamental es el de los divisores fijos, se tiene:

a) **Métodos de los multiplicadores fijos**

Si en (34) al producto C_0, k del capital por el tiempo se le designa por N y al cociente $\dfrac{i}{360}$ o $\dfrac{i}{365}$ por M, entonces la fórmula para el cálculo de los intereses se expresará mediante el producto del llamado **número comercial** N, por el **multiplicador fijo** M, es decir:

$$I = N \cdot M \tag{35}$$

El cálculo previo de los multiplicadores fijos correspondientes a los tipos de interés usuales facilitará la operación.

b) **Método de los divisores fijos**

Si en (34) pasa i a dividir al denominador y al cociente $\frac{360}{i}$ o $\frac{365}{i}$, llamado **divisor fijo**, se le representa por D la fórmula del interés, se expresará así:

$$I = \frac{N}{D}$$

siendo N el número comercial o simplemente número.

c) **Método del tanto fijo**

Consiste en obtener el interés I en función de un interés I′ tomado como auxiliar cuyo cálculo resulte más sencillo.

Siendo I el interés de un capital C_0 colocado al tanto i durante un tiempo k, e I′ interés del mismo capital durante el mismo tiempo, al tanto i′ se tiene:

$$I = C_0 i \frac{k}{360} \quad ; \quad I' = C_0 i' \frac{k}{360}$$

y comparando por cociente:

$$\frac{I}{I'} = \frac{i}{i'} \quad ; \quad I = \frac{i}{i'} I'$$

Ejemplo 5.—Calcular los intereses producidos por un capital de 350.000 pts. en 60 días, a un tipo de interés del 6% anual, si se utiliza el año comercial por los métodos: a) Multiplicadores fijos; b) Divisores fijos; c) Tanto fijo tomando como auxiliar el interés del tanto i′ = 4%.

Por ser:

— Número comercial: $N = 350.000 \times 60 = 21.000.000$

— Multiplicador fijo: $M = \frac{0{,}06}{360} = 0.0001\hat{6}$

— Divisor fijo: $D = \frac{360}{0{,}06} = 6.000 \quad ; \quad D' = \frac{360}{0{,}04} = 9.000$

se tiene:

$$I = N \cdot M = 3.500 \quad ; \quad I = \frac{N}{D} = 3.500$$

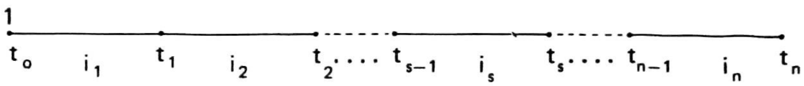
$$I' = \frac{N}{D'} = 2.333{,}33 \quad ; \quad I = \frac{0{,}06}{0{,}04} I' = 3.500$$

7.—LEY DE CAPITALIZACION COMPUESTA O DEL INTERES COMPUESTO

7.1.—OBTENCION DE LA LEY

En las operaciones a largo plazo es usual que el pago de los intereses se efectúe con periodicidad; pero con frecuencia se acuerda entre prestamista y prestatario que al final de cada período los intereses producidos en lugar de abonarse al prestamista se incorporen al capital para que la suma de ambos produzca intereses en el período siguiente. A este proceso mediante el cual se produce la acumulación de los intereses al capital para producir conjuntamente nuevos intereses y así sucesivamente, es decir, tiene lugar la capitalización periódica de los intereses, se conoce como **régimen de capitalización compuesta** o del **interés compuesto**.

Sea un capital unitario colocado en una operación de n períodos consecutivos tal como se expone



en el que el rédito o precio unitario correspondiente al período s es i_s. Al final del primer período la unidad monetaria se convierte $1+i_1$ y en el segundo período, al retener el deudor los intereses producidos también éstos generarán intereses por lo que al final del segundo período se tendrá:

$$(1+i_1)+(1+i_1)i_2=(1+i_1)(1+i_2)=\prod_{h=1}^{2}(1+i_h)$$

En t_s, final del período s, el valor alcanzado por la unidad monetaria inicial será:

$$\prod_{h=1}^{s-1}(1+i_h)+i_s\prod_{h=1}^{s-1}(1+i_h)=\prod_{h=1}^{s}(1+i_h)$$

y así sucesivamente en t_n, final de los n períodos, se habrá alcanzado el montante:

$$L(t_0, t_n)=\prod_{h=1}^{n}(1+i_h) \qquad (38)$$

que recibe el nombre de **ley financiera de capitalización compuesta**.

En el supuesto que los períodos sean anuales y que el tanto de interés sea i, resulta:

$$L(0; n)=(1+i)^n \qquad (39)$$

Este régimen es por su propia definición un régimen de capitalización discontinuo ya que su fórmula ha sido deducida para valores enteros de n. Si se pretende obtener el montante al término de un tiempo $z=n+\theta$, siendo n un número entero de años y θ una fracción de año, la fórmula (39) para este caso no tiene validez. Para el cálculo del montante en z se suele adoptar uno de los dos convenios siguientes:

1.º **Convenio lineal.**—Consiste en capitalizar a interés compuesto por el número entero de n años y capitalizar después a interés simple la fracción de año restante.

El montante del capital unitario para el tiempo $z=n+\theta$ será:

$$L(0;\ z)=(1+i)^z=(1+i)^n(1+i\theta) \tag{40}$$

2.º **Convenio exponencial.**—Consiste en generalizar la (39) para cualquier valor de z con lo cual se le da validez por convenio para cualquier número racional positivo del tiempo.

Se calcula el montante aplicando la fórmula

$$L(0;\ z)=(1+i)^z=(1+i)^n(1+i)^\theta \tag{41}$$

La función de capitalización compuesta también puede ser obtenida con toda generalidad al analizar propiedades generales de los sistemas financieros —como hace el profesor Gil Peláez (*) por ejemplo. Estudia los denominados sistemas multiplicativos que son aquellos en los que la aplicación sucesiva del modelo de valoración produce efectos que se acumulan con resultado multiplicativo. La solución que obtiene es de la forma

$$L(t;\ p)=e^{k(p-t)}, \qquad \text{con } k>0 \tag{42}$$

y como $e^k>1$, al efectuar la sustitución $e^k=1+i$, siendo $i>0$, resulta

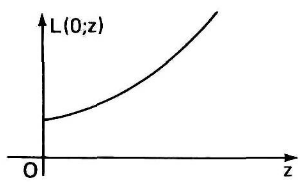
$$L(t;\ p)=(1+i)^{p-t}, \qquad i>0 \tag{43}$$

que por su carácter de estacionario puede escribirse así:

$$L(0;\ z)=e^{kz}=(1+i)^z \tag{44}$$

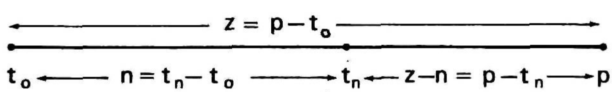
con $z=p-t$.

La representación gráfica de (44) es la de una exponencial con crecimiento más que proporcional, pues es $L'(0;\ z)>0$ y $L''(0;\ z)>0$.



7.2.—INTERPRETACION DE LOS PARAMETROS k E i

El factor de capitalización y su inverso, asociados al intervalo $(t_0,\ t_n)$, con



toman la forma

$$u(n;\ z)=\frac{(1+i)^z}{(1+i)^{z-n}}=(1+i)^n=u(n) \qquad ; \qquad u^*(n;\ z)=(1+i)^{-n}=u^*(n)$$

pudiendo ser n número entero o fraccionario.

(*) Véase op. citada, Cap. III y IV.

Cuando $n=1$ (el año) el factor, rédito y tanto son:

$$u(1)=(1+i) \quad ; \quad i(1)=i \quad ; \quad \rho(1)=i$$

luego, el parámetro i es el rédito anual y el tanto, coincidiendo el precio anual unitario y el medio por ser el precio constante.

El parámetro k es el tanto instantáneo, pues

$$\rho(t;\, p)=\lg_e(1+i)=k$$

7.3.—CALCULO DEL MONTANTE, DEL VALOR ACTUAL, DEL TIEMPO Y DEL TANTO

La capitalización compuesta a tanto anual constante da como montante de un capital C_0 al cabo de n años la expresión

$$C_n=C_0(1+i)^n \tag{45}$$

en la que intervienen cuatro variables, por tanto, conocidas tres de ellas se puede calcular la cuarta. Esto da lugar a los siguientes problemas:

7.3.1.—Cálculo del montante o capital final

Puede recurrirse al cálculo logarítmico o al empleo de tablas financieras:

a) **Por logaritmos.**—Tomando logaritmos en (45) se tiene

$$\lg C_n=\lg C_0+n \lg (1+i) \tag{46}$$

y al pasar a números se obtiene el valor deseado.

Ejemplo 1.—Calcular el montante de un capital de 50.000 pts. al cabo de 5 años al 8% anual.

La (46) da:

$$\lg C_5=\lg 50.000+5 \lg (1+0{,}08)=4{,}866089$$

y pasando a antilogaritmos:

$$C_5=\text{antilog. } 4{,}866089=73.466{,}40$$

b) **Por tablas financieras.**—Es frecuente utilizar en la mayoría de los cálculos unas tablas de doble entrada que reúnen todos los valores posibles de las funciones financieras más importantes. Permiten calcular con rapidez y exactitud el valor $(1+i)^n$ siempre que el tipo i y el número de años n que interesan figuren en las tablas; para calcular C_n basta multiplicar C_0 por el valor $(1+i)^n$ de la tabla.

La disposición esquemática de una tabla de esta naturaleza sería la siguiente:

$M=(1+i)^n$: Montante de una unidad en régimen de capitalización compuesta								
Períodos	$i=1\%$	...	$i=8\%$	$i=8{,}25\%$	$i=8{,}50\%$	...	$i=10\%$	...
1	1,010000	...	1,080000	1,082500	1,085000	...	1,100000	...
2	1,020100	...	1,166400	1,171806	1,177225	...	1,210000	...
3	1,030301	...	1,259712	1,268480	1,277289	...	1,331000	...
4	1,040604	...	1,360489	1,373130	1,385859	...	1,464100	...
5	1,051010	...	1,469328	1,486413	1,503657	...	1,610510	...
6	1,061520	...	1,586874	1,609042	1,631467	...	1,771561	...
7	1,072135	...	1,713824	1,741788	1,770142	...	1,948717	...
8	1,082857	...	1,850930	1,885486	1,920604	...	2,143589	...
9	1,093685	...	1,999005	2,041038	2,083856	...	2,357948	...
10	1,104622	...	2,158925	2,209424	2,260983	...	2,593742	...

. . . .

Para resolver el ejemplo 1 basta leer en el cruce de la fila 5, períodos, con la columna $i=8\%$, el número 1,469328 representativo del montante de una peseta al 8% en 5 años y multiplicarlo por 50.000 obteniendo

$$50.000 \times 1{,}469328 = 73.466{,}40$$

En el caso en que el tanto de interés no estuviese en las tablas se procederá a una interpolación lineal obteniéndose así un valor con suficiente aproximación. Si se pretende buscar el montante $(1+i)^n$ y la tabla contiene los de los tantos i_1 e i_2, con $i_1 < i < i_2$, para interpolar se procede así:

$$\frac{i_2-i_1}{i-i_1} = \frac{(1+i_2)^n-(1+i_1)^n}{(1+i)^n-(1+i_1)^n} \Rightarrow (1+i)^n=(1+i_1)^n + \frac{i-i_1}{i_2-i_1}\,[(1+i_2)^n-(1+i_1)^n] \quad (47)$$

Ejemplo 2.—Calcular el montante de un capital de 250.000 pts. al 8,35% anual en 7 años.

Aplicando en la fórmula (47) los valores de la tabla anterior, para $n=7$ con $i_1=0{,}0825$ e $i_2=0{,}085$ se tiene:

$$(1+0{,}0835)^7 = 1{,}741788 + \frac{0{,}0835-0{,}0825}{0{,}085-0{,}0825}\,(1{,}770142-1{,}741788) = 1{,}753130$$

y el montante buscado será:

$$C_7 = 250.000 \times 1{,}753130 = 438.282{,}5$$

También se procedería por interpolación para calcular el montante si el tiempo no estuviese en las tablas por ser un número no entero de períodos. Sería el caso recogido en la fórmula (41) y el valor $(1+i)^{n+\theta}$ se calculará interpolando los resultados de la tabla $(1+i)^{n+1}$ y $(1+i)^{n}$, así:

$$\left.\begin{array}{l}(n+1-n) \text{ — } [(1+i)^{n+1}-(1+i)^{n}]=(1+i)^{n}i \\ (n+\theta-n) \text{ — } [(1+i)^{n+\theta}-(1+i)^{n}]=(1+i)^{n}[(1+i)^{\theta}-1]\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\theta}=\frac{i}{(1+i)^{\theta}-1} \Rightarrow (1+i)^{\theta}=1+\theta i$$

El valor de (41) que se obtiene por interpolación es:

$$(1+i)^{n+\theta}=(1+i)^{n}(1+i)^{\theta}=(1+i)^{n}(1+\theta i)$$

y coincide con el calculado en la fórmula (40) mediante el convenio lineal.

Ejemplo 3.—Calcular el montante de un capital de 300.000 pts. al 8,5% anual durante 6 años y 3 meses.

$$C_n=300.000(1+0{,}085)^{6+\frac{3}{12}}=300.000(1+0{,}085)^{6}(1+0{,}085)^{\frac{3}{12}}=$$

$$=300.000(1+0{,}085)^{6}\left(1+0{,}08\ \frac{3}{2}\right)=300.000\times 1{,}631467\times 1{,}02=499.228{,}90$$

7.3.2.—Cálculo del valor actual

El valor actual o inicial es

$$C_0=C_n(1+i)^{-n}=C_n v^{n} \tag{48}$$

con $v=\frac{1}{1+i}$, encontrándose el valor $v^{n}=(1+i)^{-n}$ tabulado, por lo que puede procederse al cálculo de C_0 mediante los mismos procedimientos que en 7.3.1.

a) **Por logaritmos.**—Se calcula

$$\lg C_0=\lg C_n-n \lg (1+i) \tag{49}$$

y pasando a antilogaritmos se obtiene C_0.

b) **Por tablas financieras.**—En la tabla $(1+i)^{-n}=v^{n}$ que puede adoptar la siguiente forma:

$v^n=(1+i)^{-n}$: Valor actual de una unidad en régimen de capitalización compuesta

Períodos	i=1%	...	i=7%	i=7,25%	...	i=9%	...
1	0,990099	...	0,934579	0,932401	...	0,917431	...
2	0,980296	...	0,873439	0,869371	...	0,841680	...
3	0,970590	...	0,816298	0,810603	...	0,772183	...
4	0,960980	...	0,762895	0,755807	...	0,708425	...
5	0,951466	...	0,712986	0,704715	...	0,649931	...
6	0,942045	...	0,666342	0,657077	...	0,596267	...

. . . .

se procede como en el caso del montante:

Si el tiempo o el tanto no están en las tablas se procede a una interpolación lineal. Las fórmulas que se obtienen, siguiendo análogo camino que en 7.3.1., son:

— Para el tanto

$$(1+i)^{-n}=(1+i_1)^{-n}+\frac{i-i_1}{i_2-i_1}\left[(1+i_2)^{-n}-(1+i_1)^{-n}\right] \tag{50}$$

— Para el tiempo

$$(1+i)^{-(n+\theta)}=(1+i)^{-n}(1+i)^{-\theta}=(1+i)^{-n}[1-\theta i(1+i)^{-1}] \tag{51}$$

Ejemplo 4.—Calcular el valor actual o inicial de un capital de 500.000 pts. disponible dentro de 4 años si el tanto de interés es el 7%. Idem, si el tanto es el 7,10%. Idem, si el tiempo es 4 años y 2 meses.

— En el primer caso se tiene

$$C_0=500.000(1+0{,}07)^{-4}=500.000\times 0{,}762895=381.447{,}5$$

— Como la interpolación del tanto es

$$(1+0{,}071)^{-4}=(1+0{,}07)^{-4}+\frac{0{,}071-0{,}07}{0{,}0725-0{,}07}\left[(1+0{,}0725)^{-4}-(1+0{,}07)^{-4}\right]=0{,}760060$$

resulta:

$$C_0=500.000\times 0{,}760060=380.030$$

— El tercer supuesto tiene como resultado:

$$C_0=500.000(1+0{,}07)^{-\left(4+\frac{2}{12}\right)}=500.000(1+0{,}07)^{-4}\left[1-\frac{2}{12}\,0{,}07(1+0{,}07)^{-1}\right]=$$

$$=500.000\times 0{,}762895\times 0{,}989097=377.288{,}42$$

7.3.3.—Cálculo del tiempo

Si en $C_n = C_0(1+i)^n$ se divide por C_0 resulta:

$$\frac{C_n}{C_0} = (1+i)^n \tag{52}$$

expresión en la que conocido i y el cociente $\frac{C_n}{C_0}$ se calcula n mediante:

a) Por **logaritmos.**—De (52) tomando logaritmos se deduce

$$n \lg (1+i) = \lg C_n - \lg C_0$$

de donde

$$n = \frac{\lg C_n - \lg C_0}{\lg (1+i)} \tag{53}$$

b) Por **tablas financieras.**—Si n es entero no es necesario hacer ningún cálculo, pues bastará buscar en la tabla, el tanto i, el valor de n a que debe elevarse $(1+i)$ para generar el resultado C_n/C_0. Cuando este cociente no esté en las tablas, entonces n estará comprendido entre dos valores n' y $n'+1$ y el valor de $n = n' + \theta$ se calculará por interpolación lineal.

Ejemplo 5.—Calcular el número de años que ha estado colocado un capital de 350.000 al tanto del 10% si el montante producido es 620.046,35 pts.

a) Por logaritmos

$$n = \frac{\lg 620.046{,}35 - \lg 350.000}{\lg (1+0{,}10)} = 6$$

b) Por tablas financieras

Calculado el valor $(1+0{,}10)^n = \frac{620.046{,}35}{350.000} = 1{,}771561$ basta buscarlo en la columna i de la tabla. Este se encuentra en el cruce con $n=6$ que será la solución buscada.

Ejemplo 6.—Obtener el valor de n del ejemplo anterior si $C_n = 500.000$ pesetas.

Como el cociente $\frac{500.000}{350.000} = 1{,}428571$ no figura en la columna $i = 0{,}10$ pero está comprendido entre los valores $n=3$ y $n=4$ se tendrá que recurrir a la fórmula que para este caso da la interpolación lineal

$$\theta = \frac{(1+i)^{n'+\theta} - (1+i')^{n'}}{(1+i)^{n'+1} - (1+i)^{n'}}$$

obtenida siguiendo el método de casos anteriores. El resultado es:

$$\theta = \frac{1{,}428571 - 1{,}3310}{1{,}4641 - 1{,}3310} = 0{,}7331$$

luego la duración asciende a 3,73 años.

7.3.4.—Cálculo del tanto

A partir de la fórmula (52) se puede calcular i conocidos C_n, C_0 y n.

a) Por **logaritmos.**—Tomando logaritmos en (52) y despejando

$$\lg(1+i) = \frac{\lg C_n - \lg C_0}{n} = H \qquad (54)$$

obtenido H y pasando a números se calcula $(1+i)$ e i

$$i = \text{antilog } H - 1$$

b) Por **tablas financieras.**—Se hallará i buscando en la fila n el valor C_n/C_0, la columna donde se encuentre será la solución buscada. Si C_n/C_0 no se encuentra directamente en las tablas, entonces estará entre dos columnas cuyos tantos i_1 e i_2 verificarán $i_1 < i < i_2$ y para calcular i será necesario realizar una interpolación lineal a través de la fórmula

$$i = i_1 + (i_2 - i_1)\,\frac{(1+i)^n - (1+i_1)^n}{(1+i_2)^n - (1+i_1)^n} \qquad (55)$$

deducida de (47).

Ejemplo 7.—Calcular el tipo de interés a que se invirtió un capital de 225.000 pts. para dar al cabo de 8 años 430.000 pts.

a) Por logaritmos

$$\lg(1+i) = \frac{\lg 430.000 - \lg 225.000}{8} = 0{,}035161$$

$$i = \text{antilog } 0{,}035161 - 1 = 0{,}084328$$

b) Por tablas financieras

El valor $(1+i)^8 = \dfrac{430.000}{225.000} = 1{,}91111$ está comprendido entre los correspondientes a $i_1 = 0{,}0825$ e $i_2 = 0{,}085$ y aplicando (55) se tiene:

$$i = 0{,}0825 + (0{,}085 - 0{,}0825)\,\frac{1{,}911111 - 1{,}885486}{1{,}920604 - 1{,}885486} = 0{,}084324$$

7.4.—CALCULO DEL INTERES COMPUESTO

El interés devengado por C_0 será:

$$I = C_n - C_0 = C_0[(1+i)^n - 1] \tag{56}$$

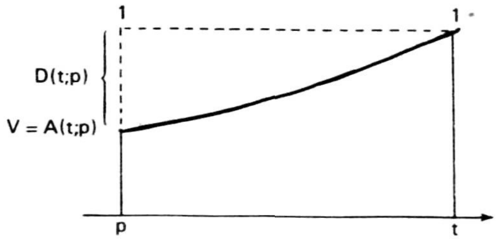
y su cálculo, desde el punto de vista práctico, presenta los mismos problemas que el de C_n o de $(1+i)^n$ analizados en 7.3.1.

8.—LEY DE DESCUENTO SIMPLE COMERCIAL

8.1.—OBTENCION DE LA LEY

La ley financiera del descuento simple comercial se define como aquella en la que los descuentos de un período cualquiera son proporcionales a la duración del período y al *capital anticipado o descontado.*

Supuesto un capital unitario (1, t) y el punto p de valoración se tiene:



Los descuentos desde t hasta p con el descuento simple comercial son:

$$D_c(t;\ p) = d(t-p) = 1 - A(t;\ p) \tag{57}$$

siendo d el factor de proporcionalidad que representa el descuento producido por una unidad monetaria en una unidad de tiempo. Para su validez el parámetro d y el tiempo $z = t - p$ deben estar referidos a la misma unidad de tiempo, que usualmente es el año.

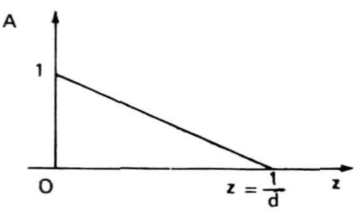
La expresión de la ley financiera del descuento simple comercial que se obtiene de (57) es:

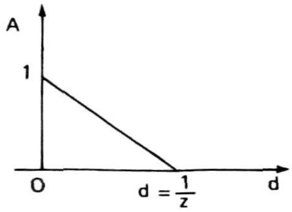
$$A(t;\ p) = 1 - d(t-p) \tag{58}$$

y puede ser escrita en forma estacionaria mediante

$$A(z;\ 0) = 1 - dz \tag{59}$$

La representación gráfica de la ley en función de z o en función de d viene recogida en las semirrectas:

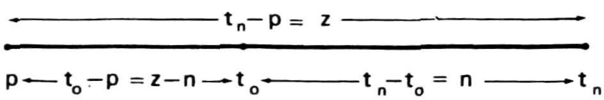




quedando su campo de validez limitado al intervalo de tiempo $\left(0;\, z=\frac{1}{d}\right)$ y al de parámetros $\left(0;\, d=\frac{1}{z}\right)$, ya que $A(z;\, 0)=1-dz>0$.

8.2.—INTERPRETACION DEL PARAMETRO d

El factor, rédito y tanto de descuento asociados al intervalo $(t_0,\, t_n)$, tal que:



son:

$$v(t_0,\, t_n;\, p)=\frac{1-d(t_n-p)}{1-d(t_0-p)}=\frac{1-dz}{1-d(z-n)}=v(n;\, z)>A(z;\, 0) \qquad (60)$$

$$d(n;\, z)=\frac{dz}{1-d(z-n)} \quad ; \quad \delta(n;\, z)=\frac{d}{1-d(z-n)}$$

Es usual tomar como valor de p el menor posible, es decir, darse $p=t_0$ y $z=n$, lo que conduce a:

$$v(n=z)=1-dn=A(n;\, 0) \quad ; \quad d(n=z)=dn \quad ; \quad \delta(n=z)=d \qquad (61)$$

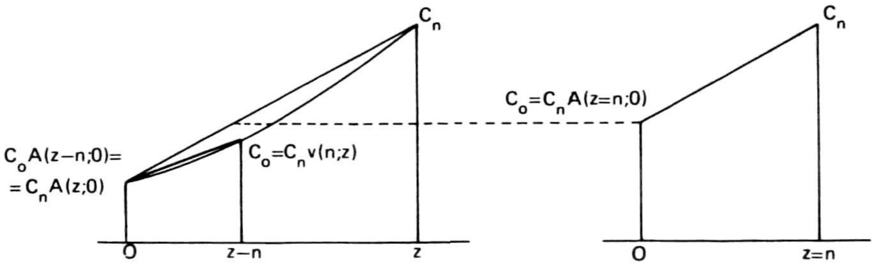
deduciéndose que el factor de proporcionalidad d es el tanto de descuento o tipo de descuento cuando el vencimiento del capital más próximo coincide con p.

8.3.—CALCULO DEL VALOR ACTUAL, DEL TIEMPO Y DEL TANTO

Cuando se descuenta un capital de cuantía C_n, por n años, el valor descontado o actual que se obtiene es:

$$C_0=C_n\,\frac{1-dz}{1-d(z-n)} \quad \text{o} \quad C_0=C_n(1-dn) \qquad (62)$$

según se concierte la operación con $p<t_0$ ó con $p=t_0$. En este segundo caso se obtiene un valor descontado superior recogido por las trayectorias seguidas para calcular el capital C_0 equivalente a C_n:



C_n se conoce con los nombres de capital final o capital nominal y a C_0 se le designa con los nombres de valor actual, valor efectivo o valor descontado.

El número de años n y el tanto d se calculan en

$$n=\frac{C_n-C_0}{C_0}\,\frac{1-dz}{d} \quad ; \quad n=\frac{C_n-C_0}{C_nd} \tag{63}$$

$$d=\frac{C_n-C_0}{(C_n-C_0)z+C_0n} \quad ; \quad d=\frac{C_n-C_0}{C_n\cdot n} \tag{64}$$

En lo sucesivo sólo se hará referencia al caso $z=n$.

Ejemplo 1.—Calcular el valor descontado, en descuento comercial, de un capital de 500.000 pts. que vence dentro de cuatro años, si el tanto de descuento es el 6%, en los supuestos: a) $z=n$; b) $z-n=1$.

Haciendo uso de (62) se tiene:

$$C_0=C_n(1-dn)=500.000(1-0{,}06\times 4)=380.000$$

$$C_0=C_n\,\frac{1-dz}{1-d(z-n)}=500.000\,\frac{1-0{,}06\times 5}{1-0{,}06}=372.340{,}43$$

Ejemplo 2.—Calcular el tanto de descuento para que un capital se reduzca a la mitad.

a) Cuando $z>n$ se tiene, sustituyendo en (64):

$$d=\frac{C_n-\dfrac{C_n}{2}}{\left(C_n-\dfrac{C_n}{2}\right)z+\dfrac{C_n}{2}n}=\frac{1-\dfrac{1}{2}}{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)z+\dfrac{n}{2}}=\frac{1}{z+n}$$

b) Cuando $z=n$, aplicando (64), resulta

$$d=\frac{C_n-\dfrac{C_n}{2}}{C_n\cdot n}=\frac{1}{2n}$$

8.4.—CALCULO DEL DESCUENTO SIMPLE COMERCIAL. METODOS ABREVIADOS

El valor descontado de un capital de cuantía C_n que vence dentro de n períodos es, según (62), $C_0 = C_n(1-dn)$ por lo que el descuento efectuado es:

$$D_c = C_n - C_0 = C_n dn \tag{65}$$

debiendo tenerse presente que el tanto d y el tiempo n están referidos a la misma unidad de tiempo (el año). Al aplicarse la ley del descuento simple comercial en operaciones a corto plazo, cuya duración suele venir dada en días, n representará una fracción de año. Por tanto, si el número de días que median entre t_0 y t_n es k, según se utilice el año civil o el comercial, (65) quedará así:

$$D_c = C_n d \frac{k}{360} \quad \text{ó} \quad D_c = C_n d \frac{k}{365} \tag{66}$$

Para calcular los descuentos pueden utilizarse métodos abreviados análogos a los del cálculo de los intereses simples. Estos son:

a) **Método de los multiplicadores fijos**

Designando por $N = C_n d$ al número comercial o simplemente número y al cociente $\frac{d}{360}$ ó $\frac{d}{365}$ por el multiplicador fijo M, el descuento simple comercial será:

$$D_c = N \cdot M$$

b) **Método de los divisores fijos**

El descuento se expresa por el cociente $I = \frac{N}{D}$ siendo N el número comercial y D el divisor fijo que representa la fracción $\frac{360}{i}$ ó $\frac{365}{i}$.

c) **Método del tanto fijo**

Siendo D_c el descuento de un capital al tanto d y D'_c el descuento del mismo capital al tanto d', y para el misma duración, se tiene:

$$D_c = C_n d \frac{k}{360} \quad ; \quad D'_c = C_n d' \frac{k}{360}$$

y comparando por cociente se obtiene el descuento D_c en función de D'_c dado por la expresión:

$$D_c = \frac{d}{d'} D'_c$$

Ejemplo 3.—Calcular los descuentos efectuados a un capital de 750.000 pts. que vence dentro de 120 días si se utiliza el año comercial y el tipo de descuento es el 9% mediante los siguientes procedimientos: Cálculo directo, multiplicador fijo, divisor fijo y tanto fijo. En este caso se tomará como auxiliar el valor descontado al 6%, por el procedimiento de los divisores fijos.

Los números, multiplicadores y divisores son:

$$N = 750.000 \times 120 = 90.000.000 \quad ; \quad M = \frac{0{,}09}{360} = 0{,}00025$$

$$D = \frac{360}{0{,}09} = 4.000 \quad ; \quad D' = \frac{360}{0{,}06} = 6.000$$

y aplicando en las fórmulas anteriores se tiene:

$$D_c = C_n \cdot d \frac{k}{360} = 750.000 \times 0{,}09 \frac{120}{360} = 22.500$$

$$C_c = N \cdot M = 90.000.000 \times 0{,}00025 = 22.500$$

$$D_c = \frac{N}{D} = \frac{90.000.000}{4.000} = 22.500$$

$$D'_c = \frac{N}{D'} = \frac{90.000.000}{6.000} = 15.000$$

$$D_c = \frac{d}{d'} D'_c = \frac{0{,}09}{0{,}06} 15.000 = 22.500$$

9.—LEY DE DESCUENTO SIMPLE RACIONAL

9.1.—OBTENCION DE LA LEY. CALCULO DEL VALOR ACTUAL Y DEL DESCUENTO

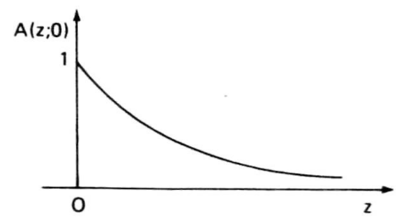
La ley financiera del descuento simple racional se define como la recíproca o conjugada de la de capitalización simple por lo que adopta la forma analítica:

$$A(t;\, p) = \frac{1}{1 + i(t-p)} \tag{67}$$

o con la sustitución $z = t - p$, la equivalente

$$A(z;\, 0) = \frac{1}{1 + iz} \tag{68}$$

Esta función toma el valor 1 para $z = 0$, tiende a cero cuando z tiende a infinito, su derivada primera es negativa y la derivada segunda es positiva, por lo que quedará representada por el gráfico adjunto.



Cuando se descuenta un capital C_n, o capital nominal, que vence dentro de n años es usual tomar como punto de aplicación el momento actual sobre el que se efectúa el descuento por lo que el valor actual, descontado o efectivo, que se obtiene por el nominal es:

$$C_0 = C_n \frac{1}{1+in} \tag{69}$$

y el descuento racional o matemático será la diferencia:

$$D_r = C_n - C_0 = C_n \frac{ni}{1+in} \tag{70}$$

El valor D_r ha sido obtenido tomando como dato el tanto de interés i que no debe ser confundido con el tanto de descuento. Estos son diferentes pero si cabe hablar de un tanto de interés equivalente a uno de descuento y recíprocamente. Representando al tanto de descuento (véase 4.2) por:

$$\delta(0;\, n) = \frac{C_n - C_0}{C_n \cdot n} = \frac{C_n - C_n \dfrac{ni}{1+in}}{C_n \cdot n} = \frac{i}{1+ni}$$

se ve la relación que guardan el tanto de descuento y el tanto de interés para ser equivalentes.

Asimismo, la expresión (70) puesta en función del tanto de descuento será análoga a la (65) que corresponde al descuento simple comercial. Por tanto, podría hablarse de un tanto de capitalización i, que aparece en el descuento racional, equivalente al tanto de descuento d del comercial cuando ambos descuentos tuviesen el mismo valor, es decir:

$$D_c = C_n \cdot nd = C_n \frac{ni}{1+ni} = D_r \Rightarrow \begin{cases} d = \dfrac{i}{1+ni} \\ i = \dfrac{d}{1-dn} \end{cases} \tag{71}$$

Para $n = 1$ se tiene:

$$d = \frac{i}{1+i} \quad ; \quad i = \frac{d}{1-d} \tag{72}$$

Ejemplo 1.—Calcular el descuento racional que se efectuará sobre un título de 300.000 pts. nominales, que vence dentro de 120 días, si el tomador del título desea obtener un tanto de interés del 12%. ¿Cuál sería en descuento comercial el tanto de descuento equivalente al de interés?

El descuento racional es:

$$D_r = 300.000 \frac{\dfrac{120}{360}\, 0{,}12}{1 + 0{,}12 \dfrac{120}{360}} = 11.538{,}46$$

y el efectivo pagado por el comprador del titulo es $C_0 = 300.000 - 11.538{,}46 = 288.461{,}54$ el cual garantiza obtener la rentabilidad

$$i = \frac{C_n - C_0}{C_0 n} = \frac{300.000 - 288.461{,}54}{288.461{,}54 \cdot \dfrac{120}{360}} = 0{,}12$$

El tanto de descuento equivalente al de interés asciende a:

$$d = \frac{i}{1+ni} = \frac{0,12}{1 + \frac{120}{360}\ 0,12} = 0,1153846$$

y el descuento comercial que experimentaría el título con el tanto obtenido sería:

$$D_c = C_n \cdot nd = 300.000\ \frac{120}{360}\ 0,1153846 = 11.538,46$$

que coincide lógicamente con el del racional.

9.2.—METODOS ABREVIADOS PARA CALCULAR EL DESCUENTO SIMPLE RACIONAL

Son los mismos analizados en 8.4 para el caso del descuento simple comercial. En los casos del multiplicador y del divisor fijo se tiene:

a) **Método de los multiplicadores fijos**

$$D_r = C_n\ \frac{\frac{k}{360}\ i}{1 + \frac{k}{360}\ i} = \frac{N \cdot M}{1 + k \cdot M}$$

b) **Método de los divisores fijos**

$$D_r = C_n\ \frac{\frac{k}{360}\ i}{1 + \frac{k}{360}\ i} = \frac{N/D}{1 + \frac{k}{D}} = \frac{N}{D+k}$$

Ejemplo 2.—Calcular por los métodos abreviados el descuento del ejemplo 1.

Por ser:

$$N = 300.000 \times 120 = 36.000.000 \quad ; \quad M = \frac{0,12}{360} = 0,0003\hat{3} \quad ; \quad D = \frac{360}{0,12} = 3.000$$

se tiene:

$$D_r = \frac{N \cdot M}{1 + k \cdot M} = \frac{36.000.000 \times 0,0003\hat{3}}{1 + 120 \times 0,0003\hat{3}} = 11.538,46$$

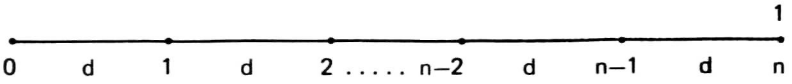
$$D_r = \frac{N}{D+k} = \frac{36.000.000}{3.000 + 120} = 11.538,46$$

10.—LEY DE DESCUENTO COMPUESTO

10.1.—OBTENCION DE LA LEY

Para calcular la ley financiera del descuento compuesto se procederá de manera análoga a como se hizo para obtener la ley de capitalización compuesta en 7.1.

Sea un capital unitario disponible dentro de n años y d el tanto de descuento, precio de descuento o tipo de descuento que experimenta la unidad monetaria en un año, es decir:



El valor de la unidad monetaria descontado por un año (desde n a $n-1$) será $1\cdot(1-d)=1-d$, descontando este resultado otro año más (desde $n-1$ a $n-2$) se tiene $(1-d)(1-d)=(1-d)^2$ y siguiendo el proceso de descuento n años, hasta alcanzar el origen, el capital disponible es:

$$A(n;\,0)=(1-d)^n \tag{73}$$

expresión que recibe el nombre de **ley financiera de descuento compuesto**, y ha sido deducida para valores enteros de n. Si se pretende obtener el valor descontado de un período $z=n+\theta$, siendo n un número entero de años y θ una fracción de año, la fórmula (73) no tiene en este caso validez, pero nada se opone a su generalización de igual manera que en la capitalización compuesta, mediante la adopción de uno de los convenios:

1.º **Convenio lineal.**—El valor descontado de un capital unitario para el tiempo $z=n+\theta$ es:

$$A(z;\,0)=(1-d)^z=(1-d)^n(1-d\theta) \tag{74}$$

2.º **Convenio exponencial.**—Consiste en generalizar la (73) para cualquier número racional positivo, o sea:

$$A(z;\,0)=(1-d)^z=(1-d)^n(1-d)^\theta \tag{75}$$

Ahora bien, la ley de descuento compuesto puede ser obtenida con toda generalidad, de una manera directa, pues es la función conjugada o recíproca de la capitalización compuesta:

$$A(t;\,p)=\frac{1}{(1+i)^{t-p}}=\frac{1}{(1+i)^z}=(1+i)^{-z}=A(z;\,0) \tag{76}$$

siendo i el tanto de interés de su ley conjugada.

Para que las dos expresiones proporcionen un mismo resultado deberá ser:

$$A(z;\,0)=(1-d)^z=(1+i)^{-z}$$

bastando para ello que sea $1-d=(1+i)^{-1}$, lo que implica

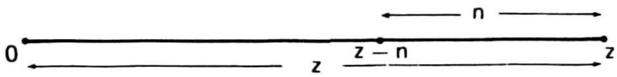
$$d=\frac{i}{1+i} \quad ; \quad i=\frac{d}{1-d} \tag{77}$$

Este resultado pone de manifiesto la existencia de un tanto de descuento equivalente a un tanto de interés dado, con independencia del período z en el que se efectúa el descuento. Será indiferente utilizar cualquiera de las expresiones d o i siempre que guarden las relaciones de (77), pero en la vida práctica es más frecuente utilizar el tanto de interés y por ello se hará uso preferente de éste.

La representación gráfica del descuento compuesto es análoga a la del descuento simple racional.

10.2.—INTERPRETACION DEL PARAMETRO d

El factor de descuento asociado al intervalo



de medida n es:

$$v(n;\, z)=\frac{(1-d)^{z}}{(1-d)^{z-n}}=(1-d)^{n}=(1+i)^{-n}=v(n)$$

con n número entero o fraccionario. Para $n=1$ se tiene:

$$v(1)=1-d \quad ; \quad d(1)=d \quad ; \quad \delta(1)=d$$

luego d es el precio de descuento constante unitario anual o tanto de descuento.

10.3.—CALCULO DEL VALOR ACTUAL, DEL TIEMPO Y DEL TANTO

El valor actual, efectivo o descontado de un capital nominal disponible dentro de n años es:

$$C_0=C_n(1-d)^{n}=C_n(1+i)^{-n}=C_n v^{n} \tag{78}$$

En esta expresión, conocidas tres de las variables C_0, C_n, n, d (ó i) se determinará la cuarta.

Cuando se utiliza la fórmula $C_0=C_n(1+i)^{-n}$ el cálculo de C_0, C_n, n ó i es idéntico a lo visto en 7.3 por lo que ya ha sido estudiado suficientemente.

Si se hace uso de la expresión $C_0=C_n(1-d)^{n}$ se puede recurrir al cálculo logarítmico o el ampleo de tablas financieras.

10.3.1.—Cálculo por logaritmos

Tomando logaritmos en (78) y operando, se tiene:

$$\lg C_0 = \lg C_n + n \lg (1-d) = H \Rightarrow C_0 = \text{antilog } H \tag{79}$$

$$\lg C_n = \lg C_0 - n \lg (1-d) = K \Rightarrow C_n = \text{antilog } K \tag{80}$$

$$\lg (1-d) = \frac{\lg C_0 - \lg C_n}{n} = Y \Rightarrow d = 1 - \text{antilog } Y \tag{81}$$

$$n = \frac{\lg C_0 - \lg C_n}{\lg (1-d)} \tag{82}$$

Ejemplo 1.—Calcular el valor descontado de un nominal de 650.000 que vence dentro de 4 años si el tanto de descuento es el 8%.

$$\lg C_0 = \lg 650.000 + 4 \lg (1-0{,}08) = 5{,}668065$$

$$C_0 = \text{antilog } 5{,}668065 = 465.655{,}42$$

Ejemplo 2.—Calcular el nominal de un capital que vence dentro de 3 años si su valor descontado al tanto de descuento del 6% es 500.000.

$$\lg C_3 = \lg 500.000 - 3 \lg (1-0{,}06) = 5{,}779586$$

$$C_3 = \text{antilog } 5{,}779586 = 601.986{,}07$$

Ejemplo 3.—Sabiendo que el valor nominal de un capital, que vence dentro de 3 años, es 400.000 y su valor descontado 300.000 ¿cuál es el tanto de descuento?

$$\lg (1-d) = \frac{\lg 300.000 - \lg 400.000}{3} = -0{,}041646$$

$$d = 1 - \text{antilog } (-0{,}041646) = 0{,}091440$$

Ejemplo 4.—Para los capitales del ejemplo anterior ¿cuál sería la duración si el tanto de descuento es el 8%?

$$n = \frac{\lg 300.000 - \lg 400.000}{-\lg (1-0{,}08)} = 3{,}45$$

10.3.2.—Cálculo por tablas financieras

La disposición de una tabla de esta naturaleza podría ser:

$(1-d)^n$: Valor actual de una unidad en régimen de descuento compuesto						
Períodos	d = 1 %	.....	d = 6,5 %	d = 6,75 %	d = 7 %	.....
1	0,990000	.....	0,935000	0,932500	0,930000	.....
2	0,980100	.....	0,874225	0,869556	0,864900	.....
3	0,970299	.....	0,817400	0,810861	0,804357	.....
4	0,960596	.....	0,764269	0,756128	0,748052	.....
5	0,950990	.....	0,714592	0,705089	0,695688	.....
6	0,941480	.....	0,668143	0,657496	0,646990	.....
.....						

y para su utilización se procede de la misma manera que en las tablas analizadas en 7.3.

Cuando el tipo de descuento d o el número de períodos n figuran en las tabas, calcular $(1-d)^n$ es inmediato lo que facilita determinar C_0 o C_n, en caso contrario se procederá a una interpolación lineal. También será usual recurrir a la interpolación lineal cuando se pretenda calcular d o n.

a) Cálculo de $(1-d)^{n+\theta}$; conocido $n+\theta$ y cálculo de $n+\theta$ conocido el valor $(1-d)^{n+\theta}$.

De la expresión general de interpolación:

$$\frac{n+1-n}{n+\theta-n}=\frac{(1-d)^{n+1}-(1-d)^n}{(1-d)^{n+\theta}-(1-d)^n}$$

se sigue:

$$(1-d)^{n+\theta}=(1-d)^n(1-d\theta) \tag{83}$$

$$n+\theta=n+\frac{(1-d)^{n+\theta}-(1-d)^n}{(1-d)^{n+1}-(1-d)^n} \tag{84}$$

b) Cálculo de $(1-d)^n$ conocido d y cálculo de d conocido $(1-d)^n$.

Cuando d no figura en la tabla se efectúan los cálculos por interpolación entre dos valores d_1 y d_2 que si están tabulados, con $d_1<d<d_2$. Esta interpolación es:

$$\frac{d_2-d_1}{d-d_1}=\frac{(1-d_2)^n-(1-d_1)^n}{(1-d)^n-(1-d_1)^n}$$

de donde resulta:

$$(1-d)^n=(1-d_1)^n+\frac{d-d_1}{d_2-d_1}\,[(1-d_2)^n-(1-d_1)^n] \tag{85}$$

$$d = d_1 + (d_2 - d_1)\ \frac{(1-d)^n - (1-d_1)^n}{(1-d_2)^n - (1-d_1)^n} \tag{86}$$

Ejemplo 5.—a) Calcular C_0 si $C_n = 400.000$; $n = 3,4$ y $d = 6,75\%$.

b) Calcular n si $C_0 = 100.000$; $C_n = 135.000$ y $d = 7\%$.

c) Calcular C_0 si $C_n = 200.000$; $n = 5$; $d = 0,0661\%$.

d) Calcular d si $C_0 = 80.000$; $C_n = 123.000$; $n = 6$.

a) Se calcula $(1-d)^{n+\theta}$ con la fórmula (83)

$$(1-0,0675)^{3.4} = (1-0,0675)^3(1-0,0675 \times 0,40) = 0,788968$$

y el valor de C_0 es:

$$C_0 = 400.000(1-0,0675)^{3.4} = 315.587,10$$

b) La tabla anterior indica que el valor $(1-0,07)^n = \dfrac{100.000}{135.000} = 0,740741$ está comprendido entre 4 y 5, por lo que aplicando (84) resulta:

$$4 + \theta = 4 = \frac{0,740741 - 0,748052}{0,695688 - 0,748052} = 4 + 0,14 = 4,14 \text{ años}$$

c) De (85) y al ser $i_1 = 0,065 < 0,0661 < i_2 = 0,0675$, se deduce:

$$(1-0,0661)^5 = 0,714592 + \frac{0,0661 - 0,065}{0,0675 - 0,065}\ (0,705089 - 0,714592) = 0,710411$$

luego:

$$C_0 = 200.000(1-0,0661)^5 = 142.082,14$$

d) El valor del cociente $\dfrac{C_0}{C_k} = (1-d)^6 = \dfrac{80.000}{123.000} = 0,650407$ corresponde a un valor de d comprendido entre $d_1 = 0,0675$ y $d_2 = 0,07$. Haciendo uso de (86) se tiene:

$$d = 0,0675 + (0,07 - 0,0675)\ \frac{0,650407 - 0,657496}{0,646990 - 0,657496} = 0,069187$$

10.4.—CALCULO DEL DESCUENTO

El descuento es la diferencia entre el valor nominal C_n y el valor descontado C_0 por lo que:

$$D = C_n - C_0 = C_n[1-(1-d)^n] = C_n[1-(1+i)^{-n}] \tag{87}$$

según se utilice en su cálculo d ó i.

Ejemplo 6.—Calcular el descuento efectuado a un nominal de 150.000 que vence dentro de 3 años en los supuestos: a) $d=0,07$; b) $i=0,09$.

a) $D=150.000[1-(1-0,07)^3]=29.346,45$.

b) $D=150.000[1-(1+0,09)^{-3}]=34.172,55$.

11.—CAPITALIZACION Y DESCUENTO FRACCIONADOS. TANTOS EQUIVALENTES: TANTO NOMINAL Y TANTO EFECTIVO

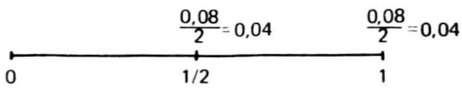
11.1.—CAPITALIZACION FRACCIONADA

En ocasiones se acuerda que la capitalización se efectúe con frecuencia distinta a la anual, siendo usual que lo sea en partes de año. A esta segunda opción se la conoce como capitalización fraccionada y surge cuando acreedor y deudor pactan una operación, con duración un año o superior, en la que tomando un tipo de interés anual de referencia, pueden darse una de estas dos posibilidades: 1) Que el pago de los intereses se efectúe con periodicidad de m-simos de año con el consiguiente abono de ellos al prestamista y 2) Que al final de cada m-simo de año se devenguen intereses, pero al no abonarse se incorporan al principal para producir también intereses en el m-simo siguiente y así sucesivamente.

Con el fin de analizar la primera de las posibilidades supongamos una operación en la que se presta un capital unitario, por un año o por múltiplos de año, a un tanto $i=0,08$ anual con percepción de intereses cada 6 meses por el valor

$$I^{(2)}=0,08\ \frac{1}{2}=\frac{0,08}{2}=0,04$$

El prestamista recibe cada año 0,08 distribuido en



forma que siempre es preferible a la de cobrar 0,08 a fin de año, ya que siempre cabe la posibilidad de reinvertir los rendimientos del primer semestre por el resto de año. En el supuesto que la reinversión se produjese en las mismas condiciones a fin de año se tendrían los siguientes rendimientos:

$$i=\left(\frac{0,08}{2}+\frac{0,08}{2}\ \frac{0,08}{2}\right)+\frac{0,08}{2}=$$
$$=0,04+0,0016+0,04=0,0816>0,08=j$$

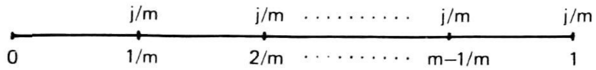
el producto final $i=0,0816$, gracias a la posibilidad de reinversión, es superior a $j=0,08$ y como ambos valores vienen referidos a un año puede afirmarse que $j=0,08$ es una medida incompleta que no refleja el rendimiento real. Se trata j de una medida **nominal** a la que es preciso añadir la forma de cobro de los intereses (número m de veces) para especificar las posibilidades totales del año recogidas en el valor $i=0{,}0816$. Si para el mismo tanto anual $j=0{,}08$ se acuerda el cobro de intereses cuatrimestrales siguiendo el mismo proceso se obtendría un valor:

$$i=\left[\frac{0{,}08}{3}+2\left(\frac{0{,}08}{3}\right)^2+\left(\frac{0{,}08}{3}\right)^3\right]+\left[\frac{0{,}08}{3}+\left(\frac{0{,}08}{3}\right)^2\right]+\frac{0{,}08}{3}=$$

$$=3\ \frac{0{,}08}{3}+3\left(\frac{0{,}08}{3}\right)^2+\left(\frac{0{,}08}{3}\right)^3=\left(1+\frac{0{,}08}{3}\right)^3-1=0{,}082113\ .\ .\ .\ .\ .$$

Obsérvese que partiendo de los mismos valores de j cuando el número de cobros m aumenta, el valor alcanzado por i es superior.

En general, dado un valor de j si el número de vencimientos acordado es m se tiene:



y el valor de i que resulta, siguiendo el proceso iterativo señalado, es:

$$i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1$$

Al parámetro j se le suele representar por $j(m)$, para indicar la frecuencia o número de veces que ha intervenido en el año en la fijación de los intereses.

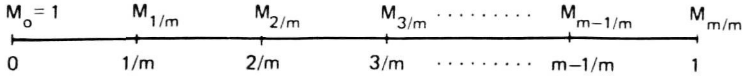
Por tanto, en una operación en la que se presta un capital unidad, al tanto $j(m)$ con vencimiento de intereses en cada $1/m$ de año, es posible obtener al final del año el montante:

$$M_1^{(m)}=\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m=1+i$$

y al cabo de n años:

$$M=\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{n\cdot m}=(1+i)^n$$

Cuando el prestamista y prestatario acuerdan que al final de cada m-simo de año se devenguen intereses al tanto j, pero que en lugar de abonarse se incorporen al capital para que la suma de ambos produzca intereses en el m-simo siguiente y así sucesivamente, se tiene, como consecuencia de la capitalización fraccionada o en fracciones de año, la sucesión de montantes:



cuyos valores son:

$$M_{1/m} = M_0 + M_0 j \frac{1}{m} = M_0\left(1 + j\frac{1}{m}\right) = \left(1 + j\frac{1}{m}\right)$$

$$M_{2/m} = M_{1/m} + M_{1/m} j \frac{1}{m} = M_{1/m}\left(1 + j\frac{1}{m}\right) = \left(1 + j\frac{1}{m}\right)^2$$

$$M_{3/m} = M_{2/m} + M_{2/m} j \frac{1}{m} = M_{2/m}\left(1 + j\frac{1}{m}\right) = \left(1 + j\frac{1}{m}\right)^3$$

. . . .

$$M_1 = M_{m/m} = M_{m-1/m}\left(1 + j\frac{1}{m}\right) = \left(1 + j\frac{1}{m}\right)^m$$

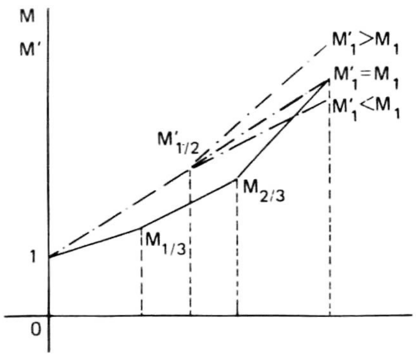
Al final del año, el montante M_1 alcanzado es función del tanto $j(m)$, es decir, del valor de j y de su frecuencia m o número de veces que ha capitalizado y por ello suele simbolizarse así:

$$M_1 = \left(1 + j_{(m)}\frac{1}{m}\right)^m = \left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)^m$$

Si la operación se hubiese concertado para capitalizar en r-simos de año con el tanto $i(r)$ el resultado sería:

$$M'_1 = \left(1 + i_{(r)}\frac{1}{r}\right)^r = \left(1 + \frac{i_{(r)}}{r}\right)^r$$

El camino recorrido por las dos quebradas podría ser el de la figura si se toma $m=3$ y $r=2$, en donde puede ocurrir que M_1 (quebrada de trazo continuo) sea igual, mayor o menor que M'_1 (quebrada de trazo discontinuo.



Si $M_1 = M'_1$, es decir, si al final de año ambas quebradas alcanzan el mismo valor se dará:

$$\left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)^m = \left(1 + \frac{i_{(r)}}{r}\right)^r \qquad (88)$$

y cuando ocurre esta igualdad de resultados se dice que $j_{(m)}$ e $i_{(r)}$ son **tantos equivalentes** porque cada uno con su frecuencia alcanza el mismo nivel que el otro a fin de año.

Si $r=1$, la relación anterior se transforma en:

$$1 + i = \left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)^m \qquad (89)$$

en donde los tantos equivalentes i y $j_{(m)}$ reciben los nombres específicos: **tanto efectivo anual** i y **tanto nominal anual de frecuencia** m, $j_{(m)}$.

Nótese que el resultado de (89) es el mismo que anteriormente se había obtenido para los pagos fraccionados de intereses con reinversiones de las mismas características.

La capitalización realizada para obtener M_1 es equivalente a la que se consigue aplicando una ley de capitalización compuesta, con período unitario 1/m y rédito o precio unitario correspondiente al m-simo, $i^{(m)} = \frac{j_{(m)}}{m}$, pues:

$$M_1 = \left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)^m = (1 + i^{(m)})^m = 1 + i \qquad (90)$$

Al rédito $i^{(m)}$ correspondiente al m-simo de año, también se le conoce con los nombres de **tanto periódico** o **tanto del subperíodo**.

La igualdad (90) continúa subsistiendo para períodos enteros de años, pues

$$(1+i)^n = (1 + i^{(m)})^{n \cdot m} = \left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)^{n \cdot m}$$

pero no cuando la duración es un número no entero de años.

En general, cuando la capitalización es fraccionada, las partes, prestamista y prestatario, suelen fijar el valor del tanto nominal anual y su frecuencia, es decir, $j_{(m)}$, y a partir de él se procede a calcular el tanto del subperíodo $i^{(m)} = \frac{j_{(m)}}{m}$ y el tanto efectivo anual

$$i = (1 + i^{(m)})^m - 1 = \left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)^m - 1 \qquad (91)$$

Cuando los datos de partida son el tanto efectivo anual i y la frecuencia de capitalización m, se obtienen los tantos nominal y del subperíodo mediante las expresiones:

$$j_{(m)} = m[(1+i)^{1/m} - 1] \quad ; \quad i^{(m)} = [(1+i)^{1/m} - 1] \qquad (92)$$

derivadas de (90).

Ejemplo 1.—Calcular el tanto efectivo anual y el del subperíodo correspondientes al tanto nominal $j_{(m)} = 0{,}09$ para m = 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

Aplicando las fórmulas:

$$i^{(m)} = \frac{0{,}09}{m} \quad ; \quad i = \left(1 + \frac{0{,}09}{m}\right)^m - 1 \qquad (m = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12)$$

se tiene:

Frecuencia	$i^{(m)}$	i
m = 1	0,0900	0,0900
m = 2	0,0450	0,0920
m = 3	0,0300	0,0927
m = 4	0,0225	0,0931
m = 6	0,0150	0,0934
m = 12	0,0075	0,0938

Nótese que i crece con m.

Ejemplo 2.—Calcular los tantos nominal y del subperíodo si el tanto efectivo anual es el 10% y la frecuencia de capitalización m = 1, 2, 3, 5, 6, 12.

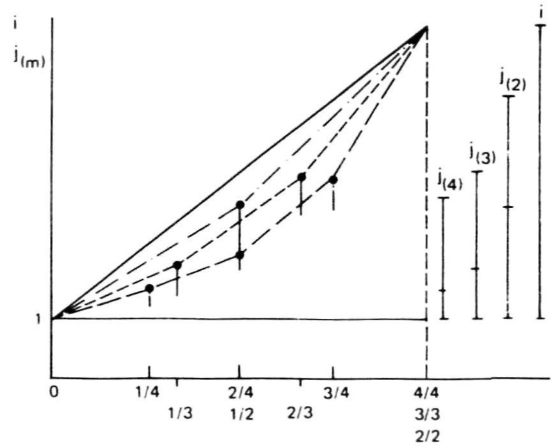
Las fórmulas

$$j_{(m)} = m[(1+0{,}10)^{1/m} - 1] \quad ; \quad i^{(m)} = [(1+0{,}10)^{1/m} - 1] \qquad (m = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12)$$

dan los siguientes resultados:

Frecuencia	$i^{(m)}$	$j_{(m)}$
m = 1	0,1000	0,1000
m = 2	0,0488	0,0976
m = 3	0,0323	0,0968
m = 4	0,0241	0,0964
m = 6	0,0160	0,0961
m = 12	0,0080	0,0957

Obsérvese que $j_{(m)}$ decrece con m.



La capitalización fraccionada sigue una línea quebrada con un valor final $1+i$ que depende, fijado j, de la frecuencia m y crece con ésta.

Si el objetivo es alcanzar un valor concreto de i (véase gráfico adjunto) con distintas posibilidades de frecuencia, ello será posible con valores nominales distintos. A medida que aumenta m es necesario un tanto $j_{(m)}$ inferior.

Ello puede observarse en el ejemplo 2 y una representación gráfica del fenómeno es la que se contempla, con valores de $m=2(\cdot-\cdot-)$, $3(----)$, $4(--)$, para llegar al mismo punto $1+i$.

Las soluciones entre tantos equivalentes se pueden obtener mediante la relación

$$\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m=\left(1+\frac{j_{(r)}}{r}\right)^r=1+i \tag{93}$$

de la que se sigue:

$$j_{(m)}=m\left[\left(1+\frac{j_{(r)}}{r}\right)^{r/m}-1\right] \quad ; \quad j_{(r)}=r\left[\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{m/r}-1\right] \tag{94}$$

En el ejemplo 2, todos los valores de la columna $j_{(m)}$ son tantos equivalentes.

11.2.—DESCUENTO FRACCIONADO

En descuento, dos tantos $d_{(m)}$ y $d_{(r)}$, con frecuencia m y r, se dirán **tantos equivalentes en descuento** cuando se cumple:

$$\left(1-\frac{d_{(m)}}{m}\right)^m=\left(1-\frac{d_{(r)}}{r}\right)^r \tag{95}$$

Obtenido uno puede calcularse el otro por:

$$d_{(m)}=m\left[1-\left(1-\frac{d_{(r)}}{r}\right)^{r/m}\right] \quad ; \quad d_{(r)}=r\left[1-\left(1-\frac{d_{(m)}}{m}\right)^{m/r}\right] \tag{96}$$

Cuando $r=1$, la (95) se transforma en:

$$\left(1-\frac{d_{(m)}}{m}\right)^m=1-d \tag{97}$$

recibiendo d el nombre de **tanto efectivo anual de descuento**. Al igual que en capitalización a $d^{(m)}=\frac{d_{(m)}}{m}$ se le conoce como tanto del subperíodo o tanto periódico de descuento (rédito de descuento correspondiente a un m-simo de año).

Conocido $d_{(m)}$ y la frecuencia m (o $d^{(m)}$), se calcula d y dado d y la frecuencia, se determinan $d_{(m)}$ y $d^{(m)}$. Las fórmulas que facilitan su obtención son:

$$d=1-\left(1-\frac{d_{(m)}}{m}\right)^m \quad ; \quad d_{(m)}=m[1-(1-d)^{1/m}] \quad ; \quad d^{(m)}=1-(1-d)^{1/m} \tag{98}$$

Ejemplo 3.—Calcular: a) Los tantos del subperíodo y efectivo si el tanto nominal de descuento es el 7%: b) Los tantos nominal y del subperíodo si el tanto efectivo anual de descuento es el 8%. Las frecuencias a utilizar son m = 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Aplicando las fórmulas de (98) se tiene:

	a) Dado $d_{(m)} = 0{,}07$		b) Dado $d = 0{,}08$	
Frecuencia	$d^{(m)}$	d	$d^{(m)}$	$d_{(m)}$
m = 1	0,0700	0,0700	0,0800	0,0800
m = 2	0,0350	0,0688	0,0408	0,0817
m = 3	$0{,}023\hat{3}$	0,0684	0,0274	0,0822
m = 4	0,0175	0,0682	0,0206	0,0825
m = 6	$0{,}016\hat{6}$	0,0670	0,0138	0,0828
m = 12	0,0058	0,0678	0,0692	0,0831

Obsérvese que d decrece con m, dado $d_{(m)}$, y que $d_{(m)}$ crece con m dado d.

11.3.—TANTO DE INTERES Y TANTO DE DESCUENTO EQUIVALENTES

Un tanto $j_{(r)}$, para capitalización con frecuencia r, y un tanto $d_{(m)}$, para descuento de frecuencia m, se llaman equivalentes cuando satisfacen:

$$\left(1+\frac{j_{(r)}}{r}\right)^{-r} = \left(1-\frac{d_{(m)}}{m}\right)^{m} \Leftrightarrow \left(1+\frac{j_{(r)}}{r}\right)^{r}\left(1-\frac{d_{(m)}}{m}\right)^{m} = 1 \tag{99}$$

y operando resulta:

$$j_{(r)} = r\left[\left(1-\frac{d_{(m)}}{m}\right)^{-m/r} - 1\right] = r[(1-d^{(m)})^{-m/r} - 1] \tag{100}$$

$$d_{(m)} = m\left[1-\left(1+\frac{j_{(r)}}{r}\right)^{-r/m}\right] = m[1-(1+i^{(r)})^{-r/m}] \tag{101}$$

expresiones que permiten calcular el tanto de interés, conocido el de descuento y las frecuencias, y calcular el tanto de descuento, dado el de interés y las frecuencias.

Para m = r = 1 la (99) toma la forma

$$1-d = \frac{1}{1+i} \tag{102}$$

que relaciona los tantos efectivos anuales de interés y de descuento equivalentes.

Para m = r de la (99) se sigue

$$1 - \frac{d_{(m)}}{m} = \frac{1}{1 + \frac{j_{(m)}}{m}} \tag{103}$$

y efectuando operaciones:

$$d_{(m)} = \frac{j_{(m)}}{1 + \frac{j_{(m)}}{m}} \quad ; \quad j_{(m)} = \frac{d_{(m)}}{1 - \frac{d_{(m)}}{m}} \tag{104}$$

Ejemplo 4.—Calcular el tanto de interés $j_{(m)}$ dado el tanto de descuento $d_{(m)} = 0{,}10$ y el tanto de descuento $d_{(m)}$ conocido el tanto de interés $j_{(m)} = 0{,}11$, si las frecuencias son iguales y toman los valores m = 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Por aplicación de (104) resulta:

Frecuencia	$j_{(m)}$ dado $d_{(m)} = 0{,}10$	$d_{(m)}$ dado $j_{(m)} = 0{,}11$
m = 1	0,1111	0,0991
m = 2	0,1053	0,1043
m = 3	0,1034	0,1061
m = 4	0,1026	0,1071
m = 6	0,1017	0,1080
m = 12	0,1008	0,1090

12.—CAPITALIZACION Y DESCUENTO CONTINUOS

En la práctica la capitalización de los intereses suele ser siempre discreta con períodos anuales o con fraccionamientos de éstos. Como un caso límite de la capitalización fraccionada, cuando el número de fraccionamientos m tiende a infinito o la medida del fraccionamiento 1/m tiende a cero, surge la denominada **capitalización continua**.

El montante de la unidad pagadera dentro de n años en régimen de capitalización continua es:

$$L(0; n) = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)^{m \cdot n} = e^{n \lim\limits_{m \to \infty} m \cdot \left(1 + \frac{j_{(m)}}{m} - 1\right)} =$$

$$= e^{n \lim\limits_{m \to \infty} j_{(m)}} = e^{n \lg_e (1 + i)} = e^{n\rho} \tag{105}$$

ya que

$$\lim_{m \to \infty} j_{(m)} = \lim_{m \to \infty} \frac{(1+i)^{1/m} - 1}{1/m} = \lg_e(1+i) = \rho$$

el límite del tanto nominal anual es el tanto instantáneo.

Por tanto, la capitalización anual a tanto efectivo, la fraccionada a tanto nominal y la cotinua a tanto instantáneo verifican las igualdades:

$$L(0; n) = (1+i)^n = \left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)^n = e^{n\rho} \quad (106)$$

En el caso del **descuento continuo** el valor actual o descontado de un nominal de una peseta disponible dentro de n años es:

$$A(n; 0) = \lim_{m \to \infty} \left(1 - \frac{d_{(m)}}{m}\right)^{m \cdot n} = e^{n \lim_{m \to \infty} m \cdot \left(1 - \frac{d_{(m)}}{m} - 1\right)} =$$

$$= e^{-n \lim_{m \to \infty} d_{(m)}} = e^{n \lg_e(1-d)} = e^{-n\delta} \quad (107)$$

pues

$$\lim_{m \to \infty} d_{(m)} = \lim_{m \to \infty} \frac{1 - (1-d)^{1/m}}{1/m} = -\lg(1-d) = \delta$$

y se satisfarán las igualdades:

$$A(n; 0) = (1-d)^n = \left(1 - \frac{d_{(m)}}{m}\right)^{m \cdot n} = e^{-n \cdot \delta} = (1+i)^{-n} \quad (108)$$

13.—EL EQUILIBRIO FINANCIERO: PRINCIPIO GENERAL DE EQUIVALENCIA DE CAPITALES. RESERVA MATEMATICA O SALDO FINANCIERO

En el epígrafe 3.º se hizo referencia a que toda operación financiera consiste en la entrega por la persona A acreedora a la deudora D del conjunto de capitales que forman la prestación a cambio de que la persona D entregue a la A el conjunto de capitales que constituyen la contraprestación. Ahora bien, este intercambio presuponía que el acreedor y deudor habían elegido una ley financiera y en base a la cual ambos conjuntos tenían un mismo valor, es decir, presentaban un equilibrio financiero.

Para estudiar toda operación financiera es necesario establecer el principio o postulado general de equivalencia de capitales que se anunciaba así: «Toda operación financiera implica la existencia de una equivalencia financiera de las sumas de capitales respectivas de la prestación y contraprestación en base a una ley financiera previamente establecida.»

Por tanto, la distribución de los compromisos de A y D dará:

Valor de prestación = Valor de contraprestación

en un punto cualquiera α. Lo usual es plantear la equivalencia (igualdad de sumas financieras) en el origen o al final de la operación.

Supongamos que el valor de la prestación y contraprestación son, respectivamente, en el origen $S_0(A)$ y $S_0(D)$ debiendo verificarse la igualdad $S_0(A)=S_0(D)$ entre las sumas financieras y continuará satisfaciéndose esto en todo punto τ, con $0<\tau<n$, siendo n la duración de la operación.

Transcurridos τ períodos han vencido parte de los capitales que tienen que entregar A y D y quedan pendientes de vencimiento los restantes. Si se designa por:

$S_{11}(A)$: al valor en τ de la prestación vencida o anterior a τ.

$S_{12}(A)$: al valor en τ de la prestación pendiente o posterior a τ.

$S_{21}(D)$: al valor en τ de la contraprestación vencida o anterior a τ.

$S_{22}(D)$: al valor en τ de la contraprestación pendiente o posterior a τ.

debiendo verificarse, por exigencia de la equivalencia financiera:

$$S_\tau(A)=S_{11}(A)+S_{12}(A)=S_{21}(D)+S_{22}(D)=S_\tau(D)$$

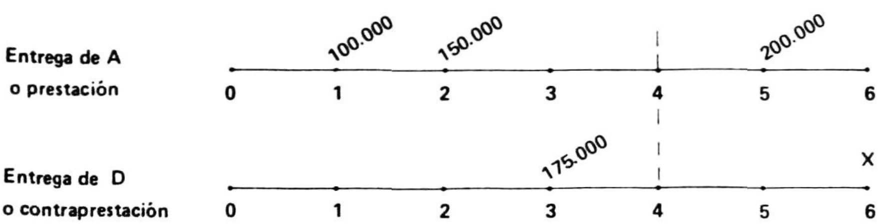
y de esta igualdad se sigue:

$$S_{11}(A)-S_{21}(D)=S_{22}(D)-S_{12}(A)$$

La diferencia $R_\tau=S_{11}(A)-S_{21}(D)$ recoge el saldo entre el valor de lo entregado por A (recibido por D) y por D (recibido por A) y recibe el nombre de **reserva matemática o saldo financiero por el método retrospectivo** por haber sido calculada volviendo al pasado. Si $R_\tau>0$ el valor de lo entregado por A supera a lo entregado por D y en caso de pretender finalizar la operación en este punto (o simplemente restablecer el equilibrio financiero), A tendría que recibir de D el valor del saldo. Cuando sea $R_\tau<0$ la situación será la contraria.

$R_\tau=S_{22}(D)-S_{12}(A)$ recogen la diferencia del valor de lo que tienen que entregar D (recibir A) y A (recibir D) y se denomina **reserva matemática o saldo financiero por el método prospectivo** por haber sido calculada en función de los compromisos futuros de deudor y acreedor.

Ejemplo: Supongamos la operación definida por:



establecida con la ley $L(0; n)=(1+0{,}10)^n$.

El equilibrio financiero en el origen exige que:

$$S_0(A)=100.000(1+0{,}10)^{-1}+150.000(1+0{,}10)^{-2}+200.000(1+0{,}10)^{-5}=$$
$$=339.060{,}29=175.000(1+0{,}10)^{-3}+X(1+0{,}10)^{-6}=S_0(D)$$

y efectuando operaciones es $X=367.741$ pesetas.

En $\tau=4$, la reserva matemática por el método retrospectivo es:

$$R_\tau=S_{11}(A)-S_{21}(D)=[100.000(1+0{,}10)^3+150.000(1+0{,}10)^2]-[175.000(1+0{,}10)]=$$
$$=314.600-192.500=122.100$$

y la reserva matemática por el método prospectivo resulta:

$$R_\tau=S_{22}(D)-S_{12}(A)=[367.741(1+0{,}10)^{-2}]-[200.000(1+0{,}10)^{-1}]=$$
$$=303.918{,}18-181.818{,}18=122.100$$

Además de los anteriores medios para calcular el saldo, existe un tercer método que calcula el saldo en un punto τ en función del saldo en otro punto anterior y de los vencimientos de los capitales que tienen lugar entre los dos puntos. Este saldo recibe el nombre de **reserva matemática por el método recurrente**.

En el ejemplo anterior, la primera reserva es $R_1=100.000$ y a partir de ésta, por recurrencia se pueden ir obteniendo los saldos de todos los años que son:

$$R_2=R_1(1+0{,}10)+150.000=260.000 \quad ; \quad R_3=R_2(1+0{,}10)-175.000=111.000$$
$$R_4=R_3(1+0{,}10)=122.100 \quad ; \quad R_5=R_4(1+0{,}10)+200.000=334.310$$
$$R_6=R_5(1+0{,}10)-367.741=0$$

14.—VENCIMIENTO COMUN. VENCIMIENTO MEDIO

Sean los capitales (C_1, t_1), (C_2, t_2), ..., (C_n, t_n) que se pretenden sustituir por un único capital (C, τ) de tal manera que resulte equivalente a todos los n capitales dados. El capital (C, τ) será la suma financiera de los (C_s, t_s) y su vencimiento τ recibe el nombre de **vencimiento común**.

Si la sustitución está planteada con una ley financiera de descuento, en virtud del principio de equivalencia que rige en toda operación financiera, se puede escribir:

$$CA(\tau; 0)=\sum_{s=1}^{n} C_s A(t_s; 0) \tag{109}$$

ecuación cuyo primer miembro es el valor en el origen, para la ley de descuento $A(z; 0)$, del capital único y el segundo miembro es, para la misma ley, la suma financiera en el origen de los capitales disponibles en t_1, t_2, t_3, ..., t_n.

14.1.—VENCIMIENTO COMUN Y VENCIMIENTO MEDIO CON LA LEY DE DESCUENTO COMPUESTO

Con la ley de descuento $A(z, 0)=(1+i)^{-z}$ se tiene:

$$C(1+i)^{-\tau}=\sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-t_s} \tag{110}$$

Conocido τ el valor de C es:

$$C=\frac{\sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-t_s}}{(1+i)^{-\tau}}=\sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{\tau-t_s} \tag{111}$$

y cuando se fija C se obtiene como valor de τ

$$\tau=\frac{\lg_e C-\lg_e \sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-t_s}}{\log_e(1+i)} \tag{112}$$

Para que tenga sentido (112) τ debe ser $\geqslant 0$ por lo que los posibles valores que se fijen para C deben satisfacer la condición

$$C\geqslant \sum_{s=1}^{n} C(1+i)^{-t_s}$$

Cuando se exige que $C=\sum_{s=1}^{n} C_s$, el valor de τ recibe el nombre de **vencimiento medio**, pues su valor

$$\tau=\frac{\lg_e \sum_{s=1}^{n} C_s-\lg_e \sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-t_s}}{\log_e(1+i)} \tag{113}$$

está comprendido entre t_1 y t_n.

Ejemplo 1.—Un prestamista tiene concedidos cuatro préstamos por los que han de reembolsarle: 150.000 pts. dentro de 3 años por el primero; 200.000 pts. dentro de 4 años por el segundo; 100.000 pts. dentro de 6 años por el tercero y 550.000 pts. dentro de 10 años por el cuarto. Acuerda con cierta entidad financiera, transferirle sus derechos, evaluándolos al tipo de interés del 8%, en descuento compuesto, a cambio de que la entidad le dé su equivalencia dentro de 4 años. ¿Cuál será la cuantía de capital unificado? ¿En qué momento podría disponer de una cuantía igual a la suma aritmética de las cuantías de los cuatro capitales?

La cuantía del capital unificado se obtiene sustituyendo valores en la fórmula (111):

$$C = 150.000(1+0{,}08) + 200.000(1+0{,}08)^0 + 100.000(1+0{,}08)^{-2} + 550.000(1+0{,}08)^{-6} = 794.327{,}18$$

El vencimiento medio, por ser $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 1.000.000$, verificará:

$$1.000.000(1+0{,}08)^{-\tau} = 150.000(1+0{,}08)^{-3} + 200.000(1+0{,}08)^{-4} +$$
$$+ 100.000(1+0{,}08)^{-6} + 550.000(1+0{,}08)^{-10} = 583.854{,}19$$

y, efectuando operaciones:

$$\tau = \frac{\lg_e 1.000.000 - \lg_e 583.854{,}19}{\lg_e(1+0{,}08)} = 6{,}9919 \approx 7 \text{ años}$$

Si el cálculo del vencimiento común o del vencimiento medio se plantea con la ley de capitalización compuesta se obtienen idénticos resultados, ya que su ecuación de equivalencia en t_n

$$C(1+i)^{t_n - \tau} = \sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{t_n - t_s}$$

es la (110) multiplicada por el factor constante $(1+i)^{t_n}$.

14.2. — VENCIMIENTO COMUN Y VENCIMIENTO MEDIO CON LA LEY DE DESCUENTO SIMPLE COMERCIAL

La ecuación (109) con la ley $A(z, 0) = 1 - dz$ es:

$$C(1 - d\tau) = \sum_{s=1}^{n} C_s(1 - dt_s) \tag{114}$$

de la que se sigue:

$$C = \sum_{s=1}^{n} C_s \frac{1 - dt_s}{1 - d\tau} \quad ; \quad \tau = \frac{C - \sum_{s=1}^{n} C_s(1 - dt_s)}{Cd} \tag{115}$$

La solución de **vencimiento medio** es:

$$C = \sum_{s=1}^{n} C_s \quad ; \quad \tau = \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s - \sum_{s=1}^{n} C_s(1 - dt_s)}{d \sum_{s=1}^{n} C_s} = \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s\, t_s}{\sum_{s=1}^{n} C_s} \tag{116}$$

es la media aritmética de los vencimientos, ponderada con las cuantías de los capitales.

Ejemplo 2.—Resolver el ejemplo 1, con la ley $A(z, 0) = 1 - 0{,}07z$.

a) Capital unificado

$$C = \frac{150.000(1 - 0{,}07 \times 3) + 200.000(1 - 0{,}07 \times 4) + 100.000(1 - 0{,}07 \times 6) + 550.000(1 - 0{,}07 \times 10)}{1 - 0{,}07 \times 4} =$$

$$= 674.305{,}56$$

b) Vencimiento medio

$$\tau = \frac{150.000 \times 3 + 200.000 \times 4 + 100.000 \times 6 + 550.000 \times 10}{1.000.000} = 7{,}35$$

Cuando los vencimientos de los capitales vienen dados en días las fórmulas (114)-(116), expresadas en función del divisor fijo D y de los números comerciales N_s, son:

— Equivalencia financiera

$$C\left(1 - \frac{\tau}{D}\right) = \sum_{s=1}^{n} C_s\left(1 - \frac{t_s}{D}\right) = \sum_{s=1}^{n} C_s - \frac{\sum_{s=1}^{n} N_s}{D} \qquad (114')$$

— Vencimiento común

$$C = \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s - \frac{\sum_{s=1}^{n} N_s}{D}}{1 - \frac{\tau}{D}} \quad ; \quad \tau = \frac{\left(C - \sum_{s=1}^{n} C_s\right)D + \sum_{s=1}^{n} N_s}{C} \qquad (115')$$

— Vencimiento medio

$$C = \sum_{s=1}^{n} C_s \quad ; \quad \tau = \frac{\sum_{s=1}^{n} N_s}{\sum_{s=1}^{n} C_s} \qquad (116')$$

Ejemplo 3.—Tres efectos de nominales 100.000 pts., 150.000 pts. y 250.000 pts. vencen respectivamente dentro de 30, 60 y 90 días ¿cuál será el nominal del efecto que sustituye a los tres anteriores si su vencimiento es dentro de 120 días? ¿Cuál sería el vencimiento de un efecto de nominal 500.000 pts.? Tómese para la valoración el tanto de descuento del 6% y el año comercial.

— Vencimiento común

$$\Sigma C_s = 100.000 + 150.000 + 250.000 = 500.000$$

$$\Sigma N_s = 100.000 \times 30 + 150.000 \times 60 + 250.000 \times 90 = 34.500.000$$

$$D = \frac{360}{0{,}06} = 6.000$$

$$C = \frac{500.000 - \dfrac{34.500.000}{6.000}}{1 - \dfrac{120}{6.000}} = 504.336{,}73$$

— Vencimiento medio

$$C = \Sigma C_s = 500.000 \quad ; \quad \tau = \frac{34.500.000}{500.000} = 69 \text{ días}$$

Si se utiliza para determinar el vencimiento medio la ley de capitalización simple, la ecuación de equivalencia es:

$$C[1 + i(t_n - \tau)] = \sum_{s=1}^{n} C_s[1 + i(t_n - ts)] \tag{117}$$

y se sigue:

$$C = \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s[1 + i(t_n - t_s)]}{1 + i(t_n - \tau)} \quad ; \quad \tau = t_n - \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s[1 + i(t_n - t_s)] - C}{Ci} \tag{118}$$

En el caso del vencimiento medio la solución es:

$$C = \sum_{s=1}^{n} C_s \quad ; \quad \tau = \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s t_s}{\sum_{s=1}^{n} C_s} \tag{119}$$

y coincide con la (116) del descuento simple comercial.

15.—TANTO MEDIO

Cuando se invierten varios capitales de cuantías C_1, C_2, ..., C_n, por un mismo tiempo t, en capitalización compuesta a los tantos i_1, i_2, ..., i_n el valor alcanzado dentro de t períodos es:

$$C_1(1 + i_1)^t + C_2(1 + i_2)^t + \cdots + C_n(1 + i_n)^t = \sum_{s=1}^{n} C_s(1 + i_s)^t$$

Se plantea el problema de sustituir estas n inversiones por una inversión única de cuantía C, igual duración, y colocada al tanto i de tal forma que financieramente sean equivalentes en t. Por tanto, se deberá cumplir

$$C(1+t)^t = \sum_{s=1}^{n} C_s(1+i_s)^t \tag{120}$$

De esta ecuación puede obtenerse, fijado C, el tanto i de la inversión común denominado tanto único equivalente a los tantos $i_1, i_2, \ldots, i_n$.

Si el valor de i es conocido se determinará C despejando de la anterior, o sea:

$$C = \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s(1+i_s)^t}{(1+i)^t} \tag{121}$$

En el caso de ser $C < \sum_{s=1}^{n} C_s$ la inversión única es preferible a las n iniciales, pues con un menor importe se consigue el mismo resultado; si $C > \sum_{s=1}^{n} C_s$ la inversión es desfavorable y en caso de igualdad será indiferente.

Si $C = \sum_{s=1}^{n} C_s$, el tanto i recibe el nombre de **tanto medio**, y satisface:

$$(1+i)^t = \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s(1+i_s)^t}{\sum_{s=1}^{n} C_s} \tag{122}$$

calculándose, fácilmente, i por tablas financieras o por logaritmos.

Ejemplo.—Sabiendo que los capitales de cuantías $C_1 = 300.000$ pts., $C_2 = 250.000$ pts. y $C_3 = 700.000$ pts. están invertidos, por 5 años, a los tantos respectivos $i_1 = 8\%$, $i_2 = 9\%$, $i_3 = 11\%$ respectivamente, determinar: 1.º La inversión única a efectuar si el tanto único es el 8,5%; 2.º Idem si i es el 10,5%; 3.º Calcular el tanto medio si el capital sustituto es de 1.250.000 pts.

1.º $C = \dfrac{300.000(1+0{,}08)^5 + 250.000(1+0{,}09)^5 + 700.000(1+0{,}11)^5}{(1+0{,}085)^5} =$

$= \dfrac{2.004.995{,}12}{1{,}50365669} = 1.333.412{,}83$

2.º $C = \dfrac{2.004.995{,}12}{(1+0{,}105)^5} = 1.217.031{,}80$

3.º $(1+i)^5 = \dfrac{2.004.995{,}12}{1.250.000} = 1{,}603996 \Rightarrow i = 0{,}0991$

16.—SUSTITUCION DE UN CAPITAL POR OTROS VARIOS; DESDOBLAMIENTO DE CREDITOS

La cuestión a plantear es la de encontrar varios capitales sustitutos de uno dado, es decir, resolver el problema inverso al del vencimiento común que consiste en suponer en la ecuación

$$CA(\tau; 0) = \sum_{s=1}^{n} C_s A(t_s; 0)$$

fijado (C, τ) y desconocidos $C_1, C_2, \ldots, C_n$ o $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Este problema conocido como el de desdoblamiento de créditos es indeterminado, pero admite solución para el caso de dos capitales $(C_1, t_1)(C_2, t_2)$, dados t_1 y t_2, con la condición de ser $C_1 + C_2 = C$ y es el que seguidamente se plantea:

16.1.—DESDOBLAMIENTO DE CAPITALES CON LA LEY DE DESCUENTO COMPUESTO

Se trata de resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 &= C \\ C_1(1+i)^{-t_1} + C_2(1+i)^{-t_2} &= C(1+i)^{-\tau} \end{aligned}\right\} \qquad (123)$$

con la condición $t_1 < \tau < t_2$ para que proporcione resultados positivos.

