FACULTAD DE CIENCIASECONÓMICAS, EMPRESARIALES Y TURISMO

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

MÁSTER UNIVERSITARIO EN:

Ciencias Actuariales y Financieras

Variación en la valoración de swaps vinculados a la longevidad por el efecto del COVID-19.

Realizado por:

Alba Achaques Martínez

Tutor:

Josep Lledó Benito

Cotutor:

Eliseo Navarro Arribas

Alcalá de Henares, 29 de Junio de 2022

AGRADECIMIENTOS

A mi familia y mi hermana,
por ser mi apoyo incondicional y mi motor.

A Carlos,
por ser el acompañante a todos mis pasos.

A mis chicas,
por confiar en mi más que yo misma.

A Álvaro y Fran,
por ser mi descubrimiento del máster y
mis acompañantes en las noches de estudio
y en los cafés preexamen.

A Moisés,
por enseñarme tanto profesional y personalmente.

Y a la UAH,
por formar parte de toda mi etapa académica.

RESUMEN

El riesgo de longevidad y mortalidad supone un desafío para los proveedores de rentas vitalicias, las compañías de seguros y los fondos de pensiones. El aumento de la esperanza de vida unido a la difícil diversificación del riesgo de tendencia de la longevidad conlleva que las aseguradoras de vida se acojan a los mercados financieros como alternativa para cubrir dicho riesgo.

Para paliar la divergencia entre los activos y pasivos en las entidades surgen diversos instrumentos financieros, en los cuales los flujos de caja están vinculado a la evolución de la tasa de mortalidad de referencia o la supervivencia de la población entre otras.

Este estudio analiza las características de parte de los activos alternativos vinculados a la longevidad y mortalidad, así como la estimación de los distintos modelos de mortalidad estocástica, con diferenciación entre hombres y mujeres, para la posterior valoración del producto financiero que en este caso se ha utilizado, un swap. Además del estudio de las variaciones en los resultados de dicho activo respecto del sexo, se analiza también las variaciones en la valoración del swap tras incorporar o no el año de la pandemia del COVID-19 a la proyección de los modelos de mortalidad estocástica.

Palabras clave: Riesgo de longevidad, modelos estocásticos, valoración, swap de longevidad.

ABSTRACT

Longevity and mortality risk pose a challenge to annuity providers, insurance companies and pension funds. The increase in life expectancy coupled with the difficult diversification of longevity trend risk means that life insurers are turning to the financial markets as an alternative to cover this risk.

To mitigate the divergence between assets and liabilities in entities, various financial instruments arise in which cash flows are linked to the evolution of the reference mortality rate or the survival of the population, among others.

This study analyses the characteristics of part of the alternative assets linked to longevity and mortality, as well as the estimation of the different stochastic mortality models, with differentiation between men and women, for the subsequent valuation of the financial product that in this case has been used, a swap. In addition to the study of the variations in the results of said asset with respect to gender, the variations in the valuation of the swap are also analysed after incorporating, or not, the year of the COVID-19 pandemic to the projection of the stochastic mortality models.

Key words: Longevity risk, stochastic models, valuation, longevity swap.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS 6
ÍNDICE DE TABLAS 6
1. INTRODUCCIÓN 7
2. EL RIESGO DE LONGEVIDAD Y SU GESTIÓN EN LA INDUSTRIA ASEGURADORA 9
3. MERCADO DE ACTIVOS DE LONGEVIDAD 18
3.1. Categorías 19
3.2. Bonos de longevidad 24
3.2.1. Mercado 24
3.2.2. Mecánica y metodología del producto 25
3.3. Swaps de longevidad 27
3.3.1. Mercado 29
3.3.2. Mecánica y metodología del producto 30
3.4 Perspectiva futura del mercado de longevidad 31
4. MODELOS DE MORTALIDAD ESTOCÁSTICA 33
4.1. Modelo de Lee-Carter (LC) 34
4.2. Modelo de Renshaw y Haberman (RH) 36
4.3. Modelo de Age-Period-Cohort (APC) 37
4.4. Modelo Cairns-Blake-Dowd (CBD) 39
4.5. CBD con efecto cohorte (M6) 40
4.6. Modelo CBD con efecto cohorte y componente cuadrático (M7) 41
5. CASO PRÁCTICO: Valoración swap de longevidad 43
5.1. Descripción del caso a estudiar 43
5.2. Resultados 45
5.2.1. Estimación de los modelos 45
5.2.2. Proyección de los modelos 52
5.2.3. Valoración swap 54
6. CONCLUSIONES 60
7. FUTURAS LINEAS DE INVESTIGACIÓN 61
ANEXO I 63
ANEXO II 65
ANEXO III 68
ANEXO IV 71
ANEXO V 72
BIBLIOGRAFÍA 110

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Evolución de la esperanza de vida en Europa Occidental 10
Figura 2: Evolución de la esperanza de vida para los paises de mayor esperanza..... 11
Figura 3: Población española menor de 30 y menor de 65 años respecto de la población total..... 12
Figura 4: Evolución fallecimientos por sexo 13
Figura 5: Acontecimientos históricos y su repercusión en las defunciones 14
Figura 6: Evolución de la tasa de mortalidad logarítmica de España..... 15
Figura 7: Esquema del Buy-outs de pensiones 20
Figura 8: Esquema del Buy-ins de pensiones 21
Figura 9: Esquema de los bonos catastróficos 21
Figura 10: Esquema de los q-forwards..... 23
Figura 11: Esquema de los bonos de longevidad 24
Figura 12: Esquema de los swaps de longevidad..... 28
Figura 13: Crecimiento del riesgo de longevidad en importancia al cubrir otros riesgos. Ilustrativo 45
Figura 14: Resultados estimación LC (1950-2019) 46
Figura 15: Mapa de color de los residuos de LC (1950-2019) 47
Figura 16: Resultados estimación LC (1950-2020) 49
Figura 17: Proyección del modelo de LC (1950-2049)..... 52
Figura 18: Proyección del modelo de LC (1950-2050)..... 53
Figura 19: Diagrama valoración renta inicial y mediana..... 57
Figura 20: Diagrama valoración del spread del swap de longevidad..... 58

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Tabla resumen de los bonos de longevidad en el mercado..... 25
Tabla 2: Tabla resumen de los swaps de longevidad en el mercado 30
Tabla 3: Tabla resumen de los modelos estocásticos..... 34
Tabla 4: Hipótesis de datos para el caso práctico 44
Tabla 5: Tabla AIC y BIC de la estimación de LC (1950-2019) 48
Tabla 6: Tabla AIC y BIC de la estimación de LC (1950-2020) 50
Tabla 7: Tabla AIC y BIC de la estimación de todos los modelos (1950-2019)..... 51

1. INTRODUCCIÓN

El aumento de la esperanza de vida supone un incremento directo del riesgo de longevidad. Dicho riesgo significa un amplio problema para planes de pensiones y aseguradoras dada la dificultad que la propia diversificación conlleva. La difícil diversificación se debe principalmente al riesgo de tendencia que tiene la longevidad. Para paliar la posibilidad de que se produzca un contratiempo produciendo un perjuicio, las aseguradoras y planes de pensiones cubren esta exposición de diversas maneras. Destacando el concepto de activos alternativos de longevidad o mortalidad.

El objetivo de este estudio es doble. Por un lado, se ha realizado el estudio de la evolución de la longevidad mediante distintos modelos estocásticos. Los modelos empleados son; el modelo de Lee-Carter (1992), Renshaw y Haberman (2003) y Cairns-Blake-Dowd (2006), a través de dichos modelos se ha realizado tanto la estimación como la proyección en un horizonte de 30 años para la tasa bruta de mortalidad. Por otro lado, se ha llevado a cabo el análisis de parte del mercado de activos vinculados a la longevidad y mortalidad, como cobertura a dichos riesgos. Centrándose el estudio desde el punto de vista teórico en los bonos de longevidad y en los swaps de longevidad. Así mismo, se incluye la perspectiva práctica en el análisis de las variaciones ocurridas en la valoración del swap de longevidad, siendo estas variaciones causa de las proyecciones de la tasa de mortalidad de los distintos modelos estocásticos con y sin el efecto del COVID-19.

Para el desarrollo de los objetivos expuestos se ha partido de los datos de la población española de la Human Mortality Database, HMDB, además de la literatura necesaria sobre la valoración de los activos de longevidad. Dichos datos se han tratado a través de programación scripts ad-hoc realizados tanto en R studio como en Matlab, y de forma residual en Excel.

El progreso de este estudio comienza con un análisis de la evolución del riesgo de longevidad y su gestión, seguido de la explicación detalla de parte de los instrumentos financieros asociados al riesgo de la longevidad y mortalidad, así como la situación actual en el mercado del bono y swap de longevidad en el apartado 3. A continuación, se desarrolla desde el punto de vista teórico las estimaciones de los modelos de mortalidad estocásticos en el apartado 4, para posteriormente en el apartado 5 poder realizar la valoración de un swap de longevidad, con unas hipótesis prefijadas, a través de las

proyecciones realizadas con los distintos modelos con y sin el efecto del COVID-19. Para finalizar, se expone las principales conclusiones, fruto de este estudio, así como las futuras posibles líneas de ampliación del estudio.

2. EL RIESGO DE LONGEVIDAD Y SU GESTIÓN EN LA INDUSTRIA ASEGURADORA

Debido a los avances tecnológicos, médicos, higiénicos y socio-económicos la esperanza de vida se ha ido incrementando de forma continuada. Se entiende como esperanza de vida la edad de supervivencia estimada al nacer, sufriendo esta estimación en los últimos sesenta años un aumento de cerca de 20 años de media de manera mundial (Esteve, 2018), un aumento un tanto menor para los hombres y mayor en el caso de las mujeres, lo que supone un aumento global en la longevidad.

El cálculo de la esperanza de vida a la edad *x*, nombrada con la notación e_x, es un cálculo realizado para la generación, pero puesto que no son datos conocidos al nacer se realiza a través de una generación hipotética, es decir, como si la generación se expirara de igual forma para todas las edades de ese periodo en la generación ficticia, por lo que se trata de un análisis transversal finalmente y no longitudinal. Por tanto, la expresión de cálculo sería la siguiente:

$$e_x = \frac{T_x}{l_x}$$

Donde;

- T_x: es el número de años vividos en total desde la edad x
- l_x: es el número de supervivientes a la edad x

De manera común y como desarrollo de la fórmula comentada anteriormente, se suele expresar la esperanza de vida únicamente a partir del número de supervivientes, es decir, a partir de l_x, quedando la expresión de la siguiente manera:

$$e_x = 0{,}5 + \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + l_{x+4} + \cdots}{l_x} = 0{,}5 + \frac{\sum_{\omega}^{x} l_{x+n}}{l_x}$$

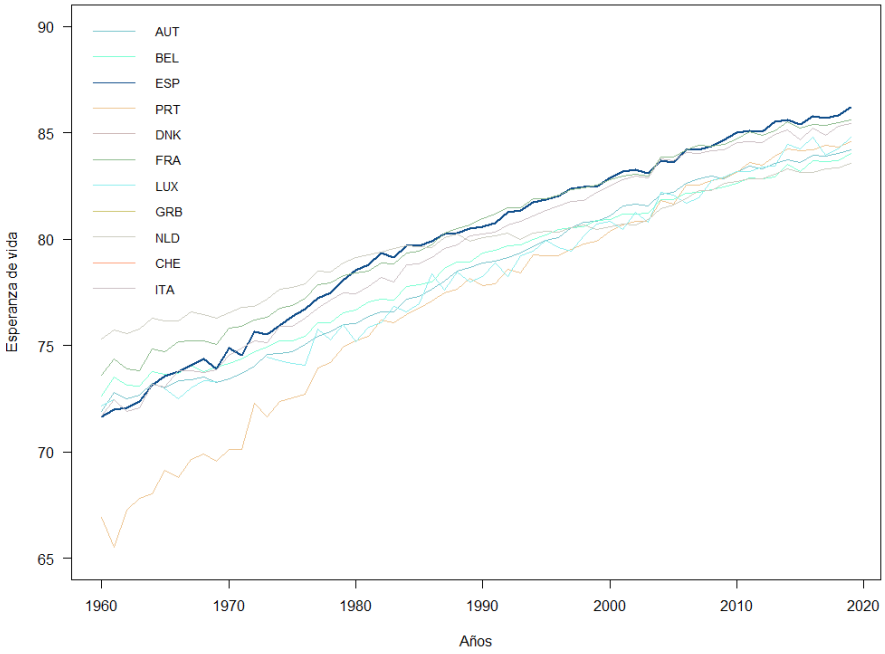
Además, si hablamos de la esperanza de vida al nacer se debe de tener en cuenta que la edad *x* será la edad 0, y por genericidad el número de supervivientes a la edad de 0 años se estima en 100.000 individuos y para los supervivientes de la siguiente edad, *x+1*, únicamente habrá que restarle a los supervivientes de la edad anterior las defunciones teóricas del periodo, es decir:

$$l_{x+1} = l_x - d_x$$

Donde;

- d_x: numero de defunciones teóricas a la edad x.

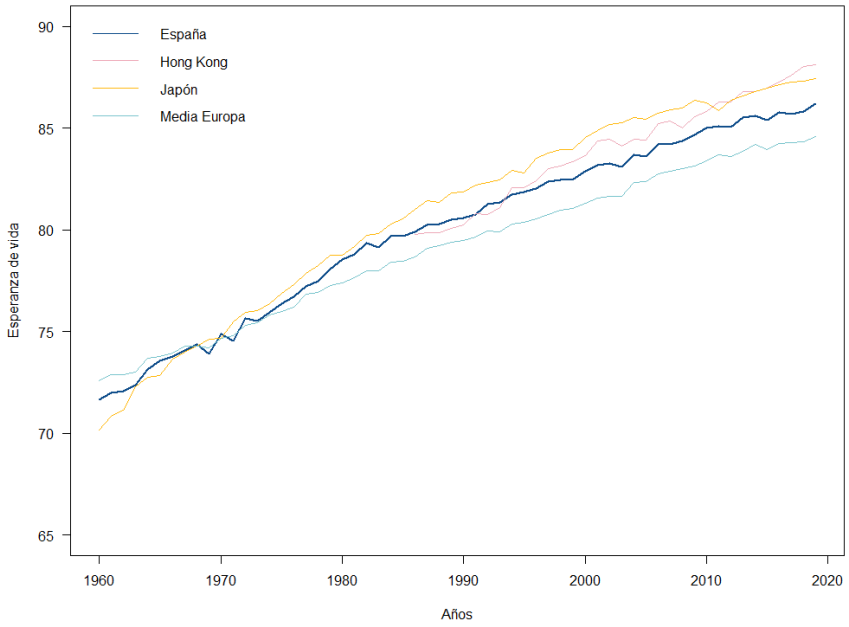
Figura 1: Evolución de la esperanza de vida en Europa Occidental



Fuente: Elaboración propia, datos HMDB

Como se puede observar, la Figura 1 muestra cómo la esperanza de vida ha sufrido un gran aumento en los últimos sesenta años. El gráfico en cuestión muestra la evolución de once países de Europa occidental, entre ellos resaltado España. Cabe destacar el gran aumento que ha sufrido España, siendo en los años 60 uno de los países europeos con menos esperanza de vida y pasando a ocupar el primer lugar alrededor del año 2005, con una esperanza de vida al nacer de 84,4 años seguido del siguiente país, Italia, con 84,3 años de esperanza de vida.

Figura 2: Evolución de la esperanza de vida para los países de mayor esperanza.



Fuente: Elaboración propia, datos HMDB

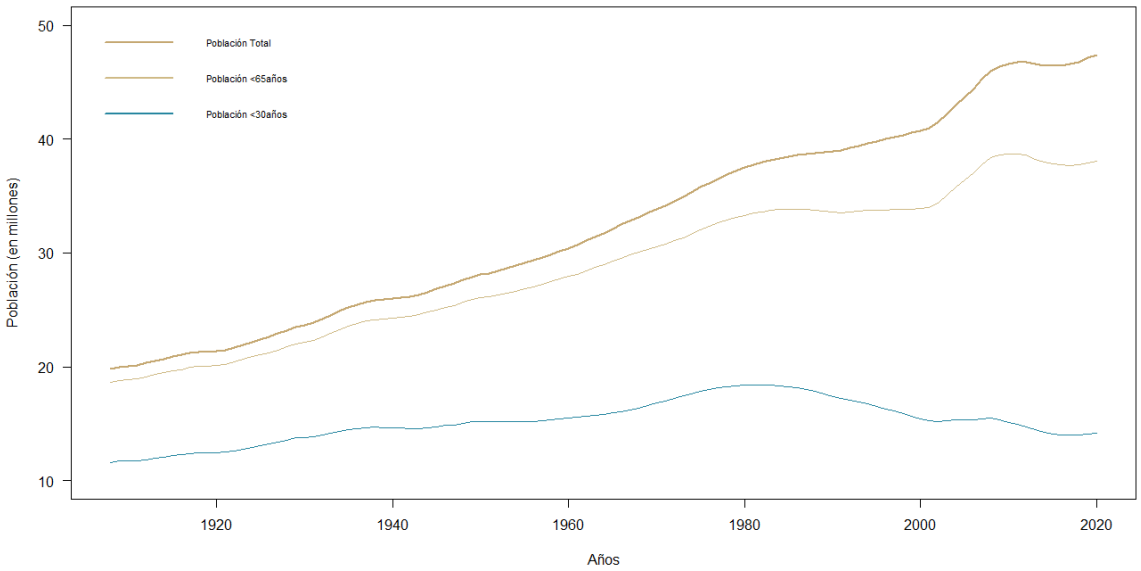
Por otro lado, en la Figura 2 se puede observar la región china de Hong Kong, siendo actualmente la región con mayor esperanza de vida, seguida por Japón con décimas menos. Siendo estos los dos países a la cabeza en esperanza de vida, se observa como España no se queda atrás, perteneciendo a los cinco países con mayor esperanza de vida, junto con Suiza y Singapur, mientras que la media europea está por debajo.

Para poder entender la evolución de la población es necesario analizar primero la transformación que ha sufrido la ratio de fecundidad. La ratio de fecundidad mundial ha sufrido un decrecimiento en los últimos 60 años, pasando de tener una media de 5 niños a ser actualmente de 2,5 niños. En el caso particular de España, esta ratio, es menor respecto a la media mundial, en 1960 la ratio se hallaba en 2,8 niños, mientras que actualmente se encuentra en 1,3 niños.

Si se analiza conjuntamente la esperanza de vida y la ratio de fecundidad, acaeciendo un aumento en la primera de estas medidas y, de manera inversa, una disminución en el caso de la ratio, se obtiene como consecuencia un aumento de la edad media poblacional, en otros términos, un envejecimiento de la población. Donde la edad media mundial en 1960 era de 23,6 años, llegando a la actualidad a ser de 30,9 años. Como se ha observado los datos de la esperanza de vida para España son elevados, respecto del resto, y en el caso de la ratio de fecundidad menores a la media mundial, esto conlleva, que la población

española sea aún más envejecida que la media mundial, siendo actualmente la edad media de dicha población de 44,9 años.

Figura 3: Población española menor de 30 y menor de 65 años respecto de la población total



Fuente: Elaboración propia, datos HMDB

En la Figura 3 se puede observar cómo la población total española sigue aumentando, mientras la población menor de 30 años ha ido en decaída. En 1960 la población menor de 30 años suponía quince millones y medio, mientras que actualmente supone catorce millones. La gran diferencia de esta variación es que en 1960 la población española total era cercana a los treinta millones y medio de habitante, y en la actualidad España cuenta con 47 millones de habitantes. En términos relativos, la población menor de 30 años ha pasado de representar cerca del 50% de la población total hasta mermar al 30%.

Para el correcto entendimiento del estudio y de la evolución de la población es necesario ver la evolución que ha sufrido a lo largo de la historia la tasa de mortalidad. La tasa central de mortalidad, m_x, se expresa como el cociente de las defunciones para un año y edad determinada frente a la población media expuesta al riesgo en el mismo año y a la misma edad, es decir:

$$m(x,t) = \frac{D(x,t)}{E(x,t)}$$

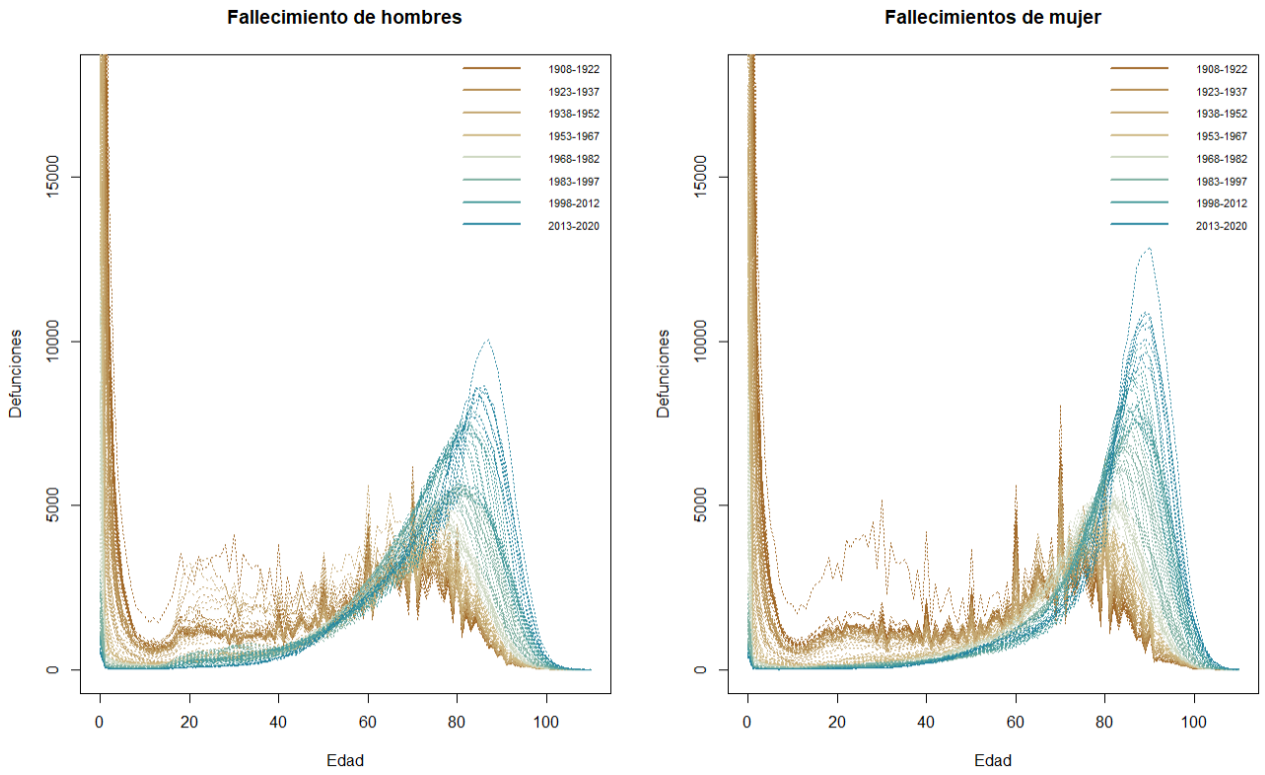
Donde;

- $D(x,t)$: número de defunciones a la edad *x* en el año *t.*

- $E(x,t)$: número promedio de personas expuestas de edad *x* en el año *t*.

Puesto que la tasa de mortalidad está directamente relacionada con las defunciones, a continuación, se va a mostrar la evolución histórica de estos datos para la población española.

Figura 4: Evolución fallecimientos por sexo



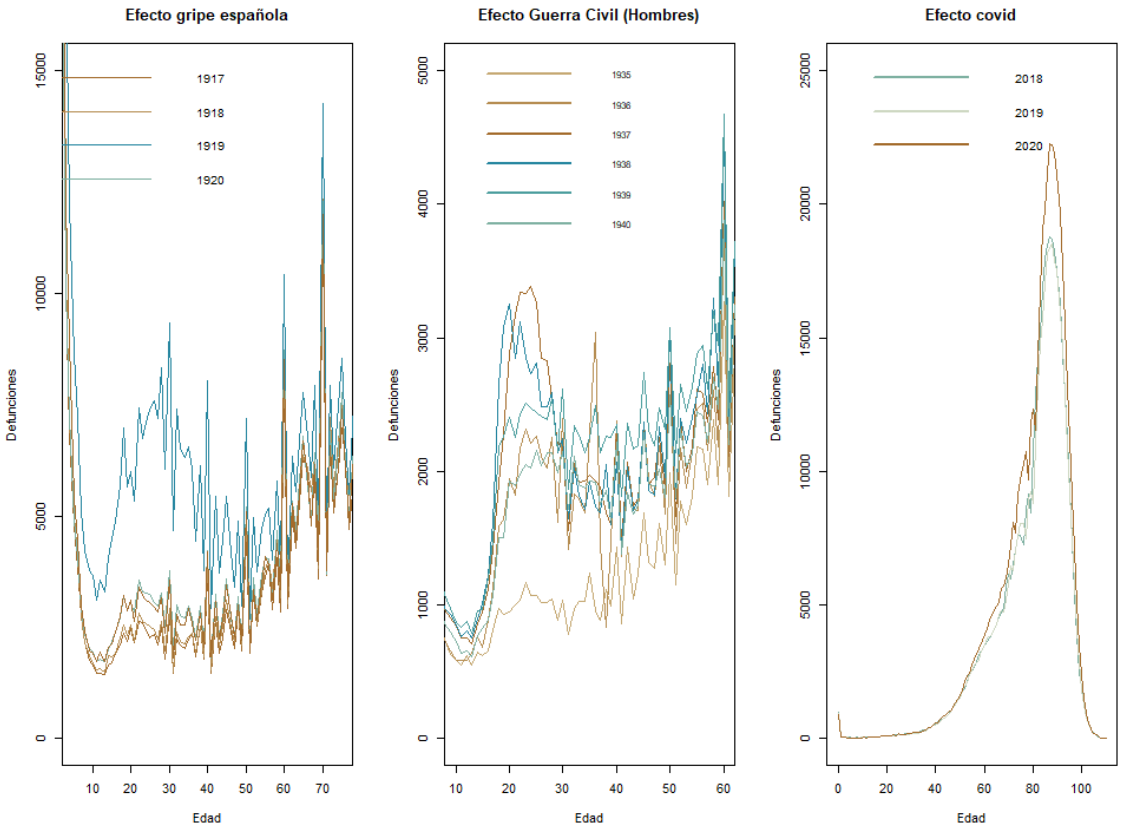
Fuente: Elaboración propia, datos HMDB

A partir de la Figura 4 se puede observar varias manifestaciones a destacar, entre ellas se observa como con el paso de los años las defunciones disminuyen para edades tempranas, y en cambio, aumentan para edades más avanzadas, siendo este cambio natural. Como ya se ha comentado, gracias a los progresos tecnológicos, higiénicos y socio-económicos la mortalidad infantil se ha visto reducida, pasando en los últimos 50 años de una tasa de mortalidad infantil de 18,89 niños por cada mil habitantes a ser actualmente de 2,59 niños, según datos del *Instituto Nacional de Estadística, INE*.

El aumento en las defunciones en edades avanzadas no es más que consecuencia de llegar a esas edades, puesto que antes las defunciones en esas edades eran menores o inexistentes debido a la falta de población de edades tan avanzadas, siendo esto el puro reflejo del aumento de la esperanza de vida.

Además, cabe destacar tres acontecimientos históricos que son observables en el gráfico anterior, para su mejor observación se aíslan los años de los sucesos y se comparan con los anteriores y posteriores.

Figura 5: Acontecimientos históricos y su repercusión en las defunciones.



Fuente: Elaboración propia, datos HMDB

Si analizamos la Figura 5 de izquierda a derecha. Encontramos en primer lugar la gripe española, teniendo su punto álgido entre 1918 y 1920, la guerra civil española del 1936 a 1939 y la pandemia del COVID-19, donde se ve el aumento de la mortalidad en el 2020 respecto de los años anteriores.

