Valoración de opciones europeas sobre el Bitcoin con volatilidades variables

Defendido por: Adrián Noya Simón

Universidad de Alcalá

Máster en ciencias Actuariales y Financieras

Tutor Académico: Gregorio Serna Calvo

Alcalá de Henares, a 15 de 09 de 2022

Resumen

En este trabajo se realiza la valoración de opciones europeas tanto put como call, vinculadas al precio del Bitcoin. Para dicha valoración se emplea, por un lado, el método de Black-Scholes el cual asume volatilidades constantes, y, por otro lado, un modelo GARCH (1, 1). Para la generación de los rendimientos del subyacente empleados en el modelo GARCH (1, 1) se han empleado simulaciones de Montecarlo y para la estimación de los parámetros, técnicas econométricas, mediante el programa MATLAB. Tras la estimación de los dos modelos se obtiene que para opciones con vencimientos cortos no existen grandes diferencias entre ambos modelos, pero a medida que aumenta el plazo para el vencimiento, las diferencias crecen, ya que el GARCH (1, 1) proporciona valores considerablemente mayores, puesto que recoge el efecto observado de volatilidad variable.

Abstract

This paper has the purpose to value put and call European options linked to the Bitcoin prices. For this evaluation, it was used the Black-Scholes method, which assumes constant volatilities, and a GARCH (1, 1) model. Monte Carlo simulations were used to generate the performance of the underlying used in the GARCH (1, 1) model and econometric techniques were used to estimate the parameters using MATLAB software. The estimation of the two models shows that for options with short maturities there are no major differences between the two models, however as the term to maturity increases, the differences grow, since the GARCH (1, 1) provides considerably higher values, since it includes the observed effect of variable volatility.

ÍNDICE

1. Introducción 1
2. Contexto 2
3. Metodología 7
4. Resultados 11
5. Conclusiones 17
6. Bibliografía 18

1. Introducción

A lo largo del trabajo se va a realizar y comparar la valoración de derivados financieros vinculados a la cotización del Bitcoin, utilizando tanto el modelo Black-Scholes (modelo que supone una volatilidad constante), como un modelo GARCH (1,1) (modelo que nos permite variaciones en la volatilidad).

Antes de comenzar con las valoraciones debemos aclarar que son los derivados financieros. Los derivados financieros son instrumentos ó productos financieros cuyo valor está vinculado al valor de otro activo, llamado activo subyacente (en el caso del presente trabajo el activo subyacente es el Bitcoin).

Existen infinidad de derivados financieros, pero a lo largo del trabajo nos centraremos en las opciones. ¿Qué son las opciones? Se trata de contratos que otorgan el derecho al comprador y la obligación al vendedor de realizar la transacción (comprar o vender), a un precio fijado de antemano (precio strike o de ejecución) en una fecha determinada.

Dependiendo del plazo de ejecución que tenga la opción puede ser:

- Opción europea: Cuando la opción únicamente pude ejecutarse en su fecha de vencimiento previamente determinada.

- Opción americana: Cuando la opción pude ejecutarse en cualquier momento desde la fecha de la firma de la opción hasta en su fecha de vencimiento.

Para este trabajo únicamente vamos a tener en cuenta opciones europeas, es decir, solo podrán ser ejecutas en la fecha de vencimiento.

Además, en función de los derechos que otorgan las opciones al comprador, existen los siguientes tipos:

- Opción call o de compra: El comprador tiene el derecho de adquirir el activo subyacente, al precio strike, en la fecha de vencimiento establecida.

- Opción put o de venta: El comprador tiene el derecho de vender el activo subyacente, al precio strike, en la fecha de vencimiento establecida.

En el presente trabajo, se analiza la valoración tanto para opciones call, como para opciones put, vinculadas al mismo activo subyacente (el precio del Bitcoin).