La solución es:

$$C_1 = C\,\frac{(1+i)^{-(\tau-t_1)} - (1+i)^{-(t_2-t_1)}}{1-(1+i)^{-(t_2-t_1)}} \quad ; \quad C_2 = C\,\frac{1-(1+i)^{-(\tau-t_1)}}{1-(1+i)^{-(t_2-t_1)}} \qquad (124)$$

Ejemplo 1.—Desdoblar un capital de 500.000 pts. de cuantía, que vence dentro de 5 años, en dos capitales cuyos vencimientos sean dentro de 2 y de 8 años, si el tipo de interés de la operación es el 9%.

$$C_1 = 500.000\,\frac{(1+0{,}09)^{-3} - (1+0{,}09)^{-6}}{1-(1+0{,}09)^{-6}} = 217.862{,}17$$

$$C_2 = 500.000\,\frac{1-(1+0{,}09)^{-3}}{1-(1+0{,}09)^{-6}} = 282.137{,}83$$

16.2.—DESDOBLAMIENTO DE CAPITALES CON LA LEY DE DESCUENTO SIMPLE COMERCIAL

El sistema es:

$$\left.\begin{array}{c} C_1+C_2=C \\ C_1\left(1-\frac{t_1}{D}\right)+C_2\left(1-\frac{t_2}{D}\right)=C\left(1-\frac{\tau}{D}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} C_1+C_2=C \\ C_1t_1+C_2t_2=C_\tau \end{array}\right. \qquad (125)$$

con solución:

$$C_1=C\,\frac{t_2-\tau}{t_2-t_1} \quad ; \quad C_2=C\,\frac{\tau-t_1}{t_2-t_1} \qquad (126)$$

Ejemplo 2.—Debiendo pagar una deuda de 300.000 pts. dentro de 90 días se acuerda con el acreedor liquidarle en dos plazos dentro de 30 y 120 días. ¿Cuál será la cuantía de cada plazo?

$$C_1=300.000\,\frac{120-90}{120-30}=100.000 \quad ; \quad C_2=300.000\,\frac{90-30}{120-30}=200.000$$

17.—PRORROGA DE VENCIMIENTOS

En ocasiones interesa calcular la sustitución de un capital (C; τ) en el supuesto de que se anticipe una parte (C_1; t_1 y sea necesario prorrogar el vencimiento de la cuantía $C_2=C-C_1$, de forma que el conjunto de las dos entregas (C_1; t_1) y (C_2t_2) sea equivalente al capital único (C; τ).

El cálculo del valor t_2 y la denominada **prórroga de vencimiento** $t_2-\tau$ es inmediato pues basta despejar de (123) o de (125) el valor t_2 según se trate del descuento compuesto o del simple comercial.

En el caso del descuento compuesto el vencimiento t_2 y la prórroga de vencimiento se determinan fácilmente, por logaritmos o tablas financieras, mediante las expresiones

$$(1+i)^{-t_2}=\frac{C(1+i)^{-\tau}-C_1(1+i)^{-t_1}}{C-C_1} \quad ; \quad (1+i)^{-(t_2-\tau)}=\frac{C-C_1(1+i)^{\tau-t_1}}{C-C_1} \qquad (127)$$

deducidas de (123).

Cuando se trate del descuento simple comercial de (125) se sigue:

$$t_2=\frac{C_\tau-C_1t_1}{C-C_1} \quad ; \quad t_2-\tau=\frac{C_1(\tau-t_1)}{C-C_1} \qquad (128)$$

Ejemplo 1.—Determinar el vencimiento de C_2 y la prórroga de vencimiento del supuesto 1 del epígrafe 16. Si $C_1 = 150.000$ y $t_1 = 2$ años.

$$(1+0{,}09)^{-t_2} = \frac{500.000(1+0{,}09)^{-5} - 150.000(1+0{,}09)^{-2}}{350.000} = 0{,}567753$$

$$t_2 = -\frac{\lg 0{,}567753}{\lg (1+0{,}09)} = 6{,}57 \quad ; \quad t_2 - \tau = 1{,}57$$

Ejemplo 2.—Resolver el ejemplo 2 del epígrafe 16 si $C_1 = 150.000$; y $t_1 = 30$ días.

$$t_2 = \frac{300.000 \times 90 - 150.000 \times 30}{150.000} = 150 \text{ días} \quad ; \quad t_2 - \tau = 60 \text{ días}$$

Segunda parte

RENTAS FINANCIERAS

II.—RENTAS FINANCIERAS

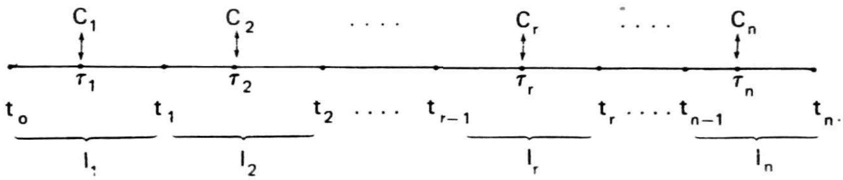
1.—Concepto de renta.
2.—Clasificación de las rentas.
3.—Valoración de rentas en capitalización compuesta.
4.—Renta inmediata, temporal y pospagable.
5.—Renta inmediata, constante, temporal y prepagable.
6.—Renta inmediata, constante y perpetua.
7.—Renta constante y diferida.
8.—Renta constante y anticipada.
9.—Renta variable en progresión aritmética.
10.—Renta variable en progresión geométrica.
11.—Rentas fraccionadas.
    11.1.—Rentas fraccionadas pospagables.
    11.2.—Rentas fraccionadas prepagables.
12.—Rentas de periodicidad superior al año.
13.—Valoración de rentas en capitalización simple.
14.—Valoración de rentas en descuento simple comercial.
15.—Rentas continuas.
    15.1.—Rentas continuas en capitalización compuesta.
    15.2.—Rentas continuas en capitalización simple.
    15.3.—Rentas continuas en descuento simple comercial.
    15.4.—Las rentas continuas como límite de las fraccionadas.
        15.4.1.—Renta continua constante.
        15.4.2.—Renta continua variable en progresión geométrica.
        15.4.3.—Renta continua variable en progresión aritmética.

1.—CONCEPTO DE RENTA

En Matemática Financiera, recibe el nombre de renta una sucesión de capitales que han de hacerse efectivos en determinados vencimientos.

De esta definición interesan fundamentalmente sus aspectos cuantitativos para valorar el conjunto de capitales que la renta supone en una determinada época, denominada **época de evaluación**.

El intervalo que contiene la renta es $I = [t_0, t_n]$ y la sucesión está formada por n capitales cuyos vencimientos están asociados a subintervalos $I_r \in I$, no vacíos y disjuntos, siendo la suma de los I_r igual al total I, la renta puede expresarse mediante el siguiente esquema:



siendo $\tau_r \in I_r$ el punto que vence el capital de cuantía C_r.

Los capitales que constituyen la renta se denominan **términos de la renta**, y los subintervalos a que se asocian **períodos de maduración** porque en ellos son engendrados o producidos.

Al punto t_0 extremo inferior del primer subintervalo se le denomina momento de constitución u **origen** de la renta y recibe el nombre de **fin** de la renta el punto t_n, extremo superior del último subintervalo. El tiempo que media entre origen y fin, diferencia $t_n - t_0$, se llama **duración** de la renta.

En lo que sigue se supondrá que los períodos de la renta son iguales y las rentas se llamarán de período constante. Generalmente el período es el año, dándose el nombre de **frecuencia** al número de capitales que son disponibles en el transcurso de un año. Así se dirá renta anual o de frecuencia uno, renta semestral o de frecuencia dos, renta trimestral o de frecuencia cuatro, etc. Si la frecuencia es infinita y en cada instante del tiempo vence un capital la **renta** se dice **continua**.

Especificados los capitales que componen una renta, es decir, conocidas las cuantías de sus terminos y los momentos en que vencen y elegida una ley financiera de valoración, se denomina **valor de una renta** en un determinado instante del tiempo a la suma de los valores que en aquel momento **tienen los términos que la constituyen**.

Cuando se valora en el origen t_0 se tiene el **valor actual** o **inicial**, y si la valoración se efectúa en t_n se obtiene el **valor capital** o **final** de la renta.

Como ejemplos de rentas se pueden citar:

— El importe de las ventas de un negocio en un período de tiempo.
— Los sueldos percibidos por un empleado.
— Los rendimientos que proporciona la explotación de una finca (rústica o urbana).
— Las cantidades pagadas en concepto de devolución de un préstamo.

En las operaciones financieras son frecuentes los casos en que un capital se sustituye por un conjunto de capitales, es decir, por una renta. También suele darse la sustitución de una serie de capitales por otra serie de capitales con vencimientos distintos.

Es evidente la importancia que tiene el estudio sistemático de las rentas y su valoración para llegar a soluciones de operaciones financieras en las que intervienen más de un capital en la prestación, en la contraprestación o en ambas.

2.—CLASIFICACION DE LAS RENTAS

A partir de la definición pueden elaborarse distintas agrupaciones de las rentas en función de las características de los distintos elementos que intervienen. Cabe destacar las siguientes clasificaciones:

a) Según la cuantía de sus términos se tienen: **rentas constantes** y **rentas variables**.

Una renta se dice **constante** cuando todas las cuantías de sus términos son iguales, es decir, $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = C$. Para $C = 1$ se tiene la renta constante unitaria.

Una renta se llama **variable** cuando las cuantías de sus términos no son iguales. Entre las posibles cabe destacar las denominadas rentas variables en **progresión aritmética** y las rentas variables en **progresión geométrica**. Estas denominaciones responden a que la cuantía de sus términos varían en progresión aritmética, es decir, es $C_s = C_{s-1} + d$, o a que varían en progresión geométrica, por lo que $C_s = C_{s-1} \cdot q$, con **d** y **q** las razones de las correspondientes progresiones.

b) Según el punto del intervalo en que vencen los términos cabe distinguir entre **rentas prepagables** y **rentas pospagables**.

La renta **prepagable** es aquella en que los vencimientos de los capitales tienen lugar al principio del intervalo, es decir, es $\tau_s = t_{s-1}$, y cuando $\tau_s = t_s$ la renta se denomina **pospagable** o **vencida**.

c) Según la medida de los intervalos se distingue entre **rentas discretas** y **rentas continuas**.

Una renta es **discreta** cuando la medida de los intervalos $(t_{s-1}; t_s)$ es finita y se dice que la renta es **continua** si dicha medida es infinitesimal.

Entre las rentas discretas cabe distinguir entre rentas a período uniforme (a período anual, semestral, etc.) y a período no uniforme.

d) En función de su duración las rentas se clasifican en **temporales** o de duración finita y **perpetuas** o de duración indefinida.

e) Atendiendo a la posición que ocupa el punto de valoración de la renta, cabe citar las **rentas inmediatas, diferidas** y **anticipadas**.

Cuando el punto de valoración a coincide con t_0 o con t_n la renta se denomina **inmediata**; si el punto de valoración es anterior a t_0 se tiene la renta **diferida** respecto del punto a, y la diferencia $t_0 - a$ se llama período de diferimiento. En el caso de ser a posterior a t_n, la renta recibe el nombre de **anticipada** respecto del punto a, y la diferencia $a - t_n$ es el período de anticipación.

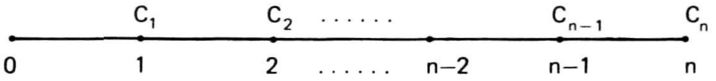
f) Según que las medida de los períodos sean iguales o no se distingue entre **rentas a período uniforme y a período no uniforme**.

Los criterios expuestos son susceptibles de combinarse. La realidad muestra que toda renta comprende varias clasificaciones.

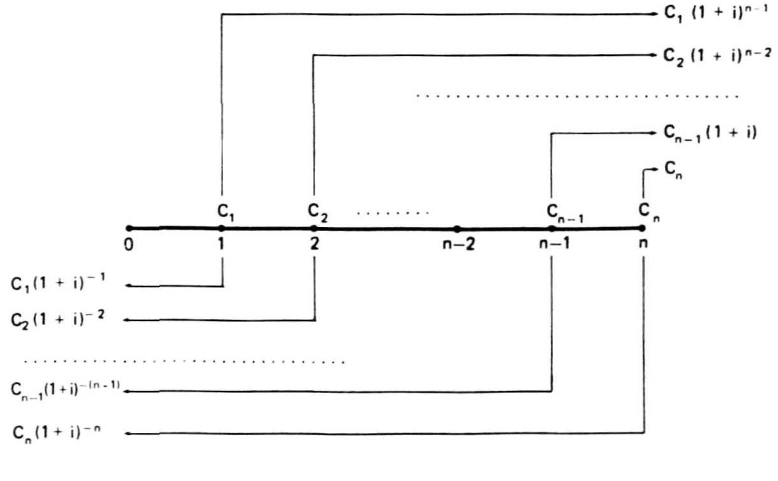
Los epígrafes siguientes se dedican al estudio de la valoración, en los momentos notables, de aquellos tipos de rentas más usuales de período constante, generalmente años.

3.—VALORACION DE RENTAS EN CAPITALIZACION COMPUESTA

Una renta temporal de **n** términos anuales de cuantías C_1, C_2, ..., C_n inmediata y pospagable o vencida es:



Para la ley de capitalización compuesta o del interés compuesto los valores financieros en el origen de los términos de la renta y los valores finales son respectivamente los reflejados en **0** y en **n** en el siguiente gráfico:



El **valor actual** de la renta, representado por V_0, es:

$$V_0 = C_1(1+i)^{-1} + C_2(1+i)^{-2} + \cdots + C_n(1+i)^{-n} = \sum_{r=1}^{n} C_r(1+i)^{-r} \tag{1}$$

y el **valor final,** simbolizado por V_n queda recogido en

$$V_n = C_1(1+i)^{n-1} + C_2(1+i)^{n-2} + \cdots + C_{n-1}(1+i) + C_n = \sum_{r=1}^{n} C_r(1+i)^{n-r} \tag{2}$$

y satisfacen la siguiente relación:

$$V_n = (1+i)^n \sum_{r=1}^{n} C_r(1+i)^{-r} = (1+i)^n V_0 \tag{3}$$

Cuando la **renta** es **prepagable** los correspondientes valores actual y final son:

$$\ddot{V}_0 = \sum_{r=1}^{n} C_r(1+i)^{-(r-1)} = (1+i)V_0 \tag{4}$$

$$\ddot{V}_n = \sum_{r=1}^{n} C_r(1+i)^{n-(r-1)} = (1+i)^n \ddot{V}_0 = (1+i)V_n \tag{5}$$

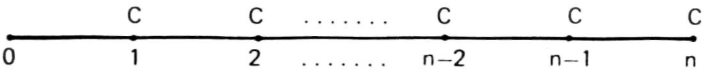
La **renta perpetua** es aquella cuyo número de términos es infinito y su valor actual (único que tiene sentido calcular) se obtiene a través del paso a límite, para $n \to \infty$, de las expresiones (1) y (4).

Para las **rentas continuas** en lugar de sumatorios aparecerían integrales.

En los siguientes epígrafes se obtienen las fórmulas operativas para valorar, en capitalización compuesta, los tipos de rentas más usuales. Dichas fórmulas se expresarán en la forma condensada en función de las expresiones correspondientes a las rentas constantes de cuantía unitaria por estar éstas tabuladas para los diferentes valores del rédito y del número de períodos.

4.—RENTA INMEDIATA, CONSTANTE, TEMPORAL Y POSPAGABLE

La renta del enunciado responde a la recogida en el siguiente esquema:



que resulta de particularizar para $C_s = C$ el del epígrafe anterior. Por tanto, al efectuar la correspondiente sustitución en las expresiones (1) y (2) se obtienen los siguientes resultados:

$$V_0=C\sum_{r=1}^{n}(1+i)^{-r}=C\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{6}$$

$$V_n=C\sum_{r=1}^{n}(1+i)^{n-r}=C\frac{(1+i)^n-1}{i}=V_0(1+i)^n \tag{7}$$

Cuando $C=1$ se tienen los valores de la **renta unitaria** y se utilizan las notaciones específicas siguientes:

$$\mathbf{a}_{\overline{n}|i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad ; \quad S_{\overline{n}|i}=\frac{(1+i)^n-1}{i}=(1+i)^n\mathbf{a}_{\overline{n}|i}$$

La (6) y (7) se representan abreviadamente por:

$$V_0=C\,\mathbf{a}_{\overline{n}|i} \quad (8) \quad ; \quad V_n=CS_{\overline{n}|i} \quad (9)$$

Ejemplo.—Calcular los valores actual y final de una renta pospagable de 5 años de duración y término anual constante de 200.000 pts. si se valora a un tanto anual del 12%.

La aplicación de las fórmulas (8) y (9) para $C=200.000$, $n=5$ e $i=0{,}12$ proporciona la solución, que es:

$$V_0=200.000\,\mathbf{a}_{\overline{5}|0{,}12}=200.000\times 3{,}60477619=720.955{,}24$$

$$V_5=200.000\,S_{\overline{5}|0{,}12}=200.000\times 6{,}35284733=1.270.569{,}47$$

Los valores de $\mathbf{a}_{\overline{5}|0{,}12}$ y $S_{\overline{5}|0{,}12}$ pueden obtenerse por cálculo directo haciendo uso de la fórmula o por tablas financieras.

5.—RENTA INMEDIATA, CONSTANTE, TEMPORAL Y PREPAGABLE

Los valores actual y final de esta renta se obtienen sin más que sustituir $C_s=C$ en las expresiones (4) y (5).

Resulta:

$$\ddot{V}_0=C\sum_{r=1}^{n}(1+i)^{-(r-1)}=C(1+i)\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=C\,\ddot{\mathbf{a}}_{\overline{n}|i} \tag{10}$$

$$\ddot{V}_n=C\sum_{r=1}^{n}(1+i)^{n-(r-1)}=C(1+i)\,\frac{(1+i)^n-1}{i}=C\,\ddot{S}_{\overline{n}|i} \tag{11}$$

en donde $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ y $\ddot{S}_{\overline{n}|i}$ representan los valores de la renta unitaria.

Es inmediato comprobar que se dan las relaciones:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)\,a_{\overline{n}|i} = 1 + a_{\overline{n-1}|i}$$

$$\ddot{S}_{\overline{n}|i} = (1+i)\,S_{\overline{n}|i} = S_{\overline{n+1}|i} - 1$$

Ejemplo.—Calcular los valores actual y final de una renta prepagable inmediata de 300.000 pts. anuales constantes si la duración es 8 años y se valora al rédito anual constante del 10 %.

De las fórmulas (10) y (11) y los datos del ejercicio se sigue:

$$\ddot{V}_0 = 300.000\ \ddot{a}_{\overline{8}|0,10} = 300.000(1 + a_{\overline{7}|0,10}) = 1.760.525{,}65$$

$$\ddot{V}_s = 300.000\ \ddot{S}_{\overline{8}|0,10} = 300.000(S_{\overline{9}|0,10} - 1) = 3.773.843{,}07$$

6.—RENTA INMEDIATA, CONSTANTE Y PERPETUA

Las rentas perpetuas son aquellas en que el número de términos es infinito. Su valor actual se obtiene resolviendo el límite de la temporal cuando $n \to \infty$. Sólo tiene sentido el cálculo de su valor actual.

Los valores de las rentas unitarias pospagable y prepagable son:

$$a_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i} \tag{12}$$

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty} (1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} =$$

$$= (1+i)\frac{1}{i} = (1+i)\,a_{\overline{\infty}|i} = 1 + a_{\overline{\infty}|i} \tag{13}$$

Cuando se trata de rentas constantes se tiene;

$$V_0 = C\,a_{\overline{\infty}|i} \quad ; \quad \ddot{V}_0 = C\,\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}$$

Ejemplo.—Calcular el valor actual de una renta perpetua de 500.000 pts. anuales si el rédito de valoración es el 14 % en los supuestos de ser: a) pospagable, b) prepagable.

a) Renta pospagable

$$V_0 = 500.000\ a_{\overline{\infty}|0,14} = 500.000\ \frac{1}{0{,}14} = 3.571.428{,}57$$

b) Renta prepagable

$$\ddot{V}_0 = 500.000\ \ddot{\mathbf{a}}_{\overline{\infty}|0,14} = 500.000\left(1 + \frac{1}{0,14}\right) = 4.071.428,57$$

7.—RENTA CONSTANTE Y DIFERIDA

Con el nombre de renta diferida en **h** períodos se designa aquella renta en la que desde el momento de la valoración hasta el comienzo de los períodos de vencimiento de sus términos han de transcurrir h períodos. Así, se trata de una renta temporal de **n** períodos y pospagable. Su esquema es el siguiente:

				C	C		C
0	1	h−1	h	h+1	h+2	h+n−1	h+n

siendo **0** el punto de valoración.

Estas rentas pueden ser prepagables o pospagables, temporales o perpetuas y sólo tiene sentido calcular los valores actuales, ya que los finales coinciden con los de las inmediatas.

Los valores actuales son:

$$^{h}/\mathbf{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-h}\mathbf{a}_{\overline{n}|i} = \mathbf{a}_{\overline{n+h}|i} - \mathbf{a}_{\overline{h}|i} \tag{14}$$

$$^{h}/\ddot{\mathbf{a}}_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-h}\ddot{\mathbf{a}}_{\overline{n}|i} = \ddot{\mathbf{a}}_{\overline{n+h}|i} - \ddot{\mathbf{a}}_{\overline{h}|i} = \mathbf{a}_{\overline{n+h-1}|i} - \mathbf{a}_{\overline{h-1}|i} \tag{15}$$

$$^{h}/\mathbf{a}_{\overline{\infty}|i} = (1+i)^{-h}\mathbf{a}_{\overline{\infty}|i} = (1+i)^{-h}\cdot\frac{1}{i} \tag{16}$$

$$^{h}/\ddot{\mathbf{a}}_{\overline{\infty}|i} = (1+i)^{-h}\ddot{\mathbf{a}}_{\overline{\infty}|i} = (1+i)^{-h}\left(1+\frac{1}{i}\right) \tag{17}$$

y es inmediato, como en casos anteriores, el cálculo de las rentas constantes no unitarias.

Ejemplo 1.—Determinar el valor actual de una renta de cuantía anual 200.000 pts. pospagable diferida en 5 años si el tanto de valoración es el 11 % en los supuestos de ser: a) temporal de 10 términos, b) perpetua.

a) Renta temporal

$$V_0 = 200.000\ {}^{5}/\mathbf{a}_{\overline{10}|0,11} = 200.000[\mathbf{a}_{\overline{15}|0,11} - \mathbf{a}_{\overline{5}|0,11}] = 698.994,51$$

b) Renta perpetua

$$V_0 = 200.000\ {}^{5}/\mathbf{a}_{\overline{\infty}|0,11} = 200.000(1+0,11)^{-5}\frac{1}{0,11} = 1.079.002,42$$

Ejemplo 2.—Calcular, con los datos del ejemplo anterior, cuáles serían los valores actuales de las correspondientes rentas prepagables.

a) Renta temporal

$$\ddot{V}_0 = 200.000\ {}^{5}/\ddot{a}_{\overline{10}|0,11} = 200.000[a_{\overline{14}|0,11} - a_{\overline{4}|0,11}] = 775.883.91$$

b) Renta perpetua

$$V_0 = 200.000\ {}^{5}/\ddot{a}_{\overline{\infty}|0,11} = 200.000(1+0,11)^{-5}\left(1 + \frac{1}{0,11}\right) = 1.197.692.68$$

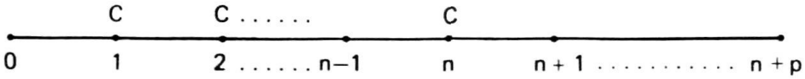
Obsérvese que:

$$698.994,51(1+0,11) = 775.883,91$$

$$1.079.002,42(1+0,11) = 1.197.692.68$$

8.—RENTA CONSTANTE Y ANTICIPADA

Con el nombre de renta anticipada en p períodos, respecto del punto de valoración en n + p, temporal y pospagable se designa a la renta descrita por:



Su valor en n + p es:

$$V_{n+p} = C\ {}^{p}/S_{\overline{n}|i} = C(1+i)^p S_{\overline{n}|i} = C(S_{\overline{n+p}|i} - S_{\overline{p}|i}) \tag{18}$$

siendo ${}^{p}/S_{\overline{n}|i}$ el valor de la renta unitaria.

En el caso de renta prepagable se tiene:

$$\begin{aligned}\ddot{V}_{n+p} &= C\ {}^{p}/\ddot{S}_{\overline{n}|i} = C(1+i)^p \ddot{S}_{\overline{n}|i} = \\ &= C(1+i)^{p+1} S_{\overline{n}|i} = C(S_{\overline{n+p+1}|i} - S_{\overline{p+1}|i})\end{aligned} \tag{19}$$

Ejemplo.—Obtener el valor final de una renta de cuantía constante de 150.000 pts. si el número de términos de la renta es 10 y se valora 4 años después del último vencimiento a un tanto anual del 8 %.

Sustituyendo (18) se tiene:

$$V_{14} = 150.000\ {}^{4}/S_{\overline{10}|0,08} = 150.000(S_{\overline{14}|0,08} - S_{\overline{4}|0,08}) = 2.956.321,24$$

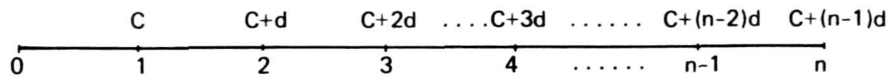
9.—RENTA VARIABLE EN PROGRESION ARITMETICA

Caracterizada por ser las cuantías de sus términos de la forma:

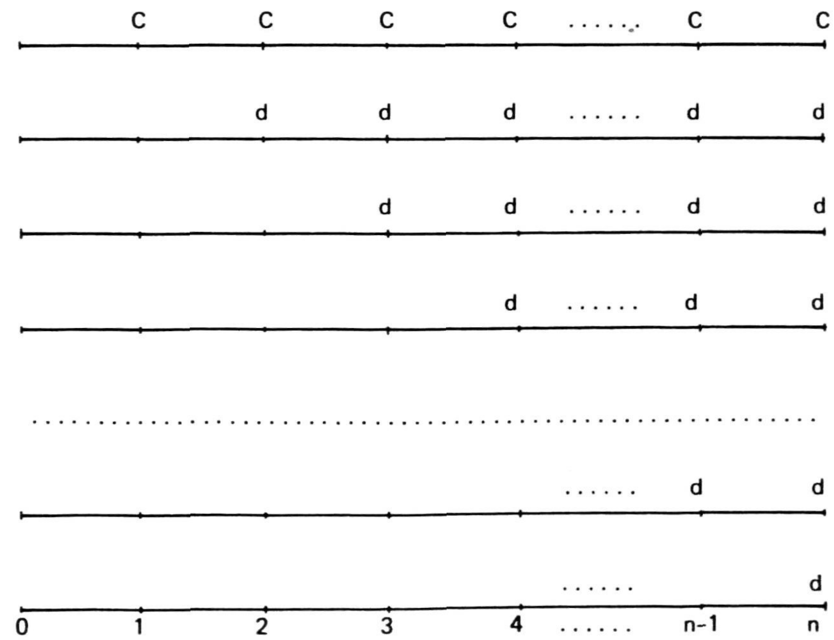
$$C_1=C \quad ; \quad C_2=C+d \quad ; \quad C_3=C+2d \quad ; \quad ...; \quad C_n=C+(n-1)d$$

siendo **d** la razón de la progresión, la cual, al ser todos los $C_s>0$ debe cumplir la condición $d>-\frac{C}{n-1}$, ya que $C+(n-1)d>0$.

Para calcular el valor de la renta variable en progresión aritmética representada por:



se procede a descomponerla en n rentas, cuya valoración es conocida, de la siguiente forma:



El valor de la renta variable será la suma de n rentas constantes diferidas, teniendo en cuenta que la suma del diferimiento más la temporalidad es n en todos los casos.

Como valor actual de la renta variable en progresión aritmética se tiene:

$$A_{(C,\,d)\overline{n}|i}=\sum_{r=1}^{n}[C+(r-1)d]\,(1+i)^{-r}=C\,\mathbf{a}_{\overline{n}|i}+d[{}^{1}/\mathbf{a}_{\overline{n-1}|i}+{}^{2}/\mathbf{a}_{\overline{n-2}|i}+$$

$$+{}^{3}/\mathbf{a}_{\overline{n-3}|i}+\cdots+{}^{n-2}/\mathbf{a}_{\overline{2}|i}+{}^{n-1}/\mathbf{a}_{\overline{1}|i}]=$$

$$=C\,\mathbf{a}_{\overline{n}|i}+d\left[(1+i)^{-1}\,\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}+(1+i)^{-2}\,\frac{1-(1+i)^{-(n-2)}}{i}+\right.$$

$$\left.+\cdots+(1+i)^{-(n-1)}\,\frac{1-(1+i)^{1}}{i}\right]=C\,\mathbf{a}_{\overline{n}|i}+\frac{d}{i}\,[(1+i)^{-1}+$$

$$+(1+i)^{-2}+\cdots+(1+i)^{-(n-1)}-(n-1)\,(1+i)^{-n}]$$

sumando y restando en el corchete $(1+i)^{-n}$

$$=C\,\mathbf{a}_{\overline{n}|i}+\frac{d}{i}\,[(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+\cdots+(1+i)^{-(n-1)}+$$

$$+(1+i)^{-n}-n(1+i)^{-n}]=C\,\mathbf{a}_{\overline{n}|i}+\frac{d}{i}\,[\mathbf{a}_{\overline{n}|i}-n(1+i)^{-n}]=$$

$$=\left(C+\frac{d}{i}\right)\mathbf{a}_{\overline{n}|i}-\frac{dn(1+i)^{-n}}{i}$$

Esta última expresión viene dada en función de los valores actuales $\mathbf{a}_{\overline{n}|i}$ y $(1+i)^{-n}$ y sumando y restando $\frac{dn}{i}$ se sigue:

$$A_{(C,\,d)\overline{n}|i}=\left(C+\frac{d}{i}\right)\mathbf{a}_{\overline{n}|i}+\frac{dn}{i}-\frac{dn(1+i)^{-n}}{i}-\frac{dn}{i}=$$

$$=\left(C+\frac{d}{i}+dn\right)\mathbf{a}_{\overline{n}|i}-\frac{dn}{i}$$

ya que

$$\frac{dn}{i}-\frac{dn(1+i)^{-n}}{i}=dn\left(\frac{1}{i}-\frac{(1+i)^{-n}}{i}\right)=dn\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=dn\,\mathbf{a}_{\overline{n}|i}$$

Como la renta variable admite todas las acepciones de los números 4 al 8 analizados anteriormente, a partir de las relaciones básicas del epígrafe 3, (1), (3), (4) y (5) se sigue:

a) **Renta inmediata, pospagable y temporal**

Valor actual:

$$A_{(C,\ d)\overline{n}|i} = \sum_{r=1}^{n} [C+(r-1)d]\,(1+i)^{-r} = \left(C+\frac{d}{i}\right)\mathbf{a}_{\overline{n}|i} - \frac{dn(1+i)^{-n}}{i} =$$

$$= \left(C+\frac{d}{i}+dn\right)\mathbf{a}_{\overline{n}|i} - \frac{dn}{i} \tag{20}$$

Valor final:

$$S_{(C,\ d)\overline{n}|i} = (1+i)^{n} A_{(C,\ d)\overline{n}|i} = \left(C+\frac{d}{i}\right)S_{\overline{n}|i} - \frac{dn}{i} \tag{21}$$

b) **Renta inmediata, prepagable temporal**

Valor actual:

$$\ddot{A}_{(C,\ d)\overline{n}|i} = (1+i)A_{(C,\ d)\overline{n}|i} = \left(C+\frac{d}{i}+dn\right)\ddot{\mathbf{a}}_{\overline{n}|i} - \frac{dn}{i}(1+i) \tag{22}$$

Valor final:

$$\ddot{S}_{(C,\ d)\overline{n}|i} = (1+i)S_{(C,\ d)\overline{n}|i} = \left(C+\frac{d}{i}\right)\ddot{S}_{\overline{n}|i} - \frac{dn}{i}(1+i) \tag{23}$$

c) **Renta inmediata y perpetua**

$$A_{(C,\ d)\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(C+\frac{d}{i}\right)\mathbf{a}_{\overline{n}|i} - \frac{dn(1+i)^{-n}}{i}\right] = \left(C+\frac{d}{i}\right)\mathbf{a}_{\overline{\infty}|i} \tag{24}$$

$$\ddot{A}_{(C,\ d)\overline{\infty}|i} = (1+i)A_{(C,\ d)\overline{\infty}|i} = \left(C+\frac{d}{i}\right)\ddot{\mathbf{a}}_{\overline{\infty}|i} \tag{25}$$

d) **Rentas diferidas**

Para obtener sus valores basta multiplicar por $(1+i)^{-h}$ las inmediatas, siendo h el número de períodos del diferimiento. Así:

$$^{h}/A_{(C,\ d)\overline{n}|i} = (1+i)^{-h} A_{(C,\ d)\overline{n}|i} \tag{26}$$

e) **Rentas anticipadas**

Si **p** es el número de períodos de anticipación, se multiplicará por $(1+i)^{p}$ el valor de la inmediata para obtener el de la anticipada, o sea:

$$^{p}/S_{(C,\ d)\overline{n}|i} = (1+i)^{p}\, S_{(C,\ d)\overline{n}|i}$$

Ejemplo 1.—Calcular los valores actual y final de una renta de diez términos anuales, variables en progresión aritmética si la cuantía del primero asciende a 200.000 pts., la razón de variación es 40.000 pts. y el tanto de valoración el 10 % anual, en los supuestos: a) Vencimientos pospagables: b) Vencimientos prepagables.

Aplicando las fórmulas (20), (21), (22) y (23) se tiene:

$$A_{(200.000;\,40.000)\overline{10}|0,10}=\left(200.000+\frac{40.000}{0,10}+40.000\times 10\right)a_{\overline{10}|0,10}-\frac{40.000\times 10}{0,10}=2.144.567,11$$

$$S_{(200.000;\,40.000)\overline{10}|0,10}=\left(200.000+\frac{40.000}{0,10}\right)S_{\overline{10}|0,10}-\frac{40.000\times 10}{0,10}=5.562.454,76$$

$$\ddot{A}_{(200.000;\,40.000)\overline{10}|0,10}=(1+0,\ 10)A_{(200.000;\,40.000)\overline{10}|0,10}=2.359.023,82$$

$$\ddot{S}_{(200.000;\,40.000)\overline{10}|0,10}=(1+0;\ 10)S_{(200.000;\,40.000)\overline{10}|0,10}=6.118.700,24$$

Ejemplo 2.—Con los datos del ejemplo anterior determinar para el caso pospagable los valores que corresponden a las siguientes hipótesis: a) Diferida en 5 años, b) Anticipada en 4 años, c) Diferida en 3 años y perpetua.

$${}^{5}/A_{(200.000;\,40.000)\overline{10}|0,10}=(1+0,\ 10)^{-5}A_{(200.000;\,40.000)\overline{10}|0,10}=1.331.607,45$$

$${}^{4}/A_{(200.000;\,40.000)\overline{10}|0,10}=(1+0,\ 10)^{4}S_{(200.000;\,40.000)\overline{10}|0,10}=8.143.990,01$$

$${}^{3}/A_{(200.000;\,40.000)\overline{\infty}|0,10}=(1+0,10)^{-3}A_{(200.000;\,40.000)\overline{\infty}|0,10}=$$

$$=(1+0,10)^{-3}\left(200.000+\frac{40.000}{0,10}\right)\frac{1}{0,10}=4.507.888,81$$

10.—RENTA VARIABLE EN PROGRESION GEOMETRICA

Se caracteriza porque las cuantías de sus términos varían en progresión geométrica cuya razón deberá ser positiva. Si con C se designa a la cuantía del primero y con $q>0$ a la razón de variación, las cuantías de sus términos son:

$$C_1=C\quad;\quad C_2=C\cdot q\quad;\quad C_3=C\cdot q^2\quad;\ldots;\quad C_r=C\cdot q^{r-1}\quad;\ldots;\quad C_n=Cq^{n-1}$$

Al igual que las variables en progresión aritmética, las variables en progresión geométrica pueden ser pospagables o prepagables; inmediatas, diferidas o anticipadas; temporales o perpetuas.

Aplicando las relaciones básicas del epígrafe **3** se tiene:

a) **Renta inmediata, pospagable y temporal**

Valor actual:

$$A_{(C,\, q)\overline{n}|i} = \sum_{r=1}^{n} C\, q^{r-1}(1+i)^{-r} = C\,\frac{1-(1+i)^{-n}\cdot q^{n}}{1+i-q} \tag{28}$$

Valor final:

$$S_{(C,\, q)\overline{n}|i} = \sum_{r=1}^{n} C\, q^{r-1}(1+i)^{n-r} = C\,\frac{(1+i)^{n}-q^{n}}{1+i-q} \tag{29}$$

Caso particular notable para $q=1+i$:

$$A_{(C,\, 1+i)\overline{n}|i} = \sum_{r=1}^{n} C(1+i)^{r-1}(1+i)^{-r} = C(1+i)^{-1}n \tag{30}$$

$$S_{(C,\, 1+i)\overline{n}|i} = C(1+i)^{n-1}\cdot n \tag{31}$$

b) **Renta inmediata, prepagable y temporal**

Valor actual:

$$\ddot{A}_{(C,\, q)\overline{n}|i} = (1+i)A_{(C,\, q)\overline{n}|i} = C(1+i)\,\frac{1-(1+i)^{-n}q^{n}}{1+i-q} \tag{32}$$

Valor final:

$$\ddot{S}_{(C,\, q)\overline{n}|i} = (1+i)S_{(C,\, q)\overline{n}|i} = C(1+i)\,\frac{(1+i)^{n}-q^{n}}{1+i-q} \tag{33}$$

c) **Renta inmediata y perpetua**

Sólo tiene sentido financiero su valor para $0<q<1+i$, ya que en los restantes casos $q=1+i$ y $q>1+i$ la serie es divergente y su valor $+\infty$, como se prueba a continuación:

$-q<1+i$

$$A_{(C,\, q)\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} C\,\frac{1-\left(\dfrac{q}{1+i}\right)^{n}}{1+i-q} = C\,\frac{1}{1+i-q} \tag{34}$$

$-q > 1+i$

$$A_{(C,\ q)\overline{\infty}|i} = \lim_{n \to \infty} C \frac{\left(\frac{q}{1+i}\right)^n - 1}{q-(1+i)} = +\infty$$

$-q = 1+i$

$$A_{(C,\ 1+i)\overline{\infty}|i} = \lim_{n \to \infty} C(1+i)^{-1} n = +\infty$$

Multiplicando por $1+i$ los valores obtenidos se determinan los de la prepagable.

d) **Rentas diferidas**

Se procede como en las variables en progresión aritmética. Así:

$$^{h}/A_{(C,\ q)\overline{n}|i} = (1+i)^{-h} A_{(C,\ q)\overline{n}|i} \tag{35}$$

e) **Rentas anticipadas**

Es análogo al anterior, y en el caso pospagable resulta

$$^{p}/S_{(C,\ q)\overline{n}|i} = (1+i)^{p} S_{(C,\ q)\overline{n}|i} \tag{36}$$

Ejemplo.—Calcular los valores actual y final de una renta variable en progresión geométrica, con vencimiento anual de los términos si la cuantía del primero es de 350.000 pts., la razón de variación $q = 1{,}10$, su duración 15 años, el rédito de valoración el 12 % en los casos: a) Pospagable; b) Prepagable; c) Perpetua.

Aplicando las fórmulas (28), (29), (32), (33) y (34) se tiene:

a) Pospagable

$$A_{(350.000;\ 1,10)\overline{15}|0,12} = 350.000 \frac{1-(1+0{,}12)^{-15}\, 1{,}10^{15}}{1+0{,}12-1{,}10} = 4.144.566{,}60$$

$$S_{(350.000;\ 1,10)\overline{15}|0,12} = 350.000 \frac{(1+0{,}12)^{15} - 1{,}10^{15}}{1+0{,}12-1{,}10} = 22.685.557{,}83$$

b) Prepagable

$$\ddot{A}_{(350.000;\ 1,10)\overline{15}|0,12} = (1+0{,}12) \times 4.144.566{,}60 = 4.641.914{,}59$$

$$\ddot{S}_{(350.000;\ 1,10)\overline{15}|0,12} = (1+0{,}12) \times 22.685.557{,}83 = 25.407.824{,}76$$

c) Perpetua

$$A_{(350.000;\ 1,10)\overline{15}|0,12} = 350.000\ \frac{1}{1+0,12-1,10} = 17.500.000$$

$$\ddot{A}_{(350.000;\ 1,10)\overline{15}|0,12} = (1+0,12) \times 17.500.000 = 19.600.000$$

11.—RENTAS FRACCIONADAS

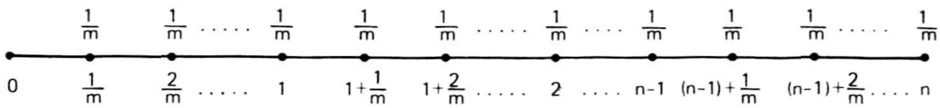
Si en la renta del epígrafe 3 se divide cada cuantía C_s en **m** partes, cada año en m partes y se hace corresponder el vencimiento de cada parte de C_s al final de cada parte de año se obtiene la denominada renta fraccionada de frecuencia **m** y pospagable. De análoga manera, a partir de la renta prepagable se obtiene la correspondiente fraccionada.

De los posibles fraccionamientos el único que se considera es el uniforme que consiste en dividir en partes de igual medida las cuantías y los años.

11.1.—RENTAS FRACCIONADAS POSPAGABLES

Las **rentas constantes** unitarias pospagables de frecuencia **m** se caracterizan porque el pago anual de la unidad monetaria se satisface por fracciones de $\frac{1}{m}$ cada una al final de cada m-simo de año.

La renta unitaria, inmediata, pospagable, temporal y de frecuencia m es:



Si se representa el valor actual con la notación $\mathbf{a}^{(m)}_{\overline{n}|i}$ se deduce que:

$$\mathbf{a}^{(m)}_{\overline{n}|i} = \frac{1}{m}(1+i)^{-\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}(1+i)^{-\frac{2}{m}} + \cdots + \frac{1}{m}(1+i)^{-\frac{m}{m}} + \cdots + \frac{1}{m}(1+i)^{-\frac{n\cdot m}{m}} =$$

$$= \frac{1}{m}(1+i)^{-\frac{1}{m}}\ \frac{1-(1+i)^{-\frac{n\cdot m}{m}}}{1-(1+i)^{-\frac{1}{m}}} = \frac{1}{m}\ \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{m}}-1} =$$

$$= \frac{1}{m}\ \frac{1-(1+i)^{-n}}{\dfrac{j_{(m)}}{m}} = \left(\frac{1}{m}\cdot m\right)\frac{i}{j_{(m)}}\ \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{i}{j_{(m)}}\ \mathbf{a}_{\overline{n}|i} \qquad (37)$$

siendo $j_{(m)}$ el tanto nominal de frecuencia **m** correspondiente al tanto efectivo anual **i**.

Nótese que el valor de la renta fraccionada es el mismo que el de una renta sin fraccionar en la que se percibiese al final de cada año la cuantía $\left(\frac{1}{m} \cdot m\right) \frac{i}{j_{(m)}}$.

Cuando la renta fraccionada es constante de cuantía $\frac{C}{m}$ su valor equivale al de una pospagable anual de cuantía $\left(\frac{C}{m} m\right) \frac{i}{j_{(m)}}$ y se puede escribir:

$$V_0^{(m)} = C \frac{i}{j_{(m)}} \mathbf{a}_{\overline{n}|i} = C \, \mathbf{a}_{\overline{n}|i}^{(m)} = V_0 \frac{i}{j_{(m)}} \tag{38}$$

En general se verifica que percibir $\frac{C_s}{m}$ al final de cada subperíodo vale lo mismo que percibir $\left(\frac{C_s}{m} \cdot m\right) \frac{i}{j_{(m)}}$ a fin de año. Por ello, los valores actuales de las denominadas rentas variables en progresión aritmética y en progresión geométrica son:

$$A_{(C;\, d)\overline{n}|i}^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} A_{(C;\, d)\overline{n}|i}, \quad \text{con} \quad \frac{C_s}{m} = \frac{C + (s-1)d}{m} \tag{39}$$

$$A_{(C;\, q)\overline{n}|i}^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} A_{(C;\, q)\overline{n}|i}, \quad \text{con} \quad \frac{C_s}{m} = \frac{C \cdot q^{s-1}}{m} \tag{40}$$

Los valores finales se obtienen de manera inmediata y son:

$$S_{\overline{n}|i}^{(m)} = (1+i)^n \, \mathbf{a}_{\overline{n}|i}^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} S_{\overline{n}|i} \tag{41}$$

$$V_{\overline{n}|}^{(m)} = C \, S_{\overline{n}|i}^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} V_n \tag{42}$$

$$S_{(C,\, d)\overline{n}|i}^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} S_{(C,\, d)\overline{n}|i} \tag{43}$$

$$S_{(C,\, q)\overline{n}|i}^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} S_{(C,\, q)\overline{n}|i} \tag{44}$$

Cuando las rentas son perpetuas, diferidas, anticipadas o combinaciones de éstas se procede como en los epígrafes anteriores.

11.2.—RENTAS FRACCIONADAS PREPAGABLES

La renta fraccionada uniforme prepagable se caracteriza por vencer anualmente **m** términos, tal como recoge el siguiente esquema para el año $r(r=1, 2, \ldots, n)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \frac{C_r}{m} & \frac{C_r}{m} & \frac{C_r}{m} & \cdots & \frac{C_r}{m} & \\
\hline
r-1 & & (r-1)+\frac{1}{m} & (r-1)+\frac{2}{m} & \cdots & (r-1)+\frac{m-1}{m} & r
\end{array}$$

y sólo se diferencia de la pospagable porque sus términos vencen $\frac{1}{m}$ de año antes. Se pueden obtener los correspondientes valores de estas rentas sin más que capitalizar un m-simo de año los de las pospagables.

Por tanto, se tiene:

$$\ddot{\mathbf{a}}_{\overline{n}|i}^{(m)} = (1+i)^{1/m}\, \mathbf{a}_{\overline{n}|i}^{(m)} = (1+i)^{1/m} \frac{i}{j_{(m)}}\, \mathbf{a}_{\overline{n}|i} \tag{45}$$

$$\ddot{S}_{\overline{n}|i}^{(m)} = (1+i)^{1/m}\, S_{\overline{n}|i}^{(m)} = (1+i)^{1/m} \frac{i}{j_{(m)}}\, S_{\overline{n}|i} \tag{46}$$

$$\ddot{A}^{(m)}_{(C;\, d)\overline{n}|i} = (1+i)^{1/m} A^{(m)}_{(C;\, d)\overline{n}|i} \quad ; \quad \ddot{S}^{(m)}_{(C;\, d)\overline{n}|i} = (1+i)^{1/m} S^{(m)}_{(C;\, d)\overline{n}|i} \qquad \begin{cases}(47)\\(48)\end{cases}$$

$$\ddot{A}^{(m)}_{(C;\, q)\overline{n}|i} = (1+i)^{1/m} A^{(m)}_{(C;\, q)\overline{n}|i} \quad ; \quad \ddot{S}^{(m)}_{(C;\, q)\overline{n}|i} = (1+i)^{1/m} S^{(m)}_{(C;\, q)\overline{n}|i} \qquad \begin{cases}(49)\\(50)\end{cases}$$

En los restantes casos se sigue lo indicado en el apartado anterior.

Ejemplo 1.—Calcular los valores actual y final de una renta inmediata mensual de 10 años de duración, si la cuantía mensual asciende a 50.000 pts., el tanto de valoración anual es el 12 % en las siguientes hipótesis: a) Pospagable; b) Prepagable.

Aplicando las fórmulas de las rentas constantes inmediatas temporales para los valores $n=10$; $m=12$, $\frac{C}{m}=50.000$ e $i=0{,}12$ resulta:

$$V_0 = 50.000 \times 12\, \mathbf{a}_{\overline{10}|0,12}^{(12)} = 600.000 \frac{0{,}12}{j_{(12)}}\, \mathbf{a}_{\overline{10}|0,12} = 3.572.777{,}79$$

$$V_{10} = 600.000\, S_{\overline{10}|0,12}^{(12)} = 600.000 \frac{0{,}12}{j_{(12)}}\, S_{\overline{10}|0,12} = 11.096.505{,}5$$

$$\ddot{V}_0 = 600.000\, \ddot{\mathbf{a}}_{\overline{10}|0,12}^{(12)} = 600.000(1+0{,}12)^{1/12}\, \mathbf{a}_{\overline{10}|0,12}^{(12)} = 3.606.679{,}13$$

$$\ddot{V}_{10}=600.000\ \ddot{S}^{(12)}_{\overline{10}|0,12}=600.000(1+0,12)^{1/12}\ S^{(12)}_{\overline{10}|0,12}=11.201.797,91$$

Ejemplo 2.—Con los datos del ejemplo anterior calcular los valores de las rentas pospagables: a) Diferida en 5 años; b) Anticipada en 3 años; c) Perpetua.

$$V_0=600.000\ {}^{5}/\mathbf{a}^{(12)}_{\overline{10}|0,12}=600.000(1+0,12)^{-5}\ \mathbf{a}^{(12)}_{\overline{10}|0,12}=2.027.290.07$$

$$V_{13}=600.000\ {}^{3}/S^{(12)}_{\overline{10}|0,12}=600.000(1+0,12)^{3}\ S^{(12)}_{\overline{10}|0,12}=15.589.791,27$$

$$V_0=600.000\ \mathbf{a}^{(12)}_{\overline{10}|0,12}=600.000\ \frac{0,12}{j_{(12)}}\ \mathbf{a}_{\overline{\infty}|0,12}=600.000\ \frac{1}{j_{(12)}}=5.269.375,76$$

Ejemplo 3.—Expresar en función de rentas inmediatas pospagables las siguientes:

$${}^{4}/\mathbf{a}^{(4)}_{\overline{4}|0,06}\quad ;\quad {}^{6}/\ddot{S}^{(12)}_{\overline{10}|0,12}\quad ;\quad {}^{4}/A^{(2)}_{(100.000;\ 1,05)\overline{\infty}|0,12}\quad ;\quad {}^{6}/S^{(6)}_{(500.000;\ 60.000)\overline{10}|0,10}$$

y calcular sus valores.

$${}^{4}/\mathbf{a}^{(4)}_{\overline{4}|0,06}=(1+0,06)^{-4}\ \frac{0,06}{j_{(4)}}\ \mathbf{a}_{\overline{4}|0,06}=2,80569332$$

$${}^{6}/\ddot{S}^{(12)}_{\overline{10}|0,12}=(1+0,10)^{6}(1+0,10)^{1/12}\ \frac{0,10}{j_{(12)}}\ S_{\overline{10}|0,10}=29,74120373$$

$${}^{4}/A^{(2)}_{(100.000;\ 1,05)\overline{\infty}|0,12}=(1+0,12)^{-4}\ \frac{0,12}{j_{(2)}}\ A_{(100.000;\ 1,05)\overline{\infty}|0,12}=$$

$$=(1+0,12)^{-4}\ \frac{0,12}{j_{(2)}}\ 100.000\ \frac{1}{1+0,12-1,05}=934.348,07$$

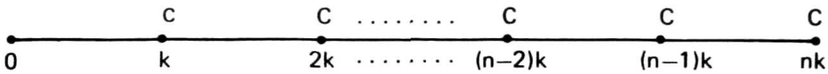
$${}^{6}/S^{(6)}_{(500.000;\ 60.000)\overline{10}|0,10}=(1+0,10)^{6}\ \frac{0,10}{j_{(6)}}\ S_{(500.000;\ 60.000)\overline{10}|0,10}=$$

$$=(1+0,10)^{6}\ \frac{0,10}{j_{(6)}}\left[\left(500.000+\frac{60.000}{0,10}\right)S_{\overline{10}|0,10}-\frac{60.000\times 10}{0,10}\right]=21.263.564,51$$

12.—RENTAS DE PERIODICIDAD SUPERIOR AL AÑO

En ocasiones interesa calcular los valores de rentas de período uniforme cuyos términos vencen cada **k** años, ya sea al principio o al final del período.

La renta constante en **n** términos, pospagable o vencida es:



con valor actual

$$V_0 = C \sum_{r=1}^{n} (1+i)^{-kr} = C \frac{{}^{k}/a_{\overline{n \cdot k}|i}}{a_{\overline{k}|i}} = C \frac{a_{\overline{n \cdot k}|C}}{S_{\overline{k}|i}} \qquad (51)$$

y valor final

$$V_{n \cdot k} = C \sum_{r=1}^{n} (1+i)^{k(n \cdot r)} = C \frac{S_{\overline{n \cdot k}|i}}{S_{\overline{k}|i}} \qquad (52)$$

En el caso de renta prepagable se tiene:

$$\ddot{V}_0 = C \frac{a_{\overline{n \cdot k}|i}}{a_{\overline{k}|i}} \quad ; \quad \ddot{V}_{n \cdot k} = C \frac{{}^{k}/S_{\overline{n \cdot k}|i}}{S_{\overline{k}|i}} \qquad (53) \text{ y } (54)$$

Para $n \to \infty$ es:

$$V_0 = C \frac{a_{\overline{\infty}|i}}{S_{\overline{k}|i}} = C \frac{1}{i\, S_{\overline{k}|i}} \quad ; \quad \ddot{V}_0 = C \frac{1}{i\, a_{\overline{k}|i}}$$

Ejemplo.—Calcular los valores actual y final de una renta bienal pospagable de diez términos si la cuantía de cada término es 75.000 pts. y el tanto de valoración anual es el 11 %. ¿Cuál sería su valor si la renta fuese prepagable perpetua?

Aplicando las fórmulas (51) y (52) para los valores $n=10$; $k=2$; $i=0{,}11$; $C=75.000$ se tiene:

$$V_0 = 75.000 \frac{a_{\overline{20}|0,11}}{S_{\overline{2}|0,11}} = 283.056{,}69$$

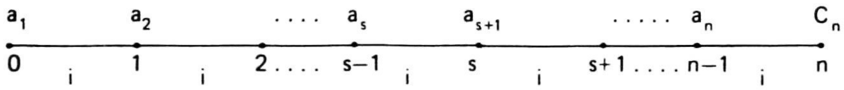
$$V_{20} = 75.000 \frac{S_{\overline{20}|0,11}}{S_{\overline{2}|0,11}} = 2.282.091{,}19$$

El valor de la perpetua prepagable es:

$$\ddot{V}_0 = 75.000 \frac{1}{0,11\, a_{\overline{2}|0.11}} = 398.136,58$$

13.—VALORACION DE RENTAS EN CAPITALIZACION SIMPLE

Sea la renta temporal de **n** términos anuales de cuantías C_1, C_2, ..., C_n, pospagable e inmediata, recogida por:



Tomando como punto de aplicación el extremo superior de la renta y como ley *financiera de valoración la capitalización simple o interés simple se tiene como valor final* de la renta:

$$V_n = \sum_{r=1}^{n} C_r[1+i(n-r)] = \sum_{r=1}^{n} C_r + i \sum_{r=1}^{n} C_r(n-r)$$

Si con V_0 se designa al valor actual o en el origen, de acuerdo con el postulado de equivalencia financiera resulta:

$$V_0(1+in) = \sum_{r=1}^{n} C_r[1+i(n-r)]$$

de donde:

$$V_0 = \sum_{r=1}^{n} C_r \frac{1+i(n-r)}{1+in}$$

Si la renta es de cuantía constante resulta:

$$V_n = Cn\left(1+i\,\frac{n-1}{2}\right) \quad ; \quad V_0 = Cn\,\frac{1+i\,\dfrac{n-1}{2}}{1+in} \qquad (55)\text{ y }(56)$$

Para la renta constante prepagable se tiene:

$$\ddot{V}_n = Cn\left(1+i\,\frac{n+1}{2}\right) \quad ; \quad \ddot{V}_0 = Cn\,\frac{1+i\,\dfrac{n+1}{2}}{1+in} \qquad (57)\text{ y }(58)$$

Si los **n** términos vencen no al final de cada año, sino de cada m-ésima parte del año las fórmulas son:

$$V_n = Cn\left(1 + i\,\frac{n-1}{2m}\right) \quad ; \quad V_0 = Cn\,\frac{1 + i\,\dfrac{n-1}{2m}}{1 + i\,\dfrac{n}{m}} \qquad (59)\ y\ (60)$$

y cuando la renta es prepagable

$$\ddot{V}_n = Cn\left(1 + i\,\frac{n+1}{2m}\right) \quad ; \quad V_0 = Cn\,\frac{1 + i\,\dfrac{n+1}{2m}}{1 + i\,\dfrac{n}{m}} \qquad (61)\ y\ (62)$$

Ejemplo.—Determinar los valores actual y final de una renta valorada en capitalización simple, con p igual al extremo superior del intervalo de vencimientos, si C = 80.000, n = 20; m = 4; i = 0,08.

— Valor actual

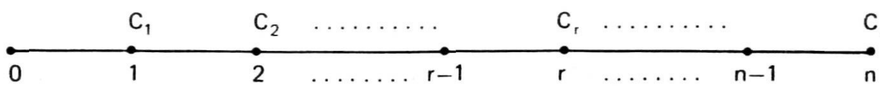
$$V_0 = 80.000 \times 20\,\frac{1 + 0{,}08\,\dfrac{19}{8}}{1 + 0{,}08\,\dfrac{20}{4}} = 1.586.666{,}67$$

— Valor final

$$V_n = 80.000 \times 20\left(1 + 0{,}08\,\frac{19}{8}\right) = 1.904.000$$

14.—VALORACION DE RENTAS EN DESCUENTO SIMPLE COMERCIAL

Se trata de valorar el conjunto de capitales



con la ley de descuento simple comercial tomando como punto de aplicación el origen de la renta.

Su valor actual o inicial es:

$$V_0 = \sum_{r=1}^{n} C_r(1 - dr) = \sum_{r=1}^{n} C_r - d\sum_{r=1}^{n} C_r r$$

y su valor final, deducido de la equivalencia:

$$V_0 = V_n(1 - dn)$$

se expresa por:

$$V_n = \sum_{r=1}^{n} C_r \frac{1-dr}{1-dn}$$

Cuando la renta es constante se tiene:

$$V_0 = Cn\left(1 - d\,\frac{1+n}{2}\right) \quad ; \quad V_n = Cn\,\frac{1-d\,\dfrac{1+n}{2}}{1-dn} \qquad (63)\ \text{y}\ (64)$$

y si es constante y prepagable:

$$\ddot{V}_0 = Cn\left(1 - d\,\frac{n-1}{2}\right) \quad ; \quad \ddot{V}_n = Cn\,\frac{1-d\,\dfrac{n-1}{2}}{1-dn} \qquad (65)\ \text{y}\ (66)$$

Si los términos vencen en períodos no anuales, sino en cada m-ésima parte del año se tiene:

a) Renta pospagable

$$V_0 = Cn\left(1 - d\,\frac{1+n}{2m}\right) \quad ; \quad V_n = Cn\,\frac{1-d\,\dfrac{1+n}{2m}}{1-d\,\dfrac{n}{m}} \qquad (67)\ \text{y}\ (68)$$

b) Renta prepagable

$$\ddot{V}_0 = Cn\left(1 - d\,\frac{n-1}{2m}\right) \quad ; \quad \ddot{V}_n = Cn\,\frac{1-d\,\dfrac{n-1}{2m}}{1-d\,\dfrac{n}{m}} \qquad (69)\ \text{y}\ (70)$$

Ejemplo.—Obtener el valor actual de una renta bimestral de diez términos constantes de 150.000 pts. cada uno, si se evalúa con la ley de descuento comercial a parámetro d = 0,08, con p = origen, en los supuestos: a) Pospagable; b) Prepagable.

— Valor actual de la renta pospagable:

$$V_0 = Cn\left(1 - d\,\frac{1+n}{2m}\right) = 150.000 \times 10\left(1 - 0{,}08\,\frac{11}{12}\right) = 1.390.000$$

— Valor actual de la renta prepagable:

$$\ddot{V}_0 = Cn\left(1 - d\,\frac{n-1}{2m}\right) = 150.000 \times 10\left(1 - 0{,}08\,\frac{9}{12}\right) = 1.410.000$$

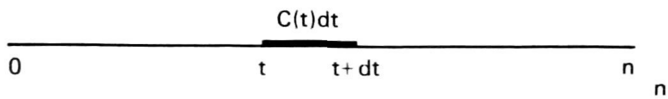
15.—RENTAS CONTINUAS

Una renta se dice continua cuando se compone de infinitos términos infinitesimales exigibles en cada instante del tiempo, es decir, cuando los períodos de maduración son de medida infinitesimal.

Representando por:

- $I=[0;\ n]$ el intervalo de vencimientos de capitales (si $n \to \infty$ se tendrá la renta perpetua)
- $R(t)$ la función de distribución
- $R'(t)=C(t)$ la función de densidad
- $C(t)dt$ el término elemental o cuantía de capital que vence en el intervalo infinitesimal $(t,\ t+dt)$

el esquema de la renta es:



15.1.—RENTAS CONTINUAS EN CAPITALIZACION COMPUESTA

El valor de la renta continua en régimen de capitalización compuesta es en el origen (valor actual):

$$\bar{V}_0=\int_0^n C(t)\,(1+i)^{-t}dt$$

y al final de ella (valor final):

$$\bar{V}_n=\int_0^n C(t)\,(1+i)^{n-t}dt=(1+i)^n\bar{V}_0 \tag{71}$$

Para cada valor de $C(t)$ se puede obtener un tipo de renta, si bien se expondrán sólo dos supuestos.

a) Renta constante unitaria

Caracterizada por ser $C(t)=1$ se tiene:

$$\bar{V}_0=\bar{\mathbf{a}}_{\overline{n}|i}=\int_0^n (1+i)^{-t}dt=\frac{1-(1+i)^{-n}}{\rho}=\frac{i}{\rho}\,\mathbf{a}_{\overline{n}|i},\quad \text{con } \rho=\lg_e(1+i) \tag{72}$$

$$\bar{V}_n=\bar{S}_{\overline{n}|i}=\int_0^n (1+i)^{n-t}dt=\frac{(1+i)^n-1}{\rho}=\frac{i}{\rho}\,S_{\overline{n}|i} \tag{73}$$

b) Renta compleja

Definida por $C(t)=C_1+C_2t+C_3q^t$ sus valores son:

$$\bar{V}_0=\int_0^n (C_1+C_2t+C_3q^t)(1+i)^{-t}dt=C_1\int_0^n (1+i)^{-t}dt+$$

$$+C_2\int_0^n t(1+i)^{-t}dt+C_3\int_0^n q^t(1+i)^{-t}dt=C_1\,\bar{a}_{\overline{n}|i}+$$

$$+\left[\left(\frac{C_2}{\rho}+C_2n\right)\bar{a}_{\overline{n}|i}-\frac{C_2n}{\rho}\right]+C_3\,\frac{1-(1+i)^{-n}q^n}{\rho-\lg_e q} \tag{74}$$

$$\bar{V}_n=C_1\,\bar{S}_{\overline{n}|i}+\left(\frac{C_2}{\rho}\,\bar{S}_{\overline{n}|i}-\frac{C_2n}{\rho}\right)+C_3\,\frac{(1+i)^n-q^n}{\rho-\lg_e q} \tag{75}$$

Casos particulares de especial interés son:

$$C(t)=C: \qquad \bar{V}_0=C\,\bar{a}_{\overline{n}|i} \tag{76}$$

$$C(t)=C+dt: \quad \bar{V}_0=\left(C+\frac{d}{\rho}+dn\right)\bar{a}_{\overline{n}|i}-\frac{dn}{\rho} \tag{77}$$

$$C(t)=Cq^t: \qquad \bar{V}_0=C\,\frac{1-(1+i)^{-n}q^n}{\rho-\lg_e q} \tag{78}$$

Ejemplo 1.—Calcular el valor actual de una renta de 8 años de duración si para la valoración se utiliza la capitalización compuesta al tanto anual del 8,5 % en los supuestos:
a) $C(t)=250.000$; b) $250.000+15.000\,t$; c) $250.000+1{,}07^t$.

Se trata de una aplicación de los casos particulares resaltados y se tiene:

a) $\bar{V}_0=C\,\bar{a}_{\overline{n}|i}=250.000\,\bar{a}_{\overline{8}|0.085}=250.000\,\dfrac{0{,}085}{\rho}\,a_{\overline{8}|0.085}=1.468.897{,}49$

b) $\bar{V}_0=\left(C+\dfrac{d}{\rho}+dn\right)\bar{a}_{\overline{n}|i}-\dfrac{dn}{\rho}=\left(250.000+\dfrac{15.000}{0{,}08158}+15.000\times 8\right)\bar{a}_{\overline{8}|0.85}-$

$-\dfrac{15.000\times 8}{0{,}08158}=1.783.355{,}93$

c) $\bar{V}_0=C\,\dfrac{1-(1+i)^{-n}q^n}{\rho-\lg_e q}=250.000\,\dfrac{1-(1+0{,}085)^{-8}\cdot 1{,}07^8}{0{,}08158-\lg_e 1{,}07}=1.892.649{,}41$

15.2.—RENTAS CONTINUAS EN CAPITALIZACION SIMPLE

Solamente se considera la renta constante caracterizada por ser $C(t)=C$. Para $p=n$ se tiene:

$$\bar{V}_n=\int_0^n C[1+i(n-t)]dt=C\left(1+\frac{i}{2}n^2\right) \tag{79}$$

$$\bar{V}_0=\bar{V}_n\frac{1}{1+in}=C\frac{1+\frac{i}{2}n^2}{1+in} \tag{80}$$

Ejemplo 2.—Calcular los valores actual y final de una renta de 3 años y medio de duración, si $C(t)=325.000$ y se utiliza para la valoración la ley de capitalización simple con $i=0{,}06$.

Aplicando las fórmulas (79) y (80) resulta:

$$\bar{V}_{3,5}=C\left(1+\frac{i}{2}n^2\right)=325.000\left[1+\frac{0{,}06}{2}\left(\frac{7}{2}\right)^2\right]=444.437{,}5$$

$$\bar{V}_0=C\frac{1+\frac{i}{2}n^2}{1+in}=325.000\frac{1+\frac{0{,}06}{2}\left(\frac{7}{2}\right)^2}{1+0{,}06\frac{7}{2}}=367.303{,}72$$

15.3.—RENTAS CONTINUAS EN DESCUENTO SIMPLE COMERCIAL

Con la ley $A(z,0)=1-dz$, para $C(t)=C$ y $p=0$ los valores actual y final de la renta continua son:

$$\bar{V}_0=\int_0^n C(1-dt)dt=Cn\left(1-\frac{d}{2}n\right) \tag{81}$$

$$\bar{V}_n=\bar{V}_0\frac{1}{1-dn}=Cn\frac{1-\frac{d}{2}n}{1-dn} \tag{82}$$

Ejemplo 3.—Obtener los valores actual y final de una renta continua de 2 años de duración en descuento simple comercial si $C(t)=250.000$ y $d=0{,}08$.

La sustitución de (81) y (82) da los valores:

$$\bar{V}_0=Cn\left(1-\frac{d}{2}n\right)=250.000\times 2\left(1-\frac{0{,}08}{2}2\right)=460.000$$

$$\bar{V}_n=Cn\frac{1-\frac{d}{2}n}{1-dn}=250.000\times 2\frac{1-\frac{0{,}08}{2}2}{1-0{,}08\times 2}=547.619{,}05$$

15.4.—LAS RENTAS CONTINUAS COMO LIMITE DE LAS FRACCIONADAS

Las rentas fraccionadas uniformes de frecuencia m, como se ha visto en 15, se caracterizan porque el pago anual de la cuantía C_s se satisface por partes C_s/m, que vencen al final de cada m-simo de año si la renta es pospagable o al principio si la renta es prepagable.

Cuando el número m de fraccionamiento tiende a infinito, tenderán a cero las partes de año y las partes C_s/m de cuantías. Asimismo tenderán a coincidir las rentas pospagables y las prepagables. Se obtendrán rentas continuas como límites de las fraccionadas cuando $m \to \infty$.

Interesa resaltar los casos límites de la fraccionada constante, de la fraccionada variable en progresión aritmética y de la fraccionada variable en progresión geométrica.

15.4.1.—Renta continua constante

Su valor actual es:

$$\bar{V}_0 = \lim_{m \to \infty} V_0^{(m)} = \lim_{m \to \infty} C \frac{i}{j_{(m)}} \mathbf{a}_{\overline{n}|i} = C \frac{i}{\rho} \mathbf{a}_{\overline{n}|i} = C\, \bar{\mathbf{a}}_{\overline{n}|i} \tag{79}$$

ya que

$$\lim_{m \to \infty} j_{(m)} = \lim_{m \to \infty} m[(1+i)^{1/m} - 1] = \lg_e(1+i) = \rho$$

El valor final, calculado en función del valor actual, resulta:

$$\bar{V}_n = C(1+i)^n\, \bar{\mathbf{a}}_{\overline{n}|i} = C\bar{S}_{\overline{n}|i} = C \frac{i}{\rho} S_{\overline{n}|i} \tag{80}$$

15.4.2.—Renta continua variable en progresión geométrica

Como valor actual se tiene:

$$\bar{V}_0 = \bar{A}_{(C,\, q)\overline{n}|i} = \lim_{m \to \infty} A^{(m)}_{(C,\, q)\overline{n}|i} =$$

$$= \lim_{m \to \infty} \frac{i}{j_{(m)}} A_{(C,\, q)\overline{n}|i} = \frac{i}{\rho} A_{(C,\, q)\overline{n}|i} \tag{81}$$

y como valor final:

$$\bar{V}_n = \bar{S}_{(C,\, q)\overline{n}|i} = (1+i)^n \bar{A}_{(C,\, q)\overline{n}|i} = \frac{i}{\rho} S_{(C,\, q)\overline{n}|i} \tag{82}$$

15.4.3.—Renta continua variable en progresión aritmética

Procediendo como en los casos anteriores resulta:

$$\bar{V}_0 = \bar{A}_{(C,\ d)\overline{n}|i} = \lim_{m \to \infty} A^{(m)}_{(C,\ d)\overline{n}|i} =$$

$$= \lim_{m \to \infty} \frac{i}{j_{(m)}} A_{(C,\ d)\overline{n}|i} = \frac{i}{\rho} A_{(C,\ d)\overline{n}|i} \qquad (83)$$

como valor actual y

$$\bar{V}_n = \bar{S}_{(C,\ d)\overline{n}|i} = (1+i)^n \bar{A}_{(C,\ d)\overline{n}|i} = \frac{i}{\rho} S_{(C,\ d)\overline{n}|i} \qquad (84)$$

como valor final.

Ejemplo 4.—Calcular el valor actual de una renta de 5 años si para la valoración se utiliza la capitalización compuesta al tanto anual del 10 % en los supuestos: a) Renta constante de 500.000 pts.; b) Renta variable en progresión aritmética de primer término el de la constante y razón d = 100.000; c) Idem que en b) en progresión geométrica de razón q = 1,08.

Se trata de aplicar las fórmulas (79), (81) y (83) a los valores del enunciado C = 500.000, d = 100.000, q = 1,08, i = 0,10, $\rho = \lg_e(1+0{,}10) = 0{,}0953$ y n = 5, obteniéndose los valores:

a) $\bar{V}_0 = 500.000\ \bar{\mathbf{a}}_{\overline{5}|0,10} = 500.000 \dfrac{0{,}10}{\rho}\ \mathbf{a}_{\overline{5}|0,10} = 1.988.657{,}86.$

b) $\bar{V}_0 = \bar{A}_{(500.000;\ 100.000)\overline{5}|0,10} = \dfrac{0{,}10}{\rho}\left[\left(500.000 + \dfrac{100.000}{0{,}10} + 100.000 \times 5\right) \mathbf{a}_{\overline{5}|0,10} - \right.$

$\left. - \dfrac{100.00 \times 5}{0{,}10}\right] = 2.708.602{,}11$

c) $\bar{V}_0 = \bar{A}_{(500.000;\ 1,08)\overline{5}|0,10} = \dfrac{0{,}10}{\rho}\ 500.000\ \dfrac{1-(1+0{,}10)^{-5}\,1{,}08^5}{1+0{,}10-1{,}08} = 2.299.409{,}84$

Tercera parte

AMORTIZACION Y CONSTITUCION

III.—AMORTIZACION Y CONSTITUCION

III.1.—AMORTIZACION

1.—Operaciones de amortización o préstamos.
2.—Amortización de préstamo mediante un solo pago.
3.—Método de amortización francés.
4.—Método de amortización americano.
5.—Método de términos variables en progresión aritmética.
6.—Método de términos variables en progresión geométrica.
7.—Método de cuota de amortización constante.
8.—Amortización de préstamos con abono de intereses anticipados: método alemán.
9.—El problema general de la cancelación anticipada.
10.—Tantos efectivos en los préstamos.

III.2.—CONSTITUCION

11.—Operaciones de constitución o de formación de capital.
12.—Constitución de un capital mediante imposiciones constantes.
13.—Constitución de un capital mediante imposiciones variables.
  13.1.—Imposiciones variables en progresión aritmética.
  13.2.—Imposiciones variables en progresión geométrica.
  13.3.—Cuotas de constitución constantes.
14.—Tantos efectivos en las operaciones de imposición.

En esta parte tercera se aborda el estudio de dos operaciones financieras típicas y fundamentales:

a) La amortización o reembolso de un préstamo.

b) La constitución o formación de un capital.

La primera está formada por una prestación única en el origen, el capital que se presta, y una contraprestación múltiple, que son los capitales que tienen que amortizar o extinguir la deuda.

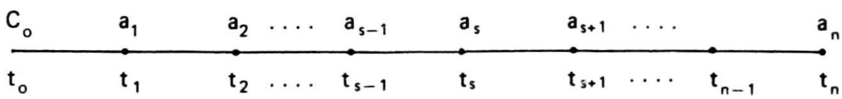
La constitución de un capital consiste en una operación de prestación múltiple y contraprestación única. La prestación es el plan de ahorro o inversión de un sujeto que pretende formar, en el transcurso de la operación, el capital que obtiene como contraprestación.

III.1.—AMORTIZACION

1.—OPERACIONES DE AMORTIZACION O PRESTAMOS

Las operaciones de amortización o préstamos son operaciones financieras por las que una persona, llamada prestamista, se compromete a entregar a otra persona, prestatario, en un determinado momento t_0, cierto capital $(C_0; t_0)$, que ésta se compromete a reembolsar, en un período $(t_0; t_n)$, juntamente con sus intereses.

La operación de préstamo está formada por una prestación única $(C_0; t_0)$ y una contraprestación usualmente múltiple. Los capitales de la contraprestación $(a_1; t_1)$, $(a_1; t_2)$, ..., $(a_n; t_n)$, cuyos vencimientos van asociados a los intervalos $(t_0; t_1)$, $(t_1; t_2)$, ..., $(t_{n-1}; t_n)$, tienen como misión abonar los intereses que se forman en la operación y devolver el principal de la deuda y se denominan términos amortizativos. Una representación del préstamo es:



Es usual efectuar la operación con una ley de capitalización (generalmente la capitalización compuesta) y con períodos uniformes (años, semestres, etc.), siendo los más frecuentes los anuales. Por ello los términos amortizativos de cuantía a_s suelen denominarse anualidades.

La obligación del prestamista es casi siempre inmediata, sin embargo, las formas típicas de devolución de un préstamo son dos:

a) El capital prestado se devuelve con los intereses acumulados en un determinado punto.

b) El capital prestado se reintegra mediante una renta que cubra capital e intereses en el tiempo señalado en el contrato.

Los problemas principales que plantea la amortización de un préstamo son: determinación de la anualidad o término amortizativo, cálculo del capital pendiente de amortización al principio de cada año y de la parte de deuda que se devuelve al final del año. Para abordar el estudio de estos problemas se introduce la siguiente notación:

C_0: Cuantía del principio prestado en el origen de la operación.

a_s: Cuantía del término amortizativo que vence al final del período s. Si éstos son anuales $\mathbf{a}_s$, será la cuantía de la anualidad o simplemente anualidad.

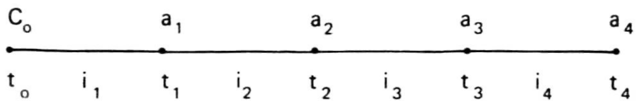
C_s: Cuantía de la **reserva** o saldo, capital pendiente de amortización o **deuda pendiente** al principio del período $s+1$.

$\mathcal{M}_s$: Cuantía del **capital amortizado** en los s primeros períodos.

I_s: Cantidad que se abona por intereses en el período s, o **cuota de intereses** generados por C_{s-1}.

A_s: Cuota de amortización del período s o diferencia $C_{s-1}-C_s$ de las reservas de los principios de los períodos s y $s+1$.

Con el fin de concretar ideas e iniciar la metodología de cálculo se plantea un préstamos con las características recogidas en el gráfico:



en donde i_s representa el rédito del período s. Si se suponen conocidos, además de C_0 e i_s, las anualidades a_s, para calcular las variables que intervienen puede procederse como se indica:

a) Reservas:

$$C_1=C_0(1+i_1)-a_1$$
$$C_2=C_1(1+i_2)-a_2$$
$$C_3=C_2(1+i_3)-a_3$$
$$C_4=C_3(1+i_4)-a_4$$

b) Cuota de amortización:

$$A_1=C_0-C_1$$
$$A_2=C_1-C_2$$
$$A_3=C_2-C_3$$
$$A_4=C_3-C_4=C_3$$

c) Cuota de intereses:

$$I_1=a_1-A_1=C_0 i_1$$
$$I_2=a_2-A_2=C_1 i_2$$
$$I_3=a_3-A_3=C_2 i_3$$
$$I_4=a_4-A_4=C_3 i_4$$

d) Capital amortizado:

$$\mathcal{M}_1 = C_0 - C_1 = A_1$$
$$\mathcal{M}_2 = C_0 - C_2 = \mathcal{M}_1 + A_2$$
$$\mathcal{M}_3 = C_0 - C_3 = \mathcal{M}_2 + A_3$$
$$\mathcal{M}_4 = C_0 - C_4 = \mathcal{M}_3 + A_4 = C_0$$

Cuando en lugar de conocerse las a_s se parte de la fijación de A_1, A_2, A_3, A_4, con la condición $\Sigma A_s = C_0$, se procede así:

a') $C_s = C_{s-1} - A_s = \sum_{h=s+1}^{n} A_h$ c') $I_s = C_{s-1} \cdot i_s$

b') $\mathcal{M}_s = \mathcal{M}_{s-1} + A_s = \sum_{h=1}^{s} A_h = C_0 - C_s$ d') $a_s = I_s + A_s$

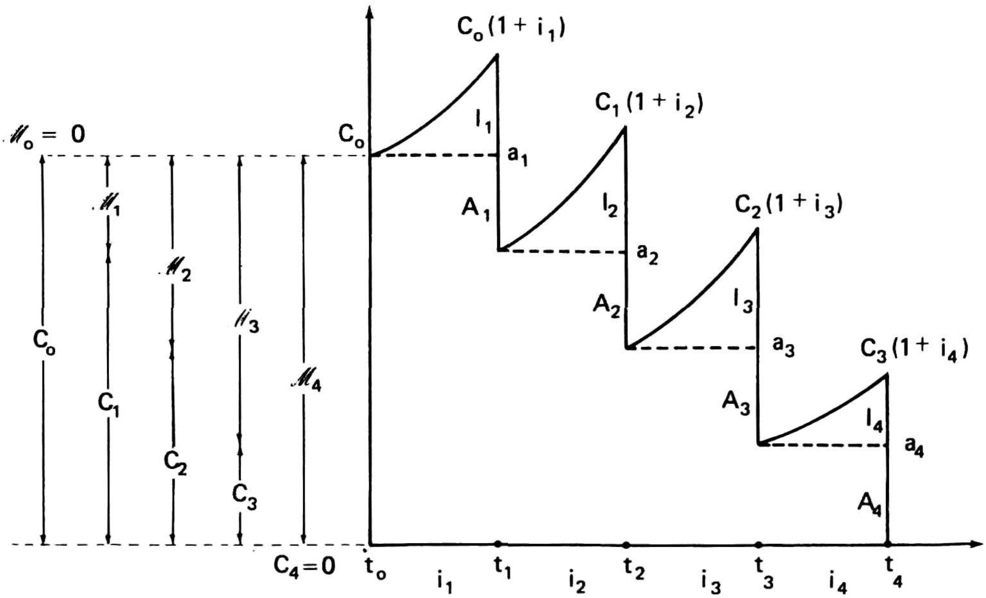
Es usual recoger la dinámica de la operación de préstamo en un cuadro de amortización cuya lectura informe en cualquier momento de la situación de todas las variables que intervienen hasta el período considerado. Adopta con frecuencia la forma que se transcribe u otra equivalente con distinta ordenación de columnas.

Cuando se parte del conocimiento de las A_s, por ejemplo, resulta:

Fin de período s	Rédito del período i_s	Término amortizativo a_s	Cuota de intereses I_s	Cuota de amortización A_s	Capital amortizado $\mathcal{M}_s$	Capital vivo o reserva C_s
Origen						C_0
1	i_1	$a_1 = I_1 + A_1$	$I_1 = C_0 i_1$	A_1	$\mathcal{M}_1 = A_1$	$C_1 = C_0 - A_1$
2	i_2	$a_2 = I_2 + A_2$	$I_2 = C_1 i_2$	A_2	$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 + A_2$	$C_2 = C_1 - A_2$
3	i_3	$a_3 = I_3 + A_3$	$I_3 = C_2 i_3$	A_3	$\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_2 + A_3$	$C_3 = C_2 - A_3$
4	i_4	$a_4 = I_4 + A_4$	$I_4 = C_3 i_4$	A_4	$\mathcal{M}_4 = \mathcal{M}_3 + A_4 = C_0$	$C_4 = C_3 - A_4 = 0$

Cuando i_s, a_s o A_s son constantes, por razones de comodidad, se suele simplificar el cuadro al prescindir de la correspondiente columna de valores constantes.

Una representación gráfica que recoja la dinámica del préstamo desarrollado es:



En los siguientes epígrafes se plantean las formas en que habrá de efectuarse la cancelación del préstamo, es decir, en cómo se efectúa la devolución del capital solicitado y sus correspondientes intereses.

Las distintas formas de cancelación, llamadas sistemas o métodos de amortización, surgen al hacer hipótesis sobre los términos amortizativos, sobre las cuotas de amortización o respecto a cualquier otra de las variables que intervienen en la operación de préstamo. Cabe citar como notables:

a) Amortización de préstamo mediante un solo pago. Surge al suponer $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0$ y tener en consecuencia una contraprestación de un solo capital.

b) Amortización de préstamos mediante rentas constantes. Es el caso particular $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ y según se consideren los intereses pospagables o normales o prepagables, se tienen el método francés o el método alemán.

c) Amortización de préstamos mediante rentas variables. Se encuentran los casos de variación en progresión aritmética y en progresión geométrica.

2.—AMORTIZACION DE PRESTAMO MEDIANTE UN SOLO PAGO

Conocido con el nombre de préstamo elemental o simple. La operación financiera se caracteriza por una prestación y una cotraprestación formadas por un solo capital. Consiste en la entrega de un capital de cuantía C_0 en el origen, por la persona acreedora A a la deudora D, para que ésta a cambio entregue, n períodos después, la cuantía C_n.

En el caso de la ley de capitalización compuesta se tiene:

(1)

Entrega de A — Entrega de D

C_0 — $C_n = C_0(1+i)^n$

$$0 \quad i \quad 1 \quad i \quad 2 \ldots s \quad i \quad s+1 \ldots n-1 \quad i \quad n$$

Se trata del caso particular de préstamo con $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0$ y $a_n = C_n = I_n + A_n$, con $A_n = C_0$ e $I_n = C_0[(1+i)^n - 1]$ y la reserva o saldo en s por los métodos prospectivo, retrospectivo y recurrente es:

$$C_s = C_n(1+i)^{-(n-s)} = C_0(1+i)^s = C_{s-1}(1+i) \tag{2}$$

Un problema puede surgir cuando el deudor o prestatario pretende cancelar total o parcialmente el préstamo. Este es:

Transcurridos s años del comienzo de la operación es usual que el prestamista efectúe operaciones de la misma naturaleza con un tipo de interés t distinto del i de la operación en vigor. El prestamista tiene que percibir al final C_n, y cualquier deseo de alterar el prestatario las condiciones iniciales de la operación sólo podrá ser aceptado por el prestamista si, como mínimo, obtiene los rendimientos que garantiza su vigente contrato.

Por tanto, el prestamista para **cancelar anticipadamente el préstamo**, al principio del período $s+1$, exigirá como mínimo la cantidad V_s tal que verifique la igualdad:

$$V_s(1+t)^{n-s} = C_n \tag{3}$$

Expresando C_n en función de C_s se tiene:

$$V_s(1+t)^{n-s} = C_s(1+i)^{n-s} \Rightarrow V_s = C_s\left(\frac{1+i}{1+t}\right)^{n-s} \tag{4}$$

lo cual indica que:

a) Si $i > t$ necesariamente es $V_s > C_s$.
b) Si $i = t$ puede llegarse a rescindir con $V_s = C_s$.
c) Si $i < t$ existen valores de $V_s < C_s$.

Si solamente se pretende **reembolsar parcialmente**, entregando una cuantía $X_s < V_s$, el nuevo saldo o deuda pendiente será el valor C'_s que cumpla la ecuación:

$$X_s(1+t)^{n-s}+C'_s(1+t)^{n-s}=C_n=C_s(1+i)^{(n-s)} \tag{5}$$

de donde:

$$C'_s=C_s\left(\frac{1+i}{1+t}\right)^{n-s}-X_s=C_0\,\frac{(1+i)^n}{(1+t)^{n-s}}-X_s \tag{6}$$

Ejemplo.—La persona A entrega a la D un capital de 500.000 pts. para recibir 8 años después su equivalente pactando la operación a un tipo de interés del 8 % anual. Determinar: 1.º Valor de la contraprestación; 2.º Reserva o saldo al principio del cuarto año por el método prospectivo y la reserva al principio del quinto año por el método recurrente; 3.º Si el deudor pretendiese cancelar la operación al principio del quinto año y el tanto del prestamista es $t=0{,}10$, ¿qué cantidad exigirá éste como mínimo para rescindir? 4.º Si el deudor entregase en el punto anterior 400.000 pts., ¿cuál sería el saldo resultante de la operación y cuál la cantidad que tendría que entregar al final de los ocho años?