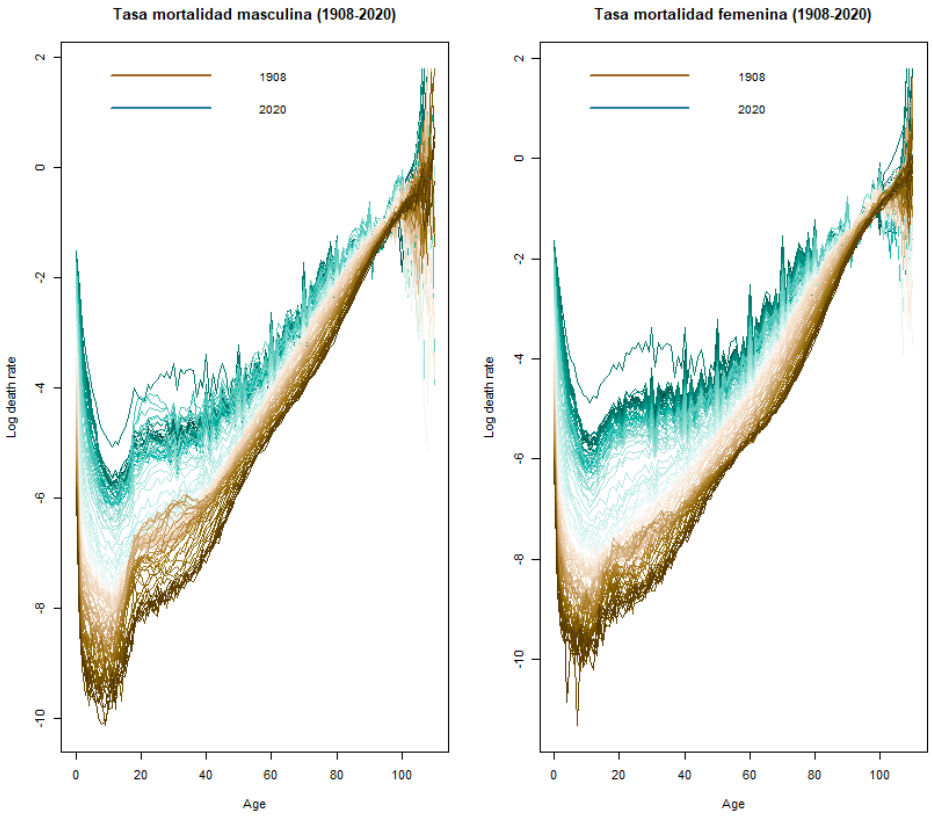
Como se puede observar el aumento de la mortalidad en la gripe española abarca todas las edades, puesto que la esperanza de vida en España en 1918 rondaba los 40 años, afectando tanto a hombres como a mujeres. En contraste encontramos las defunciones de la guerra civil española, ya que como se representa en el gráfico, afecta de manera distinta para hombres qué para mujeres, puesto que los hombres y en edades jóvenes fueron los que estuvieron en la contienda y, por tanto, es donde mayor aumento de las defunciones se observa. Y en el último de los casos, y más reciente, se encuentra la pandemia del COVID-19, donde se ve que el aumento de las defunciones es para edades más avanzadas,

debido a que era a las personas que más gravemente les afectaba, y de manera similar para hombre y mujeres.

Como se comentó con anterioridad es necesario ver la evolución de la tasa de mortalidad, puesto que será este el indicador a estimar con los distintos modelos de proyección, y como dichos modelos se realizan a través de regresiones simples y múltiples se ejecutan a través de logaritmos la tasa de mortalidad, para así obtener mayor estabilidad y disminuir las variaciones ante observaciones anómalas.

Se puede observar en la Figura 6 que la tasa de mortalidad tanto para los hombres como para las mujeres se comporta de manera muy similar, cabe destacar que se puede observar que la tasa de mortalidad en edades tempranas es menor para las mujeres. Debido a que la tasa de mortalidad, como se ha explicado anteriormente, es el cociente de las defunciones entre los expuestos, para edades muy avanzadas en las que ya no hay apenas expuestos la tasa de mortalidad no es representativa puesto que el denominador tiende a ser muy pequeño.

Figura 6: Evolución de la tasa de mortalidad logarítmica de España



Fuente: Elaboración propia, datos HMDB

Tras analizar la evolución en la tasa de mortalidad y las defunciones, enlazado a su vez a los resultados del decrecimiento de la ratio de fecundidad y el aumento de la esperanza de vida, el problema no trasciende en el resultado del envejecimiento de la población, si no en lo que esto conlleva.

La tendencia de la pirámide poblacional tiene propensión hacia una pirámide invertida, lo que supone a la larga una escasez de ingresos para financiar la vejez de los mayores, es decir, menos contribuyentes para pagar las pensiones públicas de los jubilados. Por lo que una vía de escape para mitigar la disminución de estas pensiones es el ahorro privado, puesto que los jubilados dependen de las pensiones del Estado y de los ahorros privados ya una media de 20 años.

Por tanto, la longevidad implica un aumento de la esperanza de vida, lo que conlleva para las entidades aseguradoras y los fondos de pensiones un riesgo, del cual deberán cubrirse o transferirse. Se entiende como riesgo de longevidad y/o mortalidad una desviación en la tasa de mortalidad esperada. Es decir, el riesgo de supervivencia irá estrechamente relacionado con una disminución en la tasa de mortalidad, respecto de la esperada, y, por ende, con aquellos productos que sean Seguros de Vida Ahorro y Rentas, es decir, que paguen capitales por supervivencia. Por el contrario, en caso de que la tasa de mortalidad sea mayor de la esperada aquellos pasivos que paguen capitales de fallecimiento, como Seguros de Vida Riesgo, se verán afectados por el riesgo de mortalidad.

El riesgo de longevidad tiene una gran complejidad a la hora de su correcta valoración, para ello se divide en diferentes subriesgos, siendo uno de los más relevantes el subriesgo de tendencia, siendo una mal valoración de este un engranaje desencadenante en el cambio del valor actual del pago de las anualidades. Se analizará el riesgo de la longevidad desde el punto de vista individual y desde el punto de vista agregado, también llamados respectivamente riesgos de microlongevidad y macrolongevidad por Blake et al. (2013).

El riesgo de manera individual o específico, se trata como una fluctuación aleatoria, que dependerá de la volatilidad y de la selección adversa que tiende a haber en caso de población asegurada. Además de no olvidar el efecto de la cohorte que puede hacer que una generación tenga una esperanza de vida superior o inferior a la generación posterior o anterior.

Mientras que, el riesgo agregado trata la desviación sistemática, es decir, que los crecimientos estimados de las mejoras de la esperanza de vida en la población finalmente sean mayores a los esperados. Al igual que en el riesgo mencionado anteriormente se podía diversificar, agrupando un número más amplio de individuos asegurados para paliar el efecto individual, en el caso del riesgo agregado no, formando este principalmente el riesgo de tendencia.

Para las entidades aseguradoras supone un reto cubrirse de este riesgo de tendencia, es por ello que aparecieron los instrumentos de riesgos alternativos que permiten, entre otros, cubrir o transferir el riesgo de longevidad. En los siguientes apartados de este estudio nos centraremos en aquellos instrumentos financieros, los cuales tienen flujos de caja ya sean asociados a tasas de mortalidad o a tasas de supervivencia. Se pueden encontrar distintos tipos, entre ellos los bonos y swaps de longevidad, los bonos catastróficos de mortalidad y swaps de mortalidad.

La mayoría de estos instrumentos necesitan de una estimación futura de las tasas de mortalidad para su valoración, dichas tasas de mortalidad se estiman a través de modelos estocásticos. Es a partir de los años 90 cuando se empiezan a desarrollar estos modelos de estimación y proyección, siendo el primero de ellos Lee-Carter (1992) seguido de ampliaciones a este modelo como el de Renshaw y Haberman (2003) y otros como Cairns-Blake-Dowd (2006).

3. MERCADO DE ACTIVOS DE LONGEVIDAD

Como consecuencia del aumento de la longevidad o la disminución de la tasa de mortalidad, el riesgo que corren las aseguradoras o proveedores de rentas vitalicias es que las primas acumuladas no sean suficientes para el valor actual de los pagos, por ello ante el riesgo de longevidad hay tres maneras de actuar (Blake et al, 2006), no hacer nada, cubrirse ese riesgo reasegurándolo o con valores derivados vinculados a la longevidad.

Siendo la exposición al riesgo de longevidad en el sector privado de rentas vitalicias, de manera global, cercano a 25 billones de dólares (Life and Longevity Markets Association) no sorprende las oportunidades que supone a distintos organismos un mercado de derivados de longevidad, Blake et al (2006) enumera a los interesados, que son:

- Los proveedores de pensiones y seguros de vida, para cubrir el riesgo de longevidad;
- Los fondos de cobertura y bancos de inversión como inversores, ya que estos apenas tendrán correlación con sus riesgos;
- Los especuladores para generar liquidez en los mercados;
- Y los gobiernos, puestos que estos debido a las pensiones públicas también están expuestos al riesgo de longevidad.

Como se observa en el mercado de riesgos de longevidad hay más interesados que quieren vender su riesgo de los que están dispuesto a comprarlo, por lo que, en retrospectiva la única vía posible de cubrirse del riesgo de longevidad era el reaseguro, y de manera limitada, aunque sufrió un significativo aumento de la demanda como consecuencia de aplicar el marco normativo de Solvencia II. Como se ha comentado en partes anteriores el riesgo de longevidad no es diversificable, por lo que muchas aseguradoras limitan su capacidad ante este riesgo. Como resultado, a principio de los 2000 empiezan los primeros derivados de longevidad.

De los primeros derivados en el mercado financiero que se encontraron fue el bono de longevidad del BNP (Ruiz, F., 2016), bono que basaba el pago de cupones en el número de supervivientes de una cohorte de referencia, en este caso los hombres británicos de 65

años. También se pueden encontrar en la categoría over-the-counter los swaps de longevidad, siendo estos un intercambio de flujos vinculados al número de sobrevivientes de una determinada edad y el número esperado establecido con anterioridad

Los métodos tradicionales no tienen la capacidad de mitigar el riesgo de longevidad ni un 1%, es por ello, y porque dichas transferencias alternativas de riesgos no estén relacionadas con los riesgos macroeconómicos lo que hace que sean tan atractivas, tanto para los fondos de pensiones y las aseguradoras, y sea también motivo de estudio.

3.1. Categorías

La solución tradicional para cubrirse del riesgo de longevidad es a través del seguro o reaseguro de dicho riesgo, pero las aseguradoras pueden transferir ese riesgo también a través del mercado de capitales.

Esta nueva configuración a la hora de conferir la exposición al riesgo de longevidad, se puede ir dividiendo en subgrupos cada vez menores. siendo el principal de estos el mercado de capitales de activos vinculados a la longevidad, nombrado comúnmente como LLA, por sus siglas en inglés provenientes de *longevity-linked assets (*Menoncin, F. y Regis, L., 2017), integrados a su vez en los valores vinculados a seguros, o ILS proveniente de *Insurance-linked security.* Además, dentro de estos valores destacamos los instrumentos vinculados a la variación en índices de supervivencia o mortalidad, los MLS o *Mortality Linked Securities,* que se encuentran dentro de los instrumentos alternativos de transferencia de riesgo.

Debido a que el fallecimiento es complementario a la supervivencia, no se puede hablar únicamente de activos vinculados a la longevidad o la mortalidad sin mencionar a los otros, por tanto, se expondrán los activos que sobresalen en el mercado de capitales para la posterior valoración únicamente del swap de longevidad.

Swaps de longevidad

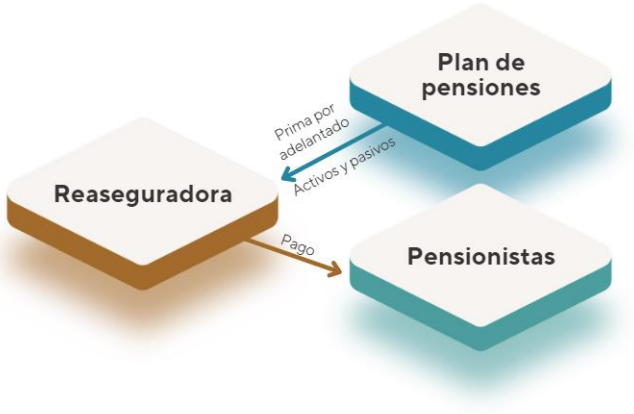
Los swaps de longevidad, sirven como cobertura del riesgo de longevidad en caso de supervivencia de los asegurados en las rentas vitalicias o planes de pensiones. Supone un intercambio de flujos fijos previamente acordados por unos flujos variables vinculados a la tasa de mortalidad de referencia o acordada, en el cual no se transfieren los activos, por

lo que es la entidad aseguradora quien tiene la obligación de pagar los pagos futuros a los asegurados. Puesto que el swap de longevidad es parte del caso práctico se explicará con mayor detalle en los siguientes apartados.

Buy-outs de pensiones

Es un tipo de intercambio financiero para así cubrir el riesgo de longevidad, en el que el propio fondo de pensiones paga un importe fijo para ceder el pasivo relacionado con ese fondo, así pues, la otra parte recibe el importe fijo a cambio de cumplir con los pasivos de ese fondo. Debido a que se trata de un fondo de pensiones el importe de los pagos futuros no se conocen en el momento de la transacción, puesto que, dependerán de la supervivencia de los pensionistas del fondo, siendo la Figura 7 el esquema aclarativo a esta definición.

Figura 7: Esquema del Buy-outs de pensiones

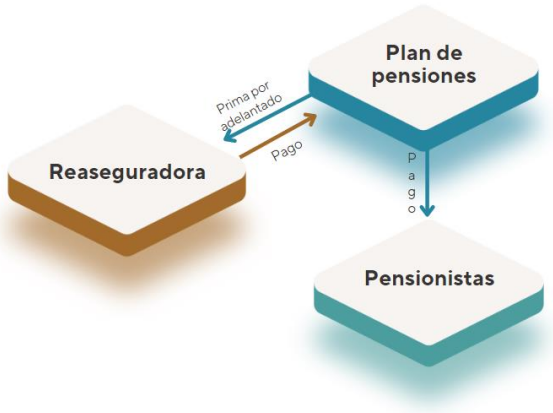


Fuente: Elaboración propia

Buy-ins de pensiones

Como puede observarse en la Figura 8 la gran diferencia de esta metodología de traspaso del riesgo de longevidad de las pensiones, es que el intercambio en este caso es de los pasivos exactos a los que deberá hacer frente el fondo de pensiones, pero manteniendo el fondo de pensiones, así como la relación del fondo con los afiliados a este.

Figura 8: Esquema del Buy-ins de pensiones

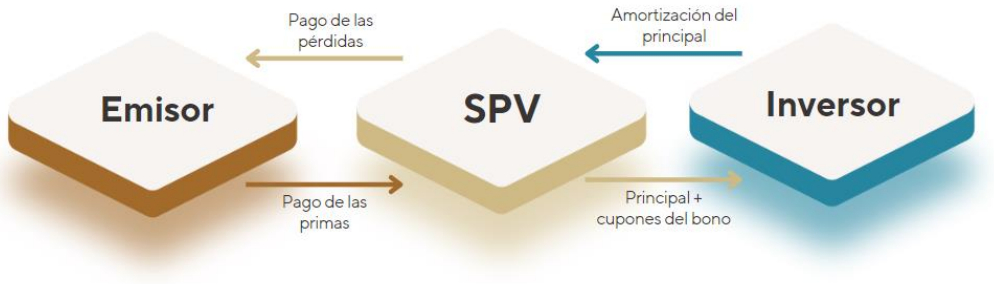


Fuente: Elaboración propia

CATM: Bonos catastróficos de mortalidad

Los bonos catastróficos son titulizaciones donde el cupón está vinculado a la tasa de mortalidad, por lo que si ocurre la catástrofe habría una perdida parcial o total, puesto que el valor de reembolso sería cero, mientras que si no ocurre la catástrofe los inversores ganan un alto rendimiento. Como se puede ver en la Figura 9, el encargado de realizar las adquisiciones de los activos y transferiros es el vehículo de propósito especial, mayormente conocido por sus siglas en inglés como SPV, *Special Purpose Vehicle*. Las limitaciones que tiene este activo es que son instrumentos complejos y costosos.

Figura 9: Esquema de los bonos catastróficos



Fuente: Elaboración propia

Bonos de longevidad

Son instrumentos que se negocian en el mercado de capitales cuyo pago se referencia a la tasa de mortalidad, supervivencia o al porcentaje de sobrevivientes de una población

determinada o de referencia. Estos pagos son flotantes y regulares de misma duración que la población determinada, el cual en el momento del vencimiento el valor del nominal será cero, puesto que no quedarán sobrevivientes de la población elegida. Por lo que se atisbe que estos cupones serán decrecientes ya que se desarrollan a la vez que la tasa de mortalidad o supervivencia. En los momentos en que la mortalidad sea inferior a la esperada o en el caso de la supervivencia mayor, el bono paga cupones más altos para así compensar esa variación, protegiéndose así las compañías aseguradoras ante aumentos inesperados de la vida de los asegurados.

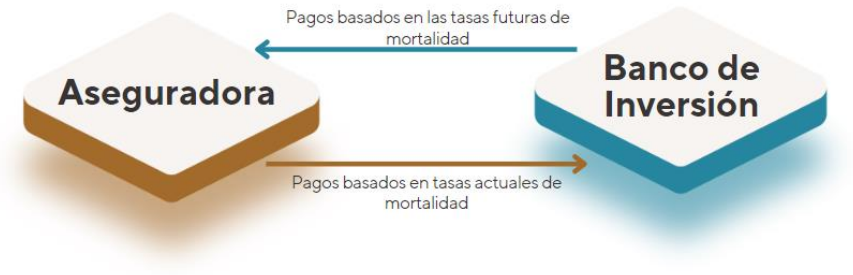
Existen varios tipos de bono de longevidad, entre ellos se encontran:

- Longevity Zeros: Bonos cupón cero, realizan un pago único y sirve para crear coberturas a medida
- Survivors Bonds: Bonos diferidos, ya que se excluyen los años de certidumbre y cubre las edades avanzadas, hasta el fallecimiento del último individuo de la población seleccionada.
- Collateralized longevity obligations (CLO): Cada tramo tiene una exposición distinta al riesgo
- Principal at risk: se paga unos cupones periódicos fijos o variables, con la diferencia de que el nominal se paga si hay ocurrencia de un determinado índice de mortalidad, mientras que si es mayor la perdida será de la diferencia.
- Inverse longevity bonds: Como indica su nombre son inversos a los bonos de longevidad, por lo que el pago de los cupones serán crecientes
- Bonos convertibles de longevidad: Son bonos de longevidad donde el tenedor los podrá convertir en acciones.

Q-forwards y S-forwards

Es un contrato forward ligado a la tasa de mortalidad, denotado como q, de ahí su nombre, el cual es creado por un banco de inversiones y supone un intercambio de pagos futuros que están unidos a las variaciones en dicha tasa de mortalidad, como se puede observar en la Figura 10, acordado previamente la población determinada y la fecha de vencimiento, cubriendo así tanto las subidas como las bajadas en la tasa de mortalidad, además el inversor solicita una prima por asumir dicho riesgo.

Figura 10: Esquema de los q-forwards



Fuente: Elaboración propia

Los q-forward, como indica su nombre, son futuros vinculados a *q*, es decir a la tasa de mortalidad, siendo este el instrumento más sencillo para cubrir el riesgo de longevidad, puesto que es un contrato a un tipo fijo de la tasa de mortalidad, *q*.

El primer instrumento de este tipo que se negoció en el mercado de capitales fue en el 2008 de la mano de la empresa Lucida, donde dicho q-forward estaba vinculado al índice de la tasa de mortalidad de los hombres ingleses y de Gales para distintos rangos de edad. Siendo JP Morgan el encargado de cubrir el riesgo de longevidad y de nuevo ponerlo en conocimiento de los inversores.

Si el q-forward tiene un precio correcto, en el caso inicial no habría ningún intercambio de capitales, mientras que en el momento del vencimiento una de las dos partes haría el pago total, salvo que la tasa de mortalidad entre el momento inicial y el momento del vencimiento no hubiera sufrido variación alguna, por lo que el pago en el vencimiento es la diferencia entre las tasas de mortalidad, es decir, la tasa de mortalidad fijada como referencia y tasa de mortalidad final. Si finalmente la tasa de mortalidad es inferior a la prevista, lo que implica una mayor supervivencia de los individuos, y, por consiguiente, mayor pasivo en los planes de pensiones, este aumento del pasivo se vería recompensado con el q-forward. Y si por el contrario la tasa de mortalidad es mayor a la esperada, supone una disminución de los pasivos el intercambio sería negativo, siendo el fondo de pensiones quien tuviera que pagar esa disminución de sus pasivos al proveedor de la cobertura.

3.2. Bonos de longevidad

Los primeros activos en el mercado de capitales basados en soluciones alternativas a la cobertura del riesgo de longevidad implicando la titulización, es decir, la emisión de los bonos de longevidad, siendo estos los instrumentos más básicos para cubrir dicho riesgo. La Figura 11 explica de manera esquemática el funcionamiento de dicho activo, además dichos instrumentos financieros se consideran de deuda con vencimientos aleatorios o estocásticos en los que el flujo de caja futuro depende del principal o cupones ligados a la supervivencia o mortalidad lograda en una población o cohorte de nacimiento de referencia (Blake et al, 2006).

Figura 11: Esquema de los bonos de longevidad

Fuente: Elaboración propia

3.2.1. Mercado

El primer bono de longevidad que se realizo fue en 2004 de la mano del BNP Paribas, el cual estaba dirigido mayoritariamente a proveedores de rentas vitalicias y fondos de pensiones. Fue el EIB, o Banco Europeo de Inversiones el que lo puso en el mercado, de la mano de Partner Re que fue la reaseguradora, la que cubrió el riesgo de longevidad. Solo un año después, en 2005 se amortizó parcialmente para su rediseño, entre las características que destacaban estaba el vencimiento a 25 años, un cupón inicial de 50 millones de libras y el tamaño de la emisión de 540 millones de libras. Además, cabe

destacar que el pago del cupón era flotante, asociada al índice de supervivencia de la cohorte de hombres de Inglaterra y Gales que tenían en el año 2003 sesenta y cinco años.

Más tarde, en el 2010, SwissRe emitió un bono con vencimiento a 8 años vinculado a la longevidad, se realizó a través de Kortis Capital, lo que dio el nombre al bono, conociéndosele como el bono Kortis, con sede en las Islas Caimán, se emitió con un valor de nominal de 50 millones de dólares, únicamente para cubrir el propio riesgo de longevidad de SwissRe, en la Tabla 1 se puede observar las características mencionadas, además de ver que es el único bono de longevidad activo en el mercado.

Tabla 1: Tabla resumen de los bonos de longevidad en el mercado

Emisor	Cedente	Cobertura	Tamaño	Fecha
Kortis Capital Ltd.	Swiss Re	Riesgo de longevidad	$50m	Diciembre 2010

Fuente: Artemis

La importancia que reside en el bono de Kortis es que fue el primer prototipo de bonos de longevidad que no iba vinculado a la tasa de mortalidad, si no a las mejoras en la mortalidad de diferentes poblaciones

Los cupones que daba el bono de Kortis tenían periodicidad trimestral y equivalían al LIBOR a 3 meses más un diferencial. Este bono estaba determinado a su vencimiento por la diferencia entre la tasa de mortalidad de los hombres de Inglaterra y gales entre 75 y 85 años, durante los 8 años del plazo del bono, y la tasa de mortalidad, en el mismo espacio de tiempo, de los hombres estadounidenses de 55 a 65 años. Además, este bono tenía la opción de prorrogar su vencimiento hasta julio de 2019, también contaba con un punto de agotamiento que se encontraba en el 3,9%, del LDIV o Valor del Índice de Divergencia de Longevidad, es decir, en caso de contacto con el punto de agotamiento no habría devolución de principal del bono. El LDIV se calcula como la diferencia de los índices de mejora de la mortalidad, es decir de los hombres de Gales e Inglaterra entre 75 y 85 años y los hombres estadounidenses de entre 55 y 65 años.

3.2.2. Mecánica y metodología del producto

La mecánica de dicho producto se diseñó para cubrir el riesgo de longevidad de dos países, pero aun así se debe tener en cuenta que existe un riesgo de base entre las

poblaciones, como podría ser el estilo de vida y los sistemas médicos, y la estacionalidad de las edades.

Un bono diseñado para cubrir las divergencias entre la longevidad, y por ende las tasas de mortalidad, entre las dos poblaciones y cubrir parcialmente el riesgo de base, debe construirse al rededor del Valor del índice de variación de longevidad, conocido por sus siglas en inglés, *Longevity Divergence Index Value*, LDIV. Para poder obtener el LDIV es necesario realizar dos pasos primeramente.

El primero de los pasos es cálculo de la mejora, que se expresa como:

$$Mejora_n^p(x,t) = 1 - \left[\frac{m_{x,t}^p}{m_{x,t-n}^p}\right]^{\frac{1}{n}}$$

Donde;

- $m_{x,t}^p$: es la tasa bruta de mortalidad a la edad *x* en año *t* para la población *p.*
- n: es el periodo promedio, que puede estar ya dictaminado.

En segundo lugar, hay que calcular el índice de mejora, para cada periodo de tiempo y cada población usada, a través de la siguiente expresión:

$$Indice(t,p) = \frac{1}{x_2 - x_1 + 1}\sum_{x_1}^{x_2} Mejora_n^p(x,t)$$

Donde este índice representa la tasa media de mejora entre las edades x_1 y x_2 en un periodo *n* de la población *p.* Finalmente se calcula el LDIV como:

$$LDIV(t) = Indice(t,p_1) - Indice(t,p_2)$$

Además, dichos bonos pueden tener una reducción principal del factor, conocido por sus siglas en inglés como PRF, el cual se calcula como:

$$PRF = max\left(min\left(\frac{LDIV(t) - punto\ de\ fijacion}{punto\ de\ agotamiento - punto\ de\ fijacion}; 1\right); 0\right)$$

Donde;

- $punto\ de\ agotamiento$: porcentaje de pérdidas contractualmente definido por encima del cual las pérdidas afectan al producto.

- $punto\ de\ fijacion$: porcentaje de pérdidas contractualmente definido por encima del cual las pérdidas dejan de afectar al producto

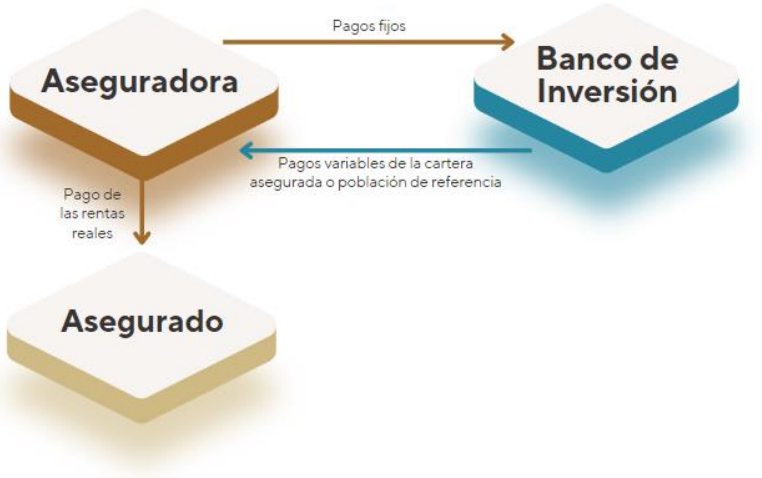
Por lo que se puede observar de las expresiones anteriores, en caso de que la tasa de mejora de la población p_1 sea mayor que la tasa de mejora de la población p_2 la responsabilidad del emisor del bono se reducirá. Siendo la finalidad de esta tipología cubrir el riesgo de cola de cara a Solvencia II.