Antes de comenzar a desarrollar lo que se realizará lo largo del trabajo, cabe explicar la nomenclatura básica que se utilizará más adelante:

- Prima: Precio que paga el comprador por la adquisición de una opción (c, p).
- Precio del activo subyacente (S): Valor del activo al que está vinculada la opción (en nuestro caso será el valor del Bitcoin).
- Precio de ejercicio o strike (X): Precio al que se fija en la opción el derecho de compra o venta.
- Fecha de vencimiento o ejecución (T): Fecha establecida, en la que puede ser ejecutada la opción.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, en los siguientes puntos iremos, introduciendo cuáles son los modelos de valoración utilizados, explicando cuáles son sus particularidades y las hipótesis en las que se apoyan. Para entender mejor estos modelos nos apoyaremos en artículos (los cuales citaremos de nuevo más adelante), como el de Montoya y Trepalacios (2014), en el cual comparan los modelos que nosotros vamos a utilizar y nos advierten de sus imitaciones. Sin embargo, para conocer mejor el mercado de Bitcoin y cuál es el comportamiento de los modelos aplicados a dicho mercado nos ayudaremos del artículo de Akanksha, Roman y Saqib (2020).

Posteriormente a la definición de los modelos y a la estimación de los mismo mediante el programa MATAB analizaremos los resultados obtenidos con cada uno de ellos, así como las diferencias apreciadas y, por último, concluiremos tratando de explicar el porqué de estas diferencias y cuál de ellos proporciona un mejor ajuste.

2. Contexto

En esta parte del trabajo, se expondrá lo que se va a analizar en el mismo, así como introducir los modelos que se utilizarán para dicho análisis.

Lo que se trata de realizar, es la valoración de opciones puts y calls, con diferentes plazos de vencimiento, vinculadas al precio del Bitcoin.

Para ello, primeramente, aclarar de manera rápida, que es el Bitcoin. El Bitcoin es una criptomoneda, o moneda digital, creada en el 2008, la cual cada vez es más utilizada y está más generalmente aceptada como medio de pago (generalmente en el comercio electrónico). Adicionalmente a su uso como moneda o medio de pago, el Bitcoin tiene un uso como activo, de forma que un inversor puede tener Bitcoins en tu cartera y el valor de la criptomoneda fluctúa a lo largo del tiempo, al igual que cualquier acción que cotiza en mercados como el IBEX 35, Nasdaq, etc. A lo largo del presente trabajo nos centraremos en el valor del Bitcoin como activo.

A pesar de que su creación fue en el 2008, para este trabajo la serie histórica utilizada comienza en el 2016, puesto que en sus primeros años el volumen de negocio que tenía era muy pequeño y por tanto su cotización era totalmente lineal.

Para valorar las opciones puts y calls europeas vinculadas al Bitcoin, en primer lugar, se utilizará uno de los modelos más famosos y utilizados para la valoración de opciones como es el modelo de Black-Scholes (1973).

Dado que las opciones que se tratan de valorar a lo largo del trabajo son europeas y están vinculas al Bitcoin, se utilizará el modelo de Black-Scholes diseñado para los casos en los que el activo no paga dividendo.

Como se refleja en el trabajo de Hull (2009), este modelo tiene las siguientes hipótesis de partida:

1- El mercado opera en tiempo continuo, sin arbitraje ni costes de transacción.

2- El precio del activo subyacente (S) sigue un movimiento browniano geométrico con media y varianza por unidad de tiempo μ y σ^2 respectivamente, es decir:

$$\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{s}} = \mu\,\mathrm{dt} + \sigma\,\mathrm{dz}$$

Donde:

- Tanto μ (la media) como σ (la desviación típica) son constantes
- z sigue un proceso de Wiener: $\mathrm{dz} = \varepsilon\sqrt{dt}$, con $\varepsilon \sim N(0,1)$

3- El tipo de interés libre de riesgo con capitalización continua, r, y la volatilidad, σ , son constantes y e igual para todos los vencimientos (adicionalmente como veremos más adelante a lo largo de este trabajo hemos supuesto que el tipo de interés libre de riesgo es igual a 0, puesto que es un supuesto realista con las condiciones actuales del mercado).

4- El subyacente no paga dividendos (existe modificaciones en el modelo de Black-Scholes que permiten la valoración de activos que pagan dividendos, pero no es el caso del Bitcoin por lo que mantenemos esta hipótesis).

5- No existen posibilidades de arbitraje en el mercado.

6- Se permite venta a descubierto y los activos son perfectamente divisibles.