Haciendo uso de las fórmulas (1) a (6) se tiene:

1.º $C_8=C_0(1+i)^n=500.000(1+0{,}08)^8=925.465{,}10$

2.º Método prospectivo: $C_3=C_8(1+0{,}08)^{-5}=629.856{,}00$

Método recurrente: $C_4=C_3(1+0{,}08)=680.244{,}48$

3.º $V_4=C_4\left(\frac{1+i}{1+t}\right)^{8-4}=680.244{,}48\left(\frac{1+0{,}08}{1+0{,}10}\right)^4=632.105{,}12$

4.º Saldo resultante después de entregar 400.000 pts.:

$$C'_4=C_4\left(\frac{1+i}{1+t}\right)^{8-4}-X_4=680.244{,}48\left(\frac{1+0{,}08}{1+0{,}10}\right)^4-400.000=232.105{,}12$$

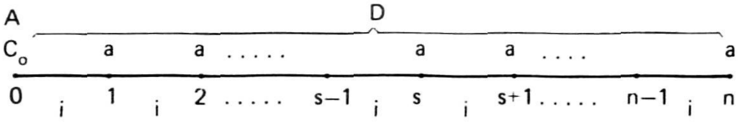
Cantidad a entregar a los 8 años:

$$C'_8=C'_4(1+t)^4=232.105{,}12(1+0{,}10)^4=339.825{,}1$$

3.—METODO DE AMORTIZACION FRANCES

Con este nombre se designa al caso particular de amortización con términos amortizativos constantes (anualidades si el término vence en cada año) y réditos constantes. Esta cuantía constante ha de ser suficiente para abonar los intereses del capital pendiente o deuda viva en cada período y para amortizar una parte de la deuda, de tal forma que al final del plazo que se señale en el contrato, como duración del mismo, quede cancelado el préstamo.

La operación puede representarse por:



El prestamista A cumple su compromiso entregando en el origen la cuantía del préstamo C_0, y el prestatario B debe abonar el término amortizativo a durante n períodos.

La equivalencia financiera que debe satisfacer en el origen la operación es:

$$C_0 = a\, \mathbf{a}_{\overline{n}|i} \tag{7}$$

de donde

$$a = \frac{C_0}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i}} = C_0\, \mathbf{a}_{\overline{n}|i}^{-1} \tag{8}$$

expresión que indica el cálculo de **a**.

Al principio del período $s+1$ la deuda pendiente o reserva es:

— Método prospectivo

$$C_s = a\, \mathbf{a}_{\overline{n-s}|i} = C_0 \frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i}} \tag{9}$$

— Método retrospectivo

$$C_s = C_0(1+i)^s - a\, S_{\overline{s}|i} = C_0 \left((1+i)^s - \frac{S_{\overline{s}|i}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i}} \right) \tag{10}$$

— Método recurrente

$$C_s = C_{s-1}(1+i) - a \tag{11}$$

De (11) se sigue:

$$a = C_{s-1}\, i + (C_{s-1} - C_s) = I_s + A_s \tag{12}$$

y resalta la doble finalidad de los términos amortizativos.

Tomando la expresión (11) para dos períodos consecutivos se tiene al restar:

$$C_s - C_{s+1} = (C_{s-1} - C_s)(1+i) \Rightarrow A_{s+1} = A_s(1+i) \tag{13}$$

Precisamente por variar las cuotas de esta manera progresiva se designa al método de amortización por este nombre y conocido el valor de la primera cuota es suficiente para automáticamente determinar las restantes.

El valor A_1 puede determinarse a través de la descomposición del primer término amortizativo, pues:

$$a = I_1 + A_1 = C_0 i + A_1 \Rightarrow A_1 = a - C_0 i$$

o haciendo uso de $\sum_{h=1}^{n} A_h = C_0$ y de (13) así:

$$C_0 = \sum_{h=1}^{n} A_h = \sum_{h=1}^{n} A_1 (1+i)^{h-1} = A_1 S_{\overline{n}|i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{C_0}{S_{\overline{n}|i}}$$

luego:

$$A_1 = a - C_0 i = \frac{C_0}{S_{\overline{n}|i}} \tag{14}$$

y en consecuencia:

$$A_s = A_{s-1}(1+i) = A_1(1+i) = \frac{C_0}{S_{\overline{n}|i}} (1+i)^{s-1} \tag{15}$$

Para conocer la cuantía del capital amortizado en los s primeros períodos basta aplicar una de las relaciones siguientes:

$$\mathcal{M}_s = C_0 - C_s = C_0 - C_0 \frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i}} = C_0 \left(1 - \frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i}}\right) \tag{16}$$

$$\mathcal{M}_s = \sum_{h=1}^{s} A_h = A_1 S_{\overline{s}|i} = C_0 \frac{S_{\overline{s}|i}}{S_{\overline{n}|i}} \tag{17}$$

$$\mathcal{M}_s = \mathcal{M}_{s-1} + A_s \qquad \text{con} \quad A_1 = \frac{C}{S_{\overline{n}|i}} \tag{18}$$

La cuantía de los intereses del año s o cuota de intereses s-sima es:

$$I_s = a - A_s = C_{s-1}\, i \tag{19}$$

Las fórmulas dadas permiten obtener todas las componentes del cuadro de amortización de un préstamo amortizable progresivamente, pero por lo general resulta cómodo seguir el siguiente orden:

— Cálculo del término amortizativo.
— Determinación de A_1 y las restantes A_s.
— Obtención de I_s.
— Resolución de las columnas $\mathcal{M}_s$ y C_s.

Para un préstamo de cinco términos amortizativos se tiene:

Fin de período s	Término amortizativo a_s	Cuota de intereses I_s	Cuota de amortización A_s	Capital amortizado $\mathcal{M}_s$	Capital pendiente de amortización C_s
Origen					C_0
1	$a = C_0\, a_{\overline{5}\rceil i}^{-1}$	$I_1 = C_0 i =$ $= a - A_1$	$A_1 = C_0/S_{\overline{5}\rceil i}$	$\mathcal{M}_1 = A_1$	$C_1 = C_0 - A_1$
2	a	$I_2 = a - A_2$	$A_2 = A_1(1+i)$	$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 + A_2$	$C_2 = C_1 - A_2$
3	a	$I_3 = a - A_3$	$A_3 = A_2(1+i)$	$\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_2 + A_3$	$C_3 = C_2 - A_3$
4	a	$I_4 = a - A_4$	$A_4 = A_3(1+i)$	$\mathcal{M}_4 = \mathcal{M}_3 + A_4$	$C_4 = C_3 - A_4$
5	a	$I_5 = a - A_5$	$A_5 = A_4(1+i)$	$\mathcal{M}_5 = \mathcal{M}_4 + A_5 = C_0$	$C_5 = C_4 - A_5 = 0$
	(1)	(3)	(2)	(4)	(5)

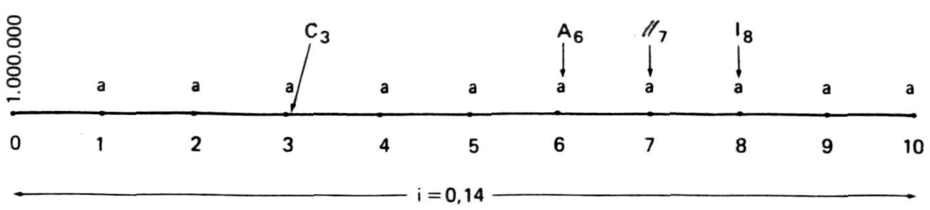
Los números del pie de las columnas indican el orden seguido en su obtención.

Ejemplo 1.—Una entidad bancaria ha otorgado un préstamo con las siguientes condiciones:

- **Cuantía del capital prestado 1.000.000 de pts.**
- **Duración de la operación 10 años.**
- **Tipo de interés el 14 % anual.**
- **Método de amortización progresivo o francés.**

Se pide: 1.° Cuantía constante de la anualidad; 2.° Capital pendiente de amortización al principio del cuarto año; 3.° Capital amortizado en los siete primero años; 4.° Cuota de amortización del sexto año; 5.° Cuota de intereses del octavo año.

La operación concertada con la fijación de las variables a determinar es:



y haciendo uso de las fórmulas (7) a (19) se tiene:

$$a = \quad C_0\, \mathbf{a}_{\overline{n}|i}^{-1} = 1.000.000\, \mathbf{a}_{\overline{10}|0.14}^{-1} = 191.713{,}54$$

$$C_3 = a\, \mathbf{a}_{\overline{n-3}|0.14} = 191.713{,}54\, \mathbf{a}_{\overline{7}|0.14} = 822.126{,}10$$

$$\mathcal{M}_7 = C_0 \frac{S_{\overline{s}|i}}{S_{\overline{n}|i}} = 1.000.000 \frac{S_{\overline{7}|0.14}}{S_{\overline{10}|0.14}} = 554.911{,}70$$

$$A_6 = A_1 (1+i)^5 = \frac{1.000.000}{S_{\overline{10}|0.14}} (1+0{,}14)^5 = 99.570{,}01$$

$$I_8 = C_7 i = (191.713{,}54\, \mathbf{a}_{\overline{3}|0.14}) \times 0{,}14 = 62.312{,}36$$

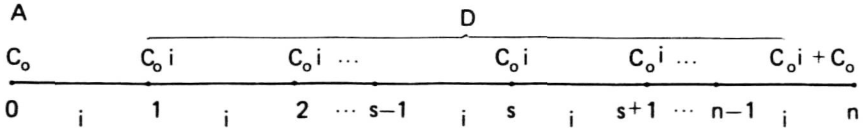
Ejemplo 2.—Obtener el cuadro de amortización de un préstamo cuyas características son: Cuantía del capital prestado 1.500.000 pts., tipo de interés concertado el 12,5 % anual y 6 años de duración de la operación.

Siguiendo el orden indicado anteriormente resulta:

s	a_s	I_s	A_s	$\mathcal{M}_s$	C_s
Origen					1.500.000,00
1	370.019,67	187.500,00	182.519,67	182.519,67	1.317.480,33
2	370.019,67	164.685,04	205.334,63	387.854,30	1.112.145,70
3	370.019,67	139.018,21	231.001,46	618.855,76	881.144,24
4	370.019,67	110.143,03	259.876,64	878.732,40	621.267,60
5	370.019,67	77.658,45	292.361,22	1.171.093,62	328.906,38
6	370.019,67	41.113,29	328.906,38	1.500.000,00	000.000,00

4.—METODO DE AMORTIZACION AMERICANO

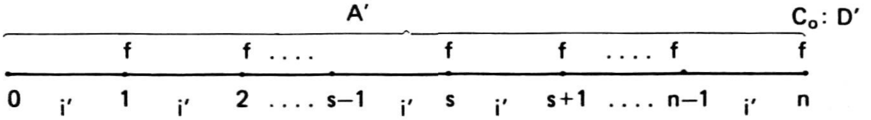
Este sistema se caracteriza porque el prestatario se compromete a pagar periódicamente los intereses del capital prestado C_0 y devolver este íntegramente al final del plazo estipulado. Así pues, la operación concertada entre acreedor y deudor es:



por lo que $C_s = C_0$, $\mathcal{M}_s = 0$, con $s = 1, 2, ..., n-1$, $C_n = 0$ y $\mathcal{M}_n = C_0$.

Con objeto de disponer en su día el capital de cuantía C_0, el prestatario puede destinar periódicamente a un **fondo de reconstitución** la cantidad constante necesaria para que al final de los n períodos el importe de ese fondo sea igual a C_0.

El capital C_0 se reconstruye mediante una nueva operación, con total independencia de la inicial, caracterizada por una prestación múltiple y una contraprestación única. El acreedor del fondo es el deudor de la operación primera y el deudor es usual que sea un nuevo ente; además, las condiciones que pacten, concretadas en el tipo de interés, no tienen por qué coincidir con la operación de préstamo. Así pues, el fondo de reconstitución es



y se verifica:

$$f\, S_{\overline{n}|i'} = C_0 \;\Rightarrow\; f = \frac{C_0}{S_{\overline{n}|i'}} \tag{20}$$

Transcurridos s períodos, la cuantía constituida en el fondo, o saldo de la operación, F_s, es:

$$F_s = f\, S_{\overline{s}|i'} = C_0 \frac{S_{\overline{s}|i'}}{S_{\overline{n}|i'}} \tag{21}$$

y la relación que guardan los fondos de dos períodos consecutivos se expresará por:

$$F_s = F_{s-1}(1+i') + f \tag{22}$$

Restando miembro a miembro las reservas de dos períodos consecutivos resulta:

$$F_{s+1} - F_s = (F_s - F_{s-1})(1+i') \;\Rightarrow\; \Delta_{s+1} = \Delta_s(1+i') \tag{23}$$

e indica que el incremento o saldo de la reserva, denominado cuota de constitución o reconstrucción, que varía en progresión geométrica de razón $1+i'$. Obtener cualquier Δ_s es inmediato, ya que $\Delta_1 = f$.

A la conjunción de lo que ocurre a la única persona que interviene en las dos operaciones de signo opuesto se le denomina en algunos tratados «sistema de fondo de amortización» o «sistema americano de amortización» de préstamos. Esta denominación no es muy afortunada, pues por esencia son dos operaciones en las que los cumplimientos contractuales de una no vinculan de ninguna manera a los de la otra.

La agregación en la persona $D = A'$ del conjunto de las dos operaciones da los siguientes resultados:

a) Cuantía total a desembolsar periódicamente

$$a' = C_0 i + f = C_0 \left(i + \frac{1}{S_{\overline{n}|i'}} \right) \tag{24}$$

b) Deuda viva o pendiente de reconstrucción después de s períodos

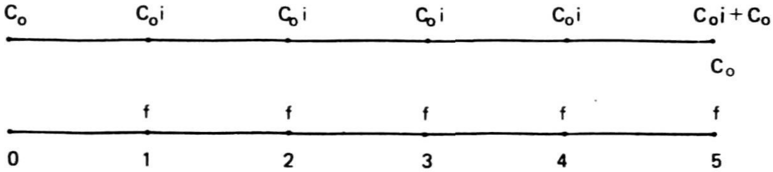
$$C'_s = C_0 - F_s = C_0 \left(1 - \frac{S_{\overline{s}|i'}}{S_{\overline{n}|i'}} \right) = C_0 \frac{a_{\overline{n-s}|i'}}{a_{\overline{n}|i'}} \tag{25}$$

Si $i = i'$ es $a' = \dfrac{C}{a_{\overline{n}|i}}$ y $C'_s = C_0 \dfrac{a_{\overline{n-s}|i}}{a_{\overline{n}|i}}$ coincidiendo estos resultados con los del método francés.

Ejemplo.—Se otorga un préstamo de 2.500.000 pts. para amortizarse en 5 años abonándose anualmente solamente intereses al 9,5 % y debiendo devolver el principal al final de la operación. El deudor concierta simultáneamente una operación de reconstitución del capital al 8,5 % anual, por la misma duración y entregando una cuantía constante al final de cada año.

Se pide: 1) Cantidades a desembolsar periódicamente por el deudor; 2) Evolución de los saldos de cada operación aislada y situación neta del conjunto de ambas para el deudor.

Las operaciones concertadas se recogen seguidamente:



El deudor tiene que desembolsar anualmente:

— Por la primera: $C_0 i = 2.500.000 \times 0{,}095 = 237.500.$

— Por la segunda: $f = C_0 / S_{\overline{n}|i'} = 2.500.000 / S_{\overline{5}|0{,}085} = 421.914{,}38.$

— En conjunto: $a' = C_0 i + f = 659.414{,}38.$

Los saldos de cada operación y del conjunto son:

Fin de año	Préstamo $C_s = C_0$	Fondo $F_s = f\, S_{\overline{s}|i'}$	Conjunto $C'_s = C_0 - F_s$
Origen	2.500.000		2.500.000,00
1	2.500.000	421.914,38	2.078.085,62
2	2.500.000	879.691,48	1.620.308,52
3	2.500.000	1.376.379,64	1.123.620,36
4	2.500.000	1.915.286,29	584.713,71
5	2.500.000	2.500.000,00	000.000,00

5.—METODO DE TERMINOS VARIABLES EN PROGRESION ARITMETICA

Se trata de amortizar el capital de cuantía C_0 mediante n pagos que varían en progresión aritmética de razón d y primer término $a_1 > 0$. Sus términos amortizativos guardan la relación:

$$a_s = a_{s-1} + d = a_1 + (s-1)d$$

que debe cumplir la condición $a_n = a_1 + (n-1)d > 0$.

La ecuación de equivalencia en el origen exige que:

$$C_0 = A_{(a_1;\ d)\overline{n}|i} = \left(a_1 + \frac{d}{i} + dn\right) \mathbf{a}_{\overline{n}|i} - \frac{dn}{i} \tag{27}$$

y se sigue:

$$a_1 = \frac{C_0 i + dn}{i\ \mathbf{a}_{\overline{n}|i}} - \frac{d}{i} - dn \tag{27}$$

obteniéndose los restantes valores por la relación $a_s = a_{s-1} + d$. Si no se conociese d su valor se determinaría en:

$$d = \frac{C_0 - a_1\ \mathbf{a}_{\overline{n}|i}}{\dfrac{1+in}{i}\ \mathbf{a}_{\overline{n}|i} - \dfrac{n}{i}} \tag{28}$$

La reserva o saldo por el método prospectivo es:

$$C_s = A_{(a_{s+1};\ d)\overline{n-s}|i} = \left[a_{s+1} + \frac{d}{i} + d(n-s)\right] \mathbf{a}_{\overline{n-s}|i} - \frac{d(n-s)}{i} =$$

$$= \left(a_1 + \frac{d}{i} + dn\right) \mathbf{a}_{\overline{n-s}|i} - \frac{d(n-s)}{i} = \left(C_0 + \frac{dn}{i}\right) \frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i}} - \frac{d(n-s)}{i} \tag{29}$$

Comparando por diferencia el saldo $C_s = C_{s-1}(1+i) - a_s$ con el del período siguiente resulta:

$$C_s - C_{s+1} = (C_{s-1} - C_s)(1+i) + (a_{s+1} - a_s) \Rightarrow A_{s+1} = A_s(1+i) + d \tag{30}$$

con $A_1 = a_1 - C_0 i$.

El cálculo del capital amortizado y de las cuotas de intereses es análogo al general, o sea:

$$\mathcal{M}_s = C_0 - C_s \quad ; \quad I_s = a_s - A_s = C_{s-1}\, i$$

Para un préstamo con cuatro términos el cuadro de amortización es:

s	a_s	I_s	A_s	$\mathcal{M}_s$	C_s
Or.					C_0
1	a_1	$I_1=C_0 i$	$A_1=a_1-I_1$	$\mathcal{M}_1=A_1$	$C_1=C_0-A_1$
2	$a_2=a_1+d$	$I_2=a_2-A_2$	$A_2=A_1(1+i)+d$	$\mathcal{M}_2=\mathcal{M}_1+A_2$	$C_2=C_1-A_2$
3	$a_3=a_2+d$	$I_3=a_3-A_3$	$A_3=A_2(1+i)+d$	$\mathcal{M}_3=\mathcal{M}_2+A_3$	$C_3=C_2-A_3$
4	$a_4=a_3+d$	$I_4=a_4-A_4$	$A_4=A_3(1+i)+d$	$\mathcal{M}_4=\mathcal{M}_3+A_4=C_0$	$C_4=C_3-A_4=0$

Ejemplo 1.—Una entidad financiera concede un préstamo de 1.200.000 pts. a un tipo de interés anual del 12 % para ser amortizado en 10 años mediante una renta con anualidades variables en progresión aritmética. Si la razón de la progresión es $d=15.000$, determinar:

1.° Cuantías de las anualidades primera y quinta, así como su descomposición en cuota de intereses y cuota de amortización. 2.° Capital amortizado en los tres primeros años y capital pendiente al principio del octavo año.

1.° Para calcular las incógnitas que se plantean basta hacer uso de las fórmulas anteriores y se tiene:

$$a_1=\frac{1.200.000\times 0{,}12+15.000\times 10}{0{,}12\ \mathbf{a}_{\overline{10}|0{,}12}}-\frac{15.000}{0{,}12}-15.000\times 10=158.611{,}20$$

$$a_5=a_1+4d=158.611{,}20+60.000=218.611{,}20$$

La obtención de las cuotas de intereses y amortización de la primera anualidad es inmediata, pues:

$$I_1=1.200.000\times 0{,}12=144.000 \quad ; \quad A_1=a_1-I_1=14.611{,}20$$

Para calcular las componentes de la quinta anualidad puede procederse por distintos caminos, a saber:

a) $I_5=0{,}12\ C_4=0{,}12\ A_{(a_5;\ d)\overline{6}|0{,}12}=$

$$=0{,}12\left[\left(218.611{,}20+\frac{15.000}{0{,}12}+15.000\times 6\right)\mathbf{a}_{\overline{6}|0{,}12}-\frac{15.000\times 6}{0{,}12}\right]=$$

$$=0{,}12\times 1.032.752{,}26=123.930{,}27$$

$$A_5=a_5-I_5=94.680{,}93$$

b) En general, para la cuota que vence el año s se tiene:

$$A_s = A_{s-1}(1+i) + d = A_{s-2}(1+i)^2 + d[(1+i)+1] =$$
$$= A_{s-3}(1+i)^3 + d\, S_{\overline{3}|i} = \cdots = A_{s-h}(1+i)^h + d\, S_{\overline{h}|i}$$

Para $h = s-1$ es:

$$A_s = A_1(1+i)^{s-1} + d\, S_{\overline{s-1}|i}$$

luego en el presente supuesto el valor pedido es:

$$A_5 = A_1(1+0{,}12)^4 + 15.000\, S_{\overline{4}|0.12} = 94.680{,}93$$
$$I_s = a_5 - A_5 = 123.930{,}27$$

También se puede proceder a calcular A_s, así:

$$A_s = C_{s-1} - C_s = \left(a_1 + \frac{d}{i} + dn\right)(\mathbf{a}_{\overline{n-(s-1)}|i} - \mathbf{a}_{\overline{n-s}|i}) - d\,\frac{[n-(s-1)]-(n-s)}{i} =$$
$$= \left(a_1 + \frac{d}{i} + dn\right)(1+i)^{-[n-(s-1)]} - \frac{d}{i}$$

y en concreto, si $s = 5$ es:

$$A_5 = \left(158.611{,}20 + \frac{15.000}{0{,}12} + 15.000 \times 10\right)(1+0{,}12)^{-6} - \frac{15.000}{0{,}12} = 94.680{,}93$$

2.° $\mathcal{M}_3 = A_1 + A_2 + A_3 = A_1 + [A_1(1+i)+d] + [A_1(1+i)^2 + d(1+i) + d] =$

$$= A_1 \cdot S_{\overline{3}|i} + (3+i)d = 14.611{,}20\, S_{\overline{3}|0.12} + 3{,}12 \times 15.000 = 96.104{,}03$$

$$C_7 = \left(158.611{,}20 + \frac{15.000}{0{,}12} + 15.000 \times 10\right)\mathbf{a}_{\overline{3}|0.12} - \frac{15.000 \times 3}{0{,}12} = 666.460{,}94$$

Ejemplo 2.—Construir el cuadro de amortización del préstamo del ejemplo anterior para una duración n = 5 años.

Calculada la primera anualidad

$$a_1 = \frac{1.200.000 \times 0{,}12 + 15.000 \times 5}{0{,}12\, \mathbf{a}_{\overline{5}|0.12}} - \frac{15.000}{0{,}12} - 15.000 \times 5 = 306.272{,}76$$

y siguiendo el orden indicado anteriormente se obtiene:

s	a_s	I_s	A_s	$\mathcal{M}_s$	C_s
Origen					1.200.000,00
1	306.272,76	144.000,00	162.272,76	162.272,76	1.037.727,24
2	321.272,76	124.527,27	196.745,49	359.018,25	840.981,75
3	336.272,76	100.917,81	235.354,95	594.373,20	605.626,80
4	351.272,76	72.675,22	278.597,54	872.970,74	327.029,26
5	366.272,76	39.243,50	327.029,26	1.200.000,00	0

6.—METODO DE TERMINOS VARIABLES EN PROGRESION GEOMETRICA

El capital prestado de cuantía C_0 se amortiza mediante n anualidades que varían en progresión geométrica y, en consecuencia, se dará la relación:

$$a_s = a_{s-1} q = a_1 \cdot q^{s-1}$$

con q razón de la progresión, que necesariamente debe ser positiva para satisface la exigencia que sea todo $a_s > 0$.

La operación tendría el siguiente esquema:

C_0		a_1		$a_1 q$		$a_1 q^s$		$a_1 q^n$
0	i	1	i	2 .... s	i	s + 1 .... n−1	i	n

y siguiendo la misma metodología que en el sistema anterior resulta:

Ecuación de equivalencia en el origen:

$$C_0 = A_{(a_1;\, q)\overline{n}|i} = a_1 \frac{1-(1+i)^{-n} \cdot q^n}{1+i-q} \qquad (31)$$

Anualidades:

$$a_1 = C_0 \frac{1+i-q}{1-(1+i)^{-n} q^n} \quad ; \quad a_s = a_{s-1} q \qquad (32)$$

Reserva o saldo al principio del año s + 1:

$$C_s = A_{(a_{s+1};\, q)\overline{n-s}|i} = a_{s+1} \frac{1-(1+i)^{-(n-s)} q^{n-s}}{1+i-q} \qquad (33)$$

$$C_s = C_{s-1}(1+i) - a_s$$

Ley de variación de las cuotas de amortización:

$$C_s - C_{s+1} = (C_{s-1} - C_s)(1+i) + (a_{s+1} - a_s) \Rightarrow A_{s+1} = A_s(1+i) + (a_{s+1} - a_s) \quad (35)$$

Restantes magnitudes:

$$\mathcal{M}_s = \mathcal{M}_{s-1} + A_s = \sum_{h=1}^{s} A_h = C_0 - C_s$$

Cuadro de amortización para un caso de cuatro términos amortizativos, por ejemplo:

s	a_s	I_s	A_s	$\mathcal{M}_s$	C_s
Or.	—	—	—	—	C_0
1	a_1	$I_1 = C_0 i$	$A_1 = a_1 - C_0 i$	$\mathcal{M}_1 = A_1$	$C_1 = C_0 - A_1$
2	$a_2 = a_1 \cdot q$	$I_2 = a_2 - A_2$	$A_2 = A_1(1+i) + (a_2 - a_1)$	$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 + A_2$	$C_2 = C_1 - A_2$
3	$a_3 = a_2 \cdot q$	$I_3 = a_3 - A_3$	$A_3 = A_2(1+i) + (a_3 - a_2)$	$\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_2 + A_3$	$C_3 = C_2 - A_3$
4	$a_4 = a_3 \cdot q$	$I_4 = a_4 - A_4$	$A_4 = A_3(1+i) + (a_4 - a_3)$	$\mathcal{M}_4 = \mathcal{M}_3 + A_4 = C_0$	$C_4 = C_3 - A_4 = 0$

Ejemplo.—Obtener el cuadro de amortización de un préstamo mediante términos variables en progresión de razón $q = 1{,}05$ si sus características son: $C_0 = 1.500.000$ pts.; $n = 5$ años; $i = 11$ % anual.

El valor de la primera anualidad

$$a_1 = C_0 \frac{1+i-q}{1-(1+i)^{-n}q^n} = 1.500.000 \frac{1+0{,}11-1{,}05}{1-(1+0{,}11)^{-5}1{,}05^5} = 370.997{,}84$$

las relaciones

$$a_s = 1{,}05\, a_{s-1} \quad ; \quad A_s = A_{s-1}(1+0{,}11) + (a_s - a_{s-1})$$

y el orden metodológico acabado de indicar dan el resultado que se muestra a continuación:

s	a_s	I_s	A_s	$\mathcal{M}_s$	C_s
Origen	—	—	—	—	1.500.000,00
1	370.997,84	165.000,00	205.997,84	205.997,84	1.294.002,16
2	389.547,73	142.340,24	247.207,49	453.205,33	1.046.794,67
3	409.025,12	115.147,41	293.877,71	747.083,04	752.916,96
4	429.476,38	82.820,87	346.655,51	1.093.738,55	406.261,45
5	450.950,20	44.688,75	406.261,45	1.500.000,00	0

7.—METODO DE CUOTA DE AMORTIZACION CONSTANTE

Este caso particular nace de exigir que:

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$$

luego se tiene:

$$C_0 = \sum_{h=1}^{n} A_n = n\,A \Rightarrow A = \frac{C_0}{n}$$

Debido a la constancia de las cuotas el cálculo del capital amortizado y del pendiente es sencillo a través de las expresiones:

$$\mathcal{M}_s = s\,A = C_0\,\frac{s}{n} \quad ; \quad C_s = (n-s)A = C_0\,\frac{n-s}{n} \tag{36}$$

Los términos amortizativos cumplen la siguiente relación:

$$a_s = I_s + A_s = C_{s-1}\,i + \frac{C_0}{n} = \left(C_{s-2} - \frac{C_0}{n}\right) i + \frac{C_0}{n} =$$

$$= C_{s-2}\,i + \frac{C_0}{n} - \frac{C_0 i}{n} = a_{s-1} - \frac{C_0 i}{n} \tag{37}$$

es decir, varían en progresión aritmética de razón $d = -\dfrac{C_0 i}{n}$. Este método es un caso particular del epígrafe 5 y pueden ser utilizadas todas las expresiones desarrolladas en el citado epígrafe, pero resultan de mayor utilidad por su sencillez las que de manera específica se obtienen ahora.

El conocimiento de $a_1 = C_0 i + \dfrac{C_0}{n}$ y la aplicación de la relación (37) dan sucesivamente los valores de a_s.

En cuanto a las cuotas de intereses se tiene:

$$I_s = \left(a_s - \frac{C_0}{n}\right) = \left(a_{s-1} - \frac{C_0 i}{n}\right) - \frac{C_0}{n} = I_{s-1} - \frac{C_0 i}{n} \tag{38}$$

con $I_1 = C_0 i$.

Ejemplo 1.—Se concede un préstamo de 900.000 pts. para ser amotizado en 8 años mediante el método de cuotas de amortización constantes. Si el tipo de interés es el 12 % anual obtener: 1) Cuantías de las anualidades primera y séptima; 2) Cuotas de intereses de los años tercero y octavo; 3) Capital amortizado en los cuatro primeros años y capital pendiente después de 7 años.

Por aplicación de las relaciones (36), (37) y (38) resulta:

1) $a_1 = C_0 i + \frac{C_0}{8} = 108.000 + \frac{900.000}{8} = 108.000 + 112.500 = 220.500$

$$a_7 = a_6 - \frac{C_0}{8} i = a_1 - 6 \frac{C_0}{8} i = 220.500 - 6 \times 13.500 = 139.500$$

2) $I_3 = I_1 - 2 \frac{C_0}{8} i = 108.000 - 2 \times 13.500 = 81.000$

$$I_8 = I_3 - 5 \times 13.500 = 13.500$$

3) $\mathcal{M}_4 = 4 \frac{C_0}{8} 4 \times 112.500 = 450.000 \qquad C_4 = \frac{C_0}{8} = 112.500$

Ejemplo 2.—Construir el cuadro de amortización del ejemplo anterior para una duración de 4 años.

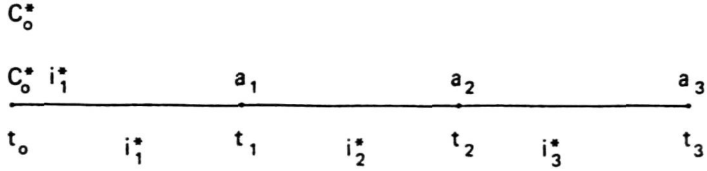
El resultado es:

s	a_a	I_s	A_s	$\mathcal{M}_s$	C_s
Origen	—	—	—	—	900.000
1	333.000	108.000	225.000	225.000	675.000
2	306.000	81.000	225.000	450.000	450.000
3	279.000	54.000	225.000	675.000	225.000
4	252.000	27.000	225.000	900.000	0

8.—AMORTIZACION DE PRESTAMOS CON ABONO DE INTERESES ANTICIPADOS: METODO ALEMAN

La operación de préstamo con intereses anticipados se caracteriza porque el prestatario, a cambio de la prestación, paga en el momento de concertar el préstamo los intereses que devenga durante el primer período y además, al término de cada período, un término amortizativo, que comprende la cuota de amortización del período y la cuota de intereses del período siguiente sobre el capital vivo.

Designando por $(C_0^*; t_0)$ al capital prestado en t_0, por i^* al rédito de contracapitalización o prepagable que determina los intereses anticipados del período s y por a_s al término amortizativo que vence en t_s, una operación de tres períodos sería:



Supuestos conocidos C_0^* e i_s^* y elegidas las cuotas de amortización A_s^*, con $A_1^* + A_2^* + A_3^* = C_0^*$, para determinar las restantes variables puede procederse así:

a) Reservas:

$$C_1^* = C_0^* - A_1^* \quad ; \quad C_2^* = C_1^* - A_2^* \quad ; \quad C_3^* = C_2^* - A_3^* = 0$$

b) Capital amortizado

$$\mathcal{M}_1^* = A_1^* \quad ; \quad \mathcal{M}_2^* = \mathcal{M}_1^* + A_2^* \quad ; \quad \mathcal{M}_3^* = \mathcal{M}_2^* + A_3^* = C_0^*$$

c) Cuotas de intereses

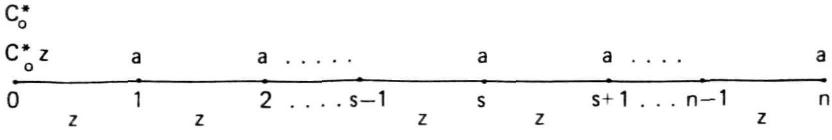
$$I_1^* = C_0^* \cdot i_1^* \quad ; \quad I_2^* = C_1^* \cdot i_2^* \quad ; \quad I_3^* = C_2^* \cdot i_3^*$$

d) Términos amortizativos

$$a_1 = I_2^* + A_1^* \quad ; \quad a_2 = I_3^* + A_2^* \quad ; \quad a_3 = A_3^*$$

Cabe obtener distintos casos particulares al hacer hipótesis sobre a, A*, etc. Entre los posibles, resalta el denominado **método alemán** o **centroeuropeo** caracterizado por: períodos de igual duración (generalmente años), términos amortizativos constantes (anualidades si los períodos son anuales) y réditos anticipados constantes (tantos en períodos anuales).

Un préstamo sistema alemán de n años de duración puede representarse por:



en donde z es el tanto constante.

La equivalencia financiera en el origen de la operación es:

$$C_0^* = C_0^* z + a(1-z) + a(1-z)^2 + \cdots + a(1-z)^n =$$

$$= C_0^* z + a(1-z)\,\frac{1-(1-z)^n}{z} = a\,\frac{1-(1-z)^n}{z} \tag{39}$$

llegándose a esta última expresión después de pasar al primer miembro $C_0^* z$ y despejar C_0^*.

Para calcular la anualidad basta despejar y se tiene:

$$a = C_0^*\,\frac{z}{1-(1-z)^n} \tag{40}$$

De la estructura de las anualidades de los períodos s y s+1.

$$a = I_{s+1}^* + A_s^* = C_s^* z + A_s^* \quad ; \quad a = I_{s+2}^* + A_{s+1}^* = C_{s+1}^* z + A_{s+1} \tag{41}$$

se sigue:

$$A_s^* = A_{s+1}^* - (C_s^* - C_{s+1}^*)z = A_{s+1}^*(1-z) = A_n^*(1-z)^{n-s} \tag{42}$$

fórmula que relaciona una cuota de amortización con sus posteriores. Al ser $A_n^* = a$ el cálculo de las restantes es automático.

Para calcular el capital vivo se procede así:

$$C_s^* = \sum_{r=s+1}^{n} A_r^* = A_{s+1}^* + A_{s+2}^* + \cdots + A_{n-1}^* + A_n^* =$$

$$= A_n^*(1-z)^{n-(s+1)} + A_n^*(1-z)^{n-(s+2)} + \cdots + A_n^*(1-z) + A_n^* =$$

$$= A_n^*\,\frac{1-(1-z)^{n-s}}{z} = a\,\frac{1-(1-z)^{n-s}}{z} = C_0^*\,\frac{1-(1-z)^{n-s}}{1-(1-z)^n} \tag{43}$$

y para el capital amortizado:

$$\mathscr{M}_s^* = C_0^* - C_s^* = C_0^*\left(1 - \frac{1-(1-z)^{n-s}}{1-(1-z)^n}\right) \tag{44}$$

La cuota de interés se calcula por:

$$I_{s+1}^* = C_s^* z = a - A_s^* \tag{45}$$

Es conveniente construir el cuadro de amortización del préstamo para tener en todo momento información del estado de las distintas magnitudes. Los datos que normalmente se dispone son: C_0^*, z, n. Para n=4 resulta:

s	a_s	I_{s+1}^*	A_s^*	$\mathcal{M}_s^*$	C_s^*
Or.	$a_0 = C_0^* \cdot z$	$I_1^* = C_0^* z$	—	—	C_s^*
1	$a = C_0^* \dfrac{z}{1-(1-z)^4}$	$I_2^* = a - A_1^*$	$A_1^* = A_2^*(1-z)$	$\mathcal{M}_1^* = A_1^*$	$C_1^* = C_0^* - A_1^*$
2	a	$I_3^* = a - A_2^*$	$A_2 = A_3^*(1-z)$	$\mathcal{M}_2^* = \mathcal{M}_1^* + A_2^*$	$C_2^* = C_1^* - A_2^*$
3	a	$I_4^* = a - A_3^*$	$A_3^* = A_4^*(1-z)$	$\mathcal{M}_3^* = \mathcal{M}_2^* + A_3^*$	$C_3^* = C_2^* - A_3^*$
4	a	—	$A_4^* = a$	$\mathcal{M}_4^* = \mathcal{M}_3^* + A_4^* = C_0^*$	$C_4^* = C_3^* - A_4^* = 0$
	1.ª	3.ª	2.ª	4.ª	5.ª

Los números del pie de las columnas indican el orden seguido en la construcción.

Ejemplo 1.—En un préstamo método alemán con $C_0^* = 1.750.000$; $z = 0,10$; $n = 10$ determinar: 1.º Anualidad; 2.º Cuota de amortización del cuarto año; 3.º Cuota de intereses del séptimo año; 4.º Capital vivo al principio del cuarto año.

Haciendo uso de las fórmulas anteriormente obtenidas resulta:

1.º $a = C^* \dfrac{z}{1-(1-z)^n} = 1.750.000 \dfrac{0,10}{1-(1-0,10)^{10}} = 268.684,49.$

2.º $A_4^* = A_{10}^*(1-z)^6 = 268.684,49(1-0,10)^6 = 142.789,95.$

3.º $I_7^* = a - A_6^* = a[1-(1-z)^4] = 268.684,49[1-(1-0,10)^4] = 92.400,60$

o también

$$I_7^* = C_6^* z = C_0^* \frac{1-(1-z)^4}{1-(1-z)^{10}} z = 1.750.000 \frac{1-(1-0,10)^4}{1-(1-0,10)^{10}} 0,10 = 92.400,60$$

4.º $C_3^* = a \dfrac{1-(1-z)^7}{z} = 268.684,49 \dfrac{1-(1-0,10)^7}{0,10} = 1.401.735,30$

Ejemplo 2.—Calcular el cuadro de amortización del préstamo anterior si la duración n es 6 años.

El orden indicado anteriormente a los datos del problema da los valores que se transcriben

s	a_s	I^*_{s+1}	A^*_s	$\mathcal{M}^*_s$	C^*_s
Origen	175.000,00	175.000,00	—	—	1.750.000,00
1	373.485,52	152.946,07	220.539,45	220.539,45	1.529.460,55
2	373.485,52	128.441,67	245.043,85	465.583,30	1.284.416,70
3	373.485,52	101.214,58	272.270,94	737.854,24	1.012.145,76
4	373.485,52	70.962,25	302.523,27	1.040.377,51	709.622,49
5	373.485,52	37.348,55	336.136,97	1.376.514,48	373.485,52
6	373.485,52		373.485,52	1.750.000,00	0

9.—PROBLEMA GENERAL DE LA CANCELACION ANTICIPADA

En los préstamos amortizables mediante rentas, al igual que en los amortizables mediante un solo pago, se plantea el problema de la cancelación anticipada.

Supongamos una operación con n términos anuales de los que han vencido s y se está al principio del año s+1, entonces la operación realizada es:

$$\begin{array}{llllll} C_0 & & C_s & a_{s+1} \ldots\ldots & a_r \ldots\ldots & a_n \\ \hline 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & s & s+1 \ldots\ldots & r \ldots\ldots & n \end{array}$$

con

$$C_s = \sum_{r=s+1}^{n} a_r(1+i)^{-(r-s)} \tag{46}$$

capital vivo o préstamo pendiente de amortización. Si al principio del año s+1 el prestatario pretende cancelar total o parcialmente el préstamo, caben diversas posibilidades:

a) Que la rescisión haya sido prevista en el contrato mediante la entrega de la reserva C_s o de una cantidad R_s superior a la reserva, es decir, exigiendo una compensación $D_s = R_s - C_s$.

b) Que la rescisión no haya sido prevista, necesitando, por tanto, el acuerdo de prestamista y prestatario.

Transcurridos s años es usual que el prestamista realice operaciones de la misma naturaleza a un tipo de interés t distinto del de la operación en vigor. El prestamista tiene garantizado por contrato percibir la renta de términos a_{s+1}, a_{s+2}, ..., a_n, y sólo renunciará a ello si se le compensa como mínimo con la cantidad V_s que colocada al tanto t garantice análogos ingresos.

La cuantía V_s será:

$$V_s = \sum_{r=s+1}^{n} a_r(1+t)^{-(r-s)} \tag{47}$$

verificándose,

$$V_s \gtrless C_s \quad \text{si} \quad t \gtrless i$$

Cuando solamente se pretenda **reembolsar parcialmente** la operación entregando una cuantía $X_s < V_s$, el efecto producido es idéntico al que tiene lugar cuando se otorga otra operación con la cuantía $C'_s = V_s - X_s$ como principal del préstamo y amortización mediante $n-s$ anualidades a'_r, evaluadas al tanto t de forma que:

$$C'_s = V_s - X_s = \sum_{r=s+1}^{n} a'_r(1+t)^{-(r-s)} \tag{48}$$

Las expresiones de V_s, C'_s y $a'_r(r=s+1, s+2, \ldots, n)$ son aplicables a los métodos de amortización, imponiendo las correspondientes restricciones. A título indicativo se obtienen las del préstamo francés:

a) Cantidad a exigir para rescindir

$$V_s = a\, \mathbf{a}_{\overline{n-s|}t} \tag{49}$$

que puede ser expresada en función de C_s y el C_0 si se hace uso de las relaciones (8) y (9).

Resulta:

$$V_s = C_s \frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s|}t}}{\mathbf{a}_{\overline{n-s|}i}} = C_0 \frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s|}t}}{\mathbf{a}_{\overline{n|}i}} \tag{50}$$

b) Rescisión parcial

$$C'_s = V_s - X_s = a'\, \mathbf{a}_{\overline{n-s|}t} \tag{51}$$

de donde:

$$a' = \frac{V_s - X_s}{\mathbf{a}_{\overline{n-s|}t}} = a - \frac{X_s}{\mathbf{a}_{\overline{n-s|}t}} \tag{52}$$

Cuando X_s sea una parte α de C_s o de V_s se tiene:

$$a' = \frac{V_s - \alpha C_s}{\mathbf{a}_{\overline{n-s|}t}} = a\left(1 - \alpha \frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s|}i}}{\mathbf{a}_{\overline{n-s|}t}}\right) \tag{51'}$$

$$a' = \frac{V_s - \alpha V_s}{a_{\overline{n-s|}t}} = (1-\alpha)a \qquad (52')$$

Ejemplo.—Una entidad bancaria concede un préstamo de 1.500.000 pts. para ser amotizado en 8 años a un tipo de interés del 11 % mediante una renta anual constante. Transcurridos 3 años el tipo de interés que aplica la entidad en los préstamos que concede es el 12 %. Determinar, al principio del cuarto año:

1.° Cantidad que tendría que abonar el prestatario para rescindir la operación al nuevo tipo de interés si además la entidad exige una compensación adicional del 1 % del saldo.

2.° Anualidades a pagar en lo sucesivo si se cancela parcialmente la operación abonando 400.000 pts. y no existe en este caso penalización.

La cantidad a abonar el deudor para rescindir es el valor V_3 obtenido al tanto $t=0{,}12$, más la penalización adicional $0{,}01\,C_3$, es decir:

$$V_3 + 0{,}01\,C_3 = a\,a_{\overline{5|}0{,}12} + 0{,}01\ a\ a_{\overline{5|}0{,}11}$$

$$= \frac{1.500.000}{a_{\overline{8|}0{,}11}}\,(a_{\overline{5|}0{,}12} + 0{,}01\,a_{\overline{5|}0{,}11}) = 291.481{,}58 \times 3.641.735{,}16 =$$

$$= 1.061.498{,}72$$

La nueva anualidad, en el caso de reembolso parcial es:

$$a' = a - \frac{400.000}{a_{\overline{5|}0{,}12}} = 291.481{,}58 - 110.963{,}89 = 180.517{,}69$$

10.—TANTOS EFECTIVOS EN LOS PRESTAMOS

En las operaciones de amortización, además de las condiciones contractuales, es usual que aparezcan otras características o condiciones complementarias. Estas, aunque no están explicitadas en el contrato, inciden en el préstamo y alteran el equilibrio de la operación resaltado por la ecuación:

$$\boxed{\text{PRESTACION} \;\Leftrightarrow\; \text{CONTRAPRESTACION}}$$

que se satisface al rédito del período i (tanto si los períodos son anuales).

Las características adicionales, llamadas comerciales, son de dos tipos: recíprocas o bilaterales y unilaterales o no recíprocas.

Las características **bilaterales** son las que una vez definida la operación financiera alteran o modifican las cuantías o los vencimientos de la prestación o de la contraprestación para las dos partes.

Reciben la denominación de condiciones **unilaterales** aquellas que modifican las cuantías o vencimientos de la prestación o de la contraprestación, pero afectando solamente a una de las partes contratantes.

Dichas características comerciales obligan a distinguir entre:

a) Prestación real o efectiva que desembolsa el acreedor o prestamista.
b) Prestación real o efectiva que recibe el prestatario o deudor.
c) Contraprestación efectiva o real que deberá entregar el deudor o prestatario.
d) Contraprestación real o efectiva que recibirá el prestamista o acreedor.

Se denomina rédito medio efectivo activo o del acreedor al rédito i_a que cumpla la ecuación de equivalencia:

PRESTACION REAL DEL ACREEDOR	$\Leftrightarrow$	CONTRAPRETACION REAL PARA EL ACREEDOR

De igual manera, el rédito i_p que verifique la equivalencia:

PRESTACION REAL PARA EL DEUDOR	$\Leftrightarrow$	CONTRAPRETACION REAL DEL DEUDOR

se llamará rédito medio efectivo pasivo o del deudor.

Cuando los períodos son anuales representan los anteriores a los correspondientes **tantos efectivos activo o del acreedor y pasivo o del deudor.**

En general es $i \neq i_a \neq i_p$.

Las características más usuales son:

a) **Bilaterales:** Bonificación P_0 en el momento inicial que hace que la cantidad entregada sea V_0, con $V_0 \neq C_0$. Si $P_0 > 0$, será $V_0 = C_0 - P_0 < C_0$.

b) **Unilaterales:**

Gastos iniciales o en el origen de la operación a cargo del prestamista, G_a^i, y a cargo del prestatario, G_p^i.

Gastos de administración o periodales, $g_{p,\,r}$, a cargo del prestatario si la contraprestación es múltiple.

Impuestos sobre los rendimientos a cargo del prestamista y abonables en los períodos que se devengan por un importe T_r.

Gastos finales o al final de la operación a cargo del prestatario, G_p^f.

La forma de determinar los tantos efectivos se plantea seguidamente:

1.—Préstamo simple o amortizable en un solo pago.

Las características contractuales establecen la ecuación

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

Si en la operación inciden las características enumeradas anteriormente se tiene:

— Prestación real del acreedor: $V_0 + G_a^i$.
— Prestación real para el deudor: $V_0 - G_p^i$.
— Contraprestación real del deudor: $C_n + G_p^f$.
— Contraprestación real para el acreedor: $C_n - T_n$.

El **tanto efectivo activo o del acreedor** es el valor i_a que cumple la ecuación:

$$V_0 + G_a^i = (C_n - T_n)(1 + i_a)^{-n} \Rightarrow i_a = \left(\frac{C_n - T_n}{V_0 + G_a^i}\right)^{1/n} - 1 \qquad (53)$$

y el tanto efectivo pasivo o del deudor, i_p, se obtiene en:

$$V_0 - G_p^i = (C_n + G_p^f)(1 + i_p)^{-n} \Rightarrow i_p = \left(\frac{C_n + G_p^f}{V_0 - G_p^i}\right)^{1/n} - 1 \qquad (54)$$

Ejemplo 1.—Determinar los tantos efectivos de un préstamo simple de 1.000.000, a devolver dentro de 5 años con unos intereses del 12 % anual si en la operación inciden las siguientes características comerciales:

— **Gastos a cargo del deudor en el origen y al final de la operación importando en cada caso un 3 % de la cantidad prestada.**
— **Gastos iniciales a cargo del acreedor que importan el 0,5 % del capital prestado.**
— **Impuestos sobre los rendimientos a un tipo del 16 %.**

Contraprestación contractual:

$$C_5 = C_0(1 + i)^n = 1.000.000(1 + 0,12)^5 = 1.762.341,68$$

Magnitudes reales:

$$C_0 + G_a^i = 1.000.000 + 0,005 \times 1.000.000 = 1.005.000$$

$$C_0 - G_p^i = C_0(1 - 0,03) = 970.000$$

$$C_n + G_p^f = C_5 + 0,03\ C_0 = 1.762.341,68 + 30.000 = 1.792.341,68$$

$$C_n - T_n = C_5 - 0,16(C_5 - C_0) = 1.762.341,68 - 0,16 \times 762.341,68 = \\ = 1.762.341,68 - 121.974,67 = 1.640.367$$

Tanto efectivo del acreedor i_a o rendimiento unitario por año de la operación:

$$1.005.000 = 1.640.367(1 + i_a)^{-5} \Rightarrow i_a = 0,1029 = 10,29\ \%$$

Tanto efectivo del deudor i_p o coste unitario anual de la operación:

$$970.000 = 1.792.341{,}68(1+i_p)^{-5} \Rightarrow i_p = 0{,}1307 = 13{,}07\ \%$$

2.—Préstamo compuesto o amortizable mediante una renta.

Si las condiciones del contrato son:

$$\begin{array}{ccccccc} C_0 & a_1 & a_2 \ldots & a_r = I_r + A_r & \ldots & & a_n \\ \hline 0 & 1 & 2 \ldots & r \ldots & & n-1 & n \end{array}$$

con ecuación de equivalencia:

$$C_0 = \sum_{r=1}^{n} a_r(1+i)^{-r} = \sum_{r=1}^{n} (I_r + A_r)(1+i)^{-r}$$

es decir, la prestación de cuantía C_0 se amortizará con las anualidades de cuantía $a_r = I_r + A_r$.

Como consecuencia de las características comerciales se tiene:

a) Acreedor o prestamista.

Prestación real: $V_0 + G_a^i$.
Contraprestación real: n términos amortizativos dados por $a_r - T_r = (I_r - T_r) + A_r$.

Ecuación del tanto efectivo:

$$V_0 + G_a^i = \sum_{r=1}^{n} (a_r - T_r)(1+i_r)^{-r} \tag{55}$$

b) Deudor o prestatario.

Prestación real: $V_0 - G_p^i$.
Contraprestación real: n anualidades por valor $a_r + g_{p,r}$ y un término adicional G_p^f al final de los n años.

Ecuación del tanto efectivo:

$$V_0 - G_p^i = \sum_{r=1}^{n} (a_r + g_{p,r})(1+i_p)^{-r} + G_p^f(1+i_p)^{-n} \tag{56}$$

Este planteamiento es aplicable a las distintas modalidades de préstamos tratados en los epígrafes anteriores.

Ejemplo 2.—Una operación de préstamo definida por las características contractuales:

— Cuantía prestada: 2.500.000 pts.
— Duración de la operación: 4 años.
— Tipo de interés: 12,5 % anual.
— Anualidades constantes.

Y en ella inciden las características comerciales:

— Gastos iniciales del 2,4 % a cargo del prestatario.
— Gastos finales del mismo importe anterior a cargo del deudor.
— Impuestos anuales sobre los intereses, a cargo del acreedor, a un tipo del 15 %.
— Gastos de administración anuales del 1 % sobre el saldo pendiente al principio del año más una cantidad constante de 1.500 pts. Ambos a cargo del prestatario.

Obtener el tanto efectivo activo o del prestamista y el tanto efectivo pasivo o del prestatario.

En este supuesto, el proceso a seguir consiste en obtener, en primer lugar, la anualidad constante y su descomposición de cada año; así como la evolución de las reservas. A continuación se calculan las magnitudes reales de ambas partes y, por último, los tantos efectivos.

De la anualidad

$$a = 2.500.000\, \mathbf{a}^{-1}_{\overline{4}|0,125} = 831.769,8$$

las relaciones:

$$A_1 = a - I_1 \quad ; \quad A_s = A_{s-1}(1+0,125) \quad ; \quad a = I_s + A_s \quad ; \quad C_s = C_{s-1} - A_s$$

y las condiciones del enunciado se sigue:

Años	I_s	A_s	C_{s-1}	$g_s = 0,01\, C_{s-1} + 1.500$	$a + g_s$	$0,85\, I_s + A_s$
1	312.500,0	519.269,8	2.500.000,0	26.500,0	858.269,8	784.894,8
2	247.591,3	584.178,5	1.980.730,2	21.307,3	853.077,1	794.631,1
3	174.569,0	657.200,8	1.396.551,7	15.465,5	847.235,3	805.584,4
4	92.418,9	739.350,9	739.350,9	8.893,5	840.663,3	817.907,0

a) Magnitudes reales:

Prestación real del acreedor: $C_0 = 2.500.000$ pts.

Prestación real para el deudor: $C_0 - G^i_p = 2.500.000(1 - 0,024) = 2.440.000$.

Contraprestación real del deudor: La columna $a + g_s$ anterior más los gastos finales

$$G^f_p = 0,024 \times 2.500.000 = 60.000$$

Contraprestación real para el acreedor: La columna $0,85\, I_s + A_s$ de la tabla.

b) Ecuaciones reales y tantos efectivos:

Del acreedor o prestamista:

$$2.500.000 = \sum_{r=1}^{4} (0{,}85\,I_r + A_r)(1+i_a)^{-r} \Rightarrow i_a = 0{,}10625$$

Del deudor o prestatario:

$$2.440.000 = \sum_{r=1}^{4} (a+g_r)(1+i_p)^{-r} + 60.000(1+i_p)^{-5} \Rightarrow i_p = 0{,}14695$$

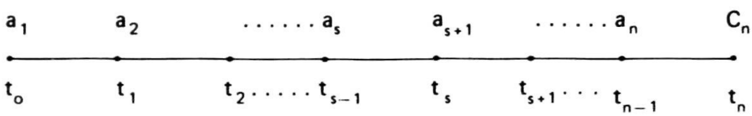
III.2.—CONSTITUCION

11.—OPERACIONES DE CONSTITUCION O DE FORMACION DE CAPITAL

Las operaciones de constitución o de formación de capital son operaciones financieras por las que una persona, llamada prestamista, ahorrador o impositor, se compromete a entregar a otra persona, prestatario, un conjunto de capitales en un período (t_0, t_n) para que ésta le reembolse un único capital $(C_n; t_n)$ equivalente a los anteriores, que compense lo recibido y los intereses generados.

Esta operación comprende una prestación de n capitales, cuyas cuantías $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vencen respectivamente en los períodos $(t_0, t_1), (t_1, t_2), \ldots, (t_{n-1}, t_n)$, y una contraprestación única (C_n, t_n). Los capitales de la prestación o imposiciones, cuyos vencimientos se asocian normalmente a los principios de los intervalos, tienen como misión formar o constituir un capital.

Lo descrito queda recogido en:



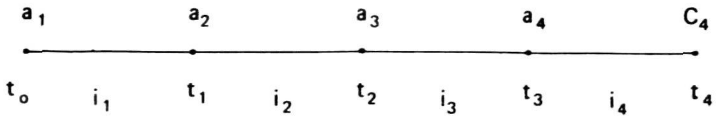
Es usual concertar la operación con una ley de capitalización (generalmente la capitalización compuesta) y con períodos uniformes (años, semestres, etc.). En lo sucesivo, la referencia habitual será la anual.

Los problemas principales que plantea esta operación son: cálculo de las imposiciones si se fija como objetivo formar una cuantía determinada C_n, determinación de C_n si se conocen las imposiciones, obtención del capital formado en s años y de la parte correspondiente al año s.

La notación y terminología a utilizar son:

C_n = Cuantía del capital a formar o de la contraprestación.
a_s = Cuantía de la imposición que vence al principio del período s.
C_s = Cuantía del capital formado al final del año s, o reserva o saldo.
$\mathcal{M}_s$ = Cuantía del capital pendiente de formación al final del año s.
I_s = Cuota de intereses generados en el año s.
Δ_s = Cuota de constitución del año s.

Con el fin de analizar la evolución y características de estas operaciones se plantea la representación por:



con i_s rédito del período s. Conocidos i_s y a_s para calcular las restantes variables de la operación puede procederse así:

a) Reservas o capital formado

$$C_1 = a_1(1+i_1) \qquad C_3 = (C_2+a_3)(1+i_3)$$
$$C_2 = (C_1+a_2)(1+i_2) \qquad C_4 = (C_3+a_4)(1+i_4)$$

b) Cuotas de constitución

$$\Delta_1 = C_1 \qquad \Delta_3 = C_3 - C_2$$
$$\Delta_2 = C_2 - C_1 \qquad \Delta_4 = C_4 - C_3$$

c) Cuotas de intereses

$$I_1 = \Delta_1 - a_1 \qquad I_3 = \Delta_3 - a_3$$
$$I_2 = \Delta_2 - a_2 \qquad I_4 = \Delta_4 - a_4$$

d) Capital pendiente de formación

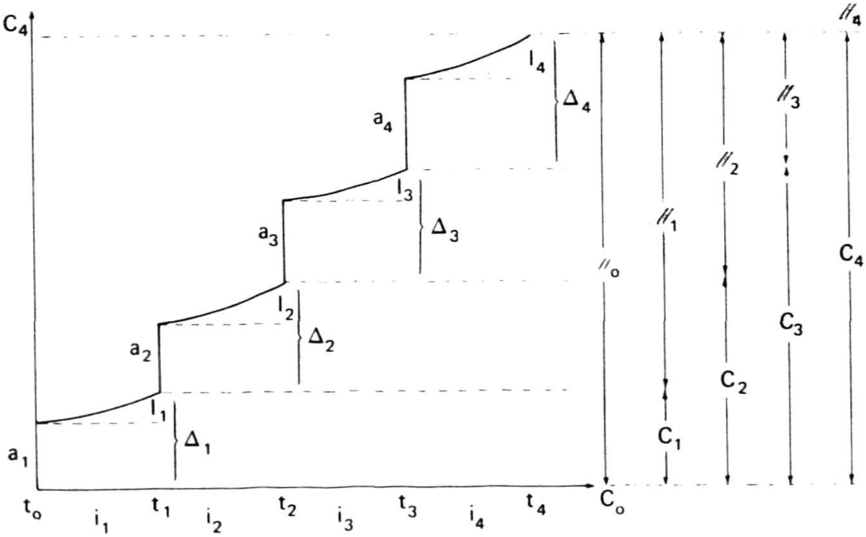
$$\mathcal{M}_1 = C_4 - C_1 = \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4$$
$$\mathcal{M}_2 = C_4 - C_2 = \mathcal{M}_1 - \Delta_2$$
$$\mathcal{M}_3 = C_4 - C_3 = \mathcal{M}_2 - \Delta_3$$
$$\mathcal{M}_4 = C_4 - C_4 = \mathcal{M}_3 - \Delta_4 = 0$$

La dinámica de la operación suele recogerse en un cuadro de constitución que adopta la forma que se expone u otra equivalente con distinta ordenación de columnas. Este es:

Fin de período	Rédito del período	Imposición que vence al principio del período	Cuotas de interés	Cuotas de constitución	Capital constituido	Capital pendiente
s	i_s	a_s	I_s	Δ_s	C_s	$\mathcal{M}_s$
Origen						$\mathcal{M}_0=C_4$
1	i_1	a_1	$I_1=a_1 i_1$	$\Delta_1=a_1+I_1$	$C_1=\Delta_1$	$\mathcal{M}_1=\mathcal{M}_0-\Delta_1$
2	i_2	a_2	$I_2=(C_1+a_2)i_2$	$\Delta_2=a_2+I_2$	$C_2=C_1+\Delta_2$	$\mathcal{M}_2=\mathcal{M}_1-\Delta_2$
3	i_3	a_3	$I_3=(C_2+a_3)i_3$	$\Delta_3=a_3+I_3$	$C_3=C_2+\Delta_3$	$\mathcal{M}_3=\mathcal{M}_2-\Delta_3$
4	i_4	a_4	$I_4=(C_3+a_4)i_4$	$\Delta_4=a_4+I_4$	$C_4=C_3+\Delta_4$	$\mathcal{M}_4=\mathcal{M}_3-\Delta_4=0$

Cuando i_s, a_s o Δ_s son constantes, por comodidad y sobreentenderse se suele prescindir de la columna o columnas de valores constantes.

La evolución de la operación descrita se recoge en el gráfico:



De igual manera que en la operación de préstamo, caben efectuar distintas hipótesis sobre las imposiciones, sobre las cuotas de constitución, los réditos o los períodos, surgiendo distintos sistemas o métodos de imposiciones. Los casos más notables son:

a) Constitución de un capital mediante una única imposición.

El problema es idéntico al analizado en el epígrafe 2 y por ello no se realiza su estudio en este caso.

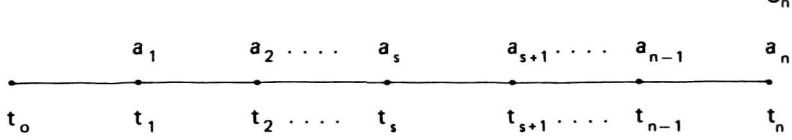
b) Constitución de un capital mediante una renta constante.

Interesa resaltar los casos en que las imposiciones son anuales y cuando vencen en fracciones de año. En ambos casos con tanto de interés constante.

c) Constitución de un capital mediante una renta variable.

Cabe citar los casos de imposiciones variables en progresión aritmética y en progresión geométrica.

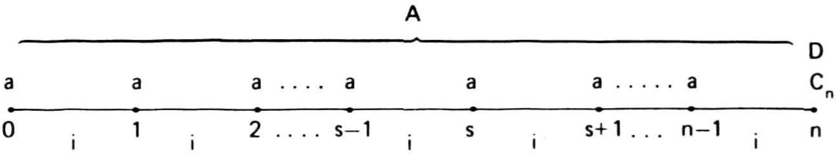
Asimismo podría considerarse la hipótesis de vencimiento de las imposiciones a final del período, es decir, de la forma:



que es equivalente a una operación de $n-1$ imposiciones al principio del período más una adicional que vence en t_n.

12.—CONSTITUCION DE UN CAPITAL MEDIANTE IMPOSICIONES CONSTANTES

La operación del enunciado es la recogida en:



El ahorrador o impositor A cumple su compromiso entregando, al principio de cada año y durante n, las imposiciones constantes de cuantía a y el deudor o prestatario debe entregar al final de la operación la cuantía C_n.

La equivalencia financiera al final de la operación es:

$$C_n = a\,\ddot{S}_{\overline{n}|i} = a\,(S_{\overline{n+1}|i} - 1) \qquad (57)$$

de donde se sigue:

$$a = \frac{C_n}{\ddot{S}_{\overline{n}|i}} = C_n(1+i)^{-(n+1)}\,\mathbf{a}^{-1}_{\overline{n}|i} \qquad (58)$$

Al final del año $s+1$, la reserva o capital constituido viene dada por:

a) Método retrospectivo

$$C_s = a\,\ddot{S}_{\overline{s}|i} = C_n \frac{S_{\overline{s}|i}}{S_{\overline{n}|i}} \tag{59}$$

b) Método prospectivo

$$C_s = C_n(1+i)^{-(n-s)} - a\,\ddot{a}_{\overline{n-s}|i} = C_n \left[(1+i)^{-n-s} - \frac{a_{\overline{n-s}|i}}{S_{\overline{n}|i}} \right] \tag{60}$$

c) Método recurrente

$$C_s = (C_{s-1} + a)\,(1+i) \tag{61}$$

De la (61) se sigue:

$$\Delta_s = C_s - C_{s-1} = (C_{s-1} + a)i + a = I_s + a \tag{62}$$

expresión que resalta que el incremento de reservas se debe a la imposición del año y a los intereses generados en él.

Restando la (61) en dos períodos consecutivos resulta:

$$(C_{s+1} - C_s) = (C_s - C_{s-1})\,(1+i) \Rightarrow \Delta_{s+1} = \Delta_s(1+i) = \Delta_1\,(1+i)^s \tag{63}$$

expresión que permite calcular cualquier cuota a partir del conocimiento de $\Delta_1 = a(1+i)$.

La cuantía del capital pendiente de constitución o formación, al final del año s, viene dada por:

$$\mathcal{M}_s = C_n - C_s = C_n \left(1 - \frac{S_{\overline{s}|i}}{S_{\overline{n}|i}} \right) = \mathcal{M}_{s-1} - \Delta_s \tag{64}$$

Para calcular las cuotas de intereses puede procederse así:

$$I_s = \Delta_s - a + (C_{s-1} + a)i \tag{65}$$

Asimismo también se cumplirá la relación

$$C_s = C_{s-1} + \Delta_s = \sum_{r=1}^{s} \Delta_r \tag{66}$$

Las fórmulas expuestas facilitan la resolución del cuadro de constitución del capital de cuantía C_n en n años al tanto i siguiendo el orden:

— Cálculo de la imposición constante.
— Determinación de Δ_1 y los demás Δ_s.
— Obtención de $I_s = \Delta_s - a$.
— Resolución de las columnas C_s y $\mathcal{M}_s$.

Para una duración de 4 años se tiene:

Fin de período s	Imposición prepagable a_s	Cuota de intereses I_s	Cuota de constitución Δ_s	Capital constituido C_s	Capital pendiente $\mathscr{M}_s$
Origen					$\mathscr{M}_0 = C_4$
1	$a = Co/\ddot{S}_{\overline{4}\rceil i}$	$I_1 = \Delta_1 - a$	$\Delta_1 = a(1+i)$	$C_1 = \Delta_1$	$\mathscr{M}_1 = \mathscr{M}_0 - \Delta_1$
2	a	$I_2 = \Delta_2 - a$	$\Delta_2 = \Delta_1(1+i)$	$C_2 = C_1 + \Delta_2$	$\mathscr{M}_2 = \mathscr{M}_1 - \Delta_2$
3	a	$I_3 = \Delta_3 - a$	$\Delta_3 = \Delta_2(1+i)$	$C_3 = C_2 + \Delta_3$	$\mathscr{M}_3 = \mathscr{M}_2 - \Delta_3$
4	a	$I_4 = \Delta_4 - a$	$\Delta_4 = \Delta_3(1+i)$	$C_4 = C_3 + \Delta_4$	$\mathscr{M}_4 = \mathscr{M}_3 - \Delta_4 = 0$

En el caso de imposiciones constantes que vencen en m-simos de año se procede de idéntica forma a la analizada. Todas las fórmulas son válidas teniendo en cuenta que el número de períodos es $n \times m$ y el rédito del período de amplitud $1/m$ de año es $i^{(m)} = \frac{j_{(m)}}{m} = (1+i)^{1/m} - 1$.

Ejemplo 1.—Construir el cuadro de constitución de una operación cuyas características son: cuantía del capital a formar 2.000.000; imposiciones constantes al principio de cada año, duración de la operación 8 años y tipo de interés anual concertado el 10 %.

Aplicando las fórmulas (58) y (63)—(66), para los valores $C_8 = 2.000.000$, $n = 8$, $i = 0{,}10$, y siguiendo el orden indicado resulta:

s	a_s	I_s	Δ_s	C_s	$\mathscr{M}_s$
Origen					2.000.000,00
1	158.989,12	15.898,92	174.888,04	174.888,04	1.825.111,96
2	158.989,12	33.387,72	192.376,84	367.264,88	1.632.735,12
3	158.989,12	52.625,41	211.614,52	578.879,40	1.421.120,60
4	158.989,12	73.786,85	232.775,97	811.655,37	1.188.344,63
5	158.989,12	97.064,45	256.053,57	1.067.708,94	932.291,06
6	158.989,12	122.779,81	281.658,93	1.349.367,87	650.632,13
7	158.989,12	150.835,70	309.824,82	1.659.192,69	340.807,31
8	158.989,12	181.818,19	340.807,31	2.000.000,00	000.000,00

Ejemplo 2.—Si se pretende formar el capital del ejemplo anterior, mediante imposiciones constantes al principio de cada trimestre, determinar: 1) Cuantía de la imposición constante; 2) Capital

constituido después de 20 imposiciones; 3) Cuota de constitución del décimo trimestre; 4) Capital formado en el sexto año e intereses generados en él.

Teniendo en cuenta que el número de períodos es $n=8\times4=32$ y el rédito del período $i^{(4)}=(1+0{,}10)^{1/4}-1=0{,}024114$ se tiene:

1) $$a=\frac{2.000.000}{\ddot{S}_{\overline{32}|0{,}024114}}=41.178{,}97$$

2) $$C_{20}=41.178{,}97\ \ddot{S}_{\overline{20}|0{,}024114}=1.067.712{,}28$$

3) $$\Delta_{10}=\Delta(1+i^{(4)})^9=a(1+0{,}024114)^9=52.258{,}69$$

4) $$\Delta_{21}+\Delta_{22}+\Delta_{23}+\Delta_{24}=a(1+i^{(4)})^{21}[1+(1+i^{(4)})+(1+i^{(4)})^2+(1+i^{(4)})^3]=$$
$$=a(1+i^{(4)})^{21}\ \frac{(1+i^{(4)})^4-1}{i^{(4)}}=281.657{,}01$$

$$I_{21}+I_{22}+I_{23}+I_{24}=281.657{,}01-4a=116.941{,}13$$

13.—CONSTITUCION DE UN CAPITAL MEDIANTE IMPOSICIONES VARIABLES

La operación, en el supuesto de ser el tanto anual constante, es:

	C_1	C_2	....	C_{r-1}	C_r	....	C_{n-1}	C_n
0	1	2	....	r−1	r	....	n−1	n

pudiendo fijarse arbitrariamente las cuantías de las imposiciones con la condición de que su capital total formado sea C_n, es decir:

$$\sum_{r=1}^{n} a_r(1+i)^{n-(r-1)}=C_n \qquad (67)$$

y siendo todas las $a_r>0$.

En particular cabe resaltar los casos de variaciones en progresión geométrica y en progresión aritmética.

Asimismo se incluye en estos casos el supuesto de cuotas de constitución constantes, por corresponderle imposiciones variables en progresión aritmética.

13.1.—IMPOSICIONES VARIABLES EN PROGRESION ARITMETICA

Se trata de formar el capital de cuantía C_n con n imposiciones que varían en progresión aritmética. Designando por d a la razón de variación y por $a_1>0$ a la primera imposición, la relación que guardarán será:

$$a_s = a_{s-1} + d = a_1 + (s-1)d \tag{68}$$

con la condición $a_n = a_1 + (n-1)d > 0$.

La ecuación de equivalencia es:

$$C_n = \ddot{S}_{(a_1;\, d)\overline{n}|i} = \left(a_1 + \frac{d}{i}\right)\ddot{S}_{\overline{n}|i} - \frac{dn}{i}(1+i) \tag{69}$$

y el valor de la primera imposición

$$a_1 = \frac{C_n + \dfrac{dn}{i}(1+i)}{\ddot{S}_{\overline{n}|i}} - \frac{d}{i} \tag{70}$$

calculándose las restantes por la relación (68).

De las reservas por recurrencia de los años s y s+1:

$$C_s = (C_{s-1} + a_s)(1+i) \quad ; \quad C_{s+1} = (C_s + a_{s+1})(1+i)$$

se sigue:

$$C_{s+1} - C_s = [(C_s - C_{s-1}) + (a_{s+1} - a_s)](1+i) \Rightarrow \Delta_{s+1} = (\Delta_s + d)(1+i) \tag{71}$$

con $\Delta_1 = a_1(1+i)$.

Por el método retrospectivo se tiene la reserva:

$$C_s = \ddot{S}_{(a_1;\, d)\overline{s}|i} = \left(a_1 + \frac{d}{i}\right)\ddot{S}_{\overline{s}|i} - \frac{ds}{i}(1+i) \tag{72}$$

sustituyendo el valor de a_1 y operando resulta:

$$C_s = \left[C_n + \frac{dn}{i}(1+i)\right]\frac{S_{\overline{s}|i}}{S_{\overline{n}|i}} - \frac{ds}{i}(1+i) \tag{73}$$

Además, se darán las siguientes relaciones:

$$\mathscr{M}_s = C_n - C_s = \mathscr{M}_{s-1} - \Delta_s = \sum_{r=s+1}^{n} \Delta_r \tag{74}$$

$$C_s = C_{s-1} + \Delta_s = \sum_{r=1}^{s} \Delta_r \tag{75}$$

$$I_s = \Delta_s - a_s = (C_{s-1} + a_s)i \tag{76}$$

Ejemplo 1.—Construir el cuadro de constitución de un capital de 3.000.000 de pts. mediante imposiciones prepagables, variables en progresión aritmética de razón d = 100.000, si la duración de la operación es 5 años y el tanto de interés el 12 % anual.

Teniendo en cuenta que

$$a_1 = \frac{3.000.000 + \dfrac{100.000 \times 5}{0{,}12}(1+0{,}12)}{\ddot{S}_{\overline{5}|0.12}} - \frac{100.000}{0{,}12} = 244.173{,}76 \quad ; \quad \Delta_1 = a_1(1+0{,}12)$$

y las fórmulas (71), (74), (75) y (76) se tiene:

s	a_s	I_s	Δ_s	C_s	$\mathcal{M}_s$
Origen					3.000.000,00
1	244.173,76	29.300,86	273.474,62	273.474,62	2.726.525,38
2	344.173,76	74.117,81	418.291,57	691.766,19	2.308.233,81
3	444.173,76	136.312,80	580.486,56	1.272.252,75	1.727.747,25
4	544.173,76	217.971,19	762.144,95	2.034.397,70	965.602,23
5	644.173,76	321.428,54	965.602,30	3.000.000,00	000.000,00

13.2.—IMPOSICIONES VARIABLES EN PROGRESION GEOMETRICA

Designando por a_1 a la primera imposición y por $q > 1$ a la razón de la progresión se tiene:

— Ley de variación de las imposiciones

$$a_s = a_{s-1} q = a_1 q^{s-1} \tag{77}$$

— Equivalencia financiera

$$C_n = \ddot{S}_{(a_1;\, q)\overline{n}|i} = a_1 \frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q}(1+i) \tag{78}$$

— Cuantía de la primera imposición

$$a_1 = C_n \frac{1+i-q}{(1+i)^n - q^n}(1+i)^{-1} \tag{79}$$

— Reserva matemática o capital formado al final del año s

$$C_s = a_1 \frac{(1+i)^s - q^s}{1+i-q}(1+i) = C_n \frac{(1+i)^s - q^s}{(1+i)^n - q^n} \tag{80}$$

— Ley de recurrencia de las cuotas de constitución

$$\Delta_{s+1} = \Delta_s(1+i) + (a_{s+1} - a_s)(1+i) \qquad (81)$$

Las restantes relaciones son análogas a las obtenidas en (74), (75) y (76).

Ejemplo 2.—Construir el cuadro de constitución del ejemplo 1 si las imposiciones varían en progresión geométrica de razón q = 1,08 y el capital a constituir es 2.240.000 pts.

s	a_s	I_s	Δ_s	C_s	$\mathcal{M}_s$
Origen					2.240.000,00
1	273.024,87	32.634,58	305.787,85	305.787,85	1.934.212,15
2	294.866,86	72.078,56	366.945,42	672.733,27	1.567.266,73
3	318.456,21	118.942,76	437.498,95	1.110.132,22	1.129.867,76
4	343.932,70	174.487,78	518.420,48	1.628.552,70	611.447,30
5	371.447,30	240.000,00	611.447,30	2.240.000,00	000.000,00

Cuando la razón es q = 1 + i la (78), (79) y (80) son ahora:

$$C_n = a_1 n(1+i)^n \quad ; \quad a_1 = \frac{C_n}{n}(1+i)^{-n} \quad ; \quad C_s = a_1 s(1+i)^s = I_n \frac{s}{n}(1+i)^{-(n-s)}$$

13.3.—CUOTAS DE CONSTITUCION CONSTANTES

Se caracterizan por exigir que $\Delta_1 = \Delta_2 = - - = \Delta_n = \Delta$ lo que implica que el valor de la cuota constante sea $\Delta = C_n/n$.

Debido a la constancia de las cuotas se puede escribir:

$$C_s = s\Delta = \frac{s}{n} C_n \quad ; \quad \mathcal{M}_s = (n-s)\Delta = \frac{n-s}{n} C_n \qquad (82)$$

y también que

$$\Delta = C_{s-1} i + a_s(1+i) = C_s i + a_{s+1}(1+i)$$

de donde se sigue:

$$a_{s+1} = a_s - (C_s - C_{s-1}) i(1+i)^{-1} = a_s - \frac{C_n}{n} i(1+i)^{-1} \qquad (83)$$

expresión que resalta como las imposiciones varían en progresión aritmética de razón

$d = - = \frac{C_n}{n} i(1+i)^{-1}$, lo que permite calcularlas a partir de la determinación de $a_1 = \Delta(1+i)^{-1} = \frac{C_n}{n}(1+i)$.

De la igualdad

$$\Delta = I_s + a_s = I_{s+1} + a_{s+1}$$

se deduce

$$I_{s+1} = I_s - (a_{s+1} - a_s) = I_s + \frac{C_n}{n} i(1+i)^{-1} \qquad (84)$$

con $I_1 = a_1 i$.

Ejemplo 3.—Construir el cuadro de constitución de un capital de 1.500.000, mediante imposiciones prepagables durante 6 años, si el tipo de interés anual es el 10 % y se pretende que las cuotas de constitución sean iguales.

Por aplicación de las fórmulas anteriores se tiene:

s	a_s	I_s	Δ_s	C_s	$\mathcal{M}_s$
Origen					1.500.000
1	227.272,73	22.727,27	250.000	250.000	1.250.000
2	204.545,45	45.453,55	250.000	500.000	1.000.000
3	181.818,18	68.179,82	250.000	750.000	750.000
4	159.090,91	90.906,09	250.000	1.000.000	500.000
5	136.363,64	113.632,36	250.000	1.250.000	250.000
6	113.636,36	136.358,64	250.000	1.500.000	000.000

14.—TANTOS EFECTIVOS EN LAS OPERACIONES DE IMPOSICION

El problema que se plantea es análogo al de las operaciones de préstamo visto en el epígrafe 10.

La existencia de características comerciales recíprocas o bilaterales y unilaterales o no recíprocas hace que se rompa la ecuación de equilibrio.

$$\boxed{\text{PRESTACION} \Rightarrow \text{CONTRAPRESTACION}}$$

y que tenga que distinguirse entre:

a) Prestación efectiva que impone el ahorrador o prestamista.
b) Prestación efectiva que recibe el deudor o prestatario.
c) Contraprestación efectiva que deberá entregar el deudor.
d) Contraprestación efectiva que deberá recibir el ahorrador.

El rédito medio efectivo activo o del impositor será el valor i_a que satisfaga la ecuación

PRESTACION EFECTIVA DEL IMPOSITOR	$\Leftrightarrow$	CONTRAPRESTACION EFECTIVA PARA EL IMPOSITOR

y el rédito medio efectivo pasivo o del deudor será el valor i_p que verifique

PRESTACION EFECTIVA PARA EL DEUDOR	$\Leftrightarrow$	CONTRAPRESTACION EFECTIVA DEL DEUDOR

Cuando los períodos son anuales i_a e i_p representarán respectivamente los **tantos efectivos activo o del impositor** y **pasivo o del deudor**.

Las características comerciales más usuales son:

a) **Bilaterales.**—Bonificación P_n en el momento final que hace que se abone V_n en lugar de C_n.

b) **Unilaterales**

Gastos iniciales, o en el origen de la operación, G_p^i a cargo del deudor o prestatario.
Gastos finales, o al final de la operación, G_p^f a cargo del prestatario.

Impuestos sobre los rendimientos a cargo del impositor, abonables al final de la operación, por un importe T_n. Lo usual es que represente un porcentaje α de la diferencia entre V_n y las imposiciones $\sum_{r=1}^{n} a_r$, es decir, $T_n = \alpha\left(V_n - \sum_{r=1}^{n} a_r\right)$.

Si se considera la operación de constitución con imposiciones constantes, vista en 13.1, incidiendo en ella las características comerciales descritas, se tiene:

1) Ecuación de equivalencia teórica

$$a\,\ddot{S}_{\overline{n|}i} = C_n$$

2) Ecuación efectiva para el deudor o prestatario

$$a\,\ddot{S}_{\overline{n|}i_p} = V_n + G_p^i(1+i_p)^n + G_p^f \Rightarrow \text{solución de } i_p \tag{85}$$

3) Ecuación efectiva para el impositor

$$a\,\ddot{S}_{\overline{n|}i_a} = V_n - T_n = V_n - (V_n - na)\alpha \Rightarrow \text{solución de } i_a \tag{86}$$

Ejemplo.—En una operación de constitución definida por las siguientes características:

- **Cuantía del capital a formar: 2.000.000.**
- **Duración de la operación: 6 años.**
- **Abono de imposiciones anuales constantes prepagables.**
- **Tipo de interés anual concertado: 12 %.**
- **Existencia de gastos iniciales, a cargo del deudor, que ascienden a un 1 % sobre el valor a constituir. Asimismo, y también a cargo del deudor, se abonarán al final de la operación igual importe de gastos que en el origen.**
- **Existencia de una bonificación del 2 % sobre el capital total a constituir a favor del impositor.**
- **Los impuestos que abona el impositor al final de la operacón son el 20 % de los rendimientos obtenidos.**

Determinar: 1) Tanto efectivo del deudor; 2) Tanto efectivo del impositor.

La ecuación de equivalencia teórica o nominal es:

$$a\,\ddot{S}_{\overline{6}|0,12} = 2.000.000$$

y tiene como solución $a = 220.045{,}93$.

Las prestaciones y contraprestaciones efectivas a cargo del deudor e impositor son:

a) Deudor

- Prestación efectiva: seis imposiciones anuales constantes de 220.045,93 pts.
- Contraprestación efectiva $2.000.000 \times 0{,}01 = 20.000$ pts. de gastos en el origen y al final de la operación. Además tiene que devolver el importe

$$V_6 = 2.000.000 + 0{,}02 \times 2.000.000 = 2.040.000 \text{ pts.}$$

b) Impositor

- Prestación efectiva: Seis imposiciones anuales constantes de 220.045,93 pts.
- Contraprestación efectiva: Como los impuestos sobre los rendimientos ascienden a

$$T_6 = (V_6 - 6a)\alpha = (2.040.000 - 1.320.275{,}58)0{,}20 = 143.944{,}88$$

la contraprestación ascenderá a $V_6 - T_6 = 1.896.055{,}12$

Las ecuaciones de los tantos efectivos y sus soluciones son:

$$220.045{,}93\,\ddot{S}_{\overline{6}|i_p} = 2.040.000 + 20.000(1+i_p)^6 + 20.000 \;\Rightarrow\; i_p = 0{,}1347$$

$$220.045{,}93\,\ddot{S}_{\overline{6}|i_a} = 1.896.055{,}12 \;\Rightarrow\; i_a = 0{,}1044$$

Cuarta parte
EMPRESTITOS

IV.—EMPRESTITOS

IV.1.—INTRODUCCION

1.—Generalidades.
2.—Modalidades de empréstitos.
    2.1.—Modalidad a: Empréstitos con pago periódico de intereses pospagables o vencidos.
    2.2.—Modalidad b: Empréstitos con pago periódico de intereses prepagables o anticipados.
    2.3.—Modalidad c: Empréstitos con pago de intereses acumulados.
3.—El problema general de la amortización: Cuadros de amortización.
    3.1.—Método de capitalización de los residuos.
    3.2.—Método de redondeo de las amortizaciones teóricas.