3.3. Swaps de longevidad

Este tipo de contrato, los swaps de longevidad, sirven como cobertura del riesgo de longevidad en caso de supervivencia de los asegurados en las rentas vitalicias o planes de pensiones. Bajo este contrato se realiza un intercambio de flujos de pagos en diferente momento de tiempo, siendo la entidad aseguradora quien paga una cantidad o prima fija al proveedor del swap, más una prima por hacerse cargo del riesgo de longevidad, todo esto a cambio del pago de importes ligados a la tasa de supervivencia de una población determinada o de la cartera asegurada. Aun así, quien tiene la obligación de pagar los pagos futuros a los asegurados sigue siendo la entidad aseguradora.

En conclusión, como se puede ver en la Figura 12, la aseguradora se intercambia con el proveedor del swap unos flujos de pagos esperados a cambio de los flujos reales con la finalidad de no incurrir la aseguradora en más pasivos de los esperados y así realiza el pagó teórico que había contemplado desde un principio, pudiendo así controlar su perfil de riesgo.

Figura 12: Esquema de los swaps de longevidad



Fuente: Elaboración propia

La manera de realizar los pagos variables, por norma general, tienen dos estructuras distintas, pudiendo ser en forma de indemnización total, donde estos pagos variables se realizan a través de la cartera real de asegurados, tomando de esta cartera la tasa de mortalidad, o de forma paramétrica, siendo en este caso la población de referencia no coincidente con la cartera asegurada, por lo que se la aseguradora se hace cargo del riesgo entre las variaciones de la cartera asegurada y la población observada, entendiéndose este riesgo como residual. La primera de las estructuras de pago variable, es decir, la modalidad de indemnización, es la más utilizada en este caso de instrumentos. Principalmente se realiza esta modalidad por consecuencia de la normativa de Solvencia II, ya que pone de manifiesto como recomendación que no se debe tener riesgo de crédito originario de estos tipos de contratos.

Además de las dos tipologías mencionadas anteriormente, respecto del grupo de personas a que está vinculado como población de referencia, también se pueden encontrar contratos de swaps de mortalidad, es decir, vinculados a las defunciones de la población de referencia. Se hayan distintas variantes dentro de los swaps, tanto de mortalidad como de longevidad, como por ejemplo los swaps simples, los cuales se definen como un intercambio de pagos vinculados a la población de referencia real y la estimada; swaps vanilla, siendo esta modalidad la más utilizada para casar los pasivos de las aseguradoras, puesto que se realizan los intercambios de pago de manera periódica hasta la fecha de vencimiento; los swaps cupón cero, en los cuales solo hay un intercambio de un pago preestablecido en el momento actual por otro futuro que dependerá de la tasa de longevidad; los swaps variable-variable, en la que como indica su nombre el intercambio

de los pagos serán ambos variables; además de encontrar muchos otros donde se intercambian con distinta divisa o con índices no vinculados a la longevidad.

Se debe de tener en cuenta que en los swaps de longevidad no hay traspaso o transferencia de los activos, por lo que las entidades solo se cubrirían de los riesgos demográficos pero la administración de los activos y la cartera sigue perteneciendo a la entidad, por lo que el riesgo de mercado y de default, entre otros, sigue cayendo sobre la entidad.

3.3.1. Mercado

En el caso de los swaps de longevidad están basados en los mercados de capital, el primero de ellos tuvo lugar en julio del 2008. El intercambio tuvo lugar entre JPMorgan y Canada Life en el Reino Unido. Este contrato tuvo unas características muy específicas, puesto que el vencimiento era a 40 años con un valor de 500 millones de libras donde el swap estaba directamente vinculado con la tasa de mortalidad actual de los 125.000 asegurados que tenía Canada Life, y es JP Morgan quien puso en mano de los inversores el riesgo de longevidad.

En el caso del swap mencionado anteriormente hay que tener en cuenta que se trata de un swap personalizado, ya que este cubría la experiencia real de mortalidad de la cartera específica. Dichos swaps personalizados son difíciles de valorar y más ilíquidos que aquellos que están basados en índices, es decir, aquellos basados en poblaciones de referencia. Mientras que la mayoría de los swaps de longevidad que se negocian en el mercado se basan en estos índices, en Reino Unido los más utilizados hasta el momento son los swaps personalizados. En la Tabla 2 se puede observar algunos de los swaps de longevidad que están activos en el mercado, expuesto de manera cronológica descendente.

Tabla 2: Tabla resumen de los swaps de longevidad en el mercado

Emisor	Cedente	Cobertura	Tamaño	Fecha
Lloyds Banking Group pension schemes	Scottish Widows / SCOR	Swap de longevidad	£5.5 billones	Febrero 2022
Unnamed UK pension	Zurich / Metlife	Swap de longevidad	$3.5 billones	Diciembre 2021
ICL Group Pension Plan (Fujitsu)	Swiss Re	Swap de longevidad	£3.7 billones	Mayo 2021
AXA UK Pension Scheme	Hannover Re	Swap de longevidad	£3 billones	Marzo 2021
BBC Pension Scheme	Zurich / Canada Life Re	Swap de longevidad	£3 billion	Diciembre 2020
…	…	…	…	…
Babcock	Credit Suisse	Swap de longevidad	£500 millones	Mayo 2009
Canada Life (UK arm)	JP Morgan	Swap de longevidad	£500 millones	Septiembre 2008

Fuente: Artemis

3.3.2. Mecánica y metodología del producto

Es necesario saber que la valoración de un swap se realiza como una cartera de q-forward, por tanto, se explicará la metodología de valoración del q-forward para así realizar la del swap de longevidad.

Los q-forward es el tipo más sencillo de derivado de longevidad, y es por eso que son tan importantes, ya que a razón de los q-forward se derivan otros activos vinculados con la longevidad o mortalidad más complejos. En particular, una cartera de q-forward se puede utilizar, por ejemplo, para cubrir el riesgo de longevidad de un plan de pensiones.

El contrato consiste en el intercambio de flujos asociados a una tasa de mortalidad fija predeterminada a cambio de flujos asociados a la tasa de mortalidad real que es variable. Consiguiéndose así una estabilización en el valor de las pensiones futuras si se tratará de un plan de pensiones. Según se acerque la fecha de vencimiento el valor de la cartera aumentará, debido al acercamiento de la tasa de mortalidad al horizonte fijado.

La manera de valorar el swap de longevidad consistirá en calcular el rendimiento esperado correspondiente al coste de cobertura. El cálculo de este rendimiento o margen se basa en el cálculo del *spread* como la diferencia entre la tasa de referencia en el momento inicial y la mejor estimación de la tasa de mortalidad, a través de los modelos estocásticos, en el mismo momento.

3.4 Perspectiva futura del mercado de longevidad

Según Willis Tower Watson, WTW, prevé un aumento del mercado de transferencia de riesgos de longevidad (Steven Evens, 2022), a través mayoritariamente de swaps de longevidad. Siendo en Reino Unido alrededor de un volumen de 65 mil millones de libra de acuerdos en planes de pensiones, sufriendo un aumento aproximado de 52,3 mil millones de libras respecto del 2021. Además, WTW sugiere que los intercambios de riesgo de longevidad podrían haber alcanzado los 20 mil millones de libras en 2021, indicando esto el gran volumen de intercambios en acuerdos privados.

Los precios de las aseguradoras volvieron a ser competitivos tras un mal empiece del año 2021, mayoritariamente debido a poder reducir el riesgo de los pasivos en el mercado de seguros. "*Los precios consistentemente buenos que estamos viendo para los clientes se han debido en gran medida al aumento de las asignaciones a activos ilíquidos en las estrategias de inversión de las aseguradoras, pero también a una mejor fijación de precios de longevidad en el mercado de reaseguros. Este año también ha habido mucha innovación en el mercado, incluido el primer canje de longevidad para cubrir a los miembros predominantemente diferidos*.", exponía Sadie Scaife, Directora Senior de Transacciones de WTW

Según una investigación realizada por WTW es cercano a un tercio las entidades de planes de pensiones que se plantean reducir el riesgo de longevidad en los próximos tres años. En el año actual se espera un pico en la demanda de estos por tres razones principales.

Primeramente, por la competitividad de los precios en el mercado, seguido de la competitividad entre las empresas de seguros y reaseguros y por el efecto de la pandemia. Por estas razones se espera que la tendencia de las compras, a medida que se asiente la confianza y se confeccione los productos, continúe o sea creciente. WTW dice que *"también se verán nuevas formas e innovadoras de asignar capital al mercado de pensiones, incluido el crecimiento de ofertas de capital a terceros"*.

4. MODELOS DE MORTALIDAD ESTOCÁSTICA

En este apartado se expondrán los distintos modelos de mortalidad estocástica. Se explicarán y detallarán en profundidad 6 modelos, de entre todos los que hay. Todos los modelos mencionados a continuación parten de que el número de fallecidos sigue una distribución de *Poisson*, además de seguir todos con la misma notación para un claro seguimiento, siendo la siguiente:

- Tasa central de mortalidad: Es la proporción de defunciones a la edad *x* en el año *t* respecto de la población media de mismas características.

$$m(x,t) = \frac{D(x,t)}{E(x,t)} = \frac{Defunciones\ a\ la\ edad\ x\ en\ el\ año\ t}{Población\ media\ con\ edad\ c\ en\ el\ año\ t}$$

- Se entiende por *t*, al año de calendario entre *t* y *t+1*
- $q(x,t)$: siendo la probabilidad de fallecimiento a la edad x en el año t
- $D(x,t)$: es el número de muertes a la edad x en el año t
- $E(x,t)$: es la población, o también llamados Expuestos, a la edad x en el año t

No todos los modelos a pronosticar se plantean en términos de la tasa central de mortalidad, se plantean también en términos de probabilidad de fallecimiento, por lo que para poder hacer una correcta comparación primeramente hay que hacer una homogeneización entre la tasa de mortalidad y la probabilidad de fallecimiento. Se realiza la siguiente transformación, por la que ya se podrán comparar a partir de la verosimilitud de los modelos estimados:

$$m(x,t) = -\ln[1 - q(x,t)]$$

Los modelos que se van a tratar emplean principalmente tres efectos:

- Efecto edad, β_x
- Efecto periodo, κ_t
- Efecto cohorte, γ_c

A continuación, antes de la explicación detallada de cada modelo mortalidad estocástica y con el objetivo de una mejor comprensión se incluye una tabla que recoge todos los

modelos que se tratarán a continuación y todas sus respectivas ecuaciones para la estimación de $m_{x,t}$:

Tabla 3: Tabla resumen de los modelos estocásticos

EXPRESIONES DE LOS MODELOS	
Lee-Carter (LC)	$ln(m_{x,t}) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} * k_t^{(2)} + \varepsilon_{x,t}$
Renshaw y Haberman (RH)	$ln(m_{x,t}) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} * k_t^{(2)} + \beta_x^{(3)} * \gamma_{t-x}^{(3)} + \varepsilon_{x,t}$
Age-Period-Cohort (APC)	$ln(m_{x,t}) = \beta_x^{(1)} + k_t^{(2)} + \gamma_{t-x}^{(3)} + \varepsilon_{x,t}$
Cairns-Blake-Dowd (CBD)	$logit(m_{x,t}) = \beta_x^{(1)} * k_t^{(1)} + \beta_x^{(2)} * k_t^{(2)} + \varepsilon_{x,t}$
CBD con efecto cohorte (M6)	$logit(m_{x,t}) = \beta_x^{(1)} * k_t^{(1)} + \beta_x^{(2)} * k_t^{(2)} + \beta_x^{(3)} * \gamma_{t-x}^{(3)} + \varepsilon_{x,t}$
CBD con efecto cohorte y componente cuadráticos (M7)	$\ln(m_{x,t}) = \alpha_x + k_t^{(1)} + (x - \overline{x}) * k_t^{(2)} + (x - \overline{x})^+ * k_t^{(3)} + \gamma_{t-x}^{(4)} + \varepsilon_{x,t}$

4.1. Modelo de Lee-Carter (LC)

Es el modelo más utilizado para las proyecciones de mortalidad, el modelo Lee-Carter (Lee y Carter, 1992) se usa para predecir la tasa de mortalidad, siguiendo la siguiente expresión:

$$ln(m_{x,t}) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \cdot k_t^{(2)} + \varepsilon_{x,t}$$

Donde:

- $m_{x,t}$: es la tasa de mortalidad, que se ha definido anteriormente, que corresponde a la edad x y al periodo o cohorte t
- $\beta_x^{(1)}$: es el efecto de la edad, y es un parámetro que indica cual es el patrón de mortalidad para cada edad x, y por ende no depende del periodo t
- $\beta_x^{(2)}$: recoge la velocidad del cambio de la fuerza en la mortalidad para cada edad, es decir, se basa en la tendencia global de la mortalidad para recoger la desviación producida por un cambio de la mortalidad en cada edad
- $k_t^{(2)}$: es el que recoge el efecto tiempo, es decir, representa la tendencia temporal de la mortalidad en escala logarítmica tal y como ha venido recogiéndose a lo largo del estudio.

- $\varepsilon_{x,t}$: Recoge todos aquellos aspectos que el modelo no es capaz de capturar, y representa el error estándar o residuos de media 0 y desviación típica σ_{ε}^{2}.

Este modelo estima unas betas constantes, que no se ajusta correctamente a los datos observados, pero que está bien diseñado para la estimación de tasas de mortalidad futuras. Para poder estimar dichos parámetros es necesario determinar anticipadamente unas restricciones para estos. Puesto que si no se podrían obtener el mismo resultado de la variable estimada a través de distintos valores de los parámetros.

$$\ln(m_{x,t}) = \tilde{\beta}_x^{(1)} + \tilde{\beta}_x^{(2)} \cdot \tilde{k}_t^{(2)} + \varepsilon_{x,t}$$

Siendo ahora:

$$\tilde{\beta}_x^{(1)} = \beta_x^{(1)} + b \cdot \beta_x^{(2)}$$

$$\tilde{\beta}_x^{(2)} = \beta_x^{(2)} / a$$

$$\tilde{k}_t^{(2)} = a \cdot \left(k_t^{(2)} - b\right)$$

Además de añadir otras dos restricciones:

$$\sum_t \beta_t^{(2)} = 1$$

$$\sum_t k_t^{(2)} = 0$$

La primera de las dos restricciones implica que el estimador es aproximadamente igual a la media sobre t de $\ln(m_{x,t})$ para cada edad. Mientras que la segunda de las restricciones sugiere que el efecto de la variable incluida en el análisis como explicativa, $\beta_x^{(1)}$se reparte a lo largo de la estructura de edades.

Una vez estimados los valores del efecto tiempo, k_t, y basándonos en que tanto la mortalidad como la tendencia de mortalidad pueden ser tratadas como un proceso casual, y por tanto estocástico, es de coherencia utilizar un modelo estocástico para predecir valores futuros y así de esa forma poder calibrar también un estrés de tendencia para el riesgo de longevidad.

Aunque posteriormente a este trabajo han sido realizadas aportaciones y modificaciones al método, este modelo siempre ha tenido una gran acogida en el mundo actuarial debido

a la fácil interpretación de los parámetros y su sobriedad. Y desde su publicación en 1992 hasta hoy en día existen una gran cantidad de documentos que exponen ideas de mejora, como, por ejemplo, la de Wilmoth en 1993, o la de Li y Lee en 2005 entre muchas otras más.

4.2. Modelo de Renshaw y Haberman (RH)

La idea fundamental del modelo que se trata a continuación conocido como RH o modelo de Renshaw y Haberman (2006) consiste en realizar una ampliación del modelo de Lee-Carter o LC, pero con una variación que consiste en introducir el efecto de la cohorte para la estimación de la tasa central de mortalidad.

Haciendo referencia a la variación anteriormente nombrada, no cabe extrañar la referencia realizada por muchos autores como el modelo de "Lee-Carter con efecto cohorte" La expresión de este modelo es la siguiente:

$$ln(m_{x,t}) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \cdot k_t^{(2)} + \beta_x^{(3)} \cdot \gamma_{t-x}^{(3)} + \varepsilon_{x,t}$$

En la expresión de este modelo puede observarse la diferencia con el modelo de Lee-Carter, es decir, la introducción de dos nuevos parámetros que no se incluían anteriormente y que, por lo tanto, se puede considerar como un caso particular de este modelo cuando estos nuevos parámetros son nulos, siendo estos dos parámetros:

- $\beta_x^{(3)}$: representa las desviaciones de la edad en función del efecto global de la cohorte $t - x$.
- $\gamma_{t-x}^{(3)}$: representa el efecto global que tiene la cohorte $t - x$ sobre la mortalidad.

Al igual que en LC, de manera general, la estimación de este modelo se realiza asumiendo una distribución de *Poisson* para los fallecimientos usando una función link logarítmica para el tanto central de la mortalidad. Además de encontrar los mismos problemas que se encuentran en cuanto a la identificabilidad, pero al tener dos nuevos parámetros debemos añadir dos nuevas restricciones a las dos que ya teníamos anteriormente, quedando en conclusión las siguientes restricciones:

$$\sum_t \beta_x^{(2)} = 1$$

$$\sum_t k_t^{(2)} = 0$$

$$\sum_t \gamma_{t-x}^{(3)} = 0$$

$$\sum_t \beta_x^{(3)} = 1$$

Para poder interpretar estas restricciones se debe seguir la misma línea que en el modelo de Lee-Carter, las restricciones $\sum_t \beta_x^{(2)} = 1$ y $\sum_t \gamma_{t-x}^{(3)} = 0$ lo que consiguen con respecto al modelo de LC es que ahora los correspondientes estimadores sean igual a la media de $ln(m_{x,t})$, y las restricciones $\sum_t k_t^{(2)} = 0$ y $\sum_t \beta_x^{(3)} = 1$ tienen una función similar al de la segunda restricción de LC, es decir, se crean con la finalidad de que la variable $\beta_x^{(1)}$ se distribuya por edades.

Por lo tanto, teniendo en cuenta la cuarta restricción, $\sum_t \beta_x^{(3)} = 1$, es bastante frecuente encontrar expresada la ecuación final de este modelo de la siguiente forma:

$$ln(m_{x,t}) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \cdot k_t^{(2)} + \gamma_{t-x}^{(3)} + \varepsilon_{x,t}$$

4.3. Modelo de Age-Period-Cohort (APC)

El siguiente modelo, conocido como Age-Period-Cohort (Currie ID, 2013), o APC, que en español sería Edad-Periodo y Cohorte, EPC, fue introducido en 2006 por Currie y es una forma más simple del modelo anterior, RH, ya que toma $\beta_x^{(2)} = \beta_x^{(3)} = 1$.

Por lo tanto, la expresión este modelo quedaría de la siguiente forma:

$$ln(m_{x,t}) = \beta_x^{(1)} + k_t^{(2)} + \gamma_{t-x}^{(3)} + \varepsilon_{x,t}$$

Podría decirse, que tanto incluir el efecto del año del nacimiento como la extensión de los modelos AP, edad-periodo, y AC, edad-cohorte, constituiría la evolución natural de los modelos dinámicos. Además, añadir que el modelo APC, han mostrado muy buenos resultados en diferentes campos, destacando la medicina y la demografía.

El autor utilizó la técnica de P-Splines para poder estimar $\beta_x^{(1)}$ y $k_t^{(2)}$, a su vez el uso de $\gamma_{t-x}^{(3)}$ garantiza el suavizado de dichas estimaciones. Pero al igual que en casos anteriores se deben imponer unas restricciones sobre los parámetros de forma que:

$$\sum_t k_t^{(2)} = 0$$

$$\sum_t \gamma_{t-x}^{(3)} = 0$$

Sin embargo, para este modelo ha sido necesario introducir una restricción adicional con un nuevo parámetro, δ. La introducción de este parámetro se debe a que las dos restricciones anteriores no sufrían ningún cambio, es decir, permanecían invariantes ante el siguiente suceso conjunto:

- Si a $\gamma_{t-x}^{(3)}$ se le sumaba una cantidad $\delta\left[\left(t-\bar{t}\right)-\left(x-\bar{x}\right)\right]$.
- Si a $k_t^{(2)}$ se le restaba una cantidad $\delta\left[\left(t-\bar{t}\right)\right]$.
- Si a $\beta_x^{(1)}$se le sumaba una cantidad $\delta[(x-\bar{x})]$.

Por lo tanto, al introducir el nuevo valor δ con el objetivo de sortear ese inconveniente, se llega tras un proceso de minimización a la obtención del valor de δ que sería el siguiente indicado:

$$\delta = -\frac{\sum_x (x-\bar{x}) \cdot \left(\beta_x^{(1)} - \overline{\beta}_x^{(1)}\right)}{\sum_x (x-\bar{x})^2}$$

Donde:

$$\overline{\beta}_x^{(1)} = \frac{\sum_t ln\left(m_{x,t}\right)}{n}$$

Teniendo en cuenta que $k_t^{(2)}$ y $\gamma_{t-x}^{(3)}$ ya satisfacen las dos restricciones mencionadas previamente, habría que realizar las transformaciones anteriores y así poder realizar las estimaciones de los parámetros:

$$\tilde{k}_t^{(2)} = k_t^{(2)} - \delta \cdot (t - \bar{t})$$

$$\tilde{\gamma}_{t-x}^{(3)} = \gamma_{t-x}^{(3)} + \delta[(t - \bar{t}) - (x - \bar{x})]$$

$$\tilde{\beta}_x^{(1)} = \beta_x^{(1)} + \delta(x - \bar{x})$$

Entonces, se llega a la conclusión de que los modelos de Lee-Carter, Renshaw y Haberman y el de Age-Period-Cohort se podrían englobar en la familia del primero, debido a que los tres consideran que existe una aletoriedad de un año al siguiente, o lo que es lo mismo consideran que la edad, el periodo y el efecto cohorte son cualitativamente diferentes en la naturaleza.

4.4. Modelo Cairns-Blake-Dowd (CBD)

El siguiente modelo, el modelo Cairns-Blake-Dowd (Cairns AJG, Blake D, Dowd K, 2006 y es conocido como modelo CBD por su forma simplificada utilizando las iniciales de los apellidos de sus autores.

En este modelo ya hay diferencias con los modelos expuestos previamente, pero entre las más importantes cabe destacar que no requiere restricciones en la estimación de los parámetros debido a que no tiene los problemas de identificabilidad que se encontraba en los anteriores modelos. Otra diferencia es que, al igual que en el modelo de Lee-Carter, no se incluye el efecto cohorte, por lo que no se incluye el parámetro $\gamma_{t-x}^{(3)}$.

Por lo cual, la siguiente expresión es la que refleja el modelo propuesto por estos autores:

$$logit(m_{x,t}) = \beta_x^{(1)} \cdot k_t^{(1)} + \beta_x^{(2)} \cdot k_t^{(2)} + \varepsilon_{x,t}$$

En esta forma del modelo los autores suponen para la estimación de los parámetros que la mortalidad ahora sigue, por lo general, una distribución binomial utilizándose por consecuencia un enlace link logit. Por lo tanto, la estructura propuesta para el modelo se basa en:

$$\beta_x^{(1)} = 1$$
$$\beta_x^{(2)} = x - \bar{x}$$

En la que $\bar{x}$ es la edad promedio de los datos analizados:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{n}$$

Se debe prestar atención sobre este modelo en que se incluyen $k_t^{(1)}$ y $k_t^{(2)}$, es decir, dos factores temporales. Este modelo puede ser encontrado en algunos manuales con la siguiente expresión:

$$logit(m_{x,t}) = \ln\left(\frac{m_{x,t}}{1 - m_{x,t}}\right) = k_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \cdot k_t^{(2)} + \varepsilon_{x,t}$$

Tras la publicación del modelo CBD, han surgido a lo largo de los años nuevas versiones como la M6 y M7, que, aunque mejoran algunas de sus carencias tiene su principal inconveniente en que son modelos enfocados a predecir la mortalidad en edades avanzadas, sobre todo a partir de los 60 años. El hecho de enfocarse en este rango de edades provoca que se puedan dar interpretaciones desajustadas a la hora de ajustar la curva de la mortalidad en su conjunto, aunque también tiene la ventaja de reducir notablemente el número de parámetros utilizados en el modelo de Lee-Carter evitando así los problemas de identificabilidad de estos.

4.5. CBD con efecto cohorte (M6)

El modelo CBD con efecto Cohorte se introdujo en 2009 (Cairns AJG, 2009). Presenta la primera generalización del modelo CBD, también es conocido como M6 y su principal diferencia es que introduce el efecto de la cohorte $\gamma_{t-x}^{(3)}$, dejando la ecuación de la siguiente manera:

$$logit(m_{x,t}) = \beta_x^{(1)} \cdot k_t^{(1)} + \beta_x^{(2)} \cdot k_t^{(2)} + \beta_x^{(3)} \cdot \gamma_{t-x}^{(3)} + \varepsilon_{x,t}$$

Por lo tanto, es esta fórmula se supone:

$$\beta_x^{(1)} = 1$$
$$\beta_x^{(2)} = x - \bar{x}$$
$$\beta_x^{(3)} = 1$$
$$\sum_t \gamma_{t-x}^{(3)} = 0$$

Como se puede observar se utilizan las mismas restricciones para $\beta_x^{(1)}$ y $\beta_x^{(2)}$que en el modelo CBD, la restricción de $\beta_x^{(1)}$sería la misma para $\beta_x^{(3)}$ y en lo que, a las restricciones de la cohorte, es decir, de $\gamma_{t-x}^{(3)}$ se refiere se mantendrían las mismas restricciones indicadas anteriormente.

En base a lo citado anteriormente, la formulación final de este modelo podría abreviarse como:

$$\ln\left(\frac{m_{x,t}}{1-m_{x,t}}\right) = k_t^{(1)} + (x-\bar{x})\cdot k_t^{(2)} + \gamma_{t-x}^{(3)} + \varepsilon_{x,t}$$

De la misma forma que ocurre en los modelos presentados previamente de LC, RH y APC, este modelo sufre los mismos problemas de identificabilidad. Así que si se hacen unos determinados cambios como sustituir $\gamma_{t-x}^{(3)}$ por el mismo efecto, pero sumándole $\phi_1 + \phi_2 * (t-(x-\bar{x}))$, y se hacen las variaciones propias en $k_t^{(1)}$y $k_t^{(2)}$no se produciría ninguna variación en la estimación de $m_{x,t}$.

Debido a la inexistencia de variación en la estimación de $m_{x,t}$, es necesario establecer restricciones sobre ϕ_1 y ϕ_2. La propuesta del autor consistía en conseguir que los valores de $\gamma_{t-x}^{(3)}$ oscilasen entorno a 0, y esto se conseguía realizando una estimación de desviaciones respecto a la media, provocando de esa forma que la estimación final carece del término constante.

4.6. Modelo CBD con efecto cohorte y componente cuadrático (M7)

Este modelo introducido como el anterior en 2009 por Cairns AJG, es conocido por el nombre de Modelo CBD con efecto cohorte y componente cuadrático (Cairns AJG, 2009), o en su nombre simplificado M7. La principal diferencia con el modelo anterior es la incorporación de un efecto cuadrático en la edad, por la razón de que de esta forma la función $logit(m_{x,t})$ podría mostrar algún tipo de curvatura. Por consiguiente, la expresión quedaría de la siguiente manera:

$$\ln\left(\frac{m_{x,t}}{1-m_{x,t}}\right) = k_t^{(1)} + (x-\bar{x})\cdot k_t^{(2)} + [(x-\bar{x})^2 - \sigma_x^2]\cdot k_t^{(3)} + \gamma_{t-x}^{(4)} + \varepsilon_{x,t}$$

En la formula citada anteriormente, σ_x^2 simboliza la distancia cuadrática de las edades a la edad media, y vendría representada como:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_i (x - \bar{x})^2}{n}$$

Este modelo, al igual que en el modelo M6 plantea el mismo problema en cuanto a lo que en la identificabilidad se refiere, debido a que al efectuar los cambios adecuados en $k_t^{(1)}$, $k_t^{(2)}$y $k_t^{(3)}$y al añadir a $\gamma_{t-x}^{(4)}$ la cantidad de $\phi_1 + \phi_2 \cdot \big(t - (x - \bar{x})\big) + \phi_3 \cdot \big(t - (x - \bar{x})\big)^2$, no se observarían cambios en la estimación de $m_{x,t}$. Por lo tanto y procediendo igual que el modelo anterior habría que efectuar la misma restricción llevando al parámetro $\gamma_{t-x}^{(4)}$ a tomar valores muy próximos a cero.