A raíz de las siguientes hipótesis y dado que el precio de la opción es una función del activo del subyacente y del tiempo, aplicando el Lema de Itô se obtiene el proceso que sigue el precio del derivado y a partir de ahí, aplicando el supuesto de ausencia de arbitraje, se obtiene la ecuación en derivadas parciales de Black-Scholes, cuya solución en el caso de opciones europeas es la conocida fórmula de Black-Scholes.
De forma que el valor teórico para una call europea es:

$$C = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Siendo d_1:

$$d_1 = \frac{ln\frac{S}{X} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

Y d_2:

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

Y por medio de la paridad put-call (fruto de la no existencia de arbitraje en el modelo), el valor teórico de una put europea es:

$$P = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

Donde:

X: Precio de ejercicio *o precio strike*

S: Precio del subyacente al contado

σ: Volatilidad anual

r: Tipo de interés anual libre de riesgo

Una de las hipótesis más restrictivas que tiene el modelo de Black-Scholes es la asunción de volatilidad constante (es decir, que es igual para todos los plazos de la inversión y para todos los derivados con diferente strike sobre el mismo subyacente). Adicionalmente se plantea como el único parámetro desconocido, por ello es de gran importancia su estimación.

Una de las formas más extendidas para la estimación de la volatilidad, bajo el modelo de Black-Scholes es utilizar una serie histórica de los precios del activo subyacente. Concretamente se utiliza la rentabilidad del propio activo, como la variación de la cotización actual frente a la del momento anterior, de la siguiente forma:

$$Rentabilidad = Ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$$

Tras calcular la rentabilidad para cada momento de cotización (en nuestro caso se trata de rentabilidad diaria), se debe calcular la desviación típica de las rentabilidades diarias de nuestra serie histórica. Con esta información llegamos a siguiente formula, que utilizaremos como valor de volatilidad anualizad, en nuestro modelo de Black-Scholes:

$$\hat{\sigma} = s/\sqrt{T-t}$$

Donde:

$\hat{\sigma}$: Es la volatilidad anualizada que utilizaremos en nuestro modelo de Black-Scholes

s: Es la desviación típica diaria de las rentabilidades diarias de nuestra serie histórica

Con la estimación de la volatilidad se tiene toda la información teórica que se necesita para valorar las opciones mediante el modelo de Black-Scholes. Pero como se ve en la definición del propino modelo, este tiene una limitación con la volatilidad, al asumirla constante, cosa que no siempre se aprecia en los mercados reales. Por ello, adicionalmente a la valoración mediante el modelo de Black-Scholes anteriormente expuesta, realizaremos una valoración incluyendo un modelo GARCH (1,1) a la hora de estimar la volatilidad, ya que de esta forma la volatilidad deja de ser contante.

Asumiendo que la volatilidad es constante y sigue una distribución log-normal. Lo que hacemos ahora es estimar un modelo GARCH (1,1) para los rendimientos logarítmicos diarios mediante las siguientes formulas:

$$Y_t = Ln\left(\frac{s_t}{s_{t-1}}\right)$$

Donde S_t es el precio del Bitcoin en t:

$$Y_t = \varepsilon_t \; ; \varepsilon_t \sim N(0, h_t)$$

$$h_t = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}$$

Siendo $\omega, \alpha \; y \; \beta$ los parámetros del modelo y ε el error de estimación del modelo.

Mediante las fórmulas anteriores y la serie histórica estimamos los parámetros $\widehat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$, del modelo GARCH (1,1) por el método de máxima verosimilitud (para esta estimación hemos utilizado la opción de cálculo de GARCH que ofrece el programa MATLAB)

Al asumir que el subyacente sigue un proceso con volatilidad variable GARCH no existe una fórmula cerrada para el cálculo del valor de la opción por lo que debemos recurrirse a simulación de Monte Carlo.

Una vez que tenemos los parámetros y el valor del ultimo error observado (ε_N) si consideramos una opción a T días para el vencimiento, necesitamos generar T números aleatorios que se distribuyan según una $N(0,1)$. De forma que si por ejemplo estas considerando T igual a 90 días (es decir que la opción vence en 90 días) generaremos 90 números aleatorios, puesto que para calcular los diferentes errores seguiremos la siguiente formula:

$$\varepsilon_{N+1} = \eta_{N+1}. h_{N+1}^{1/2}$$

Donde η_{N+1} es el primer número aleatorio generado de una N (0, 1)

Teniendo en cuenta todos estos datos podemos calcular las sendas tanto de *h,* desde h_{N+1} hasta h_{N+T}, como de ε, es decir desde el primer día para el que no tenemos valores en nuestra serie histórica de Bitcoin, hasta el día de vencimiento de la opción (si continuamos con el ejemplo anterior de la call a 90 días tendríamos desde h_N y ε_N , hasta h_{N+T} y ε_{N+T}, siendo T = 90 en este ejemplo).