IV.2.—EMPRESTITOS NORMALES O PUROS

4.—Empréstitos con pago periódico de intereses pospagable.
    4.1.—Empréstito normal tipo I.
    4.2.—Empréstito normal tipo II.
        4.2.1.—Anualidades variables en progresión geométrica.
        4.2.1.—Anualidades variables en progresión aritmética.
        4.2.3.—Amortización constante de títulos.
    4.3.—Empréstito normal tipo III.
5.—Empréstitos con pago periódico de intereses prepagables.
    5.1.—Empréstito normal tipo I.
    5.2.—Empréstito normal tipo II.
    5.3.—Empréstito normal tipo III.
6.—Empréstitos con abono de intereses acumulados.
    6.1.—Empréstito normal tipo I.
    6.2.—Empréstito normal tipo II.
    6.3.—Empréstito normal tipo III.

IV.3.—EMPRESTITOS CON CARACTERISTICAS COMERCIALES. TANTOS EFECTIVOS

7.—Características comerciales.
8.—Tantos efectivos. Tanto efectivo emisor, tanto efectivo obligacionista, tanto de rendimiento de una obligación.
9.—Empréstitos con características comerciales.
10.—Empréstitos con intereses pospagables amortizables con prima de amortización.
 10.1.—Empréstitos con prima de amortización constante y anualidad comercial constante.
 10.2.—Empréstito con prima de amortización constante y anualidad comercial variable.
 10.3.—Empréstito con prima de amortización constante y amortización del mismo número de títulos en cada año.
 10.4.—Empréstito con prima de amortización variable.
 10.5.—Empréstito con anualidad comercial constante y amortización seca o ex-cupón.
11.—Empréstitos con intereses pospagables y lotes.
 11.1.—Empréstito con anualidad comercial constante y lote constante.
 11.2.—Empréstito con anualidad comercial constante y lote variable.
12.—Empréstitos con intereses pospagables y gastos de administración.
13.—Empréstitos con intereses fraccionados pospagables y anualidad comercial constante.
14.—Empréstitos complejos con intereses pospagables.
15.—Empréstitos con intereses prepagables o anticipados.
16.—Empréstitos con pago de intereses acumulados.

IV.4.—EMPRESTITOS DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA OBLIGACION

17.—Los empréstitos como inversión de capital.
18.—Probabilidades de supervivencia y de amortización de una obligación.
19.—Rentabilidad esperada de una obligación.
20.—Vida media, vida mediana y vida financiera o matemática de una obligación.
 20.1.—Vida media.
 20.2.—Vida mediana.
 20.3.—Vida financiera.
21.—Cálculo de la vida media, vida mediana y vida financiera en el empréstito normal con anualidad constante.
 21.1.—Empréstito con intereses pospagables.
 21.2.—Empréstito con intereses prepagables.
 21.3.—Empréstito con intereses acumulados.
22.—Valor del empréstito. Valor de una obligación.
23.—Valor de una obligación, valor del usufructo y valor de la nuda propiedad en empréstitos con prima.
24.—Valor de una obligación, valor del usufructo y valor de la nuda propiedad en un empréstito con intereses fraccionados.

25.—Valor del empréstito y valor de una obligación en un empréstito con pago periódico de intereses anticipados.
26.—Valor del empréstito y valor de una obligación en un empréstito con pago de intereses acumulados.
27.—Cálculo del valor de una obligación, del valor del usufructo y del valor de la nuda propiedad en función de la vida media, vida mediana y vida financiera.
   27.1.—Empréstito con intereses pospagables.
   27.2.—Empréstito con intereses anticipados.
   27.3.—Empréstito con intereses acumulados.

IV.5.—LOS EMPRESTITOS Y LOS IMPUESTOS

28.—Efectos fiscales para la sociedad emisora de obligaciones.
   28.1.—Emisión de un empréstito.
   28.2.—Gastos derivados de la emisión de obligaciones.
   28.3.—Primas de emisión.
   28.4.—Intereses.
   28.5.—Primas de amortización.
   28.6.—Amortización o cancelación.
   28.7.—Amortización por conversión en otros títulos.
29.—Efectos fiscales para el inversor en obligaciones.
   29.1.—Adquisición de un título.
   29.2.—Intereses.
   29.3.—Primas y lotes.
   29.4.—Desgravación fiscal por adquisición de obligaciones.
30.—Empréstito con pago periódico de intereses pospagables.
   30.1.—Sociedad emisora del empréstito.
   30.2.—Suscritor en obligaciones.
      a) Empréstitos con una sola amortización.
      b) Empréstito con varias amortizaciones.
31.—Empréstito con pago de intereses acumulados.
   31.1.—Sociedad emisora del empréstito.
   31.2.—Suscritor en obligaciones.

IV.—EMPRESTITOS

IV.1.—INTRODUCCION

1.—GENERALIDADES

Es usual que con cierta periodicidad los Estados, Entidades públicas y sociedades privadas demanden préstamos de gran cuantía que les ayuden a hacer frente a sus necesidades de financiación.

Como **causas de los endeudamientos** dabe citar: a) los Estados, para cubrir déficits presupuestarios, retirar liquidez del mercado, etc.; b) las Entidades públicas para financiar proyectos de interés público, evitar situaciones de monopolio,...; c) las sociedades privadas (S. A) necesitan recurrir a endeudamientos como complemento y/o solución alternativa de ampliaciones de capital cuando la autofinanciación que generan es insuficiente.

Entre los **posibles prestamistas** se encuentran: a) las Entidades públicas; b) los intermediarios financieros bancarios (bancos, cajas de ahorro,...) y no bancarios (compañías de seguros, fondos de inversión, mutualidades, etc.); c) los inversores particulares.

Los enormes capitales que se demandan en préstamos hacen que sea difícil conseguirse en una sola operación y por ello es necesario proceder a dividir el macro-préstamo. Las causas que justifican la división del préstamo pueden ser debidas a los prestamistas y a los prestatarios.

Entre los motivos de división del préstamo debidos al prestatario se encuentran: dificultades de encontrar un solo prestamista con los medios monetarios para obtener el capital en mejores condiciones buscar la atracción del pequeño ahorro; etc.

El prestamista, si actúa con racionalidad, colocará su dinero en función de tres variables: seguridad, rentabilidad y liquidez. No deberá, en consecuencia, vincular sus activos en una o pocas operaciones que puedan suponer aumentar la inseguridad deseada y minorar su liquidez y aun a pesar de esperanzas de mayores rentabilidades.

Todo lo anterior justifica la **división de los préstamos voluminosos** que puede ser efectuada de distintas maneras, tales como: a) en préstamos elementales de igual o de distinta cuantía y con características análogas o no; b) en préstamos compuestos de igual o de distintas cuantías y/o características ya sean americanos, francés, términos variables, alemán, etc.

Si el deudor pretende actuar en el conjunto de las operaciones como si se tratase de una única se encontrará con graves problemas de agregación y, usualmente, se le exigirán tipos de interés mayores en las de más larga duración. Para salvar estos inconvenientes se propone la considerada **solución óptima** definida por los siguientes requisitos:

1) Se conciertan múltiples préstamos (americanos o elementales) de igual cuantía. Esta será pequeña para que el pequeño ahorrador tenga acceso a las operaciones.

2) Todas las operaciónes son de las mismas características y comportan idénticos derechos.

3) La duración será aleatoria equiprobable.

El título representativo de cada una de las operaciones recibe el nombre de **obligación** y el conjunto de los títulos **empréstito**. La fracción de capital que representa un título se llama **valor nominal** y puede o no coincidir con el precio a que se oferta denominado **valor o precio de emisión**. Si se designa por C al valor nominal de cada obligación y por N_1 al número de obligaciones que se crean, la cuantía del empréstito que se pone en circulación es: $C_0 = CN_1$.

Los **derechos de cada obligación** del empréstito son: 1) si los títulos son **préstamos americanos**, el tenedor percibe intereses periódicamente (calculados sobre el valor nominal) y, cuando corresponda, la cantidad que cancele la deuda, llamada **valor de reembolso** del título; 2) cuando los títulos son **préstamos elementales**, el poseedor del título tendrá derecho al valor de reembolso en el que estarán incluidos los intereses acumulados hasta el momento de la amortización.

Los títulos se amortizan según la distribución efectuada en el cuadro de amortización. Se amortiza un número entero de títulos, tantos como permita la cantidad destinada al reembolso, y su elección se realiza por sorteo.

El emisor procura que su oferta reúna los requisitos adecuados para ser aceptada por los suscriptores. Para este fin, intenta ofrecer la combinación de los parámetros valor de emisión, valor de reembolso y tipo de interés, que considera óptima, habida cuenta que sus condicionantes máximos son: el tanto efectivo pasivo o de coste que como máximo puede soportar y el tanto efectivo activo o de rendimiento que como mínimo exigen los obligacionistas.

Además de los empréstitos amortizables en los que la entidad emisora señala la duración máxima para el reembolso de las obligaciones existen emisiones en los que el emisor no señala plazo de amortización y se limita a pagar, por tiempo indefinido, los intereses pactados. Estos empréstitos pueden aparecer en ciertas emisiones de carácter público y reciben el nombre de Deuda Pública Perpetua. El Estado suele reservarse, en estas emisiones de duración indefinida, la facultad de amortizarlos por sorteo en un momento dado si así le conviene o convertirlos en amortizables pero estas prerrogativas deberán estar precisadas en el momento de la emisión. El estudio matemático de los empréstitos perpetuos no presenta ninguna dificultad por ser su contraprestación una renta perpetua cuya cuantía son los intereses del capital nominal emitido.

Desde un punto de vista técnico, los principales problemas que plantea la amortización de un empréstito son: cálculo del número de títulos que se amortizarán en cada año, de los importes a destinar a amortización, de los intereses, de las anualidades, y del número de títulos pendientes de amortización. Para realizar el estudio de los problemas enumerados se introducen las siguientes notaciones:

N_1 = número de obligaciones que se emiten.

C = valor nominal de una obligación.

$C_0 = CN_1$ = valor nominal del empréstito.

n = número de años que dura la emisión del empréstito.

N_s = número de títulos vivos, pendientes de amortización o en circulación al principio del año s. Para $s=1$ es N_1, número de los emitidos, y para $s=n+1$ resulta $N_{n+1}=0$.

M_s = número de títulos que se amortizan en el año s.

$\mathcal{M}_s = \sum_{r=1}^{s} M_r$ = número de títulos que se amortizan en los s primeros años.

C_s = valor de reembolso de las obligaciones que se amortizan en el año s.

a_s = anualidad correspondiente al año s.

2.—MODALIDADES DE EMPRESTITOS

Los empréstitos se suelen agrupar en tres modalidades según que la forma de devengo de sus intereses sea pospagable, prepagable o acumulada. Corresponde en este epígrafe introducir cada una de las formas.

2.1.—MODALIDAD a: EMPRESTITOS CON PAGO PERIODICO DE INTERESES POSPAGABLES O VENCIDOS

Conocidos también por los nombres de empréstitos con cupón vencido o con interés fijo vencido (mejor sería decir prefijado). En ellos cada título obligación es una operación de préstamo americano con duración aleatoria por lo que se tendrá una prestación inicial de cuantía C y una contraprestación formada por pagos periódicos Ci_s en concepto de intereses y abono del valor de reembolso pactado en el momento de su amortización.

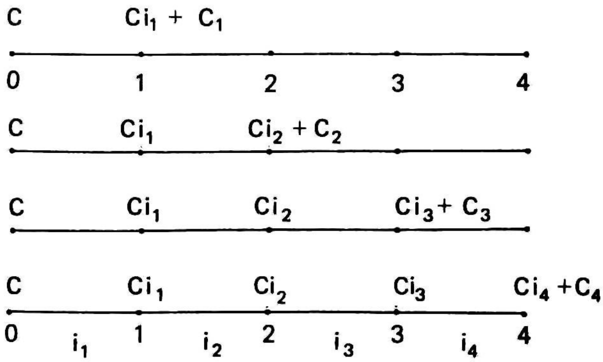
Si se considera una emisión de 4 años en los cuales se van a amortizar M_1, M_2, M_3 y M_4 títulos resulta:

M_1 operaciones como

M_2 operaciones como

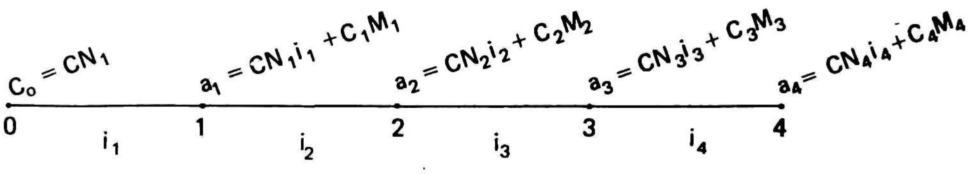
M_3 operaciones como

M_4 operaciones como



Cuando $C_s = C$ se dice que el empréstito es puro o normal.

La agregación de todas las $N_1 = M_1 + M_2 + M_3 + M_4$ operaciones dará lugar a la operación de empréstito contenida en:



que es idéntica a la de un préstamo de cuantía total C_0 y ecuación de equivalencias:

$$C_0 = CN_1 = \sum_{r=1}^{4} a_r \prod_{h=1}^{r} (1+i_h)^{-1}$$

cuando el empréstito es puro y con solución única si las anualidades siguen una determinada ley de formación. Calcular las restantes variables es análogo a como se efectúa en los préstamos.

Si se suponen conocidos C, N_1, i_s y las anualidades a_s, para calcular las restantes variables que intervienen puede procederse así:

a) Número de títulos amortizados en el año s, y número de títulos vivos o en circulación al principio del año s+1.

$$N_1$$

$$a_1 = CN_1 i_1 + C_1 M_1 \Rightarrow M_1 = \frac{a_1 - CN_1 i_1}{C_1} \Rightarrow N_2 = N_1 - M_1$$

$$a_2 = CN_2 i_2 + C_2 M_2 \Rightarrow M_2 = \frac{a_2 - CN_2 i_2}{C_2} \Rightarrow N_3 = N_2 - M_2$$

$$a_3 = CN_3 i_3 + C_3 M_3 \Rightarrow M_3 = \frac{a_3 - CN_3 i_3}{C_3} \Rightarrow N_4 = N_3 - M_3$$

$$a_4 = CN_4 i_4 + C_4 M_4 \Rightarrow M_4 = \frac{a_4 - CN_4 i_4}{C_4} = N_4$$

b) Títulos amortizados en los s primeros años

$$\mathcal{M}_s = N_1 - N_{s+1} = \mathcal{M}_{s-1} + M_s = \sum_{r=1}^{s} M_r \qquad s = 1, 2, 3, 4$$

c) Cuotas de intereses o cupones del año s

$$I_s = CN_s i_s = Ci_s \sum_{r=s}^{n} M_r \qquad s = 1, 2, 3, 4$$

Cuando se parte del conocimiento de M_1, M_2, M_3 y M_4, con $N_1 = \sum_{r=1}^{4} M_r$, en lugar de las anualidades se calculan las variables de la siguiente forma:

$$N_{s+1} = N_s - M_s = \sum_{r=s+1}^{n} M_r$$

$$\mathcal{M}_s = \mathcal{M}_{s-1} + M_s = \sum_{r=1}^{s} M_r \qquad s = 1, 2, 3, 4$$

$$I_s = CN_s i_s$$

$$a_s = CN_s i_s + CM_s$$

Ejemplo 1.—Determinar las distintas variables que intervienen en un empréstito cuyas características son:

- **Número de títulos emitidos: $N_1 = 20.000$.**
- **Nominal de cada título: $C = 1.000$ pts.**
- **Duración de la emisión: $n = 4$ años.**
- **Abono de un cupón anual vencido de 100 pts. en el primer año, de 110 pts. en el segundo, de 120 en el tercero y de 130 en el cuarto.**
- **Los valores de reembolso son: $C_1 = 1.000$; $C_2 = 1.010$; $C_3 = 1.025$ y $C_4 = 1.045$.**
- **La amortización de títulos prevista es: 3.000 en el primer año, 4.500 en el segundo, 6.000 en el tercero y 6.500 en el cuarto.**

Por aplicación de las anteriores relaciones se tiene:

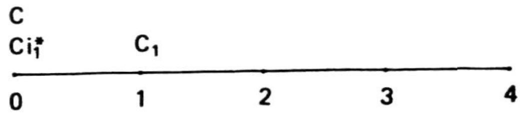
s	M_s	$N_s = N_{s-1} - M_s$	$\mathcal{M}_s = \mathcal{M}_{s-1} + M_s$	$I_s = Ci_s M_s$	$a_s = I_s + C_s M_s$
Origen	—	$N_1 = 20.000$	—	—	—
1	$M_1 = 3.000$	$N_2 = 17.000$	$\mathcal{M}_1 = 3.000$	$I_1 = 2.000.000$	$a_1 = 5.000.000$
2	$M_2 = 4.500$	$N_3 = 12.500$	$\mathcal{M}_2 = 7.500$	$I_2 = 1.870.000$	$a_2 = 6.415.000$
3	$M_3 = 6.000$	$N_4 = 6.500$	$\mathcal{M}_3 = 13.500$	$I_3 = 1.500.000$	$a_3 = 7.650.000$
4	$M_4 = 6.500$	—	$\mathcal{M}_4 = 20.000$	$I_4 = 84.500$	$a_4 = 7.637.500$

2.2.—MODALIDAD b: EMPRESTITOS CON PAGO PERIODICO DE INTERESES PREPAGABLES O ANTICIPADOS

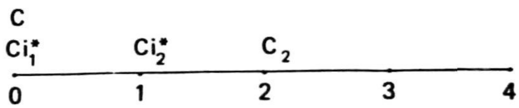
Cada título es una operación de amortización americana de duración aleatoria, con vencimiento de intereses al principio del período. Esta operación consiste en un desembolso inicial en concepto de prestación por una cuantía C y una contraprestación formada por unos cupones anticipados o prepagables en concepto de intereses hasta su amortización y en este momento, además, se abona el valor de reembolso C_s del título. Si $C_s = C$ se tiene el empréstito puro o normal.

Considerada una emisión de 4 años en los que se van a amortizar M_s títulos en el año s, se tiene:

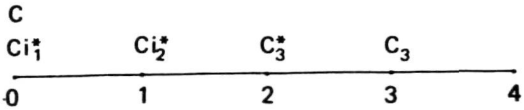
M_1 operaciones como



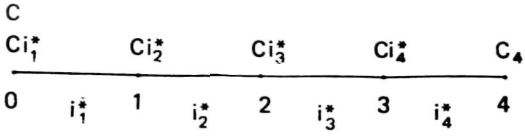
M_2 operaciones como



M_3 operaciones como

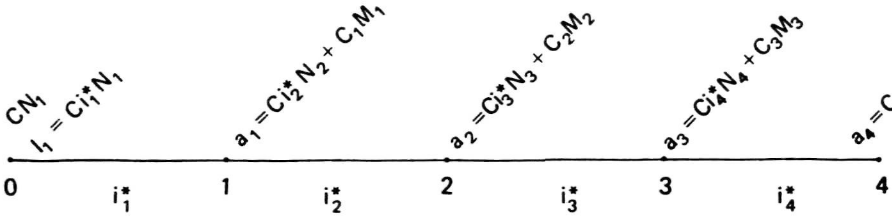


M_4 operaciones como



siendo i_s^* el rédito anticipado o de contracapitalización del período s.

La agregación de las $N_1 = M_1 + M_2 + M_3 + M_4$ operaciones da lugar a la operación de empréstito:



con ecuación de equilibrio, en el empréstito puro o normal:

$$CN_1 = Ci_1^* N_1 + \sum_{r=1}^{4} a_r \prod_{h=1}^{r} (1 - i_h^*)$$

que tendrá solución única si las anualidades siguen leyes de formación concretas. Esta ecuación es idéntica a la del préstamo sin más que sustituir C_0^* por CN_1.

Las cuantías de las cuotas de intereses y los títulos amortizados hasta s y vivos al principio del período s + 1 son:

$$I_s^* = Ci_s^* N_s \quad ; \quad \mathcal{M}_s = \mathcal{M}_{s-1} + M_s = \sum_{r=1}^{s} M_r \quad ;$$

$$N_{s+1} = N_1 - \mathcal{M}_s = \sum_{r=s+1}^{4} M_r$$

Ejemplo 2.—Calcular los valores de las variables de un empréstito con las siguientes características:

- **Número de títulos: $N_1 = 10.000$.**
- **Valor nominal: $C = 1.000$ pts.**
- **Duración de la emisión: $n = 5$ años.**
- **Abono de cupones anuales anticipados a rédito i_s^* en el año s con $i_1^* = i_2^* = 0{,}10$; $i_3^* = 0{,}11$; $i_4^* = i_5^* = 0{,}12$.**
- **El número de títulos a amortizar en los distintos años es: $M_1 = M_2 = M_3 = 2.000$; $M_4 = 2,500$ y $M_5 = 1.500$.**

Aplicando para $n = 5$ las relaciones correspondientes se tiene:

s	M_s	$N_s = N_{s-1} - M_s$	$\mathcal{M}_s = \mathcal{M}_{s-1} + M_s$	$I_s^* = Ci_s^* N_s$	$a_s = I_s^* + C_s M_s$
Origen	—	$N_1 = 10.000$	—	$I_1^* = 1.000.000$	$a_0 = 1.000.000$
1	$M_1 = 2.000$	$N_2 = 8.000$	$\mathcal{M}_1 = 2.000$	$I_2^* = 800.000$	$a_1 = 2.800.000$
2	$M_2 = 2.000$	$N_3 = 6.000$	$\mathcal{M}_2 = 4.000$	$I_3^* = 660.000$	$a_2 = 2.660.000$
3	$M_3 = 2.000$	$N_4 = 4.000$	$\mathcal{M}_3 = 6.000$	$I_4^* = 480.000$	$a_3 = 2.480.000$
4	$M_4 = 2.500$	$N_5 = 1.500$	$\mathcal{M}_4 = 8.500$	$I_5^* = 180.000$	$a_4 = 2.680.000$
5	$M_5 = 1.500$	—	$\mathcal{M}_5 = 10.000$	—	$a_5 = 1.500.000$

2.3.—MODALIDAD c: EMPRESTITOS CON PAGO DE INTERESES ACUMULADOS

Esta modalidad está integrada por títulos obligaciones que son préstamos elementales o amortizables mediante un solo pago y con duración aleatoria. La operación consiste en una prestación inicial C y una contraprestación única C_r en el momento de la amortización.

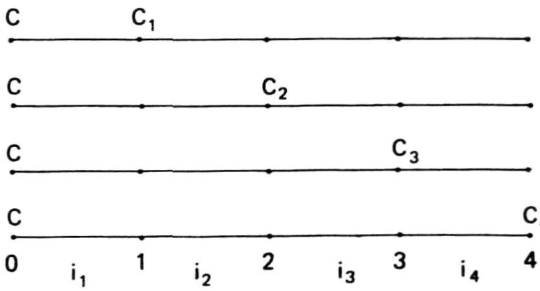
Para una emisión de 4 años de duración en los que se van a amortizar M_s títulos en el año s ($s = 1, 2, 3, 4$), si los réditos periodales son i_1, i_2, i_3, i_4, se tiene:

M_1 operaciones como

M_2 operaciones como

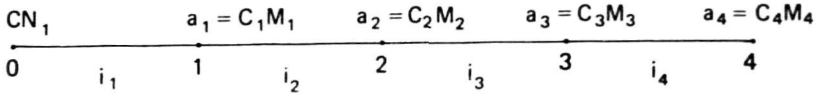
M_3 operaciones como

M_4 operaciones como



Cuando es $C_r = C \prod_{h=1}^{r} (1+i_h)$ el empréstito se denomina puro o normal.

La agregación de todas las N_1 operaciones genera el empréstito que es:



con ecuación de equivalencia, si $C_0 = C \prod_{h=1}^{s} (1+i_h)$:

$$CN_1 = \sum_{r=1}^{4} a_r \prod_{h=1}^{r} (1+i_h)$$

que es análoga a la de la modalidad **a**, pero con distinta estructura de anualidad.

Conocidos C, N_1, $i_s C_s$ y las anualidades a_s o la ley de formación que facilite su cálculo a través de la ecuación de equilibrio se determinarán las restantes variables mediante las expresiones:

$$M_s = \frac{a_s}{C_s} \quad ; \quad N_{s+1} = N_s - M_s = \sum_{r=1}^{s} M_r \quad ; \quad \mathcal{M}_s = \mathcal{M}_{s-1} + M_s = \sum_{r=1}^{s} M_r$$

Si se conocen previamente los M_s; en lugar de a_s, las fórmulas a utilizar serán:

$$N_{s+1} = N_s - M_s \quad ; \quad \mathcal{M}_s = \mathcal{M}_{s-1} + M_s \quad ; \quad a_s = C_s M_s$$

Ejemplo 3.—Se emite un empréstito puro con las siguientes características:

- **Número de títulos: $N_1 = 40.000$.**
- **Duración de la emisión: n = 5 años.**
- **Valor nominal de cada título: C = 1.000 pts.**
- **Amortización del mismo número de títulos en cada año.**
- **Tipo de interés concertado para el año s(s = 1, 2, 3, 4, 5): $i_1 = i_2 = 0{,}11$; $i_3 = 0{,}12$; $i_4 = i_5 = 0{,}13$.**

Los valores de cada una de las variables son:

$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = 8.000 = M$

$\mathcal{M}_1 = 8.000$; $\mathcal{M}_2 = 16.000$; $\mathcal{M}_3 = 24.000$; $\mathcal{M}_4 = 32.000$; $\mathcal{M}_5 = 40.000$

$N_1 = 40.000$; $N_2 = 32.000$; $N_3 = 24.000$; $N_4 = 16.000$; $N_5 = 8.000$

$$C_s = C \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h) \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1.110{,}00 \\ C_2 = 1.232{,}10 \\ C_3 = 1.379{,}95 \\ C_4 = 1.559{,}35 \\ C_5 = 1.762{,}06 \end{cases}$$

$$a_s = C_s M \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 8.880.000 \\ a_2 = 9.856.800 \\ a_3 = 11.039.600 \\ a_4 = 12.474.800 \\ a_5 = 14.096.480 \end{cases}$$

Para el estudio de los empréstitos se seguirá el siguiente orden:

1) Empréstitos normales o puros.

Son los que tienen la siguiente estructura de anualidad:

Modalidad a: $a_s = CN_s i_s + CM_s$

Modalidad b: $a_s = CN_{s+1} i^*_{s+1} + CM_s$

Modalidad c: $a_s = M_s C \prod_{h=1}^{s} (1+i_h)$

A efectos operativos se distinguen tres tipos básicos de empréstitos puros:

Tipo I: $a_s = a$; $i_s = i$
Tipo II: a_s variables ; $i_s = i$
Tipo III: a_s e i_s variables.

2) Empréstitos con características comerciales, no puros o no normales.

Son aquellos que contienen características o condiciones complementarias en forma análoga a lo analizado en los préstamos.

Nos referiremos a aquellos casos más frecuentes de los denominados normalizables o reducibles a estructura de normales.

3) Empréstitos desde el punto de vista de la obligación. Valor del empréstito y de una obligación.

Por ser cada título una operación aislada con duración aleatoria, el poseedor de una obligación y el posible comprador se enfrentan a problemas como el de determinar el tanto efectivo medio, valor medio de una obligación en el mercado, etc.

4) Los empréstitos y los impuestos.

Como la fiscalidad es elemento decisorio, para el emisor y para los inversores, se analizan sus efectos desde ambas perspectivas.

3.—EL PROBLEMA GENERAL DE LA AMORTIZACION: CUADROS DE AMORTIZACION

El proceso de amortización de un empréstito se recoge en los cuadros de amortización. Su lectura informa de las obligaciones vivas, de las que se amortizan, de las cuotas de intereses o cupones, etc.

La estructura de los cuadros de amortización es análoga a la de un préstamo si bien contiene sus propias peculiaridades.

Es usual considerar como datos el número de títulos que se emiten, el valor nominal de cada título, la duración de la operación, los réditos periodales, la forma de devengo de los intereses (pospagables, prepagables o acumulados), el valor de reembolso y

— el número de títulos que se amortizarán en cada período o
— la ley de formación que siguen las anualidades.

El primero de los supuestos no plantea ninguna dificultad, pues a partir del conocimiento de los M_s se sigue el de las restantes columnas del cuadro de amortización. En el caso de un empréstito normal se tienen como columnas comunes a las tres modalidades:

$$M_s \Rightarrow \mathscr{M}_s = M_{s-1} + M_s \quad ; \quad N_{s+1} = N_s - M_s$$

y específicas:

— Modalidad a: $A_s = CM_s \quad ; \quad I_s = CN_s i_s \quad ; \quad a_s = I_s + A_s$

— Modalidad b: $A_s^* = CM_s \quad ; \quad I_s^* = CN_s i_s^* \quad ; \quad a_s = I_{s+1}^* + A_s$

— Modalidad c: $C_s = C \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h) \quad ; \quad a_s = C_s M_s$

Cuando se conocen las anualidades que amortizan el empréstito con estructura

$$a_s = CN_s i_s + C_s M_s \quad ; \quad a_s = CN_{s+1} i_{s+1}^* + C_s M_s \quad ; \quad a_s = C_s M_s$$

el número de títulos que se amortizan en s

$$M_s = \frac{a_s - CN_s i_s}{C_s} \quad ; \quad M_s = \frac{a_s - CN_{s+1} i_{s+1}^*}{C_s} \quad ; \quad M_s = \frac{a_s}{C_s}$$

generalmente no es un número entero, siendo preciso redondear el valor obtenido al entero más próximo bien por defecto, bien por exceso. Si la aproximación es por defecto queda un residuo de la anualidad que no puede ser dedicado a la amortización y cuando el redondeo es por exceso se utiliza una anualidad superior a la calculada rompiéndose en ambos casos las anualidades teóricas.

Para calcular, a partir de los valores teóricos, el número de obligaciones efectivas amortizadas suele seguirse uno de los dos métodos siguientes: a) capitalización de los residuos; b) redondeo de las amortizaciones teóricas. Haremos alusión de ambos métodos con referencia a la modalidad de empréstitos americanos con pago de intereses pospagables si bien los resultados son generalizables a las modalidades a y b; asimismo, y por comodidad se supondrá el empréstito normal.

3.1.—METODO DE CAPITALIZACION DE LOS RESIDUOS

Para determinar el número de obligaciones que se amortizarán el primer año se restan de la primera anualidad los intereses y la diferencia se divide por el nominal de una obligación, es decir, es $M_1 = \frac{a_1 - CN_1 i_1}{C}$; el número de obligaciones a amortizar será igual a la parte entera de M_1. Al excedente en pesetas que resulta se le abona el mismo interés que el del empréstito y este importe se suma a la segunda anualidad teórica, formándose la anualidad disponible del segundo año en el que se volverán a reproducir las operaciones indicadas y así sucesivamente hasta el último año del empréstito en el que ya no existirá ningún residuo.

Ejemplo 1.—Calcular el cuadro de amortización de un empréstito emitido con las siguientes características:

- **Número de títulos: $N_1 = 30.000$.**
- **Valor nominal: $C = 1.000$ pts.**
- **Duración de la emisión: $n = 4$ años.**
- **Abono de cupones pospagables a rédito $i_1 = i_2 = 0,10$, en el primero y segundo año, $i_3 = 0,11$ en el tercero e $i_4 = 0,12$ en el cuarto.**
- **Amortización de los títulos por el valor nominal.**
- **Las anualidades siguen la siguiente ley: $a_1 = a_2 = a$; $a_3 = a_4 = a + 500.000$.**

Se procede a calcular las anualidades teóricas en la ecuación de equivalencia:

$$CN_1 = \sum_{r=1}^{4} a_r \prod_{h=1}^{r} (1+i_h)^{-1} \Rightarrow 1.000 \times 30.000 = a[(1+0,11)^{-1} + (1+0,11)^{-2}] +$$

$$+ (a + 500.000)(1+0,10)^{-2}[(1+0,11)^{-1} + (1+0,11)^{-1}(1+0,12)^{-1}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 9.315.317,75 \text{ pts.} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = 9.315.317,75 \\ a_3 = a_4 = 9.815.317,75 \end{cases}$$

De la primera anualidad a_1 se deduce la primera cuota de intereses $I_1 = CN_1 i_1 = 3.000.000$ y queda disponible para amortizar $A_1 = a_1 - I_1 = 6.315.317,75$; pero como los títulos son de 1.000 pts. pueden amortizar realmente 6.315 títulos quedando un residuo $R_1 = 317,75$ que será acumulado con sus intereses a la anualidad del segundo año.

En el segundo año se dispone de $a'_2 = a_2 + R_1(1+i_2) = 9.315.667,27$ para atender a los intereses $I_2 = CN_2 i_2 = 2.368.500$ y quedar como amortización posible $A_2 = 6.947.167,27$, pero realmente se pueden liquidar 6.947 títulos y queda un residuo $R_2 = 167,27$ que se acumula al tercer año con sus intereses.

Continuando el proceso se obtiene el cuadro que se especifica en la página 180 en el que se han subrayado en negrilla las columnas reales.

3.2.—METODO DE REDONDEO DE LAS AMORTIZACIONES TEORICAS

Este método es el más utilizado en la práctica y consiste en tomar redondeado por defecto el número teórico M_s de obligaciones que corresponde amortizar en cada sorteo. Representando este número por M'_s se verificará $\sum_{s=1}^{n} M'_s = X < N_1$ por lo que, para compensar esta diferencia, se aumentará en una obligación los $N_1 - X$ sumandos M'_s cuya parte decimal despreciada era la más alta.

Una vez determinada la columna de las M_s reales se obtienen las restantes columnas del cuadro de amortización aplicando el procedimiento descrito cuando se conoce el número de títulos que se amortizarán en cada período.

Ejemplo 2.—Calcular por el método de redondeo de las amortizaciones teóricas el cuadro de amortización correspondiente al ejercicio 3.1.

CUADRO DE AMORTIZACION POR EL METODO DE CAPITALIZACION DE LOS RESIDUOS

Años	Anualidad		Intereses o cupones	Amortización		Residuo	Residuo e interés	Títulos amortizados en el año	Total títulos amortizados	Títulos vivos o en circulación	Saldo o reserva
	Disponible	Efectiva real o práctica		Teórica	Práctica						
s	$a'_s = a_s + R_{s-1}(1+i_s)$	$CN_s i_s + CM_s$	$I_s = CN_s i_s$	$A_s = a'_s - I_s$	CM_s	$R_s = A_s - CM_s$	$R_s(1+i_{s+1})$	M_s	m_s	N_{s+1}	CN_{s+1}
Origen	—	—	—	—	—	—	—	—	—	30.000	30.000.000
1	9.315.317,75	9.315.000	3.000.000	6.315.317,75	6.315.000	317,75	349,53	6.315	6.315	23.685	23.685.000
2	9.315.667,27	9.315.500	2.368.500	6.947.167,27	6.947.000	167,27	185,68	6.947	13.262	16.738	16.738.000
3	9.815.503,42	9.815.180	1.841.180	7.974.323,42	7.974.000	232,42	362,24	7.974	21.236	8.764	8.764.000
4	9.815.680,00	9.815.680	1.051.680	8.764.000,00	8.764.000	—	—	8.764	30.000	0.000	0.000.000

CUADRO DE AMORTIZACION POR EL METODO DE REDONDEO DE LAS AMORTIZACIONES TEORICAS

Años	Anualidad práctica	Intereses	Amortización	Títulos amortizados en el año	Total títulos amortizados	Títulos vivos o en circulación	Saldo o reserva
s	$CN_s i_s + CM_s$	$I_s = CN_s i_s$	CM_s	M_s	m_s	N_{s+1}	CN_{s+1}
Origen	—	—	—	—	—	30.000	30.000.000
1	9.315.000	3.000.000	6.315.000	6.315	6.315	23.685	23.685.000
2	9.315.500	2.368.500	6.947.000	6.947	13.262	16.738	16.738.000
3	9.815.180	1.841.180	7.974.000	7.974	21.236	8.764	8.764.000
4	9.815.680	1.051.680	8.764.000	8.764	30.000	0.000	0.000.000

Se procede a calcular la amortización teórica de obligaciones siguiendo el esquema:

$$M_1 = \frac{a_1 - CN_1 i_1}{C} = 6.315,32 \qquad N_2 = 23.684,68$$

$$M_2 = \frac{a_2 - CN_2 i_2}{C} = 6.946,85 \qquad N_3 = 16.737,83$$

$$M_3 = \frac{a_3 - CN_3 i_3}{C} = 7.974,16 \qquad N_4 = 8.763,67$$

$$M_4 = \frac{a_4 - CN_4 i_4}{C} = 8.763,67$$

La suma de las partes enteras de M_s es:

$$M'_1 + M'_2 + M'_3 + M'_4 = 6.315 + 6.946 + 7.974 + 8.763 = 29.998 < 30.000$$

por lo que para compensar esta diferencia se procede a aumentar en un título M'_2 y M'_4. La amortización real resulta:

$$M_1 = 6.315 \quad ; \quad M_2 = 6.947 \quad ; \quad M_3 = 7.974 \quad ; \quad M_4 = 8.764$$

El cuadro de amortización se recoge en la página 180.

IV.2.—EMPRESTITOS NORMALES O PUROS

Con esta denominación se designa a aquellos empréstitos en los que las anualidades que lo amortizan tienen por finalidad exclusiva devolver el capital prestado junto con sus intereses, es decir, tienen la estructura:

Modalidad a: $a_s = CN_s i_s + CM_s$

Modalidad b: $a_s = CN_{s+1} i^*_{s+1} + CM_{s+1}$

Modalidad c: $a_s = C_s M_s$, con $C_s = C \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h)$

Al efectuar hipótesis sobre la ley de variación de la a_r, de los i_r o de ambos surgirán distintos tipos de empréstitos dentro de cada modalidad.

4.—EMPRESTITOS CON PAGO PERIODICO DE INTERESES POSPAGABLES

Están formados por títulos que representan operaciones de préstamo americano con duración aleatoria.

4.1.—EMPRESTITO NORMAL TIPO I

Con esta denominación se designa al empréstito que satisface la doble condición:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$$
$$i_1 = i_2 = \cdots = i_n = i$$

La estructura de la anualidad $a = CN_r i + CM_r$ resalta su doble finalidad: pagar los intereses o cupones de los títulos en circulación a principio del período y amortizar por el nominal o a la par a un grupo de ellos.

La operación se representa por:

CN_1		a		$a \ldots\ldots a$		a		$a \ldots\ldots a$		a
0	i	1	i	$2 \ldots\ldots s-1$	i	s	i	$s+1 \ldots\ldots n-1$	i	h

De la equivalencia financiera inicial

$$CN_1 = a\, \mathbf{a}_{\overline{n|}i} \tag{1}$$

se sigue la expresión de la anualidad constante

$$a = \frac{CN_1}{\mathbf{a}_{\overline{n|}i}} = CN_1\, \mathbf{a}_{\overline{n|}i}^{-1} \tag{2}$$

La reserva al principio del año $s+1$ por el método prospectivo

$$CN_{s+1} = a\, \mathbf{a}_{\overline{n-s|}i} = CN_1 \frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s|}i}}{\mathbf{a}_{\overline{n|}i}} \tag{3}$$

conduce a obtener el número de títulos vivos en función de los emitidos

$$N_{s+1} = N_1 \frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s|}i}}{\mathbf{a}_{\overline{n|}i}} \tag{4}$$

Por recurrencia, la reserva queda expresada por:

$$CN_{s+1} = CN_s(1+i) - a \tag{5}$$

de la que se sigue

$$a = CN_{s+1} i + C(N_s - N_{s+1}) = CN_{s+1} i + CM_s$$

Tomando (5) para dos períodos consecutivos se tiene al restar:

$$C(N_{s+1} - N_{s+2}) = C(N_s - N_{s+1})(1+i) \Rightarrow CM_{s+1} = CM_s(1+i) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M_{s+1} = M_s(1+i) = M_1(1+i)^s \tag{6}$$

con

$$M_1 = \frac{a - CN_1 i}{C} = \frac{\dfrac{CN_1}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i}} - CN_1 i}{C} = \frac{N_1}{S_{\overline{n}|i}} \tag{7}$$

El número de títulos amortizados en los s primeros años es:

$$\mathcal{M}_s = N_1 - N_{s+1} = N_1 \left(1 - \frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i}}\right) = N_1 \frac{S_{\overline{s}|i}}{S_{\overline{n}|i}} \tag{8}$$

Otras relaciones notables son:

$$N_{s+1} = N_s - M_s = \sum_{r=s+1}^{n} M_r \tag{9}$$

$$\mathcal{M}_s = \mathcal{M}_{s-1} + M_s = \sum_{r=1}^{n} M_r \tag{10}$$

$$I_s = CN_s i = a - CM_s = a[1 - (1+i)^{-(n-s)}] \tag{11}$$

Ejemplo 1.—En un empréstito normal con las siguientes características:

— **Número de títulos emitidos: 60.000.**

— **Valor nominal de cada título: 5.000 pts.**

— **Duración de la emisión: 10 años.**

— **Abono de un cupón anual vencido de 600 pts.**

— **Amortización mediante anualidades constantes.**

Determinar: 1) Cuantía de la anualidad constante; 2) Número en títulos que se amortizan en el quinto año; 3) Idem en los siete primeros años; 4) Cuantía de los cupones pagados en el sexto año.

Haciendo uso de las fórmulas (2), (6), (7), (8) y (11) se tiene:

$$a = CN_1 \mathbf{a}_{\overline{n}|i}^{-1} = 5.000 \times 60.000 \, \mathbf{a}_{\overline{10}|0.12}^{-1} = 53.095.249$$

$$M_5 = M_1 (1+i)^4 = N \frac{(1+i)^4}{S_{\overline{10}|i}} = 60.000 \frac{(1+0{,}12)^4}{S_{\overline{10}|0.12}} = 5.379{,}94 \simeq 5.380$$

$$\mathcal{M}_7 = N_1 I \frac{S_{\overline{7}|i}}{S_{\overline{10}|i}} = 60.000 \frac{S_{\overline{7}|0.12}}{S_{\overline{10}|0.12}} = 34.494{,}83$$

$$I_6 = a[1 - (1+0{,}12)^{-4}] = 19.352.258{,}38$$

4.2.—EMPRESTITO NORMAL TIPO II

Comprende los empréstitos amortizables con anualidades variables y réditos constantes interesando entre los posibles casos de variación: progresión geométrica, progresión aritmética. Asimismo, cae dentro de este grupo el supuesto de amortización del mismo número de títulos en cada año.

4.2.1.—Anualidades variables en progresión geométrica

Designando por $a_1=a$ a la primera anualidad, por q a la razón de variación de la progresión y por $a_s=a_{s-1}q=a\cdot q^{s-1}$ a la anualidad que vence en el año s se tiene:

— Equivalencia inicial y anualidad primera

$$CN_1=A_{(a;\,q)\overline{n|}i}=a\ \frac{1-(1+i)^{-n}\cdot q^n}{1+i-q} \tag{12}$$

$$a=CN_1\ \frac{1+i-q}{1-(1+i)^{-n}\cdot q^n} \tag{13}$$

— Reserva o saldo al principio del año $s+1$

$$CN_{s+1}=CN_s(1+i)-a_s \tag{14}$$

expresión que tomada para dos períodos consecutivos permite escribir

$$C(N_{s+1}-N_{s+2})=C(N_s-N_{s+1})(1+i)+a_{s+1}-a_s\ \Rightarrow\ \mathbf{M}_{s+1}=\mathbf{M}_s(1+i)+\frac{a_{s+1}-a_s}{C} \tag{15}$$

con $M_1=\dfrac{a_1-CN_1 i}{C}$.

Las restantes relaciones coinciden con las expresadas por (9), (10) y (11) con la salvedad de tratarse de anualidades variables en progresión geométrica.

4.2.2.—Anualidades variables en progresión aritmética

Siendo $a_1=a$ la primera anualidad, d de la razón de variación y $a_s=a_{s-1}+d=a+(s-1)d$ el término general resulta:

— Equivalencia inicial y anualidad primera

$$CN_1=A_{(a;\,d)\overline{n|}i}=\left(a+\frac{d}{i}+dn\right)\mathbf{a}_{\overline{n|}i}-\frac{dn}{i} \tag{16}$$

$$a=\frac{CN_1+\dfrac{dn}{i}}{\mathbf{a}_{\overline{n|}i}}-\frac{d}{i}-dn \tag{17}$$

— Reserva o saldo

$$CN_{s+1}=CN_s(1+i)-a_s$$

y se sigue:

$$C(N_{s+1}-N_{s+2})=C(N_s-N_{s+1})(1+i)+(a_{s+1}-a_s) \Rightarrow M_{s+1}=M_s(1+i)+\frac{d}{C} \tag{18}$$

El cálculo de las demás variables es análogo al de 4.2.1.

4.2.3.—Amortización constante de títulos

Se caracteriza por ser $M_1=M_2=\cdots=M_n=\frac{N_1}{n}$ lo que conduce a obtener de manera inmediata:

$$\mathcal{M}_s=\mathcal{M}_{s-1}+\frac{N_1}{n}=s\frac{N_1}{n} \quad ; \quad N_{s+1}=N_s-\frac{N_1}{n}=(n-s)\frac{N_1}{n} \tag{19}$$

Además, se verifica que:

$$a_s=CN_si+C\frac{N_1}{n}=a_{s-1}-C\frac{N_1}{n}i=a_1-(s-1)C\frac{N_1}{n}i \tag{20}$$

es decir, se trata de un caso particular de 4.2.2.

Por último se tiene:

$$I_s=a_s-C\frac{N_1}{n}=\left(a_{s-1}-C\frac{N_1}{n}i\right)-C\frac{N_1}{n}=I_{s-1}-C\frac{N_1}{n}i \tag{21}$$

Ejemplo 2.—Calcular el cuadro de amortización, por el método de redondeo, del empréstito con las características:

- **Número de títulos: 30.000.**
- **Nominal de cada título: 1.000.**
- **Amortización por el nominal.**
- **Duración de la emisión: 5 años.**
- **Abono de un cupón anual de 120 pts. por obligación**

en los supuestos de amortización: 1) Anualidades constantes; 2) Anualidades variables en progresión geométrica de razón $q=1{,}08$; 3) Anualidades variables en progresión aritmética de razón $d=100.000$; 4) Amortización del mismo número de títulos en cada año.

1) Anualidades constantes.

Las fórmulas (2), (7) y (6) dan los resultados:

$$a=\frac{1.000\times 30.000}{a_{\overline{5}|0.12}}=8.322.291{,}98 \quad ;$$

$$M_1=\frac{a-CN_1i}{C}=4.722{,}29 \quad ; \quad M_s=M_{s-1}(1+0{,}12)$$

generando de forma inmediata la amortización teórica y real de títulos. Estas son:

Amortización teórica	**Amortización real o redondeada**
$M_1 = 4.722,29$	$M_1 = 4.722$
$M_2 = 5.288,97$	$M_2 = 5.289$
$M_3 = 5.923,64$	$M_3 = 5.924$
$M_4 = 6.634,48$	$M_4 = 6.634$
$M_5 = 7.430,62$	$M_5 = 7.431$

Procediendo como en 3.2 se calcula el cuadro de amortización siguiente:

Años s	Anualidad $a_s = I_s + A_s$	Intereses $I_s = CN_{s+1}i$	Amortización $A_s = CM_s$	Títulos amortizados en el año M_s	Total títulos amortizados $\mathcal{M}_s$	Títulos vivos o en circulación N_{s+1}
Origen	—	—	—	—	—	30.000
1	8.322.000	3.600.000	4.722.000	4.722	4.722	25.278
2	8.322.360	3.033.360	5.289.000	5.289	10.011	19.989
3	8.322.680	2.398.680	5.924.000	5.924	15.935	14.065
4	8.321.800	1.687.800	6.634.000	6.634	22.569	7.431
5	8.322.720	891.720	7.431.000	7.431	30.000	0

2) Anualidades variables en progresión geométrica de razón $q = 1,08$.

Por aplicación de las fórmulas (13) y (15) se tiene:

$$a_1 = a = 30.000.000 \, \frac{1 + 0,12 - 1,08}{1 - (1 + 0,12)^{-5} \cdot 1,08^5} = 7.217.446,49 \quad ; \quad a_s = 1,08 \, a_{s-1}$$

$$M_1 = \frac{7.217.446,49 - 3.600.000}{1.000} = 3.617,45 \quad ; \quad M_{s+1} = M_s(1 + 0,12) + \frac{a_{s+1} - a_s}{1.000}$$

La amortización teórica y real o redondeada es:

Amortización teórica	**Amortización real**
$M_1 = 3.617,45$	$M_1 = 3.618$
$M_2 = 4.628,94$	$M_2 = 4.629$
$M_3 = 5.808,00$	$M_3 = 5.808$
$M_4 = 7.178,43$	$M_4 = 7.178$
$M_5 = 8.767,19$	$M_5 = 8.767$

Resulta el cuadro de amortización

Años s	Anualidad $a_s = I_s + A_s$	Intereses $I_s = CN_s i$	Amortización $A_s = CM_s$	Títulos amortizados en el año M_s	Total títulos amortizados $\mathcal{M}_s$	Títulos vivos N_{s+1}
Origen	—	—	—	—	—	30.000
1	7.218.000	3.600.000	3.618.000	3.618	3.618	26.382
2	7.794.840	3.165.840	4.629.000	4.629	8.247	21.753
3	8.418.360	2.610.360	5.808.000	5.808	14.055	15.945
4	9.091.400	1.913.400	7.178.000	7.178	21.233	8.767
5	9.819.040	1.052.040	8.767.000	8.767	30.000	0

3) Anualidades variables en progresión geométrica de razón d = 100.000.

Las fórmulas (17) y (18) proporcionan los valores:

$$a_1 = a = \frac{30.000.000 + \dfrac{500.000}{0{,}12}}{\mathbf{a}_{\overline{5}|0.12}} - \frac{100.000}{0{,}12} - 500.000 = 8.144.832{,}53$$

$$M_{s+1} = M_s(1+0{,}12) + 100 \qquad \text{con} \qquad M_1 = 4.544{,}83$$

Los demás números teóricos de amortización son:

$$M_2 = 5.190{,}21 \quad ; \quad M_3 = 5.913{,}04 \quad ; \quad M_4 = 6.722{,}60 \quad ; \quad M_5 = 7.629{,}31$$

y los redondeados o reales:

$$M_1 = 4.545 \quad ; \quad M_2 = 5.190 \quad ; \quad M_3 = 5.913 \quad ; \quad M_4 = 6.723 \quad ; \quad M_5 = 7.629$$

El cuadro de amortización es:

Años s	Anualidad $a_s = I_s + A_s$	Intereses $I_s = CN_s i$	Amortización $A_s = CM_s$	Títulos amortizados en el año M_s	Total títulos amortizados $\mathcal{M}_s$	Títulos vivos N_{s+1}
Origen	—	—	—	—	—	30.000
1	8.145.000	3.600.000	4.545.000	4.545	4.545	25.455
2	8.244.600	3.054.600	5.190.000	5.190	9.735	20.265
3	8.344.800	2.431.800	5.913.000	5.913	15.648	14.352
4	8.445.240	1.722.240	6.723.000	6.723	22.371	7.629
5	8.544.480	915.480	7.629.000	7.629	30.000	0

4) Amortización del mismo número de títulos en cada año.

Las fórmulas (19), (20) y (21) y el método general seguido en cuadros anteriores proporcionan el siguiente cuadro:

Años s	Anualidad $a_s = I_s + A_s$	Intereses $I_s = CN_s i$	Amortización $A_s = CM_s$	Títulos amortizados en el año M_s	Total títulos amortizados $\mathcal{M}_s$	Títulos vivos N_{s+1}
Origen	—	—	—	—	—	30.000
1	9.600.000	3.600.000	6.000.000	6.000	6.000	24.000
2	8.880.000	2.880.000	6.000.000	6.000	12.000	18.000
3	8.160.000	2.160.000	6.000.000	6.000	18.000	12.000
4	7.440.000	1.440.000	6.000.000	6.000	24.000	6.000
5	6.720.000	720.000	6.000.000	6.000	30.000	0

4.3.—EMPRESTITO NORMAL TIPO III

Se trata del caso general de empréstito con anualidades y réditos variables cuya estructura de anualidad $a_r = CN_r i_r + CM_r$ comprende como casos particulares los tipos I y II.

En la práctica no es normal que las anualidades y los tipos de interés sean distintos en todos los años y lo que suele ocurrir en la emisión es la no constancia de anualidades y tipos de interés por grupos de años. Por ello, a título indicativo para resaltar la forma de razonar, se plantea el empréstito del esquema:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
CN_1 & & a_1 & & a_1 & & a_1 & & a_2 & & a_2 & & a_2 & & a_3 & & a_3 & & a_3 & & a_3 \\
\hline
0 & i_1 & 1 & i_1 & 2 & i_1 & 3 & i_1 & 4 & i_1 & 5 & i_2 & 6 & i_2 & 7 & i_2 & 8 & i_2 & 9 & i_2 & 10
\end{array}$$

con $a_1 = a$; $a_2 = a + h$; $a_3 = a + h + k$.

— Equivalencia financiera en el origen

$$CN_1 = a_1\, \mathbf{a}_{\overline{3}|i_1} + a_2[{}^3/\mathbf{a}_{\overline{2}|i_1} + (1+i_1)^{-5}(1+i_2)^{-1}] + a_3\, {}^1/\mathbf{a}_{\overline{4}|i_2}(1+i)^{-5} =$$
$$= a[\mathbf{a}_{\overline{5}|i_1} + (1+i_1)^{-5}\, \mathbf{a}_{\overline{5}|i_2}] + h[{}^3/\mathbf{a}_{\overline{2}|i_1} + (1+i)^{-5}\, \mathbf{a}_{\overline{5}|i_2}] + k(1+i_1)^{-5}\, {}^1/\mathbf{a}_{\overline{4}|i_2}$$

equivalencia que junto con las relaciones que guardan las a_s permite obtener éstas.

— Reserva al principio del año s para s=3, 6, 8:

$$s=3: \quad CN_3=CN_1(1+i_1)^2-a_1 S_{\overline{2}|i_1}$$
$$s=6: \quad CN_6=a_2(1+i_2)^{-1}+a_3\ {}^1/\mathbf{a}_{\overline{4}|i_2}$$
$$s=8: \quad CN_8=a_3\ \mathbf{a}_{\overline{3}|i_2}$$

— Amortización de títulos en el año s:

$$M_1=\frac{a_1-CN_1 i_1}{C} \quad ; \quad M_2=M_1(1+i_1) \quad ; \quad M_3=M_2(1+i_1)$$

$$M_4=M_3(1+i_1)+\frac{h}{C} \quad ; \quad M_5=M_4(1+i_2)$$

$$M_6=M_5(1+i_2)-N_5(i_2-i_1) \quad ; \quad M_7=M_6(1+i_2)+\frac{k}{C}$$

$$M_8=M_7(1+i_2) \quad ; \quad M_9=M_8(1+i_2) \quad ; \quad M_{10}=M_9(1+i_2)$$

ya que:

$$\left.\begin{array}{l} a_2=CN_4 i_1+CM_4 \\ a_1=CN_3 i+CM_3 \end{array}\right\} \Rightarrow a_2-a_1=h=-Ci_1(N_3-N_4)+CM_4-CM_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_4=M_3(1+i_1)+\frac{h}{C}$$

$$a_2=CN_5 i_1+CM_5=CN_6 i_2+CM_6 \Rightarrow M_6=M_5+N_5 i_1-N_6 i_2=M_5(1+i_2)-N_5(i_2-i_1)$$

El cálculo de M_7 es análogo al de M_4.

Ejemplo 3.—Calcular por el método de redondeo, el cuadro de amortización del empréstito formado por:

- **Número de títulos: 40.000.**
- **Nominal de cada título: 10.000.**
- **Duración de la emisión: 6 años.**
- **Tipo de interés de pago de cupones: $i_1=i_2=0{,}11$; $i_3=i_4=0{,}12$; $i_5=i_6=0{,}135$.**
- **Amortización por el nominal.**
- **Las anualidades que amortizan el empréstito satisfacen la siguiente relación:**

$$\mathbf{a_1=a_2=a \quad ; \quad a_3=a_4=1{,}5a \quad ; \quad a_5=a_6=2a}$$

De la ecuación de equivalencia

$$CN_1=400.000.000=a[\mathbf{a}_{\overline{2}|i_1}+1{,}5(1+i_1)^{-2}\,\mathbf{a}_{\overline{2}|i_2}+2(1+i_1)^{-2}(1+i_2)^{-2}\,\mathbf{a}_{\overline{2}|i_3}]=$$
$$=a[\mathbf{a}_{\overline{2}|0{,}11}+1{,}5(1+0{,}11)^{-2}\,\mathbf{a}_{\overline{2}|0{,}12}+2(1+0{,}11)^{-2}(1+0{,}12)^{-2}\,\mathbf{a}_{\overline{2}|0{,}135}]=5{,}914687069a$$

se sigue:

$$a_1 = a_2 = 67.628.260{,}85 \quad ; \quad a_3 = a_4 = 101.442.391{,}20 \quad ; \quad a_5 = a_6 = 135.256.521{,}70$$

Para calcular la amortización teórica de títulos se procede así:

$$M_1 = \frac{a - CN_1 i_1}{C} = 2.362{,}83 \quad ; \quad M_2 = M_1(1 + i_2) = 6.622{,}74 \quad ; \quad N_3 = 35.014{,}44$$

$$M_3 = \frac{1{,}5a - CN_3 i_3}{C} = 5.942{,}51 \quad ; \quad M_4 = M_3(1 + i_4) = 6.655{,}61 \quad ; \quad N_5 = 22.416{,}32$$

$$M_5 = \frac{2a - CN_5 i_5}{C} = 10.499{,}45 \quad ; \quad M_6 = M_5(1 + i_6) = 11.916{,}88$$

al ser la suma de las partes enteras 39.996 se procede a redondear por exceso M_1, M_2, M_4 y M_6.

Siguiendo el mismo proceso que en supuestos anteriores se obtiene:

Años s	Anualidad $a_s = I_s + A_s$	Intereses $I_s = CN_s i_s$	Amortización $A_s = CM_s$	Títulos amortizados en el año M_s	Total títulos amortizados $\mathcal{M}_s$	Títulos vivos N_{s+1}
Origen	—	—	—	—	—	40.000
1	67.630.000	44.000.000	23.630.000	2.363	2.363	37.637
2	67.630.700	41.400.700	26.230.000	2.623	4.986	35.014
3	101.436.800	42.016.800	59.420.000	5.942	10.928	29.072
4	101.446.400	34.886.400	66.560.000	6.656	17.584	22.416
5	135.251.600	30.261.600	104.990.000	10.499	28.083	11.917
6	135.257.950	16.087.950	119.170.000	11.917	40.000	0

5.—EMPRESTITOS CON PAGO PERIODICO DE INTERESES PREPAGABLES

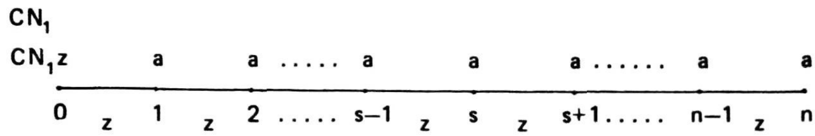
5.1.—EMPRESTITO NORMAL TIPO I

Comprende el caso particular de empréstito normal definido por:

$$i_1^* = i_2^* = \cdots = i_n^* = z$$

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$$

por lo que se amortiza mediante una renta constante, quedando reflejada la operación en:



De la equivalencia financiera en el origen

$$CN_1 = CN_1 z + a[(1-z)+(1-z)^2+\cdots+(1-z)^n] =$$
$$= CN_1 z + a(1-z)\,\frac{1-(1-z)^n}{z} = a\,\frac{1-(1-z)^n}{z} \tag{22}$$

se obtiene el valor de la anualidad constante

$$a = CN_1\,\frac{z}{1-(1-z)^n} \tag{23}$$

La reserva al principio del período $s+1$ (antes de pagar los intereses del período)

$$CN_{s+1} = CN_{s+1}z + a(1-z)\,\frac{1-(1-z)^{n-s}}{z} = a\,\frac{1-(1-z)^{n-s}}{z} = CN\,\frac{1-(1-z)^{n-s}}{1-(1-z)^n} \tag{24}$$

proporciona la relación entre el número de títulos en circulación y los emitidos

$$N_{s+1} = N_1\,\frac{1-(1-z)^{n-s}}{1-(1-z)^n} \tag{25}$$

La reserva por recurrencia

$$CN_{s+1}(1-z) = CN_s - a \tag{26}$$

indica que:

$$a = CN_{s+1}z + C(N_s - N_{s+1}) = CN_{s+1}z + CM_s = I^*_{s+1} + A^*_s \tag{27}$$

Aplicada la relación (26) para dos períodos consecutivos resulta al restar:

$$C(N_{s+1} - N_{s+2})(1-z) = C(N_s - N_{s+1}) \Rightarrow M_s = M_{s+1}(1-z) = M_n(1-z)^{n-s} \tag{28}$$

siendo $M_n = \dfrac{a}{C} = N_1\,\dfrac{z}{1-(1-z)^n}$.

El número de títulos amortizados y la cuota de intereses se calculan mediante:

$$\mathcal{M}_s = \mathcal{M}_{s-1} + M_s = \sum_{r=1}^{s} M_r = N_1 - N_{s+1} \tag{29}$$

$$I^*_{s+1} = CN_{s+1}z = a - CM_s = a[1-(1-z)^{n-1}] \tag{30}$$

Para calcular el cuadro de amortización se procede en la forma indicada en el epígrafe 3 adaptada a esta casuística concreta.

Ejemplo 1.—Calcular, por los métodos de capitalización de los residuos y de redondeo de las amortizaciones teóricas, el cuadro de amortización de un empréstito con las siguientes características:

— **Número de títulos: 10.000.**

— **Nominal de cada título: 1.000 pts.**

— **Duración de la emisión: 4 años.**

— **Abono de un cupón anual anticipado de 100 pts. por título.**

— **Reembolso de los títulos por el valor nominal.**

— **Anualidad constante.**

a) Método de los residuos.

Se procede a calcular la primera cuota de intereses y la anualidad constante

$$I^* = CN_1 z = 1.000.000 \quad ; \quad a = CN_1 \frac{z}{1-(1-z)^n} = 11.000.000 \frac{0,10}{1-(1-0,10)^4} = 2.907.822,04$$

La primera anualidad es:

$$a = CN_2 z + CM_1 = C(N_1 - M_1)z + CM_1 = CN_1 z + CM_1(1-z)$$

luego el número de títulos que se pueden amortizar en el primer año, teórico y real, así como el número de los que quedan vivos son:

$$M'_1 = \frac{a - CN_1 z}{C(1-z)} = 2.119,80 \quad ; \quad M_1 = 2.119 \quad ; \quad N_2 = 7.881$$

y queda el residuo $R_1 = a - CN_2 z - CM_1 = 722,04$ cuyo valor acumulado para el período siguiente es $R_1(1-z)^{-1} = 802,27$.

En el segundo año se dispone de $a_2 = a + R_1(1-z)^{-1} = 2.908.624,31$ y como $a_2 = CN_3 z + CM_2 = = CN_2 z + CM_2(1-z)$ se tiene:

$$M_2 = \frac{a_2 - CN_2 z}{C(1-z)} = 2.356,14 \quad ; \quad M_2 = 2.356 \quad ; \quad N_2 = 5.525$$

resultando el residuo $R_2 = a_2 - CN_3 z - CM_2 = 124,31$ con valor acumulado $R_2(1-z)^{-1} = 138,12$.

En el tercer año, la anualidad disponible es $a_3 = a_2 + R(1-z)^{-1} = 2.907.960,16$ por lo que resulta:

$$M_3 = \frac{a_3 - CN_3 z}{C(1-z)} = 2.617,18 \quad ; \quad M_3 = 2.617 \quad ; \quad N_4 = 2.908$$

$$R_3 = a_2 - CN_4 z - CM_3 = 160,16 \quad ; \quad R_3(1-z)^{-1} = 177,96$$

Para el cuarto año se dispone de $a_4 = a + R_3(1-z)^{-1} = 2.908.000$ cantidad que amortiza los 2.908 títulos en circulación.

El cuadro de la página 193 recoge los resultados del proceso descrito y en él se han subrayado en negrilla las columnas reales.

CUADRO DE AMORTIZACION POR EL METODO DE CAPITALIZACION DE LOS RESIDUOS

Años	Anualidad		Intereses	Amortización		Residuo	Residuo e interés	Títulos amortizados en el año	Total títulos amortizados	Títulos vivos o en circulación
	Disponible	Efectiva real o práctica		Teórica o disponible	Práctica o real					
s	$a_2 = a + R_{s-1}(1-z)^{-1}$	$I^*_{s+1} + CM_s$	$I^*_{s+1} = CN_{s+1}z$	$A^*_s = a_s - I^*_{s+1}$	CM_s	$R_s = A^*_s - CM_s$	$R_s(1-z)^{-1}$	M_s	$\mathcal{M}_s$	N_{s+1}
Origen	1.000.000,00	1.000.000	1.000.000	—	—	—	—	—	—	10.000
1	2.907.822,04	2.907.100	788.100	2.119.722,04	2.119.000	722,04	802,27	2.119	2.119	7.881
2	2.908.624,31	2.908.500	552.500	2.356.124,31	2.356.000	124,31	138,12	2.356	4.475	5.525
3	2.907.960,16	2.907.800	290.800	2.617.160,16	2.617.000	160,16	177,96	2.617	7.092	2.908
4	2.908.000.00	2.908.000	—	2.908.000,000	2.908.000	—	—	2.908	10.000	0

CUADRO DE AMORTIZACION POR EL METODO DE REDONDEO DE LAS AMORTIZACIONES TEORICAS

Años	Anualidad práctica	Intereses	Amortización	Títulos amortizados en el año	Total títulos amortizados	Títulos vivos o en circulación
s	$CN_{s+1}z + CM_s$	$I^*_{s+1} = CN_{s+1}z$	CM_s	M_s^0	$\mathcal{M}_s$	N_{s+1}
Origen	1.000.000	1.000.000	—	—	—	10.000
1	2.908.000	788.000	2.120.000	2.120	2.120	7.880
2	2.907.500	552.500	2.355.000	2.355	4.475	5.525
3	2.907.800	290.800	2.617.000	2.617	7.092	2.908
4	2.908.000	—	2.908.000	2.908	10.000	0

b) Método de redondeo de las amortizaciones teóricas.

Las fórmulas $M_n = \frac{a}{C}$ y $M_s = M_{s+1}(1-z)$ aplicadas a los datos del problema dan la amortización teórica:

$$M_4 = 2.907,82 \quad ; \quad M_3 = 2.617,04 \quad ; \quad M_2 = 2.355,34 \quad ; \quad M_1 = 2.119,80$$

y como la suma de las partes enteras es 9.998 se procede a redondear por exceso M_1 y M_4 quedando por defecto M_2 y M_3.

El cuadro de amortización se presenta en la página 193.

5.2.—EMPRESTITO NORMAL TIPO II

Con este nombre se designa a los empréstitos puros amortizables con anualidades variables y réditos constantes. En este grupo se encuentran los casos de variación de las anualidades en progresión geométrica y en progresión aritmética, así como el **empréstito con amortización constante de títulos** en todos los años. Por su especial interés nos referiremos únicamente a este último que se caracteriza por ser:

$$M_1 = M_2 = \cdots = M_n = M = \frac{N_1}{n}$$

lo que lleva a que:

$$\mathscr{M}_s = sM = s\,\frac{N_1}{n} \quad ; \quad N_{s+1} = (n-s)\,\frac{N_1}{n} \tag{31}$$

Además, resulta que:

$$a_s = CN_{s+1}z + C\,\frac{N_1}{n} = a_{s+1} + C\,\frac{N_1}{n}\,z =$$

$$= a_n + (n-s)\,C\,\frac{N_1}{n}\,z = C\,\frac{N_1}{n}\,[1+(n-s)z] \tag{32}$$

pues $a_n = C\,\frac{N_1}{n}$.

En cuanto a las cuotas de interés se tiene:

$$I^*_{s+1} = I^*_s - C\,\frac{N_1}{n}\,z \quad \text{con} \quad I^*_1 = CN_1z \tag{33}$$

Ejemplo 2.—Construir el cuadro de amortización del ejemplo de 5.1 para la hipótesis de amortizarse el mismo número de títulos en cada año.

Años s	Anualidad $a_s = I^*_{s+1} + A^*$	Intereses $I^*_{s+1} = CN_{s+1}$	Amortización $A^* = CM$	Títulos amortizados en el año M	Total títulos amortizados $\mathcal{M}_s$	Títulos vivos o en circulación N_{s+1}
Origen	1.000.000	1.000.000	—	—	—	10.000
1	3.250.000	750.000	2.500.000	2.500	2.500	7.500
2	3.000.000	500.000	2.500.000	2.500	5.000	5.000
3	2.750.000	250.000	2.500.000	2.500	7.500	2.500
4	2.500.000	—	2.500.000	2.500	10.000	0

5.3.—EMPRESTITO NORMAL TIPO III

Son empréstitos amortizables mediante anualidades variables con abono de cupones variables.

A efectos operativos plantear este supuesto general tiene escaso interés.

6.—EMPRESTITOS CON PAGO DE INTERESES ACUMULADOS

Están formados por títulos obligaciones que son préstamos elementales, simples o amortizables mediante un solo pago y con duración aleatoria. La carencia de vencimientos periódicos de cupones ha supuesto que, en algunos sectores, se designe a estas emisiones con el nombre de empréstitos cupón cero.

6.1.—EMPRESTITO NORMAL TIPO I

Es el que cumple el doble requisito:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$$
$$i_1 = i_2 = \cdots = i_n = i$$

es, pues, la contraprestación una renta de término constante y evaluada a rédito constante que queda recogida en el esquema

CN_1		a		a	.....	a		a		a	.....	a		a
0	i	1	i	2	.....	s−1	i	s	i	s+1	....	n−1	i	n

La equivalencia financiera en el origen es

$$CN_1 = a\, \mathbf{a}_{\overline{n}|i} \tag{34}$$

de la que se sigue el valor de la anualidad.

$$a = \frac{CN_1}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i}} \tag{35}$$

De la cuantía de la reserva o saldo por el método prospectivo

$$C_s N_{s+1} = C(1+i)^s N_{s+1} = a\, \mathbf{a}_{\overline{n-s}|i} = CN_1 \frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i}} \tag{36}$$

se deduce la relación entre los títulos en circulación y los emitidos que es:

$$N_{s+1} = N_1 (1+i)^{-s} \frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i}} = N_1 \left(1 - \frac{\mathbf{a}_{\overline{s}|i}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i}}\right) \tag{37}$$

La reserva por el método recurrente queda expresada por

$$C(1+i)^s N_{s+1} = C(1+i)^{s-1} N_s (1+i) - a \tag{38}$$

y despejando, surge la estructura de la anualidad

$$a = C(1+i)^s (N_s - N_{s+1}) = C(1+i)^s M_s \tag{39}$$

y se obtiene de ella:

$$a = C(1+i)^s M_s = C(1+i)^{s+1} M_{s+1} \;\Rightarrow\; M_{s+1} = M_s (1+i)^{-1} = M_1 (1+i)^{-s} \tag{40}$$

con $M_1 = \dfrac{a}{C(1+i)} = \dfrac{N_1}{\ddot{\mathbf{a}}_{\overline{n}|i}}$.

El número de títulos amortizados en los s primeros años es:

$$\mathcal{M}_s = N_1 - N_{s+1} = N_1 \frac{\mathbf{a}_{\overline{s}|i}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i}} = \sum_{r=1}^{s} M_r = \mathcal{M}_{s-1} + M_s \tag{41}$$

El cuadro de amortización se calcula mediante los procedimientos descritos en el epígrafe 3 con las peculiaridades de esta modalidad, abordándose su cálculo mediante un caso práctico.

Ejemplo 1.—Calcular por los métodos de capitalización de los residuos y de redondeo de las amortizaciones teóricas, el cuadro de amortización de un empréstito con las características:

- **Número de títulos emitidos: 20.000.**
- **Valor nominal de cada título: 2.000.**
- **Duración de la emisión: 5 años.**
- **No abono de cupones anuales.**
- **Amortización de los títulos por el valor $C_s = 2.000(1+i)^s$, con $i = 0{,}10$.**
- **Anualidad constante.**

a) Método de capitalización de los residuos.°

Calculada la anualidad constante

$$a = \frac{CN_1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{40.000.000}{a_{\overline{5}|0,12}} = 10.551.899,23$$

el número de títulos que se pueden amortizar en el primer año teórico y real, es:

$$M_1 = \frac{a}{C_1} = \frac{10.551.899,23}{2.200} = 4.796,32 \quad ; \quad M_1 = 4.796$$

pero al amortizarse solamente 4.796 queda un residuo $R_1 = a - 2.200 \times 4.796 = 699,23$ cuyo valor acumulado para el período siguiente es $R_1(1+i) = 769,15$.

En el segundo año se dispone de $a_2 = a + R_1(1+i) = 10.552.668,38$ por lo que la amortización teórica y real son:

$$M_2 = \frac{a_2}{C_2} = 4.360,61 \quad ; \quad M_2 = 4.360$$

resultando como residuo $R_2 = a_2 - 2.420 \times 4.360 = 1.468,38$ con valor acumulado $R_2(1+i) = 1.615,22$ para el año siguiente.

Continuando el proceso se llega al cuadro de la página 198.

b) Método de redondeo de las amortizaciones teóricas.

El número de títulos que se amortizan en el primer período, $M_1 = \frac{N_1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{20.000}{a_{\overline{5}|0,10}} = 4.796,32$ aplicado a la relación $M_s = M_{s-1}(1+i)^{-1} = M_{s-1}(1+0,10)^{-1}$ proporciona los siguientes resultados:

$$M_2 = 4.360,29 \quad ; \quad M_3 = 3.963,90 \quad ; \quad M_4 = 3.603,54 \quad ; \quad M_5 = 3.275,95$$

La suma de las partes enteras es 19.997 por lo que se procederá a redondear por exceso M_3, M_4 y M_5 y por defecto M_1 y M_2.

El cuadro de amortización se expone en la página 198.

6.2.—EMPRESTITO NORMAL TIPO II

Se caracteriza por ser las anualidades variables y los réditos periodales constantes. Los casos particulares notables son los de anualidades variables en progresión geométrica, anualidades variables en progresión aritmética y el empréstito con amortización del mismo número de títulos en cada año. Haremos únicamente referencia a este último que se caracteriza por:

$$M_1 = M_2 = \cdots = M_n = M = \frac{N_1}{n}$$

por lo que:

$$\mathcal{M}_s = s\,\frac{N_1}{n} \quad ; \quad N_{s+1} = (n-s)\,\frac{N_1}{n} \tag{42}$$

CUADRO DE AMORTIZACION POR EL METODO DE CAPITALIZACION DE LOS RESIDUOS

Años	Anualidad		Valores de reembolso	Residuo	Residuo e interés	Títulos amortizados en el año	Total títulos amortizados	Títulos vivos o en circulación
	Disponible	Efectiva real o práctica						
s	$a_s = a + R_{s-1}(1+i)$	$C_s M_s$	$C_s = C(1+i)^s$	$R_s = a_s - C_s M_s$	$R_s(1+i)$	M_s	$\mathcal{M}_s$	N_{s+1}
Origen	—	—	—	—	—	—	—	20.000
1	10.551.899,23	10.551.200,00	2.200,00	699,23	769,15	4.796	4.796	15.204
2	10.552.668,38	10.551.200,00	2.420,00	1.468,38	1.615,22	4.360	9.156	10.844
3	10.553.514,44	10.552.168,00	2.662,00	1.346,44	1.481,08	3.964	13.120	6.880
4	10.553.380,31	10.553.232,80	2.928,20	147,51	162,29	3.604	16.724	3.276
5	10.552.061,52	10.552.061,52	3.221,02	—	—	3.276	20.000	0

CUADRO DE AMORTIZACION POR EL METODO DE REDONDEO
DE LAS AMORTIZACIONES TEORICAS

Años	Anualidad práctica	Valores de reembolso	Títulos amortizados en el año	Total títulos amortizados	Títulos vivos o en circulación
s	$C_s M_s$	$C_s = C(1+i)^s$	M_s	$\mathcal{M}_s$	N_{s+1}
Origen	—	—	—	—	20.000
1	10.551.200,00	2.200,00	4.796	4.796	15.204
2	10.551.200,00	2.420,00	4.360	9.156	10.844
3	10.552.168,00	2.662,00	3.964	13.120	6.880
4	10.553.232,80	2.928,20	3.604	16.724	3.276
5	10.552.061,52	3.221,02	3.276	20.000	0

Las anualidades satisfacen la relación:

$$a_s = C(1+i)^s \frac{N_1}{n} = a_{s-1}(1+i) = a_1(1+i)^{s-1} \tag{43}$$

es decir, varían en progresión geométrica.

Ejemplo 2.—Construir el cuadro de amortización del ejemplo 6.1 para la hipótesis de amortizarse el mismo número de títulos en cada año.

Años s	Anualidad C_sM	Valores de reembolso $C_s = C(1+i)^s$	Títulos amortizados en el año M	Total títulos amortizados $\mathcal{M}_s$	Títulos vivos o en circulación N_{s+1}
Origen	—	—	—	—	20.000
1	8.800.000	2.200,00	4.000	4.000	16.000
2	9.680.000	2.420,00	4.000	8.000	12.000
3	10.648.000	2.662,00	4.000	12.000	8.000
4	11.712.800	2.928,20	4.000	16.000	4.000
5	12.884.080	3.221,01	4.000	20.000	0

6.3.—EMPRESTITO NORMAL TIPO III

Es el caracterizado por tener las anualidades y los réditos variables, y comprende como casos particulares a los anteriores.

Por las mismas razones que en 4.3 nos limitaremos a plantear el siguiente supuesto:

CN_1		a_1		a_1		a_1		a_2		a_2		a_2		a_3		a_3		a_3
0	i_1	1	i_1	2	i_1	3	i_2	4	i_2	5	i_2	6	i_3	7	i_3	8	i_3	9

con $a_1 = a$; $a_2 = a + h$; $a_3 = a + h + k$.

— Equivalencia financiera en el origen

$$\begin{aligned} CN_1 &= a_1\, \mathbf{a}_{\overline{3}|i_1} + a_2(1+i_1)^{-3}\, \mathbf{a}_{\overline{3}|i_2} + a_3(1+i_1)^{-3}(1+i_2)^{-3}\, \mathbf{a}_{\overline{3}|i_3} = \\ &= a[\mathbf{a}_{\overline{3}|i_1} + (1+i_1)^{-3}\, \mathbf{a}_{\overline{3}|i_2} + (1+i_1)^{-3}(1+i_2)^{-3}\, \mathbf{a}_{\overline{3}|i_3}] + \\ &+ h(1+i_1)^{-3}[\mathbf{a}_{\overline{3}|i_2} + (1+i_2)^{-3}\, \mathbf{a}_{\overline{3}|i_3}] + k(1+i_1)^{-3}(1+i_2)^{-3}\, \mathbf{a}_{\overline{3}|i_3} \end{aligned}$$

— Reserva al principio del año s para s = 3, 5, 8

$$CN_3 = CN_1(1+i_1)^2 - a_1 S_{\overline{2}|i_1}$$

$$CN_5 = a_2\, \mathbf{a}_{\overline{2}|i_2} + a_3(1+i_2)^{-2}\, \mathbf{a}_{\overline{3}|i_3}$$

$$CN_8 = a_3\, \mathbf{a}_{\overline{2}|i_3}$$

— Amortización de títulos en el año s

$$M_1 = \frac{a_1}{C(1+i_1)} \quad ; \quad M_2 = M_1(1+i_1)^{-1} \quad ; \quad M_3 = M_3(1+i_1)^{-1}$$

$$M_4 = M_3(1+i_2)^{-1}\frac{a_2}{a_1} \quad ; \quad M_5 = M_4(1+i_2)^{-1} \quad ; \quad M_6 = M_5(1+i_2)^{-1}$$

$$M_7 = M_6(1+i_3)^{-1}\frac{a_3}{a_2} \quad ; \quad M_8 = M_7(1+i_3)^{-1} \quad ; \quad M_9 = M_8(1+i_3)^{-1}$$

ya que:

$$\left.\begin{array}{l} a_3 = C(1+i_1)^3 M_3 \\ a_4 = C(1+i_1)^3(1+i_2)M_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_4}{a_3} = \frac{M_4(1+i_3)}{M_3} \Rightarrow M_4 = M_3(1+i_2)^{-1}\frac{a_4}{a_3}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_6 = C(1+i_1)^3(1+i_3)^3 M_6 \\ a_7 = C(1+i_1)^3(1+i_2)^3(1+i_3)M_7 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_7}{a_6} = \frac{M_7(1+i_3)}{M_6} \Rightarrow M_7 = M_6(1+i_3)\frac{a_7}{a_6}$$

IV.3.—EMPRESTITOS CON CARACTERISTICAS COMERCIALES. TANTOS EFECTIVOS

7.—CARACTERISTICAS COMERCIALES

En los empréstitos normales o puros la operación financiera está definida por una prestación que entregan el conjunto de los obligacionistas, o suscritores o prestamistas y recibe el emisor o prestatario por una contraprestación que deberá entregar el emisor y recibir el conjunto de los obligacionistas; y una ley financiera en base a la cual ambos compromisos son equivalentes.

La equivalencia financiera entre prestación y contraprestación en el empréstito normal tipo I es:

a) Empréstito con pago periódico de intereses pospagables o vencidos

$$CN_1 = a\,\mathbf{a}_{\overline{n}|i}, \quad \text{con} \quad a = CN_r i + CM_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

b) Empréstitos con pago periódico de intereses prepagables o anticipados

$$CN_1 = CN_1 z + a(1-z)\,\frac{1-(1-z)^n}{z}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} a = CN_{r+1} z + CM_r & (r = 1, 2, \ldots, n-1) \\ a = CM_n \end{cases}$$

c) Empréstitos con pago de intereses acumulados

$$CN_1 = a\,\mathbf{a}_{\overline{n}|i}, \quad \text{con} \quad a = C(1+i)^r M_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

Si en la operación aparecen condiciones complementarias que alteran o modifican las cuantías o los vencimientos de la prestación o de la contraprestación, se dirá que el empréstito es no normal, no puro o con características comerciales. Estas características complementarias o comerciales hacen que no se verifique la equivalencia financiera en base a la ley establecida.

Las características comerciales pueden aparecer en el momento inicial o añadiendo nuevos sumandos a la anualidad y pueden suponer: a) que las entregue el emisor y las reciban los obligacionistas y/o terceros; b) que las entreguen los obligacionistas y las reciban el emisor y/o terceros.

Podemos clasificar las características en bilaterales y unilaterales. Las primeras son aquellas que las entrega el emisor (los obligacionistas) y las reciben los obligacionistas (el emisor). Las unilaterales las entrega el emisor o los obligacionistas y las reciben terceros. Entre las más usuales de ambos tipos cabe citar:

1) Características bilaterales

— **Prima de emisión:** Si el valor nominal de un título es C y se suscriben en el origen a un precio V, con $V \neq C$, llamado precio o valor de emisión, la diferencia $C - V = P_e$ se denomina prima de emisión. Lo usual es que sea $P_e > 0$.

La amortización del empréstito se realiza como si no hubiese existido la prima de emisión.

— **Prima de amortización:** La diferencia entre el valor de reembolso de un título y el valor nominal $C_r - C = P_r$ recibe el nombre de prima de amortización, si en el empréstito se pagan cupones periódicos. Cuando el empréstito es con intereses acumulados, la prima de amortización es $P_r = C_r - C \sum_{h=1}^{r} (1 + i_h)$.

P_r puede ser positiva o negativa, constante o variable y añade un nuevo sumando $P_r M_r$ a la anualidad que pasa a denominarse anualidad comercial.

— **Lote:** Es un premio que se reparte por sorteo entre las obligaciones que se amortizan en cada período, se representa por L_r, puede ser constante o variable y supone añadir un nuevo sumando a la anualidad.

— **Amortización seca o ex-cupón:** Consiste en la pérdida de los intereses del período que resulten amortizadas las obligaciones. Es una especie de prima de amortización.

— **Fraccionamiento en el pago de cupones o intereses periódicos.**

2) Características unilaterales

— **Gastos iniciales:** Son todos los que se ocasionan en el origen de la emisión del empréstito. Pueden ser a cargo del emisor, G_p^i, y/o a cargo de los obligacinistas G_a^i; pero lo usual es que sean a cargo del emisor.

La amortización se realiza como si no existiesen dichos gastos.

— **Gastos de administración o periódicos:** Son todos los gastos que tiene el emisor para efectuar el pago de intereses y amortización de las obligaciones. Añade un nuevo término a la anualidad que entrega el emisor.

— **Gastos finales:** Son los que tiene el ente emisor al finalizar la operación y entre ellos merecen resaltarse los que se derivan del levantamiento de garantías.

— **Impuestos:** Las cargas fiscales inciden en toda la vida del empréstito, en su origen y en su final. Cabe distinguir:

a) La **entidad emisora** tiene que soportar cargas fiscales al poner en circulación los títulos y al amortizarlos a través del impuesto sobre transmisiones patrimoniales. Este se devenga usualmente girando un tipo fijo sobre el nominal en el momento que se realiza el título (origen y amortización).

Si, además, la emisión es con garantías especiales, por ejemplo hipotecarias, se devengarán impuestos en el momento del concierto de ellas y en el de su levantamiento.

b) Los **obligacionistas** son sometidos a tributación por los rendimientos que reciben (intereses, primas, lotes).

Las consecuencias de los impuestos son: percibir el emisor una prestación disminuida y entregar unas anualidades más elevadas; recibir los obligacionistas menores anualidades.