5. CASO PRÁCTICO: VALORACIÓN SWAP DE LONGEVIDAD

5.1. Descripción del caso a estudiar

El objetivo del caso práctico trata de la valoración de un swap de longevidad a partir de una cartera de q-forward para una población objetivo a partir de los distintos modelos de proyección de mortalidad estocásticos, además de ver cómo afecta a dicha valoración la aparición del COVID-19 y la diferenciación por sexo, para ello se recoge en la Tabla 4 todas las hipótesis de partida para dicho cálculo. Además, para realizar dicha valoración se han seguido los siguientes pasos:

Paso 1: Descarga del histórico de expuestos y defunciones de la población objetivo y creación de la base de datos.

Paso 2: Tratamiento de la base de datos para eliminar los años con defunciones fuera de la común debido a acontecimientos como pandemias y guerras.

Paso 3: Estimación de todos los modelos de mortalidad estocástica con un horizonte temporal y un rango de edad determinado.

Paso 4: Proyección de los modelos a través de un numero definido de simulaciones partiendo de las estimaciones.

Paso 5: Tratamiento de los resultados. Se saca la media de la tasa de mortalidad para cada modelo y cohorte seleccionada de la simulación de las proyecciones.

Paso 6: Se obtiene la renta inicial a través de las tablas de primer orden de la normativa[1].

Paso 7: Actualizar la renta con las tasas de mortalidad esperadas para cada modelo.

Paso 8: Sacar el spread como el margen entre la renta inicial y la renta esperada.

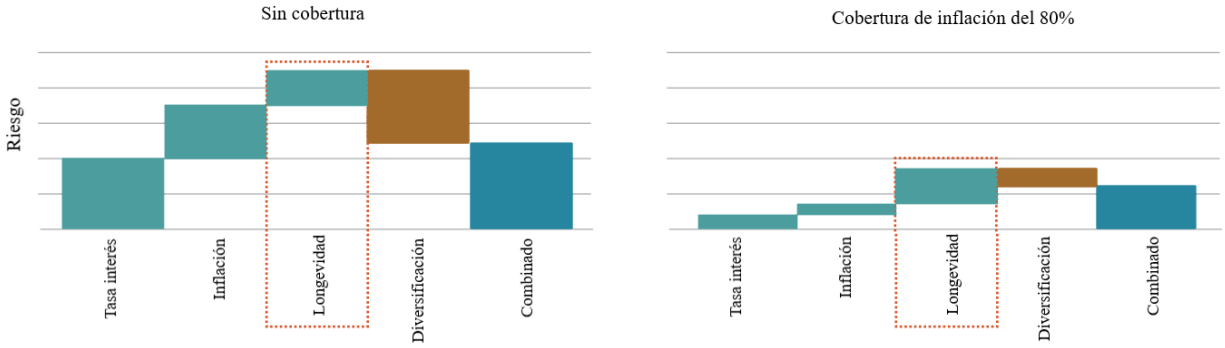
Para realizar la valoración del swap se ha partido de unas hipótesis iniciales que se recogen en la siguiente tabla:

Tabla 4: Hipótesis de datos para el caso práctico

Hipótesis	Datos seleccionados
Base de Datos	Human Mortality Database (HMD)
Años para la estimación	De 1950 a 2020
Edades para la estimación	De 50 a 85 años
Modelos de mortalidad estocástica	Lee-Carter (LC), Renshaw y Haberman (RH), Age-Period-Cohort (APC), Cairns-Blake-Dowd (CBD), CBD con efecto cohorte (M6), CBD con efecto cohorte y componente cuadráticos (M7)
Edades para la proyección	De 50 a 85 años
Horizonte temporal de proyección	30 años
Número de simulaciones para la proyección	10.000 simulaciones
Edad valoración swap	De 65 a 75 años
Vencimiento del swap	20 años
Tipo para actualizar	*Risk free rate* de EIOPA
Periodicidad pago de la pensión	Pago anual fijo

La motivación de la cobertura del riesgo de longevidad a través de activos vinculados a la longevidad, como los swaps de longevidad, se debe al crecimiento de la importancia del riesgo de longevidad respecto de los otros riesgos de los planes de pensiones a medida que estos últimos se cubren frente a la inflación, siendo observable en la Figura 13 de manera ilustrativa.

Figura 13: Crecimiento del riesgo de longevidad en importancia al cubrir otros riesgos. Ilustrativo



Fuente: Insight Investment

5.2. Resultados

5.2.1. Estimación de los modelos

Como se ha comentado anteriormente, la población base sobre la que se realiza el estudio, es sobre la población española entre 50 y 85 años y entre los años 1950 y 2019, además de hacerse para ambos sexos, obtenida dicha población de la *Human Mortality Database*, HMDB. Posteriormente se realizará la misma estimación incluyendo el año 2020 para así ver el efecto de la pandemia.

El cálculo de estas estimaciones se ha realizado a través del paquete *demography*, para la correcta descarga de la base de datos de la población de la HMDB y el paquete *StMoMo* de R, realizandose estimaciones para los cinco modelos aplicados con anterioridad, Lee-Carter, Age-Period-Cohort, CBD, CBD con efecto cohorte y CBD con efecto cohorte y componente cuadrático. En todos los modelos se ha procedido de manera similar, por lo que se explica con detalle los procedimientos y resultados de Lee-Carter, tanto introduciendo el año del COVID-19 como sin él para ver el impacto, mientras que para el resto de modelos se expondrán los resultados en el Anexo I.

Lee-Carter

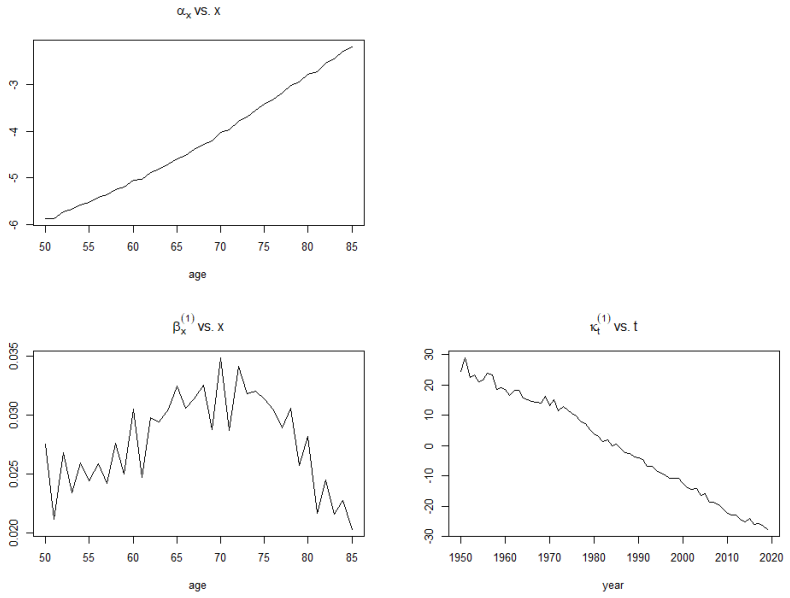
Tanto la realización de la estimación como de la proyección, es análoga para el caso de los hombres y el de las mujeres, por lo que, primeramente, se debe ajustar el modelo, para ello se toma el rango de edades de entre 50 y 85 años y entre los años 1950 y 2019, mencionados anteriormente. A través de la función *fit* y atribuyendo el modelo de Lee-

Carter, *lc()*, se halla k_t. Para la interpretación correcta de estos datos es necesaria primeramente unas aclaraciones, puesto que la terminología del paquete de R es distinta a la teórica contada anteriormente:

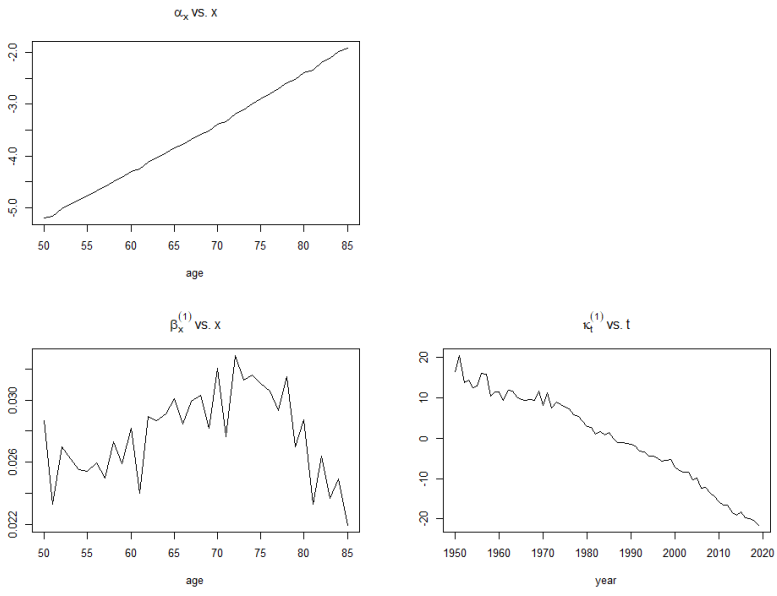
- El parámetro $\beta_x^{(1)}$, es decir, el efecto de la edad, se modifica, siendo ahora α_x.
- El parámetro $\beta_x^{(2)}$ ahora es el parámetro $\beta_x^{(1)}$.

Tras realizar esta estimación se consigue los resultados mostrados en la Figura 14.

Figura 14: Resultados estimación LC (1950-2019)



(a) Resultados estimación LC Mujeres (1950-2019)



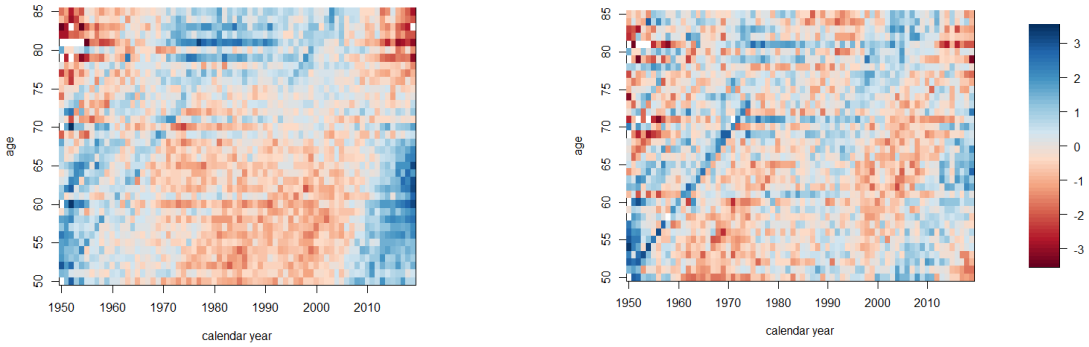
(b) Resultados estimación LC Hombres (1950-2019)

Fuente: Elaboración propia, a partir de R

Como se puede observar en la Figura 14, k_t tanto en el caso del sexo femenino (a), como en el sexo másculino (b) tiene tendencia negativa, y al suprimir los años anteriores a 1950 no se atisba las desviaciones oportunas por la gripe española y la guerra civil. Asimismo, el motivo de eliminación de esos años no es únicamente las desviaciones en las tasas de mortalidad, si no acercar el modelo temporalmente a una época en la que España no tenga tantos cambios sociales y esté en un proceso de desarrollo.

La Figura 15 muestra el mapa de color de los residuos de la estimación de Lee-Carter para ambos sexos, como se ve hay una agrupación de los residuos más notable en el caso de las mujeres, esto se debe a que la estimación de LC no tiene capacidad para tolerar tasas de mejoras variables con la edad. Además, los patrones diagonales se entienden como falta de incorporación del efecto cohorte, y así se muestra la incapacidad de mostrar ese efecto, siendo esto más notable en el caso de los hombres.

Figura 15: Mapa de color de los residuos de LC (1950-2019)



(a) Mapa de color de los residuos LC Mujeres (1950-2019)

(b) Mapa de color de los residuos LC Hombres (1950-2019)

Fuente: Elaboración propia, a partir de R

Si se observan los gráficos de dispersión de los residuos para este mismo modelo, ajustado para la población entre 50 y 85 años entre los años 1950 y 2019, el gráfico de la derecha, año de nacimiento, recoge una tendencia debido a la falta del efecto cohorte. Mientras que en el resto de gráficos se puede decir que no se observa este efecto y por tanto se comporta como ruido blanco.

Una vez realizadas las estimaciones de los modelos la manera de comparar los distintos modelos, o como es en este caso la comparativa para el mismo modelo pero diferente sexo, es a través de las medidas de calidad o medidas de bondad de ajuste, las cuales representan el ajuste y el número de términos del modelo, estas medidas son el criterio de

*Akaike Information Criterion (*Akaike, Hirotugu ,1974), más conocido como AIC y el *Bayesian Information Criterion* (Schwarz, Gideon E, 1978), como BIC, la diferencia de este último respecto del AIC es que este penaliza la introducción de términos en el modelo. Las expresiones de estos modelos son:

$$AIC = -2 \cdot \ln(L) + 2 \cdot \nu$$

$$BIC = -2 \cdot \ln(L) + \nu \cdot \ln(T)$$

Donde:

- $\ln(L)$: la función de log-verosimilitud.
- ν: número de parámetros
- T: el tamaño de la muestra

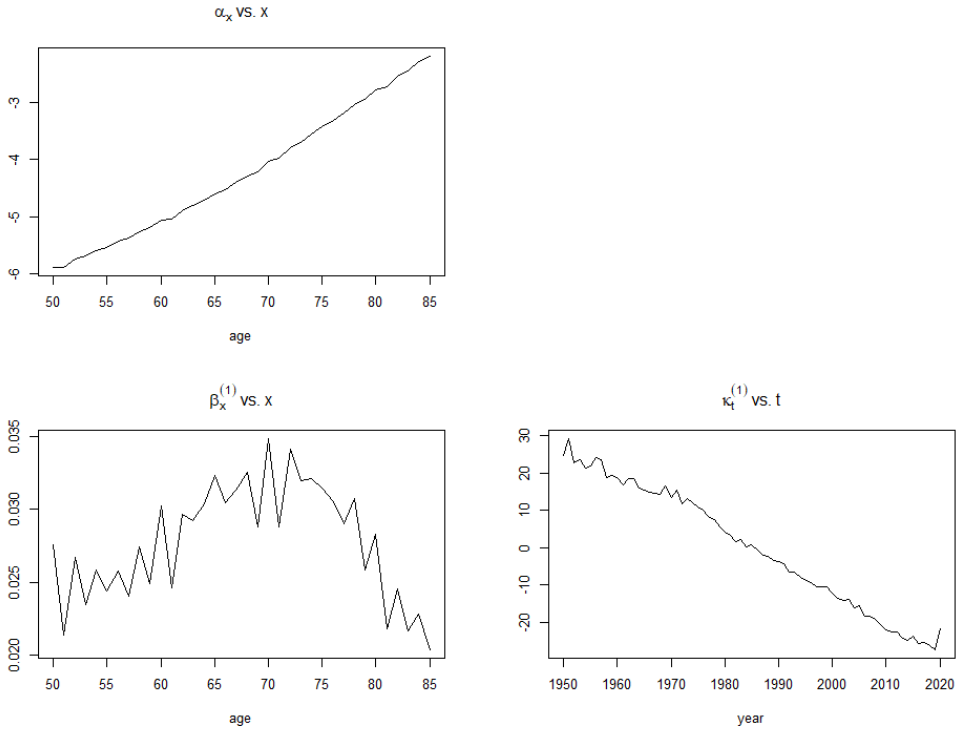
Dicho criterio sirve para la elección del modelo óptimo, donde la elección del modelo óptimo será el que represente menor coeficiente de bondad respecto al resto, puesto que de manera aislada o sirve para la declaración de modelo óptimo. Los resultados de estos criterios de información se representan en la Tabla 5 para ambos sexos con la estimación de Lee Carter, y se puede observar que tanto en términos de AIC como del BIC, el modelo más óptimo seria la estimación realizada para los hombres.

Tabla 5: Tabla AIC y BIC de la estimación de LC (1950-2019)

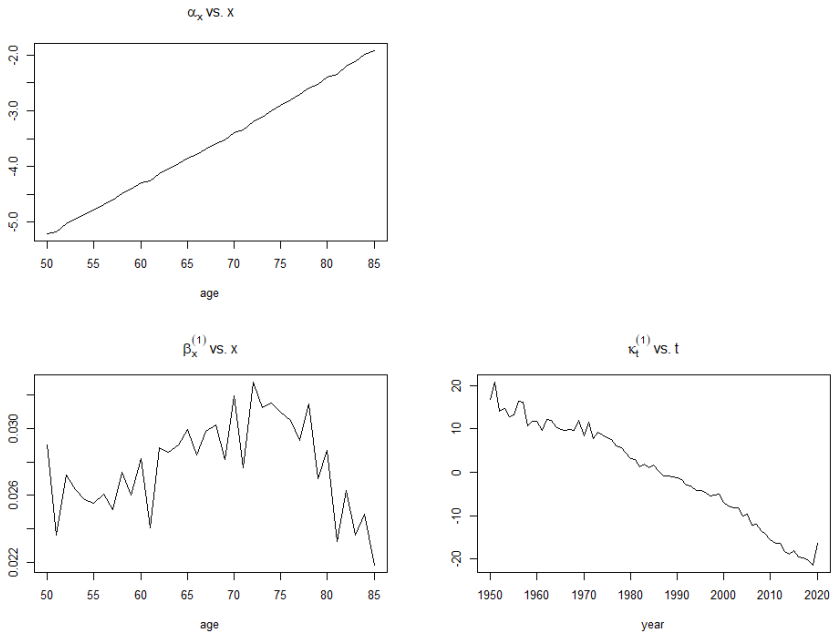
Lee-Carter	AIC	BIC
Mujeres	42.492,76	43.309,25
Hombres	34.697,94	35.514,43

Tras realizar la estimación anterior del modelo de Lee-Carter sin el año 2020 se procede a realizar los mismos pasos, pero incluyendo dicho año para ver el efecto que ha causado en COVID-19 en la estimación de este modelo. De nuevo se realiza el ajuste del modelo con la función *fit*, siendo el rango de años esta vez entre el 1950 y el 2020.

Figura 16: Resultados estimación LC (1950-2020)



(a) Resultados estimación LC Mujeres (1950-2020)



(b) Resultados estimación LC Hombres (1950-2020)

Fuente: Elaboración propia, a partir de R

Como se observa en la Figura 16, se podría decir que tanto $\beta_x^{(1)}$ como $\beta_x^{(2)}$ no sufren un cambio aparente en ninguno de los sexos, pero en cambio en la gráfica de k_t que representa la tendencia temporal de la mortalidad, es decir, el efecto tiempo, se puede

observar que tiene un aumento repentino en el último año, lo cual se debe a las defunciones causadas por el COVID-19. Mientras que, en el caso de los mapas de color de los residuos para ambos sexos, son similares introduciendo el año 2020 como sin él.

De nuevo para comprobar lo óptimo que es el modelo se realiza las medidas de bondad, obteniendo un AIC y un BIC mayor en el caso de COVID-19, como se ve en la Tabla 6, resultado a esperar por ser este último año atípico a los anteriores.

Tabla 6: Tabla AIC y BIC de la estimación de LC (1950-2020)

Lee-Carter	AIC	BIC
Mujeres	43.385,8	44.210,11
Hombres	35.304,64	36.128,95

Fuente: elaboración propia a partir de R

Tras realizar la estimación en profundidad para el modelo de Lee-Carter se realizan de manera análoga para el resto de modelos sin tener en cuenta el año 2020, encontrándose las gráficas de los resultados sin dicho año en el Anexo I. Y añadiendo el efecto del COVID-19 integrando a la estimación el año 2020. Cómo se ha comentado anteriormente, el cambio notorio en los gráficos de las estimaciones teniendo en cuenta el efecto de la pandemia, reside en un incremento repentino al final de la serie k_t, por lo que dichos gráficos no se expondrán, de igual manera ocurre con los mapas de color. Cabe destacar de las estimaciones del resto de los modelos, las restricciones que se comentaron de manera teórica y que ahora se pueden observar en el impacto de la estimación, siendo estas:

- Renshaw y Haberman (RH): se observa que $\beta_x^{(3)} = 1$, es decir, gráficamente es lineal y esto es por las restricciones del modelo.
- Age-Period-Cohort (APC): en este caso las restricciones lineales eran para $\beta_x^{(1)}$ y $\beta_x^{(3)}$, siendo de nuevo 1.
- Cairns-Blake-Dowd (CBD): se observa linealidad en $\beta_x^{(1)} = 1$ y diagonalidad en $\beta_x^{(2)}$, ya que la restricción es $\beta_x^{(2)} = x - \bar{x}$.
- CBD con efecto cohorte (M6): de manera similar al APC, $\beta_x^{(1)} = 1 = \beta_x^{(3)}$ y al igual que en el modelo CBD, $\beta_x^{(2)} = x - \bar{x}$.
- CBD con efecto cohorte y componente cuadrático (M7): de nuevo se encuentra la linealidad para los parámetros $\beta_x^{(1)}$ y $\beta_x^{(4)}$ y la diagonalidad de $\beta_x^{(2)}$.

Al igual que, si se observa los mapas de color del Anexo 2 sobre todos los modelos se puede ver como llama la atención la estacionalidad y el patrón del modelo CBD, y en contra estaría el modelo de Renshaw y Haberman donde se podría decir que es ruido blanco, seguido del modelo APC.

Evaluando la Tabla 7 que expone la comparativa de los criterios Akaike (AIC) y Bayesiano (BIC) para ambos sexos y todos los modelos. Se puede observar que en términos tanto de AIC como de BIC el modelo más óptimo, siendo este el de menor cifra, es el modelo de Renshaw y Haberman para ambos sexos, aptitud que los gráficos de las desviaciones de los residuos estaban pronosticando. Por lo tanto y por razonamiento similar el modelo de CBD es el que peor se ajusta, de nuevo para ambos modelos, pero se puede observar la diferencia entre hombres y mujeres, siendo el más óptimo la estimación para los hombres, siendo este modelo el que mayor cifra alcanza tanto en el criterio de Akaike como en el Bayesiano.

Tabla 7: Tabla AIC y BIC de la estimación de todos los modelos (1950-2019)

MODELOS	SEXO	AIC	BIC
Lee-Carter (LC)	Mujer	42.492,76	43.309,25
	Hombre	34.697,94	35.514,43
Renshaw y Haberman (RH)	Mujer	29.988,06	31.411,07
	Hombre	31.650,79	33.073,80
Age-Period-Cohort (APC)	Mujer	44.258,66	45.435,76
	Hombre	37.658,10	38.835,21
Cairns-Blake-Dowd (CBD)	Mujer	59.837,97	59.837,97
	Hombre	48.790,77	49.606,58
CBD con efecto cohorte (M6)	Mujer	42.490,75	43.871,81
	Hombre	35.535,72	36.916,78
CBD con efecto cohorte y componente cuadráticos (M7)	Mujer	39.823,85	41.606,99
	Hombre	34.475,88	36.259,02

Fuente: elaboración propia a partir de R

Tras realizar la estimación de todos los modelos incluyendo el año 2020 los criterios de bondad, tanto el AIC como el BIC, sufren un aumento respecto de la estimación sin el efecto del COVID-19. Aun así, el modelo más óptimo sigue siendo el de Renshaw y

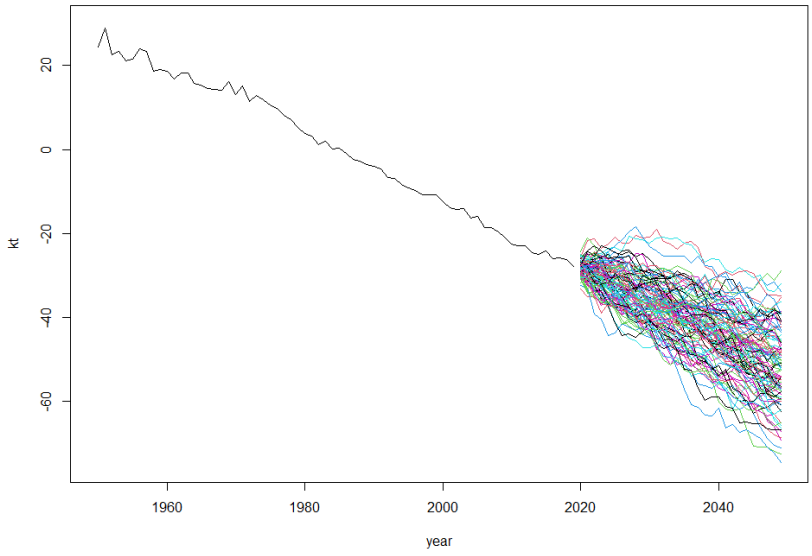
Haberman y en el último lugar el de CBD, continuando con una gran diferenciación en este último caso entre los ajustes de bondad para los distintos sexos.

5.2.2. Proyección de los modelos

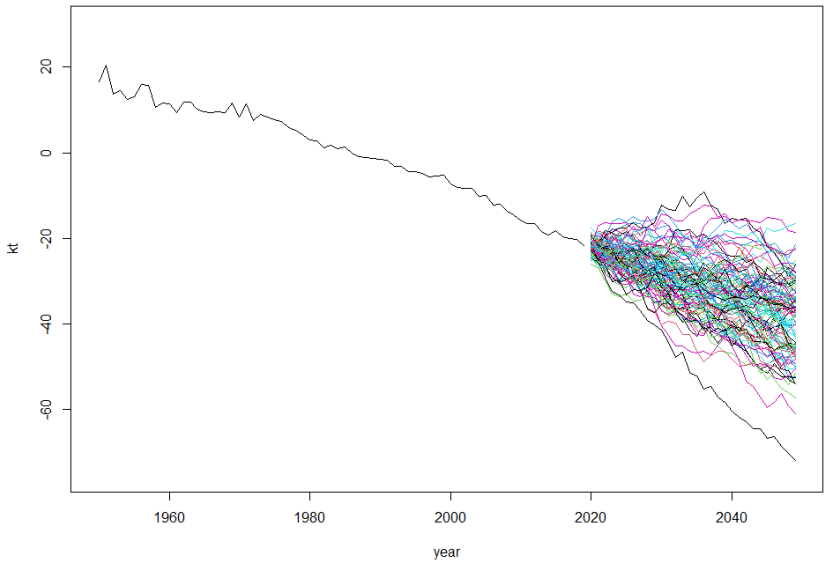
Tras la estimación de los modelos se puede dar paso a la proyección de los mismos, siguiendo el procedimiento del apartado anterior se expondrá detalladamente los resultados para Lee-Carter.

Para realizar la proyección del modelo de Lee-Carter se parte de la estimación del mismo, asique a través de la función *simulate* del paquete de *StMoMo* se escoge el número de simulaciones a realizar y el horizonte temporal. En este caso se han realizado 10.000 simulaciones para todos los modelos con un horizonte temporal de proyección de 30 años tanto para hombres como para mujeres. Para una mejor visualización en la Figura 17 se han representado las primeras 100 simulaciones, del efecto tiempo, de las 10.000, abarcando dichas simulaciones desde el año 2019 al 2049, donde se puede observar que en el caso de los hombres tiene una tendencia negativa menos pronunciada que la de las mujeres.