Una vez que hemos obtenido las sendas de *h* y ε, podemos también estimar la senda simulada de *Y*, desde Y_{N+1} hasta Y_{N+T}, mediante la siguiente formula, como se ha sido justificado en estudios previos como el de Li, Hardy y Tan (2010) bajo neutralidad al riesgo tenemos que:

$$Y_t = (r - h_t/2) + \varepsilon_t$$

Donde r al igual que el modelo Black-Scholes representa el $t$ipo de interés libre de riesgo.

Tras esto, podemos calcular la senda de S_t (de los precios del subyacente), ya que conociendo Y_t, y partiendo de la función inicial de los rendimientos ($Y_t = Ln(\frac{St}{s_{t-1}})$) despejando llegamos a la siguiente formula:

$$S_t = s_{t-1}.e^{Y_t}$$

Con todo lo descrito anteriormente obtendríamos las estimaciones para una simulación concreta de unos valores de ε_{N+1} hasta ε_{N+T}. Posteriormente, hay que repetir este proceso más veces (en nuestro caso haremos 100.000 simulaciones), para obtener los valores con cada una de las simulaciones que tenemos de ε

Por último, tras estimar el precio del subyacente (el precio del Bitcoin en nuestro caso) en el momento de vencimiento, podemos valorar tanto las puts como las calls europeas en el momento de vencimiento de estas.

Adicionalmente a la información teórica que hemos descrito anteriormente, para llevar a cabo el trabajo hemos revisado varios artículos de investigación relacionados con el tema que nos ocupa. Como por ejemplo los siguientes:

- "Valoración de opciones cuando la varianza no es constante "de Montoya y Trepalacios (2014). En el cual nos muestra cómo aplicar tanto el modelo de Black-Scholes como el GARCH (1, 1) para la valoración de opciones, así como cuales son las limitaciones del modelo Black-Scholes y cuales son las mejores que supone la aplicación de una volatilidad variable mediante un GARCH (1, 1)

- "The Bitcoin options market: A first look at pricing and risk" de Akanksha, Roman y Saqib (2020). En el cual al igual que en el caso anterior nos muestra como aplicar ambos modelos ahora sobre opciones vinculadas al Bitcoin y adicionalmente nos ayuda a comprender mejor las particularidades que presenta el mercado del Bitcoin.

Con toda la información teórica expuesta y apoyándonos en los artículos mencionados anteriormente, a lo largo del siguiente punto explicaremos como hemos estimado tanto el modelo de Black-Scholes, como el modelo con volatilidades que siguen un modelo GARCH (1,1), para el caso concreto de opciones europeas vinculadas a la cotización del Bitcoin.

3. Metodología

Antes de comenzar a explicar la estimación los modelos que hemos realizado, debemos aclarar la serie histórica que hemos utilizado para dicha estimación.

En nuestro caso hemos utilizado las cotizaciones diarias del Bitcoin sacadas de la página https://www.investing.com, cogiendo siempre el valor de cierre en dólares estadounidenses, en el plazo que va desde el 1 de enero del 2016, hasta el 31 de marzo del 2022.

Como se ha explicado anteriormente en el apartado Contexto se han seleccionado los valores a partir del 2016, puesto que anteriormente la cotización era plana, como podemos ver en el siguiente gráfico:

Fuente: Elaboración propia

Adicionalmente, en el gráfico superior también podemos observar que desde el 2016 la volatilidad no parece constante, puesto que el precio del Bitcoin fluctúa tanto al alza como a la baja y sin ningún patrón aparente.

Una vez definida la serie histórica que se va a utilizar, a continuación, procedemos a explicar cómo hemos estimado el modelo de Black-Scholes.

Para esta estimación hemos utilizado la función que ofrece el programa MATLAB para la valoración tanto de opciones puts, como calls bajo el modelo de Black-Scholes, que se llama *blsprice*.