8.—TANTOS EFECTIVOS: TANTO EFECTIVO EMISOR, TANTO EFECTIVO OBLIGACIONISTA, TANTO DE RENDIMIENTO DE UNA OBLIGACION

Las características comerciales rompen la equivalencia financiera de los empréstitos normales y modifican las cuantías y/o vencimientos de cada una de las partes contratantes. Ello obliga a distinguir entre:

a) Prestación real o efectiva que desembolsan los prestamistas, suscritores u obligacionistas.

b) Prestación real o efectiva que recibe el emisor, prestatario o deudor.

c) Contraprestación efectiva o real que deberá entregar el emisor, deudor o prestatario.

d) Contraprestación real o efectiva que recibirán el conjunto de los acreedores, prestamistas u obligacionistas.

Recibe el nombre de **rédito medio efectivo activo o del conjunto de los obligacionistas** el rédito i_a que cumple la ecuación de equivalencia:

PRESTACION REAL DE LOS OBLIGACIONISTAS	$\Leftrightarrow$	CONTRAPRESTACION REAL PARA LOS OBLIGACIONISTAS

De igual manera, el rédito i_p que satisface la equivalencia

PRESTACION REAL PARA EL EMISOR	$\Leftrightarrow$	CONTRAPRESTACION REAL DEL EMISOR

se llamará **rédito medio efectivo pasivo o del deudor.**

Cuando los períodos son anuales, representan los anteriores a los correspondientes **tantos efectivos activo o de los obligacionistas y pasivo o del deudor.**

El tanto efectivo activo o del conjunto de los obligacionistas es i_a; pero la rentabilidad efectiva que proporcionará un título no tiene por qué coincidir con i_a, pues depende del tipo de interés pactado, de las características comerciales y del momento en que la obligación se amortice. Sólo será posible calcular la rentabilidad real o efectiva del título una vez conocida su duración.

Se llama **tanto de rendimiento de una obligación** al tanto de rentabilidad efectiva real o a posteriori que cumple la igualdad entre el precio V de suscripción pagado por el título y las cantidades recibidas hasta su amortización (intereses, reembolso del principal, primas, lotes).

9.—EMPRESTITOS CON CARACTERISTICAS COMERCIALES

Como consecuencia de las características comerciales las ecuaciones de equivalencia y las de la dinámica de la amortización de los empréstitos normales no pueden mantenerse. Interesa recuperar las relaciones notables para hacer uso de su operatividad en los empréstitos no normales y para ello se intentará reducir el empréstito comercial a uno normal con análoga amortización que la del comercial, en aquellos casos en que sea posible.

Se trata de vincular la dinámica del empréstito no normal a la de un empréstito teórico o ficticio con la misma dinámica amortizativa y para la resolución de este problema se seguirá el llamado método de normalización consistente en obtener unas relaciones funcionales llamadas fórmulas de conversión que hacen posible aplicar la equivalencia financiera y la dinámica de los empréstitos normales y así obtener la solución de las variables del empréstito comercial.

10.—EMPRESTITOS CON INTERESES POSPAGABLES AMORTIZABLES CON PRIMA DE AMORTIZACION

Son aquellos cuya estructura de anualidad es de la forma

$$a_r = CN_r i_r + (C + P_r) M_r = CN_r i_r + C_r M_r$$

o con valor de reembolso distinto del nominal o de la par. Se consideran sólo los casos de prima constante, prima variable y amortización seca o con pérdida del derecho al último cupón y todos ellos con rédito periodal constante.

10.1.—EMPRESTITOS CON PRIMA DE AMORTIZACION CONSTANTE Y ANUALIDAD COMERCIAL CONSTANTE

Se trata del empréstito con estructura de anualidad

$$a_r = CN_r i_r + (C + P) M_r = CN_r i_r + C' M_r \tag{44}$$

Dividiendo (44) por (C+P) y multiplicando por C se obtiene la expresión normalizada

$$\frac{aC}{C+P} = CN_r \frac{iC}{C+P} + CM_r \tag{45}$$

Las fórmulas de conversión $a' = \dfrac{aC}{C+P}$; $i' = \dfrac{iC}{C+P}$ reducen la anualidad a la siguiente:

$$a' = CN_r i' = CM_r \tag{46}$$

que es la de un empréstito normal como el del punto 4.1 cuyas fórmulas son aplicables en la estructura (46). Por tanto, se tiene:

$$CN_1 = a' \, a_{\overline{n}|i'} = \frac{aC}{C+P} \, a_{\overline{n}|i'} \tag{47}$$

siendo la anualidad comercial:

$$a = \frac{(C+P)N_1}{a_{\overline{n}|i'}} \tag{48}$$

Asimismo, se cumplen las siguientes relaciones:

$$N_{s+1} = N_1 \frac{a_{\overline{n-s}|i'}}{a_{\overline{n}|i'}} \quad ; \quad M_s = M_{s-1}(1+i') = M_1(1+i')^{s-1} \quad ; \quad M_1 = \frac{N_1}{S_{\overline{n}|i'}} \tag{49}$$

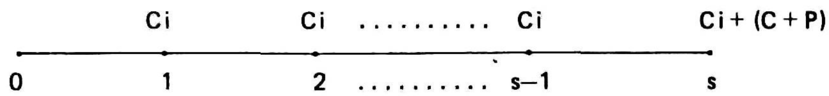
$$\mathscr{M}_s = N_1 \left(1 - \frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i'}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i'}}\right) = N_1 \frac{S_{\overline{s}|i'}}{S_{\overline{n}|i'}}$$

Si no existen otras características comerciales el tanto efectivo del emisor i_p se obtendrá en la ecuación:

$$CN_1 = a\, \mathbf{a}_{\overline{n}|i_p} = (C+P)N_1 \frac{\mathbf{a}_{\overline{n}|i_p}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i'}} \Rightarrow \mathbf{a}_{\overline{n}|i_p} = \frac{C}{C+P} \mathbf{a}_{\overline{n}|i'} \tag{50}$$

y su valor coincide con i_a tanto efectivo de los obligacionistas.

Por un título se paga el precio de suscripción C y si éste se amortiza en el año s ($s = 1, 2, \ldots, n$) proporciona la siguiente corriente de ingresos:



luego el tanto de rendimiento i_R será el valor que cumple la ecuación

$$C = Ci\, \mathbf{a}_{\overline{s}|i_R} + (C+P)(1+i_R)^{-s} \tag{51}$$

Ejemplo 1.—En el empréstito con las siguientes características:

— Títulos emitidos: 51.000.

— Nominal de cada título: 10.000 pts.

— Duración de la emisión: 10 años.

— Amortización de los títulos con prima de amortización de 500 pts.

— Abono de intereses anuales a rédito $i = 12{,}5\%$.

Determinar: 1) Anualidad comercial constante; 2) Intereses que se abonan en el cuarto año; 3) Títulos vivos después de 6 años; 4) Títulos amortizados en el séptimo año y en los 7 primeros años; 5) Tanto efectivo emisor; 6) Tanto de rendimiento de un título que se amortiza en el primer año; ídem, en el sexto.

Se trata de un empréstito con prima de amortización constante como el desarrollo en el epígrafe con las fórmulas (47), (51).

Como las fórmulas de conversión son:

$$a' = \frac{aC}{C+P} = \frac{10.000a}{10.500}$$

$$i' = \frac{iC}{C+P} = \frac{1.250}{10.500} = 0{,}11905$$

se tiene:

$$a = \frac{(C+P)N}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i'}} = \frac{10.500 \times 50.000}{\mathbf{a}_{\overline{10}|0{,}11905}} = 92.554.741{,}55$$

$$I_4 = CN_4 i = CiN_1 \frac{a_{\overline{n-s}|i'}}{a_{\overline{n}|i'}} = 1.250 \times 50.000 \frac{a_{\overline{7}|0,11905}}{a_{\overline{10}|0,11905}} = 50.437.618,29$$

$$N_7 = N_1 \frac{a_{\overline{4}|i'}}{a_{\overline{10}|i'}} = 26.827,23$$

$$M_7 = M_1(1+i')^6 = N_1 \frac{(1+i')^6}{S_{\overline{10}|i'}} = 5.621,02$$

$$\mathcal{M}_7 = N_1 \frac{S_{\overline{7}|i'}}{S_{\overline{10}|i'}} = 28.793,79$$

$$a_{\overline{10}|i_p} = \frac{10.000}{10.500} a_{\overline{10}|0,11905} = 5,40220838 \Rightarrow i_p = 0,1311$$

$$10.000 = 1.250\, a_{\overline{1}|i_R} + 10.500(1+i_R)^{-1} \Rightarrow i_R = 0,1750$$

$$10.000 = 1.250\, a_{\overline{6}|i_R} + 10.500(1+i_R)^{-6} \Rightarrow i_R = 0,1310$$

10.2.—EMPRESTITO CON PRIMA DE AMORTIZACION CONSTANTE Y ANUALIDAD COMERCIAL VARIABLE

La estructura de anualidad del empréstito es

$$a_r = CN_r i + (C+P)M_r$$

siendo normal que las a_r sigan alguna ley específica. Si por ejemplo, esta ley es la descrita en el eje:

$$\begin{array}{cccccc} & a_1 \ldots\ldots a_1 & a_1 & a_2 \ldots\ldots a_2 & a_3 \ldots\ldots a_3 \\ \hline 0 & 1 \ldots\ldots s-1 & s & s+1 \ldots\ldots m & m+1 \ldots\ldots n \end{array}$$

con $a_1 = a$; $a_2 = a+h$; $a_3 = a+h+k$, se procederá a normalizar simultáneamente las tres anualidades multiplicando por C y dividiendo por C + P:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Para } 1 \leqslant r \leqslant s: & a_1 = CN_r i + (C+P)M_r \\ \text{Para } s+1 \leqslant r \leqslant m: & a_2 = CN_r i + (C+P)M_r \\ \text{Para } m+1 \leqslant r \leqslant m: & a_3 = CN_r i + (C+P)M_r \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} a'_1 = CN_r i' + CM_r, \text{ con } a'_1 = \dfrac{a_1 C}{C+P} & i' = \dfrac{iC}{C+P} \\ a'_2 = CN_r i' + CM_r, \text{ con } a'_2 = \dfrac{a_2 C}{C+P} & i' = \dfrac{iC}{C+P} \\ a'_3 = CN_r i' + CM_r, \text{ con } a'_3 = \dfrac{a_3 C}{C+P} & i' = \dfrac{iC}{C+P} \end{array}\right.$$

La ecuación de equivalencia del empréstito normalizado es:

$$CN_1 = a'_1\, \mathbf{a}_{\overline{s}|i'} + a'_2\, {}^{s}/\mathbf{a}_{\overline{m-s}|i'} + a'_3\, {}^{m}/\mathbf{a}_{\overline{n-m}|i'} =$$

$$= \frac{C}{C+P}\left(a\, \mathbf{a}_{\overline{n}|i'} + h\, {}^{s}/\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i'} + k\, {}^{m}/\mathbf{a}_{\overline{n-m}|i'}\right)$$

de donde:

$$a = \frac{(C+P)N_1 - h\, {}^{s}/\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i'} - k\, {}^{m}/\mathbf{a}_{\overline{n-m}|i'}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i'}}$$

La ecuación de la reserva al principio del período $r+1$ y el número de títulos vivos son:

— **Para $1 \leqslant r \leqslant s$**

$$CN_{r+1} = CN_1(1+i')^r - a'_1\, S_{\overline{r}|i'} = CN_1(1+i')^r - \frac{aC}{C+P}\, S_{\overline{r}|i'}$$

$$N_{r+1} = N_1(1+i')^r - \frac{a}{C+P}\, S_{\overline{r}|i'}$$

—**Para $s+1 \leqslant r \leqslant m$**

$$CN_{r+1} = CN_1(1+i')^r - (a'_1\, {}^{r-s}/S_{\overline{s}|i'} + a'_2\, S_{\overline{r-s}|i'}) = a'_2\, \mathbf{a}_{\overline{m-r}|i'} + a'_3\, {}^{m-r}/\mathbf{a}_{\overline{n-m}|i'}$$

$$N_{r+1} = \frac{a+h}{C+P}\, \mathbf{a}_{\overline{m-r}|i'} + \frac{a+h+k}{C+P}\, {}^{m-r}/\mathbf{a}_{\overline{n-m}|i'}$$

— **Para $m+1 \leqslant r \leqslant n$**

$$CN_{r+1} = a'_3\, \mathbf{a}_{\overline{n-r}|i'} = \frac{(a+h+k)C}{C+P}\, \mathbf{a}_{\overline{n-r}|i'} \quad ; \quad N_{r+1} = \frac{a+h+k}{C+P}\, \mathbf{a}_{\overline{n-r}|i'}$$

El número de títulos que se amortizan en el año r se obtiene mediante las expresiones siguientes:

— Para $1 \leqslant r \leqslant s$: $\quad M_r = M_{r-1}(1+i') = M_1(1+i')^{r-1}$

— Para $s+1 \leqslant r \leqslant m$: $\quad M_r = M_{r-1}(1+i') = M_{s+1}(1+i')^{r-(s+1)}$

— Para $m+1 \leqslant r \leqslant n$: $\quad M_r = M_{r-1}(1+i') = M_{m+1}(1+i')^{r-(m+1)}$

siendo:

$$M_1 = \frac{a'_1 - CN_1 i'}{C} = \frac{a}{C+P} - N_1 i'$$

$$M_{s+1} = M_s(1+i') + \frac{h}{C+P} = M_1(1+i')^s + \frac{h}{C+P}$$

$$M_{m+1} = M_m(1+i') + \frac{k}{C+P} = M_{s+1}(1+i')^{m-s} + \frac{k}{C+P} =$$

$$= M_1(1+i')^m + \frac{h}{C+P}(1+i')^{m-s} + \frac{k}{C+P}$$

El tanto efectivo emisor que coincide con el de los obligacionistas se calcula en la ecuación:

$$CN_1 = a_1\, \mathbf{a}_{\overline{s}|i_p} + a_2\, {}^{s}/\mathbf{a}_{\overline{m-s}|i_p} + a_3\, {}^{m}/\mathbf{a}_{\overline{n-m}|i_p}$$

La ecuación del tanto de rendimiento es idéntica a la (51).

Ejemplo 2.—Aplicando los resultados obtenidos en el supuesto

$$\mathbf{a_1 = a \quad ; \quad a_2 = a + 10.000.000 \quad ; \quad a_3 = a + 25.000.000}$$

a los valores del empréstito del punto anterior 10.1, con $s=3$ y $m=6$ determinar los valores teóricos y reales de M_r y N_{r+1} y comprobar que los resultados obtenidos a través de las M_r coinciden con la aplicación directa de N_{r+1} en los principios de los años tercero, sexto y octavo.

Recordando que

$$i' = \frac{Ci}{C+P} = \frac{1.250}{10.500} = 0{,}11905$$

se sigue:

— Anualidades teóricas

$$a_1 = a = \frac{10.500 \times 50.000 - 10.000.000\ {}^{3}/\mathbf{a}_{\overline{7}|i'} - 15.000.000\ {}^{6}/\mathbf{a}_{\overline{4}|i'}}{\mathbf{a}_{\overline{10}|i'}} = 82.697.663{,}81$$

$$a_2 = 92.697.663{,}81 \quad ; \quad a_3 = 107.697.663{,}81$$

— Títulos que se amortizan y títulos vivos

Años	Valores teóricos		Valores reales	
s	M_r	N_{r+1}	M_r	N_{r+1}
Origen	—	50.000,00	—	50.000
1	1.923,59	48.076,41	1.924	48.076
2	2.152,59	45.923,82	2.152	45.924
3	2.408,85	43.514,97	2.409	43.515
4	3.647,99	39.866,98	3.648	39.867
5	4.082,28	35.784,70	4.082	35.785
6	4.568,26	31.216,44	4.568	31.217
7	6.540,67	24.675,77	6.541	24.676
8	7.319,33	17.356,44	7.319	17.357
9	8.190,68	9.165,76	8.191	9.166
10	9.165,76	0	9.166	0

— Número de títulos vivos al principio de los años tercero, sexto y octavo

$$N_3 = 50.000(1+i')^2 - \frac{82.697.663,81}{10.500} \, S_{\overline{2}|i} = 45.923,83$$

$$N_6 = \frac{92.697.663,81}{10.500} \, \mathbf{a}_{\overline{1}|i'} + \frac{107.697.663,81}{10.500} \, 1/\mathbf{a}_{\overline{4}|i'} = 35.784,71$$

$$N_8 = \frac{107.697.663,81}{10.500} \, \mathbf{a}_{\overline{3}|i'} = 24.675,77$$

10.3.—EMPRESTITO CON PRIMA DE AMORTIZACION CONSTANTE Y AMORTIZACION DEL MISMO NUMERO DE TITULOS EN CADA AÑO

Este empréstito se caracteriza por ser

$$M_1 = M_2 = \cdots = M_n = M = \frac{N_1}{n} \tag{53}$$

por lo que se tiene:

$$\mathcal{M}_s = sM = s\,\frac{N_1}{n} \quad ; \quad N_{s+1} = (n-s)M = (n-s)\,\frac{N_1}{n} \tag{54}$$

Su anualidad, supuesto rédito periodal constante, es:

$$a_{s+1} = CN_{s+1} i + (C+P) \frac{N_1}{n} = a_s - \frac{CN_1}{n} i = a_1 - sC \frac{N_1}{n} i \tag{55}$$

con $a_1 = CN_1 i + (C+P) \frac{N_1}{n}$.

Asimismo, se verifica que:

$$I_{s+1} = CN_{s+1} i = a_{s+1} - C \frac{N_1}{n} = I - C \frac{N_1}{n} i \tag{56}$$

La ecuación del tanto efectivo es:

$$CN_1 = A_{\left(a_1;\ -\frac{CN_1}{n} i\right)\overline{n}|i_p} = \left(a_1 - \frac{CN_1}{n} - CN_1 i\right) \mathbf{a}_{\overline{n}|i_p} + CN_1 \tag{57}$$

y la del tanto de rendimiento coincide con (51).

10.4.—EMPRESTITO CON PRIMA DE AMORTIZACION VARIABLE

La estructura de la anualidad de estos empréstitos es

$$a_r = CN_r i + (C + P_r) M_r = CN_r i + C_r M_r \tag{58}$$

supuesto rédito periodal constante.

Por considerarlo con suficiente generalidad se considera el caso de anualidad comercial constante y primas de amortización por grupos de años, tal como se expone:

CN_1		a ..... a		a		a ..... a		a		a ..... a	a
0	i	1 ..... s−1	i	s	i	s+1 ... m−1	i	m	i	m+1 ... n−1	i	n
← P_1 →						← P_2 →				← P_3 →		

y que tiene la siguiente estructura de anualidad:

— Para $1 \leqslant r \leqslant s$: $a = CN_r i + (C + P_1) M_r = CN_r i + C_1 M_r$

— Para $s+1 \leqslant r \leqslant m$: $a = CN_r i + (C + P_2) M_r = CN_r i + C_2 M_r$

— Para $m+1 \leqslant r \leqslant n$: $a = CN_r i + (C + P_3) M_r = CN_r i + C_3 M_r$

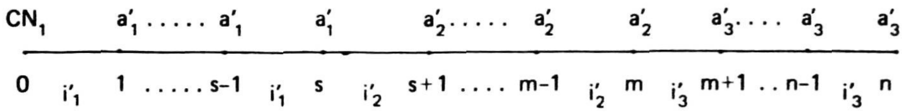
Dividiendo por $C+P_r$ y multiplicando por C se obtienen:

— Para $1 \leqslant r \leqslant s$: $\dfrac{aC}{C+P_1} = CN_r \dfrac{iC}{C+P_1} + CM_r \Leftrightarrow a'_1 = CN_r i'_1 + CM_r$, con $\begin{cases} i'_1 = \dfrac{iC}{C+P_1} \\ a'_1 = \dfrac{aC}{C+P_1} \end{cases}$

— Para $s+1 \leqslant r \leqslant m$: $\dfrac{aC}{C+P_2} = CN_r \dfrac{iC}{C+P_2} + CM_r \Leftrightarrow a'_2 = CN_r i'_2 + CM_r$, con $\begin{cases} i'_2 = \dfrac{iC}{C+P_2} \\ a'_2 = \dfrac{aC}{C+P_2} \end{cases}$

— Para $m+1 \leqslant r \leqslant n$: $\dfrac{aC}{C+P_3} = CN_r \dfrac{iC}{C+P_3} + CM_r \Leftrightarrow a'_3 = CN_r i'_3 + CM_r$, con $\begin{cases} i'_3 = \dfrac{iC}{C+P_3} \\ a'_3 = \dfrac{aC}{C+P_3} \end{cases}$

es decir, el empréstito normalizado es el de anualidades variables y réditos variables que se representa en el gráfico



La equivalencia financiera inicial es:

$$CN_1 = a'_1\, \mathbf{a}_{\overline{s}|i'_1} + a'_2 (1+i'_1)^{-s}\, \mathbf{a}_{\overline{m-s}|i'_2} + a'_3 (1+i'_1)^{-s} (1+i'_2)^{-(m-s)}\, \mathbf{a}_{\overline{n-m}|i'_3}$$

$$= aC \left(\frac{\mathbf{a}_{\overline{s}|i'_1}}{C+P_1} + \frac{(1+i'_1)^{-s}\, \mathbf{a}_{\overline{m-s}|i'_2}}{C+P_2} + \frac{(1+i'_1)^{-s}(1+i'_2)^{-(m-s)}\, \mathbf{a}_{\overline{n-m}|i'_3}}{C+P_3} \right)$$

de la que se sigue fácilmente el valor de a.

La ecuación de la reserva al principio del año $r+1$, con por ejemplo $s+1 \leqslant r \leqslant m$, es

$$CN_{r+1} = CN_1 (1+i'_1)^s (1+i'_2)^{r-s} - (a'_1\, S_{\overline{s}|i'_1} (1+i'_2)^{r-s} + a'_2\, S_{\overline{r-s}|i'_2}) =$$

$$= a'_2\, \mathbf{a}_{\overline{m-r}|i'_2} + a'_3 (1+i'_2)^{-(m-r)}\, \mathbf{a}_{\overline{n-m}|i'}$$

Para calcular el número de títulos que se amortizan en el año r se hará uso de las relaciones:

$-1 \leqslant r \leqslant s$: $\quad M_r = M_{r-1}(1+i'_1) = M_1 (1+i'_1)^{r-1}$

$-s+1 \leqslant r \leqslant m$: $\quad M_r = M_{r-1}(1+i'_2) = M_{s+1}(1+i'_2)^{r-(s+1)}$

$-m+1 \leqslant r \leqslant n$: $\quad M_r = M_{r-1}(1+i'_3) = M_{m+1}(1+i'_3)^{r-(m+1)}$

siendo

$$M_1 = \frac{a'_1 - CN_1 i'_1}{C} = \frac{a}{C+P_3} - N_1 i'_1$$

$$M_{s+1} = \frac{a'_2 - CN_{s+1} i'_2}{C} = \frac{a}{C+P_2} - N_{s+1} i_2, \qquad \text{con} \qquad N_{s+1} = N_1 - \mathcal{M}_s = N_1 - M_1 S_{\overline{s}|i'_1}$$

$$M_{m+1} = \frac{a'_3 - CN_{m+1} i'_3}{C} = \frac{1}{C}(a'_3 - a'_3 \mathbf{a}_{\overline{n-m}|i'_3}\, i'_3) = \frac{a'_3}{C}\left(1 - \frac{1-(1+i'_3)^{-(n-m)}}{i'_3}\, i'_3\right) =$$

$$= \frac{a}{C+P_3}(1+i'_3)^{-(n-m)}$$

La ecuación del tanto de rendimiento es:

$$C = Ci\, \mathbf{a}_{\overline{r}|i_R} + (C+P_r)(1+i_R) \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} P_r = P_1 & \text{si} \quad 1 \leqslant r \leqslant s \\ P_r = P_2 & \text{si} \quad s+1 \leqslant r \leqslant m \\ P_r = P_3 & \text{si} \quad m+1 \leqslant r \leqslant m \end{cases}$$

Ejemplo 3.—Calcular la anualidad comercial constante y el número de títulos que se amortizan en cada año (teórico y real) de un empréstito con las siguientes características:

- **Número de títulos: $N_1 = 40.000$.**
- **Valor nominal de cada título: $C = 1.000$ pts.**
- **Duración de la emisión $n = 12$ años.**
- **Abono de un cupón anual constante de 120 pts. por obligación.**
- **Amortización de los títulos con prima de amortización variable P_r con**

$P_r = 75$ pts. durante los años 1 al 4.

$P_r = 100$ pts. durante los años 5 al 8.

$P_r = 150$ pts. durante los años 9 al 12.

Para calcular la anualidad y número de títulos que se amortizan en cada año basta aplicar las relaciones obtenidas teniendo en cuenta que:

$$i = \frac{120}{1.000} = 0{,}12 \quad ; \quad a'_1 = \frac{aC}{C+P_1} = \frac{1.000a}{1.075} \quad ; \quad a'_2 = \frac{aC}{C+P_2} = \frac{1.000a}{1.100}$$

$$a'_3 = \frac{aC}{C+P_3} = \frac{1.000a}{1.150} \quad ; \quad i'_1 = \frac{120}{1.075} = 0{,}111628 \quad ; \quad i'_2 = \frac{120}{1.100} = 0{,}109091$$

$$i'_3 = \frac{120}{1.150}\ 0{,}104348 \qquad s = 4, \qquad m = 8$$

Se tiene:

$$a=\frac{40.000}{\frac{\mathbf{a}_{\overline{4}|i'_1}}{1.075}+\frac{(1+i'_1)^{-4}\,\mathbf{a}_{\overline{4}|i'_2}}{1.100}+\frac{(1+i'_1)^{-4}(1+i'_2)^{-4}\,\mathbf{a}_{\overline{4}|i'_3}}{1.150}}=6.769.952,79$$

$$M_1=\frac{a}{C+P_1}-N_1 i'_1 \qquad =1.832,51 \text{ teórico y } 1.832 \text{ real}$$

$$M_2=M_1\ (1+i'_1)=2.037,07 \text{ teórico y } 2.037 \text{ real}$$

$$M_3=M_2\ (1+i'_1)=2.264,47 \text{ teórico y } 2.264 \text{ real}$$

$$M_4=M_3\ (1+i'_1)=2.517,25 \text{ teórico y } 2.517 \text{ real}$$

$$N_5=N_1-M_1\, S_{\overline{4}|i'_1} \qquad =31.348,70$$

$$M_5=\frac{a}{C+P_2}-N_5 i'_2 \qquad =2.734,64 \text{ teórico y } 2.735 \text{ real}$$

$$M_6=M_5\ (1+i'_2)=3.032,97 \text{ teórico y } 3.033 \text{ real}$$

$$M_7=M_6\ (1+i'_2)=3.363,84 \text{ teórico y } 3.364 \text{ real}$$

$$M_8=M_7\ (1+i'_2)=3.730,80 \text{ teórico y } 3.731 \text{ real}$$

$$M_9=\frac{a}{C+P_3}(1+i'_3)^{-4} \qquad =3.957,90 \text{ teórico y } 3.958 \text{ real}$$

$$M_{10}=M_9\ (1+i'_3)=4.370,89 \text{ teórico y } 4.371 \text{ real}$$

$$M_{11}=M_{10}(1+i'_3)=4.826,99 \text{ teórico y } 4.827 \text{ real}$$

$$M_{12}=M_{11}(1+i'_3)=5.330,67 \text{ teórico y } 5.331 \text{ real}$$

10.5.—EMPRESTITO CON ANUALIDAD COMERCIAL CONSTANTE Y AMORTIZACION SECA O EX-CUPON

Se caracterizan porque las obligaciones pierden los intereses del período en que se amortizan.

La anualidad comercial es:

$$a=CN_r i+CM_r-CiM_r=CN_r i+C(1-i)M_r \tag{59}$$

y basta dividir por $1-i$ para normalizar resultando:

$$\frac{a}{1-i}=CN_r\frac{i}{1-i}+CM_r \Leftrightarrow a'=CN_r i'+CM_r, \quad \text{con} \quad a'=\frac{a}{1-i} \text{ e } i'=\frac{i}{1-i} \tag{60}$$

Por tanto se tiene:

$$CN_1=a'\,\mathbf{a}_{\overline{n}|i'}=\frac{a}{1-i}\,\mathbf{a}_{\overline{n}|i'} \tag{61}$$

$$a' = \frac{CN(1-i')}{a_{\overline{n}|i'}} \tag{62}$$

$$C = Ci\, a_{\overline{s-1}|i_R} + C(1+i_R)^{-s} \tag{63}$$

$$CN_1 = a\, a_{\overline{n}|i_p} = CN_1(1-i)\frac{a_{\overline{n}|i_p}}{a_{\overline{n}|i'}} \Rightarrow a_{\overline{n}|i_p} = \frac{a_{\overline{n}|i'}}{1-i} \tag{64}$$

Las restantes expresiones son idénticas a las de 10.1.

11.—EMPRESTITOS CON INTERESES POSPAGABLES Y LOTES

Son aquellos cuya estructura de anualidad es de la forma

$$a_r = CN_r i_r + CM_r + L_r$$

y haciendo hipótesis sobre las a_r, i_r o L_r surgen los casos particulares de los que merecen destacarse estas dos combinaciones: 1) $a_r = a$, $L_r = L$, $i_r = i$ y 2) $a_r = a$, L_r, $i_r = i$.

11.1.—EMPRESTITO CON ANULIDAD COMERCIAL CONSTANTE Y LOTE CONSTANTE

Su estructura de anualidad es:

$$a = CN_r i + CM_r + L \tag{65}$$

quedando normalizada de forma inmediata

$$a - L = CN_r i + CM_r \Rightarrow a' = CN_r i + CM_r, \quad \text{con} \quad a' = a - L \tag{66}$$

La anualidad constante se obtiene de forma sencilla, pues:

$$CN_1 = a'\, a_{\overline{n}|i} = (a-L)\, a_{\overline{n}|i} \Rightarrow a = \frac{CN}{a_{\overline{n}|i}} + L \tag{67}$$

Por tratarse el empréstito normalizado de un normal tipo I las restantes fórmulas son:

$$N_{s+1} = N_1 \frac{a_{\overline{n-s}|i}}{a_{\overline{n}|i}} \quad ; \quad M_s = N_1\left(1 - \frac{a_{\overline{n-s}|i}}{a_{\overline{n}|i}}\right) \tag{68}$$

$$M_{s+1} = M_s(1+i) = M_1(1+i)^s \quad ; \quad M_1 = \frac{a' - CN_1 i}{C} = \frac{N_1}{s_{\overline{n}|i}}$$

En cuanto a las ecuaciones de los tantos efectivos se tiene:

$$CN_1 = a\, \mathbf{a}_{\overline{n}|i_p} \tag{69}$$

$$C = Ci\, \mathbf{a}_{\overline{s}|i_R} + C(1+i_R)^{-s} \Rightarrow i_R = i \tag{70}$$

para las obligaciones que no reciban lote y para las que resulten premiadas con él

$$C = Ci\, \mathbf{a}_{\overline{s}|i_r} + (C + I_s)(1+i_R)^{-s} \tag{71}$$

siendo I_s el lote que corresponde a un título.

11.2.—EMPRESTITO CON ANUALIDAD COMERCIAL CONSTANTE Y LOTE VARIABLE

Por ser su anualidad comercial

$$a_r = CN_r i + CM_r + L_r \tag{72}$$

se tendrá la normalización

$$a - L_r = CN_r i + CM_r \Rightarrow a'_r = CN_r i + CM_r, \quad \text{con} \quad a'_r = a - L_r \tag{73}$$

y al corresponder a un empréstito normal tipo II se sigue

$$CN_1 = \sum_{r=1}^{n} a'_r(1+i)^{-r} = \sum_{r=1}^{n} (a - L_r)(1+i)^{-r} = a\, \mathbf{a}_{\overline{n}|i} - \sum_{r=1}^{n} L_r(1+i)^{-r} \tag{74}$$

luego la anualidad es:

$$a = \frac{CN_1 + \sum_{r=1}^{n} L_r(1+i)^{-r}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i}}$$

Plantearse las restantes fórmulas es sencillo, si bien su operatividad es escasa mientras no se impongan variaciones a los lotes de acuerdo con alguna ley específica. Así, por ejemplo, los lotes varían en progresión aritmética de razón d, es decir, es $L_r = L_{r-1} + d$, se tiene:

$$a = \frac{CN_1 + A_{(L_1;\,d)\,\overline{n}|i}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i}} = \frac{CN_1}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i}} + \left(L_1 + \frac{d}{i} + dn\right) - \frac{dn}{i\,\mathbf{a}_{\overline{n}|i}} \tag{76}$$

$$M_s = M_s(1+i) - \frac{d}{c} \quad ; \quad M_1 = \frac{a'_1 - CN_1 i}{C} = \frac{a - L_1 - CN_1 i}{C} \tag{77}$$

Las ecuaciones de los tantos efectivos son análogas a las de 11.1.

Ejemplo.—Calcular la anualidad comercial constante, los tantos efectivos y los tantos de rendimiento de un empréstito con las siguientes características:

- **Número de títulos: 60.000.**
- **Valor nominal de cada título: 10.000 pts.**
- **Duración de la emisión: 6 años.**
- **Abono de un lote de 100.000 pts. en cada uno de los tres primeros años y de 130.000 pts. en cada uno de los restantes, a repartir entre las diez primeras obligaciones que se amorticen en cada sorteo.**
- **Pago de cupones anuales pospagables de 1.200 pts. por título.**

La estructura de anualidad es:

$$\text{Años 1, 2 y 3} \quad ; \quad a = CN_r i + CM_r + L_1$$

$$\text{Años 4, 5 y 6} \quad ; \quad a = CN_r i + CM_r + L_2$$

obteniéndose la normalización:

$$\text{Años 1, 2 y 3:} \quad a - L_1 = CN_r i + CM_r \;\Rightarrow\; a'_1 = CN_r i + CM_r, \quad \text{con} \quad a'_1 = a - L_1$$

$$\text{Años 4, 5 y 6:} \quad a - L_2 = CN_r i + CM_r \;\Rightarrow\; a'_2 = CN_r i + CM_r, \quad \text{con} \quad a'_2 = a - L_2$$

un empréstito normal tipo II con ecuación de equivalencia:

$$CN_1 = a'_1 \, \mathbf{a}_{\overline{3}|i} + a'_2 \; {}^{3}/\mathbf{a}_{\overline{3}|i} = (a - L_1)\, \mathbf{a}_{\overline{3}|i} + (a - L_2)\; {}^{3}/\mathbf{a}_{\overline{3}|i} =$$
$$= a\, \mathbf{a}_{\overline{6}|i} - L_1\, \mathbf{a}_{\overline{3}|i} - L_2\; {}^{3}/\mathbf{a}_{\overline{3}|i}$$

despejando y sustituyendo valores:

$$a = \frac{CN_1 + L_1\, \mathbf{a}_{\overline{3}|i} + L_2\; {}^{3}/\mathbf{a}_{\overline{3}|i}}{\mathbf{a}_{\overline{6}|i}} = \frac{600.000.000 + 100.000\, \mathbf{a}_{\overline{3}|0,12} + 130.000\; 3/\mathbf{a}_{\overline{3}|0,12}}{\mathbf{a}_{\overline{6}|0,12}} =$$
$$= 146.047.905{,}8$$

El tanto efectivo emisor i_p que coincide con i_a se obtiene en la ecuación:

$$600.000.000 = 146.047.905{,}8\, \mathbf{a}_{\overline{6}|i_p} \;\Rightarrow\; i_p = 0{,}1203$$

Las ecuaciones de los tantos de rendimiento y los valores que se obtienen son:

a) Obligaciones que no reciben lote

$$10.000 = 1.200\, \mathbf{a}_{\overline{s}|i_R} + 10.000(1 + i_R)^{-s} \;\Rightarrow\; i_R = 0{,}12 \text{ para todo s}$$

b) Obligaciones que son premiadas con lote

Años 1, 2 y 3: $10.000 = 1.200\, \mathbf{a}_{\overline{s}|i_R} + 20.000(1+i_R)^{-s} \Rightarrow \begin{cases} s=1: & i_R = 1{,}1200 \\ s=2: & i_R = 0{,}5173 \\ s=3: & i_R = 0{,}3579 \end{cases}$

Años 4, 5 y 6: $10.000 = 1.200\, \mathbf{a}_{\overline{s}|i_R} + 23.000(1+i_R)^{-s} \Rightarrow \begin{cases} s=4: & i_R = 0{,}3184 \\ s=5: & i_R = 0{,}2718 \\ s=6: & i_R = 0{,}2388 \end{cases}$

12.—EMPRESTITOS CON INTERESES POSPAGABLES Y GASTOS DE ADMINISTRACION

Si los gastos de administración son el g_1 por uno sobre los intereses y el g_2 por uno sobre la amortización, la anualidad comercial es:

$$a_r = CN_r i_r + CM_r + CN_r i_r g_1 + CM_r g_2 = CN_r i_r (1+g_1) + CM_r(1+g_2) \quad (78)$$

y para el caso particular de anualidades y réditos constantes resulta:

$$a = CN_r i(1+g_1) + CM_r(1+g_2) \quad (79)$$

siendo su correspondiente normalizada:

$$\frac{a}{1+g_2} = CN_r \frac{i(1+g_1)}{1+g_2} + CM_r \Leftrightarrow a' = CN_r i' + CM_r, \quad \text{con } a' = \frac{a}{1+g_2}; \quad i' = \frac{i(1+g_1)}{1+g_2} \quad (80)$$

La anualidad se obtiene así:

$$CN_1 = a'\, \mathbf{a}_{\overline{n}|i'} = \frac{a}{1+g_2} \mathbf{a}_{\overline{n}|i'} \Rightarrow a = \frac{CN_1(1+g_2)}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i'}} \quad (81)$$

La ecuación del tanto efectivo emisor es:

$$CN_1 = a\, \mathbf{a}_{\overline{n}|i_p} = \frac{CN_1(1+g_2)}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i'}} \mathbf{a}_{\overline{n}|i_p} \Rightarrow \mathbf{a}_{\overline{n}|i_p} = \frac{\mathbf{a}_{\overline{n}|i'}}{1+g} \quad (82)$$

y la del conjunto de las obligacionistas

$$CN_1 = \sum_{r=1}^{n} (CN_r i + CM_r)(1+i_a)^{-r} = \sum_{r=1}^{n} a_{a,r}(1+i)^{-r} \quad (83)$$

ya que la anualidad que perciben es la parte de **a** que corresponde a intereses y amortización; pero no a los gastos de administración.

Las restantes ecuaciones son idénticas a las de 10.1.

En el caso particular $g_1 = g_2 = g$ se tiene:

$$a' = \frac{a}{1+g} \quad ; \quad i' = i \quad ; \quad a = \frac{CN_1(1+g)}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i'}} \quad ; \quad (1+g)\,\mathbf{a}_{\overline{n}|i_p} = \mathbf{a}_{\overline{n}|i_a} = \mathbf{a}_{\overline{n}|i'} \qquad (84)$$

13.—EMPRESTITOS CON INTERESES FRACCIONADOS POSPAGABLES

En ocasiones, para aumentar los alicientes de la suscripción de un empréstito se suelen abonar los intereses o cupones fraccionadamente en el año. Lo normal es que se efectúe el fraccionamiento en períodos de igual medida y que los cupones sean constantes con vencimiento al final de cada parte del año.

Si el cupón que vence al final de cada m-simo de año es $Ci^{(m)}$ los vencimientos que por este concepto se producen, en un año cualquiera, son:

	$Ci^{(m)}$	$Ci^{(m)}$	......	$Ci^{(m)}$	$Ci^{(m)}$
$r-1$	$r-1+\frac{1}{m}$	$r-1+\frac{2}{m}$	......	$r-1+\frac{m-1}{m}$	r

y equivalen a un único pago a fin de año por el valor:

$$Ci^{(m)}[(1+i^{(m)})^{m-1} + (1+i^{(m)})^{m-2} + \cdots + (1+i^{(m)}) + 1] = Ci^{(m)}\,\frac{(1+i^{(m)})^{m-1}-1}{i^{(m)}} = Ci \qquad (85)$$

ya que $i = (1+i^{(m)})^m - 1$ es el tanto efectivo anual correspondiente al rédito $i^{(m)}$ del m-simo de año.

La anualidad comercial constante, con cupón anual equivalente a los m vencimientos, es:

$$a = CN_r[(1+i^{(m)})^m - 1] + CM_r = CN_r i + CM_r \qquad (86)$$

que para el tanto i es un empréstito normal tipo I por lo que las fórmulas de 10.1 son aplicables en este caso.

Calcular los m términos que vencen en cada año, previo cálculo de N_r y M_r, es inmediato a través de:

$$a_{r,h} = CN_r i^{(m)}, \quad (h = 1, 2, -, m-1) \quad ; \quad a_{r,m} = CN_r i^{(m)} + CM_r$$

Ejemplo.—Construir, por el método de redondeo de las amortizaciones teóricas, el cuadro de amortización de un empréstito con las siguientes características:

- **Número de títulos emitidos: 100.000.**
- **Valor nominal de cada título; 1.000 pts.**
- **Abono de cupones semestrales constantes de 50 pts. por título.**
- **Duración de la emisión: 4 años.**
- **Anualidad comercial constante.**

Haciendo uso de las relaciones:

$$i=(1+i^{(2)})^2-1=(1+0{,}05)^2-1=0{,}1025$$

$$M_s=M_{s-1}(1+i) \quad ; \quad M_1=\frac{N_1}{S_{\overline{n}|i}}$$

se tiene los siguientes valores teóricos de amortización:

$$M_1=\frac{100.000}{S_{\overline{n}|0{,}1025}}=21.467{,}97 \quad ; \quad M_2=M_1(1+0{,}1025)=23.668{,}44$$

$$M_3=M_2(1+0{,}1025)=26.094{,}45 \quad ; \quad M_4=M_3(1+0{,}1025)=28.769{,}13$$

debiendo procederse a redondear por exceso M_1 y M_3 y por defecto M_2 y M_4.

Una vez calculadas las M_s se procede como en casos anteriores y se tiene:

CUADRO DE AMORTIZACION POR EL METODO DE REDONDEO DE LAS AMORTIZACIONES TEORICAS

Fin de período s	Términos amortizativos $I_s^{(2)}+CM_s$	Intereses $I_s^{(2)}=CN_si^{(2)}$	Amortización CM_s	Títulos amortizados en el año M_s	Total títulos amortizados $\mathcal{M}_s$	Títulos vivos o en circulación N_{s+1}
Origen	—	—	—	—	—	100.000
1/2	5.000.000	5.000.000	—	—	—	100.000
1	26.468.000	5.000.000	21.468.000	21.468	21.468	78.532
1 1/2	3.926.600	3.926.600	—	—	21.468	78.532
2	27.594.600	3.926.600	23.668.000	23.668	45.136	54.864
2 1/2	2.743.200	2.743.200	—	—	45.136	54.864
3	28.838.200	2.743.200	26.095.000	26.095	71.231	28.769
3 1/2	1.438.450	1.438.450	—	—	71.231	28.769
4	30.207.450	1.438.450	28.769.000	28.769	100.000	0

14.—EMPRESTITOS COMPLEJOS CON INTERESES POSPAGABLES

Son aquellos en los que intervienen simultáneamente diversas características comerciales. Con el fin de ver cómo se aplica la metodología para su solución se plantea el siguiente supuesto:

— Número de títulos emitidos: N_1.
— Valor nominal de cada título: C pts.
— Valor o precio de emisión: V pts.
— Gastos iniciales a cargo del emisor: G_p^i.
— Duración: n años.
— Abono de cupones semestrales a rédito $i^{(2)}$.
— Amortización seca.
— Abono de una prima de amortización constante de P pts. por título.
— Abono de un lote anual constante de cuantía L a repartir por partes iguales entre los h primeros títulos que se amorticen en cada período, los cuales se amortizarán por el valor nominal.
— Gastos de administración del g por uno sobre todas las cantidades pagadas.
— Anualidad comercial constante.

1) Cálculo de la anualidad comercial constante.

Estructura de la anualidad:

$$a=[CN_r((1+i^{(2)})^2-1)+(C+P)M_r-Ci^{(2)}M_r+(L-hP)](1+g)$$

Normalización:

$$\frac{a}{1+g}=CN_r((1+i^{(2)})^2-1)+(C+P-Ci^{(2)})M_r+L-hP$$

$$\frac{\frac{a}{1+g}-L+hP}{C+P-Ci^{(2)}}\,C=CN_r\,\frac{(1+i^{(2)})^2-1}{C+P-Ci^{(2)}}\,C+CM_r \;\Rightarrow\; a'=CN_ri'+CM_r$$

con fórmulas de conversión

$$i'=\frac{(1+i^{(2)})^2-1}{C+P-Ci^{(2)}}\,C \quad ; \quad a'=\frac{\frac{a}{1+g}-L+hP}{C+P-Ci^{(2)}}\,C$$

Por tratarse de un empréstito normalizado tipo I se tiene:

$$CN_1=a'\,\mathbf{a}_{\overline{n}|i'}=\frac{\frac{a}{1+g}-L+hP}{C+P-Ci^{(2)}}\,C\,\mathbf{a}_{\overline{n}|i'}$$

de donde se deduce la anualidad comercial constante que paga el emisor,

$$a=\left(\frac{(C+P-Ci^{(2)})N_1}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i'}}+L-hP\right)(1+g)$$

Obsérvese que la anualidad que reciben los obligacionistas es el segundo miembro de (79) cuyo valor sintetizado es $a_a=\dfrac{a}{1+g}$.

2) Por tratarse el empréstito normalizado de un tipo I sus fórmulas, para calcular los títulos vivos y amortizados, son:

$$N_{s+1}=N_1\ \frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i'}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i'}}\quad ;\quad \mathcal{M}_s=N_1\left(1-\frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i'}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i'}}\right)=N_1\ \frac{S_{\overline{s}|i'}}{S_{\overline{n}|i'}}\tag{84}$$

$$M_s=M_{s-1}(1+i')=M_1(1+i')^{s-1}\quad ;\quad M_1=\frac{N_1}{S_{\overline{n}|i'}}$$

3) Tanto efectivo emisor.

El emisor recibe neto en el origen $E_p=VN_1-G_p^i$ y entrega:

— Al final de cada primer semestre: $a_{r,1}=CN_ri^{(2)}(1+g)$.

— Al final de cada segundo semestre: $a_{r,2}=[CN_ri^{(2)}+(C+P-Ci^{(2)})M_r+L-hP](1+g)$.

luego su tanto efectivo es el valor i_p que cumple la igualdad

$$E_p=VN_1-C_p^i=\sum_{r=1}^{n}a_{r,1}(1+i_p)^{-\left(r-\frac{1}{2}\right)}+\sum_{r=1}^{n}a_{r,2}(1+i)^{-r}\tag{85}$$

A efectos prácticos, la sustitución de la anualidad comercial de (83) en lugar de $a_{r,1}$ y $a_{r,2}$ proporciona en la ecuación

$$E_p=VN_1-G_p^i=a\ \mathbf{a}_{\overline{n}|i_p}\tag{85'}$$

soluciones de i_p con la suficiente aproximación.

4) Tanto efectivo obligacionista.

Los obligacionistas entregan en el origen $E_a=VN_1$ y reciben:

— Al final de cada primer semestre: $CN_ri^{(2)}=\dfrac{a_{r,1}}{1+g}$.

— Al final de cada segundo semestre: $CN_ri^{(2)}+(C+P-Ci^{(2)})M_r+L-hP=\dfrac{a_{r,2}}{1+g}$.

Su tanto efectivo será el valor i_a solución de la ecuación:

$$E_a = VN_1 = \sum_{r=1}^{n} \frac{a_{r,1}}{1+g} (1+i_a)^{-\left(r-\frac{1}{2}\right)} + \sum_{r=1}^{n} \frac{a_{r,2}}{1+g} (1+i_a)^{-r} \tag{86}$$

En lugar de (86) puede utilizarse, para obtener valores aproximados, la (86'):

$$E_a = VN_1 = \frac{a}{1+g} \mathbf{a}_{\overline{n}|i_a} \tag{86'}$$

5) Tanto de rendimiento de un título.

a) Caso de no percepción de lote.

— Si la corriente de ingresos obtenida por el precio de suscripción V es:

	$Ci^{(2)}$	$Ci^{(2)}$	$Ci^{(2)}$	$Ci^{(2)}$ ...		$Ci^{(2)}$	$C+P$
0		1		2	··· s–1		s

el tanto de rendimiento será el valor i_R tal que:

$$V = 2Ci^{(2)} \mathbf{a}^{(2)}_{\overline{s}|i_R} + (C+P-Ci^{(2)})(1+i_R)^{-s} \qquad (s=1, 2, \ldots, n) \tag{87}$$

b) Caso de percepción de lote.

Los ingresos obtenidos por V son:

	$Ci^{(2)}$	$Ci^{(2)}$	$Ci^{(2)}$	$Ci^{(2)}$		$Ci^{(2)}$	$C+\frac{L}{h}$
0		1		2	··· s–1		s

por lo que el valor de i_R en este supuesto es:

$$V = 2Ci^{(2)} \mathbf{a}^{(2)}_{\overline{s}|i_R} + \left(C + \frac{L}{h} - Ci^{(2)}\right)(1+i_R)^{-s} \tag{88}$$

Ejemplo.—En el supuesto analizado en el presente epígrafe para los valores:

$$N_1 = 100.000 \quad ; \quad C = 5.000 \quad ; \quad V = 4.900 \quad ; \quad G_p^i = 10.000.000 \quad ; \quad i^{(2)} = 0{,}06$$

$$P = 800 \quad ; \quad L = 1.000.000 \quad ; \quad h = 100 \quad ; \quad g = 0{,}01 \quad ; \quad n = 5$$

Calcular: 1) Cuantía de la anualidad comercial constante; 2) Cuadro de amortización por redondeo; 3) Tanto efectivo emisor; 4) Tanto efectivo obligacionista; 5) Tanto de rendimiento de una obligación que se amortiza en el segundo año.

1) Anualidad comercial constante

$$i' = \frac{(1+i^{(2)})^2-1}{C+P-Ci^{(2)}}\,C = \frac{(1+0{,}06)^2-1}{5.000+800-300}\,5.000 = 0{,}11\widehat{236}$$

$$a = \left(\frac{(C+P-Ci^{(2)})N_1}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i'}} + L - hP\right)(1+g) = \left(\frac{5.500 \times 100.000}{\mathbf{a}_{\overline{5}|0{,}11236}} + 1.000.000 - 80.000\right)1{,}01 =$$

$$= 150.619.513{,}9 \times 1{,}01 = 152.125.709{,}1$$

2) Cuadro de amortización.

A partir de

$$M_s = M_{s-1}(1+i') = M_{s-1}(1+0{,}11236) \quad ; \quad M_1 = \frac{N_1}{S_{\overline{n}|i'}} = \frac{100.000}{S_{\overline{5}|0{,}11236}} = 15.981{,}73$$

se tiene:

$$M_2 = 17.777{,}49 \qquad M_3 = 19.775{,}04 \qquad M_4 = 21.997{,}03 \qquad M_5 = 24.468{,}70$$

debiendo redondearse por exceso M_1 y M_5 ya que la suma de las partes enteras es 99.998.

Obtenida la columna M_s se procede a calcular $\mathcal{M}_s$ y N_{s+1} y a partir de estos valores las de los valores de reembolso, intereses, gastos de administración y términos amortizativos semestrales.

El cuadro se resume en la página 224.

3) Tanto efectivo emisor.

Su valor se obtiene aplicando la ecuación (85) en este supuesto y resulta:

$$E_p = VN_1 - G_p^i = 480.000.000 = \sum_{s=1}^{5} (1+g)I_{s-1/2}^{(2)}(1+i_p)^{-(s-1/2)} + \sum_{s=1}^{5} (1+g)(I_s^{(2)}+A_s+L)(1+i_p)^{-s}$$

con la solución $i_p = 0{,}1775$.

Si se utiliza la (85′) se tiene:

$$480.000.000 = 152.125.709{,}1\ \mathbf{a}_{\overline{5}|i} \Rightarrow i_p = 0{,}1761$$

que difiere de la anterior en $0{,}1775 - 0{,}1761 = 0{,}0014$.

4) Tanto efectivo obligacionista.

La ecuación (86) adaptada a este caso

$$E_a = VN_1 = 490.000.000 = \sum_{s=1}^{5} I_{s-1/2}(1+i)^{-(s-1/2)} + \sum_{s=1}^{5} (I_s^{(2)}+A_s+L)(1+i_a)^{-s}$$

da la solución $i_a = 0{,}1639$.

La solución aproximada de (85′)

$$490.000.000 = 150.619.513{,}9\ \mathbf{a}_{\overline{5}|i_a} \Rightarrow i_a = 0{,}1628$$

Fin de periodo s	Término amortizativo (2)+(3)+(4)+(5) (1)	Gastos de administración g[(3)+(4)+(5)] (2)	Intereses o cupones $I^{(2)}_{s-1/2}=CN_s i^{(2)}$ $I^{(2)}_s=C(N_s-M_s)i^{(2)}$ (3)	Amortización $A_s=CM_s+P(M_s-h)$ (4)	Lotes L (5)	Títulos amortizados en el año M_s (6)	Total títulos amortizados $\mathcal{M}_s$ (7)	Títulos vivos o en circulación N_{s+1} (8)
Origen	—	—	—	—	—	—	—	100.000
1/2	30.300.000	300.000	30.000.000	—	—	—	—	100.000
1	120.009.210	1.188.210	25.205.400	92.615.600	1.000.000	15.982	15.982	84.018
1 1/2	25.457.454	252.054	25.205.400	—	—	—	15.982	84.018
2	125.137.889	1.238.989	19.872.300	103.026.600	1.000.000	17.777	33.759	66.241
2 1/2	20.071.023	198.723	19.872.300	—	—	—	33.759	66.241
3	130.850.348	1.295.548	13.939.800	114.615.000	1.000.000	19.775	53.534	46.466
3 1/2	14.079.198	139.398	13.939.800	—	—	—	53.534	46.466
4	137.201.733	1.358.433	7.340.700	127.502.600	1.000.000	21.997	75.531	24.469
4 1/2	7.414.107	73.407	7.340.700	—	—	—	75.531	24.469
5	144.268.602	1.428.402	0	141.840.200	1.000.000	24.469	100.000	0

4) Tanto de rendimiento de una obligación que se amortiza en el segundo año:

a) Caso de no percepción de lote.

4.900	300	300	300	5.000 + 800
0	1/2	1	1 + 1/2	2

$$4.900 = 300\, a_{\overline{3}|i_R^{(2)}} + 5.800(1 + i_R^{(2)})^{-4} \Rightarrow i_R^{(2)} = 0{,}0881 \Rightarrow i_R = 0{,}1840$$

b) Caso de percepción de lote.

4.900	300	300	300	5.000 + 10.000
0	1/2	1	1 + 1/2	2

$$4.900 = 300\, a_{\overline{3}|i_R^{(2)}} + 15.000(1 + i_R^{(2)})^{-4} \Rightarrow i_R^{(2)} = 0{,}35177 \Rightarrow i_R = 0{,}8273$$

15.—EMPRESTITOS CON INTERESES PREPAGABLES O ANTICIPADOS

Analizados en los puntos anteriores los empréstitos con intereses pospagables y características comerciales nos referiremos al caso de interés anticipado.

El estudio de la normalización presenta grandes similitudes con lo estudiado con intereses periódicos pospagables y por ello nos limitaremos a plantear un caso complejo con combinación de características que viene dado por:

— Números de títulos emitidos: N_1.
— Valor nominal de cada título: C pts.
— Valor o precio de emisión: V pts.
— Gastos iniciales a cargo del emisor: G_p^i.
— Duración: n años.
— Abono de un cupón anual a rédito constante z.
— Amortización con prima constante P.
— Abono de un lote anual constante L a repartir por partes iguales entre h obligaciones, las cuales pierden la prima de amortización.
— Gastos de administración del g por uno sobre todas las cantidades pagadas a los obligacionistas.
— Anualidad comercial constante.

1) Cálculo de la anualidad comercial constante.

Estructura de la anualidad:

$$a = [CN_{r+1}z + (C + P)M_r + L - hP](1 + g) \qquad (89)$$

Normalización:

$$\frac{\dfrac{a}{1+g}-L+hP}{C+P}\, C = CN_{r+1}\,\frac{zC}{C+P}+CM_r \;\Rightarrow\; a' = CN_{r+1}z'+CM_r \tag{90}$$

con fórmulas de conversión

$$a' = \frac{\dfrac{a}{1+g}-L+hP}{C+P}\, C \quad ; \quad z' = \frac{zC}{C+P} \tag{91}$$

El empréstito normalizado pertenece al tipo I por lo que se tiene:

$$CN_1 = CN_1 z' + a'(1-z')\,\frac{1-(1-z')^n}{z'} = a'\,\frac{1-(1-z')^n}{z'} =$$

$$= \frac{\dfrac{a}{1+g}-L+hP}{C+P}\, C\,\frac{1-(1-z')^n}{z'} \tag{92}$$

Obteniéndose el valor de la anualidad:

$$a = \left[(C+P)N_1\,\frac{z'}{1-(1-z')^n}+L-hP\right](1+g) \tag{93}$$

Nótese que los obligacionistas sólo reciben $\dfrac{a}{1+g}$.

2) Las expresiones que proporcionan el cálculo de los títulos vivos y amortizados son:

$$N_{s+1} = N_1\,\frac{1-(1-z')^{n-s}}{1-(1-z')^n} \quad ; \quad \mathcal{M}_s = N_1 - N_{s+1} = N_1\,\frac{(1-z')^{n-s}-(1-z')^n}{1-(1-z')^n}$$

$$M_s = M_{s+1}(1-z') = M_n(1-z')^{n-s} \quad ; \quad M_n = \frac{a'}{C} = N_1\,\frac{z'}{1-(1-z')^n} \tag{94}$$

3) Tanto efectivo emisor.

El emisor percibe en el origen el líquido $E_p = VN_1 - G_p^i$ y entrega los intereses anticipados del primer período con sus gastos $CN_1 z(1+g)$ y una renta constante de n términos de valor a. El tanto efectivo será el valor z_p que satisface la igualdad

$$E_p = VN_1 - G_p^i = CN_1 z(1+g) + a(1-z_p)\,\frac{1-(1-z_p)^n}{z_p} \tag{95}$$

4) Tanto efectivo obligacionista.

La prestación efectiva es $E_a = VN_1$ a cambio de la cual reciben los intereses $CN_1 z$ del primer año y la renta anual constante, durante n años, de valor $\frac{a}{1+g}$. El tanto efectivo representado por z_a se obtiene en:

$$E_a = VN_1 = CN_1 z + \frac{a}{1+g}\,(1-z_a)\,\frac{1-(1-z_a)^n}{z_a} \tag{96}$$

5) Tanto de rendimiento de un título que se amortiza en el año s.

a) Caso de no percepción de lote.

A cambio del precio V se recibe:

Cz	Cz	Cz	Cz	C + P
0	1	2	s–1	s

por lo que el tanto de rendimiento z_R se obtendrá en:

$$V = Cz\,\frac{1-(1-z_R)^s}{z_R} + (C+P)(1-z_R)^s \tag{97}$$

b) Caso de percepción de lote

$$V = Cz\,\frac{1-(1-z_R)^s}{z_R} + \left(C + \frac{L}{h}\right)(1-z_R)^s \tag{98}$$

Ejemplo.—Aplicar el supuesto desarrollado para los valores:

$$\mathbf{N_1 = 80.000 \quad ; \quad C = 10.000 \quad ; \quad V = 9.750 \quad ; \quad G_p^i = 20.000.000 \quad ; \quad z = 0{,}12}$$

$$\mathbf{P = 500 \quad ; \quad L = 1.000.000 \quad ; \quad h = 200 \quad ; \quad g = 0{,}015}$$

y calcular el cuadro de amortización por redondeo.

1) Anualidad comercial constante

$$z' = \frac{zC}{C+P} = \frac{1.200}{10.500} = 0{,}114286$$

$$a = \left[(C+P)N_1\,\frac{z'}{1-(1-z')^n} + L - hP\right](1+g) = \left[10.500 \times 80.000\,\frac{z'}{1-(1-z')^{10}} + 1.000.000 - \right.$$

$$\left. - 200 \times 500\right](1+0{,}015) = 137.481.536{,}8 \times 1.015 = 139.543.759{,}9$$

2) Tanto efectivo emisor

$$E_p = VN - G_p^i = 760.000.000 = 97.440.000 + 139.543.759{,}9(1 - z_p)\ \frac{1-(1-z_p)^{10}}{z}$$

$$z_p = 0{,}1415$$

3) Tanto efectivo obligacionista

$$E_a = VN_1 = 780.000.000 = 96.000.000 + 137.481.536{,}8(1 - z_a)\ \frac{1-(1-z_a)^{10}}{z_a}$$

$$z_a = 0{,}1321$$

4) Tanto de rendimiento de una obligación.

a) Caso de no percepción de lote

$$9.750 = 1.200\ \frac{1-(1-z_R)^s}{z_R} + 10.500(1-z_R)^s$$

b) Caso de percepción de lote

$$9.750 = 1.200\ \frac{1-(1-z_R)^s}{z_R} + 15.000(1-z_R)^s$$

Las soluciones de z_R para los distintos valores de s son:

s	sin lote	con lote	s	sin lote	con lote
1	0,1857	0,4300	6	0,1307	0,1680
2	0,1529	0,2861	7	0,1292	0,1593
3	0,1418	0,2289	8	0,1280	0,1528
4	0,1363	0,1982	9	0,1271	0,1478
5	0,1329	0,1802	10	0,1265	0,1439

5) Cuadro de amortización

De $M_{10} = 80.000\ \frac{z'}{1-(1-z')^{10}} = 13.007{,}77$ y $M_s = M_{s+1}(1-z')$ se sigue:

$M_9 = 11.521{,}16$; $M_8 = 10.204{,}46$; $M_7 = 9.038{,}23$; $M_6 = 8.005{,}29$

$M_5 = 7.090{,}40$; $M_4 = 6.280{,}07$; $M_3 = 5.562{,}35$; $M_2 = 4.926{,}65$; $M_1 = 4.363{,}61$

redondeándose por exceso los números M_1, M_2, M_8 y M_{10}.

El cuadro se recoge en la página 229.

Fin de periodo s	Anualidad $(2)+(3)+(4)+(5)$ (1)	Gastos de administración $g(I^*_{s+1}+A^*_s+L)$ (2)	Intereses o cupones $I^*_{s+1}=CN_{s+1}2$ (3)	Amortización $A^*=CM_s+P(M_s-h)$ (4)	Lotes L (5)	Títulos amortizados en el año M (6)	Total títulos amortizados // (7)	Títulos vivos o en circulación N_{s+1} (8)
Origen	97.440.000,0	1.440.000,0	96.000.000	—	—	—	—	80.000
1	139.547.478,0	2.062.278,0	90.763.200	45.722.000	1.000.000	4.364	4.364	75.636
2	139.546.564,5	2.062.264,5	84.850.800	51.633.500	1.000.000	4.927	9.291	70.709
3	139.539.561,0	2.062.161,0	78.176.400	58.301.000	1.000.000	5.562	14.853	65.147
4	139.542.606,0	2.062.206,0	70.640.400	65.840.000	1.000.000	6.280	21.133	58.867
5	139.539.561,0	2.062.161,0	62.132.400	74.345.000	1.000.000	7.090	28.223	51.777
6	139.541.083,5	2.062.183,5	52.526.400	83.952.500	1.000.000	8.005	36.228	43.772
7	139.541.997,0	2.062.197,0	41.680.800	94.799.000	1.000.000	9.038	45.266	34.734
8	139.549.609,5	2.062.309,5	29.434.800	107.052.500	1.000.000	10.205	55.471	24.529
9	139.542.301,5	2.062.201,5	15.609.600	120.870.500	1.000.000	11.521	66.992	13.008
10	139.546.260,0	2.062.260,0	—	136.484.000	1.000.000	13.008	80.000	0

16.—EMPRESTITOS CON PAGO DE INTERESES ACUMULADOS

Por las mismas razones expuestas en el epígrafe anterior nos limitaremos a plantear un caso con las características más usuales. Este es:

— Número de títulos emitidos: N_1.
— Valor nominal de cada título: C pts.
— Precio de emisión: V pts.
— Duración de la emisión: n años.
— Gastos iniciales a cargo del emisor: G_p^i.
— Abono de intereses acumulados a rédito constante i.
— Abono de un lote anual constante L a repartir por partes iguales entre h obligaciones.
— Gastos de administración del g por uno sobre todas las cantidades pagadas a los obligacionistas.
— Anualidad comercial constante.

1) Cálculo de la anualidad comercial constante.

Estructura de la anualidad

$$a=[C(1+i)^r M_r+L](1+g) \tag{99}$$

Normalización:

$$\frac{a}{1+g}-L=C(1+i)^r M_r \Rightarrow a'=C(1+i')^r M_r \tag{100}$$

con fórmulas de conversión

$$a'=\frac{a}{1+g}-L \quad ; \quad i'=i$$

Por tratarse el normalizado de un tipo I resulta:

$$CN_1=a'\,\mathbf{a}_{\overline{n}|i}=\left(\frac{a}{1+g}-L\right)\mathbf{a}_{\overline{n}|i} \tag{101}$$

de donde la anualidad comercial que paga el emisor es:

$$a=\left(\frac{CN_1}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i}}+L\right)(1+g) \tag{102}$$

recibiendo los obligacionistas $\frac{a}{1+g}$.

2) Las expresiones para determinar los títulos amortizados y vivos son:

$$N_{s+1}=N_1\left(1-\frac{\mathbf{a}_{\overline{s}|i}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i}}\right) \quad ; \quad \mathscr{M}_s=N_1-N_{s+1}=N_1\,\frac{\mathbf{a}_{\overline{s}|i}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i}} \tag{103}$$

$$M_{s+1}=M_s(1+i)^{-1}=M_1(1+i)^{-s} \quad ; \quad M_1=\frac{a'}{C(1+i)}=\frac{N_1}{\ddot{\mathbf{a}}_{\overline{n}|i}}$$

3) Tanto efectivo emisor.

Es el valor i_p que se obtiene en:

$$E_p=VN_1-G_p^i=a\,\mathbf{a}_{\overline{n}|i_p} \tag{104}$$

4) Tanto efectivo obligacionista.

Se calcula en la ecuación

$$E_a=VN_1=\frac{a}{1+g}\,\mathbf{a}_{\overline{n}|i_a} \tag{105}$$

5) Tanto de rendimiento de un título que se amortiza en el año s.

a) Caso de no percepción de lote.

De la ecuación

$$V(1+i_R)^s=C(1+i)^s \tag{106}$$

se sigue

$$i_R=(1+i)\sqrt[s]{\frac{C}{V}}-1$$

b) Caso de percepción de lote.

La ecuación

$$V(1+i_R)^s=C(1+i)^s+\frac{L}{h} \tag{107}$$

tiene por solución:

$$i_R=\sqrt[s]{\frac{C(1+i)^s+\dfrac{L}{h}}{V}}-1 \tag{108}$$

Ejemplo.—Calcular la anualidad comercial constante, el cuadro de amortización por redondeo, los tantos efectivos y los tantos de rendimiento del supuesto estudiado para los valores:

$$\mathbf{N_1=60.000 \quad ; \quad C=10.000 \quad ; \quad V=9.850 \quad ; \quad G_p^i=15.000.000 \quad ; \quad n=10}$$

$$\mathbf{i=0{,}125 \quad ; \quad L=600.000 \quad ; \quad h=100 \quad ; \quad g=0{,}02}$$

1) Anualidad comercial constante

$$a=\left(\frac{CN_1}{a_{\overline{n}|i}}+L\right)(1+g)=\left(\frac{600.000.000}{a_{\overline{10}|0,125}}+600.000\right)(1+0{,}02)=108.973.069{,}2\times 1{,}02=111.152.530{,}6$$

2) Cuadro de amortización.

De $M_1=\dfrac{60.000}{\ddot{a}_{\overline{10}|0,125}}=9.633{,}16$ y $M_{s+1}=M_s(1+0{,}125)^{-1}$ se sigue:

$M_2=8.562{,}81$; $M_3=7.611{,}39$; $M_4=6.765{,}68$; $M_5=6.013{,}94$; $M_6=5.354{,}72$

$M_7=4.751{,}75$; $M_8=4.223{,}78$; $M_9=3.754{,}47$; $M_{10}=3.337{,}31$

redondeándose por exceso M_2, M_4, M_5, M_6, M_7 y M_8.

Los resultados del cuadro se recogen en la página 233.

3) Tanto efectivo emisor

$$E_p=576.000.000=111.152.530{,}6\, a_{\overline{10}|i_p} \Rightarrow i_p=0{,}1417$$

4) Tanto efectivo obligacionista

$$E_a=591.000.000=108.973.069{,}2\, a_{\overline{10}|i_a} \Rightarrow i_a=0{,}1301$$

5) Tanto de rendimiento de una obligación.

a) Caso de no percepción de lote: $i_R=(1+0{,}125)\sqrt[s]{\dfrac{10.000}{9.850}}-1.$

b) Caso de percepción de lote: $i_R=\sqrt[s]{\dfrac{10.000(1+0{,}125)^s\,6.000}{9.850}}-1.$

Las soluciones son:

s	sin lote	con lote	s	sin lote	con lote
1	0,1421	0,6245	6	0,1278	0,1776
2	0,1335	0,3762	7	0,1274	0,1657
3	0,1307	0,2713	8	0,1271	0,1571
4	0,1293	0,2227	9	0,1269	0,1508
5	0,1284	0,1952	10	0,1267	0,1460

IV.4.—EMPRESTITOS DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA OBLIGACION

17.—LOS EMPRESTITOS COMO INVERSION DE CAPITAL

El obligacionista al comprar un título de un empréstito efectúa una inversión de capital. Esta decisión se realiza básicamente en función de la rentabilidad que proporcione el título, es decir, en función de su tanto efectivo. Esta rentabilidad depende del momento en que el título resulte amortizado, lo cual sólo es conocido a posteriori. Por ello, la

Fin de periodo s	Anualidad (2)+(3)+(4) (1)	Gastos de administración $g(A_s+L)$ (2)	Amortización $A_s+C_sM_s$ (3)	Lotes L (4)	Valores de reembolso $C_s=C(1+i)^s$ (5)	Títulos amortizados en el año M_s (6)	Total títulos amortizados $\mathcal{M}_s$ (7)	Títulos vivos o en circulación N_{s+1} (8)
Origen	—	—	—	—	—	—		60.000
1	111.150.675,0	2.179.425,0	108.371.250,0	600.000	11.250,00	9.633	9.633	50.367
2	111.154.978,1	2.179.509,4	108.375.468,7	600.000	12.656,25	8.563	18.196	41.804
3	111.146.900,0	2.179.351,0	108.367.549,0	600.000	14.238,28	7.611	25.807	34.193
4	111.157.826,8	2.179.565,2	108.378.261,6	600.000	16.018.07	6.766	32.573	27.427
5	111.153.688,5	2.179.484,1	108.374.204,4	600.000	18.020,32	6.014	38.587	21.413
6	111.158.338,2	2.179.575,3	108.378.763,0	600.000	20.272,87	5.346	43.933	16.067
7	111.158.295,8	2.179.574,4	108.378.721,4	600.000	22.806,97	4.752	48.685	11.315
8	111.158.333,6	2.179.575,2	108.378.758,4	600.000	25.657,85	4.224	52.909	7.091
9	111.138.700,5	2.179.190,2	108.359.510,3	600.000	28.865,08	3.754	56.663	3.337
10	111.142.363,7	2.179.262,0	108.363.101,7	600.000	32.473,21	3.337	60.000	0

medida de rentabilidad que proporciona el tanto de rendimiento de una obligación se concreta en un valor distinto según los años que viva dicha obligación.

El obligacionista tiene que tomar su decisión desconociendo la duración que alcanzará el título y se apoyará en la rentabilidad media que se espera obtener, optando por aquellas emisiones que la tengan más alta.

Los problemas que tiene el posible suscritor en el momento inicial pueden sintetizarse en: determinar la rentabilidad esperada del título y en estimar la duración de la inversión o período medio de maduración.

El comprador de un título entrega el precio de emisión V para recibir una corriente de ingresos integrada por los intereses (periódicos o acumulados), devolución principal, primas y esperanza de lotes. Mientras el título esté en circulación, el obligacionista recibirá los ingresos enumerados y cabe la posibilidad de que pueda efectuar alguna o algunas operaciones financieras transfiriendo sus derechos totales o parciales. Surge como consecuencia, el problema de valorar el título, en un determinado momento y las partes de que se compone, es decir, calcular su precio de mercado.

El valor de mercado también deberá conocerlo el emisor, sobre todo si desea proceder a amortizar anticipadamente los títulos (compra en bolsa o acuerdos con los obligacionistas) y no está prevista la posibilidad de reembolso anticipado.

18.—PROBABILIDADES DE SUPERVIVENCIA Y DE AMORTIZACION DE UNA OBLIGACION

Para el estudio de los problemas enumerados en el punto anterior es necesario introducir el cálculo de probabilidades.

a) Probabilidad de que una obligación en circulación al principio del año $s+1$ siga en circulación al principio del año $r+1$.

El número de casos posibles es N_{s+1}, obligaciones vivas al principio del año $s+1$, y el número de casos favorables es el de las que se encuentran en circulación al principio del año $r+1$, es decir, N_{r+1}. Esta probabilidad es:

$$ {}_{r}p_{s} = \frac{N_{r+1}}{N_{s+1}} \tag{109} $$

b) Probabilidad de que una obligación en circulación al principio del año $s+1$ se amortice en uno cualquiera de los $r-s$ siguientes años.

Es la contraria a la anterior por lo que:

$$ {}_{r}q_{s} = 1 - {}_{r}p_{s} = 1 - \frac{N_{r+1}}{N_{s+1}} = \frac{\mathcal{M}_r - \mathcal{M}_s}{N_{s+1}} \tag{110} $$

c) Probabilidad de que una obligación en circulación al principio del año $s+1$ resulte amortizada al final del año r.

$$ {}_{r/}q_{s} = \frac{M_r}{N_{s+1}} \tag{111} $$

d) Probabilidad de que una obligación en circulación al principio del año s + 1 reciba lote al final del año r.

En el año r las obligaciones que pueden aspirar a los lotes son las M_r que se amortizan. Si el número de los lotes es h_r, la probabilidad de recibir lote una de las M_2 es h_r/M_r. Por tanto, la probabilidad de que una obligación se amortice en r y sea premiada con lote es:

$$_{r/}q_s^I = \frac{M_r}{N_{s+1}} \cdot \frac{h_r}{M_r} = \frac{h_r}{N_{s+1}} \tag{112}$$

En el origen (s = 0) los valores (109) a (112) toman las siguientes expresiones:

$$_rp = \frac{N_{r+1}}{N_1} \quad ; \quad _rq = 1 - \frac{N_{r+1}}{N_1} = \frac{\mathcal{M}_r}{N_1} \quad ; \quad _{r/}q = \frac{N_r}{N_1} \quad ; \quad _{r/}q_s^I = \frac{h_r}{N_1} \tag{113}$$

Para el empréstito normal tipo I, y situados al principio del año s + 1, las anteriores probabilidades toman los valores específicos de la tabla siguiente:

Probabilidad	Intereses pospagables	Intereses prepagables	Intereses acumulados	
$_rp_s = \dfrac{N_{r+1}}{N_{s+1}}$	$\dfrac{a_{\overline{n-r}\rceil i}}{a_{\overline{n-s}\rceil i}}$	$\dfrac{1-(1-z)^{n-r}}{1-(1-z)^{n-s}}$	$\dfrac{a_{\overline{n}\rceil i} - a_{\overline{r}\rceil i}}{a_{\overline{n}\rceil i} - a_{\overline{s}\rceil i}}$	(114)
$_rq_s = 1 - \dfrac{N_{r+1}}{N_{s+1}}$	$1 - \dfrac{a_{\overline{n-r}\rceil i}}{a_{\overline{n-s}\rceil i}}$	$\dfrac{(1-z)^{n-r}-(1-z)^{n-s}}{1-(1-z)^{n-s}}$	$\dfrac{a_{\overline{r}\rceil i} - a_{\overline{s}\rceil i}}{a_{\overline{n}\rceil i} - a_{\overline{s}\rceil i}}$	(115)
$_{r/}q_s = \dfrac{M}{N_{s+1}}$	$\dfrac{(1+i)^{r-s-1}}{S_{\overline{n-s}\rceil i}}$	$\dfrac{z(1-z)^{n-r}}{1-(1-z)^{n-s}}$	$\dfrac{(1+i)^{-(r-s)}}{a_{\overline{n-s}\rceil i}}$	(116)

Tomando s = 0 se calculan las probabilidades en el origen de la emisión.

Ejemplo.—En un empréstito con las características:

- **Número de títulos emitidos: 50.000 pts.**
- **Nominal de cada título: 1.000 pts.**
- **Duración de la emisión: 10 años.**
- **Abono de intereses pospagables a rédito constante i = 12%.**
- **Anualidad constante.**

Calcular: 1.º situados en el origen de la emisión, y para r = 1, 2, —, 10, obtener la probabilidad de que un título resulte amortizado en el sorteo r, la probabilidad de que una obligación esté amortizada en uno cualquiera de los primeros r años y la probabilidad de que un título continúe en circulación al principio del período r + 1; 2.º ídem, situados al principio del séptimo año.

Aunque se trata de un empréstito normal tipo I y se pueden calcular las probabilidades haciendo uso de las fórmulas específicas (114), (115) y (116) procederemos a la resolución del ejercicio utilizando las fórmulas generales (109)-(111) en el apartado 1.º y las específicas en el 2.º.

1.º Se procede a aplicar en el orden escrito las siguientes fórmulas:

$$M_r = \frac{N_1}{s_{\overline{n}|i}} \quad ; \quad M_r = M_{r-1}(1+i) \quad ; \quad \mathcal{M}_r = \mathcal{M}_{r-1} + M_r \quad ; \quad N_{r-1} = N_r - M_r \quad ;$$

$$_{r/}q = \frac{M_r}{N_1} \quad ; \quad {}_rp = \frac{N_{r+1}}{N_1} \quad ; \quad {}_rq = \frac{\mathcal{M}_r}{N_1}$$

obteniéndose los siguientes resultados:

Años r	M_r	$\mathcal{M}_r$	N_{r+1}	$_{r/}q$	$_rq$	$_rp$
Origen	—	—	50.000	—	—	1,00000
1	2.849	2.849	47.151	0,05698	0,05698	0,94302
2	3.191	6.040	43.960	0,06382	0,12080	0,87920
3	3.574	9.614	40.386	0,07148	0,19228	0,80772
4	4.003	13.617	36.383	0,08006	0,27234	0,72766
5	4.483	18.100	31.900	0,08966	0,36200	0,63800
6	5.021	23.121	26.879	0,10042	0,46242	0,53758
7	5.624	28.745	21.255	0,11248	0,57490	0,42510
8	6.299	35.044	14.956	0,12598	0,70088	0,29912
9	7.055	42.099	7.901	0,14110	0,84198	0,15802
10	7.901	50.000	0	0,15802	1,00000	0,00000
	50.000			1,00000		

2.º Las fórmulas (109), (110), (111) se concretan en:

$$_{r/}q_6 = \frac{(1 \cdot 0,12)^{r-7}}{s_{\overline{10-6}|0.12}} \quad ; \quad {}_rq_6 = 1 - \frac{a_{\overline{10-r}|0.12}}{a_{\overline{10-6}|0.12}} \quad ; \quad {}_rp_6 = \frac{a_{\overline{10-r}|0.12}}{a_{\overline{10-6}|0.12}}$$

y para $r = 7$, 8, 9 y 10 se tiene:

r	$_{r/}q_6$	$_{r/}q_6$	$_rp_6$
7	0,2092	0,2092	0,7908
8	0,2343	0,4435	0,5565
9	0,2625	0,7060	0,2940
10	0,2940	1,0000	0,0000
	1,0000		

19.—RENTABILIDAD ESPERADA DE UNA OBLIGACION

Para que la emisión de un empréstito sea suscrita, deberá proporcionar el rendimiento medio i_a, precio que exigirán los obligacionistas por invertir su dinero; pero esta rentabilidad i_a solamente se dará si existe un único suscritor de la emisión, pues si no es así la conseguida por una obligación considerada aisladamente dependerá del momento en que el título se amortice y su cuantía sólo conocida a posteriori.

La decisión de suscribir un título se tendrá que efectuar teniendo en cuenta que todos los títulos del empréstito están sometidos a los mismos eventos y generan idénticos derechos futuros, lo que llevará a tomar la decisión del tanto medio de rentabilidad esperado por la obligación.

Refiriéndonos por ejemplo a un empréstito con primas e intereses pospagables constantes, en el que el suscritor paga un precio V a cambio de la variable aleatoria definida por:

$$\xi = \begin{cases} \text{Valores de variable: } Ci\, \mathbf{a}_{\overline{r|}x} + Cr(1+x)^{-r} \\ \text{Probabilidades: } \dfrac{M_r}{N_1} \end{cases} \qquad r = 1, 2, \ldots, n$$

la rentabilidad media x es el valor que se obtiene en:

$$V = \sum_{r=1}^{n} [Ci\, \mathbf{a}_{\overline{r|}x} + Cr(1+x)^{-r}]\, \frac{M_r}{N} \tag{117}$$

y su solución es $x = i_a$ como se comprueba seguidamente.

Operando en (117)

$$V = \sum_{r=1}^{n} Ci\, \mathbf{a}_{\overline{r|}x} \frac{M_r}{N_1} + \sum_{r=1}^{n} C_r(1+x)^{-r} \frac{M_r}{N_1} =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} Ci \frac{N_r}{N_1} (1+x)^{-r} + \sum_{r=1}^{n} C_r(1+x)^{-r} \frac{M_r}{N_1} =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \left(Ci \frac{N_r}{N_1} + C_r \frac{M_r}{N_1} \right) (1+x)^{-r} = \frac{1}{N_1} \sum_{r=1}^{n} (CiN_r + C_r M_r)(1+x)^{-r}$$

Como la ecuación del tanto efectivo del conjunto de los obligacionistas, para el empréstito que estamos considerando, es:

$$VN_1 = \sum_{r=1}^{n} a_{a,r}(1+i_a)^{-r} = \sum_{r=1}^{n} (CN_r i + C_r M_r)(1+i_a)^{-r}$$

al comparar ambas expresiones se sigue:

$$V = \frac{1}{N_1} \sum_{r=1}^{n} (CN_r i + C_r M_r)(1+i_a)^{-r} = \frac{1}{N_1} \sum_{r=1}^{n} (Ci\, N_r + C_r M_r)(1+x)^{-r} \Rightarrow x = i_a$$

El resultado obtenido $x = i_a$ es generalizable a todos los empréstitos con pago de intereses pospagables.

Cuando las obligaciones perciben **intereses anticipados** a cambio del precio V se recibe la variable:

$$\xi = \begin{cases} \text{Valores de la variable: } Cz \dfrac{1-(1-x^*)^r}{x^*} + C_r(1-x^*) \\ \text{Probabilidades: } \dfrac{M_r}{N_1} \end{cases}$$

y se demuestra que $x^* = z_a$.

En el caso de **intereses acumulados**, la contraprestación aleatoria de V es:

$$\xi = \begin{cases} \text{Valores de la variable: } C_r(1+x)^{-r} \\ \text{Probabilidades: } \dfrac{M_r}{N_1} \end{cases}$$

y también se cumple que $x = i_a$.

20.—VIDA MEDIA, VIDA MEDIANA Y VIDA FINANCIERA O MATEMATICA DE UNA OBLIGACION

Para estimar la duración esperada de la inversión en un título de un empréstito se han empleado promedios entre los que sobresalen la vida media, la vida mediana y la vida financiera o matemática.

20.1.—VIDA MEDIA

Recibe el nombre de vida media de una obligación la esperanza matemática del número de años que puede permanecer en circulación el título.

Situados al principio del período $s+1$ una obligación puede vivir $r-s$ años (con $r = s+1, s+2, \ldots, n$). La probabilidad de amortizar una obligación en el sorteo r es $\dfrac{M_r}{N_{s+1}}$, por lo que la vida media de una obligación será la esperanza matemática de la variable.

$$\zeta_s = \begin{cases} \text{Años de vida} & 1 & 2 & \cdots & (r-s) & \cdots & (n-s) \\ \text{Probabilidades} & \dfrac{M_{s+1}}{N_{s+1}} & \dfrac{M_{s+2}}{N_{s+1}} & \cdots & \dfrac{M_r}{N_{s+1}} & \cdots & \dfrac{M_n}{N_{s+1}} \end{cases}$$

que es:

$$m_s = E(\xi_s) = \sum_{r=s+1}^{n} (r-s)\,\frac{M_r}{N_{s+1}} = \sum_{r=s+1}^{n} \frac{N_r}{N_{s+1}} \tag{118}$$

y el valor en el origen resulta:

$$m = E(\xi) = \sum_{r=1}^{n} r\,\frac{M_r}{N_1} = \sum_{r=1}^{n} \frac{N_r}{N_1} \tag{119}$$

20.2.—VIDA MEDIANA

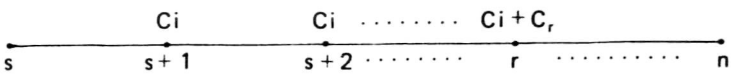
Se define como el tiempo que tiene que transcurrir para que el número de títulos vivos quede reducido a la mitad. Su valor, al principio del año $s+1$, representado por x, verifica:

$$N_{x+s+1} = \frac{N_{s+1}}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{N_{x+s+1}}{N_{s+1}} = \frac{\sum\limits_{r=s+1}^{s+x} M_r}{N_{s+1}} \tag{120}$$

Para $s=0$, se obtiene la vida mediana en el origen.