Figura 17: Proyección del modelo de LC (1950-2049)



(a) Resultados proyección LC Mujeres (1950-2049)

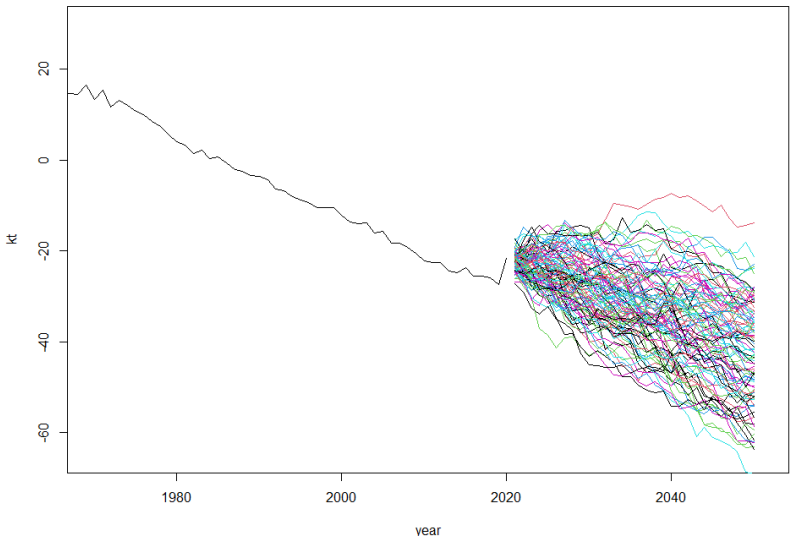


(b) Resultados proyección LC Hombres (1950-2049)

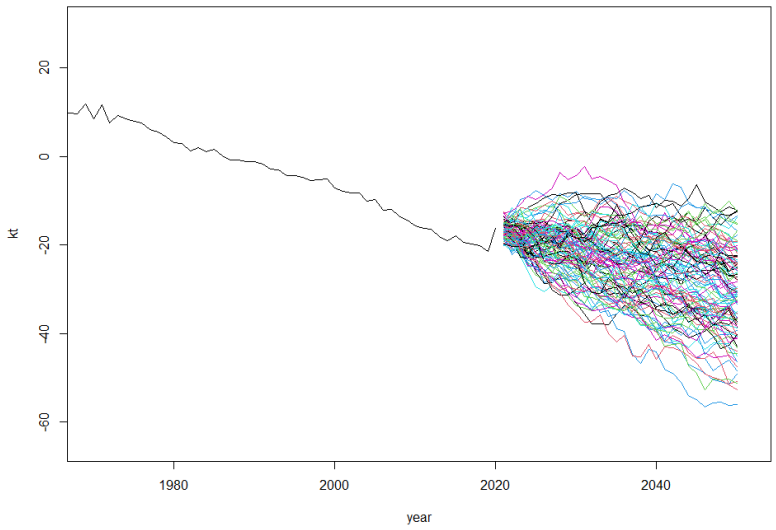
Fuente: Elaboración propia, a partir de R

De manera similar se realiza la proyección con las 10.000 simulaciones incluyendo el año 2020. Como se ha observado en la estimación del modelo de Lee-Carter había un crecimiento del efecto tiempo en el último año ocasionado por las defunciones del COVID-19, por lo que, si se observa en comparación con el gráfico anterior, como se observa en la Figura 18, las simulaciones representadas están desplazadas hacia arriba por este acontecimiento. Debido a que se incluye un año más para la estimación y se mantiene contante el horizonte de proyección, las simulaciones abarcan desde el año 2020 al 2050.

Figura 18: Proyección del modelo de LC (1950-2050)



(a) Resultados proyección LC Mujeres (1950-2050)



(b) Resultados proyección LC Hombres (1950-2050)

Fuente: Elaboración propia, a partir de R

De manera similar se halla las proyecciones para el resto de modelos, primeramente, sin el 2020, adjuntos en el Anexo 3 y después introduciendo el año para ver el efecto del COVID-19.

5.2.3. Valoración swap

La valoración del swap se realiza como la diferencia entre la renta inicial, de la normativa, y la renta futura estimada a valor inicia añadiéndole un margen, siendo como resultado el margen que hace esta diferencia nula o mínima, obteniendo así el spread. Para llegar a ese cálculo final se han realizados los cálculos y tratamientos de datos pertinentes.

Primeramente, tras realizar las estimaciones y proyecciones de todos los modelos es necesario pasar los datos de las 10.000 simulaciones de q_x a un Excel, pero únicamente de la cohorte a utilizar, es decir, a través de R se selecciona de manera diagonal las 10.000 simulaciones para las edades comprendidas entre 65 y 85 años, ambas inclusives. Posterior a ello a través de nuevo de código realizado en R se separa por sexos en distintos Excels, pero dentro del mismo libro se encuentra separadas las distintas hojas por modelos y aplicando o no el efecto del COVID-19. A ese Excel separado por sexo lo llamaremos *Inputs.LongSwap.xlsx*, en el cual también se incluye las q_x del 2019 y 2020 entre los 65

y 85 años, siendo estas las q_x reales, además de la curva libre de riesgo, *risk-free-rate* (RFR), a fecha de 31 de diciembre de 2021 para la actualización de la renta.

Para la correcta valoración del swap, que se realiza a través de código en *Matlab*, se crean las funciones necesarias para la posterior valoración, dichas funciones son:

- Interpolación: para la correcta utilización de la RFR.
- Activación de Excel: Para poder utilizar los valores de los datos volcados en Excel sin necesidad de abrirlos.
- Cálculo del percentil: Calcula el percentil a través de la ordenación de los valores.

Seguidamente se obtiene la renta inicial, dicha renta se ha realizado como indica la normativa (BOE-A-2020-17154 *Resolución de 17 de diciembre de 2020)* a través de las tablas de primer orden. El motivo de realizar la renta inicial a través de la normativa, es para así obtener una renta inicial común a todos los modelos de mortalidad estocástica para después realizar una comparativa más visual de los resultados obtenidos para dichos modelos.

La manera de obtener el valor de la renta inicial se ha efectuado a través del sumatorio de la actualización de una unidad monetaria de manera mensual. La actualización se ha llevado a cabo a través de la interpolación mensual de la RFR, obtenida de EIOPA, y las p_x de la cohorte seleccionada, probabilidad de supervivencia, obtenidas de las tablas de primer orden de la PASEM2020, acrónimo de Población ASegurada Española Mortalidad, como la inversa de la tasa de mortalidad, estas también interpoladas de manera mensual y exponencial. Ejecutándose como la siguiente renta temporal pospagable y mensual (Ruiz, R. M., Pérez-Cacho, O. G., Martínez, E. T. ,2005):

$$a^{12}_{65:20} = v^{1/12} \cdot {}_{\frac{1}{12}}p_{65} + v^{2/12} \cdot {}_{\frac{1}{12}}p_{65+\frac{1}{12}} + v^{3/12} \cdot {}_{\frac{1}{12}}p_{65+\frac{2}{12}} + \cdots + v^{20} \cdot {}_{\frac{1}{12}}p_{84+\frac{11}{12}}$$

Donde;

- $v^t = (1+i)^{-t}$, donde *i* representa el tipo de la RFR y *t* el periodo a actualizar.
- $p_x = 1 - q_x$, probabilidad de supervivencia para la edad *x*, es decir la inversa de la probabilidad de fallecimiento.
- x, la edad del individuo.

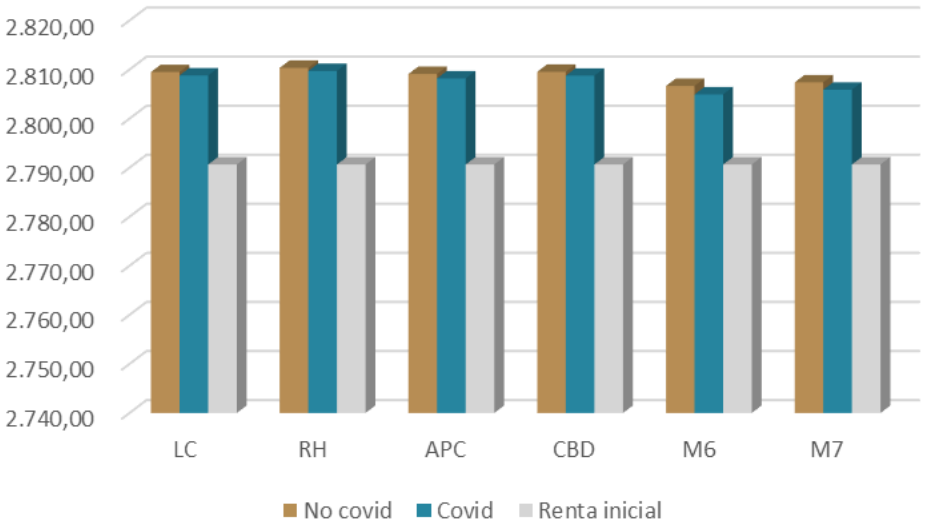
Los cálculos se han realizado discriminado por sexos dado la disimilitud en el patrón de la mortalidad. Sin embargo, según la sentencia Test Achats no es posible discriminar

por sexos en un entorno práctico. En ese sentido, se tendría que calcular una única tabla de mortalidad, por ejemplo, como combinación lineal entre la tabla de mortalidad de hombres y la tabla de mortalidad de mujeres, y realizar un ejercicio similar. Tras ejecutarse los cálculos mencionado se obtiene una renta inicial de 2.770,15€ en el caso de los hombres y 2.790,65€ para el caso de las mujeres, siendo esperable que las mujeres obtuvieran una renta mayor a la de los hombres debido a que su esperanza de vida es mayor.

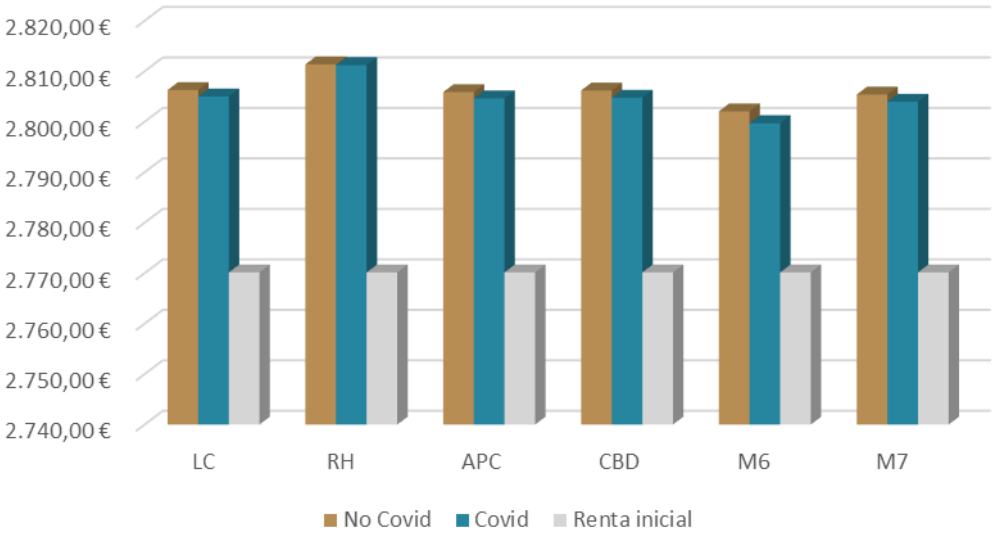
A diferencia de la renta inicial, la renta esperada se realiza como la actualización con la RFR, también interpolada de manera mensual y con las q_x obtenidas a través de las 10.000 simulaciones de los modelos de mortalidad estocástica para el rango de edad objetivo, es decir la cohorte de 65 a 85 años en el 2019 y en 2020. Debido a que para el calculo de estas rentas ya se utilizan los modelos de mortalidad será necesario duplicar los cálculos, teniendo en cuenta en uno de ellos el efecto del COVID-19 y en el otro no. Por lo que, realizando este cálculo se obtiene 10.000 rentas distintas para cada modelo. A partir de la función creada en Matlab para el cálculo del percentil, Anexo 5, se obtiene la renta mediana, y la renta perteneciente al percentil 90, para cada uno de los modelos.

Como se puede observar en la Figura 19, y teniendo en cuenta que a partir del AIC y BIC, eran modelos más óptimos los de las mujeres, se visualiza mayor paridad en las rentas de las mujeres, y menor diferencia respecto de la renta inicial. Hay que recordar que todos los cálculos estas realizados con la renta de una unidad monetaria, aun así, tanto en el caso de las mujeres como de los hombres el modelo que obtiene la mayor de las rentas es el de RH, siendo para las mujeres de 2.810,35€ y 2.809,72€, sin tener en cuenta el efecto del COVID-19 y con él, respectivamente, y en el caso de los hombres 2.811,37€ y 2.811,23€, adjuntándose el resto de resultados en el Anexo 4. Mientras que el modelo M6 obtiene la menor de las rentas estimadas para ambos sexos en comparación con el resto. En cuanto a la diferencia dentro de cada modelo del efecto COVID-19, es de esperar que las rentas que tienen en cuenta este efecto COVID sean menores, puesto que estos modelos contemplan un aumento de la mortalidad, siendo de nuevo el modelo M6 el que obtiene la mayor diferencia al tener en cuento el COVID-19, siendo en el caso de las mujeres una diferencia de 1,74€ y en el caso de los hombres 2,34€.

Figura 19: Diagrama de la valoración de la renta mediana



(a) Mujeres



(b) Hombres

Fuente: Elaboración propia, a partir de Matlab

Tras obtener todos los resultados anteriores se puede proceder al cálculo final del spread. La manera de hallar el spread, *s*, es minimizar la diferencia en el momento inicial de la renta inicial y la renta mediana, y en el percentil 90, ya calculado. Para ello se ajusta la renta mediana añadiendo *s* a la actualización, y de manera similar para hallar el spread del percentil 90, pero en este caso a través de la renta de dicho percentil, calculándose cómo:

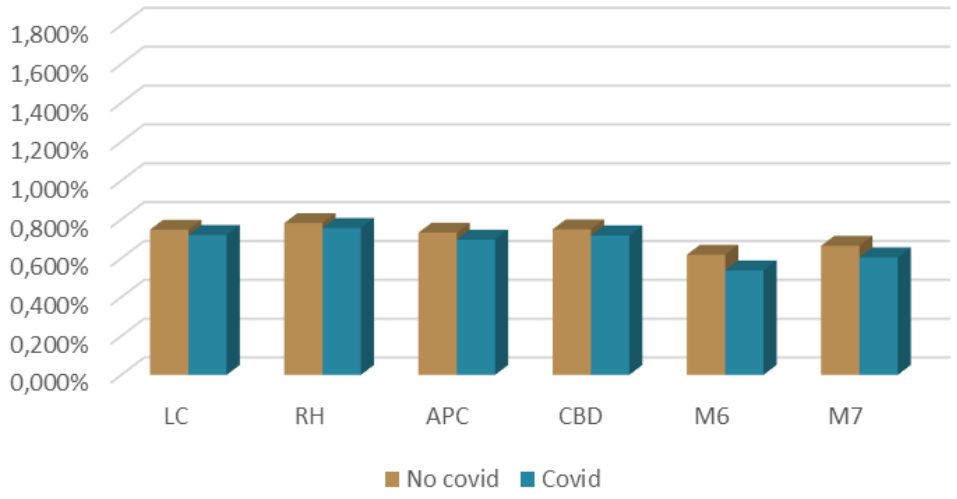
$$Minimizar\ (v^{1/12} \cdot {}_{\frac{1}{12}}p_{65} + v^{2/12} \cdot {}_{\frac{1}{12}}p_{65+\frac{1}{12}} + \cdots + v^{20} \cdot {}_{\frac{1}{12}}p_{84+\frac{11}{12}}) - (v^{1/12} \cdot {}_{\frac{1}{12}}p'_{65} \cdot (1+s)^{-1/12} + v^{2/12} \cdot {}_{\frac{1}{12}}p_{65+\frac{1}{12}} \cdot (1+s)^{-2/12} + \cdots + v^{20} \cdot {}_{\frac{1}{12}}p_{84+\frac{11}{12}} \cdot (1+s)^{-20})\ a\ través\ de\ s$$

Donde:

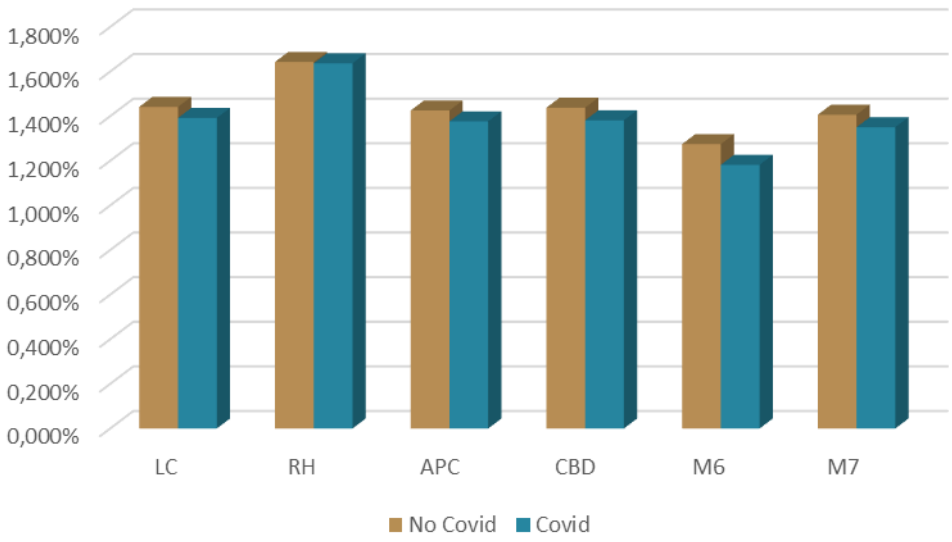
- p'_x, es la probabilidad de supervivencia del calculo de la renta mediana
- p_x, es la probabilidad de supervivencia de la tabla PASEM2020

Como se observa en la Figura 20 los resultados del spread para hombres y mujeres son bastante diferentes. Como se observaba en la Figura 19, los hombres tenían una mayor diferenciación entre la renta mediana y la renta inicial, lo que esto se traduce que el spread será mayor que en el caso de las mujeres, que ambas rentas estaban más similares. Siendo la diferencia entre el spread del modelo RH más del doble del spread de las mujeres, para el caso "No covid" es de 0,862% y en el caso de "Novid" de 0,881%.

Figura 20: Diagrama de la valoración del spread del swap de longevidad



(a) Mujeres



(b) Hombres

Fuente: Elaboración propia, a partir de Matlab

6. CONCLUSIONES

Como se ha venido observando a lo largo del estudio realizado, la pandemia del COVID-19 es causante de distorsiones en las estimaciones de las entidades aseguradoras y los planes de pensiones. La ocurrencia de pandemias, como el COVID-19, grandes catástrofes naturales o guerras, no es un impacto que se pueda predecir a partir de las estimaciones y proyecciones de los modelos, pero si observar y estudiar el efecto que causa sobre estas.

La primera conclusión a la que se puede llegar a cabo es la reciente aparición de nuevos activos vinculados a la longevidad y mortalidad para poder cubrir el riesgo de tendencia de la mortalidad tan difícil de diversificar, y el gran recorrido y desarrollo que hay en perspectiva para los próximos años para dichos activos.

En cuanto a las deducciones que se pueden sacar de las estimaciones de los modelos de mortalidad la principal a destacar sería que introducir un parámetro con el efecto cohorte no implica una mejora adecuación del modelo, puesto que modelos como el APC tiene un peor ajuste que Lee-Carter, que no introduce el efecto cohorte. Además, se debe destacar que introducir el año 2020 supone un desplazamiento hacia arriba de las tasas de mortalidad de todos los modelos, puesto que al introducir el efecto del COVID-19 el modelo recoge un aumento inusual de las defunciones, haciendo que los modelos recogen este efecto sean menos óptimos que los que no lo recogen.

Manifestar cómo el COVID-19 distorsionaría los resultados obtenidos en el cálculo de la valoración del spread del swap, puesto que, si se tiene en cuenta el COVID-19, al ser un acontecimiento excepcional, el coste que se le estaría imputando al derivado para cubrir el riesgo de longevidad sería afectado por una reducción. Esta reducción es causada por el aumento de la tasa de mortalidad proyectadas, y por tanto disminución de la esperanza de vida, lo que conlleva una reducción también de riesgo de longevidad.

Por último, destacar la diferenciación entre los resultados obtenido para los distintos sexos, en el caso del sexo femenino se encuentra una mayor semejanza entre la renta teórica inicial y las rentas estimadas a partir de los modelos, lo que conlleva que el spread de valoración del swap de longevidad sea bastante menor que en el caso de los hombres que no se cumple dicha paridad.

7. FUTURAS LINEAS DE INVESTIGACIÓN

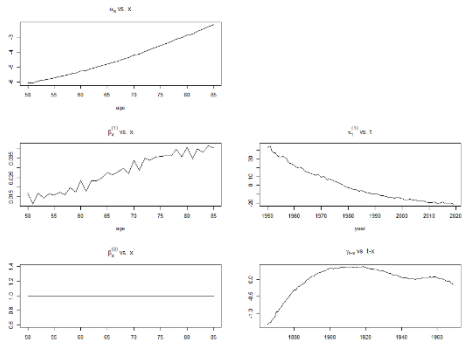
Como futuras líneas de investigación se encuentran todos aquellos puntos de vistas y aspectos que no se han planteado, pero que sería muy interesante de desarrollar y analizar los resultados:

- Incorporar a la simulación de los modelos de mortalidad estocástica el remuestreo de datos o bootstraping, en busca de mayor estabilidad en los modelos de mortalidad estocástica.
- Analizar otros modelos de mortalidad estocástica, cómo B-Splines y P-Splines y otras modificaciones de CBD, así como una mixtura de ellos.
- Realizar el análisis y valoración del swap desde otras perspectivas, por ejemplo, ver cómo afecta a la valoración distintos rangos de edad.
- Analizar el comportamiento del swap para distintas duraciones.
- Valorar swaps de longevidad que cubran planes de pensiones con un esquema más complejo.

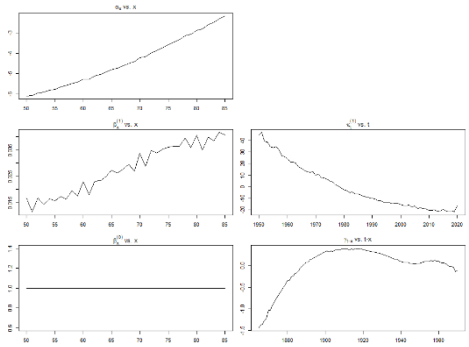
ANEXO I

En este Anexo se muestran los gráficos obtenidos para el resto de modelos de mortalidad, tanto para hombres y mujeres, como sin tener en cuenta el año 2020 y con él, para así ver el efecto en las estimaciones del efecto del COVID-19.

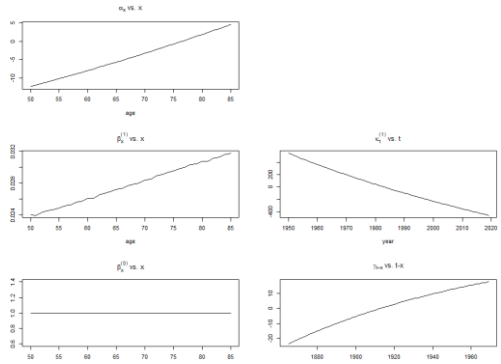
Figura I.1: Resultados estimación resto de modelos



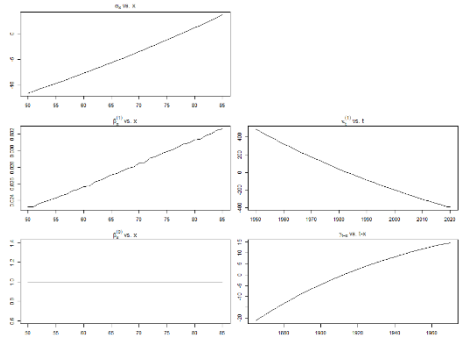
(a) Resultados estimación RH Mujeres No Covid



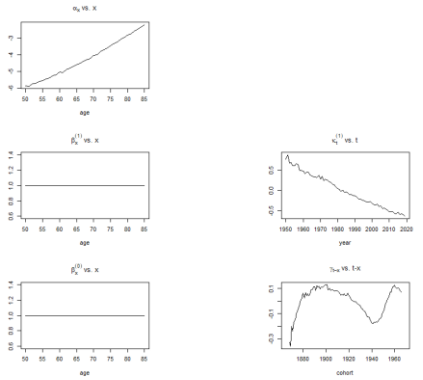
(b) Resultados estimación RH Mujeres Covid



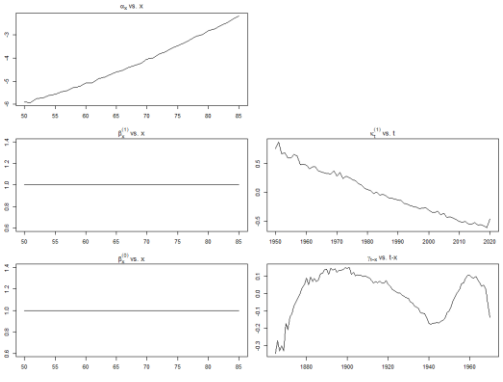
(c) Resultados estimación RH Hombres No Covid



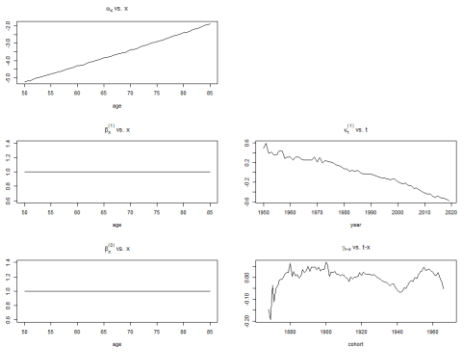
(d) Resultados estimación RH Hombres Covid



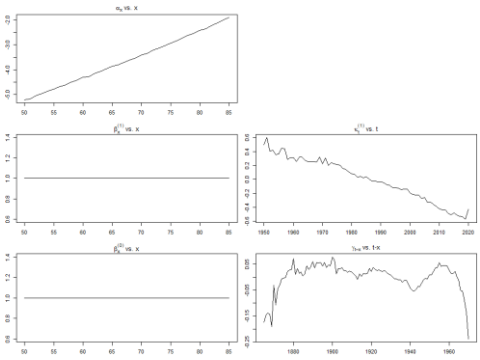
(e) Resultados estimación APC Mujeres No Covid



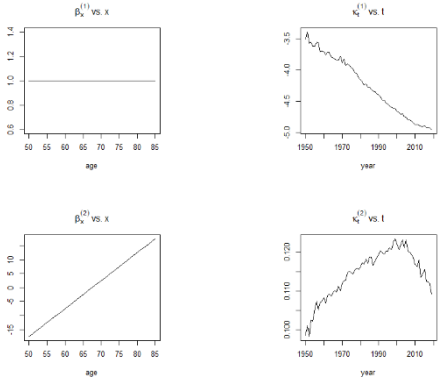
(f) Resultados estimación APC Mujeres Covid



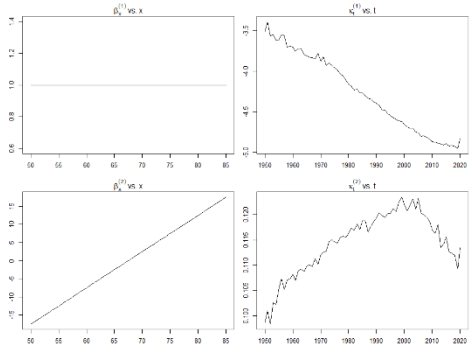
(g) Resultados estimación APC Hombres No Covid