20.3.—VIDA FINANCIERA O MATEMATICA

Situados al principio del período $s+1$ de un empréstito con vencimiento de intereses pospagables constantes y valor de reembolso C_r, por una obligación que se amortice en el año r se percibirá.



con probabilidad $\frac{M_r}{N_{s+1}}$. Para un tanto t de valoración se define la **vida financiera** como el valor α que satisface la igualdad

$$Ci\,\mathbf{a}_{\overline{\alpha}|t} + C_r(1+t)^{-\alpha} = \sum_{r=s+1}^{n} \left[Ci\,\mathbf{a}_{\overline{r-s}|t} + C_r(1+t)^{(r-s)}\right] \frac{M_r}{N_1} \tag{121}$$

α es la duración cierta que hace posible la sustitución financiera de la amortización prevista en el empréstito por una única masiva de todos los títulos dentro de α años en el punto $s+\alpha$, como se resalta en la expresión:

$$\left[Ci\,\mathbf{a}_{\overline{\alpha}|t} + C_r(1+t)^{-\alpha}\right] N_1 = \sum_{r=s+1}^{n} \left[Ci\,\mathbf{a}_{\overline{r-s}|t} + C_r(1+t)^{-(r-s)}\right] M_r \tag{122}$$

La **vida financiera de los intereses** será el valor α_1 solución de la ecuación

$$\mathrm{Ci}\ \mathbf{a}_{\overline{\alpha_1}|t} = \sum_{r=s+1}^{n} \mathrm{Ci}\ \mathbf{a}_{\overline{r-s}|t} \frac{M}{N_{s+1}} \tag{123}$$

y la **vida financiera de los valores de reembolso** será el valor α_2 que satisfaga:

$$C_{\alpha_2}(1+t)^{-\alpha_2} = \sum_{r=s+1}^{n} C_r(1+t)^{-(r-s)} \frac{M_r}{N_{s+1}} \tag{124}$$

Si $C_r = C'$, valor de reembolso constante, es $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$, lo cual implica la existencia de una única vida matemática.

En el origen de la operación el valor lógico del tanto t es el tanto efectivo obligacionista i_a.

En el caso de un empréstito con intereses prepagables la **vida financiera al tanto anticipado t*** es el valor α que cumple la igualdad.

$$Cz \frac{1-(1-t^*)^{\alpha}}{t^*} + C_{\alpha}(1-t^*)^{\alpha} = \sum_{r=s+1}^{n} \left[Cz \frac{1-(1-t^*)^{r-s}}{t^*} + C_r(1-t^*)^{r-s} \right] \frac{M_r}{N_{s+1}} \tag{125}$$

siendo la vida financiera de los intereses el valor α_1 que se obtiene en:

$$Cz \frac{1-(1-t^*)^{\alpha_1}}{t^*} = \sum_{r=s+1}^{n} Cz \frac{1-(1-t^*)^{r-s}}{t^*} \frac{M_r}{N_{s+1}} \tag{126}$$

y la vida financiera de los valores de reembolso el α_2 tal que:

$$C_{\alpha_2}(1-t^*)^{\alpha_2} = \sum_{r=s+1}^{n} C_r(1-t^*)^{r-s} \frac{M_r}{N_{s+1}} \tag{127}$$

Para $C_r = C'$ es $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$.

Cuando el empréstito es con pago de intereses acumulados, si el valor de reembolso es C_r la **vida financiera** α se obtiene mediante:

$$C_{\alpha}(1+t)^{-\alpha} = \sum_{r=s+1}^{n} C_r(1+t)^{-(r-s)} \frac{M_r}{N_{s+1}} \tag{128}$$

Ejemplo.—En un empréstito con las características:

— Número de títulos: 80.000.

— **Valor nominal de cada título: 5.000 pts.**
— **Precio de emisión: 4.800 pts.**
— **Duración de la emisión: 10 años.**
— **Abono de un cupón anual constante de 550 pts.**
— **Amortización de los títulos con una prima de 500 pts.**
— **Anualidad comercial constante.**

Situados en el origen de la operación calcular la vida media, vida mediana y vida financiera de una obligación.

En el origen de la emisión las expresiones de la vida media y vida mediana son:

$$m = \sum_{r=1}^{10} r \frac{M_r}{N_1} \quad ; \quad \frac{N_{x+1}}{N_1} = \frac{\sum_{r=1}^{x} M_r}{N_1} = \frac{1}{2}$$

Para calcular m y x se precisa conocer los valores de M_r a través de las fórmulas:

$$M_r = M_{r-1}(1+i') = M_{r-1}(1+0{,}10) \quad ; \quad M_1 = \frac{N_1}{S_{\overline{10}|0.10}}$$

y proceder a confeccionar la siguiente tabla:

r	M_r	$\mathcal{M}_r$	M_r/N_1	$r\frac{M_r}{N_1}$	$\sum_1^r \frac{M_h}{N_1}$
1	5.020	5.020	0,06275	0,06275	0,06275
2	5.522	10.542	0,06903	0,13806	0,13178
3	6.074	16.616	0,07592	0,22776	0,20770
4	6.681	23.297	0,08351	0,33404	0,29121
5	7.349	30.646	0,09186	0,45930	0,38307
6	8.084	38.730	0,10105	0,60630	0,48412
7	8.892	47.622	0,11115	0,77805	0,59527
8	9.782	57.404	0,12228	0,97824	0,71755
9	10.760	68.164	0,13450	1.21050	0,85205
10	11.836	80.000	0,14795	1,47950	1,00000
	80.000		1,00000	6,27450	

A la vista de los resultados se deduce que la **vida media** es $m = 6{,}2745$ años, es decir, está comprendida entre el sexto y el séptimo año. Su mediana o valor teórico, que corta a la distribución en dos partes iguales, es $x = 6{,}1428$, pero el título número 40.000 no se amortiza hasta el séptimo año, y éste será el valor de la **vida mediana**.

La vida financiera o matemática en el origen al tanto $t=i_a$ será el valor α tal que:

$$Ci\, \mathbf{a}_{\overline{\alpha}|i_a} + (C+P)(1+i_a)^{-\alpha} = \sum_{r=1}^{n} [Ci\, \mathbf{a}_{\overline{r}|i_a} + (C+P)(1+i_a)^{-r}]\, \frac{M_r}{N_1}$$

La vida financiera de los intereses es el valor α_1 solución de:

$$Ci\, \mathbf{a}_{\overline{\alpha_1}|i_a} = \sum_{r=1}^{n} Ci\, \mathbf{a}_{\overline{r}|i_a}\, \frac{M_r}{N_1}$$

y la vida financiera de los valores de reembolso el valor α_2 que cumple

$$(C+P)(1+i_a)^{-\alpha_2} = \sum_{r=1}^{n} (C+P)(1+i_a)^{-r}\, \frac{M_r}{N_1}$$

Para determinar α, α_1 y α_2 es necesario calcular $t=i_a$, que en este caso resulta sencillo mediante la expresión:

$$\mathbf{a}_{\overline{n}|i_a} = \frac{V}{C+P}\, \mathbf{a}_{\overline{n}|i'} \Rightarrow \mathbf{a}_{\overline{10}|i_a} = \frac{4.800}{5.500}\, \mathbf{a}_{\overline{10}|0.10} = 5{,}3625 \Rightarrow i_a = 0{,}13297$$

y proceder a elaborar la siguiente tabla:

r	$\frac{M_r}{N_1}$	$Ci\, \mathbf{a}_{\overline{r}\|i_a}$	$(C+P)(1+i_a)^{-r}$	$\frac{M_r}{N_1} Ci\, \mathbf{a}_{\overline{r}\|i_a}$	$\frac{M_r}{N_1}(C+P)(1+i_a)^{-r}$
1	0,06275	485,45	4.854,50	30,46	304,62
2	0,06903	913,93	4.284,75	63,09	295,78
3	0,07592	1.292,11	3.781,88	98,10	287,12
4	0,08351	1.625,91	3.338,02	135,78	278,76
5	0,09186	1.920,54	2.946,26	176,42	270,64
6	0,10105	2.180,59	2.600,47	220,35	262,78
7	0,11115	2.410,11	2.295,27	267,88	255,12
8	0,12228	2.612,70	2.025,89	319,48	247,73
9	0,13450	2.791,52	1.788,12	375,46	240,50
10	0,14795	2.949,34	1.578,26	436,39	233,54
	1,00000			2.123,41	2.676,59

Las ecuaciones específicas para obtener las vidas financieras y sus resultados son:

$$550\,\mathbf{a}_{\overline{\alpha_1}|0.13297}=2.123{,}41 \Rightarrow \alpha_1=5.7689$$

$$5.500(1+0.13297)^{-\alpha_2}=2.676{,}59 \Rightarrow \alpha_2=5.7689$$

$$550\,\mathbf{a}_{\overline{\alpha}|0.13297}+5.500(1+0.13297)^{-\alpha}=4.800 \Rightarrow \alpha=5.7689$$

y es $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$, ya que esta coincidencia se produce siempre que el valor de reembolso es constante.

21.—CALCULO DE LA VIDA MEDIA, VIDA MEDIANA Y VIDA FINANCIERA EN EL EMPRESTITO NORMAL CON ANUALIDAD CONSTANTE.

21.1.—EMPRESTITO CON INTERESES POSPAGABLES

La **vida media**, al principio del período $s+1$ es:

$$m_s=\sum_{r=s+1}^{n}(r-s)\frac{M_r}{N_{s+1}}=\sum_{r=s+1}^{n}(r-s)\frac{M_1(1+i)^{r-1}}{N_1\dfrac{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i}}}=$$

$$=\frac{\dfrac{N_1}{S_{\overline{n}|i}}}{N_1\dfrac{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i}}}\sum_{r=s+1}^{n}(r-s)(1+i)^{r-1}=$$

$$=\frac{1}{(1+i)^n\,\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i}}(1+i)^s S_{(n-s;\,-1)\overline{n-s}|i}=$$

$$=(n-s)-\frac{1}{i}+\frac{n-s}{i\,S_{\overline{n-s}|i}} \qquad (129)$$

y en el origen se tiene:

$$m=n-\frac{1}{i}+\frac{n}{i\,S_{\overline{n}|i}} \qquad (130)$$

De la expresión $\dfrac{1}{2}=\dfrac{N_{x+s+1}}{N_{s+1}}=\dfrac{S_{\overline{x}|i}}{S_{\overline{n-s}|i}}$ se sigue el valor de la **vida mediana** al principio del período $s+1$:

$$S_{\overline{x}|i}=\frac{S_{\overline{n-s}|i}}{2} \Rightarrow x=\frac{\lg_e\dfrac{(1+i)^{n-s}+1}{2}}{\lg_e(1+i)} \qquad (131)$$

y para $s=0$ resulta:

$$S_{\overline{x}|i} = \frac{S_{\overline{n}|i}}{2} \Rightarrow x = \frac{\lg_e \dfrac{(1+i)^n+1}{2}}{\lg_e(1+i)} \tag{132}$$

Para calcular la **vida financiera o matemática**, al principio del período s + 1, se procede así:

$$C(1+t)^{-\alpha} = \sum_{r=s+1}^{n} C(1+t)^{-(r-s)} \frac{M_r}{N_{s+1}} =$$

$$= C \frac{M_s}{N_{s+1}} \sum_{r=s+1}^{n} (1+t)^{-(r-s)}(1+i)^{-(r-s)} =$$

$$= C \frac{\dfrac{M_1}{S_{\overline{n}|i}}(1+i)^{s-1}}{N_1 \dfrac{a_{\overline{n-s}|i}}{a_{\overline{n}|i}}} (1+i) \frac{1-(1+t)^{-(n-s)}(1+i)^{n-s}}{t-i}$$

de donde

$$(1+t)^{-\alpha} = \frac{1}{S_{\overline{n-s}|i}} \frac{1-(1+t)^{-(n-s)}(1+i)^{n-s}}{t-i} = K \Rightarrow \alpha = \frac{-\lg_e K}{\lg_e(1+i)} \tag{133}$$

y en el origen para $t = i_a$ es:

$$(1+i_a)^{-\alpha} = \frac{1}{S_{\overline{n}|i}} \frac{1-(1+i_a)^{-n}(1+i)^n}{i_a - i} = K \Rightarrow \alpha = \frac{-\lg_e K}{\lg_e(1+i)} \tag{134}$$

21.2.—EMPRESTITO CON INTERESES PREPAGABLES

La **vida media** al principio del período s + 1 es:

$$m_s = \sum_{r=s+1}^{n} (r-s) \frac{M_r}{N_{s+1}} = \frac{M_n}{N_{s+1}} \sum_{r=s+1}^{n} (r-s)(1-z)^{n-r} =$$

$$= \frac{z}{1-(1-z)^{n-s}} \sum_{1=s+1}^{n} (r-s)(1-z)^{n-r-1} =$$

$$= \frac{z}{1-(1-z)^{n-s}} \, \frac{1}{z} \left[(n-s)-(1-z) \, \frac{1-(1-2)^{n-s}}{z} \right] =$$

$$= \frac{n-s}{1-(1-z)^{n-s}} - \frac{1}{z} + 1 \tag{135}$$

y para $s=0$ o en el origen:

$$m = \frac{n}{1-(1-z)^{n}} - \frac{1}{z} + 1 \tag{136}$$

La **vida mediana** x al principio del período $s+1$ verifica:

$$\frac{1}{2} = \frac{N_{s+x+1}}{N_{s+1}} = \frac{1-(1-z)^{n-s-x}}{1-(1-z)^{n-s}} \Rightarrow (1-z)^{x} = 2 \, \frac{(1-z)^{n-s}}{(1-z)^{n-s}+1} \tag{137}$$

tomando en el origen el valor

$$(1-z)^{x} = 2 \, \frac{(1-z)^{n}}{(1-z)^{n}+1}$$

Por ser $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ la expresión de la **vida financiera** única satisface la expresión:

$$C(1-t^*)^{\alpha} = \sum_{r=s+1}^{n} C(1-t^*)^{r-s} \, \frac{M_r}{N_{s+1}} =$$

$$= C \, \frac{M_n}{N_{s+1}} \, (1-t^*)^{-s}(1-z)^{n} \sum_{r=s+1}^{n} \left(\frac{1-t^*}{1-z} \right)^{r} =$$

$$= C \, \frac{z}{1-(1-z)^{n-s}} \, (1-t^*)^{-s}(1-z)^{n} \sum_{r=s+1}^{n} \left(\frac{1-t^*}{1-z} \right)^{r}$$

y se sigue:

$$(1-t^*)^{\alpha} = \frac{z(1-t^*)^{-s}(1-z)^{n}}{1-(1-z)^{n-s}} \left(\frac{1-t^*}{1-z} \right)^{s+1} \frac{1-\left(\frac{1-t^*}{1-z} \right)^{n-s}}{t-\frac{1-t^*}{1-z}} =$$

$$= \frac{z(1-z)^{n-s}(1-t^*)}{(1-z)^{n-s}} \, \frac{1-\left(\frac{1-t^*}{1-z} \right)^{n-s}}{t^*-z} =$$

$$= \frac{z(1-t^*)}{1-(1-z)^{n-s}} \frac{(1-z)^{n-s}-(1-t^*)^{n-s}}{t^*-z} \tag{139}$$

Al principio de la operación resulta:

$$(1-t^*)^{\alpha} = \frac{z(1-t^*)}{1-(1-z)^n} \frac{(1-z)^n-(1-t^*)^n}{t^*-z}$$

siendo usual que $t^* = z_a$.

21.3.—EMPRESTITO CON INTERESES ACUMULADOS

El valor de la **vida media** al principio del año $s=1$ viene dado por:

$$m_s = \sum_{r=s+1}^{n} (r-s) \frac{M_r}{N_{s+1}} = \frac{M_s}{N_{s+1}} \sum_{r=s+1}^{n} (r-s)(1+i)^{-(r-s)} =$$

$$= \frac{\dfrac{N_1}{\ddot{\mathbf{a}}_{\overline{n|}i}} (1+i)^{-(s-1)}}{N_1(1+i)^{-s} \dfrac{\mathbf{a}_{\overline{n-s|}i}}{\mathbf{a}_{\overline{n|}i}}} \left\{\left[1+\frac{1}{i}+(n-s)\right]\mathbf{a}_{\overline{n-s|}} - \frac{n-s}{i}\right\} =$$

$$= 1+\frac{1}{i}+(n-s)-\frac{n-s}{i\,\mathbf{a}_{\overline{n-s|}i}} \tag{141}$$

resultando para $s=0$

$$m = 1+\frac{1}{i}+n-\frac{n}{i\,\mathbf{a}_{\overline{n|}i}} \tag{142}$$

La **vida mediana** al principio del período $s+1$, se deduce de:

$$\frac{1}{2} = \frac{N_{s+x+1}}{N_{s+1}} = \frac{\mathbf{a}_{\overline{n|}i} - \mathbf{a}_{\overline{s+x|}i}}{\mathbf{a}_{\overline{n|}i} - \mathbf{a}_{\overline{s|}i}} = 1 - \frac{{}^{s}/\mathbf{a}_{\overline{x|}i}}{\mathbf{a}_{\overline{n|}i} - \mathbf{a}_{\overline{s|}i}}$$

de donde:

$$\mathbf{a}_{\overline{x|}1} = (1+i)^s \frac{\mathbf{a}_{\overline{n|}i} - \mathbf{a}_{\overline{s|}i}}{2} \tag{143}$$

y en el origen queda:

$$\mathbf{a}_{\overline{x}|i} = \frac{a_{\overline{n}|i}}{2} \Rightarrow (1+i)^x = \frac{2(1+i)^n}{(1+i)^n+1} \tag{144}$$

Como la expresión que satisface la **vida financiera** al principio del período $s+1$ es:

$$C(1+i)^{s+\alpha}(1+t)^{-\alpha} = \sum_{r=s+1}^{n} C(1+i)^r(1+t)^{-(r-s)} \frac{M_r}{N_{s+1}} =$$

$$= \frac{M_s}{N_{s+1}} \sum_{r=s+1}^{n} C(1+i)^r(1+t)^{-(r-s)}(1+i)^{-(r-s)} =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i}} \sum_{r=s+1}^{n} C(1+i)^s(1+t)^{-(r-s)}$$

resulta:

$$\left(\frac{1+t}{1+i}\right)^{-\alpha} = \frac{1}{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i}} \sum_{r=s+1}^{n} (1+t)^{-(r-s)} =$$

$$= \frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|t}}{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i}} \Rightarrow \left(\frac{1+t}{1+i}\right)^{\alpha} = \frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i}}{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i}} \tag{145}$$

quedando en el origen:

$$\left(\frac{1+t}{1+i}\right)^{\alpha} = \frac{\mathbf{a}_{\overline{n}|i}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|t}} \tag{146}$$

Ejemplo 1.—Calcular la vida media, vida mediana y vida financiera en el origen de un empréstito amortizable con anualidad constante si sus características son:

- **Número de títulos emitidos: 40.000.**
- **Nominal de cada título: 1.000 pts.**
- **Precio de emisión: 970 pts.**
- **Duración de la emisión: 12 años.**
- **Abono de intereses pospagables a rédito: $i = 12\%$.**

¿Cuáles serían los resultados al principio del séptimo año si el tanto de evaluación es $t = 0{,}14$?

1.° Situados en el origen:

— Vida media: $m = n - \frac{1}{i} + \frac{n}{i\, S_{\overline{n}|i}} = 12 - \frac{1}{0{,}12} + \frac{12}{0{,}12\, S_{\overline{12}|0{,}12}} = 7{,}8103$

— Vida mediana: $S_{\overline{x}|i} = \dfrac{S_{\overline{n}|i}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\lg_e \dfrac{(1+0{,}12)^{12}+1}{2}}{\lg_e(1+0{,}12)} = 7{,}8997$

en el año octavo se alcanzará la amortización de los primeros 20.000 títulos.

— Vida financiera: Como el valor del tanto efectivo activo es i_a tal que:

$$\mathbf{a}_{\overline{12}|i_a} = \frac{970}{1.000}\,\mathbf{a}_{\overline{12}|0{,}12} = 6{,}008543 \Rightarrow i_a = 0{,}1266$$

para $t = i_a = 0{,}1266$, la ecuación de la vida financiera es:

$$(1+0{,}1266)^{-\alpha} = \frac{1}{S_{\overline{12}|0{,}12}}\;\frac{1-(1+0{,}1266)^{-12}(1+0{,}12)^{12}}{0{,}1266-0{,}12} = 0{,}427418$$

$$\alpha = \frac{-\lg_e 0{,}427418}{\lg_e(1+0{,}12)} = 7{,}5002$$

2.° Situados al principio del séptimo año se tiene:

$$m_6 = 6 - \frac{1}{0{,}12} + \frac{6}{0{,}12\;S_{\overline{6}|0{,}12}} = 3{,}8279$$

$$S_{\overline{x}|0{,}12} = \frac{S_{\overline{6}|0{,}12}}{2} \Rightarrow x = \frac{\lg_e \dfrac{(1+0{,}12)^{6}+1}{2}}{\lg_e(1+0{,}12)} = 3{,}5004$$

$$(1+0{,}14)^{-\alpha} = \frac{1}{S_{\overline{6}|0{,}12}}\;\frac{1-(1+0{,}14)^{-6}(1+0{,}12)^{6}}{0{,}14-0{,}12} = 0{,}620768 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 3{,}6389$$

Ejemplo 2.—Idem que en el ejemplo 1 si los intereses son prepagables a un tanto anticipado $z = 0{,}11$ y el valor de $t^* = 0{,}125$.

1.° Situados en el origen

— Vida media: $m = \dfrac{n}{1-(1-z)^n} - \dfrac{1}{z} + 1 = \dfrac{12}{1-(1-0{,}11)^{12}} - \dfrac{1}{0{,}11} + 1 = 7{,}8451.$

— Vida mediana: $(1-0{,}11)^x=2\,\dfrac{(1-0{,}11)^{12}}{(1-0{,}11)^{12}+1}=0{,}396138 \Rightarrow x=7{,}9461.$

— Vida financiera: Se calcula el tanto efectivo z_a haciendo uso de la ecuación

$$VN_1=CN_1\,z+a(1-z)\,\frac{1-(1-z_a)^n}{z_a}$$

previo cálculo de la anualidad que es:

$$a=CN_1\,\frac{z}{1-(1-z)^n}=40.000.000\,\frac{0{,}11}{1-(1-0{,}11)^{12}}=5.843.219{,}03$$

Sustituyendo valores y despejando:

$$(1-z_a)\,\frac{1-(1-z_a)^{12}}{z_a}=\frac{38.800.000-4.400.000}{5.843.219{,}03}=5{,}88716596 \Rightarrow z_a=0{,}1159$$

La ecuación (140) de la vida financiera se concreta en

$$(1-0{,}1159)^\alpha=\frac{0{,}11(1-0{,}1159)}{1-(1-0{,}11)^{12}}\,\frac{(1-0{,}11)^{12}-(1-0{,}1159)^{12}}{0{,}1159-0{,}11}=0{,}414755 \Rightarrow \alpha=7{,}1442$$

2.° Situados al principio del séptimo año.

$$m_6=\frac{6}{1-(1-0{,}11)^6}-\frac{1}{0{,}11}+1=3{,}8371$$

$$(1-0{,}11)^x=2\,\frac{(1-0{,}11)^6}{(1-0{,}11)^6+1}=0{,}663978 \Rightarrow x=3{,}5141$$

$$(1-0{,}125)^\alpha=\frac{0{,}11(1-0{,}125)}{1-(1-0{,}11)^6}\,\frac{(1-0{,}11)^6-(1-0{,}125)^6}{0{,}125-0{,}11}=0{,}614676 \Rightarrow \alpha=3{,}6445$$

Ejemplo 3.—Idem que en el ejemplo 1 con intereses acumulados

1.° Situados en el origen

$$m=1+\frac{1}{i}+n-\frac{n}{i\,\mathbf{a}_{\overline{n}|i}}=1+\frac{1}{0{,}12}\,12-\frac{12}{0{,}12\,\mathbf{a}_{\overline{12}|0,12}}=5{,}1897$$

$$\mathbf{a}_{\overline{x}|0,12}=\frac{\mathbf{a}_{\overline{12}|0,12}}{2}=3{,}097187 \Rightarrow x=4{,}1006$$

$$\left(\frac{1+0{,}1266}{1+0{,}12}\right)^{\alpha}=\frac{\mathbf{a}_{\overline{12}|0.12}}{\mathbf{a}_{\overline{12}|0.1266}}=1{,}030769 \Rightarrow \alpha=5{,}1578$$

2.º Situados al principio del séptimo año

$$m_6=1+\frac{1}{0{,}12}+6-\frac{6}{0{,}12\ \mathbf{a}_{\overline{6}|0.12}}=3{,}1720$$

$$\mathbf{a}_{\overline{x}|0.12}=(1+0{,}12)^6\ \frac{\mathbf{a}_{\overline{12}|0.12}-\mathbf{a}_{\overline{6}|0.12}}{2}=2{,}055704 \Rightarrow x=2{,}5536$$

$$\left(\frac{1+0{,}14}{1+0{,}12}\right)^{\alpha}=\frac{\mathbf{a}_{\overline{6}|0.12}}{\mathbf{a}_{\overline{6}|0.14}}=1{,}057279 \Rightarrow \alpha=3{,}1469$$

22.—VALOR DEL EMPRESTITO. VALOR DE UNA OBLIGACION

Al principio del perído $s+1$ de la vida de un empréstito quedan en circulación N_{s+1} títulos que deberán ser amortizados en los $n-s$ restantes años. Percibirán intereses en la forma pactada hasta su amortización y en ese momento el valor de reembolso, a través de las anualidades pendientes de vencimiento.

La operación pendiente es:

N_{s+1}	a_{s+1}	a_{s+2}	....	a_r	....	a_n
s	$s+1$	$s+2$	....	r	....	n

en donde los capitales $(a_r;\ r)$ representan derechos futuros de los obligacionistas o prestamistas y compromisos pendientes de pago del emisor.

Es usual que en el transcurso del tiempo las condiciones de los empréstitos se vean alteradas y que los tipos de interés no permanezcan fijos.

El problema a plantear es el de obtener el valor de los compromisos pendientes del empréstito y de los derechos de los obligacionistas, teniendo en cuenta que el mercado de valores efectúa hoy sus transacciones en condiciones que suelen diferir de las de la fecha de emisión del empréstito.

Si suponemos un empréstito normal con anualidad $a_r=CN_r i+CM_r$ la ecuación de la reserva en s es:

$$CN_s=\sum_{r=s+1}^{n} a_r(1+i)^{-(r-s)} \tag{147}$$

expresión que viene dada en función de las condiciones iniciales que fijaron el tanto i.

Si el tanto de valoración del mercado, al principio del año $s+1$, es t, el valor de los capitales pendientes o **valor del empréstito** es:

$$\mathcal{V}_s^T = \sum_{r=s+1}^{n} a_r (1+t)^{-(r-s)} \tag{148}$$

La expresión de la anualidad $a_r = CN_r i + CM_r = I_r + A_r$ permite descomponer la sucesión de capitales (a_r, r), con $r = s+1, s+2, -, n$, en las sucesiones $(I_r; r)$ y $(A_r; r)$ que representan respectivamente el derecho a la percepción de los intereses o frutos del préstamo y a la devolución del principal. La sucesión $(I_r; r)$ se conoce con el nombre de usufructo del empréstito y la segunda $(A_r; r)$ se llama nuda propiedad.

Sustituyendo el valor de a_r en (148) se tiene:

$$\mathcal{V}_s^T = \sum_{r=s+1}^{n} (CN_r i + CM_r)(1+t)^{-(r-s)} =$$

$$= \sum_{r=s+1}^{n} CN_r i (1+t)^{-(r-s)} + \sum_{r=s+1}^{n} CM_r (1+t)^{-(r-s)} = \mathcal{U}_s^T + \mathcal{N}_s^T \tag{149}$$

El primer sumatorio, simbolizado por $\mathcal{U}_s^T$, recoge el valor financiero de los intereses o **valor usufructo del empréstito** y el segundo término $\mathcal{N}_s^T$ representa el **valor de la nuda propiedad** del empréstito. La suma de los valores del usufructo y de la nuda propiedad es la plena propiedad o valor total del empréstito.

Situados en un punto interior del intervalo $(s; s+1)$, por ejemplo en $s+\theta$, con $0<\theta<1$ los resultados son:

$$\mathcal{V}_{s+\theta}^T = \sum_{r=s+1}^{n} a_r (1+t)^{-(1-\theta)} (1+t)^{-[r(s+1)]} =$$

$$= (1+t)^{\theta} \sum_{r=s+1}^{n} a_r (1+t)^{-(r-s)} = (1+t)^{\theta} \mathcal{V}_s^T \tag{150}$$

siendo también:

$$\mathcal{U}_{s+\theta}^T = (1+t)^{\theta} \mathcal{U}_s^T \quad ; \quad \mathcal{N}_{s+\theta}^T = (1+t)^{\theta} \mathcal{N}_s^T \tag{151}$$

Estos resultados se refieren al conjunto de todos los N_{s+1} títulos en circulación, por lo que el valor promedio unitario de cada uno de éstos será:

$$\mathcal{V}_s = \frac{\mathcal{V}_s^r}{N_{s+1}} = \frac{\sum_{r=s+1}^{n} a_r (1+t)^{-(r-s)}}{N_{s+1}} = \sum_{r=s+1}^{n} \frac{CN_r i + CM_r}{N_{s+1}} (1+t)^{-(r-s)} \tag{152}$$

y representa la plena propiedad del título o **valor de la obligación.**

Los correspondientes **valores del usufructo** y de la **nuda propiedad** del título son:

$$\mathcal{U}_s = \frac{\mathcal{U}_s^T}{N_{s+1}} = \sum_{r=s+1}^{n} Ci \frac{N_r}{N_{s+1}} (1+t)^{-(r-s)} \; ; \; \mathcal{N}_s = \frac{\mathcal{N}_s^r}{N_{s+1}} = \sum_{r=s+1}^{n} C \frac{M_r}{N_{s+1}} (1+t)^{-(r-1)} \quad (153)$$

Estos valores medios así obtenidos coinciden con los que se obtienen contemplando un título aisladamente el cual tiene derechos en términos de probabilidad a intereses y amortización cuyos valores financieros en s vienen expresados por las variables aleatorias:

$$\xi_{\mathcal{U}} = \begin{cases} Ci\, \mathbf{a}_{\overline{r-s|}t} \\ \dfrac{M_r}{N_{s+1}} \end{cases} \quad ; \quad \xi_{\mathcal{N}} = \begin{cases} C(1+t)^{-(r-s)} \\ \dfrac{M_r}{N_{s+1}} \end{cases}$$

Las esperanzas correspondientes son:

$$\bar{\mathcal{N}}_s = E(\xi_{\mathcal{N}}) = \sum_{r=s+1}^{n} C(1+t)^{-(r-s)} \frac{M_r}{N_{s+1}} \quad (154)$$

$$\bar{\mathcal{U}}_s = E(\xi_{\mathcal{U}}) = \sum_{r=s+1}^{n} Ci\, \mathbf{a}_{\overline{r-s|}t} \frac{M_r}{N_{s+1}} =$$

$$= \sum_{r=s+1}^{n} Ci[(1+t)^{-1} + (1+t)^{-2} + - + (1+t)^{-(r-s)}] \frac{M_r}{N_{s+1}}$$

$$= \sum_{r=s+1}^{n} \frac{Ci}{N_{s+1}} (1+t)^{-(r-s)} \sum_{r=s+1}^{n} M_h = \sum_{r=s+1}^{n} Ci \frac{N_r}{N_{s+1}} (1+t)^{-(r-s)} \quad (155)$$

siendo inmediato comprobar: $\mathcal{U}_s = \bar{\mathcal{U}}_s$ y $\mathcal{N}_s = \bar{\mathcal{N}}_s$. Estos resultados son generalizables a los empréstitos con características comerciales.

Los valores del usufructo y de la nuda propiedad están relacionados por la expresión:

$$\mathcal{U}_s = \frac{i}{t} (C - \mathcal{N}_s) \quad (156)$$

En efecto, partiendo de $\mathcal{U}_s$ se tiene:

$$\mathcal{U}_s = \sum_{r=s+1}^{n} Ci \frac{N_r}{N_{s+1}} (1+t)^{-(r-s)} = \sum_{r=s+1}^{n} Ci\, \mathbf{a}_{\overline{r-s|}t} \frac{M_r}{N_{s+1}} =$$

$$= \sum_{r=s+1}^{n} Ci \frac{1-(1+t)^{-(r-s)}}{t} \frac{M_r}{N_{s+1}} =$$

$$= \frac{i}{t}\left[C \sum_{r=s+1}^{n} \frac{M_r}{N_{s+1}} - \sum_{r=s+1}^{n} C(1+t)^{-(r-s)} \frac{M_r}{N_{s+1}}\right] = \frac{i}{t}(C-\mathcal{N}_s)$$

De (149) y (155) se tiene el sistema lineal

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{V}_s &= \mathcal{U}_s + \mathcal{N}_s \\ \mathcal{U}_s &= \frac{i}{t}(C-\mathcal{N}_s) \end{aligned}\right\} \tag{157}$$

que proporciona la solución de dos de estos valores $\mathcal{V}_s$, $\mathcal{U}_s$ o $\mathcal{N}_s$, previo cálculo de uno de ellos.

Cuando $a_r = a$ (anualidad constante) el valor del título es:

$$\mathcal{V}_s = \frac{a\, a_{\overline{n-s}|t}}{N_{s+1}} = \frac{\dfrac{CN_1}{a_{\overline{n}|i}}}{N_1 \dfrac{a_{\overline{n-s}|i}}{a_{\overline{n}|i}}}\, a_{\overline{n-s}|t} = C \frac{a_{\overline{n-s}|t}}{a_{\overline{n-s}|i}} \tag{158}$$

y su cálculo facilita el de $\mathcal{U}_s$ y $\mathcal{N}_s$ a través de (157).

Obtener los valores en un punto interior $s+\theta$ conocidos previamente $\mathcal{V}_s$, $\mathcal{U}_s$ y $\mathcal{N}_s$ es inmediato, pues:

$$\mathcal{V}_{s+\theta} = \mathcal{V}_s(1+t)^\theta \quad ; \quad \mathcal{N}_{s+\theta} = \mathcal{N}_s(1+t)^\theta \quad ; \quad \mathcal{U}_{s+\theta} = \mathcal{U}_s(1+t)^\theta \tag{159}$$

Ejemplo.—En un empréstito con las características:

- **Número de títulos: 30.000.**
- **Valor nominal de cada título: 5.000 ptas.**
- **Duración de la emisión: 10 años.**
- **Abono de un cupón anual constante de 600 ptas. por obligación.**
- **Amortización por el nominal.**
- **Anualidad constante.**

calcular al principio del sexto año y de cada uno de los trimestres del mismo, el valor de un título, el valor del usufructo y el valor de la nuda propiedad si el tanto de mercado es: $t_1 = 0{,}11$; $t_3 = 0{,}13$.

Por tener que calcular varias hipótesis procederemos a determinar las fórmulas del problema que son adaptación de las anteriores. Así:

$$\mathcal{V}_5 = 5.000 \frac{a_{\overline{5}|t}}{a_{\overline{5}|0.12}} \quad ; \quad \mathcal{U}_5 = \frac{0{,}12}{t}(5.000 - \mathcal{N}_5) = \frac{0{,}12}{t-0{,}12}(5.000 - \mathcal{V}_5)$$

$$\mathcal{N}_5 = \mathcal{V}_5 - \mathcal{U}_5 \quad ; \quad \mathcal{V}_{5+\theta} = (1+t)^{\theta}\mathcal{V}_5 \quad \text{con} \quad \theta = \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$$

y así mismo se procede con $\mathcal{U}_{5+\theta}$ y $\mathcal{N}_{5+\theta}$.

Los resultados son:

	$t_1 = 0{,}11$	$t_2 = 0{,}13$
$\mathcal{V}_5$	5.126,39	4.878,57
$\mathcal{U}_5$	1.516,67	1.457,15
$\mathcal{N}_5$	3.609,72	3.421,42
$\mathcal{V}_{5+1/4}$	5.261,90	5.029,93
$\mathcal{V}_{5+2/4}$	5.400,99	5.185,99
$\mathcal{V}_{5+3/4}$	5.543,75	5.346,89
$\mathcal{U}_{5+1/4}$	1.556,76	1.502,36
$\mathcal{U}_{5+2/4}$	1.597,91	1.548,97
$\mathcal{U}_{5+3/4}$	1.640,15	1.597,03
$\mathcal{N}_{5+1/4}$	3.705,14	3.527,57
$\mathcal{N}_{5+2/4}$	3.803,08	3.637,02
$\mathcal{N}_{5+3/4}$	3.903,60	3.749,86

23.—VALOR DE UNA OBLIGACION, VALOR DEL USUFRUCTO Y VALOR DE LA NUDA PROPIEDAD EN EMPRESTITOS CON PRIMA

Como la estructura de anualidad de estos empréstitos es $a_r = CN_r i + (C + P_r)M_r$ se deduce que el valor de una obligación es:

$$\mathcal{V}_s = \frac{\sum_{r=s+1}^{n} a_r (1+t)^{-(r-s)}}{N_{s+1}} = \sum_{r=s+1}^{n} \frac{CN_r i + (C+P_r)M_r}{N_{s+1}} (1+t)^{-(r-s)} \qquad (160)$$

siendo los de sus componentes: valor del usufructo y valor de la nuda propiedad

$$\mathcal{U}_s = \sum_{r=s+1}^{n} C \frac{N_r}{N_{s+1}} i(1+t)^{-(r-s)} \quad ; \quad \mathcal{N}_s = \sum_{r=s+1}^{n} (C+P_r) \frac{M_r}{N_{s+1}} (1+t)^{-(r-s)} \qquad (161)$$

En el caso particular de prima de amortización constante se verifica la relación:

$$\mathscr{U}_s=\frac{i}{t}\left(C-\frac{C}{C+P}\mathscr{N}_s\right)=\frac{i}{t}\left(C-\frac{i'}{i}\mathscr{N}_s\right) \tag{162}$$

como se comprueba seguidamente:

$$\mathscr{U}_s=\sum_{r=s+1}^{n} C\frac{N_r}{N_{s+1}}i(1+t)^{-(r-s)}=\sum_{r=s+1}^{n} Ci\,\mathbf{a}_{\overline{r-s}|t}\frac{M_r}{N_{s+1}}=$$

$$=\frac{i}{t}\left[C-\sum_{r=s+1}^{n} C(1+t)^{-(r-s)}\frac{M_r}{N_{s+1}}\right]=\frac{i}{t}\left[C-\frac{C}{C+P}\sum_{r=s+1}^{n}(C+P)(1+t)^{-(r-s)}\frac{M_r}{N_{s+1}}\right]$$

$$=\frac{i}{t}\left(C-\frac{C}{C+P}\mathscr{N}_s\right)=\frac{i}{t}\left(C-\frac{i'}{i}\mathscr{N}_s\right)$$

siendo $i'=\dfrac{Ci}{C+P}$ el tanto de normalización del empréstito:

El sistema lineal equivalente a (157) es:

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{V}_s&=\mathscr{U}_s+N_s\\ \mathscr{U}_s&=\frac{i}{t}\left(C-\frac{i'}{i}\mathscr{N}_s\right)\end{aligned}\right\} \tag{163}$$

Si la anualidad comercial es constante resulta el valor del título:

$$\mathscr{V}_s=\frac{a\,\mathbf{a}_{\overline{n-s}|t}}{N_{s+1}}=\frac{\dfrac{(C+P)N_1}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i'}}}{N_1\dfrac{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i'}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i'}}}\mathbf{a}_{\overline{n-s}|t}=(C+P)\frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|t}}{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i'}} \tag{164}$$

ya que en el empréstito normalizado se dan las relaciones

$$CN_1=a'\,\mathbf{a}_{\overline{n}|i'}=\frac{aC}{C+P}\mathbf{a}_{\overline{n}|i'} \quad ; \quad N_s=N_1\frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i'}}{\mathbf{a}_{\overline{n}|i'}} \quad \text{con} \quad i'=\frac{iC}{C+P}$$

En el caso de pretender obtener la parte de $\mathscr{N}_s$ que corresponde al nominal y la que corresponde a la prima basta aplicar las relaciones:

$$\frac{C}{C+P}\mathscr{N}_s \qquad\qquad \frac{P}{C+P}\mathscr{N}_s \tag{165}$$

Ejemplo.—Calcular los valores del título, del usufructo y de la nuda propiedad, al principio del año quinto al tanto t = 13 %, en el empréstito definido por:

- **Número de títulos: 100.000.**
- **Valor nominal de cada título: 10.000 ptas.**
- **Duración de la emisión: 10 años.**
- **Abono de cupones constantes de 1.100 ptas. por obligación.**
- **Amortización con prima constante de 1.000 ptas. por título.**
- **Anualidad comercial constante.**

¿Cuál sería el tanto efectivo obligacionista, el tanto de rendimiento de un título que se amortiza en el cuarto año y el tanto de rendimiento obtenido por el vendedor del título al principio del quinto año?

Para calcular $\mathcal{V}_4$ basta aplicar (164), teniendo en cuenta que $i' = \dfrac{1.100}{11.000} = 0{,}10$:

$$\mathcal{V}_4 = 11.000 \, \frac{\mathbf{a}_{\overline{6}|0.13}}{\mathbf{a}_{\overline{6}|0.10}} = 10.096{,}54$$

El sistema (163) se concreta en:

$$\mathcal{U}_4 = \frac{0{,}11}{0{,}13}\left(10.000 - \frac{0{,}10}{0{,}11}\mathcal{N}_4\right)$$

$$\mathcal{V}_4 = \mathcal{U}_4 + \mathcal{N}_4 = 10.096{,}54$$

y tiene por solución $\mathcal{U}_4 = 3.011{,}54 \quad ; \quad \mathcal{N}_4 = 7.085$.

Los valores de la nuda propiedad correspondiente al nominal y a la prima son:

$$\frac{10.000}{11.000}\mathcal{N}_4 = 6.440{,}91 \quad ; \quad \frac{1.000}{11.000}\mathcal{N}_4 = 644{,}09$$

El tanto de efectivo obligacionista resulta de fácil cálculo aplicando la expresión que relaciona i_a con i' normalizado. Así:

$$\mathbf{a}_{\overline{10}|i_a} = \frac{10.000}{11.000}\,\mathbf{a}_{\overline{10}|0.10} = 5{,}585970 \Rightarrow i_a = 0{,}1228$$

Las ecuaciones de los tantos de rendimiento del título que se amortiza en el cuarto año y la del título vendido al principio del quinto año, así como sus soluciones i_R y x son:

$$10.000 = 1.100\,\mathbf{a}_{\overline{4}|i_R} + 11.000(1+i_R)^{-4} \Rightarrow i_R = 0{,}1307$$

$$10.000 = 1.100\,\mathbf{a}_{\overline{4}|x} + 10.096{,}54(1+x)^{-4} \Rightarrow x = 0{,}1120$$

24.—VALOR DE UNA OBLIGACION, VALOR DEL USUFRUCTO Y VALOR DE LA NUDA PROPIEDAD EN UN EMPRESTITO CON INTERESES FRACCIONADOS

El fraccionamiento en el pago de los cupones afecta al valor del título y al valor del usufructo: pero no al valor de la nuda propiedad. En el supuesto de fraccionamiento uniforme y cupones constantes los vencimientos de un año cualquiera son:

$$\begin{array}{ccccccc} & Ci^{(m)} & Ci^{(m)} & \dots & Ci^{(m)} & Ci^{(m)} \\ \hline r-1 & r-1+\frac{1}{m} & r-1+\frac{2}{m} & \dots & r-1+\frac{m-1}{m} & r \end{array}$$

y ello equivale a abonar a fin de año un único cupón

$$Ci^{(m)}[(1+t)^{\frac{m-1}{m}}+(1+t)^{\frac{m-2}{m}}+-+(1+t)^{\frac{1}{m}}+1]=Ci^{(m)}\ \frac{(1+t)^{\frac{m}{m}}-1}{(1+t)^{\frac{1}{m}}-1}=$$

$$=C\ \frac{i^{(m)}}{t^{(m)}}\ t=Ci\ \frac{i^{(m)}t}{t^{(m)}i} \tag{166}$$

siendo t el tanto de valoración de mercado del año r.

El valor del usufructo del empréstito fraccionado es:

$$\mathscr{U}_s^{(m)}=\sum_{r=s+1}^{n}\ Ci\ \frac{i^{(m)}t}{t^{(m)}i}\ \frac{N_r}{N_{s+1}}\ (1+t)^{-(r-s)}=\frac{i^{(m)}t}{t^{(m)}i}\ \sum_{r=s+1}^{n}\ Ci\ \frac{N_r}{N_{s+1}}\ (1+t)^{-(r-s)}=$$

$$=\frac{i^{(m)}t}{t^{(m)}i}\ \mathscr{U}_s=\frac{j_{(m)}t}{j'_{(m)}i}\ \mathscr{U}_s \tag{167}$$

siendo $j_{(m)}=mi^{(m)}$ y $j'_{(m)}=mt^{(m)}$ los tantos nominales. El valor de $\mathscr{U}_s$ será el calculado en (156) o en (162) según que el empréstito sea normal o con prima.

El sistema que se establece equivalente a (157) o a (168) es:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathscr{V}_s^{(m)}=\mathscr{U}_s^{(m)}+\mathscr{N}_s \\ \mathscr{U}_s^{(m)}=\dfrac{j_{(m)}t}{j'_{(m)}i}\ \mathscr{U}_s=\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{j_{(m)}}{j'_{(m)}}\ (C-\mathscr{N}_s) & \text{si es normal} \\ \dfrac{j_{(m)}}{j'_{(m)}}\left(C-\dfrac{i'}{i}\ \mathscr{N}_s\right) & \text{si es con prima} \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{168}$$

y continúan verificándose las relaciones:

$$\mathscr{V}_{s+\theta}^{(m)}=(1+t)^{\theta}\mathscr{V}_s^{(m)} \quad ; \quad \mathscr{U}_{s+\theta}^{(m)}=(1+t)^{\theta}\mathscr{U}_s^{(m)}$$

Ejemplo.—Calcular los valores de la nuda propiedad, del usufructo y del título, al principio del cuarto año de la vida de un empréstito y al tanto $t=0{,}15$, si sus características son:

- **Número de títulos: 70.000.**
- **Nominal de cada título: 2.500 pts.**
- **Duración de la emisión: 10 años.**
- **Abono de cupones semestrales constantes de 150 pts.**
- **Amortización con prima constante de 250 pts. por título.**
- **Anualidad comercial constante.**

Se procede a calcular directamente el valor de la nuda propiedad mediante la expresión:

$$\mathcal{N}_s=\sum_{r=s+1}^{n}(C+P)\frac{M_r}{N_{s+1}}(1+t)^{-(r-s)}=(C+P)\frac{M_s}{N_{s+1}}\sum_{r=s+1}^{n}\left(\frac{1+t}{1+i'}\right)^{-(r-s)}=$$

$$=(C+P)\frac{\dfrac{N_1}{s_{\overline{n}|i'}}(1+i')^{s-1}}{N_1\dfrac{a_{\overline{n-s}|i'}}{a_{\overline{n}|i'}}}(1+i')\frac{1-\left(\dfrac{1+t}{1+i'}\right)^{-(n-s)}}{t-i'}=(C+P)\frac{1}{s_{\overline{n-s}|i'}}\frac{1-\left(\dfrac{1+t}{1+i'}\right)^{-(n-s)}}{t-i'}$$

siendo el tanto normalizado

$$i'=\frac{(1+i^{(2)})^2-1}{C+P}C=\frac{(1+0{,}06)^2-1}{2.750}2.500=0{,}112364$$

Sustituyendo valores y operando:

$$\mathcal{N}_3=2{,}750\frac{1}{s_{\overline{7}|0{,}112364}}\frac{1-\left(\dfrac{1+0{,}15}{1+0{,}112364}\right)^{-7}}{0{,}15-0{,}112364}=1.540{,}65$$

Por ser $j(2)=0{,}12$; $i=(1+0{,}06)^2-1=0{,}1236$; $j(2)=2[(1+0{,}15)^{1/2}-1]=0{,}144761$ el valor del usufructo es:

$$\mathcal{U}_3^{(2)}=\frac{0{,}12}{0{,}144761}\left(2.500-\frac{0{,}112364}{0{,}1236}1.540{,}65\right)=911{,}36$$

y resulta como valor de la obligación:

$$\mathcal{V}_3^{(2)}=\mathcal{U}_3^{(2)}+\mathcal{N}_3=1.540{,}65+911{,}35=2.452$$

25.—VALOR DEL EMPRESTITO Y VALOR DE UNA OBLIGACION EN UN EMPRESTITO CON PAGO PERIODICO DE INTERESES ANTICIPADOS

El problema es análogo al planteado en los epígrafes anteriores para el caso de intereses pospagables por lo que ahora nos referiremos directamente al empréstito con anualidad constante, cupones constantes y primas constantes.

Al principio del año $s+1$, antes del vencimiento de los intereses anticipados del período, los N_{s+1} títulos pendientes de amortización tienen derecho a recibir la contraprestación:

$CN_{s+1}z$	a	a	a	a
s	$s+1$	$s+2$	r	n

Si el tanto de valoración anticipada en el mercado de valores es t^n el valor total del empréstito es:

$$\mathcal{V}_s^T = CN_{s+1}z + \sum_{r=s+1}^{n} a(1-t^*)^{r-s} = CN_{s+1}z + a(1-t)\,\frac{1-(1-t^*)^{n-s}}{t} \tag{189}$$

y al ser $a = CN_{r+1}z + (C+P)M_r$, con $N_{n+1}=0$,

$$\mathcal{V}_s^T = CN_{s+1}z + \sum_{r=s+1}^{n} [CN_{r+1}z + (C+P)M_r](1-t^*)^{r-s} =$$

$$= \sum_{r=s+1}^{n} CN_{r+1}z(1-t^*)^{r-s} + \sum_{r=s+1}^{n} (C+P)M_r(1-t^*)^{r-s} = \mathcal{U}_s + \mathcal{N}_s^T \tag{170}$$

se obtiene su descomposición en los valores del usufructo y de la nuda propiedad.

Situados en un punto interior $s+\theta$, con $0<\theta<1$, los valores son:

$$\mathcal{V}_{s+\theta}^T = (1-t^*)^{-\theta}\mathcal{V}_s^r \quad ; \quad \mathcal{U}_{s+\theta} = (1-t^*)^{-\theta}\mathcal{U}_s^r \quad ; \quad \mathcal{N}_{s+\theta}^r = (1-t^*)^{-\theta}\mathcal{N}_s^T$$

Los valores promedios de cada título, del usufructo y de la nuda propiedad son:

$$\mathcal{V}_s = \frac{\mathcal{V}_s^T}{N_{s+1}} = Cz + \frac{a}{N_{s+1}}(1-t^*)\,\frac{1-(1-t^*)^{n-s}}{t^*} \tag{171}$$

$$\mathcal{U}_s = \frac{\mathcal{U}_s^T}{N_{s+1}} = \sum_{r=s+1}^{n-1} C\,\frac{N_{r+1}}{N_{s+1}}\,z(1-t^*)^{-(r-s)} = \sum_{r=s+1}^{n} Cz\,\frac{M_r}{N_{s+1}}\,\frac{1-(1-t^*)^{r-s}}{t^*} \tag{172}$$

$$\mathcal{N}_s = \frac{\mathcal{N}_s^T}{N_{s+1}} = \sum_{r=s+1}^{n} (C+P)\,\frac{M_r}{N_{s+1}}\,(1-t^*)^{r-s} \tag{173}$$

En este supuesto se verifica:

$$\mathcal{U}_s = \sum_{r=s+1}^{n} Cz \frac{M_r}{N_{s+1}} \frac{1-(1-t^*)^{r-s}}{t^*} = \frac{z}{t^*}\left[\sum_{r=s+1}^{n} C \frac{M_r}{N_{s+1}} - \sum_{r=s+1}^{n} C \frac{M_r}{N_{s+1}} (1-t^*)^{r-s}\right] =$$

$$= \frac{z}{t^*}\left(C - \frac{C}{C+P}\mathcal{N}_s\right) = \frac{z}{t^*}\left(C - \frac{z'}{z}\mathcal{N}_s\right) \qquad (174)$$

con $z' = \dfrac{zC}{C+P}$.

El sistema lineal que relaciona $\mathcal{V}_s$, $\mathcal{N}_s$ y $\mathcal{U}_s$ queda así:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{V}_s &= \mathcal{U}_s + \mathcal{N}_s \\ \mathcal{U}_s &= \frac{z}{t^*}\left(C - \frac{z'}{z}\mathcal{N}_s\right) \end{aligned}\right\} \qquad (175)$$

En el empréstito normal con $P=0$ la relación entre $\mathcal{U}_s$ y $\mathcal{N}_s$ es:

$$\mathcal{U}_s = \frac{z}{t^*}(C - \mathcal{N}_s) \qquad (176)$$

Cuando los intereses anticipados del período $s+1$ han vencido el valor de la nuda propiedad es el mismo y los valores del usufructo y del título se verán disminuidos en el importe del cupón Cz.

Si en la (171) se sustituye el valor de la anualidad comercial y el del número de títulos vivos dados por:

$$a = (C+P)N_1 \frac{z'}{1-(1-z')^n} \quad ; \quad N_{s+1} = N_1 \frac{1-(1-z')^{n-s}}{1-(1-z')^n}$$

se tiene

$$\mathcal{V}_s = Cz + (C+P)\frac{z'}{t^*}(1-t^*)\frac{1-(1-t^*)^{n-s}}{1-(1-z')^{n-s}} \qquad (177)$$

Ejemplo.—Calcular el valor de una obligación y de sus componentes, al principio del sexto año de la vida del empréstito y al tanto anticipado $t^* = 0{,}12$, si sus características son:

- **Número de títulos: 100.000.**
- **Valor nominal de cada título: 10.000 pts.**
- **Duración de la emisión: 10 años.**

— **Abono de cupones anuales anticipados a rédito z = 0,10.**

— **Amortización con prima de 300 pts. por título.**

— **Anualidad comercial constante.**

Aplicando las fórmulas (174) y (175), teniendo en cuenta que $z' = \dfrac{zC}{C+P} = \dfrac{1.000}{10.300} = 0{,}09709$, se tiene:

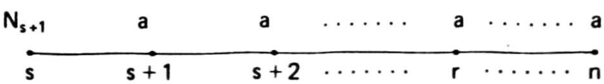
$$\mathcal{V}_5 = 1.000 + 10.300\,\frac{0{,}09709}{0{,}12}\,(1-0{,}12)\,\frac{1-(1-0{,}12)^5}{1-(1-0{,}09709)^5} = 9.660{,}61$$

$$\left.\begin{aligned} 9.660{,}61 &= \mathcal{U}_5 + \mathcal{N}_5 \\ \mathcal{U}_5 &= \frac{0{,}10}{0{,}12}\left(10.000 - \frac{0{,}09709}{0{,}10}\,\mathcal{N}_5\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \mathcal{U}_5 &= 2.708{,}47 \\ \mathcal{N}_5 &= 6.952{,}14 \end{aligned}$$

26.—VALOR DEL EMPRESTITO Y VALOR DE UNA OBLIGACION EN UN EMPRESTITO CON PAGO DE INTERESES ACUMULADOS

En este epígrafe se desarrollará únicamente el empréstito normal con anualidad constante cuya estructura es $a = C(1+i)^r M_r$.

Situados al principio del período $s+1$, los títulos vivos y la contraprestación pendiente de vencimiento son:



El valor del empréstito al tanto t del mercado queda representado por:

$$\mathcal{V}_s^T = \sum_{r=s+1}^{n} a(1+t)^{-(r-s)} = \sum_{r=s+1}^{n} C(1+i)^r M_r (1+t)^{-(r-s)} \tag{178}$$

y su descomposición en los valores del usufructo y nuda propiedad es:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_s^T &= \sum_{r=s+1}^{n} C[(1+i)^r - 1]M_r(1+t)^{-(r-s)} + \sum_{r=s+1}^{n} CM_r(1+t)^{-(r-s)} = \\ &= \mathcal{U}_s^T + \mathcal{N}_s^T \end{aligned} \tag{179}$$

En un punto interior $s+\theta$, con $0<\theta<1$, se tiene:

$$\mathcal{V}_{s+\theta}^T = (1+t)^\theta \mathcal{V}_s^T \quad ; \quad \mathcal{U}_{s+\theta}^T = (1+t)^\theta \mathcal{U}_s^T \quad ; \quad \mathcal{N}_{s+\theta}^T = (1+t)^\theta . \mathcal{N}_s^T$$

El valor medio del título y de sus componentes, es:

$$\mathscr{V}_s = \frac{a\,\mathbf{a}_{\overline{n-s}|t}}{N_{s+1}} = \frac{a\,\mathbf{a}_{\overline{n-s}|t}}{\dfrac{a\,\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i}}{C(1+i)^s}} = C(1+i)^s\,\frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|t}}{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i}} \qquad (180)$$

$$\mathscr{N}_s = \sum_{r=s+1}^{n} C\,\frac{M_r}{N_{s+1}}\,(1+t)^{-(r-s)} = C\,\frac{M_s}{N_{s+1}}\sum_{r=s+1}^{n}[(1+i)(1+t)]^{-(r-s)} =$$

$$= C\,\frac{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|x}}{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i}}, \quad \text{con} \quad x = i + t + ti \qquad (181)$$

$$\mathscr{U}_s = \mathscr{V}_s - \mathscr{N}_s = C\,\frac{(1+i)^s\,\mathbf{a}_{\overline{n-s}|t} - \mathbf{a}_{\overline{n-s}|x}}{\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i}} \qquad (182)$$

Ejemplo.—Calcular el valor de una obligación y su descomposición al principio del quinto año de la vida del empréstito y al tanto $t = 0{,}135$, si sus características son:

- **Número de títulos: 70.000.**
- **Valor nominal de cada título: 2.000 pts.**
- **Duración de la emisión: 8 años.**
- **No abono de cupones anuales.**
- **Amortización de los títulos con los intereses acumulados a rédito constante del 12,5% anual.**
- **Anualidad constante.**

Para resolver el ejercicio basta aplicar las expresiones (180), (181) y (182) y resulta:

$$\mathscr{V}_4 = 2.000(1+0{,}125)^4\,\frac{\mathbf{a}_{\overline{4}|0{,}135}}{\mathbf{a}_{\overline{4}|0{,}125}} = 3.137{,}74$$

$$\mathscr{N}_4 = 2.000\,\frac{\mathbf{a}_{\overline{4}|x}}{\mathbf{a}_{\overline{4}|0{,}125}} = 1.499{,}21 \qquad \text{siendo} \qquad x = i + t + ti = 0{,}276875$$

$$\mathscr{U}_4 = \mathscr{V}_4 - \mathscr{N}_4 = 3.137{,}74 - 1.499{,}21 = 1.638{,}53$$

27.—CALCULO DEL VALOR DE UNA OBLIGACION, DEL VALOR DEL USUFRUCTO Y DEL VALOR DE LA NUDA PROPIEDAD EN FUNCION DE LA VIDA MEDIA, VIDA MEDIANA Y VIDA FINANCIERA

Como se vio anteriormente, la vida media, la vida mediana y la vida financiera son valores que expresan la duración esperada de un título de un empréstito, es decir, permiten conocer el tiempo que queda por transcurrir en la inversión de la obligación o intervalo en el cual se percibirán los ingresos de la citada inversión.

Conocidas las duraciones esperadas de los títulos a través de los promedios y el tanto de valoración de mercado es fácil obtener una valoración de la obligación y sus componentes, en las distintas modalidades de empréstitos.

27.1.—EMPRESTITO CON INTERESES POSPAGABLES

Para analizar el problema vamos a suponer un empréstito con prima de amortización cuya estructura de anualidad es:

$$a_r = CN_r i + (C+P)M_r$$

Supongamos que al principio del año s + 1 la vida media, calculada mediante (118), es m_s. Ello nos indica que en promedio el título proporcionará intereses durante m_s períodos y al final de ellos se amortizará por el valor C + P, es decir, el poseedor de la obligación espera tener los ingresos siguientes:

$$\begin{array}{ccccccccc} & Ci & Ci & \cdots\cdots & Ci+(C+P) & & \\ \hline s & s+1 & s+2 & \cdots\cdots & s+m_s & \cdots\cdots & n \end{array}$$

El valor del usufructo, de la nuda propiedad y del título son:

$$\mathscr{U}_s = Ci\,\mathbf{a}_{\overline{m_s|}t} \tag{183}$$

$$\mathscr{N}_s = (C+P)(1+t)^{-m_s} \tag{184}$$

$$\mathscr{V}_s = Ci\,\mathbf{a}_{\overline{m_s|}t} + (C+P)(1+t)^{-m_s} \tag{185}$$

Cuando se conocen la vida mediana x o la vida financiera α se procede de igual manera que con la vida media m_s.

Si el empréstito es con intereses fraccionados las fórmulas del usufructo y valor del título son:

$$\mathscr{U}_s^{(m)} = mCi^{(m)}\,\mathbf{a}^{(m)}_{\overline{m_s|}t}$$

$$\mathscr{V}_s^{(m)} = mCi^{(m)}\,\mathbf{a}^{(m)}_{\overline{m_s|}t} + (C+P)(1+t)^{-m_s}$$

no variando el valor de la nuda propiedad.

Ejemplo 1.—Calcular, mediante la utilización de la vida mediana y de la vida financiera, el valor de una obligación y de sus componentes, al principio del sexto año y al tanto t = 0,12, del empréstito con las características:

- **Número de títulos: 40.000.**
- **Nominal de cada título: 10.000 pts.**
- **Duración de la emisión: 12 años.**
- **Abono de un cupón anual constante de 1.050 pts. por título.**
- **Amortización con prima constante de 500 pts.**
- **Anualidad comercial constante.**

Por tratarse de un empréstito con estructura de anualidad $a = CN_r i + (C+P)M_r$ cuyo correspondiente normalizado es del tipo I, con $i' = \dfrac{Ci}{C+P} = 0{,}10$, bastará aplicar las fórmulas (129), (132) y (133) para calcular los promedios cuyos valores son:

— Vida media

$$m_5 = (12-5) - \frac{1}{0{,}10} + \frac{12-5}{0{,}10\, S_{\overline{12-5}|0{,}10}} = 4{,}3784$$

— Vida mediana

$$x = \frac{\lg_e \dfrac{(1+0{,}10)^{12-5}+1}{2}}{\lg_e(1+0{,}10)} = 4{,}0733$$

— Vida financiera

$$(1+0{,}12)^{-\alpha} = \frac{1}{S_{\overline{12-5}|0{,}10}} \; \frac{1-(1+0{,}12)^{-(12-5)}\cdot(1+0{,}10)^{12-5}}{0{,}12-0{,}10} = 0{,}6245 \Rightarrow \alpha = 4{,}1540$$

Los valores del usufructo, nuda propiedad y obligación son:

$\mathcal{U}_s = 1.050\, \mathbf{a}_{\overline{m_s}|0,12} = 3.422{,}64$; $\mathcal{N}_5 = 10.500(1+0{,}12)^{-m_s} = 6.392{,}83$; $\mathcal{V}_5 = \mathcal{U}_5 + \mathcal{N}_5 = 9.815{,}47$

$\mathcal{U}_5 = 1.050\, \mathbf{a}_{\overline{x}|0,12} = 3.235{,}22$; $\mathcal{N}_5 = 10.500(1+0{,}12)^{-x} = 6.617{,}74$; $\mathcal{V}_5 = \mathcal{U}_5 + \mathcal{N}_5 = 9.852{,}96$

$\mathcal{U}_5 = 1.050\, \mathbf{a}_{\overline{\alpha}|0,12} = 3.285{,}43$; $\mathcal{N}_5 = 10.500(1+0{,}12)^{-\alpha} = 6.557{,}49$; $\mathcal{V}_5 = \mathcal{U}_5 + \mathcal{N}_5 = 9.842{,}91$

27.2.—EMPRESTITO CON INTERESES ANTICIPADOS

Si el empréstito tiene la estructura de anualidad $a_r = CN_{r+1}z + (C+P)M_r$ y el valor de la vida media al principio del año $s+1$ es m_s, los ingresos esperados por la obligación son:

Cz	Cz	·······	Cz	C + P		
s	s + 1	·······	s + m_s − 1	s + m_s	·······	n

resultanto los siguientes valores:

$$\mathcal{U}_s = Cz\, \frac{1-(1-t^*)^{m_s}}{t^*} \tag{186}$$

$$\mathcal{N}_s = (C+P)(1-t^*)^{m_s} \tag{187}$$

$$\mathscr{V}_s = Cz \frac{1-(1-t^*)^{m_s}}{t^*} + (C+P)(1-t^*)^{m_s} \quad (188)$$

Con la vida mediana x y la vida financiera α se procede como con la vida media m_s.

Ejemplo 2.—Resolver el supuesto anterior de 27,1 si el cupón es anticipado y el tanto de valoración $t^* = 0{,}11$.

Aplicando las fórmulas (137), (138) y (139), siendo $z' = \frac{zC}{C+P} = \frac{1.050}{10.500} = 0{,}10$ se tiene:

$$m_5 = \frac{12-5}{1-(1-0{,}10)^{12-5}} - \frac{1}{0{,}10} + 1 = 4{,}4176$$

$$(1-0{,}10)^x = 2\frac{(1-0{,}10)^7}{(1-0{,}10)^7+1} = 0{,}6471 \Rightarrow x = 4{,}1312$$

$$(1-0{,}11)^\alpha = \frac{0{,}10(1-0{,}11)}{1-(1-0{,}10)^7}\,\frac{(1-0{,}10)^7-(1-0{,}11)^7}{0{,}11-0{,}10} = 0{,}6139 \Rightarrow \alpha = 4{,}1875$$

Los valores pedidos son

$$\mathscr{U}_5 = 1.050\frac{1-(1-0{,}11)^{m_s}}{0{,}11} = 3.840{,}90;\ \mathscr{N}_5 = 10.500(1-0{,}11)^{m_s} = 6.275{,}01;\ \mathscr{V}_5 = \mathscr{U}_5 + \mathscr{N}_5 = 10.115{,}91$$

$$\mathscr{U}_5 = 1.050\frac{1-(1-0{,}11)^{x}}{0{,}11} = 3.647{,}29;\ \mathscr{N}_5 = 10.500(1-0{,}11)^{x} = 6.487{,}98;\ \mathscr{V}_5 = \mathscr{U}_5 + \mathscr{N}_5 = 10.135{,}27$$

$$\mathscr{U}_5 = 1.050\frac{1-(1-0{,}11)^{\alpha}}{0{,}11} = 3.685{,}86;\ \mathscr{N}_5 = 10.500(1-0{,}11)^{\alpha} = 6.445{,}55;\ \mathscr{V}_5 = \mathscr{U}_5 + \mathscr{N}_5 = 10.131{,}41$$

27.3.—EMPRESTITO CON INTERESES ACUMULADOS

Suponiendo un empréstito con anualidad $a_r = C(1+i)^r M_r$ si el valor de la vida media, al principio del año $s+1$, es m_s, los valores del usufructo, nuda propiedad y total de obligación:

$$\mathscr{U}_s = C[(1+i)^{s+m_s} - 1](1+t)^{-m_s} \quad (189)$$

$$\mathscr{N}_s = C(1+t)^{-m_s} \quad (190)$$

$$\mathscr{V}_s = C(1+i)^{s+m} \cdot (1+t)^{-m_s} \quad (191)$$

si se conocen la vida mediana x o la vida financiera α se procede de idéntica forma.

Ejemplo 3.—Resolver el supuesto del número 26 mediante el concurso de la vida media, de la vida mediana y de la vida financiera.

Mediante las fórmulas (141), (143) y (145) se tiene:

$$m_4 = 1 + \frac{1}{0{,}125} + 4 - \frac{4}{0{,}125\,\mathbf{a}_{\overline{4}|0{,}125}} = 2{,}3533$$

$$\mathbf{a}_{\overline{x}|0{,}125} = (1+0{,}12)^4 \,\frac{\mathbf{a}_{\overline{8}|0{,}125} - \mathbf{a}_{\overline{4}|0{,}125}}{2} = 1.50282 \;\Rightarrow\; x = 1{,}7666$$

$$\left(\frac{1+0{,}135}{1+0{,}125}\right)^{\alpha} = \frac{\mathbf{a}_{\overline{4}|0{,}125}}{\mathbf{a}_{\overline{4}|0{,}135}} = 1{,}0210 \;\Rightarrow\; \alpha = 2{,}3479$$

Los valores en función de la vida media son:

$$\mathscr{U}_4 = 2.000[(1+0{,}125)^{4+m_4} - 1](1+0{,}135)^{-m_4} = 1.652{,}99$$

$$\mathscr{N}_4 = 2.000(1+0{,}135)^{-m_4} = 1.484{,}60$$

$$\mathscr{V}_4 = 2.000(1+0{,}125)^{4+m_4}(1+0{,}135)^{-m_4} = 3.137{,}59$$

en base a la vida mediana se tiene:

$$\mathscr{U}_4 = 2.000[(1+0{,}125)^{4+x} - 1](1+0{,}135)^{-x} = 1.554{,}82$$

$$\mathscr{N}_4 = 2.000(1+0{,}135)^{-x} = 1.599{,}10$$

$$\mathscr{V}_4 = 2.000(1+0{,}125)^{4+x}(1+0{,}135)^{-x} = 3.153{,}92$$

y con la vida financiera resulta:

$$\mathscr{U}_4 = 2.000[(1+0{,}125)^{4+\alpha} - 1](1+0{,}135)^{-\alpha} = 1.652{,}12$$

$$\mathscr{N}_4 = 2.000(1+0{,}135)^{-\alpha} = 1.485{,}61$$

$$\mathscr{V}_4 = 2.000(1+0{,}125)^{4+\alpha}(1+0{,}135)^{-\alpha} = 3.137{,}73$$

IV.5.—LOS EMPRESTITOS Y LOS IMPUESTOS

En el epígrafe 7, dentro de las características comerciales unilaterales, se enunciaba la existencia de impuestos que inciden en la operación. Los efectos de los impuestos, que afectan en distinta medida a emisor y a obligacionistas, se traducen en alteraciones en los tantos efectivos.

Corresponde a los epígrafes sucesivos estudiar la casuística de las distintas figuras tributarias que afectan al emisor y a los inversores en títulos para analizar los efectos económico-financieros que producen en prestamistas y prestatarios.

Para conseguir esta finalidad, se describen en primer lugar los impuestos y otros efectos derivados de la fiscalidad que afectan al emisor y al poseedor de la obligación. Posteriormente se procede a analizar los casos más usuales de empréstitos con pago periódico de intereses pospagables y con pago de intereses acumulados.

28.—EFECTOS FISCALES PARA LA SOCIEDAD EMISORA DE OBLIGACIONES

La emisión de un empréstito se ve influenciada por dos impuestos en el momento inicial de la puesta en circulación de los títulos, durante la vida de ellos y en su amortización o cancelación.

28.1.—EMISION DE UN EMPRESTITO

El impuesto sobre **transmisiones patrimoniales** grava la emisión de obligaciones tomando como sujeto pasivo o responsable del pago a la propia entidad emisora. La base imponible es el nominal de la emisión y el tipo impositivo suele ser fijo.

Algunas legislaciones tratan con el mismo tipo impositivo a las emisiones de obligaciones con garantías que a las sin garantía (simples); pero existen otras que diferencian el trato girando tipos impositivos distintos.

La emisión de obligaciones se hará constar en escritura pública, debiendo inscribirse en los registros correspondientes. En ocasiones, y por causas ajenas al emisor, es usual que transcurra un cierto tiempo entre el acuerdo de la puesta en circulación de las obligaciones emitidas y su inscripción registral. Para no perjudicar la emisión se suele exigir el devengo del impuesto en el momento de tomarse el acuerdo de la puesta en circulación no teniendo que esperar, por consiguiente, a su inscripción para efectuar la transmisión de los títulos.

La legislación española (R.D. 3494/81 de 29-12) actual considera como:

- Sujeto pasivo: la entidad emisora.
- Base imponible: el importe total de la emisión (nominal).
- Tipo impositivo: el 1 % tanto para las emisiones con garantía como las sin garantía o simples.
- Devengo del impuesto: el momento de tomarse el acuerdo de la puesta en circulación de las obligaciones emitidas.

Los desembolsos que tiene que efectuar el emisor por los impuestos iniciales suponen una minoración del efectivo neto recibido y, como consecuencia, se incrementará el tanto efectivo de coste del emisor.

28.2.—GASTOS DERIVADOS DE LA EMISION DE OBLIGACIONES

Los gastos que se producen como consecuencia de una emisión de obligaciones son de dos tipos: iniciales o en el origen y periódicos o producidos en cada año como consecuencia de la administración del empréstito.

Estos gastos se consideran como gastos fiscales y deben ser deducidos por la sociedad. Los gastos periódicos o de administración se deducirán en el ejercicio en que vencen. La deducción de los gastos iniciales se deberá realizar a lo largo de los distintos ejercicios en los que las obligaciones van a permanecer sin amortizar.

Como gastos necesarios en la emisión de obligaciones la legislación española (art. 26 del Real Decreto 3.061/79) recoge los siguientes:

— Las comisiones abonadas a las entidades españolas o extranjeras de crédito o ahorro, y a cuantas aseguren la colocación de los títulos, en las cuantías y términos establecidos en la legislación vigente.
— Los gastos de escritura, registro e intervención, así como los gastos de letrados, que sean a cargo de la sociedad emisora.
— Los impuestos que graven la emisión y puesta en circulación de los títulos.
— Los gastos de publicidad y la confección material de los títulos.

La consideración de los gastos de la emisión como gasto fiscal deducible supone para la empresa un ahorro en la liquidación del «impuesto de sociedades» por un importe igual al producto del tipo impositivo por los gastos deducidos. Por tanto, al emisor se le disminuye su tanto de coste efectivo.

28.3.—PRIMAS DE EMISION

Las primas de emisión suponen una menor percepción por la sociedad del efectivo inicial. Esta diferencia debe ser considerada de análoga manera que los gastos iniciales, es decir, como un gasto plurianual y, por lo tanto, deducirse como gasto fiscal entre los distintos ejercicios que duren las obligaciones.

28.4.—INTERESES

Los intereses satisfechos por la Sociedad emisora se consideran gasto fiscal en el ejercicio en que corresponden. Cuando no exista coincidencia entre la fecha del devengo y la de pago se procederá a periodificar incluso por días. Así como, intereses satisfechos el día 16 de abril pero correspondientes al semestre 16 de octubre al 15 de abril se consideran como gasto fiscal de un año la parte que proporcionalmente corresponde al período 16-octubre/31-diciembre y como gasto fiscal del siguiente ejercicio los del período 1-enero/15-abril.

Esta periodificación es sencilla cuando el empréstito es con pago periódico de intereses, pero presenta ciertas dificultades en el caso de empréstitos con pago de intereses acumulados cuyo devengo corresponde a todos los períodos hasta su amortización y ha de procederse a la periodificación de la totalidad de los intereses. El pago total de intereses que se produce por un título que se amortiza en el año r es $C[(1+i)^r-1]$ y para proceder a deducir como gasto fiscal se considera como si al final de cada período se devengase Ci (el mismo importe que en caso de pago de intereses periódicos) y en el período r además de Ci se devengan los intereses producidos por los intereses, es decir, el importe $C[(1+i)^r-1]-Cir=C[(1+i)^r-1-ri]$.

Para la entidad emisora los efectos son idénticos a los de los gastos de administración o periódicos.

28.5.—PRIMAS DE AMORTIZACION

Las primas de reembolso o de amortización suelen tener la consideración de gastos financieros diferidos, es decir, como unos mayores intereses que se abonan en la amortización del título.

Tienen la consideración de gasto fiscal y la consignación del gasto que anualmente corresponde puede dar lugar a dos interpretaciones:

a) Deducir en cada año la cuantía de las primas pagadas en él.

b) Proceder a periodificar en cada uno de los años los valores de las primas para determinar los devengos correspondientes al año y deducir estos importes.

En la actualidad, nuestra actual legislación permite deducir en el ejercicio las primas satisfechas en él. Cuando el año fiscal no coincida con el año del empréstito se procederá a periodificar según lo indicado en 28.4.

Análogo tratamiento se sigue en los lotes o premios.

28.6.—AMORTIZACION O CANCELACION

La amortización de obligaciones queda grabada siempre aunque la figura tributaria de las distintas legislaciones no sea coincidente (Transmisiones patrimoniales, Actos jurídicos documentados, etc.). Desde el punto de vista económico es indiferente la denominación y sólo interesa la cuantificación del impuesto que toma como sujeto pasivo al emisor.

Para el caso español el R.D. 3494/81 en su art. 20, párrafo 2, dice: «La cancelación de obligaciones no sujeta al impuesto por el concepto de Transmisiones Patrimoniales, quedará, sin embargo, grabada por el de Actos jurídicos Documentados sobre la base del capital prestado en las obligaciones simples (sin garantías) y sobre la base del capital garantizado en los restantes supuestos.» El tipo impositivo, a cargo del emisor, es de 0,50% de la base.

En el caso de cancelación de obligaciones hipotecarias la base imponible está constituida por el importe de las obligaciones más los intereses y más los gastos.

28.7.—AMORTIZACION POR CONVERSION EN OTROS TITULOS

En este tipo de amortización de títulos y obligaciones, conviene distinguir entre la figura del **canje por otras obligaciones**, que no tiene valor patrimonial ni jurídico y, por lo tanto, no sujeta al impuesto y el de **conversión por acciones** que afecta al valor económico o jurídico del mismo.

Cuando la conversión es por acciones nuevas nacidas para este intercambio existen dos figuras tributarias en la legislación española: por una parte la amortización o cancelación sujeta por Actos jurídicos documentados al tipo del 0,50% y un aumento de capital en la sociedad al tipo del 3% en Sociedades Anónimas o al 1,90% en las no anónimas. Ambas figuras corren a cargo del emisor de los títulos.

Si la conversión es por acciones en circulación las dos figuras impositivas que contempla la legislación española son: Actos jurídicos documentados, al tipo del 0,50% por la amortización, soportado por el emisor, y transmisiones patrimoniales según escala a cargo del receptor de las acciones.

29.—EFECTOS FISCALES PARA EL INVERSOR EN OBLIGACIONES

El poseedor de una obligación es sometido a tributación mientras el título permanece en su poder, por las distintas formas de rendimientos que genera.

29.1.—ADQUISICION DE UN TITULO

El inversor en obligaciones puede optar entre suscribir títulos en el momento de la emisión o comprarlos en el mercado cuando ya están en circulación. Cuando la adquisición es por suscripción no suelen existir cargas fiscales para el comprador; pero no suele ocurrir así cuando se adquieren los títulos en el mercado de valores en donde es frecuente que se exija tributar al comprador.

La legislación española grava la operación de compraventa en el mercado al exigir al comprador utilizar efectos timbrados según escala, en la compra de obligaciones.

29.2.—INTERESES

Los rendimientos que el obligacionista percibe en concepto de intereses, ya sean periódicos o acumuladamente, son sometidos a tributación. En unos casos se grava por el **impuesto sobre las rentas de capital** a un tipo que por lo común suele ser fijo; pero en otras legislaciones, los intereses se integran en la renta percibida por el titular (sea persona física o persona jurídica) lo que supondrá gravar por el **impuesto sobre la renta** (de las personas físicas o de las personas jurídicas).

Nuestra legislación actual considera que los intereses devengados por las obligaciones se integrarán en la renta percibida. Por ello, si el perceptor es persona física, el **impuesto sobre la renta de las personas físicas** (IRPF) gravará los intereses según los tipos que correspondan al sujeto en el IRPF. Cuando el perceptor es persona jurídica el **impuesto de Sociedades** (IS) girará sobre los intereses un tipo fijo.

El emisor, por los intereses devengados y que paga está obligado a retener un porcentaje como ingreso a cuenta en los impuestos (IRPF o IS) de las personas perceptoras de los intereses.

Cuando no exista coincidencia entre la fecha del devengo y la del cobro será necesario periodificar en los mismos términos que se ha descrito en 28.4.

Si el pago de los intereses se acumula al momento de la amortización del título no generará ningún problema especial en un impuesto sobre rentas de capital, cuando se considere como un incremento de patrimonio. Pero cuando la imposición es sobre la renta se plantean distintas posibilidades de interpretación.

a) Pago del impuesto en el ejercicio del cobro de los intereses efectuando la retención a cuenta (IRPF o IS) en el momento del pago.

b) Imputar a cada ejercicio los intereses devengados en él aunque se difiera su cobro. Los intereses de los intereses se considerarán, a efectos fiscales, como si se hubiesen devengado en el ejercicio que se amortiza el título.

Dentro de esta segunda interpretación cabe considerar que se produzcan retenciones a cuenta en cada ejercicio o que no se efectúe ningún tipo de retención.

Actualmente la tendencia española es la de considerar el caso b) con retenciones a cuenta en cada ejercicio.

29.3.—PRIMAS Y LOTES

Las tendencias doctrinales, a la diferencia entre el valor de emisión y el valor de amortización (prima de emisión más prima de amortización) le dan distintas interpretaciones: Así cabe citar:

a) Intereses diferidos.

b) Ganancias de capital.

En el caso a) el planteamiento sería análogo al supuesto de pago de intereses acumulados.

Cuando se considera una ganancia de capital, plusvalía o incremento del patrimonio se tributará generalmente a un tipo fijo.

Si el título se adquire en el mercado, la diferencia entre el precio de adquisición y el de amortización o el de venta se considerará una plusvalía o minusvalía según supere o no este precio al de adquisición.

Nuestra legislación considera las primas como un incremento de patrimonio para el obligacionista. En el caso de compra en mercado pueden darse incrementos o disminuciones de patrimonio.

Los lotes se consideran como incrementos de patrimonio.

29.4.—DESGRAVACION FISCAL POR ADQUISICION DE OBLIGACIONES

La compra o suscripción de obligaciones dentro del ejercicio fiscal puede dar lugar, en determinadas condiciones, a deducir de la cuota del IRPF o del IS, una determinada proporción del montante invertido.

En nuestro caso si los valores se adquieren por suscripción se podrá deducir un porcentaje de la inversión (15% en personas físicas y 10% en sociedades) y no se podrán enajenar durante un período mínimo de tiempo.

30.—EMPRESTITO CON PAGO PERIODICO DE INTERESES POSPAGABLES

Para estudiar la fiscalidad se plantea un emprésito con primas (de emisión P_e, y de amortización P), gastos iniciales G_p^i y gastos de administración g.

30.1.—SOCIEDAD EMISORA DEL EMPRESTITO

Cuando no se tienen en cuenta impuestos, el emisor recibe neto el efectivo $E_p = CN_1 - P_e N_1 - G_p^i$ y tiene que entregar la anualidad $a_{p,r} = [CN_r i + (C+P)M_r](1+g)$. El coste de la operación medido por el tanto efectivo i_p se calcula en la ecuación

$$E_p = \sum_{r=1}^{n} a_{p,r}(1+i_p)^{-r}$$

La inclusión de la fiscalidad altera sustancialmente los ingresos y pagos que realmente se tiene que efectuar. Los impuestos aumentan los costes y los gastos fiscalmente deducibles los minoran. Se tiene:

a) **Impuestos**

El impuesto sobre transmisiones patrimoniales minora la prestación efectiva que recibe el emisor. Su importe es $T_p^i = CN_1\gamma$, siendo γ el tipo impositivo.

El impuesto de actos jurídicos documentados aumenta las anualidades que amortizan el empréstito. Para el año r su cuantía será $T_r = CM_r\delta$, con δ tipo impositivo.

b) **Gastos fiscalmente deducibles**

Tienen esta consideración las **primas de emisión**, los **gastos iniciales** (comisiones, gastos de escritura, registro, etc. publicidad y confección de títulos) y los **impuestos de emisión**. El conjunto de ellos es $G_0 = P_e N_1 + G_p^i + T_p^i$ y se deberán distribuir uniformemente en los n años de vida del empréstito, es decir, en cada año $f = G_0/n$.

Si se designa por λ el tipo impositivo del impuesto de sociedades la cuantía que la empresa emisora se ahorra es $f\lambda$. Aunque el pago de la anualidad $a_{a,r}$ no coincide con el momento del ahorro de f (éste se produce cuando se liquida el IS) en los planteamientos matemáticos cabe, en ocasiones, considerarlos simultáneos.

Asimismo, también son gastos fiscalmente deducibles los **intereses, primas de amortización, gastos de administración** e **impuestos de cancelación** que abona periódicamente.