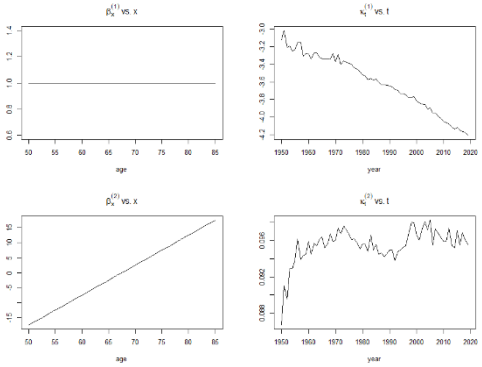
(h) Resultados estimación APC Hombres Covid



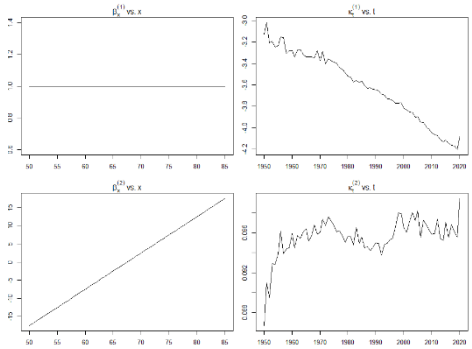
(i) Resultados estimación CBD Mujeres No Covid



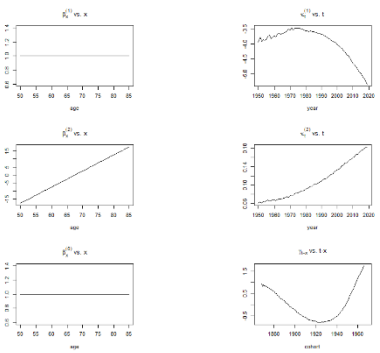
(j) Resultados estimación CBD Mujeres Covid



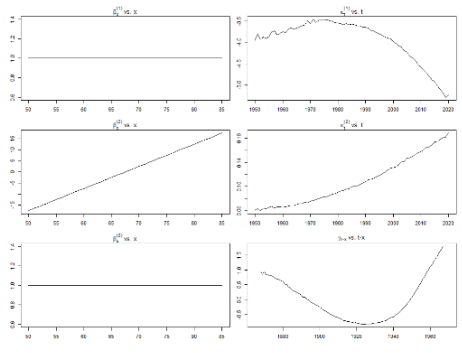
(k) Resultados estimación CBD Hombres No Covid



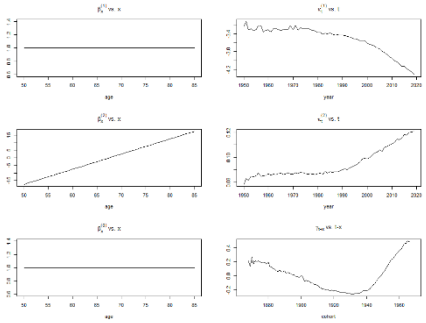
(l) Resultados estimación CBD Hombres Covid



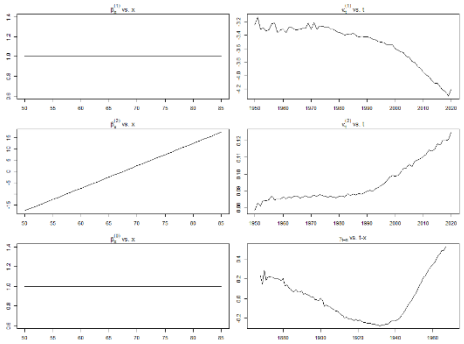
(m) Resultados estimación M6 Mujeres No Covid



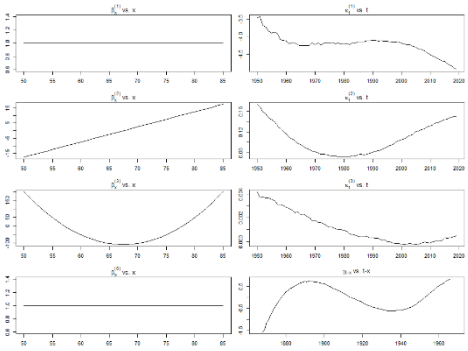
(n) Resultados estimación M6 Mujeres Covid



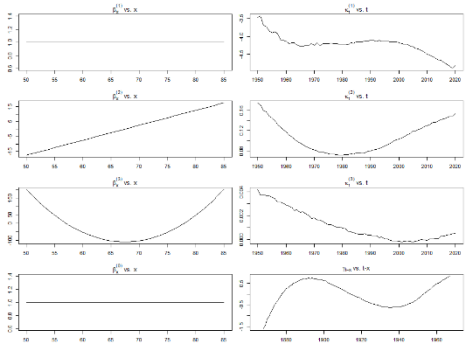
(o) Resultados estimación M6 Hombres No Covid



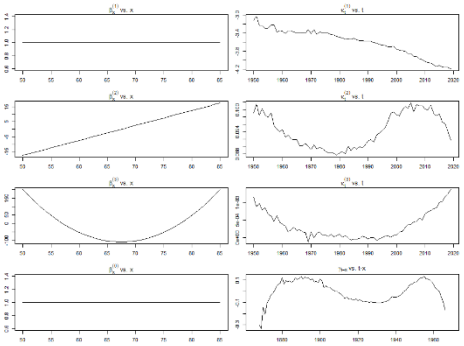
(p) Resultados estimación M6 Hombres Covid



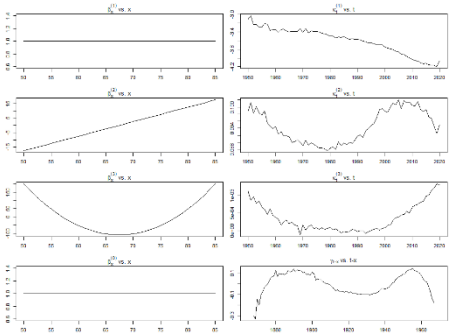
(q) Resultados estimación M7 Mujeres No Covid



(r) Resultados estimación M7 Mujeres Covid



(s) Resultados estimación M7 Hombres No Covid



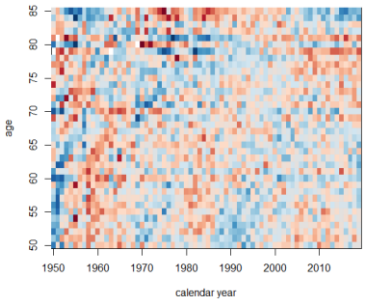
(t) Resultados estimación M7 Hombres Covid

Fuente: Elaboración propia, a partir de R

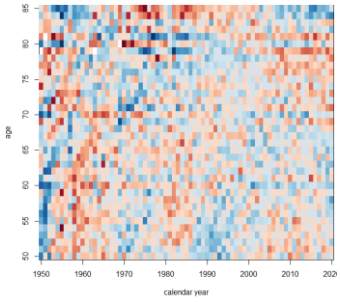
ANEXO II

Aquí se muestran los mapas de color de los residuos de las estimaciones de los modelos de mortalidad restantes, de nuevo, para ambos sexos, y, con el 2020 y sin él en el ajuste de los modelos.

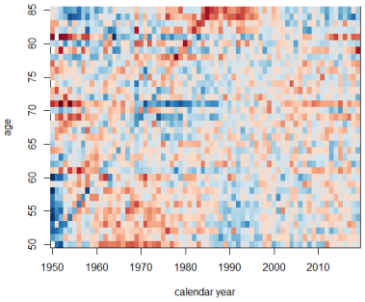
Figura II.1: Resultados mapa de color resto de modelos



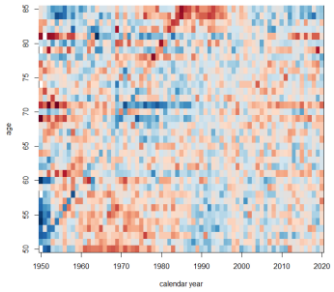
(a) Mapa color RH Mujeres No Covid



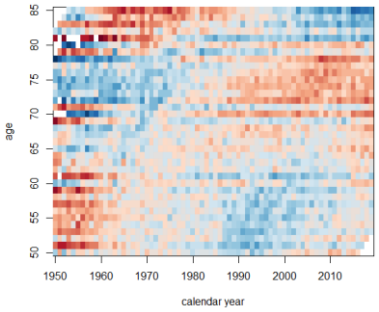
(b) Mapa color RH Mujeres Covid



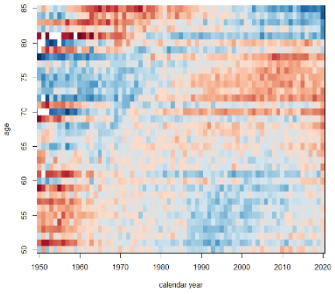
(c) Mapa color RH Hombres No Covid



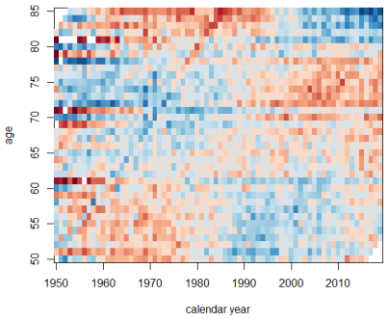
(d) Mapa color RH Hombres Covid



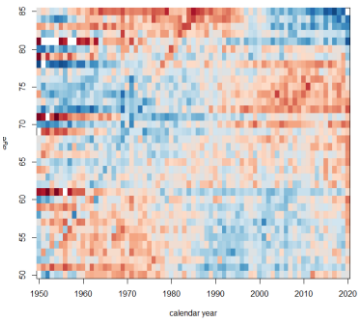
(e) Mapa color APC Mujeres No Covid



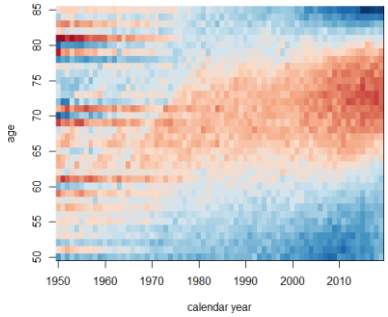
(f) Mapa color APC Mujeres Covid



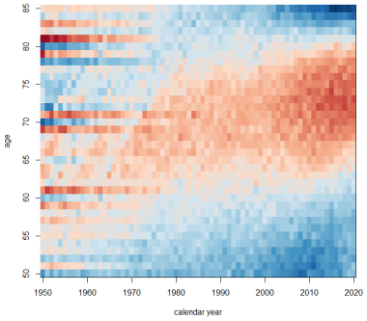
(g) Mapa color APC Hombres No Covid



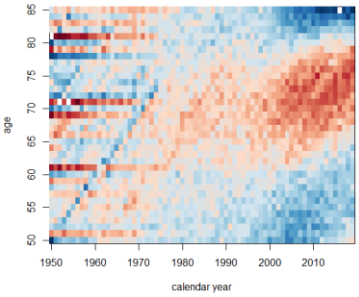
(h) Mapa color APC Hombres Covid



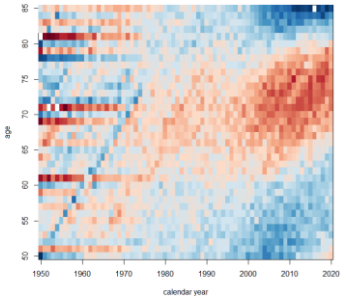
(i) Mapa color CBD Mujeres No Covid



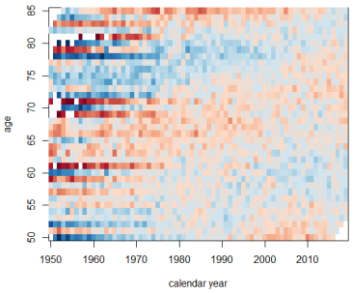
(j) Mapa color CBD Mujeres Covid



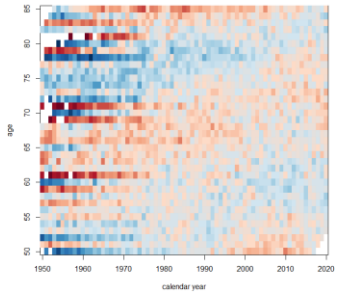
(k) Mapa color CBD Hombres No Covid



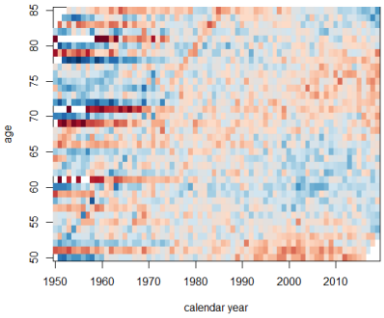
(l) Mapa color CBD Hombres Covid



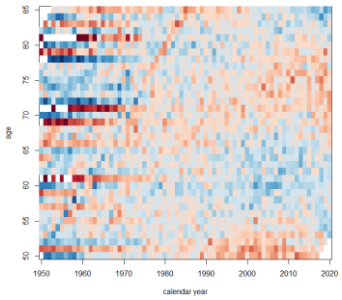
(m) Mapa color M6 Mujeres No Covid



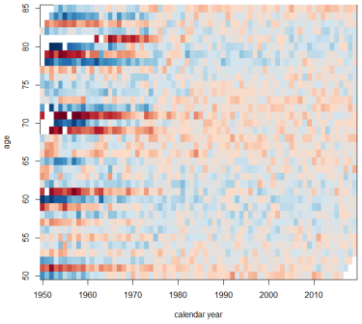
(n) Mapa color M6 Mujeres Covid



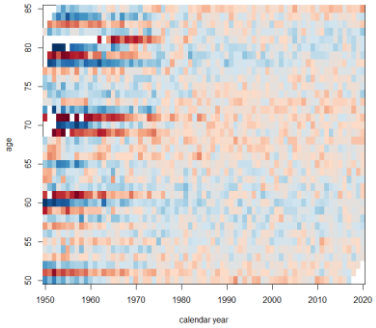
(o) Mapa color M6 Hombres No Covid



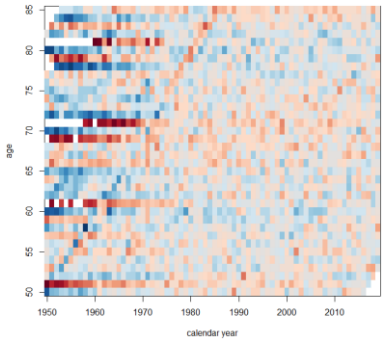
(p) Mapa color M6 Hombres Covid



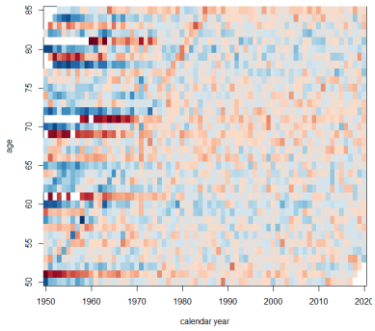
(q) Mapa color M7 Mujeres No Covid



(r) Mapa color M7 Mujeres Covid



(s) Mapa color M7 Hombres No Covid



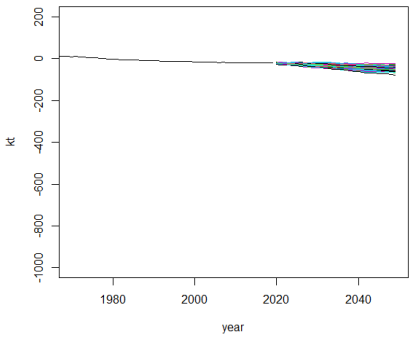
(t) Mapa color M7 Hombres Covid

Fuente: Elaboración propia, a partir de R

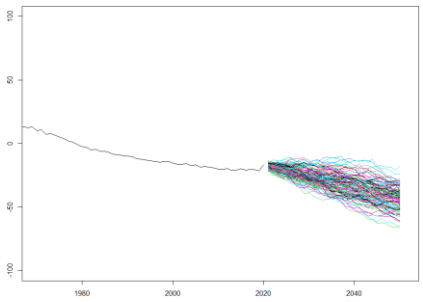
ANEXO III

Al igual que los anexos anteriores, se muestran las proyecciones del efecto tiempo para el resto de modelos estocásticos estudiados.

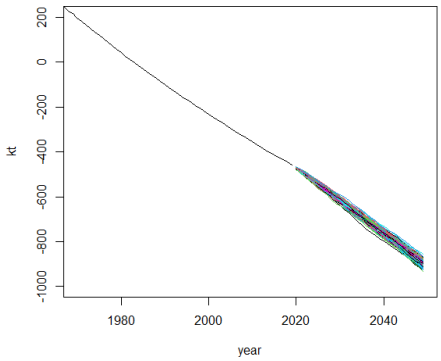
Figura III.1: Resultados proyecciones resto de modelos



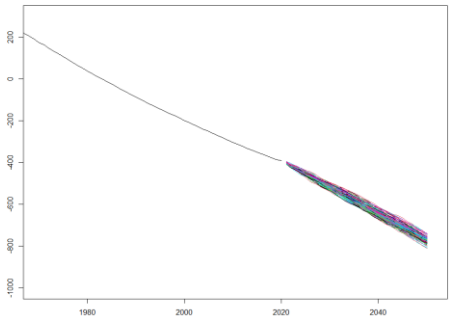
(a) Resultados proyección RH Mujeres No Covid



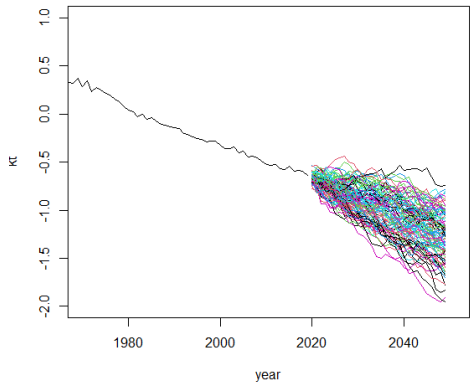
(b) Resultados proyección RH Mujeres Covid



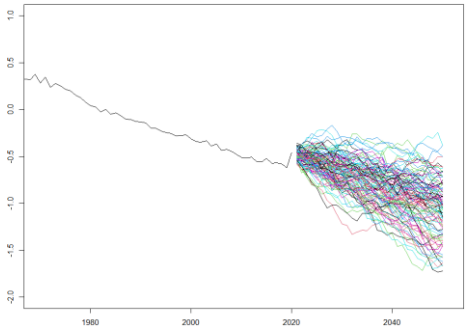
(c) Resultados proyección RH Hombres No Covid



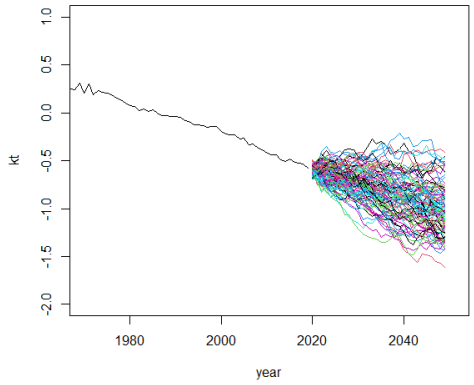
(d) Resultados proyección RH Hombres Covid



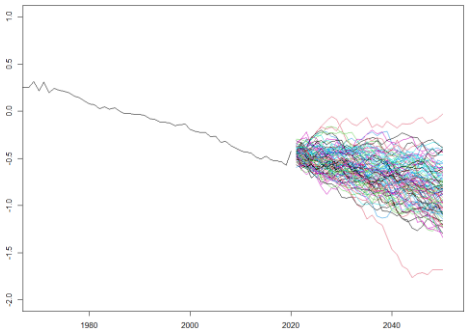
(e) Resultados proyección APC Mujeres No Covid



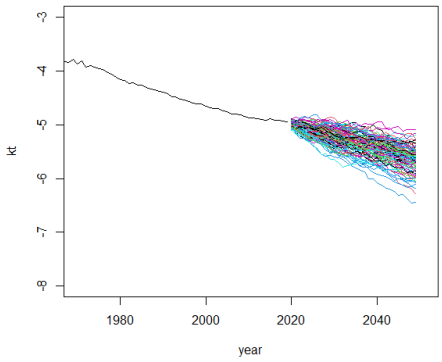
(f) Resultados proyección APC Mujeres Covid



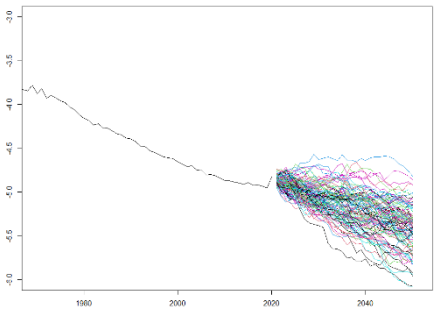
(g) Resultados proyección APC Hombres No Covid



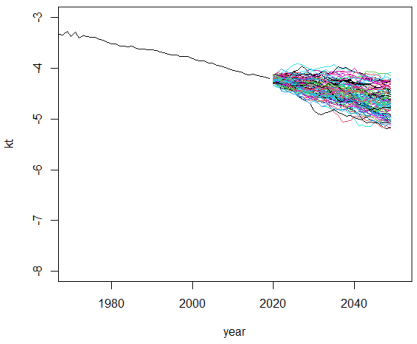
(h) Resultados proyección APC Hombres Covid



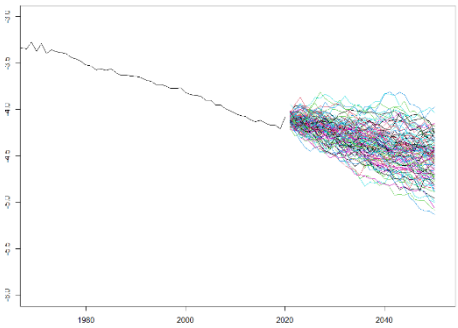
(i) Resultados proyección CBD Mujeres No Covid



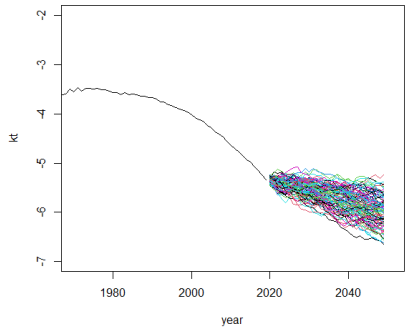
(j) Resultados proyección CBD Mujeres Covid



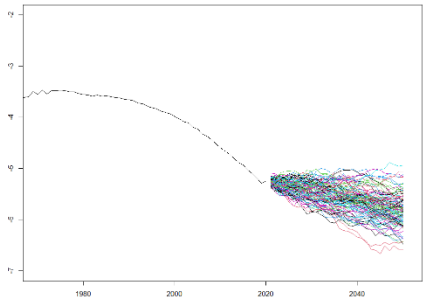
(k) Resultados proyección CBD Hombres No Covid



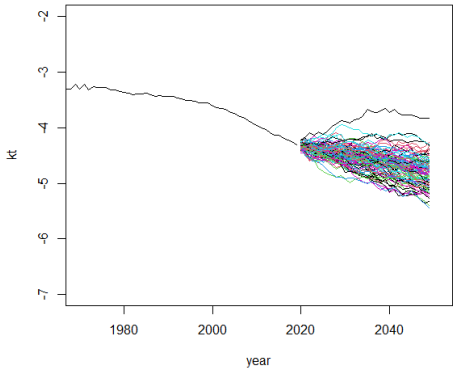
(l) Resultados proyección CBD Hombres Covid



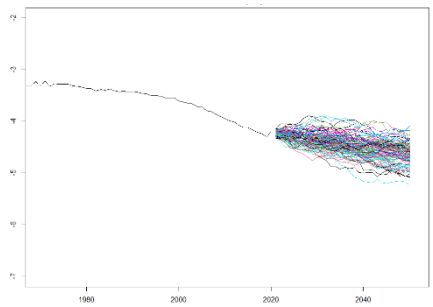
(m) Resultados proyección M6 Mujeres No Covid



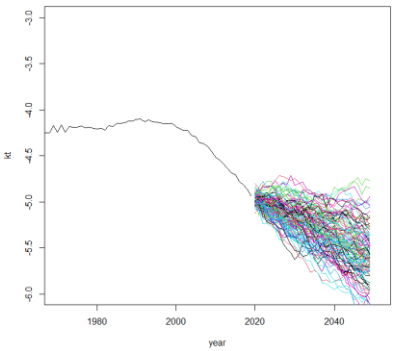
(n) Resultados proyección M6 Mujeres Covid



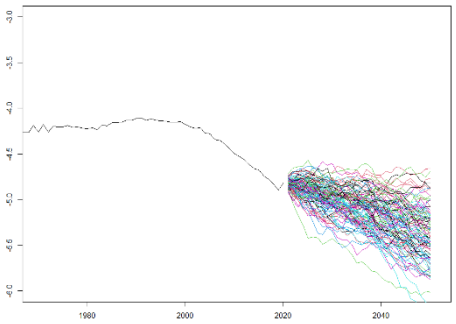
(o) Resultados proyección M6 Hombres No Covid



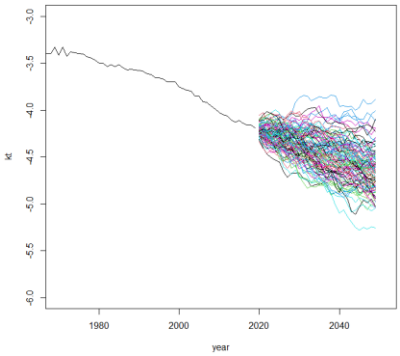
(p) Resultados proyección M6 Hombres Covid



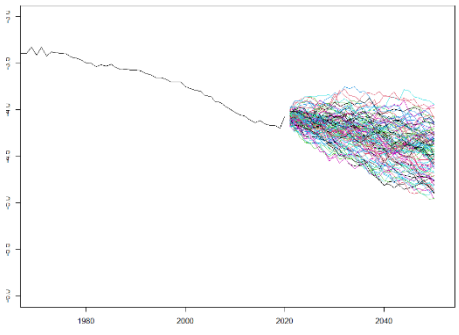
(q) Resultados proyección M7 Mujeres No Covid



(r) Resultados proyección M7 Mujeres Covid



(s) Resultados proyección M7 Hombres No Covid



(t) Resultados proyección M7 Hombres Covid

Fuente: Elaboración propia, a partir de R

ANEXO IV

En este anexo se adjunta los resultados, tanto de las rentas como del spread, del swap de longevidad, además de indicar los resultados tanto para hombre como mujer y teniendo en cuenta el COVID-19 y no.