La cuantía total será $G_r = f + CN_r i + PM_r + g[CN_r i + (C+P)M_r] + T_r = f + b_r + T_r$ y el menor desembolso $F_r = G_r\lambda$.

c) **Prestación para el emisor**

El efectivo neto recibido en el origen es:

$$E_p = CN_1 - P_e N_1 - G_p^i - T_p^i \tag{192}$$

d) **Contraprestación del emisor**

La anualidad total asciende a:

$$a_{p,r}^* = a_{p,r} + T_r - F_r \tag{193}$$

si se considerase la diferencia de tiempos entre el vencimento de la anualidad y el ahorro de F_r, que suele ser unos meses, bastaría sustituir F_r por $F_r(1+i_p)^{-\theta}$ siendo θ la fracción de año que represente esa diferencia.

e) **Tanto efectivo para el emisor**

Su valor i_p se calcula en la ecuación:

$$E_p = \sum_{r=1}^{n} a^*_{p,r}(1+i_p)^{-r} = \sum_{r=1}^{n} (a_{p,r} + T_r - F_r)(1+i_p)^{-r} \qquad (194)$$

o en la equivalente

$$E_p = \sum_{r=1}^{n} (a_{p,r} + T_r)(1+i_p)^{-r} - \sum_{r=1}^{n} F_r(1+i_p)^{-(r+\theta)} \qquad (194')$$

si se incluye el retardo θ.

Ejemplo 1.—Determinar el tanto efectivo para el emisor de un empréstito emitido en diciembre de un determinado año si las características de la operación y las impositivas son:

- **Número de títulos: 100.000.**
- **Nominal de cada títulos: 5.000 pts.**
- **Duración de la emisión: 5 años.**
- **Prima de emisión del 2% sobre el nominal.**
- **Abono de cupones anuales de 650 pts. por título.**
- **Amortización con prima constante de 150 pts. por título.**
- **Amortización del mismo número de títulos en cada año.**
- **Gastos de iniciales: el 4% de nominal emitido.**
- **Gastos de administración del 1% sobre intereses y valor de reembolso.**
- **Impuesto de transmisiones, en el origen: 1% del nominal emitido.**
- **Impuesto sobre actos jurídicos documentados: 0,50% del nominal amortizado en cada año.**
- **Impuesto sobre sociedades: el 35% de los beneficios a liquidar seis meses después de la finalización del ejercicio económico.**

Para calcular los desembolsos se procede a determinar previamente el cuadro de amortización, siguiendo la metodología de ejercicios anteriores. Su valor es:

Años s	Anualidades $a_{p,r}$	Gastos de administración $g(I_r+P_r+A_r)$	Intereses $I_r = CN_r i$	Primas $P_r = PM$	Amortización $A_r = CM_r$	M_r	$\mathcal{M}_r$	N_r
Or.	—	—	—	—	—	—	—	100.000
1	169.680.000	1.680.000	65.000.000	3.000.000	100.000.000	20.000	20.000	80.000
2	156.500.000	1.550.000	52.000.000	3.000.000	100.000.000	20.000	40.000	60.000
3	143.420.000	1.420.000	39.000.000	3.000.000	100.000.000	20.000	60.000	40.000
4	130.290.000	1.290.000	26.000.000	3.000.000	100.000.000	20.000	80.000	20.000
5	117.160.000	1.160.000	13.000.000	3.000.000	100.000.000	20.000	100.000	—

La prestación efectiva recibida en el origen es:

$$E_p = CN_1 - P_e N_1 - G - T_p^i = CN_1 - 0{,}02CN_1 - 0{,}04CN_1 - 0{,}01CN_1 = \\ = CN_1 - 0{,}07CN_1 = 465.000.000$$

Los impuestos de cancelación, los gastos fiscalmente deducibles, las deducciones y las anualidades totales son:

Años	Impuestos	Gastos fiscales				Deducción	Anualidad
r	T_r	f	b_r	T_r	$G_r = f + b_r + T_r$	$F_r = 0{,}35G_r$	$a^*_{p,r} = a_{p,r} + T_r - F_r$
1	500.000	7.000.000	69.680.000	500.000	77.180.000	27.013.000	143.167.000
2	500.000	7.000.000	56.500.000	500.000	64.000.000	22.400.000	134.600.000
3	500.000	7.000.000	43.420.000	500.000	50.920.000	17.822.000	126.098.000
4	500.000	7.000.000	30.290.000	500.000	37.790.000	13.226.500	117.563.500
5	500.000	7.000.000	17.160.000	500.000	24.660.000	8.631.000	109.029.000

La ecuación

$$465.000.000 = \sum_{r=1}^{5} a^*_{p,r}(1+i_p)^{-r}$$

da como solución $i_p = 11{,}68\,\%$.

El tanto efectivo no teniendo en cuenta la fiscalidad es:

$$470.000.000 = \sum_{r=1}^{5} a_{p,r}(1+i_p)^{-r} \Rightarrow i_p = 17{,}18\,\%$$

existiendo una diferencia $17{,}18 - 11{,}68 = 5{,}5\,\%$.

Si se considera el desplazamiento de medio año existente entre $a_{p,r} + T_r$ y F_r la ecuación del tanto efectivo es:

$$465.000.000 = \sum_{r=1}^{5} (a_{p,r} + T_r)(1+i_p)^{-r} - \sum_{r=1}^{5} F_r(1+i)^{-\left(r+\frac{1}{2}\right)}$$

con solución $i_p = 12{,}21\,\%$.

30.2.—SUSCRITOR EN OBLIGACIONES

La no consideración de impuestos daba lugar a que a cambio de prestación $E_a = CN_1 - P_e N_1 = VN_1$ se recibiesen las anualidades $a_{a,r} = CN_r i + (C+P)M_r$. El tanto efectivo obligacionista i_a y el tanto de rendimiento de una obligación i_R que se amortiza en el año s, se determinaban en:

$$E_a = \sum_{r=1}^{n} a_{a,r}(1+i_a)^{-r} \quad ; \quad V = Ci\,\mathbf{a}_{\overline{s}|i_R} + (C+P)(1+i_R)^{-s}$$

Al incluir la fiscalidad los intereses y las primas son sometidos a tributación mediante la imposición sobre rentas de capital y sobre plusvalías en unos casos y en otros quedan integrados dentro de la tributación general de la renta de las personas (físicas y jurídicas).

Si se designa por α al tipo impositivo de las rentas de capital y por β de las plusvalías, las cuantías netas que se recibirán periódicamente en concepto de intereses y en la amortización de la obligación serán respectivamente $Ci(1-\alpha)$ y $C+P-(P+P_e)\beta = C+P(1-\beta)-P_e\beta$.

Cuando los rendimientos se integran en la renta, será $\alpha=\beta$ pudiendo considerarse distintas hipótesis, ya que el tipo impositivo depende de las circunstancias particulares de cada inversor. Así:

— Si se considera únicamente el tipo de retención α', vigente en cada momento, se obtendrá una rentabilidad que sólo alcanzarán quienes no tengan que tributar adicionalmente.

— Si el inversor es una sociedad llegado al momento de la liquidación de beneficios tendrá que desembolsar $\lambda-\alpha'$ como complemento a la imposición a cuenta.

— Si el inversor es persona física y su tipo impositivo marginal sobre le renta es α deberá abonar complementariamente $\alpha-\alpha'$.

Aunque los complementos de tributación tienen que pagarse con cierto retraso (generalmente unos meses) respecto del cobro de cupones y valor de reembolso, se considerará en primer lugar la hipótesis de vencimiento simultáneo y posteriormente se introducirá el retardo. Asimismo, deberá tenerse en cuenta la posibilidad de conseguir desgravaciones.

Con el fin de facilitar el estudio de los efectos de la fiscalidad se procede a analizar en primer lugar el caso de un empréstito con amortización de todas las obligaciones al final de la operación para a continuación plantear la amortización de los títulos en distintos períodos.

a) **Empréstito con una sola amortización**

Al no existir aleatoriedad, de todas las obligaciones se obtendrán los mismos rendimientos. Los ingresos proporcionados por una obligación, cuando la tributación es por rentas de capital, son:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & C+P-(P+P_e)\beta \\ & Ci(1-a) & Ci(1-a)\ \ldots\ldots\ldots & Ci(1-a) & Ci(1-a) \\ \hline 0 & 1 & 2\ \ldots\ldots\ldots & n-1 & n \end{array}$$

y el tanto efectivo obligacionista i_a (en este caso coincide con el tanto de rendimiento) se obtendrán en:

$$V = Ci(1-\alpha)\,\mathbf{a}_{\overline{n}|i_a} + [C+P-(P+P_e)\beta](1+i_a)^{-n} \tag{195}$$

Cuando α y β coinciden la ecuación toma la forma

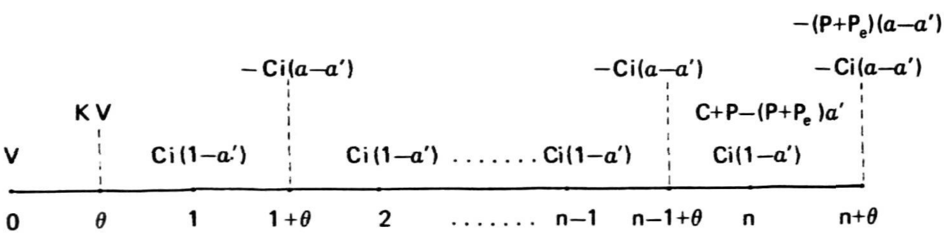
$$V = Ci(1-\alpha)\, \mathbf{a}_{\overline{n}|i_a} + [C + P - (P + P_e)\alpha](1 + i_a)^{-n} \tag{196}$$

Si los rendimientos se integran en la renta de las personas (físicas o jurídicas), en el momento de vencer los cupones o las primas se producen retenciones a un tipo α' (a cuenta de IRPF o IS) debiendo entregar, en momento posterior (cuando se produzca la liquidación), la diferencia entre el tipo α que corresponde al titular (tipo marginal en persona física o tipo correspondiente a Sociedades en persona jurídica) y el tipo α' retenido a cuenta. Designando por θ a la diferencia de tiempos (generalmente unos meses) entre la retención a cuenta y la que corresponde liquidar el impuesto la ecuación del tanto efectivo obligacionista será:

$$\begin{aligned} V = {} & Ci(1-\alpha')\, \mathbf{a}_{\overline{n}|i_a} + [C + P - (P + P_e)\alpha'](1 + i_a)^{-n} - \\ & - Ci(\alpha - \alpha')(1 + i_a)^{-\theta}\, \mathbf{a}_{\overline{n}|i_a} - (P + P_e)(\alpha\text{-}\alpha')(1 + i_a)^{-(n+\theta)} \end{aligned} \tag{197}$$

Cuando por facilitar el cálculo se pretenda obtener un valor aproximado de i_a tomando $\theta = 0$ se tiene la ecuación (196).

En el supuesto en que la adquisición del título permita conseguir desgravar una proporción K de lo invertido en la cuota del IRPF o del IS entonces el esquema que recoge el desembolso e ingresos es:



por lo que se tiene la ecuación:

$$\begin{aligned} V = {} & KV(1 + i_a)^{-\theta} + Ci(1-\alpha')\, \mathbf{a}_{\overline{n}|i_a} + [C + P - (P + P_e)\alpha'](1 + i_a)^{-n} - \\ & - Ci(\alpha - \alpha')(1 + i_a)^{-\theta}\, \mathbf{a}_{\overline{n}|i_a} - (P + P_e)(\alpha\text{-}\alpha')(1 + i_a)^{-(n+\theta)} \end{aligned} \tag{198}$$

siendo su simplificada para $\theta = 0$

$$V = KV + Ci\alpha(1-\alpha)\, \mathbf{a}_{\overline{n}|i_a} + [C + P - (P + P_e)\alpha](1 + i_a)^{-n} \tag{199}$$

Para el caso particular $V = C$, $P = 0$ la (198) y (199) se transforman, previa simplificación por C, en:

$$1 = K(1 + i_a)^{-\theta} + i(1-\alpha')\, \mathbf{a}_{\overline{n}|i_a} + (1 + i_a)^{-n} - i(\alpha - \alpha')(1 + i_a)^{-\theta}\, \mathbf{a}_{\overline{n}|i_a}$$

$$1 = K + i\alpha\, \mathbf{a}_{\overline{n}|i_a} + (1 + i_a)^{-n}$$

Si la retención a cuenta solamente se efectúa sobre los intereses y no sobre las primas de amortización las ecuaciones (197) y (198) se particularizarán en

$$V = Ci(1-\alpha')\, a_{\overline{n}|i_a} + (C+P)(1+i_a)^{-n} -$$
$$- Ci(\alpha-\alpha')(1+i_a)^{-\theta}\, a_{\overline{n}|i_a} - (P+P_e)\alpha(1+i_a)^{-(n+\theta)}$$

$$V = KV(1+i_a)^{-\theta} + Ci(1-\alpha')\, a_{\overline{n}|i_a} + (C+P)(1+i_a)^{-n} -$$
$$- Ci(\alpha-\alpha')(1+i_a)^{-\theta}\, a_{\overline{n}|i_a} - (P+P_e)\alpha(1+i_a)^{-(n+\theta)}$$

Ejemplo 2.—Determinar la rentabilidad neta que proporciona a un inversor que suscribe títulos de un empréstito con las siguientes características:

- **Valor nominal de cada título: 10.000 pts.**
- **Emisión a la par.**
- **Número de títulos: 50.000.**
- **Amortización única de títulos a los cinco años.**
- **Abono de cupones anuales de 1.375 pts.**
- **Amortización de títulos con una prima del 2% sobre el valor nominal.**

Supuestos a considerar:

1.° Existencia de un impuesto sobre rentas del capital del 24% sobre los intereses y un impuesto sobre plusvalías que grava a las primas de amortización un 30%.

2.° Retención periódica del 18%, en intereses y primas a cuenta del impuesto sobre la renta debiendo liquidarse éste seis meses después del vencimiento de los rendimientos. Considerar los casos de tipo en renta: $\alpha = 18\%$; $\alpha = 26\%$; $\alpha = 35\%$; $\alpha = 40\%$.

3.° Idem que caso anterior con inclusión de desgravación de un porcentaje del valor invertido en la suscripción. Los supuestos a considerar son dos; desgravación del 15% y desgravación de 10%.

Por tratarse de un empréstito con una única amortización bastará sustituir y operar en las ecuaciones anteriores obteniéndose:

1.° La ecuación (195) para los valores del enunciado toma la forma:

$$10.000 = 1.375(1-0{,}24)\, a_{\overline{5}|i_a} + (10.200 - 200 \times 0{,}30)(1+i_a)^{-5} =$$
$$= 1.045\, a_{\overline{5}|i_a} + 10.140(1+i_a)^{-5}$$

y tiene como solución $i_a = 10{,}68\,\%$.

2.° La solución de este apartado la proporciona la ecuación (197) que en este caso es:

$$10.000 = 1.375(1-0{,}18)\, a_{\overline{5}|i_a} + (10.200 - 200 \times 0{,}18)(1+i_a)^{-5} -$$
$$- 1.375(\alpha - 0{,}18)\,(1+i_a)^{-1/2}\, a_{\overline{5}|i_a} - 200(\alpha - 0{,}18)(1+i_a)^{-(5+1/2)} =$$

$$= 1.127{,}5\, a_{\overline{5}|i_a} + 10.164(1+i_a)^{-5} -$$

$$-(1+i_a)^{-1/2} \begin{cases} 0 & , \quad \text{si} \quad \alpha = 0{,}18 \\ 110\, a_{\overline{5}|i_a} - 16(1+i_a)^{-5} & , \quad \text{si} \quad \alpha = 0{,}26 \\ 233{,}75\, a_{\overline{5}|i_a} - 34(1+i_a)^{-5}, & \quad \text{si} \quad \alpha = 0{,}35 \\ 302{,}50\, a_{\overline{5}|i_a} - 44(1+i_a)^{-5}, & \quad \text{si} \quad \alpha = 0{,}40 \end{cases}$$

y se obtienen los siguientes valores de i:

Si $\alpha = 18\%$ es $i_a = 11{,}51\%$

Si $\alpha = 26\%$ es $i_a = 10{,}47\%$

Si $\alpha = 35\%$ es $i_a = 9{,}26\%$

Si $\alpha = 40\%$ es $i_a = 8{,}57\%$

3.º Para resolver este apartado se aplica la ecuación (198) que toma la forma:

$$10.000 = 10.000\,K(1+i_a)^{-1/2} + 1.127{,}5\, a_{\overline{5}|i_a} + 10.164(1+i_a)^{-5} -$$
$$-1.375(\alpha - 0{,}18)(1+i_a)^{-1/2}\, a_{\overline{5}|i_a} - 200(\alpha - 0{,}18)(1+i_a)^{-(5+1/2)}$$

y que se particulariza para los valores de $K = 0{,}15$ y $K = 0{,}1$ combinados con los de α. Las soluciones de i_a se resumen en el siguiente cuadro:

Rentabilidades posibles de i_a en %

Tipo de desgravación	Tipo impositivo			
	$\alpha = 18\%$	$\alpha = 26\%$	$\alpha = 35\%$	$\alpha = 40\%$
$K = 10\%$	14,27	13,20	11,89	11,17
$K = 15\%$	15,75	14,60	13,05	12,60

b) Empréstito con varias amortizaciones

El conjunto de los obligacionistas perciben las anualidades

$$a^*_{a,r} = CN_r i + (C+P)M_r - CN_r i\alpha - (P+P_e)M_r\beta =$$
$$= CN_r i(1-\alpha) + CM_r + [P(1-\beta) - P_e\beta]M_r \tag{200}$$

a cambio del efectivo inicial $E_a = VN_1$. El tanto efectivo obligacionista i_a, vendrá dado por la ecuación

$$E_a = \sum_{r=1}^{n} a^*_{a,r}(1+i_a)^{-r} \tag{201}$$

que coincidirá con el valor esperado por cada suscritor aislado si la tributación es sobre rentas de capital y plusvalías a tipos fijos sin vinculación a la situación personal de cada inversor.

Asimismo, cuando los ingresos obtenidos por una obligación, que se suscribió al precio V y se amortiza en el año s, son:

					$C+P-(P+P_e)\beta$
	$Ci\,(1-a)$	$Ci\,(1-a)$	....	$Ci(1-a)$	$Ci\,(1-a)$
0	1	2	....	s–1	s

el tanto de rendimiento i_R será el valor solución de la ecuación

$$V=Ci(1-\alpha)\,\mathbf{a}_{\overline{s}|i_R}+[C+P-(P+P_e)\beta](1+i_R)^{-s} \tag{202}$$

Cuando los rendimientos se integran en la renta de las personas (físicas o jurídicas), se consideran las primas como renta del año y se producen retenciones a cuenta al tipo α', tanto de los cupones como de las primas, debiendo regularizarse en el momento de la liquidación del IRPF o del IS, con la situación que particularmente corresponde al contribuyente. Representando por α al tipo correspondiente al inversor y por θ al tiempo que media entre el vencimiento del rendimiento y la liquidación del impuesto, las ecuaciones anteriores se particularizarán para el tipo α concreto de cada inversor, lo que equivale a suponer que el empréstito es suscrito por un único obligacionista.

La (200) se desdoblará en dos anualidades de signo opuesto debido a la regularización impositiva. Con signo positivo se tendrá la:

$$a^*_{a,r}=CN_r i(1-\alpha')+(C+P)M_r-(P+P_e)M_r\alpha' \tag{203}$$

y con signo menos, diferida en θ, la

$$b^*_{a,r}=CN_r i(\alpha-\alpha')+(P+P_e)(\alpha-\alpha')M_r \tag{204}$$

Si la retención a cuenta sólo se efectúa sobre los rendimientos la (203) y (204) tomarán la forma

$$a^*_{a,r}=CN_r i(1-\alpha')+(C+P)M_r$$

$$b^*_{a,r}=CN_r i(\alpha-\alpha')+(P+P_e)\alpha M_r$$

que se aplicará a la (205) y (206).

El tanto efectivo medio esperado se calculará en:

$$E_a=\sum_{r=1}^{n} a^*_{a,r}(1+i_a)^{-r}-(1+i_a)^{-\theta}\sum_{r=1}^{n} b^*_{a,r}(1+i_a)^{-r}=$$

$$=\sum_{r=1}^{n}[a^*_{a,r}-b^*_{a,r}(1+i_a)^{-\theta}](1+i_a)^{-r} \tag{205}$$

La ecuación del tanto de rendimiento será idéntica a la (197) por lo que se aplicará ésta.

Para calcular el tanto efectivo medio esperado, cuando existe desgravación fiscal por adquisición de obligaciones, se planteará la ecuación:

$$E_a = K E_a (1+i_a)^{-\theta} + \sum_{r=1}^{n} [a^*_{a,r} - b^*_{a,r}(1+i_a)^{-\theta}](1+i_a)^{-r} \qquad (206)$$

y si se pretende calcular el tanto de rendimiento basta aplicar la (198).

Ejemplo 3.—Estudiar la rentabilidad que proporciona a un inversor la suscripción de títulos del empréstito del ejemplo 2 si se amortizan los títulos, por sorteo, en los años 3, 4 y 5, siguiendo el siguiente plan: tercer año 15.000 títulos, cuarto año 15.000 títulos y quinto año 20.000 títulos.

Para resolver el ejercicio se hará uso de las ecuaciones (200)−(204), con $P_e = 0$, $V = C$, y para $s = 3, 4, 5$ teniendo en cuenta que las cuantías que el emisor entrega para los obligacionistas, sin descontar impuestos son las que se recogen en el siguiente cuadro:

Años	Anualidades			
r	$CN_r i$	CM_r	PM_r	$a_{a,r}$
1	68.750.000	—	—	68.750.000
2	68.750.000	—	—	68.750.000
3	68.750.000	150.000.000	3.000.000	221.750.000
4	48.125.000	150.000.000	3.000.000	201.125.000
5	27.500.000	200.000.000	4.000.000	231.500.000

1.° Existencia de impuestos sobre rentas de capital y sobre plusvalías.

Las cantidades netas de impuestos recibidas por el conjunto de los obligacionistas son:

Años	$Ci(1-\alpha)$	$P(1-\beta)$	$CN_r i(1-\alpha)$	$PM_r(1-\beta)$	(*) $a^*_{a,r}$
1	1.045	—	52.250.000	—	52.250.000
2	1.045	—	52.250.000	—	52.250.000
3	1.045	140	52.250.000	2.100.000	204.350.000
4	1.045	140	36.575.000	2.100.000	188.675.000
5	1.045	140	20.900.000	2.800.000	223.700.000

(*) $a^*_{a,r} = CN_r i(1-\alpha) + CM_r + PM_r(1-\beta)$.

y a partir de estos valores se tiene:

— Tanto medio esperado

$$500.000.000 = \sum_{r=1}^{5} a^*_{a,r}(1+i_a)^{-r} \Rightarrow i_a = 10{,}74\%$$

— Tanto de rendimiento

$$10.000 = 1.045\, a_{\overline{s}|i_R} + 10.140(1+i_R)^{-s} \Rightarrow i_R \begin{cases} 10{,}87\% & \text{si } s=3 \\ 10{,}75\% & \text{si } s=4 \\ 10{,}68\% & \text{si } s=5 \end{cases}$$

2.º Existencia de impuesto sobre la renta (IRPF o IS) con retención a cuenta al tipo $\alpha' = 0{,}18$ y liquidación posterior.

El neto recibido por el conjunto de los obligacionistas en cada año del empréstito $a^*_{a,r}$ es:

Años r	$R_r = CN_r i + PM_r$	$0{,}18 R_r$	$a^*_{a,r} = a_{a,r} - 0{,}18 R_r$
1	68.750.000	12.375.000	56.375.000
2	68.750.000	12.375.000	56.375.000
3	71.750.000	12.915.000	208.835.000
4	51.125.000	9.202.500	191.922.500
5	31.500.000	5.670.000	225.830.000

debiendo liquidar posteriormente, con un diferimiento $\theta = 1/2$ las cantidades siguientes:

Años	$b^*_{a,r} = (CN_r i + PM_r)(\alpha - 0{,}18)$			
r	$\alpha = 0{,}18$	$\alpha = 0{,}26$	$\alpha = 0{,}35$	$\alpha = 0{,}40$
1	0	5.500.000	11.687.500	15.125.000
2	0	5.500.000	11.687.500	15.125.000
3	0	5.740.000	12.197.500	15.785.000
4	0	4.090.000	8.691.250	11.247.500
5	0	2.520.000	5.355.000	6.930.000

resultando como ecuación del **tanto medio esperado**

$$500.000.000 = \sum_{r=1}^{5} [a^*_{a,r} - b^*_{a,r}(1+i_a)^{-1/2}](1+i_a)^{-r}$$

con soluciones

Para $\alpha = 18\%$ es $i_a = 11{,}61\%$

Para $\alpha = 26\%$ es $i_a = 10{,}54\%$

Para $\alpha = 35\%$ es $i_a = 9{,}32\%$

Para $\alpha = 40\%$ es $i_a = 8{,}63\%$

La ecuación del **tanto de rendimiento** de un título que se amortiza en el año s(s = 3, 4, 5) se expresa por:

$$
\begin{aligned}
10.000 &= 1.375(1-\alpha')\,\mathbf{a}_{\overline{s}|i_R} + [10.200 - 200(1-\alpha')](1+i_R)^{-s} - \\
&\quad - 1.375(\alpha-\alpha')^{1/2}/\,\mathbf{a}_{\overline{s}|i_R} - 200(\alpha-\alpha')\,(1+i_R)^{-(s+1/2)} = \\
&= 1.127{,}5\,\mathbf{a}_{\overline{s}|i_R} + 10.164(1+i_R)^{-s} - \\
&\quad -(1+i_R)^{-1/2}\begin{cases} 0 & , \text{ si } \alpha = 0{,}18 \\ 110\,\mathbf{a}_{\overline{s}|i_R} - 16(1+i_R)^{-s} & , \text{ si } \alpha = 0{,}26 \\ 233{,}75\,\mathbf{a}_{\overline{s}|i_R} - 34(1+i_R)^{-s}, & \text{ si } \alpha = 0{,}35 \\ 302{,}50\,\mathbf{a}_{\overline{s}|i_R} - 44(1+i_R)^{-s}, & \text{ si } \alpha = 0{,}40 \end{cases}
\end{aligned}
$$

y sus soluciones son las recogidas en el siguiente cuadro de combinaciones de s y α.

Valores del tanto de rendimento i_R en %

Duración del título	Tipo impositivo en %			
	18	26	35	40
s = 3	11,76	10,68	9,45	8,74
s = 4	11,62	10,56	9,33	8,64
s = 5	11,51	10,47	9,26	8,57

3.º La inclusión de desgravaciones de un porcentaje del 10% o del 15% del valor invertido obliga a ampliar las ecuaciones anteriores debiendo aplicar la 204 y la 198.

Se tiene:

— **Tanto medio esperado**

Ecuación:

$$
500.000.000 = \begin{Bmatrix} 50.000.000(1+i_a)^{-1/2} \\ \text{o} \\ 75.000.000(1+i_a)^{-1/2} \end{Bmatrix} + \sum_{r=1}^{5} [a^*_{a,r} - b^*_{a,r}(1+i_a)^{-1/2}](1+i_a)^{-r}
$$

Soluciones de i_a en %:

Tipo de desgravación	Tipo impositivo en %			
	18	26	35	40
10%	14,82	13,71	12,44	11,72
15%	16,57	15,43	14,13	13,41

— **Tanto de rendimiento**

Ecuación:

$$10.000 = \left\{ \begin{array}{c} 1.000(1+i_R)^{-1/2} \\ \text{ó} \\ 1.500(1+i_R)^{-1/2} \end{array} \right\} + 1.127{,}50\, \mathbf{a}_{\overline{s}|i_R} + 10.164(1+i_R)^{-s} -$$

$$-(1+i_R)^{-1/2} \begin{cases} 0 & , \quad \text{si} \quad \alpha = 0{,}18 \\ 110\, \mathbf{a}_{\overline{s}|i_R} - 16(1+i_R)^{-s} & , \quad \text{si} \quad \alpha = 0{,}26 \\ 233{,}75\, \mathbf{a}_{\overline{s}|i_R} - 34(1+i_R)^{-s}, & \quad \text{si} \quad \alpha = 0{,}35 \\ 302{,}50\, \mathbf{a}_{\overline{s}|i_R} - 44(1+i_R)^{-s}, & \quad \text{si} \quad \alpha = 0{,}40 \end{cases}$$

Soluciones de i_a en %:

Duración del título	Tipo impositivo en %			
	18	26	35	40
	Desgravación al 10%			
s = 3	15,87	14,75	13,47	12,75
s = 4	14,85	13,75	12,49	11,77
s = 5	14,27	13,20	11,89	11,17
	Desgravación al 15%			
s = 3	18,09	16,95	15,65	14,91
s = 4	16,64	15,49	14,18	13,47
s = 5	15,75	14,60	13,05	12,60

31.—EMPRESTITO CON PAGO DE INTERESES ACUMULADOS

Para analizar la fiscalidad se planteará en este epígrafe un empréstito con gastos iniciales y gastos de administración o periódicos.

31.1.—SOCIEDAD EMISORA DEL EMPRESTITO

En el caso de no existencia de impuestos, el emisor recibe neto el efectivo

$$E_p = CN_1 - G_p^i$$

debiendo entregar la contraprestación de término

$$a_{p,r} = [C(1+i)^r M_r](1+g)$$

por lo que su tanto efectivo i_p se calculará en la ecuación:

$$E_p = \sum_{r=1}^{n} a_{p,r}(1+i_a)^{-r}$$

La inclusión de la fiscalidad (impuestos y gastos fiscalmente deducibles) produce los efectos analizados en el epígrafe anterior para los:

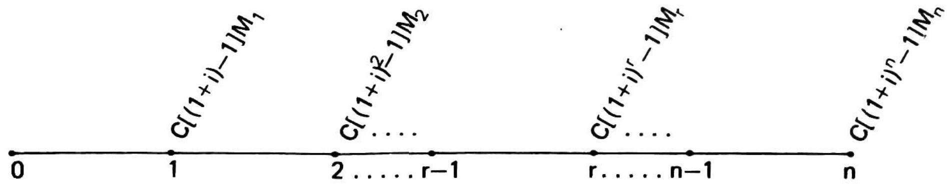
— Impuestos en la emisión (transmisiones patrimoniales T_p^i) y en la amortización (actos jurídicos documentados T_r).

— Gastos iniciales (comisiones, publicidad, etc., G_p), primas de emisión (por importe $P_e \cdot N_1$ si las hay), gastos de administración o periódicos y primas de amortización (en su caso).

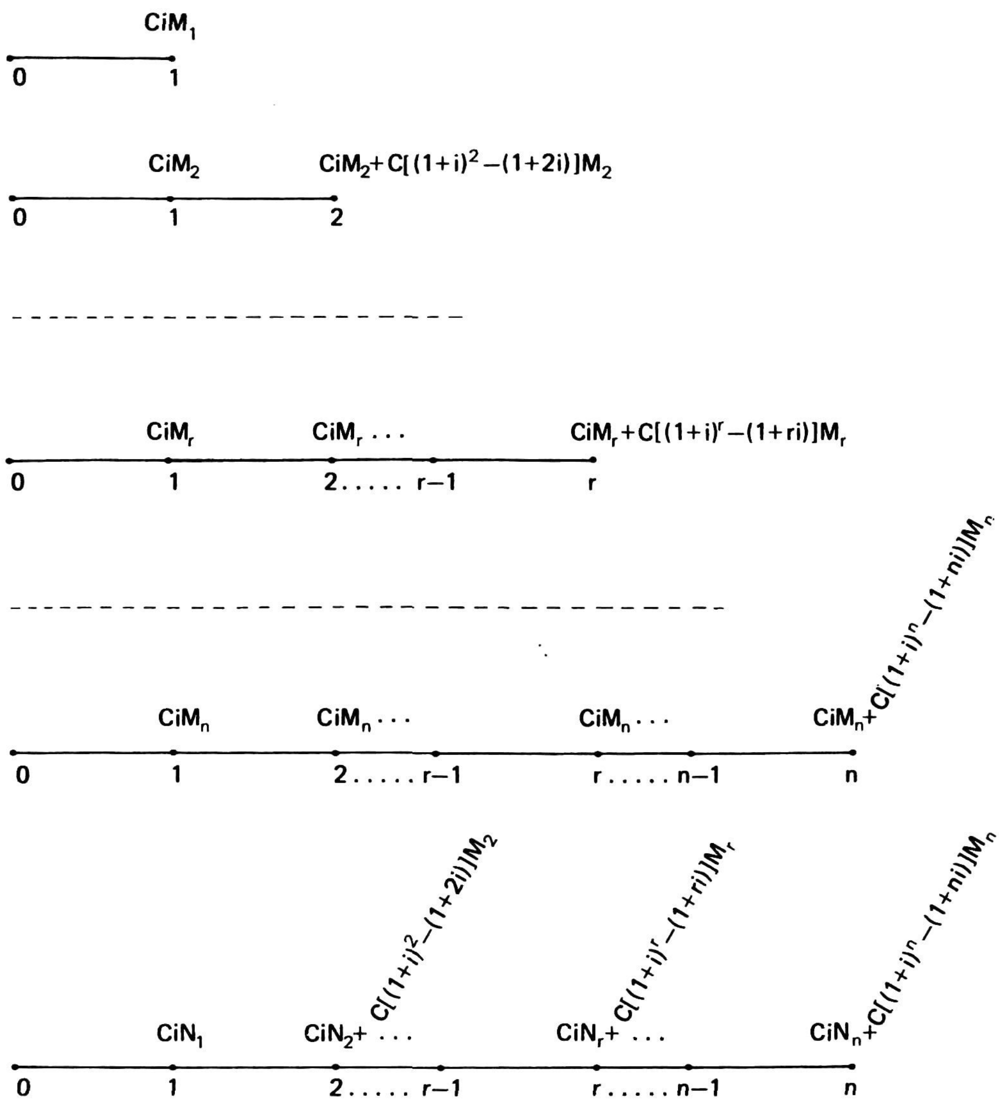
En cuanto a los intereses, como su pago se produce acumuladamente, se plantean distintas interpretaciones. Si se sigue la teoría del pago se considerarán los intereses gasto fiscal del ejercicio en que se paguen; pero si se adopta la teoría del devengo, que es la usualmente seguida en los últimos tiempos, serán gasto fiscal del ejercicio los intereses que se devengan en él (a efectos prácticos, los intereses de los intereses se interpretarán como devengados en el ejercicio en que se amortice el título). En esta segunda interpretación es necesario distinguir si el emisor tiene o no obligación de retener e ingresar impuestos (a cuenta o totales según se trate de impuesto sobre la renta física o jurídica o sobre las rentas de capital) sobre los importes devengados, ya que ello afecta al tanto efectivo del coste del empréstito porque la obligación de retener obliga a anticipar pagos sobre los intereses.

Las dos interpretaciones se recogen en el siguiente gráfico:

PAGOS



DEVENGOS



Como consecuencia de lo anterior se tiene:

a) **Prestación para el emisor**

El efectivo neto recibido por la emisión es:

$$E_p = CN_1 - G_p^i - T_p^i \tag{207}$$

siendo: $T_p^i = CN_1\gamma$ los impuestos de transmisiones

G_p^i = gastos iniciales

b) **Contraprestación del emisor**

Está formada por las anualidades

$$a_{p,r}^* = a_{p,r} + T_r - F_r(1+i_p)^{-\theta} \tag{208}$$

con:

$a_{p,r} = [C(1+i)^r M_r](1+g)$

$T_r = CM_r\delta$ = impuesto de actos jurídicos documentados.

$F_r = \lambda G_r$ = ahorro que la sociedad experimenta por los gastos G_r fiscalmente deducibles.

Estos gastos G_r están formados por:

— La parte proporcional de los gastos iniciales que corresponde asignar al año o sea $f = \dfrac{G_p^i + T_p^i}{n}$.

— Los intereses que corresponde imputar en cada año como gasto fiscal son

$$Y_r(P) = C[1+i)^r - 1]M_r \quad \text{ó} \quad Y_r(D) = CiN_r + C[(1+i)^r - (1+ri)]M_r$$

según que impere la teoría del pago o la del devengo.

— Los gastos de administración $[C(1+i)^r M_r]g$.

— Los impuestos T_r de la cancelación.

Por tanto, la descomposición de G_r es:

$$G_r = f + Y_r + [C(1+i)^r M_r]g + T_r$$

c) **Tanto efectivo para el emisor**

Su valor se calculará en la ecuación

$$E_p = \sum_{r=1}^{n} [a_{p,r} + T_r - F_r(1+i_p)^{-\theta}](1+i_p)^{-r} \tag{209}$$

Si el ahorro F_r es simultáneo a los pagos la expresión $(1+i_p)^{-\theta}$ valdrá la unidad por ser $\theta = 0$.

Ejemplo 1.—Determinar el tanto efectivo emisor de un empréstito con las siguientes características:

- **Número de títulos: 200.000.**
- **Nominal de cada título: 10.000 pts.**
- **Duración de la emisión: 6 años.**
- **No abono de intereses periódicos.**
- **Amortización de los títulos con los intereses acumulados hasta el momento de su amortización a un tanto anual del 14,25%.**
- **Los títulos se amortizarán por partes iguales en los años tercero, cuarto, quinto y sexto.**
- **Gastos iniciales: el 3,5% del nominal emitido.**
- **Gastos de administración del 1,5% sobre el valor de amortización de los títulos.**
- **Impuestos de transmisiones del 1% del nominal emitido.**
- **Impuestos de actos jurídicos documentados en la amortización de un 0,50% del nominal.**
- **Impuesto sobre sociedades a liquidar ocho meses después de los vencimientos de las anualidades del empréstito: a) el 26%; b) el 35%.**

El cuadro de amortización del empréstito es:

Años r	$a_{p,r}$	gC_rM_r	$C_r = C(1+i)^r$	C_rM_r	M_r	$\mathcal{M}_r$	N_r
Or.	—	—	—	—	—	—	200.000
1	—	—	—	—	—	—	200.000
2	—	—	—	—	—	—	200.000
3	756.840.840	11.184.840	14.913,12	745.656.000	50.000	50.000	150.000
4	864.690.680	12.778.680	17.038,24	851.912.000	50.000	100.000	100.000
5	987.909.142	14.599.642	19.466,19	973.309.500	50.000	150.000	50.000
6	1.128.686.598	16.680.098	22.240,13	1.112.006.500	50.000	200.000	0

La prestación neta recibida en el origen por el emisor asciende a:

$$E_p = CN_1 - G_p^i - T_p^i = 0{,}955CN_1 = 1.910.000.000$$

Los impuestos de cancelación son constantes en cada año y su cuantía asciende a

$$T_r = CM\delta = 2.500.000$$

Los gastos deducibles fiscalmente son:

— $f = \dfrac{90.000.000}{6} = 15.000.000$ en cada año.

— $T_r = 2.500.000$ en cada año ($r = 3, 4, 5, 6$).

— gC_rM_r según detalle del cuadro de amortización.

— Intereses que corresponde imputar en cada año según detalle del cuadro:

Años s	Teoría del pago $Y_s(P)=C[(1+i)^s-1]M_s$	Teoría del devengo $Y_s(D)=CN_s{}^i+C[(1+i)^s-(1+si)]M_s$
1	—	285.000.000 + 0 = 285.000.000
2	—	285.000.000 + 0 = 285.000.000
3	245.656.000	285.000.000 + 33.061.810 = 318.061.810
4	351.912.000	213.750.000 + 61.912.205 = 275.662.205
5	473.309.500	142.500.000 + 117.059.690 = 259.559.690
6	612.006.500	71.250.000 + 177.006.325 = 248.313.250

Las cuantías de los gastos fiscalmente deducibles, las deducciones que se efectuarán según las diferentes hipótesis y las anualidades son:

Años	Gastos deducibles (*)		Deducciones $F_s=\lambda G_s$			
s	$G_s(P)$	$G_s(D)$	$0{,}26G_s(P)$	$0{,}26G_s(D)$	$0{,}35G_s(P)$	$0{,}35G_s(D)$
1	15.000.000	300.000.000	3.900.000	78.000.000	5.250.000	105.000.000
2	15.000.000	300.000.000	3.900.000	78.000.000	5.250.000	105.000.000
3	274.340.840	346.746.650	71.328.618	90.154.129	96.019.294	121.361.327
4	382.190.680	305.940.885	99.369.577	79.544.630	133.766.738	107.079.310
5	505.409.142	291.659.332	131.406.377	75.831.426	176.893.200	102.080.766
6	646.186.598	282.493.348	168.008.515	73.448.270	226.165.309	98.872.672

(*) $G_s(P)=f+T_s+gC_sM_s+Y_s(P)$

$G_s(D)=f+T_s+gC_sM_s+Y_s(D)$

Anualidades: $a^*_{p,s}=a_{p,s}+T_s \quad (s=3,\ 4,\ 5,\ 6)$:

$$a^*_{p,3}=759.340.840 \qquad a^*_{p,4}=867.190.680$$

$$a^*_{p,5}=990.409.142 \qquad a^*_{p,6}=1.131.186.598$$

La ecuación del tanto efectivo emisor:

$$1.910.000.000=\sum_{r=3}^{6} a^*_{p,r}(1+i_p)^{-r}-(1+i_p)^{-\frac{8}{12}}\sum_{r=1}^{6} F_r(1+i_p)^{-r}$$

tiene como soluciones de i_p en % las que se detallan en el siguiente cuadro:

Impuesto sociedades	Teoría del pago	Teoría del devengo
26%	12,75	12,17
35%	11,55	10,84

El análisis efectuado para la sociedad emisora debe ser complementado con los posibles efectos que ocasione la existencia o no de obligación de efectuar retenciones e ingresar a cuenta del impuesto (IRPF o IS) que corresponde como sujeto pasivo al perceptor de los intereses.

Si la teoría que rige es la del pago, no tendrá ningún efecto en la valoración de costes del emisor, ya que el hecho se traduce en un mismo pago total $C[(1+i)^r-1]$ distribuido en dos partes que vencen simultáneamente:

— $C[(1+i)^r-1]\alpha'$ que se ingresa como impuesto.

— $C[(1+i)^r-1](1-\alpha')$ que se entrega al poseedor de la obligación.

Cuando la teoría que se sigue es la del devengo, la exigencia de retención e ingreso afecta al emisor de la misma forma que si se pagase periódicamente una parte de los intereses y en el momento de la amortización se abonasen los intereses que faltan para completar el compromiso contraído. Para una obligación que se amortice en el año r, como consecuencia de los ingresos que se tienen que efectuar al tipo de retención a cuenta α', el emisor tiene que efectuar los desembolsos siguientes:

	$Ci\,\alpha'$	$Ci\,\alpha'$	....	$Ci\,\alpha' + C[(1+i)^r - (1+ri)]\,\alpha'$
0	1	2	....	r

y para completar su compromiso contraído solamente tendrá que entregar al propietario de la obligación, en concepto de intereses, la cuantía

$$C[(1+i)^r-1]-\left(Ci\alpha' S_{\overline{r}|i}+C[(1+i)^r-(1+ri)]\alpha'\right)$$

En términos globales, la anualidad del año r se verá alterada por dos corrientes de signo opuesto:

- Se incrementará por las retenciones totales del año

$$\left(CiN_r+C[(1+i)^r-(1+ri)]M_r\right)\alpha'$$

- Se minorará por las retenciones efectuadas en ejercicios anteriores a los títulos que se amortizan en r

$$\left(Ci\alpha' S_{\overline{r}|i}+C[(1+i)^r-(1+ri)]\alpha'\right)M_r$$

El efecto total es:

$$CiN_r\alpha'-Ci\alpha' S_{\overline{r}|i}M_r=Ci\alpha'(N_r-M_r S_{\overline{r}|i}) \tag{210}$$

y la anualidad (208) quedará así:

$$a^*_{p,r}+Ci\alpha'(N_r-M_r S_{\overline{r}|i}) \tag{211}$$

siendo la ecuación del tanto efectivo para esta hipótesis:

$$E_p = \sum_{r=1}^{n} [a_{p,r} + T_r + Ci\alpha'(N_r - M_r S_{\overline{r}|i} - F_r(1+i_p)^{-\theta}](1+i_p)^{-r} \qquad (212)$$

Ejemplo 2.—Determinar el tanto efectivo emisor del ejemplo 1 si se considera la teoría del devengo en los intereses y se tiene que retener e ingresar a cuenta del impuesto sobre la renta al tipo del 18%. Considérese sólo el caso de impuesto de sociedades el 35%.

Los efectos de la aplicación de la (211) son:

Años	0,18Ci	N_r	M_r	$256{,}5(N_r - M_r S_{\overline{r}|i})$	Nueva anualidad
1	256,5	200.000	—	51.300.000	51.300.000
2	256,5	200.000	—	51.300.000	51.300.000
3	256,5	200.000	50.000	7.081.885	766.422.725
4	256,5	150.000	50.000	−24.869.197	842.321.483
5	256,5	100.000	50.000	−59.545.744	930.863.398
6	256,5	50.000	50.000	−97.336.138	1.033.850.460

el tanto efectivo que se tiene es: $i_p = 10{,}69\%$.

31.2.—SUSCRITOR EN OBLIGACIONES

Cuando no existen impuestos, en el empréstito enunciado en 31, la prestación es $E = CN_1$ y la contraprestación está formada por las anualidades $a_{a,r} = C(1+i)^r M_r$ verificándose en este supuesto $i_a = i_R = i$.

Al incluir la fiscalidad los intereses son sometidos a tributación por rentas de capital o por renta de las personas. En esta segunda acepción cabe considerar las teorías del pago o del devengo (con retenciones a cuenta o sin ellas). A continuación se procede a analizar cada una de ellas.

a) Tributación por rentas de capital

A cambio de la prestación $E_a = CN_1$, el conjunto de los obligacionistas recibirán la contraprestación efectiva

$$a^*_{a,r} = C(1+i)^r M_r - C[(1+i)^r - 1]\alpha M_r = CM_r([(1+i)^r - 1](1-\alpha) + 1) \qquad (213)$$

siendo α el tipo impositivo sobre rentas de capital. El **tanto efectivo obligacionista** esperado, i_a, será el valor solución de la ecuación:

$$E_a = CN_1 = \sum_{r=1}^{n} a^*_{a,r}(1+i_a)^{-r} \tag{214}$$

después de sustituir y simplificar por C, queda

$$N_1 = \sum_{r=1}^{n} M_r\big([(1+i)^r - 1](1-\alpha) + i\big)(1+i_a)^{-r} \tag{215}$$

El **tanto de rendimiento** i_R de una obligación que se amortice en el año s se calculará en la ecuación

$$C = \big(C[(1+i)^s - 1](1-\alpha) + C\big)(1+i_R)^{-s} \tag{216}$$

de la que se sigue

$$i_R = \sqrt[s]{[(1+i)^s - 1](1-\alpha) + 1} - 1 \tag{217}$$

Ejemplo 2.—Calcular el tanto efectivo obligacionista y el tanto de rendimiento de una obligación que se amortice en el año s(s=3, 4, 5, 6) del empréstito del ejemplo 1, si el tipo impositivo sobre rentas de capital es el 20%, 25% ó 35%.

De los datos del enunciado se deduce:

r	$[(1+i)^r - 1]$	$a^*_{a,r} = CM([(1+i)^r - 1](1-\alpha) + i)$		
		$\alpha = 0{,}20$	$\alpha = 0{,}25$	$\alpha = 0{,}35$
1	0,14250000	—	—	—
2	0,30530625	—	—	—
3	0,49131239	696.524.956	684.242.146	659.676.527
4	0,70382441	781.529.764	763.934.154	728.742.933
5	0,94661938	878.647.752	854.982.268	807.651.299
6	1,22401265	989.605.060	959.004.744	897.804.111

obteniéndose:

$$2.000.000.000 = \sum_{r=3}^{6} a^*_{a,r}(1+i_a)^{-r} \Rightarrow \begin{cases} i_a = 11{,}90\% & \text{si} \quad \alpha = 20\% \\ i_a = 11{,}29\% & \text{si} \quad \alpha = 25\% \\ i_a = 10{,}02\% & \text{si} \quad \alpha = 35\% \end{cases}$$

Para calcular el tanto de rendimiento basta hacer uso directo de la (217) que es:

$$i_R = \sqrt[s]{[(1+0{,}1425)^s - 1](1-\alpha) + 1} - 1$$

y proporciona las soluciones de i_R, en %, siguientes:

Tipo impositivo	Año de amortización			
	s=3	s=4	s=5	s=6
$\alpha=20\%$	11.68	11,81	11,94	12,05
$\alpha=25\%$	11,02	11,18	11,33	11,47
$\alpha=35\%$	9,68	9,88	10,07	10,25

b) Tributación por renta de personas físicas o de sociedades y teoría del pago

Se consideran los intereses como renta del ejercicio en que se produce su pago, es decir, en la amortización del título. Si se producen retenciones a cuenta a un tipo α' para posteriormente, con un retardo θ, regularizar al tipo α que corresponda al sujeto contribuyente, la contraprestación del conjunto de los obligacionistas estará formada por dos corrientes de signo opuesto positiva

$$a^*_{a,r}=CM_r\big([(1+i)^r-1](1-\alpha')+1\big) \tag{218}$$

y negativa, diferida en θ,

$$b^*_{a,r}=CM_r[(1+i)^r-1](\alpha-\alpha') \tag{219}$$

En el supuesto que no se produjesen retenciones a cuenta bastaría tomar $\alpha'=0$ en (218) y (219).

El **tanto efectivo del conjunto de los obligacionistas** i_a se calculará en:

$$E_a=\sum_{r=1}^{n}[a^*_{a,r}-b^*_{a,r}(1+i_a)^{-\theta}](1+i_a)^{-r} \tag{220}$$

Si existe desgravación fiscal por adquisición de obligaciones, siendo K el tipo de desgravación, la (220) tomará la forma:

$$E_a=KE_a(1+i_a)^{-\theta}+\sum_{r=1}^{n}[a^*_{a,r}-b^*_{a,r}(1+i_a)^{-\theta}](1+i_a)^{-r} \tag{121}$$

El **tanto de rendimiento** de una obligación que se amortice en el año s se calculará en:

$$C=(C[1+i)^s-1](1-\alpha')+C)(1+i_R)^{-s}-C[(1+i)^s-1](\alpha-\alpha')(1+i_R)^{-(\theta+s)}=$$
$$=C\big([(1+i)^s-1][1-\alpha')-(\alpha-\alpha')(1+i_R)^{-\theta}]+1\big)(1+i_R)^{-s} \tag{222}$$

y si no existen retenciones a cuenta se tomará $\alpha'=0$. En el caso de que existan desgravaciones por adquisiciones de valores se añadirá al segundo miembro de la (222) el término $KC(1+i_R)^{-\theta}$.

Ejemplo 3.—Con los datos del ejemplo 1, calcular los tantos efectivos y de rendimiento, para $s=4$, en los siguientes supuestos:

1) Retención a cuenta del 16% y tipo de tributación en renta del 26% con un diferimiento de siete meses.

2) No retención a cuenta con las mismas hipótesis.

3) Existencia de desgravaciones por adquisición de títulos del 15% en cada uno de los puntos 1) y 2).

Para facilitar los cálculos de cada uno de los apartados se confecciona el siguiente cuadro:

r	$I_r=C[(1+i)^r-1]$	$I_r\alpha'$	$I_r(\alpha-\alpha')$	$I_r\alpha$
1	1.425,00	—	—	—
2	3.053,06	—	—	—
3	4.913,12	786,10	491,31	1.277,41
4	7.038,24	1.126,12	703,82	1.829,94
5	9.466,19	1.514,59	946,62	2.461,21
6	12.240,13	1.958,42	1.224,01	3.182,43

1) Retención a cuenta.

Los valores de $a^*_{a,r}$ y $b^*_{a,r}$ son:

r	$a^*_{a,r}=[I_r-I_r\alpha'+C]M$	$b^*_{a,r}=I_r(\alpha-\alpha')M$
3	706.351.000	24.565.500
4	795.606.000	35.191.000
5	897.580.000	47.331.000
6	1.014.085.500	61.200.500

El tanto efectivo obligacionista es:

$$2.000.000.000=\sum_{r=3}^{6}[a^*_{a,r}-b^*_{a,r}(1+i_a)^{-7/12}](1+i_a)^{-r} \Rightarrow i_a=11,25\%$$

La ecuación del tanto de rendimiento y su solución, para $s=4$, son:

$$10.000=10.000[0,703824[0,84-0,10(1+i_R)^{-7/12}]+1](1+i_R)^{-4} \Rightarrow i_R=11,13\%$$

2) No retención a cuenta

r	$a^*_{a,r} = (I_r + C)M$	$b^*_{a,r} = I_r \alpha M$
3	745.656.000	63.870.500
4	851.912.000	91.497.000
5	973.309.500	123.060.500
6	1.112.006.500	159.121.500

Tanto efectivo obligacionista:

$$2.000.000.000 = \sum_{r=3}^{6} [a^*_{a,r} - b^*_{a,r}(1+i_a)^{-7/12}](1+i_a)^{-r} \Rightarrow i_a = 11{,}36\,\%$$

Tanto de rendimiento:

$$10.000 = 10.000[0{,}703824[1 - 0{,}26(1+0,\ i_R)^{-7/12}] + 1](1+i_R)^{-4} \Rightarrow i_R = 11{,}25\,\%$$

3) Existencia de desgravación por adquisición de títulos:

— Retención a cuenta (se toman los valores de 1)

$$2.200.000.000 = 300.000.000(1+i_R)^{-7/12} +$$

$$+ \sum_{r=3}^{6} [a^*_{a,r} - b^*_{a,r}(1+i_a)^{-7/12}](1+i_a)^{-r} \Rightarrow i_a = 15{,}00\,\%$$

$$10.000 = 1.500(1+i_R)^{-7/12} + 10.000[0{,}703824[0{,}84 - 0{,}10(1+i_R)^{-7/12}] + 1](1+i_R)^{-4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_R = 15{,}39\,\%$$

— No retención a cuenta (se toman los valores de 2)

$$2.000.000.000 = 300.000.000(1+i_R)^{-7/12} +$$

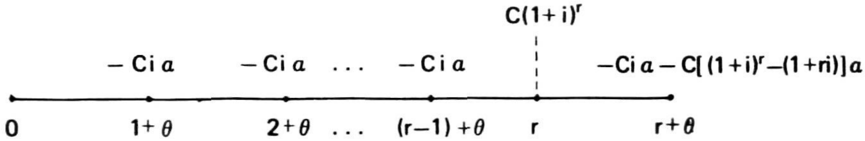
$$+ \sum_{r=3}^{6} [a^*_{a,r} - b^*_{a,r}(1+i_a)^{-7/12}](1+i_a)^{-r} \Rightarrow i_a = 15{,}18\,\%$$

$$10.000 = 1.500(1+i_R)^{-7/12} + 10.000(0{,}703824[1 - 0{,}26(1+i_R)^{-7/12}] + 1)(1+i_R)^{-4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_R = 15{,}55\,\%$$

c) **Tributación por renta de personas físicas o de sociedades y teoría del devengo (sin retenciones).**

De acuerdo con la teoría del devengo se considerarán renta del período los intereses generados en él, aunque su cobro se difiera. Con la consideración práctica de que los intereses de los intereses se acumulan a la renta del período de amortización, la contraprestación de un título que se amortice en el período r estará formada por un pago positivo en r y un conjunto de pagos negativos en $1+\theta, 2+\theta, \ldots, r+\theta$ tal como se recoge en el gráfico



siendo α el tipo impositivo que corresponde en la renta. La contraprestación del conjunto de los obligacionistas tendrá como ingreso positivo

$$a^*_{a,r}=C(1+i)^r M_r \tag{223}$$

y negativo, con un diferimiento θ

$$b^*_{a,r}=(CiN_r+C[(1+i)^r-(1+i_r)]M_r)\alpha \tag{224}$$

La ecuación del **tanto efectivo del conjunto de los obligacionistas,** es:

$$E_a=\sum_{r=1}^{n}[a^*_{a,r}-b^*_{a,r}(1+i_a)^{-\theta}](1+i_a)^{-r} \tag{225}$$

y si existe desgravación fiscal por adquisición de títulos se sumará al segundo miembro de (225) la expresión $KE_a(1-i_a)^{-\theta}$.

La ecuación del **tanto de rendimiento** de un título que se amortice en el año s es:

$$C=C(1+i)^s(1+i_R)^{-s}-(Ci\alpha\theta/\mathbf{a}_{\overline{s}|i_R}+C[(1+i)^s-(1+si)]\alpha(1+i_R)^{-(s+\theta)}) \tag{226}$$

y en el caso de existir desgravación por adquisición del título se sumará $KC(1+i_R)^{-\theta}$.

Ejemplo 4.—Con los datos del ejemplo 1 calcular los tantos efectivos y de rendimiento, para s = 5:

1) Tipo de tributación en renta del 30% con un diferimiento de seis meses.
2) Idem, que 1) con desgravación del 10% del valor del título.

1) Las cuantías $a^*_{a,r}$ y $b^*_{a,r}$ son:

r	CiN_r	$CM[(1+i)^r-(1+ir)]$	$b^*_{a,r}$	$a^*_{a,r}$
1	285.000.000	—	85.500.000	—
2	285.000.000	—	85.500.000	—
3	285.000.000	31.906.000	95.071.800	745.656.000
4	213.750.000	66.912.000	64.100.739	851.912.000
5	142.500.000	117.059.500	77.867.850	973.309.500
6	71.250.000	184.506.500	76.726.950	1.112.006.500

Tanto efectivo del conjunto de los obligacionistas:

$$2.000.000.000 = \sum_{r=1}^{6} [a^*_{a,r} - b^*_{a,r}(1+i_a)^{-6/12}](1+i_a)^{-r} \Rightarrow i_a = 10{,}44\,\%$$

Tanto de rendimiento:

$$10.000 = 19.466{,}19(1+i_R)^{-5} - (427{,}5^{1/2}/\mathbf{a}_{\overline{5}|i_R} + 702{,}36(1+i_R)^{-(5+1/2)}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_R = 10{,}26\,\%$$

2) Con desgravación del 10% del nominal

$$2.000.000.000 = 200.000.000(1+i_a)^{-1/2} + \sum_{r=1}^{6} [a^*_{a,r} - b^*_{a,r}(1+i_a)^{-1/2}](1+i_a)^{-r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_a = 12{,}76\,\%$$

$$10.000 = 1.000(1+i_R)^{-1/2} + 19.466{,}19(1+i_R)^{-5} - [427{,}5^{1/2}/\mathbf{a}_{\overline{5}|i_R} + 702{,}36(1+i_R)^{-(5+1/2)} \Rightarrow$$

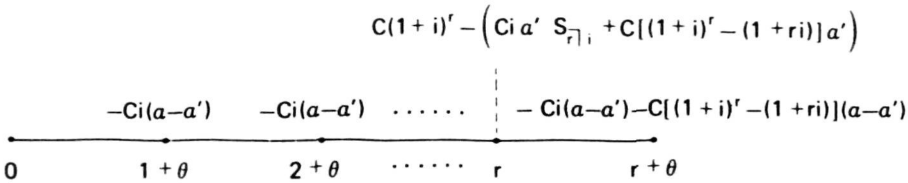
$$\Rightarrow i_R = 12{,}37\,\%$$

d) **Tributación por renta de personas físicas o de sociedades y teoría del devengo (con retenciones).**

Según se ha analizado en 31.1, cuando se producen retenciones a cuenta por un importe periódico por cupón $Ci\alpha'$ más, en r, $C[(1+i)^r - (1+ri)]\alpha'$, el cupón que se percibirá en la amortización por el título será

$$C[(1+i)^r - 1] - (Ci\alpha' S_{\overline{r}|i} + C[(1+i)^r - (1+ri)]\alpha') \tag{227}$$

al que hay que añadir la devolución de principal C. Por tanto, la contraprestación efectiva por un título que se amortiza en r, es:



y la contraprestación del conjunto de los obligacionistas tendrá como corriente positiva

$$a^*_{a,r} = C(1+i)^r M_r - (Ci\alpha' S_{\overline{r}|i} + C[(1+i)^r - (1+ri)]\alpha')M_r \tag{228}$$

y como corriente negativa, diferida en θ,

$$b^*_{a,r}=\left(CiN_r+C[(1+i)^r-(1+ir)]M_r\right)(\alpha-\alpha') \tag{229}$$

La ecuación del **tanto efectivo del conjunto de los obligacionistas** queda expresada por:

$$E_a=\sum_{r=1}^{n}[a^*_{a,r}-b^*_{a,r}(1+i_a)^{-\theta}](1+i_a)^{-r} \tag{230}$$

debiendo sumarse al segundo miembro $KE_a(1+i_a)^{-\theta}$ si hay desgravaciones.

En cuanto a la ecuación del **tanto de rendimento** se tiene:

$$\begin{aligned}C=&[C(1+i)^s-(Ci\alpha' S_{\overline{s}|i}+C[(1+i)^s-(1+si)]\alpha')](1+i_R)^{-s}-\\&-[Ci(\alpha-\alpha')\theta/\mathbf{a}_{\overline{s}|i_R}+C[(1+i)^s-(1+si)](\alpha-\alpha')(1+i_R)^{-(s+\theta)}]\end{aligned} \tag{231}$$

y en caso de desgravación se sumará $KC(1+i_R)^{-\theta}$.

Nótese que si $\alpha'=0$ la (228), (229) y (231) coinciden respectivamente con la (223), (224) y (226).

Ejemplo 5.—Resolver el ejercicio anterior número 5 si se produce una retención a cuenta $\alpha'=$ 20%.

1) Las cantidades recibidas por los obligacionistas son:

r	$a^*_{a,r}$	$b^*_{a,r}$
1	—	28.500.000
2	—	28.500.000
3	690.143.600	31.690.600
4	768.147.200	28.066.200
5	855.235.700	25.955.950
6	952.703.900	25.575.650

Tanto efectivo del conjunto de los obligacionistas:

$$2.000.000.000=\sum_{r=1}^{6}[a^*_{a,r}-b^*_{a,r}(1+i_a)^{-1/2}](1+i_a)^{-r} \Rightarrow i_a=9{,}94\%$$

Tanto de rendimiento:

$$\begin{aligned}10.000=&[19.466{,}19-11.807{,}38\times 0{,}20](1+i_R)^{-5}-\\&-(142{,}5^{1/2}/\mathbf{a}_{\overline{5}|i_R}+11.807{,}38\times 0{,}10(1+i_R)^{-(5+1/2)})=\\&=17.104{,}71(1+i_R)^{-5}-(1+i_R)^{-1/2}[142{,}5\,\mathbf{a}_{\overline{5}|i_R}+1.180{,}74(1+i_R)^{-5}] \Rightarrow i_R=8{,}68\%\end{aligned}$$

2) En el caso de desgravación del 10% se tiene:

Tanto efectivo obligacinista:

$$2.000.000.000 = 200.000.000(1+i_a)^{-1/2} + \sum_{r=1}^{6} [a^*_{a,r} - b^*_{a,r}(1+i_a)^{-1/2}](1+i_a)^{-r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_a = 12{,}36\,\%$$

Tanto de rendimiento:

$$10.000 = 1.000(1+i_R)^{-1/2} + 17.104{,}71(1+i_R)^{-5} - (1+i_R)^{-1/2}[142{,}5\, \mathbf{a}_{\overline{5}|i_R} + 1.180{,}74(1+i_R)^{-5}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_R = 10{,}84\,\%$$

Quinta parte

OPERACIONES BANCARIAS

V.—OPERACIONES BANCARIAS

1.—El crédito.
2.—Efectos de comercio.
3.—Operaciones de los bancos.
4.—Operaciones pasivas.
 4.1.—Imposiciones a plazo.
 4.2.—Certificados de depósito.
 4.3.—Emisiones de obligaciones, bonos de caja y cédulas hipotecarias.
5.—Operaciones activas.
6.—Servicios bancarios.
7.—Descuento bancario.
 7.1.—Concepto y clases.
 7.2.—Descuento de papel comercial.
  7.2.1.—Facturas de descuento.
  7.2.2.—Descuento de letras persianas.
  7.2.3.—Límite del descuento.
  7.2.4.—Compensaciones.
 7.3.—Descuento financiero.
8.—Cuentas corrientes.
 8.1.—Concepto y clasificación.
 8.2.—Cuentas corrientes con interés recíproco. Métodos para calcular el saldo.
  8.2.1.—Método directo.
  8.2.2.—Método indirecto.
  8.2.3.—Método hamburgués.
 8.3.—Cuentas corrientes a interés recíproco y variable.
 8.4.—Cuentas corrientes a interés no recíproco.
9.—Cuentas bancarias.
10.—Cuentas de ahorro.
11.—Cuentas corrientes de crédito.

1.—EL CREDITO

La palabra crédito es equivalente a confianza, y en las operaciones mercantiles se comprende con esa denominación a todas aquellas operaciones que representan una demora para hacer frente a los compromisos contraídos. El **crédito es el elemento que hace posible las transacciones económicas en las que interviene el tiempo**, y su concreción formal suele revestir la forma de operación financiera.

En el crédito intervienen dos personas: el **acreedor o cedente** del crédito, que es aquel que teniendo el derecho a un cobro inmediato lo prorroga, y el **acreditado, deudor o concesionario** del crédito, quien teniendo la obligación de pago inmediato, en virtud del crédito aplaza su pago. El acreedor concede u otorga crédito y el deudor recibe o acepta crédito.

Pueden ser diversas las **clasificaciones** del crédito, según el punto de vista que se considere. Para nuestro objetivo interesa resaltar las siguientes clases:

a) **Por la naturaleza del bien económico** cuya disponibilidad se altera por el crédito se habla de crédito monetario, de cambio y de servicios.

El crédito **monetario** consiste en la cesión de un capital financiero en dinero; se llama crédito **de cambio** cuando la cesión es de un bien económico de naturaleza no monetaria; y se denomina crédito **de servicios** a aquel que prorroga la disponibilidad de la remuneración de servicios. En el primero se apoya el negocio bancario y en el conjunto de los tres todas las actividades económicas.

b) **Por el vencimiento** se distingue entre crédito a término y crédito sin plazo.

El crédito **a término** es aquel que se conoce su terminación o vencimiento, que puede ser una fecha concreta o un intervalo de tiempo (por ejemplo una emisión de obligaciones amortizables por sorteo). El crédito **sin plazo** es cuando las partes sólo han fijado el origen dejando indeterminada su terminación.

c) **Por las personas que intervienen** puede hablarse de crédito privado y crédito público.

El crédito es **privado** cuando quien lo recibe es un particular o una sociedad privada, y es **público** si el beneficiario del crédito es el Estado o una entidad pública.

d) **Por la garantía** o clase de confianza en que se apoya el crédito se distingue entre garantía personal y real.

Es garantía **personal** cuando el crédito es inseparable de la persona que lo recibe y es **real** si depende de bienes económicos.

Con el fin de dejar constancia de la existencia del crédito es normal que queden recogidos en documento especial en el que intervenga al menos el beneficiario y las condiciones bajo las cuales se otorga. Estos documentos se conocen con el nombre genérico de títulos de crédito o títulos valores, y aunque su gama es muy amplia cabe resaltar:

a) **Nominativos** o que llevan el nombre del acreedor a quien debe pagarse y al **portador**, que se pagan a quien lo posea.

b) A **plazo fijo**, si figura una fecha de vencimiento, **a la vista**, si son pagaderos a la presentación y **sin vencimiento** determinado.

c) Si encierran una promesa de pagar dinero se tienen los que proceden del crédito público o **efectos públicos** (Deuda Pública, Bonos del Tesoro, Pagarés del Tesoro, etc.) y **efectos mercantiles** o que proceden del crédito privado (billete de Banco, letra de cambio, pagaré, carta-orden de crédito, cheque, etc.).

d) Si contienen un crédito unido a facultades especiales, cabe resaltar las acciones y las obligaciones.

e) Si encierran una promesa de dar un bien económico distinto del dinero cabe citar, las cartas de porte, warrants, resguardos de pignoraciones, facturas de mercancías, etc.

2.—EFECTOS DE COMERCIO

Los efectos mercantiles son documentos que encierran promesas o mandatos de pago y en ocasiones reconocimiento de la existencia de créditos. Son instrumentos que directa o indirectamente facilitan el crédito monetario, lo que lleva consigo, usualmente, la intermediación de los bancos y el origen de múltiples operaciones bancarias.

A continuación se procede a dar una breve descripción de los más usuales efectos mercantiles.

a) **Letra de cambio.**—Es un documento en el cual una persona (librador) manda a otra (librado) que pague cierta cantidad a su orden o a la de un tercero (tomador o tenedor), indicando fecha, lugar del pago y monedas en que se ha de pagar.

Es el más importante de los documentos de crédito y facilita, entre otros, uno de los grupos más amplios de operaciones bancarias, que es la operación de descuento bancario.

Las letras pueden girarse a plazos diversos, siendo los usuales: a la vista (la letra ha de pagarse en el momento en que se presente al pagador), a un plazo o días vista (se ha de abonar cuando transcurra el tiempo que en la letra se señala, contando desde el momento en que se presenta al librado para la aceptación), a un día fijo (el pago se abona en la fecha que indica), a un plazo o días fecha (el vencimiento corresponde al día en que se cumpla el plazo señalado a partir de la fecha en que se extendió la letra).

Las letras pueden extenderse en cualquier clase de monedas nacional o extranjeras. Si están extendidas en moneda extranjera exigen diferente pago según las indicaciones que lleva la letra o que no lleva ninguna. Si **no lleva ninguna indicación especial**, o la indicación es moneda extranjera al cambio vista, la práctica habitual es que se paguen en moneda nacional de la plaza del pago, al cambio que el día del pago rige en esa plaza de pago. Cuando lleva la indicación **moneda extranjera efectiva** el pago se realiza en la moneda extranjera que figura. Si figura el pago en **moneda extranjera a cambio fijo** debe hallarse la equivalencia en monedas nacionales al cambio que se fija.

b) **Cheque.**—Es un mandato de pago que sirve para retirar los fondos depositados en poder de otra persona. Tiene puntos comunes con la letra de cambio, ya que intervienen las mismas personas (librador, librado y tenedor) y éstas representan los mismos papeles. Los bancos en las letras suelen ser los tenedores mientras que en los cheques son los librados y, a veces, los libradores. La provisión de fondos debe ser previa a la emisión del documento.

c) **Talón.**—Es un documento emitido por el titular de una cuenta en una entidad bancaria para realizar pagos o retirar fondos con cargo a dicha cuenta.

Puede ser a la orden, al portador o nominativo.

Tanto el cheque como el talón pueden ser susceptibles de descuento.

d) **Carta-orden de crédito.**—Es un documento que contiene una orden de pago a favor de persona concreta y teniendo como cantidad a pagar un límite máximo que puede hacerse efectivo en una o varias veces dentro del plazo que figura en él. Cada vez que se utilice la carta-orden se anota en ella la cantidad cobrada, para conocer en cualquier momento el importe exigible.

e) **Warrant.**—Es un resguardo de depósito de mercancías que puede servir de garantía a un préstamo o a un crédito.

3.—OPERACIONES DE LOS BANCOS

Resulta difícil encontrar una definición precisa que comprenda todas las operaciones de la banca debido a que éstas son tan múltiples y variadas como lo es la vida económica.

Examinando las personas que efectúan operaciones con los bancos (el significado de la palabra engloba a los bancos, Cajas de Ahorros y otras instituciones de crédito) surgen dos grupos perfectamente definidos. El primero de dichos grupos lo constituyen aquellos que conceden crédito a los bancos, que se concretan en aportaciones de dinero. El segundo grupo de personas está formado por todos aquellos a los que el banco concede crédito.

De la relación de estos dos grupos con los bancos surgen dos grupos de operaciones conocidas como **operaciones pasivas** a las del primer grupo y **operaciones activas** a las del segundo grupo.

Los bancos también desarrollan, por cuenta de terceros, un conjunto de actividades que no pueden clasificarse como operaciones activas ni como operaciones pasivas. Estas actividades constituyen un conjunto heterogéneo de operaciones tales como depósitos de valores en custodia o en administración, efectos recibidos para su cobro, estudios y consultas por cuentas de terceros, pago de cupones de intereses y dividendos, transferencias, etc. A estas operaciones se las suele clasificar bajo la rúbrica de **servicios bancarios.**

4.—OPERACIONES PASIVAS

Las operaciones **pasivas o de depósito** son fondos puestos por los clientes a disposición de los bancos. Se formalizan mediante un contrato de depósito que se denomina cuenta bancaria, cuya apertura tiene lugar por parte del cliente mediante una primera imposición o ingreso. Como ampliación de la operación de depósito en cuenta bancaria fue configurándose la cuenta corriente, con contenido muy amplio, pues a través de ella el banco actúan como agente de cobros y pagos de su cliente de múltiples operaciones.

Las operaciones pasivas más notables son: depósitos de ahorros, depósitos en cuenta corriente, imposiciones a plazo, certificados de depósito, pagarés y emisiones de bonos de caja, obligaciones y bonos de tesorería. Los depósitos de ahorro o cuentas de ahorro y los depósitos en cuenta corriente o cuentas corrientes bancarias serán estudiadas en epígrafes posteriores, los pagarés se analizan en la parte sexta dentro de las operaciones con títulos valores. Dentro de este epígrafe únicamente se hará referencia a las imposiciones a plazo, certificados de depósito y a ciertos aspectos de las emisiones de bonos y obligaciones.

4.1.—IMPOSICIONES A PLAZO

La operación consiste en la entrega de un capital por parte de un cliente a un banco con el compromiso de mantenerlo en la institución por un tiempo concreto, no pudiendo disponerse de dicho capital durante dicho tiempo. A cambio de su imposición a plazo el cliente cobra unos intereses, cuyo tipo unitario suele depender de la cuantía del capital y del plazo, y se reintegra de la cantidad depositada al final del plazo estipulado.

Se formaliza la imposición a plazo en un documento, denominado **lámina**, que contiene la cuantía de la imposición, el plazo fijo de vencimiento, indicar expresamente que no puede ser devuelto antes de su vencimiento y las condiciones de posibles prórrogas. En ocasiones también se formaliza la operación en libretas haciendo constar todos los requisitos indicados. Ambos documentos, lámina y libreta son nominales e intransferibles.

La duración de la operación suele ser normalmente desde un mínimo de tres meses hasta los dos o tres años, si bien no hay ningún inconveniente para que tengan duraciones superiores.

Los intereses se abonan por trimestres, semestres o años vencidos, siendo más usuales las dos primeras formas, también cabría pensar en abono de intereses al final de la operación.

La operación financiera es un préstamo que suele ser del tipo americano, con pago de intereses en fracciones de año. en el que el prestamista o acreedor es el cliente del banco y el prestatario o deudor la entidad bancaria.

Representando C_0 la cuantía de la imposición a plazo, n su duración en años, m la frecuencia o número de veces que se abonan los intereses en cada año y $j_{(m)}$ al tanto nominal de la operación, se tiene:

C_0	$C_0\frac{j_{(m)}}{m}$	..	$C_0\frac{j_{(m)}}{m}$	$C_0\frac{j_{(m)}}{m}$	$C_0\frac{j_{(m)}}{m}$	..	$C_0\frac{j_{(m)}}{m}$	$C_0\frac{j_{(m)}}{m}$	..		$C_0\frac{j_{(m)}}{m}$	..	$C_0\frac{j_{(m)}}{m}$	$C_0\frac{j_{(m)}}{m}+C_0$
0	$\frac{1}{m}$	..	$\frac{m-1}{m}$	1	$1+\frac{1}{m}$	..	$1+\frac{m-1}{m}$	2	..	n-1	$(n-1)+\frac{1}{m}$	..	$(n-1)+\frac{m-1}{m}$	n

siendo $C_0 \frac{j_{(m)}}{m}$ el importe de los intereses de cada m-simo de año.

El tanto efectivo a que resulta la operación es:

$$i = \left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)^m - 1 \tag{1}$$

Los rendimientos que el cliente percibe en concepto de intereses son sometidos a tributación, bien sea por rentas de capital o por el impuesto sobre la renta de las personas físicas o jurídicas. Nuestra actual legislación contempla la segunda de las figuras tributándose de análoga manera a como se estudió en los empréstitos y los impuestos (parte cuarta de este libro).

Si con α' se representa el tipo de retención a cuenta, con α al tipo impositivo sobre la renta *que corresponde al titular (tipo marginal en persona física y sociedades en persona* jurídica), en caso de ser el cliente persona física, y con θ el retardo o diferencia de tiempos que media entre la retención y la fecha en que corresponde liquidar el impuesto, la ecuación del tanto efectivo para el cliente es:

$$C_0 = mC_0 \frac{j_{(m)}}{m} (1-\alpha')\, \mathbf{a}^{(m)}_{\overline{n}|i_c} + C_0(1+i_c)^{-n} - mC_0 \frac{j_{(m)}}{m} (\alpha-\alpha') \cdot {}^{\theta}/\mathbf{a}_{\overline{n}|i_c} =$$

$$= C_0 j_{(m)}\, \mathbf{a}_{\overline{n}|i_c} \left[\frac{i_c}{j_{c(m)}} (1-\alpha') - (\alpha-\alpha')(1+i_c)^{-\theta} \right] + C_0(1+i_c)^{-n} \tag{2}$$

o su equivalente después de simplificar por C_0:

$$1 = j_{(m)}\, \mathbf{a}^{(m)}_{\overline{n}|i_c} \left[\frac{i_c}{j_{c(m)}} (1-\alpha') - (\alpha-\alpha')(1+i_c)^{-\theta} \right] + (1+i_c)^{-n} \tag{3}$$

En caso de imposición por rentas de capital al tipo α, se obtiene a partir de (3) su ecuación tomando $\theta=0$:

$$1 = j_{(m)}\, \mathbf{a}^{(m)}_{\overline{n}|i_c} (1-\alpha) + (1+i_c)^{-n} \tag{4}$$

pero resulta más sencillo operar en la expresión:

$$i_c = \left[1 + \frac{j_{(m)}}{m} (1-\alpha) \right]^m - 1 \tag{5}$$

Ejemplo 1.—Calcular el rendimiento efectivo unitario que se obtiene en una imposición a plazo de dos años con abono de intereses semestrales, si el tipo de interés nominal es el 12 % anual, en las hipótesis: a) Tributación sobre rentas de capital al tipo del 30 %, b) Tributación sobre la renta de las personas con retención a cuenta del 18 % y tipos marginales del 18, 26, 30 y 35 %, teniendo en cuenta que su liquidación se produce nueve meses después del cobro de los rendimientos del cuarto trimestre.

El caso **a** tiene como solución:

$$i_c = \left[1 + \frac{j_{(m)}}{m} (1-\alpha) \right]^m - 1 = \left[1 + \frac{0{,}12}{4} (1-0{,}30) \right]^4 - 1 = 0{,}08668 \cong 8{,}67\ \%$$

y para resolver el caso **b** se plantea la ecuación (3) con los datos del enunciado que es:

$$1 = 0{,}12\, \mathbf{a}_{\overline{2}|i_c} \left[\frac{i_c}{j_{c(4)}} (1-0{,}18) - (\alpha-0{,}18)(1+i_c)^{-8/12} \right] + (1+i_c)^{-2}$$

y tiene como soluciones en % según los diferentes valores de α:

α %	18	26	30	35
i_c %	10,21	9,37	8,76	8,12

Las imposiciones a plazo pueden ser objeto de pignoración para obtener préstamos con su garantía. Los préstamos así obtenidos devengan un tipo de interés en varios puntos por encima del que se obtiene con la imposición a plazo (en el momento actual el préstamo se concede con un mínimo de 4 puntos sobre el tipo de interés de la imposición).

Cabe, en determinadas condiciones, cancelar anticipadamente la imposición. Estas condiciones son esencialmente penalizaciones que imponen de hecho pérdidas de parte de los intereses generados. La penalización actualmente establecida consiste en, al menos un 4 % anual por el período que medie entre la fecha de cancelación y el vencimiento pactado para el depósito, sin que esta deducción pueda exceder del impote de los intereses devengados desde el inicio de la operación.

4.2.—CERTIFICADOS DE DEPOSITO

Son documentos negociables acreditativos de un depósito a plazo fijo efectuado en un banco o caja de ahorros, pudiendo ser transmitidos mediante endoso o por cualquier otro medio admitido en derecho.

Desde el punto de vista jurídico es una imposición a plazo con la ventaja de su fácil transmisibilidad que hace que el depositante pueda liquidar su inversión sin tener que intervenir el banco. Tampoco es necesaria la intervención de fedatario público.

Los certificados se extienden por un plazo mínimo de seis meses y su valor nominal suele ser un millón de pesetas o un múltiplo de dicha cifra. El banco abona los intereses por períodos vencidos, siendo lo frecuente el pago trimestral, y a su vencimiento reintegra el principal a quien resulte tenedor del documento.

Como operación financiera su problemática es idéntica a la de las imposiciones a plazo, siendo aplicables, por tanto, las fórmulas (1) a (5) obtenidas en el epígrafe anterior.

La posibilidad de operar en el mercado secundario hace que se amplíen las opciones para obtener rentabilidades, que dependerán de la oferta y la demanda y colocaciones de dinero a cualquier plazo.

Después de s vencimientos de intereses, el poseedor de un certificado tiene derecho a recibir las cantidades que figuran en el esquema:

	$C_o\frac{j_{(m)}}{m}$	$C_o\frac{j_{(m)}}{m}$	....	$C_o\frac{j_{(m)}}{m}$	$C_o\frac{j_{(m)}}{m}+C_o$
s	s+1	s+2	....	n·m−1	n·m

y si el mercado opera el tanto nominal $t_{(m)}$, cuyo rédito del subperíodo es $t^{(m)}=\frac{t_{(m)}}{m}$ el valor del certificado de depósito será:

$$V = C_0 \frac{j_{(m)}}{m} \mathbf{a}_{\overline{n \cdot m - s}|t^{(m)}} + \acute{C}_0 (1 + t^{(m)})^{-(n \cdot m - s)} \tag{6}$$

Si desde la percepción de los intereses ha transcurrido un tiempo θ con $s < s + \theta < s + 1$, el valor del certificado es

$$V_{s+\theta} = (1 + t^{(m)})^{\theta} V_s$$

Para calcular la rentabilidad i_s obtenida por el depositante que endosa el certificado al precio V_s se hará uso de:

$$C_0 = C_0 \frac{j_{(m)}}{m} \mathbf{a}_{\overline{s}|i_s^{(m)}} + V_s (1 + i_s^{(m)})^{-s} \Rightarrow i_s = (1 + i_s^{(m)})^m - 1 \tag{7}$$

Ejemplo 2.—Se emite un certificado de depósito de 1.000.000 de ptas. a un plazo de dos años a un tipo de interés nominal del 14 % con vencimientos trimestrales. Transcurridos seis meses y cobrados los intereses del trimestre el poseedor del certificado lo negocia en el mercado. Determinar: a) Rentabilidad ofertada por el banco emisor; b) Valor que se obtiene por la venta si el mercado opera al 16 %; c) Idem si el tanto de mercado es el 12 %; d) Rendimiento obtenido por el vendedor al precio de los apartados b y c.

El esquema de la operación concertada es:

								100.000
1000.000	35.000	35.000	35.000	35.000	35.000	35.000	35.000	35.000
0	1	2	3	4	5	6	7	8
0				I				II

ya que $\frac{j_{(m)}}{m} = \frac{0,14}{4} = 0,035$.

Para calcular la rentabilidad ofertada por el banco basta aplicar la fórmula (1) y se tiene:

$$i = \left(1 + \frac{j_{(4)}}{4}\right)^4 - 1 = \left(1 + \frac{0,14}{4}\right)^4 - 1 = 0,147523$$

El valor de mercado después de transcurridos dos trimestres al tanto $t_{(4)} = 0,16$ es:

$$V_2 = 35.000\, \mathbf{a}_{\overline{6}|0,04} + 1.000.000 (1 + 0,04)^{-6} = 973.789$$

y si el tanto es $t = 0,12$ se tiene:

$$V_2 = 35.000\, \mathbf{a}_{\overline{6}|0,03} + 1.000.000 (1 + 0,03)^{-6} = 1.027.086$$

El rendimiento obtenido por el vendedor se obtiene haciendo uso de la fórmula (7) para los valores obtenidos y es:

$$1.000.000 = 35.000\, \mathbf{a}_{\overline{2}|i_2^{(4)}} + 973.789 (1 + i_2^{(4)})^{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_2 = (1 + 0,02204)^4 - 1 = 0,09112$$

$$1.000.000 = 35.000\ \mathbf{a}_{\overline{2}|i_2^{(4)}} + 1.027.086(1 + i_2^{(4)})^{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_2 = (1 + 0{,}04822)^4 - 1 = 0{,}2073$$

4.3.—EMISIONES DE OBLIGACIONES, BONOS DE CAJA Y CEDULAS HIPOTECARIAS

Bajo los títulos bonos de caja, obligaciones, bonos de tesorería y cédulas hipotecarias los bancos pueden efectuar emisiones de obligaciones, cuya problemática como operación financiera ha sido ampliamente estudiada en al parte cuarta (Empréstitos). Por ello sólo se efectuarán unas breves referencias respecto de las denominaciones anteriores.

Los **bonos de caja** son obligaciones a medio plazo que emiten los bancos industriales. Pueden tener la condición de cotización calificada lo que conlleva ciertas ventajas fiscales para el inversor (desgravación por inversiones con impuesto sobre la renta). Pueden ser convertibles en acciones y bonos simples o sin la opción de conversión.

Los **bonos de tesorería** son también obligaciones bancarias como los bonos de caja, si bien no suelen gozar de ventajas fiscales. Pueden ser convertibles o simples.

Las **cédulas hipotecarias** son emisiones de obligaciones simples que efectúan bancos y cajas de ahorro y gozan de ventajas fiscales.

5.—OPERACIONES ACTIVAS

Las operaciones activas de la banca responden básicamente a dos denominaciones: créditos y préstamos.

Se denomina **crédito** el contrato por el que una institución financiera pone a disposición del beneficiario dinero hasta un límite señalado en el contrato y por un plazo determinado, percibiendo periódicamente los intereses sobre las cantidades dispuestas en cada período.

La apertura del crédito puede ser simple o en cuenta corriente. El primero es aquel que se concede al acreditado el derecho de utilizar el crédito una sola vez, aunque se efectúe con entregas parciales. Con el crédito en cuenta corriente se concede al acreditado la posibilidad de utilizar el crédito en una o varias veces, efectuar reembolsos y poder utilizar nuevamente el crédito dentro de los límites fijados en el contrato.

El **préstamo** es la operación por la cual un banco, caja de ahorros o cooperativa de crédito entrega dinero al beneficiario mediante un contrato, con obligación por parte del prestatario de devolver el principal y abonar los intereses pactados, más las comisiones y gastos derivados de la operación.

En el préstamo la disposición se hace de una sola vez y por el total concedido.

El crédito y el préstamo se documentan mediante modelos específicos, llamados **pólizas**, intervenidas por fedatario público. El préstamo también se formaliza en ocasiones en letras de cambio.

Como operación financiera los préstamos, ya sean elementales o compuestos, han sido estudiados con extensión en la tercera parte del manual.

Es usual que se exijan garantías ante la concesión de préstamos distinguiendo entre personal y real. La garantía personal se basa en la solvencia personal del solicitante y los garantes. Cuando como garantía de pago el solicitante aporta bienes muebles o inmuebles que permanecen afectos hasta la extinción de la deuda, tiene lugar el préstamo con garantía real. Esta suele revestir la forma hipotecaria (sobre bienes muebles o inmuebles) y prendaria (pignoración de bienes).

Una modalidad especial de préstamo surge a través de la operación de **descuento bancario**, revistiendo las fórmulas de descuento comercial y descuento financiero. Por su importancia y extensión se le dedica posteriormente un epígrafe independiente. Estos préstamos son a corto plazo.

Las operaciones de crédito más usuales suelen adoptar la fórmula de **cuenta corriente de crédito**. Por su importancia y porque el tratamiento matemático de la operación es semejante al de las cuentas corrientes se estudia después de analizar éstas.

Las entidades crediticias también pueden concertar operaciones de **crédito a tipos de interés variable**. Esta forma está concebida para mejor adaptarse los prestamistas a las oscilaciones del precio del dinero. Pueden adoptar la forma de préstamo o la forma de cuenta de crédito y en ambos casos el contrato se instrumenta mediante póliza o escritura que contendrá las condiciones de concesión.

El tipo de interés consta de dos componentes: un tipo de referencia (índice) y otro adicional o diferencial al primero; el diferencial es una cuantía fija para toda la duración de la operación que se añade al tipo de referencia que rige en cada momento. Asimismo, el prestamista se compromete a mantener el crédito por toda la duración estipulada y en el contrato deben establecerse cláusulas de rescisión para el prestatario como consecuencia de las alteraciones de los tipos de interés.

Dentro de las operaciones activas se encuentran las **fianzas y avales**, términos que se utilizan de forma indistinta. Mediante la fianza los bancos y cajas garantizan ante terceros el cumplimiento de obligaciones asumidas por sus clientes.

A la vez que se establece el aval se fijan las relaciones entre el deudor o avalado y el banco mediante documento que se conoce con el nombre de contragarantía, el cual suele ser intervenido por fedatario mercantil. La duración del aval es independiente de la duración de la operación que lo provocó.

Por el servicio que el banco presta cobra una comisión, llamada de caución o fianza, que se calcula sobre el importe de la cantidad garantizada y se cobra por trimestres anticipados, mientras subsistan las condiciones de la fianza.

6.—SERVICIOS BANCARIOS

Aunque la gama de operaciones que proporcionan en la actualidad las instituciones financieras es muy amplia, a los fines que se plantean en el manual sólo se efectuará una breve reseña de aquellas que tienen más interés en el mundo económico-financiero. Debido a la finalidad que persiguen o al ámbito en que actúan podemos efectuar varias agrupaciones:

a) **Operaciones complementarias a las activas y pasivas cuya misión es facilitar el tráfico mercantil:** Transferencias, órdenes de pago y abono, giros o cheques, carta de crédito y gestiones de cobro y aceptación.

La **transferencia** bancaria es la orden dada a una entidad financiera para que con cargo a una cuenta del ordenante se transfiera a otra cuenta cualquiera un determinado importe de dinero. Para que sea ejecutada la orden es necesario que existan fondos suficientes en la cuenta de quien la ha ordenado.

Recibe el nombre de **orden de abono** o transferencia por caja al servicio que pide un cliente que ingresa directamente por caja, en efectivo, una cantidad de dinero para que sea transferido a la cuenta del beneficiario que designe y en la plaza y banco que señale. Cuando el beneficiario no tiene cuenta conocida y debe ser tramitado el pago en su domicilio o a través de la caja del banco la operación se designa con el nombre de **orden de pago**.

Se llama **giro** al acto de crear un efecto de comercio para hacer un cobro o un pago. Recibe el nombre de **cheque bancario** al giro que un banco extiende ordenando el pago de una cantidad de dinero, a cargo de sus sucursales o corresponsales, y a favor del cliente que lo solicitó. Pueden ser los cheques nominativos y al portador y son siempre conformes, pues el cliente debe abonar su importe antes de recibirlo.

Con el nombre de carta-orden de crédito o **carta de crédito** se designa a una orden de pago que extiende un banco a su cliente para que éste pueda procurarse fondos en sucursales o corresponsales de la entidad que la ha emitido. Este documento limita la cuantía y la duración al importe y fecha que figuran en él. En la actualidad los cheques de viaje van sustituyendo a la carta de crédito.

Los bancos por medio de su red se suelen ocupar de la **gestión de cobro de efectos de comercio**, de la presentación y **cobro de certificaciones** de obras y también de gestionar la **aceptación** de letras y otros documentos entregados por sus clientes.

Por los servicios enumerados suelen cobrar las entidades comisiones de pequeña cuantía y hacen que la operación sea muy interesante para el cliente.

b) **Servicios en relación con valores mobiliarios:** suscripciones y emisiones de valores, operaciones de bolsa, depósito y administración de títulos.

Es normal que las entidades financieras faciliten, a través de su red de sucursales y agentes, la colocación de **emisión de obligaciones**. La formalización de la gestión en la suscripción se recoge en un contrato de suscripción que fije las condiciones pactadas.

La participación o intermediación de los bancos en las emisiones suele presentar alguna de las siguientes modalidades: 1) Venta en firme (el banco adquiere las obligaciones con prima de emisión para venderlas en el mercado por el nominal o al menos por un valor superior al de adquisición); 2) Venta al mayor esfuerzo o en comisión (el banco acepta vender los títulos a un precio prefijado a cambio de una comisión); 3) Adquirir los títulos no colocados al mayor esfuerzo a un precio especial.

También los bancos, aunque no actúen en la colocación de la emisión, reciben órdenes de sus clientes para suscribir los títulos.

En caso de **ampliaciones de capital**, también es usual encargar su tramitación a uno o más bancos, que se encargan en mandar un boletín de suscripción a los accionistas con derechos de suscripción preferentes para que formalicen la orden de compra que deseen. Esta deberá contener el número de títulos que se desea suscribir, el de derechos de suscripción que se han de vender o comprar, y la cuenta que tiene que hacer el pago. En caso de no desear suscribir reciben la orden de venta de derechos de suscripción; pero si ésta no se ha producido, el banco intenta venderlos antes de finalizar el plazo. Cuando las ampliaciones de capital son con cargo a reservas (gratis) las suscripciones se suelen hacer de oficio.

Para efectuar **operaciones de bolsa** se puede cursar la orden directamente a los agentes; pero es más usual que se actúe indirectamente a través de las instituciones bancarias, percibiendo éstas una comisión por sus servicios. La problemática de estas operaciones se estudia con detalle en la sexta parte.

Las entidades de crédito reciben, con frecuencia, valores mobiliarios de los clientes para su **custodia y administración.** Por estos valores recibidos en depósito los bancos ejercen, a nombre de su cliente el cobro de intereses, dividendos, amortizaciones, canje y renovación de hojas de cupones. Asimismo, cabe recibir créditos de la entidad mediante el descuento de cupones y amortizaciones y pignoraciones.

c) **Otros servicios de la banca:** Alquiler de cajas de seguridad, pago de impuestos, pago de nóminas, domiciliación de recibos, tarjetas de crédito, etc.

Por la importancia que está adquiriendo se resalta únicamente el caso de la **tarjeta de crédito**, mediante la cual las entidades de crédito otorgan a sus clientes la posibilidad de efectuar compras en los establecimientos concertados, dentro de determinados límites. En ocasiones también es posible solicitar dinero por caja a través de cualquier banco afiliado al sistema. El banco liquida cada mes la cantidad gastada (con inclusión del dinero solicitado) en el mes anterior, con lo cual aplaza el pago un cierto número de días; incluso cabe acogerse a pagos fraccionados, lo que equivale a la concesión de un crédito, satisfaciendo en este caso los correspondientes intereses.

Este servicio que presta la entidad de crédito es también una operación de activo porque el cliente siempre tiene crédito desde, al menos, la fecha de la compra hasta la liquidación en el mes siguiente. A cambio, el banco obtiene como beneficio las comisiones que deduce al comerciante, del precio de los bienes y servicios, al efectuar los pagos de éstos.

7.—DESCUENTO BANCARIO

7.1.—CONCEPTO Y CLASES

El descuento bancario es una operación financiera simple por la cual un banco entrega a un cliente el valor actual de un capital futuro representado en un efecto de comercio.

El banco asume la posición acreedora al entregar la cuantía de la prestación con la esperanza de recibir la cuantía representada por el efecto de comercio el día de su vencimiento.

La palabra banco está utilizada en un sentido genérico, pues también pueden practicar el descuento las Cajas de Ahorros y las Entidades de Crédito Cooperativo, si bien estas últimas sólo pueden descontar efectos a sus asociados.

El efecto de comercio que se descuenta usualmente es la letra da cambio; pero también son susceptibles de descuento el cheque, el pagaré, recibos, facturas comerciales, warrants, etc., con determinados requisitos. Con el nombre de descuento bancario o simplemente descuento se identifica el descuento de letras, y si el descuento tiene por objeto otros efectos se denomina descuento no cambiario. En lo sucesivo se hará referencia al descuento cambiario, si bien lo que se transcriba es aplicable también al descuento no cambiario.

Es usual que el descuento se realice a corto plazo y se aplique como ley financiera de valoración el descuento comercial al tanto que se estipule. Además, también se deduce la comisión bancaria, el II y otros gastos que puedan incidir en la operación como el timbre del efecto, ya que la expedición de letras está sujeta al impuesto sobre Actos Jurídicos Documentados, dependiendo la cuantía del timbre del intervalo de la escala en la que se encuentre la cantidad girada (cuando el efecto tenga un vencimiento superior a seis meses el timbre que se exige es por el doble de la cantidad girada).

Cabe distinguir entre el **descuento financiero** y el **descuento comercial.** La diferencia entre ambos radica en que en el primero el efecto de comercio se crea con la finalidad expresa de obtener un préstamo o un crédito, mientras que en el segundo los efectos proceden de transacciones comerciales y se busca liquidez, a través de la operación de descuento.

7.2.—DESCUENTO DE PAPEL COMERCIAL

La operación tiene por objeto proporcionar liquidez a las empresas al transformar en dinero efectivo los créditos comerciales concedidos a sus clientes.

Como es sabido, en el tráfico mercantil es frecuente la venta a crédito, de tal manera que el comprador no hace efectivo su importe hasta la fecha estipulada. La acumulación de estos créditos suele ocasionar problemas de tesorería, y el vendedor, para eliminar o al menos mitigar estos problemas, puede acudir al banco para obtener el valor actualizado de esos créditos. Para ello, el vendedor (librador) gira una letra contra el comprador (librado) y la descuenta en un banco (tomador). En caso de impago de la contraprestación por insolvencia del librado, el banco puede exigir al librador, así como a los endosantes o avalistas si los hubiera, añadiendo los gastos que le hubiera ocasionado el incumplimiento del pago. Esta característica no suele darse en otras operaciones financieras en las que es frecuente que el acreedor asuma el riesgo de insolvencia del deudor.

Para analizar la operación de descuento se introducen las siguientes notaciones:

— C_n: Valor nominal del efecto.
— C_0: Valor efectivo que entrega el banco al cliente en la operación de descuento.
— d: Tanto de descuento comercial aplicado por el banco.
— n: Duración de la operación expresada en días. El descuento se obtiene tomando el plazo n que media desde la fecha de la formalización del descuento hasta el vencimiento del efecto; teniendo en cuenta que suelen añadirse tres días más en los efectos girados a plazo vista (días o meses vista) que no estén aceptados. Cuando los efectos tengan un vencimiento no superior a 8 días vista o a 11 días fecha, a partir de la fecha de presentación, el banco puede no deducir intereses o deducirlos por un período inferior. En lo que sigue n representará el número efectivo de días que se toman para descontar.
— g: Comisión de cobranza proporcional al nominal del efecto y que en ocasiones puede tener un valor mínimo.

— t: Tipo impositivo del impuesto indirecto II si lo hay (IVA, ITE, etc.).
— T: Valor del timbre.

El valor efectivo que entrega el banco al cliente es:

$$C_0 = C_n - C_n d \frac{n}{360} - C_n g - C_n \left(d \frac{n}{360} + g \right) t =$$

$$= C_n \left[1 - \left(d \frac{n}{360} + g \right) (1 + t) \right] \tag{8}$$

Generalmente, el cliente presenta la letra correctamente timbrada según la escala vigente en el Impuesto sobre Actos Jurídicos Documentados; pero si el banco facilita la letra, habrá que restar a C_0 la cuantía T del timbre, siendo el efectivo en este caso $C_0 - T$, debiendo tener presente que si el vencimiento es superior a 6 meses el timbre debe ser de la clase que corresponda a una cuantía doble del nominal de la letra.

A la diferencia $C_n - C_0$ se le denomina descuento bancario.

Nótese que al intervenir en la operación características comerciales unilaterales (impuestos) interesa a las partes, banco y cliente, obtener su tanto efectivo. Para obtener estos tantos hay que igualar financieramente lo que ha entregado y recibido cada parte. Se tiene:

El **banco** entrega $E_b = C_n \left[1 - \left(d \frac{n}{360} + g \right) \right]$ y recibe C_n, por lo que su tanto efectivo de descuento será el valor d_b solución de la ecuación:

$$E_b = C_n \left[1 - \left(d \frac{n}{360} + g \right) \right] = C_n \left(1 - d_b \frac{n}{360} \right) \tag{9}$$

y efectuando operaciones:

$$d_b = d + g \frac{360}{n} \tag{10}$$

El **cliente** recibe neto $E_c = C_0$ (si el timbre ha sido financiado por él debería considerarse $C_0 - T$), y deberá entregar C_n. El tanto efectivo de descuento para el cliente, d_c, es la solución de

$$E_c = C_0 = C_n \left[1 - \left(d \frac{n}{360} + g \right) (1 + t) \right] = C_n \left(1 - d_c \frac{n}{360} \right) \tag{11}$$

y se tiene:

$$d_c = \frac{C_n - C_0}{C_n} \frac{360}{n} = \left(d + g \frac{360}{n} \right) (1 + t) \tag{12}$$

verificándose la relación $d_c = d_b (1 + t)$.

Sin embargo, es más útil como medida de referencia de la rentabilidad (para el banco), o del coste (para el cliente), a que resulta esta operación el **tanto de capitalización simple equivalente.** Designando por i_b e i_c a estos tantos resulta:

— Para el banco

$$E_b \left(1 + i_b \frac{n}{360} \right) = C_n \left[1 - \left(d \frac{n}{360} + g \right) \right] \left(1 + i_b \frac{n}{360} \right) = C_n \tag{13}$$

$$i_b = \frac{d + g\,\dfrac{360}{n}}{1 - \left(d\,\dfrac{n}{360} + g\right)} = \frac{d_b}{1 - d_b\,\dfrac{n}{360}} \tag{14}$$

— Para el cliente:

$$C_0\left(1 + i_c\,\frac{n}{360}\right) = C_n\left[1 - \left(d\,\frac{n}{360} + g\right)(1+t)\right]\left(1 + i_c\,\frac{n}{360}\right) = C_n \tag{15}$$

$$i_c = \frac{C_n - C_0}{C_0}\,\frac{360}{n} = \frac{\left(d + g\,\dfrac{360}{n}\right)(1+t)}{1 - \left(d\,\dfrac{n}{360} + g\right)(1+t)} = \frac{d_c}{1 - d_c\,\dfrac{n}{360}} \tag{16}$$

Cuanto menor sea n, mayor resultará i_c por efecto de las comisiones, que no varían.

Si $t = 0$, coinciden $d_b = d_c$ e $i_b = i_c$, dado que el II es la única característica unilateral que aparece.

Es práctica frecuente calcular la rentabilidad o el coste de la operación sin tener en cuenta su mayor o menor duración. En este caso, llamando r_b y r_c a la rentabilidad y el coste respectivos, se tiene:

$$r_b = \frac{C_n\left(d\,\dfrac{n}{360} + g\right)}{E_b} \quad ; \quad r_c = \frac{C_n - C_0}{C_0} \tag{17}$$

se observará que r_b y r_c no son otra cosa que los réditos de la operación asociados al intervalor (0; n), mientras que i_b e i_c son tantos. Sin embargo, los tantos, al referirse a la unidad de tiempo, dan una idea comparativa más práctica.

Ejemplo 1.—Se descuenta un efecto de 300.000 ptas. nominales en una entidad bancaria que aplica un tanto del descuento del 14 % anual y una comisión del 0,50 % sobre el nominal por cada 60 días o fracción. Si el número de días al descuento es 80 y el II es el 5 %, determinar:

1) Tantos efectivos de descuento; 2) Tantos efectivos de capitalización equivalente:

El valor efectivo que recibe el cliente es:

$$C_0 = 300.000\left[1 - \left(0{,}14\,\frac{80}{360} + 0{,}005 \times 2\right)(1 + 0{,}05)\right] = 287.050$$

y el que entrega el banco:

$$E_b = 300.000\left[1 - \left(0{,}14\,\frac{80}{360} + 0{,}005 \times 2\right)\right]\ 287.666{,}67$$

y como la contraprestación es común con valor 300.000 ptas., las ecuaciones de los tantos de descuento efectivos y sus soluciones son:

$$287.050 = 300.000\left(1 - d_c\,\frac{80}{360}\right) \quad ; \quad d_c = 0{,}19425$$

$$287.666{,}67 = 300.000\left(1 - d_b\,\frac{80}{360}\right) \quad ; \quad d_b = 0{,}1850$$

Al mismo resultado se llega aplicando directamente las fórmulas (10) y (12) que dan:

$$d_b = 0{,}14 + 0{,}01\,\frac{360}{80} = 0{,}1850 \quad ; \quad d_c = \left(0{,}14 + 0{,}01\,\frac{360}{80}\right)(1 + 0{,}05) = 0{,}19425$$

Las ecuaciones de los tantos efectivos y sus soluciones son:

$$287.050\left(1 + i_c\,\frac{80}{360}\right) = 300.000 \quad ; \quad i_c = 0{,}2030$$

$$287.666{,}67\left(1 + i_b\,\frac{80}{360}\right) = 300.000 \quad ; \quad i_b = 0{,}1929$$

cuyas soluciones también pueden obtenerse aplicando la (14) y la (15), pues:

$$i_c = \frac{0{,}19425}{1 - 0{,}19425\,\dfrac{80}{360}} = 0{,}2030 \quad ; \quad i_b = \frac{0{,}1850}{1 - 0{,}1850\,\dfrac{80}{360}} = 0{,}1929$$

7.2.1.—Facturas de descuento

Es frecuente que el cliente presente una remesa de efectos en vez de uno solo. En este caso lo hace mediante un documento que suele proporcionar el propio banco, denominado factura de descuento en el que se detallan, para cada efecto, el librado, la plaza, la cuantía nominal y el vencimiento. Los bancos suelen abonar en la cuenta del cliente el nominal total de la factura admitida a descuento y posteriormente cargan con la misma fecha de vencimiento el descuento efectuado, incluyendo las comisiones, II, y algún otro gasto que pudiera haber, enviando al cliente la liquidación practicada en la que se detallan para cada efecto los mismos datos que la factura y además los días de descuento, los números comerciales, descuento, comisiones, II y total adeudado.

Si los nominales son de cuantías $C_1, C_2, \ldots, C_n$ con duraciones de $n_1, n_2, \ldots, n_n$ días hasta los vencimientos respectivos, el efectivo que recibirá el cliente es:

$$E_c = \sum_{s=1}^{n} C_s\left[1 - \left(d\,\frac{n_s}{360} + g\right)(1+t)\right] = \sum_{s=1}^{n} C_s - \left[\frac{\sum_{s=1}^{n} N_s}{D} + g\sum_{s=1}^{n} C_s\right](1+t) \qquad (18)$$

siendo $N_s = C_s n_s$ el número comercial y $D = \dfrac{360}{d}$ el divisor fijo. El sustraendo comprende todas las deducciones en concepto de descuento $\Sigma N_s/D$, comisiones $g\Sigma C_s$ e II.

El tanto medio de descuento efectivo para el cliente, d_c, verifica:

$$E_c = \sum_{s=1}^{n} C_s \left(1 - d_c \frac{n_s}{360}\right) \Rightarrow d_c = 360 \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s - E_c}{\sum_{s=1}^{n} C_s n_s} \tag{19}$$

sustituyendo E_c por su valor y operando se tiene:

$$d_c = \left(d + g \frac{360 \sum_{s=1}^{n} C_s}{\sum_{s=1}^{n} C_s n_s} \right)(1+t) \tag{20}$$

Es inmediato comprobar que el tanto medio de descuento del banco es $d_b = d_c/(1+t)$.

El rédito efectivo de coste para el cliente viene dado por:

$$r_c = \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s - E_c}{E_c} \tag{21}$$

Teniendo en cuenta que en descuento comercial los **n** capitales pueden ser sustituidos por su vencimiento medio, que es:

$$C = \sum_{s=1}^{n} C_s \quad ; \quad \tau = \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s n_s}{\sum_{s=1}^{n} C_s}$$

podría obtenerse el tanto de coste en capitalización i_c, en función de este vencimiento medio, mediante:

$$E_c \left(1 + i_c \frac{\tau}{360}\right) = \sum_{s=1}^{n} C_s \Rightarrow i_c = \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s - E_c}{E_c} \frac{360}{\tau} \tag{22}$$

Ejemplo 2.—Obtener la liquidación que efectuará el Banco X a un cliente que presenta cinco efectos al descuento, cuyos nominales y días de descuento son:

$C_1 = 25.000$;	$C_2 = 300.000$;	$C_3 = 200.000$;	$C_4 = 500.000$;	$C_5 = 1.000.000$.
$n_1 = 15$;	$n_2 = 30$;	$n_3 = 60$;	$n_4 = 90$;	$n_5 = 45$

si las condiciones del banco son:

- **Tanto de descuento: 14 %.**
- **Comisión bancaria: 0,40 % para vencimientos iguales o menores a 60 días y 0,70 % para vencimientos superiores. La comisión mínima es 350 ptas.**

Además, el II es el 5 % sobre los descuentos y gastos.

La liquidación que realizará el Banco al cliente de la factura de descuento puede ser la que aparece seguidamente:

BANCO X EMPRESA Y NUM. DE CUENTA

Números de efectos	Plaza	Nominal	Vencimiento	Días	Números comerciales	Descuentos %	Descuentos Importes	Comisiones %	Comisiones Importes
		25.000		15	375.000	14	145,83	Mín	350
		300.000		30	9.000.000	14	3.500,00	0,4	1.200
		200.000		60	12.000.000	14	4.666,67	0,4	800
		500.000		90	45.000.000	14	17.500,00	0,7	3.500
		1.000.000		45	45.000.000	14	17.500,00	0,4	4.000
		2.025.000			111.375.000		43.312,50		9.850

RESUMEN

Descuentos	Comisiones	II	Otros gastos	Total adeudo
43.312,50	9.850,00	2.658,12	—	55.820,62

La empresa resibe un efectivo de 1.969.179,38 ptas.

Ejemplo 3.—Calcular en la factura de descuento anterior el tanto medio de descuento efectivo, el rédito efectivo y el tanto de capitalización para el cliente.

Los valores pedidos son:

$$d_c = 360 \frac{\sum_{s=1}^{5} C_s - E_c}{\sum_{s=1}^{5} C_s n_s} = 360 \frac{55.820{,}62}{111.375.000} = 0{,}18043$$

$$r_c = \frac{\sum_{s=1}^{5} C_s - E_c}{E_c} = \frac{55.820{,}62}{1.969.179{,}38} = 0{,}028{,}35$$

$$i_c = \frac{\sum_{s=1}^{5} C_s - E_c}{E_c} \frac{360}{\tau} = \frac{55.820,64}{1.569.179,38} \frac{360}{55} = 0,18554$$

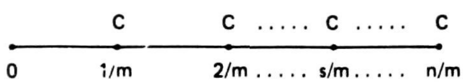
pues el vencimiento medio es:

$$\tau = \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s n_s}{\sum_{s=1}^{n} C_s} = \frac{111.375.000}{2.025.000} = 55$$

7.2.2.—Descuento de letras persiana

Se denominan letras persiana a un conjunto de letras de igual cuantía nominal cuyos vencimientos van asociados a períodos de tiempo sucesivos uniformes. La periodicidad más frecuente es la mensual y suelen proceder de ventas a plazos de bienes muebles o inmuebles.

Si se trata de n letras, con vencimiento en períodos de media 1/m de año y cuantía nominal de cada efecto C, es decir, tal como recoge el esquema siguiente:



el efectivo que percibirá el cliente cuando se aplica el descuento comercial, al tando d, a las n letras persiana, es:

$$E_c = \sum_{s=1}^{n} C \left[1 - \left(d \frac{s}{m} + g \right)(1+t) \right] = Cn \left[1 - \left(d \frac{1+n}{2m} + g \right)(1+t) \right] \tag{23}$$

resultando la operación al tanto medio efectivo de descuento d_c tal que:

$$E_c = \sum_{s=1}^{n} C \left(1 - d_c \frac{s}{m} \right) = Cn \left(1 - d_c \frac{1+n}{2m} \right) \tag{24}$$

Igualando los segundos miembros de E_c y operando, resulta:

$$d_c = \left(d + g \frac{2m}{1+n} \right)(1+t) \tag{25}$$

Como el vencimiento medio se caracteriza por:

$$\sum_{s=1}^{n} C_s = Cn \quad ; \quad \tau = \frac{\sum_{s=1}^{n} C \frac{s}{m}}{Cn} = \frac{1+n}{2m}$$

el tanto de coste efectivo i_c en capitalización para el cliente satisface:

$$E_c \left(1 + i_c \frac{n+1}{2m}\right) = Cn \tag{26}$$

de donde:

$$i_c = \frac{Cn - E_c}{E_c} \frac{2m}{1+n} = \frac{\left(d + g \frac{2m}{1+n}\right)(1+t)}{1 - \left(d \frac{1+n}{2m} + g\right)(1+t)} = \frac{d_c}{1 - d_c \frac{1+n}{2m}} \tag{27}$$

Ejemplo 4.—Obtener el efectivo y tantos medios efectivos del cliente que descuenta veinte letras de 100.000 ptas. nominales cada una, con vencimientos mensuales sucesivos, en una entidad financiera que aplica el tipo de descuento d = 16 % y comisión g = 1,2 %. Además el tipo II es t = 4 %.

Haciendo uso de las relaciones obtenidas se tiene:

$$E_c = 100.000 \times 20 \left[1 - \left(0{,}16 \frac{21}{24} + 0{,}012\right)(1 + 0{,}04)\right] = 1.683.840$$

$$d_c = \left(0{,}16 + 0{,}012 \frac{24}{21}\right)(1 + 0{,}04) = 0{,}1807$$

$$i_c = \frac{2.000.000 - 1.683.840}{1.683.840} \frac{24}{21} = 0{,}2146$$

7.2.3.—Límite del descuento

Aunque la relación entre banco y cliente puede ser ocasional (cuando se descuenta una letra, o una remesa, sin que se prevea la realización de futuras operaciones de descuento), lo más frecuente es que la relación se establezca con carácter continuado, en cuyo caso el banco estudia previamente a la empresa cliente a través de la documentación que debe facilitar ésta (balance, cuenta de explotación, proveedores, clientes, etc.) y de otras informaciones (registro de aceptaciones impagadas, de otros bancos, de otras empresas, etc.).

Consecuencia del estudio es la clasificación de riesgo comercial que el banco asigna al cliente y que se manifiesta en un límite de descuento o volumen máximo de efectos pendientes de vencimiento que admite a descuento en cada fecha. Este límite puede variar en el tiempo según la situación económica general y de la empresa cliente en particular; también puede exigir el banco determinadas garantías personales, o reales, del cedente al realizar la clasificación cuando se trata de empresarios individuales o empresas de poco capital y escasa solvencia.

7.2.4.—Compensaciones

Son retenciones que realizan los bancos en cuenta o depósitos del cliente como contrapartida adicional a los descuentos o créditos concedidos a éste; sus consecuencias se manifiestan en una mayor rentabilidad para el banco y en un mayor coste para el cliente, también representa un menor riesgo para el banco al disponer de la parte retenida para cubrir posibles impagos de algunos de los efectos descontados.

Las formas de compensación pueden ser varias. Una forma frecuente es la **compensación en cuenta corriente**, que obliga al cliente a mantener un saldo medio en su cuenta, proporcional al volumen de descuento o de crédito utilizado. La proporción varía según el tipo de cliente y suele situarse entre un 5 y un 20 %. Como la cuenta corriente produce unos intereses muy bajos, el tanto efectivo de coste para el cliente se eleva notoriamente.

Si, por ejemplo, se considera un efecto de C ptas. nominales y vencimiento dentro de un año, al descontarlo se obtiene un efectivo E_c, y ello equivale a que el tanto de coste del dinero sea el valor i_c tal que:

$$E_c(1+i_c)=C \Rightarrow i_c=\frac{C-E_c}{E_c} \tag{28}$$

pero si se exige una compensación en cuenta corriente de una parte αE_c, por la que se recibirán unos intereses a fin de año a tanto i_p (rentabilidad abonada a la cuenta corriente), la resultante de las dos operaciones para el cliente es:

— Disponer durante un año del líquido $E_c - E_c\alpha$.
— Tener como coste real la diferencia entre el coste de la operación de descuento $C-E_c$ y el rendimiento de la cuenta corriente $\alpha E_c i_p$.

El coste real unitario del período considerado, que es el rédito anual o tanto, se determinará por el cociente entre los costes y el préstamo líquido, o sea:

$$i_c^* = \frac{(C-E_c)-\alpha E_c i_p}{E_c - E_c\alpha} = \frac{E_c(i_c-\alpha i_p)}{E_c(1-\alpha)} = \frac{i_c-\alpha i_p}{1-\alpha} \tag{29}$$

Al mismo resultado se llega a través de la ecuación del tanto efectivo teniendo en cuenta que la prestación real es $E_c(1-\alpha)$ y la contraprestación real asciende a $C-E_c\alpha i_p$. En efecto, de:

$$E_c(1-\alpha)\,(1+i_c^*)=C-E_c\alpha i_p=E_c i_c - E_c\alpha i_p \tag{30}$$

se sigue:

$$i_c^* = \frac{i_c-\alpha i_p}{1-\alpha} \tag{31}$$

Por ejemplo, si el tanto efectivo para el cliente cuando no se efectúa retención es el 17 %, la exigencia de una retención del 10 % en cuenta corriente con un $i_p = 1$ %, conduce a $i_c^* = 18{,}78$ %.

La compensación también puede establecerse sobre cuentas de ahorro, sobre imposiciones a plazo fijo, sobre certificados de depósito, sobre moneda extranjera cuando la empresa opera con ella, sobre cuentas personales de los clientes, sobre valores mobiliarios, etcétera. El coste real para el cliente dependerá, como es lógico, de la rentabilidad que produzcan las retenciones establecidas.

La exigencia de compensaciones por la banca encontraba su principal justificación en la existencia de unos tipos legales máximos de interés para las operaciones de crédito o descuento a menos de un año y para otras operaciones financieras que no se correspondía con el precio real del dinero en el mercado. Esta situación se corregía en la práctica por la banca actuando sobre las comisiones que eran libres y exigiendo compensaciones que le proporcionasen una rentabilidad complementaria. En la actualidad, después de la liberalización de los tipos de interés de las operaciones activas a partir de la O.M. de 17 de enero de 1981, esta exigencia de compensación pierde parte de su justificación, ya que una mayor rentabilidad bancaria se puede obtener con un mayor tipo de interés o descuento y el nivel de riesgo puede disminuirse actuando sobre el límite de descuento o de crédito.

7.3.—DESCUENTO FINANCIERO

Se denomina así a la operación de crédito que realiza la banca con el cliente, utilizando como instrumento de concesión el descuento de letras de cambio.

A estas letras se les denomina letras financieras y en su formalización suele exigirse algún aval e intervenirse por fedatario público. Puede hacerse que el avalista gire contra el acreditado, quien la acepta y descuenta en el banco o bien es el propio banco quien gira contra el acreditado que acepta siendo avalado por otra persona.

El efectivo neto o préstamo líquido que recibe el cliente es:

$$C_0 = C_n \left[1 - \left(d \frac{n}{360} + g \right)(1+t) \right] - T \qquad (32)$$

siendo T la cuantía del timbre de la letra (según el impuesto sobre Actos Jurídicos Documentados) y teniendo g el significado de comisión en concepto de apertura del crédito (se gira sobre el nominal del efecto).

El problema usual es el determinar el nominal del efecto que ha de girarse para conseguir la cuantía C_0 que se necesita como préstamo, habida cuenta de las condiciones bancarias sintetizadas en g y d (o su equivalente i_b). Despejando de la fórmula anterior, el nominal del efecto es:

$$C_n = \frac{C_0 + T}{1 - \left(d \frac{n}{360} + g \right)(1+t)} \qquad (33)$$

Lo analizado en el descuento comercial para obtener los tantos efectivos, réditos, etc., es extensible al descuento financiero.

Ejemplo 5.—Determinar el nominal de una letra financiera necesario para otorgar un préstamo de 1.000.000 de ptas. por 90 días si la entidad bancaria que lo otorga aplica un tanto de descuento del 16 % y como comisión de apertura el 0,5 %. Además, el timbre del efecto asciende a 2.000 ptas. y el II es el 5 % sobre los descuentos y comisiones.

Para determinar C_n basta aplicar la fórmula anterior, resultando:

$$C_n = \frac{C_0 + T}{1 - \left(d\,\frac{n}{360} + g\right)(1+t)} = \frac{1.000.000 + 2.000}{1 - \left(0{,}16\,\frac{90}{360} + 0{,}005\right)(1+0{,}05)} = 1.051.692{,}47$$

8.—CUENTAS CORRIENTES

8.1.—CONCEPTO Y CLASIFICACION

La cuenta corriente es una operación compuesta, concertada entre dos personas, que consiste en un **intercambio de capitales con vencimientos distintos para saldar las diferencias financieras en un determinado momento, denominado fecha de cierre, y de acuerdo** con una ley financiera previamente establecida.

En toda operación de cuenta corriente intervienen dos personas, las cuales se llaman **tenedor** de la cuenta y **cuentacorrentista**. El tenedor de la cuenta es la persona que hace las anotaciones y el cuentacorrentista es la otra persona con cuyo nombre se encabeza la cuenta en los libros del tenedor. La distinción entre tenedor y cuentacorrentista es relativa, ya que según se consideren los apuntes contables de uno u otro así resultarán también las denominaciones de tenedor o cuentacorrentista.

Las partidas de la cuenta pueden tener carácter positivo o negativo. Son cantidades positivas las correspondientes a los débitos del cuentacorrentista (importes recibidos por el cuentacorrentista y entregados por el tenedor) y cantidades negativas los créditos del mismo (cantidades entregadas por el cuentacorrentista y recibidas por el tenedor). Por tanto, en toda cuenta corriente, con referencia al titular o cuentacorrentista, hay que considerar dos partes **Debe** y **Haber**; el **Debe** corresponde a las cantidades positivas y el **Haber** a las negativas.

En un sentido general son operaciones de crédito recíproco, posdeterminadas, ya que no se conocen a priori los capitales futuros que van a conformar la operación. Permiten agilizar la relación comercial entre las partes, puesto que en vez de ir cancelando cada transacción en el momento de su realización, la cancelación se efectúa para el conjunto de transacciones realizadas a lo largo de un cierto período de tiempo. Cada parte abre una cuenta a la otra en la que se cargan o abonan los capitales siguiendo las reglas descritas anteriormente. La obtención del saldo permite liquidar la cuenta, o bien pasarlo a cuenta nueva como primer capital en el caso frecuente de que siga manteniéndose la relación comercial.

El saldo será deudor si la suma de las cantidades es positiva, es decir, si las del debe superan a las del haber y el saldo será acreedor en caso contrario.

En la presentación de las cuentas, se acostumbra a escribir el saldo en la parte de la cuenta donde la suma haya sido menor, con objeto de terminar la cuenta; si se acuerda su continuación se empezará de nuevo con el saldo que se tenía antes de la terminación.

El acto de abrir una cuenta se llama **apertura**, el saldo que se escribe para terminar la cuenta recibe el nombre de **balance**, el apunte de terminar la cuenta se denomina **cierre** y el restablecimiento de la situación constituye lo que se llama **reapertura** de la cuenta.

Como **características fundamentales** de la operación financiera de cuenta corriente cabe resaltar:

a) Es una operación compuesta, pues suele tener prestación y contraprestación múltiples.
b) Es imperfecta por no ser posible definir a priori los compromisos de las partes.
c) Es una operación de crédito recíproco, ya que el saldo que queda en la fecha de cierre puede ser a favor de cualquiera de las partes.
d) Es una operación a corto plazo.
e) Es una operación de capitalización y habitualmente se pacta con la Ley de capitalización simple.

Se pueden efectuar distintas **clasificaciones de las cuentas corrientes**, atendiendo a características diferenciadoras, entre las que cabe resaltar:

1) Atendiendo a la existencia o no de intereses se distingue entre cuentas corrientes **simples** y cuentas corrientes con **interés**.

Las cuentas corrientes **simples o sin interés** son aquellas que no se computan intereses a los capitales que se intercambian o cruzan. El saldo se obtiene por simple diferencia entre el Debe y el Haber de la cuenta, es decir:

$$S = C_d - C_a \gtreqless 0$$

siendo C_d la suma de las cuantías de los capitales deudores y C_a la de los acreedores. Si $S > 0$, el saldo es deudor cuando $S < 0$ el saldo es acreedor.

Cuando los capitales que intervienen devengan intereses, de acuerdo con la ley financiera establecida, durante el tiempo que media desde el vencimiento hasta la fecha de cierre se tienen las cuentas corrientes **con interés** o cuentas corrientes propiamente dichas. Cabe distinguir entre:

a) Cuentas corrientes con **interés recíproco**, cuando la ley financiera es única para ambas partes.
b) Cuentas corrientes con **interés no recíproco**, cuando se aplica distinta ley financiera a los saldos según sean deudores o acreedores. Esta no reciprocidad de los intereses es para los saldos y no para las partidas individualizadas.
c) Cuentas corrientes a **interés variable**, cuando se aplica más de un tanto de valoración a lo largo de la duración.

2) Atendiendo a las partes intervinientes cabe hablar de cuentas corrientes **comerciales** y cuentas corrientes **bancarias**.

Las cuentas corrientes **comerciales** se establecen entre empresas o empresarios en general, los cuales se conceden créditos recíprocamente.

Cuando una de las partes es una entidad de crédito (bancos, cajas de ahorro o entidades de crédito cooperativo) se tienen las cuentas corrientes **bancarias.** El crédito es unilateral, salvo acuerdo expreso. Se distingue entre cuentas corrientes a la vista, cuenta de ahorro y cuenta de crédito, las cuales se estudiarán posteriormente,

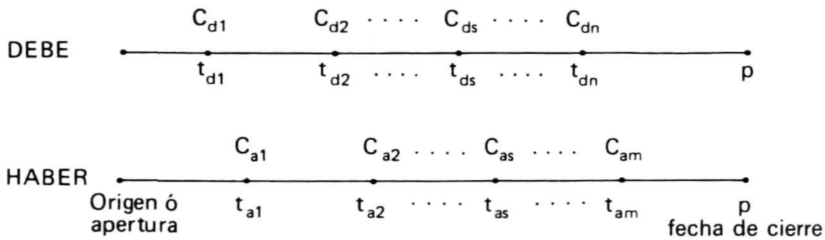
3) Según la clase de moneda en que se hacen las anotaciones en la cuenta se tienen las cuentas en **moneda nacional o a una sola moneda** y cuentas **en moneda extranjera o a dos monedas.**

Las cuentas en moneda extranjera siempre son cuentas de dos monedas porque se considera la moneda extranjera como medida de una cantidad de dinero de la que es preciso también expresar los valores de cada partida en moneda nacional.

8.2.—CUENTAS CORRIENTES CON INTERES RECIPROCO. METODOS PARA OBTENER EL SALDO

Desde el punto de vista financiero, el problema fundamental que plantea una cuenta corrientes es el de obtener el saldo, que exige previamente la determinación de los intereses parciales y totales de la cuenta. Estos pueden ser calculados en general siguiendo los procedimientos descritos al estudiar en la primera parte las leyes financieras de capitalización.

Sea una operación caracterizada por el vencimiento de los siguientes capitales que figuran en el debe y el haber de la cuenta:



Para una ley financiera de valoración en p, $L(t_{ds}; p) = 1 + I(t_{ds}; p)$, en donde $I(t_{ds}; p)$ representa los intereses de un capital unitario, se tiene:

— Valor financiero de capitales deudores

$$V_d = \sum_{s=1}^{n} C_{ds} L(t_{ds}; p) = \sum_{s=1}^{n} C_{as} + \sum_{s=1}^{n} C_{ds} I(t_{ds}; p) = C_d + I_d \tag{34}$$

— Valor financiero de capitales acreedores

$$V_a = \sum_{s=1}^{m} C_{as} L(t_{as}; p) = \sum_{s=1}^{n} C_{as} + \sum_{s=1}^{n} C_{as} I(t_{as}; p) = C_a + I_a \tag{35}$$

— Saldo de la cuenta

$$S = V_d - V_a = (C_d - C_a) + (I_d - I_a) \tag{36}$$

El saldo S es igual a la suma de los denominados saldos de capitales más los saldos de intereses.

El procedimiento descrito es válido en general para calcular los saldos, si bien a lo largo del tiempo han sido utilizados tres métodos particulares denominados: directo, indirecto y hamburgués. Todos ellos tratan de obtener el saldo de una forma sencilla y rápida sin perder la necesaria generalidad.

La ley financiera usada es la capitalización simple con punto de aplicación la fecha de cierre y se concreta por:

$$L(t_s;\, p) = 1 + i\,\frac{p - t_s}{360} = 1 + \frac{p - t_s}{D}$$

pues $p - t_s$ es el número de días que median entre el vencimiento de un capital y el cierre. Para facilitar los cálculos se hará uso de los denominados números comerciales $N_s = C_s(p - t_s)$, deudores, N_{ds}, y acreedores, N_{as}.

8.2.1.—Método directo

Consiste en llevar todos los capitales directamente a la fecha de cierre, obteniéndose el saldo en p de la forma descrita en el procedimiento general, o sea:

$$S = V_d - V_a = \sum_{s=1}^{n} C_{ds}\left(1 + \frac{p - t_{ds}}{D}\right) - \sum_{s=1}^{m} C_{as}\left(1 + \frac{p - t_{as}}{D}\right) =$$

$$= \left(\sum_{s=1}^{n} C_{ds} - \sum_{s=1}^{m} C_{as}\right) + \frac{\sum_{s=1}^{n} C_{ds}(p - t_{ds}) - \sum_{s=1}^{m} C_{as}(p - t_{as})}{D} =$$

$$= (C_d - C_a) + \frac{\sum_{s=1}^{n} N_{ds} - \sum_{s=1}^{m} N_{as}}{D} = (C_d - C_a) + \frac{N_d - N_a}{D} \qquad (37)$$

$C_d - C_a$ recibe el nombre de saldo de capitales, $N_d - N_a$ es el saldo de números y $\frac{N_d - N_a}{D}$ representa el saldo de intereses.

El formato de presentación de las cuentas corrientes puede ser cualquiera siempre que en ella haya las columnas necesarias, que son: Cuantías de capitales del Debe y del Haber; fechas de las operaciones y de las valoraciones o vencimientos; concepto de las operaciones, números comerciales o intereses del Debe y del Haber. Las más frecuentes disposiciones son:

DEBE | HABER

Fecha	Concepto	Cuantía	Vencimiento	Días	Números	Fecha	Concepto	Cuantía	Vencimiento	Días	Números

Fecha	Concepto	Cuantías		Vencimiento	Días	Números	
		Debe	Haber			Debe	Haber

Fecha	Concepto	Vencimiento	Cuantías		Saldos		Días	Números	
			Debe	Haber	Debe	Haber		Debe	Haber

Para calcular el cierre de la cuenta se halla primeramente el saldo de números y se anota en la columna que sumen menos para igualar. A continuación se hallan los intereses dividiendo el saldo de números por el divisor fijo y se anota en la columna de cuantías del mismo signo que la que dio mayor suma de números. Finalmente se halla el saldo de cuantías y se anota en la columna que suma menos. El saldo será deudor o acreedor según hayan sumado más las cuantías del debe o del haber.

En ocasiones, por motivos de comodidad se opera con números truncados, es decir, prescindiendo de las dos últimas cifras y redondeando si es preciso para eliminar partes decimales. Lógicamente en el divisor fijo también se prescinde de las dos últimas cifras; esto se hace para trabajar con números más manejables, teniendo en cuenta que esas dos últimas cifras no tienen incidencia práctica perceptible.

Este método necesita de la fijación previa de la fecha de cierre, pues en caso contrario las columnas de días y números no pueden rellenarse hasta que las partes la acuerden. Por ello, en ocasiones surgen algunos inconvenientes, tales como en los siguientes casos:

a) Cuando algún capital vence posteriormente a la fecha de cierre.

En este caso, al ser el vencimiento del capital posterior a p, se conviene en aplicar la ley del descuento simple comercial descontando los capitales hasta la fecha de cierre.

Hay que tener en cuenta que los intereses son ahora negativos (descuento), por lo que su número comercial debe ir afectado de signo negativo, o bien escribirse en rojo (de donde viene la denominación de números rojos a este caso) para recordar en la fecha de cierre que debe restarse en vez de sumarse; también puede colocarse en la columna contraria para sumarlo, si bien esto último sólo podrá hacerse cuando el tipo de interés sea recíproco.

Designando por C y N a las cuantías y números de los capitales con vencimiento anterior a la fecha de cierre y por C′ y N′ a las cuantías y números de los con vencimiento posterior, el saldo de la cuenta puede determinarse por alguna de las formas siguientes:

$$S = V_d - V_a = \left[C_d + \frac{N_d}{D} + C'_d - \frac{N'_d}{D}\right] - \left[C_a + \frac{N_a}{D} + C'_a - \frac{N'_a}{D}\right] =$$

$$= (C_d - C_a) + (C'_d - C'_a) + \frac{(N_d - N'_d) - (N_a - N'_a)}{D}$$

$$=(C_d+C'_d)-(C_a+C'_a)+\begin{cases}(N_d-N'_d)-(N_a-N'_a)/D & 0' \\ (N_d-N_a)-(N'_d-N'_a)/D & 0' \\ (N_d+N'_a)-(N_a+N'_d)/D & \end{cases} \tag{38}$$

b) Cuando las partes acuerdan modificar la fecha de cierre anticipando o retrasándola.

En estos casos, si son k los días en que se anticipa o se prorroga la fecha de cierre (el nuevo punto p′ se sitúa en $p-k$ o en $p+k$), habrá que restar o sumar en las columnas de números los correspondientes a los k días de anticipo o de prórroga. Resulta como ecuación del saldo:

$$S=\sum_{s=1}^{n} C_{ds}\left(1+\frac{p\mp k-t_{ds}}{D}\right)-\sum_{s=1}^{m} C_{as}\left(1+\frac{p\mp k-t_{as}}{D}\right)=$$

$$=\sum_{s=1}^{n} C_{ds}-\sum_{s=1}^{m} C_{as}+\frac{\sum_{s=1}^{n} C_{ds}(p-t_{ds})-\sum_{s=1}^{m} C_{as}(p-t_{as})}{D}\mp k\,\frac{\sum_{s=1}^{n} C_{ds}-\sum_{s=1}^{m} C_{as}}{D}$$

$$=(C_d-C_a)+\frac{N_d-N_a}{D}\mp k\,\frac{C_d-C_a}{D} \tag{39}$$

Ejemplo 1.—Liquidar por el método directo, a interés recíproco del 8 % y cierre al 30 de junio, la cuenta corriente que ha tenido los siguientes movimientos:

Fecha	Concepto	Cuantías	Vencimiento
1-1	N/remesa de géneros	100.000	10-1
5-2	N/pago por su cuenta	150.000	10-2
10-2	Su devolución de géneros	75.000	8-2
15-3	N/Transferencia a nuestro favor	50.000	20-3
20-4	N/remesa de géneros	200.000	1-5
25-4	N/remesa de géneros	250.000	15-5
10-5	S/giro a n/favor	250.000	30-5
25-5	S/giro a n/favor	150.000	5-7
10-6	N/remesa de géneros	100.000	10-7
25-6	S/transferencia a nuestro favor	175.000	12-7

La solución, procediendo con números truncados, es:

Fecha	Concepto	Cuantías		Vto.	Días	Números	
		Debe	Haber			Debe	Haber
1-1	N/remesa de géneros	100.000		10-1	171	171.000	
5-2	N/pago por su cuenta	150.000		10-2	140	210.000	
10-2	Su devolución de géneros		75.000	8-2	142		106.500
15-3	S/transferencia a n/favor		50.000	20-3	102		51.000
20-4	N/remesa de géneros	200.000		1-5	60	120.000	
25-4	N/remesa de géneros	250.000		15-5	46	115.000	
10-5	S/giro a n/favor		250.000	30-5	31		77.500
25-5	S/giro a n/favor		150.000	5-7	−5		−7.500
10-6	N/remesa de géneros	100.000		10-7	−10	−10.000	
25-6	S/transferencia a n/favor		175.000	12-7	−12		−21.000
30-6	Saldo deudor números						399.500
30-6	Intereses a n/favor	8.877,78					
30-6	Saldo a n/favor c/n		108.877,78				
		808.877,78	808.877,78			606.000	606.000
30-6	Saldo de c/c	108.877,78					

Ejemplo 2.—Prorrogar 15 días la cuenta corriente del ejemplo anterior.

Fecha	Concepto	Cuantías		Vto.	Días	Números	
		Debe	Haber			Debe	Haber
	Sumas	800.000	700.000			606.000	206.500
15-7	Modificación números				15	15.000	
15-7	Saldo de números						414.500
15-7	Intereses	9.211,11					
15-7	Saldo deudo c c/n		109.211,11				
		809.211,11	809.211,11			621.000	621.000
15-7	Saldo de c/c	109.211,11					

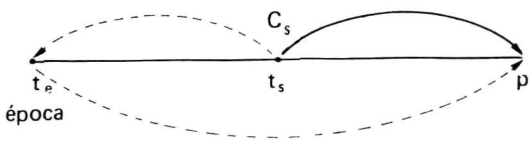
Ejemplo 3.—Anticipar al 20 de junio el cierre de la cuenta corriente del ejemplo 1.

Fecha	Concepto	Cuantías		Vto.	Días	Números	
		Debe	Haber			Debe	Haber
	SUMAS	800.000	700.000			606.000	206.500
20-6	Modificación números				-10	-10.000	
20-6	Saldo de números						389.500
20-6	Intereses	8.655,56					
20-6	Saldo deudor a c/c		108.655,56				
		808.655,56	808.655,56			596.000	596.000
20-6	Saldo de c/c	108.655,56					

8.2.2.—Método indirecto

Con el fin de evitar los inconvenientes citados en el método directo (números rojos y modificaciones de la fecha de cierre) surge el método indirecto. Este efectúa la valoración de los capitales sirviéndose de una fecha auxiliar, denominada época, que se fija con la condición de ser anterior o coincidente con el primero de los vencimientos.

El camino que se sigue es el siguiente: Para valorar C_s al cierre en lugar de ir directamente por la línea de trazo continuo se procede siguiendo el trazo discontinuo a evaluar C_s en t_e y posteriormente capitalizar hasta p.



El resultado es invariante pues:

$$C_s\left(1+\frac{p-t_s}{D}\right)=C_s\left(1+\frac{p-t_s\pm t_e}{D}\right)=C_s+C_s\,\frac{(p-t_e)-(t_s-t_e)}{D}=$$

$$=C_s+\frac{C_s(p-t_e)-C_s(t_s-t_e)}{D}=C_s+\frac{N_s-N'_s}{D}$$

y significa que los intereses $(N_s-N'_s)D$ son iguales a unos intereses positivos N_s/D menos unos intereses negativos N'_s/D.

El saldo de la cuenta corriente por el método indirecto es:

$$S=V_d-V_a=\sum_{s=1}^{n}C_{ds}\left(1+\frac{p-t_{ds}\pm t_e}{D}\right)-\sum_{s=1}^{m}C_{as}\left(1+\frac{p-t_{as}\pm t_e}{D}\right)=$$

$$= \left[\sum_{s=1}^{n} C_{ds} + \frac{\sum_{s=1}^{n} C_{ds}(p-t_e) - \sum_{s=1}^{n} C_{ds}(t_{ds}-t_e)}{D} \right] - \left[\sum_{s=1}^{m} C_{as} + \frac{\sum_{s=1}^{m} C_{as}(p-t_e) - \sum_{s=1}^{m} C_{as}(t_{as}-t_e)}{D} \right] =$$

$$= \left[C_d + \frac{C_d(p-t_e) - \sum_{s=1}^{n} N'_{ds}}{D} \right] - \left[C_a + \frac{C_a(p-t_e) - \sum_{s=1}^{m} N'_{as}}{D} \right] =$$

$$= \left(C_d + \frac{N_d - N'_d}{D} \right) - \left(C_a + \frac{N_a - N'_a}{D} \right) =$$

$$= (C_d - C_a) + \frac{(N_d - N_a) - (N'_d - N'_a)}{D} \tag{40}$$

o sea, el saldo de la cuenta es igual al saldo de las cuantías de los capitales $(C_d - C_a)$, más el saldo de los intereses positivos $(N_d - N_a)/D$, menos el saldo de los intereses negativos.

Ahora no pueden aparecer números rojos, ni es preciso conocer la fecha de cierre previamente, puesto que en la cuenta se van anotando los días y números respecto a la época y es sólo al final cuando se realiza la traslación de época a cierre para conocer los intereses. La mayor generalidad de este método se consigue a costa de una menor simplicidad calculatoria respecto al método anterior.

Ejemplo 4.—Liquidar la cuenta corriente del ejemplo 1 por el método indirecto tomando como época el vencimiento del primer concepto.

Fecha	Concepto	Cuantías		Vto.	Días	Números	
		Debe	Haber			Debe	Haber
1-1		100.000		10-1	0		
5-2		150.000		10-2	31	46.500	
10-2			75.000	8-2	29		21.750
15-3			50.000	20-3	69		34.500
20-4		200.000		1-5	111	222.000	
25-4		250.000		15-5	125	312.500	
10-5			250.000	30-5	140		350.000
25-5			150.000	5-7	176		264.000
10-6		100.000		10-7	181	181.000	
25-6			175.000	12-7	183		320.250
	Ajuste números						171.000
	Saldo de números					399.500	
	Intereses a n/f	8.877,78					
30-6	Saldo a n/f		108.877,78				
		808.877,78	808.877,78			1.161.500	1.161.500
	Saldo de c/c	108.877,78					

El orden práctico seguido es el siguiente:

a) Cálculo fuera de la cuenta del saldo interino de capitales $C_d - C_a = 100.000$.

b) Determinación del ajuste de números o números positivos $N_d - N_a = (C_d - C_a)(p - t_e) = 1.000 \times 171 = 171.000$ que se apunta a la parte contraria.

c) Obtención del saldo de números $(N_d - N_a) + N'_a - N'_d = [N'_a + (N_d - N_a)] - N'_d =$

$$= (990.500 + 171.000) - 762.000 = 399.500$$

Como se habrá observado en la resolución del ejemplo no es preciso conocer la fecha de cierre con antelación. Los números comerciales ahora tienen el significado de los números rojos del método anterior. Al cierre se halla el saldo provisional de cuantía y se multiplica por los días que van de época a cierre anotándose en la columna de números homóloga a la de suma de cuantías menor, con lo cual se realiza el ajuste de números. Los intereses se anotan en la columna de cuantías opuesta a la que dio mayor suma de números, acabándose como en el caso anterior.

8.2.3.—Método hamburgués

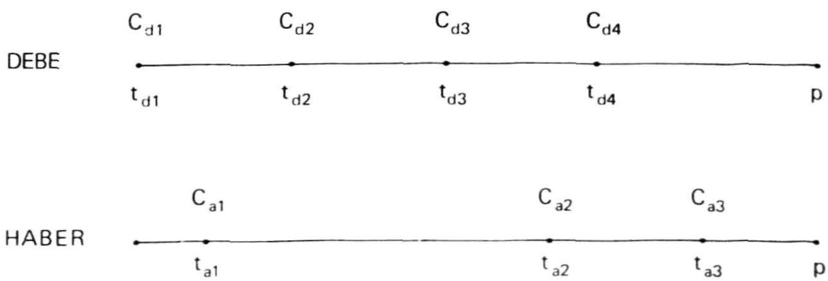
También es conocido como **método de los saldos** o **método escalar** porque los números se van calculando sobre los saldos parciales de cuantía, o sea, haciendo tantas escalas como capitales intervengan.

La mecánica operatoria es la siguiente:

— Se anotan los datos del primer capital en las columnas del debe o el haber según corresponda, excepto los días y número comercial, para los que habrá que esperar hasta conocer el vencimiento del segundo capital.

— Cuando se conozca este segundo capital, además de completar los días y números de la primera fila, se anotan los datos de la segunda incluido el saldo correspondiente a las dos primeras cuantías, quedando pendientes los días y número, que sólo se conocerán cuando lo sea el tercer capital. Así se va repitiendo sucesivamente hasta llegar a la fecha de cierre.

El siguiente gráfico describe un ejemplo con 4 capitales deudores y 3 acreedores:



deduciéndose las siguientes magnitudes:

Vto.	Saldo de capitales	Duración del saldo	Números de los saldos
t_{d1}	$S_1 = C_{d1}$	$t_{a1} - t_{d1}$	$N_1 = S_1(t_{a1} - t_{d1})$
t_{a1}	$S_2 = S_1 - C_{a1}$	$t_{d2} - t_{a1}$	$N_2 = S_2(t_{d2} - t_{a1})$
t_{d2}	$S_3 = S_2 + C_{d2}$	$t_{d3} - t_{d2}$	$N_3 = S_3(t_{d3} - t_{d2})$
t_{d3}	$S_4 = S_3 + C_{d3}$	$t_{a2} - t_{d3}$	$N_4 = S_4(t_{a2} - t_{d3})$
t_{a2}	$S_5 = S_4 - C_{a2}$	$t_{d4} - t_{a2}$	$N_5 = S_5(t_{d4} - t_{a2})$
t_{d4}	$S_6 = S_5 + C_{d4}$	$t_{a3} - t_{d4}$	$N_6 = S_6(t_{a3} - t_{d4})$
t_{a3}	$S_7 = S_6 - C_{a3}$	$p - t_{a3}$	$N_7 = S_7(p - t_{a3})$

En p el saldo de cuantías es:

$$S_7 = C_{d1} - C_{a1} + C_{d2} + C_{d3} - C_{a2} + C_{d4} - C_{a3} = \sum_{s=1}^{4} C_{ds} - \sum_{s=1}^{3} C_{as} = C_d - C_a$$

El saldo de intereses se obtiene dividiendo la suma de los números de los saldos por el divisor fijo, por lo que el saldo de la cuenta es:

$$S = S_7 + \frac{\sum_{s=1}^{7} N_s}{D} = (C_d - C_a) + \frac{\sum_{s=1}^{7} N_s}{D} \tag{41}$$

y proporciona el mismo resultado que el método directo, pues:

$$N = \sum_{s=1}^{7} N_s = \left| \begin{array}{l} S_1(t_{a1} - t_{d1}) = \\ S_2(t_{d2} - t_{a1}) \\ S_3(t_{d3} - t_{d2}) \\ S_4(t_{a2} - t_{d3}) \\ S_5(t_{d4} - t_{a2}) \\ S_6(t_{a3} - t_{d4}) \\ S_7(p \;\; - t_{a3}) \end{array} \right| \begin{array}{ll} (C_{d1} &)(t_{a1} - t_{d1}) = \\ (C_{d1} - C_{a1} &)(t_{d2} - t_{a1}) \\ (C_{d1} - C_{a1} + C_{d2} &)(t_{d3} - t_{d2}) \\ (C_{d1} - C_{a1} + C_{d2} + C_{d3} &)(t_{a2} - t_{d3}) \\ (C_{d1} - C_{a1} + C_{d2} + C_{d3} - C_{a2} &)(t_{d4} - t_{a2}) \\ (C_{d1} - C_{a1} + C_{d2} + C_{d3} - C_{a2} + C_{d4} &)(t_{a3} - t_{d4}) \\ (C_{d1} - C_{a1} + C_{d2} + C_{d3} - C_{a2} + C_{d4} - C_{a3} &)(p - t_{a3}) \end{array}$$

$$= C_{d1}(p - t_{d1}) - C_{a1}(p - t_{a1}) + C_{d2}(p - t_{d2}) + C_{d3}(p - t_{d3}) - C_{a2}(p - t_{a2}) +$$

$$+ C_{d4}(p - t_{d4}) - C_{a3}(p - t_{a3}) = \sum_{s=1}^{4} C_{ds}(p - t_{ds}) - \sum_{s=1}^{3} C_{as}(p - t_{as}) = N_d - N_a$$

es decir, N coincide con el saldo de números de método directo.

En general, cuando hay n saldos parciales deudores y m acreedores, el saldo final es:

$$S = S_{n+m} \pm \frac{\sum_{s=1}^{n} S_{ds} n_{ds} - \sum_{s=1}^{m} S_{as} n_{as}}{D} \tag{42}$$

siendo S_{n+m} el saldo final de cuantía de capitales, S el saldo de la cuenta, n_{ds} el número de días de saldo deudor y n_{as} el número de días de saldo acreedor.

Puede ocurrir que algún capital tenga vencimiento anterior al capital que le precede, en cuyo caso habrá que anotar los días y números en rojo para recordar que deben restarse, o bien anotarlo en la columna contraria y sumarlo, e igualmente ha de hacerse si el último vencimiento es posterior a la fecha de cierre. Se tiene, por tanto, un inconveniente similar al que se citaba en primer lugar para el método directo, pero no los otros dos. Es, por otra parte, el método más ventajoso cuando el interés no es recíproco.

Ejemplo 5.—Liquidar la cuenta corriente del ejemplo 1 por el método hamburgués.

Fecha	Conceptos	Vto.	Cuantía		Saldo	D	Días	Números	
			Debe	Haber				Debe	Haber
1-1		10-1	100.000		100.000	D	31	31.000	
5-2		10-2	150.000		250.000	D	−2		5.000
10-2		8-2		75.000	175.000	D	40	70.000	
15-3		20-3		50.000	125.000	D	42	52.500	
20-4		1-5	200.000		325.000	D	14	45.500	
25-4		15-5	250.000		575.000	D	15	86.250	
10-5		30-5		250.000	325.000	D	36	117.000	
25-5		5-7		150.000	175.000	D	5	8.750	
10-6		10-7	100.000		275.000	D	2	5.500	
25-6		12-7		175.000	100.000	D	−12		12.000
	Saldo de números								399.500
30-6	Intereses n/f		8.877,78						
30-6	Saldo n/f			108.877,78					
			808.877,78	808.877,78				416.500	416.500
	Saldo c/c		108.877,78		108.877,78	D			

8.3.—CUENTAS CORRIENTES A INTERESES RECIPROCO Y VARIABLE

Son aquellas en que se modifica el tipo de interés en algún momento del transcurso de la operación. Si en el momento de iniciar la cuenta se conoce la fecha de la modificación, basta tomar como fecha provisional de cierre aquella en la que tiene lugar tal modificación del tipo de interés; pero si la variación del tipo de interés no es conocida a priori, se procederá a efectuar una liquidación parcial cada vez que tenga lugar la variación, anulando las anotaciones correspondientes a los capitales de vencimiento posterior y determinando el saldo de intereses, que se anotará en columna aparte sin acumularlo a la columna de capitales, ya que entonces produciría intereses durante el período posterior, y ello equivaldría a actuar con intereses compuestos, lo cual no es admisible al tener que utilizar en la cuenta la capitalización simple.

Aunque los tres métodos de obtención del saldo son aplicables, el caso más frecuente es hacer uso del método hamburgués y por ello se plantea un ejemplo con este método.

Ejemplo 6.—Liquidar por el método hamburgués la cuenta corriente con interés recíproco del 4 % y fecha de cierre el 31 de marzo, si los movimientos de la cuenta son:

Fecha	**Vencimiento**	**Cuantías**	
		Debe	**Haber**
2/1	**10/1**	**100.000**	
15/1	**20/1**		**50.000**
28/1	**10/2**	**75.000**	
7/2	**12/2**	**50.000**	
18/2	**25/2**		**150.000**
28/2	**12/3**		**50.000**
10/3	**10/3**	**100.000**	
25/3	**5/4**		**25.000**

El día 25 de enero se comunica que el tipo de interés recíproco pasará al 5 % durante el mes de febrero y desde el primero de marzo hasta el cierre será el 4,5 %.

Al producirse dos cambios en el tipo de interés se tendrán que verificar dos liquidaciones parciales tomando como fechas provisionales de cierre las del día anterior al cambio.

Fecha	Concepto	Vto.	Cuantías		Saldo	D / H	Días	Números	
			Debe	Haber				Debe	Haber
2-1		10-1	100.000		100.000	D	10	10.000	
15-1		20-1		50.000	50.000	D	11	5.500	
31-1	Saldo interino			50.000					15.500
			100.000	100.000				15.500	15.500
	Saldo anterior		50.000		50.000	D	10	5.000	
28-1		10-2	75.000		125.000	D	2	2.500	
7-2		12-2	50.000		175.000	D	13	22.750	
18-2		25-2		150.000	25.000	D	3	750	
28-2	Saldo interino			25.000					31.000
			175.000	175.000				31.000	31.000

	Saldo anterior		25.000		25.000	D	12	3.000	
28-2		12-3		50.000	25.000	H	−2		−500
10-3		10-3	100.000		75.000	D	26	19.500	
25-3		5-4		25.000	50.000	D	−5	−2.500	
31-3	Saldo de números								20.500
	Intereses							20.000	20.000
	n/f 4 % 5/15.500		172,2						
	n/f 5 % s/31.000		430,6						
	n/f 4,5 % s/20.500		256,2						
	Saldo n/f			50.859					
			125.859	125.859					
	Saldo c/c		50.859		50.859				

8.4.—CUENTAS CORRIENTES A INTERES NO RECIPROCO

Son aquellas en que los saldos deudores devengan intereses a un tanto distinto que los saldos acreedores. El método hamburgués, por efectuar el cálculo de los números sobre los saldos es el idóneo en las cuentas corrientes con interés no recíproco.

Cuando todos los saldos de una cuenta son del mismo signo, o cuando habiendo saldos de distinto signo no aparecen números rojos el saldo se obtiene fácilmente teniendo en cuenta que ahora hay dos divisores fijos distintos D y D′. Su expresión es:

$$S = S_{n+m} \pm \left(\frac{\sum_{s=1}^{n} S_{ds} n_{ds}}{D} - \frac{\sum_{s=1}^{m} S_{as} n_{as}}{D'} \right) \tag{43}$$

Mientras no cambie la naturaleza del saldo, la cuenta funciona a interés recíproco, al tipo correspondiente de cada saldo. Si hay retrocesiones que no implican alteración de la naturaleza del saldo, se producirán números rojos, que tendrán que ser restados en su propia columna; pero si aparece una retrocesión que implica cambio en la naturaleza del saldo, es preciso ordenar los capitales por riguroso orden de vencimiento para obtener los números correctamente.

Cuando son frecuentes las retrocesiones con variación de significado del saldo, como suele ocurrir en las cuentas corrientes bancarias, esta dificultad se subsana llevando en un impreso separado de la cuenta, llamado escala, las anotaciones no por orden de fechas, sino por orden cronológico de vencimientos, con lo cual quedan eliminadas las retrocesiones.

Ejemplo 7.—Liquidar, por el método escalar o hamburgués, la cuenta corriente con interés no recíproco —saldos deudores al 6 % y saldos acreedores al 4 %— y fecha de cierre 30 de junio si los movimientos de la cuenta son:

Fecha	Vencimiento	Cuantías	
		Debe	Haber
1-4	1-4 (Saldo anterior)	100.000	
10-4	15-4		75.000
25-4	30-4		50.000
5-5	10-5	50.000	
10-5	30-5		60.000
22-5	2-6	50.000	
10-6	15-6	50.000	
20-6	20-6		100.000
25-6	28-6	75.000	
28-6	5-7	30.000	

Procediendo como se ha indicado anteriormente se tiene:

Método escalar o hamburgués
Saldos deudores 6 %; saldos acreedores 4 %; cierre 30 de junio

Fecha	Conceptos	Vto.	Cuantías		Saldo	D/H	Días	Números	
			Debe	Haber				Debe	Haber
1-4	Saldo anterior	1-4	100.000		100.000	D	14	14.000	
10-4		15-4		75.000	25.000	D	15	3.500	
25-4		30-4		50.000	25.000	H	10		2.500
5-5		10-5	50.000		25.000	D	20	5.000	
10-5		30-5		60.000	35.000	H	3		1.050
22-5		2-6	50.000		15.000	D	13	1.950	
10-6		15-6	50.000		65.000	D	5	3.250	
20-6		20-6		100.000	35.000	H	8		2.800
25-6		28-6	75.000		40.000	D	7	2.800	
28-6		5-7	30.000		70.000	D	−5	−3.500	
30-6	Cierre							27.000	6.350
	Intereses deudores		450						
	Intereses acreedor			70,6					
	Saldo n/f			70.379,4					
			355.450	355.450					
	Saldo c/c		70.379,4						

9.—CUENTAS CORRIENTES BANCARIAS

La modalidad más generalizada de cuentas corriente son las abiertas por los bancos, cajas de ahorros y entidades de crédito cooperativo a sus clientes. Con la cuenta corriente bancaria el banquero se convierte en agente de pagos y cobros de su cliente, estableciendo una relación de carácter estable.

La diferencia esencial entre una cuenta corriente bancaria con la cuenta corriente mercantil radica en que en esta última la concesión de crédito es por ambas partes, es decir, es una operación de crédito bilateral; mientras que la cuenta corriente bancaria es una operación de crédito unilateral, ya que sólo es el depositante quien concede crédito a la entidad financiera. Excepcionalmente, se permite la existencia de saldo a favor del banco (descubierto), y en estos caso se aplica un tanto de interés distinto que al de los saldos a favor del cliente, se actúa, pues, a interés no recíproco.

El caso más importante y usual es el de las **cuentas corrientes bancarias a la vista**, cuya característica esencial es la disponibilidad inmediata de los fondos.

Pueden llevarse por cualquiera de los métodos estudiados, pero es el **método hamburgués** el que se utiliza en la práctica por adaptarse mejor al tratamiento de los descubiertos en cuenta, con la consiguiente actuación del interés no recíproco.

El rayado de columnas es del mismo tipo que los vistos en el puntos anterior y los movimientos de la cuenta se registran así: **En el haber se anotan los abonos a favor del cliente** o titular (ingresos del titular o de terceros, transferencias a su favor, remesas, intereses acreedores, etc.) y **en el debe se registran los cargos en contra del cliente** (retiradas de fondos del cliente, pagos de cheques o transferencias emitidos por el titular, letras o recibos que el cliente domicilia a su cargo, intereses y comisiones deudoras, etc.).

La particularidad más importante, desde el punto de vista del cálculo es la referente a la fijación de los vencimientos o valor de las operaciones, que se contabilizan así: Para los abonos (entregas al banco) se señala como vencimiento el día siguiente hábil al que se realizan; para los cargos (retiradas de dinero) se da como vencimiento el mismo día que se realizan.

Los intereses suelen liquidarse semestralmente tomando como fechas de cierre el 30 de junio y el 31 de diciembre.

Teniendo en cuenta las novedades apuntadas, el mecanismo a seguir es idéntico al de las cuentas corrientes de interés no recíproco.

Ejemplo.—Liquidar la cuenta corriente bancaria con interés no recíproco —saldos acreedores (a favor del cliente) 1 % y saldos deudores (descubiertos) 15 %— tomando como fecha de cierre el 30 de junio, si contiene los siguientes movimientos:

Fecha	Conceptos	Vto.	Debe	Haber
15-4	Saldo anterior			300.000
25-4	Ingreso en efectivo	25-4		50.000
15-5	Pago talón compensado	20-5	340.000	
28-5	Cargos varios	28-5	30.000	
10-6	Ingresos en cheques	14-6		200.000
20-6	Pago en efectivo	20-6	40.000	
25-6	Recibo domiciliado	25-6	30.000	

Se ha considerado que el vencimiento es el día en el que físicamente se producen las entradas y retiradas de dinero, por lo que para liquidar la cuenta se tendrá que tomar como fecha valor la misma en los cargos y retiradas, y el día siguiente en los ingresos. Se tomarán números truncados.

Fecha operac.	Conceptos	Movimientos		Fecha valor	Saldo	D	Días	Números	
		Debe	Haber					Debe	Haber
15-4	Saldo anterior		300.000	15-4	300.000	H	11		33.000
25-4	Ingreso en efectivo		50.000	26-4	350.000	H	24		84.000
15-5	Pago talón comp.	340.000		20-5	10.000	H	8		800
28-5	Cargos varios	30.000		28-5	20.000	D	18	3.600	
10-6	Ingresos en cheques		200.000	15-6	180.000	H	5		9.000
20-6	Pago en efectivo	40.000		20-6	140.000	H	5		7.000
25-6	Recibo domiciliado	30.000		25-6	110.000	H	5		5.500
30-6	Cierre							3.600	139.300
	Intereses acreed. (1 %)		387						
	Intereses deud. (15 %)	150							
	Saldo a s/f	110.237							
		550.387	550.387						
30-6	Saldo anterior		110.237						

10.—CUENTAS DE AHORRO

Son otra modalidad de relación entre banco y cliente y pueden abrirse en cualquiera de las instituciones financieras descritas en el apartado anterior. El banco entrega al titular la **libreta** de ahorro en la que se van anotando los movimientos de capitales y los saldos, debiendo presentarse al realizar cada ingreso. Este aspecto les resta agilidad operativa respecto a las cuentas corrientes bancarias, y en contrapartida se retribuyen con un tanto de interés mayor, dado que el banco no necesita mantener líquidos tantos fondos como en el caso de tratarse de cuentas corrientes.

En la práctica, con las cuentas de ahorro se pueden realizar otros abonos y pagos, como pueden ser de efectos o recibos domiciliados, dividendos e intereses, transferencias, etc., lo cual aumenta su capacidad operativa hasta un nivel próximo al de las cuentas corrientes, con la diferencia de que no se dispone de talones.

Los días se contabilizan siguiendo el procedimiento quincenal, consistente en que a los ingresos se les asigna un vencimiento del último día de la quincena correspondiente y, por lo tanto, comienzan a producir intereses desde el primer día de la quincena siguiente; a los reintegros se les asigna como vencimiento el último día de la quincena anterior, por lo que dejan de producir intereses desde el principio de la correspondiente quincena. Así, por ejemplo, a un ingreso realizado el día 8 se le asigna un vencimiento del día 15 y produce intereses a partir del día 16; un reintegro realizado el día 23 se le asigna vencimiento del día 15 y deja de producir intereses a partir del día 16 inclusive. También podrían utilizarse los procedimientos semanal o decenal, considerando el mes dividido en cuatro semanas o tres decenas, sin embargo, en la práctica se suele seguir el quincenal. Los intereses se liquidan anualmente o semestralmente.

Presenta la ventaja de tener efectuados todos los cálculos en dichos días de cierre, pero si el titular de la libreta decide cancelarla antes es preciso efectuar los cálculos de anticipo de la fecha de cierre.

La forma de contabilizar los días lleva consigo que una cuenta de ahorro que tenga muchos movimientos de capitales puede producir intereses negativos a pesar de que el saldo de cuantías sea siempre acreedor (estas cuentas son de crédito unilateral). Esto se corresponde con la filosofía que subyace en la creación de estas cuentas, destinadas a fomentar un ahorro de cierta estabilidad.

En línea con esta filosofía existen, además de las cuentas de ahorro ordinario, otras fórmulas de ahorro especialmente diseñadas para que los capitales queden estabilizados largos períodos de tiempo. Caben destacar las cuentas de ahorro vinculado o finalista.

Las **cuentas de ahorro infantil y escolar** pretenden fomentar el ahorro a nombre de un menor estableciendo condiciones especiales para el menor. Los intereses son superiores a los de las cuentas ordinarias.

Las **cuentas de ahorro vinculado o finalista** tienen como objeto ayudar al ahorrador a la consecución de determinadas finalidades. Se trata de dos operaciones sucesivas, la primera de ahorro o constitución de un capital, que es remunerado a un tipo de interés preferente, y la segunda de concesión de un crédito sobre el anterior en condiciones favorables, cuya cuantía suele ser función de la cantidad ahorrada.

Como fórmulas concretas más usuales de este ahorro vinculado son: ahorro-vivienda y ahorro-bursátil. La primera parte de ambas es la constitución de un capital y la segunda la concesión de un préstamo para adquirir una vivienda, en un caso, y para constituir patrimono mobiliario, en el otro.

11.—CUENTA CORRIENTE DE CREDITO

Los créditos en cuenta corriente son operaciones activas realizadas por los bancos o cajas de ahorro por las que ponen capital a disposición del cliente hasta un límite fijado en el contrato, que recibe el nombre de **póliza** y suele ser intervenida por Agente de Cambio o Corredor de Comercio. Para su instrumentalización práctica, el banco abre una **cuenta corriente de crédito** al cliente donde se cargan o abonan las transacciones que vaya efectuando éste, así como los intereses y comisiones establecidas, debiendo ser cancelado en la fecha fijada en el contrato.

Estas operaciones son generalmente de crédito unilateral a favor del banco, si bien puede el cliente situarse en posición acreedora en algún momento, siendo en estos casos el interés no recíproco, con un tanto muy superior para los saldos deudores. A los saldos acreedores suele aplicarse el tipo de interés vigente para las cuentas corrientes a la vista.

Los intereses aplicables a los saldos deudores son libres según la legislación actual y suelen variar según el plazo del crédito y las características del cliente; los excedidos en cuenta, es decir, los rebasamientos de la cuantía del crédito concedido, llevan un recargo en el tipo de interés.

Además, se perciben comisiones a la apertura del crédito, un tanto por ciento sobre el límite de crédito fijado; y por disponibilidad un porcentaje trimestral sobre el saldo medio no dispuesto.

Se llevan, generalmente, estas cuentas por el método hamburgués.

Los bancos suelen exigir al cliente compensaciones mediante retenciones en cuenta u otras modalidades que le permitan disminuir el riesgo y obtener una rentabilidad complementaria, lo cual representa para el cliente un mayor coste de financiación. También se suelen exigir garantías, y en este aspecto cabe distinguir entre créditos con:

- **Garantía personal**, cuando se conceden en base a la solvencia y confianza personal que merece el cliente, exigiéndole frecuentemente la firma de algún avalista.
- **Garantía real**, cuando se afectan al buen fin de la operación bienes muebles (prenda) o inmuebles (hipoteca). Para duraciones cortas es más apropiada la garantía prendataria, cuya aportación al acreedor recibe el nombre de **pignoración**, de tal manera que la cuantía del crédito es proporcional al valor del bien o bienes afectados aplicando un **coeficiente de reducción** que oscila entre el 40 y el 90 %. La pignoración más frecuentes es la de valores mobiliarios, pero también puede pignorarse mercaderías, cosechas, imposiciones a plazo, maquinaria, ganado, etc.

Ejemplo.—Liquidar una cuenta corriente de crédito de límite 1.000.000 de pts., si la duración del crédito es 3 meses, renovable por otros tres, la apertura es el 15 de marzo, los intereses deudores el 18 %, los acreedores el 1 %, el exceso s/límite 20 %, comisión de apartura el 0,50 %, comisión de disponibilidad el 0,15 %, y los movimientos efectuados, incluidos los gastos de apertura, han sido:

Fecha	Conceptos	Fecha valor	Movimientos	
			Debe	Haber
15-3	Póliza contrato 3 ‰	15-3	3.000	
15-3	Comisión apert. 0,5 %	15-3	5.000	
15-3	Gastos corret. 2 ‰	15-3	2.000	
20-3	Talón núm. 1	20-3	200.000	
30-3	Talón núm. 2	30-3	400.000	
15-4	s/entrega	16-4		300.000
30-4	s/o transf.	30-4	200.000	
10-5	Ingreso efectivo	11-5		300.000
20-5	Talón núm. 3	20-5	300.000	
30-6	Talón núm. 4	30-6	300.000	
15-7	Su entrega	16-7		200.000
30-7	Su entrega	31-7		300.000
20-8	Talón núm. 5	20-8	100.000	
10-9	Talón núm. 6	10-9	100.000	

Fecha operac.	Concepto	Movimientos		Fecha valor	Saldo (deudor)	Días	Números	
		Debe	Haber				Debe	Haber
15-3	Póliza contrato	3.000		15-3	3.000	0	—	
15-3	Comisión apertura	5.000		15-3	8.000	0	—	
15-3	Gastos corretaje	2.000		15-3	10.000	5	500	
20-3	Talón núm. 1	200.000		20-3	210.000	10	21.000	
30-3	Talón núm. 2	400.000		30-3	610.000	17	103.700	
15-4	Su entrega		300.000	16-4	310.000	14	43.400	
30-4	Su orden transferencia	200.000		30-4	510.000	11	56.100	
10-5	Ingresos en efectivo		300.000	11-5	210.000	9	18.900	
20-5	Talón número 3	300.000		20-5	510.000	26	132.600	
	Intereses acreedores							
	Intereses deudores	18.810						
	Comis. 0,15 s/591.087	887						
15-6	Saldo acta nueva		529.697					
		1.129.697	1.129.697			92	376.200	
15-6	Saldo anterior	529.697		15-6	529.697	15	79.455	
30-6	Talón núm. 4	300.000		30-6	829.697	16	132.752	
15-7	Su entrega		200.000	16-7	629.697	15	94.455	
30-7	Su entrega		300.000	31-7	329.697	20	65.939	
20-8	Talón núm. 5	100.000		20-8	429.697	21	90.236	
10-9	Talón núm. 6	100.000		10-9	529.697	5	26.485	
	Intereses acreedores							
	Intereses deudores	24.466						
	Comis. 0,15 s/468.129	702						
15-9	Entrega última		554.865					
		1.054.865	1.054.865			92	489.322	

Con el fin de simplificar y por ser práctica habitual, se han redondeado a pesetas los cálculos anteriores.

Saldo medio no dispuesto = Suma de saldos no dispuestos por los días y dividodo por 92 (número de días del trimestre).

Cálculo de saldos medios no dispuestos:

1) Desde el 15-3 al 15-6.

Saldos		Días	Números saldos no dispuestos
Dispuestos	No dispuestos		
10.000	990.000	5	4.950.000
210.000	790.000	10	7.900.000
610.000	390.000	17	6.630.000
310.000	690.000	14	9.660.000
510.000	490.000	11	5.390.000
210.000	790.000	9	7.110.000
510.000	490.000	26	12.740.000
			54.380.000

$$\text{Saldo medio no dispuesto} = \frac{54.380.000}{92} = 591.087.$$

2) Desde el 16-6 al 15-9.

Saldos		Días	Números saldos no dispuestos
Dispuestos	No dispuestos		
529.697	470.303	15	7.054.545
829.697	170.303	16	2.724.848
629.697	370.303	15	5.554.545
329.697	670.303	20	13.406.060
429.697	570.303	21	11.976.363
529.697	470.303	5	2.351.515
			43.067.876

$$\text{Saldo medio no dispuesto} = \frac{43.067.876}{92} = 468.129$$

Para calcular el saldo medio no dispuesto resulta más cómodo proceder a determinar el saldo medio dispuesto, cuya columna de números ya está calculada, y por diferencia a 1.000.000 determinar el saldo medio no dispuesto. Se tiene:

	Saldo medio	
	Dispuestos	No dispuestos
Desde el 15-3 al 15-6	$\frac{37.620.000}{92} = 408.913$	591.087
Desde el 16-6 al 15-9	$\frac{48.932.200}{92} = 531.871$	468.129