Tabla IV.1: Tabla resultados de la renta y el spread de la valoración del swap

MODELOS	COVID	Renta Mediana	Renta P90	Spread Mediano	Spread P90
Lee-Carter (LC)	No covid	2.809,50€	2.810,07€	0,748%	0,770%
	Covid	2.808,81€	2.809,56€	0,720%	0,750%
Renshaw y Haberman (RH)	No covid	2.810,35€	2.810,89€	0,781%	0,803%
	Covid	2.809,72€	2.810,45€	0,756%	0,785%
Age-Period-Cohort (APC)	No covid	2.809,11€	2.809,81€	0,732%	0,760%
	Covid	2.808,20€	2.809,12€	0,696%	0,733%
Cairns-Blake-Dowd (CBD)	No covid	2.809,55€	2.810,21€	0,750%	0,776%
	Covid	2.808,75€	2.809,65€	0,718%	0,753%
CBD con efecto cohorte (M6)	No covid	2.806,67€	2.807,18€	0,619%	0,658%
	Covid	2.804,93€	2.805,76€	0,539%	0,573%
CBD con efecto cohorte y componente cuadráticos (M7)	No covid	2.807,39€	2.808,86€	0,664%	0,722%
	Covid	2.805,89€	2.807,90€	0,605%	0,684%

(a) Resultados valoración Mujeres

MODELOS	COVID	Renta Mediana	Renta P90	Spread Mediano	Spread P90
Lee-Carter (LC)	No covid	2.806,28€	2.807,44€	1,442%	1,487%
	Covid	2.805,02€	2.806,43€	1,392%	1,447%
Renshaw y Haberman (RH)	No covid	2.811,37€	2.811,72€	1,643%	1,657%
	Covid	2.811,23€	2.811,64€	1,637%	1,653%
Age-Period-Cohort (APC)	No covid	2.805,88€	2.807,10€	1,425%	1,474%
	Covid	2.804,64€	2.806,21€	1,377%	1,439%
Cairns-Blake-Dowd (CBD)	No covid	2.806,19€	2.807,54€	1,438%	1,491%
	Covid	2.804,76€	2.806,46€	1,381%	1,449%

CBD con efecto cohorte (M6)	No covid	2.802,06€	2.804,86€	1,275%	1,367%
	Covid	2.799,72€	2.802,68€	1,182%	1,299%
CBD con efecto cohorte y componente cuadráticos (M7)	No covid	2.805,40€	2.806,86€	1,407%	1,464%
	Covid	2.803,97€	2.805,81€	1,350%	1,423%

(b) Resultados valoración Hombres

Fuente: elaboración propia a partir de R

ANEXO V

Este anexo muestra todo el código utilizado a lo largo de este trabajo. Dicho código está divido en dos, la primera parte de la programación realizada en R y la segunda realizada en Matlab.

Programación en R script

```
#-------------------------------------------------------------------------#
#                          DESCARGA DE LA BBDD                            #
#-------------------------------------------------------------------------#


library("demography")


BBDD <- hmd.mx(country="ESP", username username, password = password,
label="Spain")


edades<-c(0:110)
#Expuestoa por genero
Expuestos.M<-BBDD$pop$female
Expuestos.H<-BBDD$pop$male
Expuestos.Total. <-BBDD$pop$total


#Tasa de mortalidad
Mx.M<-BBDD$rate$female
Mx.H<-BBDD$rate$male
```

```
Mx.Total<-BBDD$rate$total


#Sacamos las defunciones a través de la tasa de mortalidad y los supervivientes

Defunc.M<-Mx.M*Expuestos.M

Defunc.H<-Mx.H*Expuestos.H

Defunc.Total<-Mx.Total*Expuestos.Total



#-------------------------------------------------------------------------------------------------#

#                                          GRÁFICOS                                               #

#-------------------------------------------------------------------------------------------------#


vector_colores<-c(rep("#A36B2B",15),rep("#B68E53",15),rep("#C5A872",15),
rep("#CFBA86",15), rep("#CED8C2",15),rep("#7FB1A2",15),
rep("#4C9E9E",15),rep("#2686A0",8))

vector_leyenda<-c("1908-1922","1923-1937","1938-1952","1953-1967","1968-1982",
"1983-1997","1998-2012","2013-2020")

###Gráfico de Fallecimientos de hombres

par(mfrow=c(1,2))

matplot(x=edades,y=Defunc.H,type="l",lty=3,col=vector_colores,xlab="Edad",
ylab="Defunciones", ylim = c(0,18000),main="Fallecimiento de hombres")

legend(75,19000,bty="n",legend=vector_leyenda,col=c("#A36B2B","#B68E53","#C5A
872","#CFBA86" , "#CED8C2","#7FB1A2","#4C9E9E","#2686A0") ,cex = 0.7,lty =
1,bg="white",lwd=2)


matplot(x=edades,y=Defunc.M,type="l",lty=3,col=vector_colores,xlab="Edad",
ylab="Defunciones", ylim = c(0,18000),main="Fallecimientos de mujer")

legend(75,19000,bty="n",legend=vector_leyenda,col=c("#A36B2B","#B68E53","#C5A
872","#CFBA86" , "#CED8C2","#7FB1A2","#4C9E9E","#2686A0") ,cex = 0.7,lty =
1,bg="white",lwd=2)


###              Descarga de Esperanza de vida para distintos países                ###

Ex_ESP <- e0(BBDD, years = BBDD$year, type = "period")
```

```
BBDD_HKG<-hmd.mx(country="HKG", username=username, password = password)

Ex_HKG <- e0(BBDD_HKG, years = BBDD_HKG$year, type = "period")


BBDD_CHE<-hmd.mx(country="CHE", username=username, password = password)

Ex_CHE <-  e0(BBDD_VHE, years = BBDD_CHE$year, type = "period")


BBDD_JPN<-hmd.mx(country="JPN", username=username, password = password)

Ex_JPN <- e0(BBDD_JPN, years = BBDD_JPN$year, type = "period")


BBDD_USA<-hmd.mx(country="USA", username=username, password = password)

Ex_USA <- e0(BBDD_USA, years = BBDD_USA$year, type = "period")


BBDD_ITA<-hmd.mx(country="ITA", username=username, password = password)

Ex_ITA <-  e0(BBDD_ITA, years = BBDD_ITA$year, type = "period")


Ex_Grafico<-
cbind(Ex_ESP[c(53:(length(Ex_ESP)1))],Ex_JPN[c(14:(length(Ex_JPN)))],Ex_USA[c(
28:(length(Ex_USA)))],Ex_ITA[c(76:(length(Ex_ITA)))])

colnames(Ex_Grafico)<-c("España","Japon","Estados Unidos","Italia")


#Gráfico de la evolución de la esperanza de vida

plot(x=c(1960:2019), Ex_ESP[c(53:(length(Ex_ESP)-1))], type="l",
col="dodgerblue4",lwd=2, xlab="A?os", ylab = "Esperanza de vida", las = 1, ylim =
c(65, 90))

lines(x=c(1986:2019), Ex_HKG[c(1:(length(Ex_HKG)))], col="pink2")

lines(x=c(1960:2019), Ex_JPN[c(14:(length(Ex_JPN)-1))], col="darkgoldenrod1")

lines(x=c(1960:2019), rowMeans(Ex_GraficoEU),col="cadetblue3")

legend("topleft", c("España", "Hong Kong", "Japon","Media Europa"),lty = c(1,1), cex
= 1, bty = "n",col = c("dodgerblue4", "pink2","darkgoldenrod1","cadetblue3"))


#Gráfico densidad población joven, y hasta los 65 años, y población total

Poblacion.joven <- Expuestos.Total[c(0:30),]
```

```
Poblacion.no.jubilada <- Expuestos.Total[c(0:65),]


library(ggplot2)

plot(x=colnames(Expuestos.Total), colSums(Expuestos.Total),yaxt = "n", type="l",
col="#C5A872", xlab="Años",  ylab = "Población (en millones)", las=1, lty=1,lwd=2,
ylim = c(10e6, 50e6), main="Población menor de 30 años respecto de la población
total")

lines(x=colnames(Expuestos.Total), colSums(Población.joven), col="#2686A0")

lines(x=colnames(Expuestos.Total), colSums(Población.no.jubilada), col="#CFBA86")

axis(2, at=c(10e6, 20e6, 30e6, 40e6, 50e6),labels=c("10", "20", "30", "40", "50"), las=1)

legend("topleft",legend=c("Población Total","Población <65años","Poblaci?n
<30años"),col=c("#C5A872","#CFBA86","#2686A0") cex = 0.7,lty =
1,bg="white",lwd=2, bty = "n")


#Gráfico de la evolución de la esperanza de vida

Ex_GraficoEU<-
cbind(Ex_AUT[c(14:length(Ex_AUT))],Ex_BEL[c(120:(length(Ex_BEL)-1))],

        Ex_ESP[c(53:(length(Ex_ESP)-1))],Ex_PRT[c(22:length(Ex_PRT)-
1)],Ex_DNK[c(128:length(Ex_DNK)-2)],

        Ex_FRA[c(145:length(Ex_FRA))],Ex_GRB[c(40:length(Ex_GRB)-
1)],Ex_NLD[c(111:length(Ex_NLD))],

        Ex_CHE[c(86:length(Ex_CHE)-1)],Ex_ITA[c(89:length(Ex_ITA))])

colnames(Ex_GraficoEU)<-
c("AUT","BEL","ESP","PRT","DNK","FRA","GRB","NLD","CHE","ITA")


plot(x=c(1960:2019), Ex_AUT[c(14:length(Ex_AUT))], type="l", col="cadetblue3",
xlab="A?os", ylab = "Esperanza de vida", las = 1, ylim = c(65, 90))

lines(x=c(1960:2019), Ex_BEL[c(120:(length(Ex_BEL)-1))], col="aquamarine")

lines(x=c(1960:2019), Ex_ESP[c(53:(length(Ex_ESP)-1))],col="dodgerblue4",lwd=2)

lines(x=c(1960:2019), Ex_PRT[c(21:(length(Ex_PRT)-1))],col="burlywood2")

lines(x=c(1960:2019), Ex_DNK[c(126:length(Ex_DNK)-2)], col="mistyrose3")

lines(x=c(1960:2019), Ex_FRA[c(145:length(Ex_FRA))],col="darkseagreen")

lines(x=c(1960:2019), Ex_LUX[c(1:length(Ex_LUX)-1)],col="darkslategray2")

lines(x=c(1960:2019), Ex_GRB[c(39:length(Ex_GRB)-1)],col="khaki3")
```

```
lines(x=c(1960:2019), Ex_NLD[c(111:length(Ex_NLD))],col="ivory3")

lines(x=c(1960:2019), Ex_CHE[c(85:length(Ex_CHE)-1)],col="lightsalmon")

lines(x=c(1960:2019), Ex_ITA[c(89:length(Ex_ITA))],col="lavenderblush3")

legend("topleft", Paises, lty = c(1,1), cex = 0.9, bty = "n",col = c("cadetblue3",
"aquamarine","dodgerblue4","burlywood2","mistyrose3","darkseagreen","darkslategray
2","khaki3" ,"ivory3" ,"lightsalmon", "lavenderblush3" ))


#Gáfico de Acontecimientos históricos

par(mfrow=c(1,3))

#Gripe española

matplot(x=edades,y=Defunc.Total[,c(9:13)],type="l",lty=1,col=c("#A36B2B","#B68E5
3","#2686A0","#7FB1A2"),xlab="Edad",ylab="Defunciones",xlim=c(5,75), ylim =
c(0,15000),main="Efecto gripe española")

legend("topright",legend=c("1917","1918","1919","1920"),col=c("#A36B2B","#B68E5
3","#2686A0","#7FB1A2"),cex = 0.9,lty = 1,bg="white",bty="n")

#Guerra civil

matplot(x=edades,y=Defunc.H[,c(28:33)],type="l",lty=1,col=c("#C5A872","#B68E53",
"#A36B2B","#2686A0", "#4C9E9E","#7FB1A2"),xlab="Edad",ylab="Defunciones",
xlim=c(10,60), ylim = c(0,5000),main="Efecto Guerra Civil (Hombres)")

legend("topleft",legend=c("1935","1936","1937","1938","1939","1940"),col=c("#C5A8
72","#B68E53","#A36B2B","#2686A0", "#4C9E9E","#7FB1A2")  ,cex = 0.8,lty =
1,bg="white",lwd=2, bty="n")

#Covid

matplot(x=edades,y=Defunc.Total[,c(111:113)],type="l",lty=1,col=c("#7FB1A2","#CE
D8C2","#A36B2B"),xlab="Edad",ylab="Defunciones", ylim =
c(0,25000),main="Efecto covid")

legend("topleft",legend=c("2018","2019","2020"),col=c("#7FB1A2","#CED8C2","#A3
6B2B") ,cex = 0.9,lty = 1,bg="white",lwd=2,bty="n")


###                    Gráficos evolución ratio de mortalidad                    ###

par(mfrow=c(1,3))

plot(BBDD, series = "total", col=paletteer_c("grDevices::Green-Brown", 113),
main="Tasa mortalidad total (1908-2020)", ylab="Ratio de mortalidad
logaritmico",xlab="Edades")

legend("topleft",bty="n",legend=c("1908","2020"),col=c("#A36B2B","#2686A0") ,
cex = 0.9,lty = c(1,1),bg="white",lwd=2)
```

```
plot(BBDD, series = "male", col=paletteer_c("grDevices::Green-Brown", 113),
main="Tasa mortalidad masculina (1908-2020)")

legend("topleft",bty="n",legend=c("1908","2020"),col=c("#A36B2B","#2686A0") ,
cex = 0.9,lty = c(1,1),bg="white",lwd=2)


plot(BBDD, series = "female", col=paletteer_c("grDevices::Green-Brown", 113),
main="Tasa mortalidad femenina (1908-2020)")

legend("topleft",bty="n",legend=c("1908","2020"),col=c("#A36B2B","#2686A0") ,cex
= 0.9,lty = c(1,1),bg="white",lwd=2)

#-------------------------------------------------------------------------------------------#

#                          ESTIMACIONES Y PROYECCIONES                                      #

#-------------------------------------------------------------------------------------------#

library("demography")

library(StMoMo)

library(paletteer)


#Funciones necesarias

LC <- lc()

CBD <- cbd(link = "log")

APC <- apc()

M6 <- m6(link = "log")

M7 <- m7(link = "log")

RH<-rh(link = "log")


#Creamos la BBDD a la estructura del paquete

BBDDmale <- StMoMoData(BBDD, series = "male")

BBDDfemale <- StMoMoData(BBDD, series = "female")

BBDDtotal <- StMoMoData(BBDD, series = "total")


#                                  Lee-Carter                                               #

####Ajustamos a edades
```

```
ages.fit <- 50:85
years.fit <- 1950:2019
#Cohorte de peso equiponderado en todas las observaciones
wxt <- genWeightMat(ages=ages.fit, years=years.fit,  clip=0)
#Ajustamos el modelo

LCfit_M <- fit(LC, data=BBDDfemale, ages.fit=ages.fit, years.fit=years.fit, wxt = wxt)
LCfit_H <- fit(LC, data=BBDDmale, ages.fit=ages.fit, years.fit=years.fit, wxt = wxt)

plot(LCfit_M)
plot(LCfit_H)

#Residuos de Deviance
LCres_M <- residuals(LCfit_M)
LCres_H <- residuals(LCfit_H)

par(mfrow=c(1,1))
plot(LCres_M, type = "colourmap", reslim = c(-3.5, 3.5))
plot(LCres_H, type = "colourmap", reslim = c(-3.5, 3.5))

plot(LCres_M, type = "scatter", reslim = c(-3.5, 3.5))
plot(LCres_H, type = "scatter", reslim = c(-3.5, 3.5))
###Proyección
#Proyeccion central h=30 años
LCfor_M <- forecast(LCfit_M, h=30)
LCfor_H <- forecast(LCfit_H, h=30)

plot(LCfor_M, parametricbx = FALSE)
plot(LCfor_H, parametricbx = FALSE)
```

```
###Simulación
#1000 simulaciones
LCsim_M <- simulate(LCfit_M, nsim=10000, h=30)
LCsim_H <- simulate(LCfit_H, nsim=10000, h=30)

#Trazar las simulaciones de LC
par(mfrow=c(1,1))
plot(LCfit_H$years, LCfit_H$kt[1,],
    xlim=c(1950,2049), ylim=c(-75,30), type="l", xlab="year", ylab="kt")
matlines(LCsim_H$kt.s$years, LCsim_H$kt.s$sim[1,,1:100],type="l", lty=1)

plot(LCfit_M$years, LCfit_M$kt[1,],
    xlim=c(1950,2049), ylim=c(-75,30), type="l", xlab="year", ylab="kt")
matlines(LCsim_M$kt.s$years, LCsim_M$kt.s$sim[1,,1:100],type="l", lty=1)

#Similar para el resto de modelos
#-------------------------------------------------------------------------------------------------#
#                                    MATRIZ DE AIC, BIC, LL                                       #
#-------------------------------------------------------------------------------------------------#
Comparativos_M<-data.frame(row.names = c("LC","APC","CBD","M6","M7"))
Comparativos_H<-data.frame(row.names = c("LC","APC","CBD","M6","M7"))

AICtotal_M<-
c(AIC(LCfit_M),AIC(APCfit_M),AIC(CBDfit_M),AIC(M6fit_M),AIC(M7fit_M))
AICtotal_H<-
c(AIC(LCfit_H),AIC(APCfit_H),AIC(CBDfit_H),AIC(M6fit_H),AIC(M7fit_H))
BICtotal_M<-
c(BIC(LCfit_M),BIC(APCfit_M),BIC(CBDfit_M),BIC(M6fit_M),BIC(M7fit_M))
BICtotal_H<-
c(BIC(LCfit_H),BIC(APCfit_H),BIC(CBDfit_H),BIC(M6fit_H),BIC(M7fit_H))
logLiktotal_M<-
c(logLik(LCfit_M),logLik(APCfit_M),logLik(CBDfit_M),logLik(M6fit_M),logLik(M7
fit_M))
```

```
logLiktotal_H<-
c(logLik(LCfit_H),logLik(APCfit_H),logLik(CBDfit_H),logLik(M6fit_H),logLik(M7fi
t_H))


Comparativos_M<-cbind(Comparativos_M,AICtotal_M,BICtotal_M, logLiktotal_M)

Comparativos_H<-cbind(Comparativos_H,AICtotal_H,BICtotal_H, logLiktotal_H)

colnames(Comparativos_M)<-c("AIC","BIC","logLik")

colnames(Comparativos_H)<-c("AIC","BIC","logLik")

Comparativos_M

Comparativos_H

#De manera similar para el caso de COVID, modificando el periodo de años

####Ajustamos a edades

ages.fit <- 50:85

years.fit.Covid <- 1950:2020

##Cohorte de peso equiponderado para todas las observaciones

wxt.Covid <- genWeightMat(ages=ages.fit, years=years.fit.Covid,  clip=0)


#Guardamos en un R.Data los resultados de las simulaciones y la población inicial,
tanto para hombre como para mujer

LC.NoCovid<-LCsim_M$rates

APC.NoCovid<-APCsim_M$rates

RH.NoCovid<-RHsim_M$rates

CBD.NoCovid<-CBDsim_M$rates

M6.NoCovid<-M6sim_M$rates

M7.NoCovid<-M7sim_M$rates


LC.Covid<-LCsim.Covid_M$rates

APC.Covid<-APCsim.Covid_M$rates

RH.Covid<-RHsim.Covid_M$rates

CBD.Covid<-CBDsim.Covid_M$rates

M6.Covid<-M6sim.Covid_M$rates

M7.Covid<-M7sim.Covid_M$rates
```

```
save(LC.NoCovid, RH.NoCovid, APC.NoCovid, CBD.NoCovid, M6.NoCovid,
M7.NoCovid,
    LC.Covid, RH.Covid, APC.Covid, CBD.Covid, M6.Covid, M7.Covid,
file="Simulacion_M.RData")

mxt.2019 <-BBDD$rate$total[,"2019"]
Ex.2019<-BBDD$pop$total[,"2019"]
Def.2019<-mxt.2019*Ex.2019

mxt.2020 <-BBDD$rate$total[,"2020"]
Ex.2020<-BBDD$pop$total[,"2020"]
Def.2020<-mxt.2020*Ex.2020

Df.Poblacion<-data.frame(mxt.2019)
Df.Poblacion<-cbind(Df.Poblacion, Ex.2019, Def.2019, mxt.2020, Ex.2020, Def.2020)

save(Df.Poblacion, file="Poblacion.2019-2020.RData")

#Se vuelcan los resultados en Excel para el posterior tratamiento. Para hombre y mujer.
# Se cargan las simulaciones
load('Simulacion_M.RData')
load('Población.2019-2020.RData')

# Se carga la curva RFR de EIOPA
rfr <- read.csv2('2021.12.31-CURVA-RFR-EIOPA.csv',sep=",",header = T,dec = ".")
rfr$FD <- (1+rfr$TCC)^-(rfr$AÑO)

fichero.salida <- 'Inputs.LongSwap.xlsx'
escenarios <- c('NoCovid', 'Covid')
año.0 <- c(2019, 2020)
```

```
edad.ini <- 65
edad.fin <- 85
# tipo.técnico <- 0.010695 # Tipo soberano España 20 años (31/12/21)

excel.resultados <-createWorkbook()



hoja <- 'RFR'
datos.excel <- rfr
addWorksheet(excel.resultados,hoja)
writeData(wb=excel.resultados, x=datos.excel, sheet=hoja,colNames = F,rowNames =
F,startCol = 1, startRow = 1)


edades.0 <- as.numeric(row.names(Df.Poblacion))
edades.0[length(edades.0)] <- 111
edades.finales <- t(t(edades.0[edades.0>=edad.ini & edades.0<=edad.fin]))


for (esc in (1:length(escenarios)))
{
 escenario.i <- escenarios[esc]


 if (año.0[esc] == 2020){


  qx.0 <- t(t(Df.Poblacion$mxt.2020[edades.0>=edad.ini & edades.0<=edad.fin]))
 }else{
  qx.0 <- t(t(Df.Poblacion$mxt.2019[edades.0>=edad.ini & edades.0<=edad.fin]))
 }


 hoja <- paste0('qx.0-',escenario.i)
 datos.excel <- cbind(edades.finales,qx.0)
 addWorksheet(excel.resultados,hoja)
```

```
  writeData(wb=excel.resultados, x=datos.excel, sheet=hoja,colNames = F,rowNames =
F,startCol = 1, startRow = 1)


  # Lista de modelos
  modelos <- c('LC.','APC.','CBD.', 'M6.', 'M7.','RH.')


  # Lista de modelos con escenario no covid o covid
  modelos.esc <- paste0(modelos,escenario.i)


  for (m in (1:length(modelos)))
  {
   # m <- 1


   sim.in <- eval(parse(text=paste0(modelos.esc[m])))
   edades <- as.numeric(eval(parse(text=paste0('dimnames(',modelos.esc[m],')[[1]]'))))
   años <- as.numeric(eval(parse(text=paste0('dimnames(',modelos.esc[m],')[[2]]'))))
   n.sim <- dim(sim.in)[3]
   ind.edades <- edades>=edad.ini & edades<=edad.fin
   edades <- edades[ind.edades]
   sim.in <- sim.in[ind.edades,,]


   n.edades <- length(edades)
   años.nacimiento <- año.0 - edades
   años.fut <- años[años >= año.0]
   n.años.fut <- length(años.fut)



   sim.out <- data.frame(matrix(0,n.edades,n.sim))
   dim(sim.out)
   # rownames() <- paste0(edades)
   # names(sim.out) <- paste0(años.nacimiento)
```

```
    for (iSim in (1:n.sim))
    {
     # iSim <- 1
     for (iaño in (1:1))#length(años.nacimiento)))
     {
      # iaño <- 1
      V.Pos.Fila <- iaño:length(años.nacimiento)
      V.Pos.Col <- 1:(length(años.nacimiento)- iaño + 1)
      if (length(sim.in[V.Pos.Fila,V.Pos.Col,iSim]) > 1)
      {
       Diagonal <- diag(sim.in[V.Pos.Fila,V.Pos.Col,iSim])
       sim.out[V.Pos.Fila,iSim] <- Diagonal
      }else{
       sim.out[V.Pos.Fila,iSim] <- sim.in[V.Pos.Fila,V.Pos.Col,iSim]
      }
     }
    }

    hoja <- modelos.esc[m]
    datos.excel <- t(sim.out)
    addWorksheet(excel.resultados,hoja)
    writeData(wb=excel.resultados, x=datos.excel, sheet=hoja,colNames = F,rowNames
= F,startCol = 1, startRow = 1)


  } # Fin modelo
} # Fin escenario: NoCovid y Covid

saveWorkbook(excel.resultados, fichero.salida, overwrite=T)
```

Programación en Matlab

```
%_____________________________________________________________________%
%          Creación de funciones necesarias para la valoración del swap          %
%_____________________________________________________________________%

%                              Función de interpolación                              %
function output = FN_interpolador(X, Y, X_interpol, interpolacion,extrapolacion)
%---------------------------------------------------------------------------
%{
Esta función realiza la interpolación lineal o exponencial de un conjunto de
fechas o plazos dentro un único vector de fechas-plazos y una matriz de
valores.

En el caso de interpolación lineal, extendemos los valores en los extremos
hacia la izquierda y hacia la derecha (pensado para tipos o volatilidades).

En el caso de interpolación exponencial, a partir del extremo izquierdo X
ponemos cero y a partir del extremo derecho de X ponemos decrecimiento
exponencial basado en el último dato de X (pensado en factores de descuento).


INPUTS:

- X          = vector de fechas o plazos

- Y          = matriz de valores de una función en X

- X_interpol = vector de fechas o plazos a interpolar

- interpolacion:
```

0 -> exponencial

1 -> lineal

2 -> repetir el último dato (para relleno)

- extrapolacion:

0 -> este no es valor de sistema sino interno. Sirve para extrapolar FD a nuestro estilo: valores anteriores a uno y posteriores se calculan manteniendo cte el tipo cupón cero asociado al último FD pasado

1 -> repite el valor del extremo: el primer dato para valores anteriores y el último dato para posteriores (para relleno)

2 -> se mantiene la tendencia de los dos últimos puntos para datos posteriores y de los dos primeros puntos para datos anteriores.

OUTPUT:

- output : matriz de tantas filas como X_interpol y columnas como columnas tenga la matriz Y

%}

%--

%Cargamos los valores de catálogo de interpolación y extrapolación

E_CAT_TIPO_EXTRAPOLACION.FACTORES_DESCUENTO = 0;
E_CAT_TIPO_EXTRAPOLACION.VALOR_EXTREMO = 1;
E_CAT_TIPO_EXTRAPOLACION.TENDENCIA = 2;

E_CAT_TIPO_INTERPOLACION.EXPONENCIAL = 0;

```
E_CAT_TIPO_INTERPOLACION.LINEAL              = 1;
E_CAT_TIPO_INTERPOLACION.REPETIR_ULTIMO_VALOR = 2;



% queremos columnas
X = X(:);
if min(size(Y))==1
   Y = Y(:);
end
X_interpol = X_interpol(:);



% Se ordenan los datos según X, por si acaso
[X indice] = sortrows(X, 1);
Y = Y(indice,:,:);

% los anteriores a X
ind_anterior = (X_interpol < X(1));

% los posteriores a X
ind_posterior = (X_interpol > X(end));

% los puntos de interpolación que están dentro del rango de X
ind_rango = (~ind_anterior) & (~ind_posterior);

% Guardamos espacio para la salida
output = zeros(length(X_interpol), size(Y,2),size(Y,3));

%------------------
% Extrapolación
```

```
%------------------

switch extrapolacion
   case E_CAT_TIPO_EXTRAPOLACION.FACTORES_DESCUENTO
      % Extrapolación usada cuando se pasan curvas de FD no de tipos (no
      % lo usa el sistema BBVA). Esta extrapolación asigna valor cero a
      % los FD anteriores y los posteriores los calcula manteniendo
      % constante el último tipo. Como pueden pasar curvas de fechas y
      % FD, será necesario normalizar para que todo funcione bien.

% %        X_interpol = X_interpol - X(1);
% %        X = X - X(1);

      % Los anteriores a X los ponemos a 0
      output(ind_anterior,:,:) = 1;

      % Los posteriores a X van a tener decaemiento exponential con tipo cte
determinado por el
      % último dato
      if any(ind_posterior)
         output(ind_posterior,:,:) = exp(log(repmat(Y(end,:,:),[sum(ind_posterior),1])).*
...

repmat((X_interpol(ind_posterior)./X(end)),[1,size(Y,2),size(Y,3)]));
      end


   case E_CAT_TIPO_EXTRAPOLACION.VALOR_EXTREMO
      % Extrapolación que consiste en repetir dato anterior en el caso de
      % los primeros y el dato posterior en el caso de los últimos.
      if any(ind_anterior)
```

```
        output(ind_anterior,:,:)  =repmat(Y(1,:,:), [sum(ind_anterior) , 1, 1]); % los
anteriores a X los ponemos a Y(1)
    end
    if any(ind_posterior)
        output(ind_posterior,:,:) = repmat(Y(end,:,:), [sum(ind_posterior) , 1, 1]); % los
posteriores a X los ponemos a Y(end)
    end


  case E_CAT_TIPO_EXTRAPOLACION.TENDENCIA
    % Extrapolación en la que se aplica la tendencia de los dos primeros
    % datos si extrapolamos los anteriores y la tendencia de los dos
    % últimos datos si extrapolamos los posteriores.

    if any(ind_anterior)
      % No hay remedio y tenemos que hacer la regresión por columnas
      for i = 1 : size(Y,2)
        for j = 1 : size(Y,3)
          % Realizamos una regresión con los dos primeros datos
          output(ind_anterior,i,j) =
polyval(polyfit(X(1:2),Y(1:2,i,j),1),X_interpol(ind_anterior));
        end
      end
    end

    if any(ind_posterior)
      % No hay remedio y tenemos que hacer la regresión por columnas
      for i = 1 : size(Y,2)
        for j = 1 : size(Y,3)
          % Realizamos una regresión con los dos últimos datos
          output(ind_posterior,i,j) = polyval(polyfit(X(end-1:end),Y(end-
1:end,i,j),1),X_interpol(ind_posterior));
```

```
            end
        end
    end
end

%-------------------
% Interpolación
%-------------------

% La interpolación solo se aplicará a los ind_rango (dentro del rango)

if any(ind_rango)
   % Sólo interpolamos si existen valores en el rango

   switch interpolacion


      case E_CAT_TIPO_INTERPOLACION.EXPONENCIAL
         % Interpolación exponencial

         if length(X)==1
            output(ind_rango,:,:) = Y(1,:,:);
         else
            % En este apartado hay que incorporar un detalle para
            % resolver interpolación exponencial con datos Y cero o
            % negativos. En estos casos, en aquellos intervalos de Y
            % con valores negativos o cero interpolaremos linealmente,
            % y en los intervalos donde los Y sean positivos
            % interpolaremos exponencialmente
```

```
            % Comprobamos si existe algún valor Y negativo o cero
            for i = 1 : size(Y,3)

               % comprobamos si hay algún elemento cero o negativo
               hay_problem = any(Y(:,:,i) <= 0);

               if hay_problem == 0
                  % Si resulta que no hay ningun valor negativo o
                  % cero, interpolamos exponencialmente sin problemas

                  output(ind_rango,:,i) = exp(interp1q(X, log(Y(:,:,i)),
X_interpol(ind_rango)));

               else
                  % Debemos barrer por columna, no hay otra
                  for col = 1:size(Y,2)

                     ind_corte = find(Y(:,col,i) <= 0,1,'last');

                     if isempty(ind_corte)
                        % Si en esa columna que no hay ningun valor negativo o
                        % cero, interpolamos exponencialmente sin problemas

                        output(ind_rango,col,i) = exp(interp1q(X, log(Y(:,col,i)),
X_interpol(ind_rango)));

                     elseif ind_corte == length(X) || ind_corte == length(X)-1
                        % Comprobamos hay algún intervalo donde interpolar
                        % exponencialmente. Si no lo hay directamente
                        % interpolamos linealmente
                        output(ind_rango,col,i) = interp1q(X, Y(:,col,i),
X_interpol(ind_rango));
```

```
                else
                    % Este es el caso en el que hacemos un cachito de interpolación
                    % lineal y otro cachito de exponencial

                    % Extremos el valor de X correspondiente a
                    % ind_corte +1, que sabemos que existe porque no
                    % entró en el apartado anterior
                    X_corte = X(ind_corte + 1);

                    ind_lineal = X_interpol < X_corte;
                    ind_exp    = X_interpol >= X_corte;

                    % Podemos interpolar linealmente sobre toda la curva
                    output(ind_rango & ind_lineal,col,i) = interp1q(X, Y(:,col,i),
X_interpol(ind_rango & ind_lineal));
                    % Pero la interpolación exponencial sólo la hacemos
                    % sobre los datos de X,Y por encima del corte (+1
                    % posición para excluir el intervalo malo último)
                    if any(ind_exp)
                        output(ind_rango & ind_exp,col,i) = exp(interp1q(X(ind_corte +
1:end), log(Y(ind_corte + 1:end,col,i)), X_interpol(ind_rango & ind_exp)));
                    end

                end
            end
        end

    end
end

case E_CAT_TIPO_INTERPOLACION.LINEAL
```

```
        % Interpolación lineal

        if length(X)==1
            output(ind_rango,:,:) = Y(1,:,:);
        else
            for i = 1 : size(Y,3)
                output(ind_rango,:,i) = interp1q(X, Y(:,:,i), X_interpol(ind_rango));
            end
        end

    case E_CAT_TIPO_INTERPOLACION.REPETIR_ULTIMO_VALOR % repetir último dato.
        % hacemos la interpolación dentro del rango de X
        if length(X)==1
            output(ind_rango,:,:) = Y(1,:,:);
        else
            % Extraemos los indices que en ind_rango aparezcan con un 1
            ind_interp = find(ind_rango == 1);

            % Analizar cada uno de los valores de X_interpol comparándolo
            % con cada X
            for i = 1:length(ind_interp)
                ind = find( X <= X_interpol(ind_interp(i)) , 1, 'last');
                % Rellenamos las lascas
                output(ind_interp(i),:,:) = Y(ind,:,:);
            end
        end
    end
end

%                    Función de activar excel                    %
```

```
function FN_activate_sheet(Excel,Sheet)
% Activate specified worksheet in workbook.

% Initialise worksheet object
WorkSheets = Excel.sheets;

% Get name of specified worksheet from workbook
try
   TargetSheet = get(WorkSheets,'item',Sheet);
catch
   error('MATLAB:xlsread:WorksheetNotFound',...
        'Specified worksheet was not found.');
end

% activate worksheet
Activate(TargetSheet);

%                                Función rango de excel                                %
function Valor_rango = FN_Captura_rango_Excel(Excel,ini_rango,modo)

%{
**********************************************************************
**
   Esta función captura el valor de un rango de Excel

INPUTS:

   - Excel : Objeto de Excel

   - ini_rango: Rango de la celda de inicio del rango de Excel que
                queremos capturar
```

```
- modo: indica el modo de captura
    * 0: capturar una única celda numérica. Ini_rango puede venir
        en dos formatos:
        - Un rango de excel como cadena de texto ('A2')
        - Una cell que contenga {fila,columna} del rango
    * 1: capturar una única celda cadena de texto. Ini_rango puede venir
        en dos formatos:
        - Un rango de excel como cadena de texto ('A2')
        - Una cell que contenga {fila,columna} del rango
    * 2: capturar un rango numérico de más de una celda usando el
    CurrentRegion
    * 3: capturar un rango de datos numérico definido con un cell
        {fila_ini, fila_fin, columna_ini, columna_fin}
    * 4: capturar un rango alfanumérico de más de una celda usando el
    CurrentRegion

OUTPUTS:

  - Valor_rango : Valor del rango capturado. En el modo 4 el valor del
            rango se devuelve como una cell

**********************************************************************
**
%}

if modo == 0

  % Estamos capturando una celda numérica
  if iscell(ini_rango)
    rango = calcexcelrange(ini_rango{1},ini_rango{2},1,1);
```

```
    else
       rango = ini_rango;
    end
    Activate(Range(Excel,rango));
    rango_datos = Excel.Activecell;
    datos       = rango_datos.Value;
    Valor_rango = parse_data(datos);

elseif modo == 1

    % Estamos capturando una celda que contiene una cadena de texto
    if iscell(ini_rango)
       rango = calcexcelrange(ini_rango{1},ini_rango{2},1,1);
    else
       rango = ini_rango;
    end
    Activate(Range(Excel,rango));
    rango_datos = Excel.Activecell;
    Valor_rango = rango_datos.Value;

elseif modo == 2

    % Estamos capturando un rango completo usando CurrentRegion

    Activate(Range(Excel,ini_rango));
    rango_datos = Excel.Activecell.CurrentRegion;
    datos       = rango_datos.Value;
    Valor_rango = parse_data(datos);

elseif modo == 3
```

```
    % Estamos capturando un rango definido con una cell
    % {fila_ini, fila_fin, columna_ini, columna_fin
    cont_i = 1;
    for i = ini_rango{1}:ini_rango{2}
       cont_j = 1;
       for j = ini_rango{3}:ini_rango{4}

          % Definimos el rango en formato "letra-Numero"
          rango = calcexcelrange(i,j,1,1);

          Activate(Range(Excel,rango));
          rango_datos              = Excel.Activecell;
          datos                    = rango_datos.Value;
          Valor_rango(cont_i,cont_j)  = parse_data(datos);

          cont_j = cont_j + 1;
       end
       cont_i = cont_i + 1;
    end
elseif modo == 4

    % Estamos capturando un rango alfanumérico completo usando CurrentRegion

    Activate(Range(Excel,ini_rango));
    rango_datos = Excel.Activecell.CurrentRegion;
    Valor_rango      = rango_datos.Value;

end
```

```
function [numericArray,textArray] = parse_data(data)
% PARSE_DATA parse data from raw cell array into a numeric array and a text
% cell array.
% [numericArray,textArray] = parse_data(data)
% Input:
%       data: cell array containing data from spreadsheet
% Return:
%       numericArray: double array containing numbers from spreadsheet
%       textArray: cell string array containing text from spreadsheet
%=========================================================================

% ensure data is in cell array
if ischar(data)
    data = cellstr(data);
elseif isnumeric(data)
    data = num2cell(data);
end

% Check if raw data is empty
if isempty(data)
    % Abort when all data cells are empty.
    textArray = {};
    numericArray = [];
    return
else
    % Trim empty leading and trailing rows
    % find empty cells
    emptycells = cellfun('isempty',data);
    nrows = size(emptycells,1);
    firstrow = 1;
```

```
    % find last of leading empty rows
    while (firstrow<=nrows && all(emptycells(firstrow,:)))
        firstrow = firstrow+1;
    end
    % remove leading empty rows
    data = data(firstrow:end,:);

    % find start of trailing empty rows
    nrows = size(emptycells,1);
    lastrow = nrows;
    while (lastrow>0 && all(emptycells(lastrow,:)))
       lastrow = lastrow-1;
    end
    % remove trailing empty rows
    data = data(1:lastrow,:);

    % find start of trailing NaN rows
    warning('off', 'MATLAB:nonIntegerTruncatedInConversionToChar');
    while (lastrow>0 && all(isnan([data{lastrow,:}])))
       lastrow = lastrow-1;
    end
    warning('on', 'MATLAB:nonIntegerTruncatedInConversionToChar');
    % remove trailing NaN rows
    data=data(1:lastrow,:);

    [n,m] = size(data);
    textArray = cell(size(data));
    textArray(:) = {''};
end
```

```
vIsNaN = false(n,m);

% find non-numeric entries in data cell array
vIsText = cellfun('isclass',data,'char');
vIsNaN = cellfun('isempty',data)|strcmpi(data,'nan')|cellfun('isclass',data,'char');

% place text cells in text array
if any(vIsText(:))
   textArray(vIsText) = data(vIsText);
else
   textArray = {};
end
% Excel returns COM errors when it has a #N/A field.
textArray = strrep(textArray,'ActiveX VT_ERROR: ','#N/A');

% place NaN in empty numeric cells
if any(vIsNaN(:))
   data(vIsNaN)={NaN};
end

% extract numeric data
numericArray = reshape(cat(1,data{:}),n,m);

% trim all-NaN leading rows and columns from numeric array
% trim all-empty trailing rows and columns from text arrays
[numericArray,textArray]=trim_arrays(numericArray,textArray);

% ensure numericArray is 0x0 empty.
if isempty(numericArray)
   numericArray = [];
```

```
end



function [numericArray,textArray] = trim_arrays(numericArray,textArray)
% trim leading rows or cols
% if the string result has dimensions corresponding to a column or row of
% zeros in the matrix result, trim the zeros.
if ~isempty(numericArray) && ~isempty(textArray)
   [mn, nn] = size(numericArray);
   [ms, ns] = size(textArray);

   if ms == mn
      % trim leading column(textArray) from numeric data
      firstcolm = 1;
      while (firstcolm<=nn && all(isnan(numericArray(:,firstcolm))))
         firstcolm = firstcolm+1;
      end
      numericArray=numericArray(:,firstcolm:end);
   end

   if ns == nn
      % trim leading NaN row(s) from numeric data
      firstrow = 1;
      while (firstrow<=mn && all(isnan(numericArray(firstrow,:))))
         firstrow = firstrow+1;
      end
      numericArray=numericArray(firstrow:end,:);

      % trim leading empty rows(s) from text data
      firstrow = 1;
```

```
    while (firstrow<=ms && all(cellfun('isempty',textArray(firstrow,:))))
        firstrow = firstrow+1;
    end
    textArray=textArray(firstrow:end,:);
end

% trim all-empty-string trailing rows from text array
        lastrow = size(textArray,1);
while (lastrow>0 && all(cellfun('isempty',textArray(lastrow,:))))
    lastrow = lastrow-1;
end
        textArray=textArray(1:lastrow,:);

% trim all-empty-string trailing columns from text array
        lastcolm = size(textArray,2);
while (lastcolm>0 && all(cellfun('isempty',textArray(:,lastcolm))))
    lastcolm = lastcolm-1;
end
        textArray=textArray(:,1:lastcolm);

% trim all-NaN trailing rows from numeric array
        lastrow = size(numericArray,1);
while (lastrow>0 && all(isnan(numericArray(lastrow,:))))
    lastrow=lastrow-1;
end
        numericArray=numericArray(1:lastrow,:);

% trim all-NaN trailing columns from numeric array
        lastcolm = size(numericArray,2);
while (lastcolm>0 && all(isnan(numericArray(:,lastcolm))))
```

```
        lastcolm=lastcolm-1;
    end
        numericArray=numericArray(:,1:lastcolm);
end


%                    Función calculo percentil                    %
function [percentil,pos_percentil] = Calcula_percentil(V_valores , nivel_percentil)

%{
 ---------------------------------------------------------------------
    Esta función calcula el percentil pero de la forma tradicional,
    ordenando.

    - V_valores: Vector de valores al que calcular el percentil

    - nivel_percentil: percentil expresado en tanto por ciento
---------------------------------------------------------------------
%}

    % Ordenamos los valores de menor a mayor
        [V_valores_ord,ind_no_ord] = sort(V_valores,'ascend');

    % Buscamos la posición que corresponde al percentil. Si no es número entero
    % pues lo convertimos en el entero superior
        pos_aux = ceil(nivel_percentil/100 * numel(V_valores));

    % Extreamos el percentil
        percentil = V_valores_ord(pos_aux);
```

```
    % Extraemos la posición del percentil del vector sin ordenar
        pos_percentil = ind_no_ord(pos_aux);
    end

%_____________________________________________________________________%
%                        VALORACIÓN DEL SWAP                          %
%_____________________________________________________________________%
nombre_excel = [cd,'\Inputs.LongSwap.xlsx'];

if (usa_tabla_orden_1 == 1)
    excel_TOrden1 = [cd,'\Tabla.orden.1.xlsx'];
    excel_rdtos = [cd,'\Resultados.Renta.TOrden.1.xlsx'];
else
    excel_rdtos = [cd,'\Resultados.Renta.xlsx'];
end

V_Esc = {'NoCovid', 'Covid'};
V_Modelos = {'LC','APC','CBD', 'M6', 'M7','RH'};
V_Esc_i = {'NoCovid', 'Covid  '};
V_Modelos_i = {'LC ','APC','CBD', 'M6 ', 'M7 ','RH '};
variables_tabla = {'ESCENARIO','MODELO','RENTA_0',...

'RENTA_MINIMA','RENTA_P10','RENTA_MEDIANA','RENTA_MEDIA','RENTA_
P90','RENTA_MAXIMA',...

'SPREAD_R_MINIMA','SPREAD_R_P10','SPREAD_R_MEDIANA','SPREAD_R_M
EDIA','SPREAD_R_P90','SPREAD_R_MAXIMA'};
T_Rdos = array2table(zeros(0,length(variables_tabla)));
T_Rdos.Properties.VariableNames = variables_tabla;

% Abrimos el Excel
Excel = actxserver('excel.application');
```

```
% Abrimos el libro que contiene el fichero de cartera
Excel.workbooks.Open(nombre_excel);

% Activamos la hoja de Excel
nombre_hoja = 'RFR';
FN_activate_sheet( Excel, nombre_hoja);

% Captura de la RFR
Aux_RFR  = FN_Captura_rango_Excel(Excel, 'A1', 4);
T_FD_RFR = cell2mat(Aux_RFR(:,[1,3]));

if (usa_tabla_orden_1 == 1)
    % Abrimos el libro que contiene el fichero de cartera
    Excel.workbooks.Open(excel_TOrden1);

    % Activamos la hoja de Excel
    nombre_hoja = 'Tabla';
    FN_activate_sheet( Excel, nombre_hoja);

    % Captura de la RFR
    Aux_TOrden1  = FN_Captura_rango_Excel(Excel, 'A1', 4);
    TOrden1 = cell2mat(Aux_TOrden1);
end

Excel.ActiveWorkbook.Close(false);
Excel.delete;
% Abrimos el Excel
Excel = actxserver('excel.application');
Excel.workbooks.Open(nombre_excel);
```

```
for i_esc = 1:length(V_Esc)

   % Activamos la hoja de Excel
   nombre_hoja = ['qx.0-',V_Esc{i_esc}];
   FN_activate_sheet( Excel, nombre_hoja);
   % Captura de la qx.0
   Aux  = cell2mat(FN_Captura_rango_Excel(Excel, 'A1', 4));
   nombre_vble_q0 = ['qx0_',V_Esc{i_esc}];
   eval([nombre_vble_q0,'=Aux;']);

   for m = 1:length(V_Modelos)

      % Activamos la hoja de Excel
      nombre_hoja = [V_Modelos{m},'.',V_Esc{i_esc}];
      FN_activate_sheet( Excel, nombre_hoja);
      % Captura de la qx.0
      Aux  = cell2mat(FN_Captura_rango_Excel(Excel, 'A1', 4))';
      nombre_vble_modelo = [V_Modelos{m},'_',V_Esc{i_esc}];
      eval([nombre_vble_modelo,'=Aux;']);

      eval(['V_edad_anual = ',nombre_vble_q0,'(:,1);']);

      if (usa_tabla_orden_1 == 1)
         qx_0 = TOrden1;
      else
        eval(['qx_0 = ',nombre_vble_q0,'(:,2);']);
      end

      edades_freq_mensual = [V_edad_anual(1):1/12:V_edad_anual(end)]';
```

```
eval(['qx_sim = ',nombre_vble_modelo,';']);

tpx_sim_mensual = 1-FN_interpolador(V_edad_anual, qx_sim/12,
edades_freq_mensual, 0, 1);

tpx_sim_anual = 1-FN_interpolador(V_edad_anual, qx_sim, V_edad_anual, 0, 1);

tpx_0        = 1-FN_interpolador(V_edad_anual, qx_0, edades_freq_mensual, 0, 1);


V_Plazos_mensual = [0:1/12:(V_edad_anual(end)-V_edad_anual(1))]';

V_Plazos_anual = [0:1:(V_edad_anual(end)-V_edad_anual(1))];

tipo = 0.05;

V_FD_Renta = (1+tipo).^-V_Plazos_mensual;

FD_mensual = FN_interpolador(T_FD_RFR(:,1), T_FD_RFR(:,2),
V_Plazos_mensual, 0, 1);

FD_anual = FN_interpolador(T_FD_RFR(:,1), T_FD_RFR(:,2), V_Plazos_anual,
0, 1);


renta_mensual = (sum(bsxfun(@times,tpx_sim_mensual,FD_mensual),1)*12)';

renta_anual = (sum(bsxfun(@times,tpx_sim_anual,FD_anual),1))';

renta_mensual_tipo = (sum(bsxfun(@times,tpx_sim_mensual,V_FD_Renta),1))';

renta_0 =
repmat((sum(bsxfun(@times,tpx_0,FD_mensual),1)*12)',size(renta_mensual));


V_spread_final = [];

for i = 1:length(renta_mensual)

   [spread_final, FO, exitflag]=
fminsearch(@(spread)CalculaSpread(spread,tpx_sim_mensual(:,i), tpx_0, FD_mensual,
V_Plazos_mensual),0);


   V_spread_final = [V_spread_final; spread_final*12];


end

excel_rdtos_esc = [excel_rdtos];
```

```
        writematrix([renta_0, renta_mensual,
V_spread_final],excel_rdtos_esc,'Sheet',[V_Modelos{m},'-',V_Esc{i_esc}],
'WriteMode', 'append');


        T_Rdos_i = array2table(zeros(1,length(variables_tabla)));
        T_Rdos_i.Properties.VariableNames = variables_tabla;
        T_Rdos_i.ESCENARIO = V_Esc_i{i_esc};
        T_Rdos_i.MODELO = V_Modelos_i{m};
        T_Rdos_i.RENTA_0 = renta_0(1);
        T_Rdos_i.RENTA_MINIMA = min(renta_mensual);


        [perct,pos] = Calcula_percentil(renta_mensual , 10);
        T_Rdos_i.RENTA_P10 = perct;
        T_Rdos_i.SPREAD_R_P10 = V_spread_final(pos);


        [perct,pos] = Calcula_percentil(renta_mensual , 50);
        T_Rdos_i.RENTA_MEDIANA = perct;
        T_Rdos_i.SPREAD_R_MEDIANA = V_spread_final(pos);


        T_Rdos_i.RENTA_MEDIANA = median(renta_mensual);
        T_Rdos_i.RENTA_MEDIA = mean(renta_mensual);


        [perct,pos] = Calcula_percentil(renta_mensual , 90);
        T_Rdos_i.RENTA_P90 = perct;
        T_Rdos_i.SPREAD_R_P90 = V_spread_final(pos);


        T_Rdos_i.RENTA_MAXIMA= max(renta_mensual);
        T_Rdos_i.SPREAD_R_MINIMA= V_spread_final(renta_mensual ==
min(renta_mensual));


        T_Rdos_i.SPREAD_R_MEDIA =  mean(V_spread_final);
```

```
        T_Rdos_i.SPREAD_R_MAXIMA= V_spread_final(renta_mensual ==
max(renta_mensual));


        T_Rdos = [T_Rdos;T_Rdos_i];
    end
end


excel_rdtos_esc = [excel_rdtos];
writetable(T_Rdos,excel_rdtos_esc,'Sheet','Resumen', 'WriteMode', 'append');


% ------------------------------------------------------------------
% Se cierra el Excel
% ------------------------------------------------------------------
 Excel.ActiveWorkbook.Close(false);
 Excel.delete;
```

BIBLIOGRAFÍA

Akaike, H. (1974). *A new look at the statistical model identification*. IEEE Transactions on Automatic Control.

Bm, S. E.-A. (2015a, febrero 20). *Catastrophe bond & insurance-linked securities deal directory*. Artemis.Bm - The Catastrophe Bond, Insurance Linked Securities & Investment, Reinsurance Capital, Alternative Risk Transfer and Weather Risk Management Site; Artemis.bm. https://www.artemis.bm/deal-directory/

Bm, S. E.-A. (2015b, agosto 18). *Longevity swaps and longevity risk transfer transactions*. Artemis.Bm - The Catastrophe Bond, Insurance Linked Securities & Investment, Reinsurance Capital, Alternative Risk Transfer and Weather Risk Management Site; Artemis.bm. https://www.artemis.bm/longevity-swaps-and-longevity-risk-transfers/

BOE.es - BOE-A-2020-17154 *Resolución de 17 de diciembre de 2020, de la Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones, relativa a las tablas de mortalidad y supervivencia a utilizar por las entidades aseguradoras y reaseguradoras, y por la que se aprueba la guía técnica relativa a los criterios de supervisión en relación con las tablas biométricas, y sobre determinadas recomendaciones para fomentar la elaboración de estadísticas biométricas sectoriales*. (s/f). Boe.es. Recuperado el 9 de junio de 2022, de https://www.boe.es/eli/es/res/2020/12/17/(4)

Cairns, A., Blake, D., & Dowd, K. (2006). A *Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration. Journal of Risk and Insurance.*

Castillo, ϖ. José Miguel Rodríguez-Pardo Del, Lozano, I. A., Rodriguez, F. A., Manuel Cóbreces, V., & Juárez, M. (2015). *El riesgo de longevidad y su aplicación práctica a Solvencia II*.

dos Santos, S. A. V. (2017). *Pricing Longevity Swaps*. Universidad Nova de Lisboa.

Esteve, V. (21 de marzo de 2018). *Esperanza de vida al nacer en España versus otros países avanzados, 1960-2015*. ALDE | Asociación Libre de Economía. https://alde.es/blog/economia/esperanza-de-vida-al-nacer-en-espana-versus-otros-paises-avanzados-1960-2015/

Evans, S. (2022, 20 de enero). *WTW pronostica una longevidad récord y transferencia de riesgo de pensiones en 2022*. Artemis.Bm - The Catastrophe Bond, Inversión y valores vinculados a seguros, Capital de reaseguro, Transferencia alternativa de riesgos y Sitio de gestión de riesgos meteorológicos; Artemis.bm. https://www.artemis.bm/noticias/wtw-forecasts-record-longevity-pension-risk-transfer-in-2022/

HMD Country. (s/f). Mortality.org. Recuperado el 10 de mayo de 2022, de https://www.mortality.org/cgi-bin/hmd/country.php?cntr=ESP&level=1

Hunt, A., & Blake, D. (2015). Modelling longevity bonds: Analysing the Swiss Re Kortis bond. *Insurance, Mathematics & Economics*, *63*, 12–29. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2015.03.017

Hunt A, Blake D (2015). "*On the Structure and Classification of Mortality Models Mortality Models*." Pension Institute Working Paper.

INEbase / Demografía y población /Fenómenos demográficos /Indicadores demográficos básicos / Últimos datos. (s/f). INE. Recuperado el 20 de mayo de 2022, de https://www.ine.es/dyngs/INEbase/es/operacion.htm?c=Estadistica_C&cid=1254736177003&menu=ultiDatos&idp=1254735573002

Lee-Carter. (1992). *Modeling and Forecasting U.S. Mortality*. Journal of the American Statistical Association.

Longevity hedging. (s/f). Insightinvestment.Com. Recuperado el 1 de junio de 2022, de https://www.insightinvestment.com/uk/institutional-investors/investment-range/ldi/longevity-hedging/

Magee, B. (2017, agosto 2). *Longevity divergence index value (LDIV) archives*. The Actuary Magazine. https://theactuarymagazine.org/tag/longevity-divergence-index-value-ldiv/

Menoncin, F. y Regis, L. (2017). Activos vinculados a la longevidad y decisiones de consumo/cartera previas a la jubilación. *Seguros: Matemáticas y Economía* , *76* , 75-86.

Population Data Portal. (s/f). Unfpa.Org. Recuperado el 9 de junio de 2022, de https://pdp.unfpa.org/?_ga=2.262189004.1981654262.1655076237-1785544477.1652458970

Renshaw A, H. S. (2006). *A Cohort-Based Extension to the Lee-Carter Model for Mortality Reduction Factors*. Insurance: Mathematics and Economics.

Risk-free interest rate term structures. (2021, diciembre 31). Eiopa - European Commission. https://www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/risk-free-interest-rate-term-structures_en

Ruiz, R. M., Pérez-Cacho, O. G., Martínez, E. T. (2005). *Matemática de los seguros de vida*. Ediciones Pirámide.

van Delft, K. (2012). *Valuation of longevity swaps in a Solvency II framework*. Netspar Theses.

Villegas, A. M., Kaishev, V. K., & Millossovich, P. (2018). StMoMo: An R package for stochastic mortality modeling. *Journal of statistical software*, *84*(3). https://doi.org/10.18637/jss.v084.i03