Esta función tiene las mismas bases teóricas explicadas en el apartado anterior *"contexto"* mediante las diferentes fórmulas, y parte de las mismas hipótesis. Antes de aplicar la función, debemos aclarar al programa cual es el valor de ciertos parámetros para que pueda hacer la estimación, puesto que la función es la siguiente:

[Call,Put] = blsprice(Price,Strike,Rate,Time,Volatility)

Donde:

Price: Precio del Subyacente

Strike: Precio de ejercicio o precio strike

Rate: Tipo de interés libre de riesgo

Time: Fracción de tiempo expresado en año que falta hasta el vencimiento de la opción

Volatility: Volatilidad

En nuestro caso hemos partido de la base de que las opciones se encuentran “at the money” o a dinero (esto es importante ya que el próximo apartado “Resultados” esto no siempre sea así), Que las opciones se encuentren “at the money” significa que el propietario de la opción se encuentra indiferente entre ejercerla o no en ese momento, ya que el precio del subyacente y el precio de ejercicio es igual. Para ello nosotros en el programa MATLAB hemos puesto tanto para *Price,* como para *Strike,* el mismo valor, que es el último precio que tenemos disponible en nuestra serie histórica a 31 de marzo de 2022, momento en el cual el Bitcoin tenía un valor de 45.525$.

Al tipo de interés libre de riesgo como ya hemos comentado anteriormente le hemos dado un valor de 0, puesto que es un supuesto bastante realista en la situación del mercado y tras varias pruebas con el valor de Euríbor las diferencias respecto a asumir que este es 0 son insignificantes.

Para el parámetro *Time*, hemos definido una variable que hemos llamado “Days” en la cual ponemos el plazo de vencimiento que tiene la opción. Como veremos en el apartado siguiente hemos dado varios valores a esta variable para ver cómo cambia el valor de las opciones a medida que cambia el plazo de vencimiento. Esta variable la hemos dividido por 365 puesto que el programa MATLAB pide que el parámetro *Time* este expresada como una fracción de año.

En el caso del parámetro *Volatility*, como hemos comentado en el apartado anterior, en el modelo de Black-Scholes se utiliza la siguiente formula:

$$\widehat{\sigma} = s/\sqrt{T-t}$$

Teniendo en cuenta la serie histórica que tenemos, calculamos la desviación típica de las rentabilidades diarias durante toda la serie histórica descrita anteriormente, mediante la función *std,* para así tener la s En el caso de nuestra serie histórica es 0,0403. Adicionalmente, debemos indicar el número de días que este activo se negocia para incluirlo en la fórmula de la volatilidad. En nuestro caso como el Bitcoin se trata de una criptomoneda que fluctúa todos los días de valor que le damos a $T-t$ es 365. Para calcular esta raíz cuadrada en el programa MATLAB utilizamos la función *sqrt,* la cual nos da un valor de 19,1050.

Con toda esta información el programa MATLAB nos devuelve los resultados de las opciones vinculadas al Bitcoin, tanto para la call, como para la put.

En el siguiente apartado “resultados” comentaremos los diferentes resultados que hemos obtenido tras calcular el valor de Black-Scholes para opciones con el programa MATLAB, para opciones con diferentes plazos de vencimiento.

Una vez explicada la forma en la que hemos estimado el modelo de Black-Scholes, así como las herramientas que hemos utilizado, procedemos a explicar cómo hemos estimado el modelo con volatilidades que siguen un modelo GARCH (1,1).

Para la estimación del GARCH (1,1) al igual que en el caso del modelo de Black-Scholes hemos utilizado en el programa MATLAB.

Para comenzar con este modelo lo primero que hemos hecho es calcular los rendimientos diarios logarítmicos, tal y como hemos descrito técnicamente en el apartado anterior, es decir mediante la fórmula:

$$Y_t = Ln\left(\frac{s_t}{s_{t-1}}\right)$$

Una vez que tenemos los rendimientos diarios necesitamos estimar el modelo GARCH (1,1). Para ello, en primer lugar, indicamos a el programa MATLAB que tipo de modelo queremos estimar, de la siguiente forma:

Mdl = garch(1,1)

Puesto que con la función *Mdl* indicamos que queremos estimar un modelo de regresión lineal y con el *garch(1,1)*, concretamos que modelo queremos.

A continuación, le debemos indicar que ejecute el modelo, esto lo hacemos mediante el siguiente comando:

EstMdl = estimate(Mdl,y)

De esta forma el programa MATLAB estima el modelo anteriormente definido, mediante máxima verosimilitud, para los datos de *Y* (que como hemos dicho anteriormente en nuestro caso son los rendimientos diarios logarítmicos). Dándonos así los valores para los parámetros $\widehat{\omega}, \hat{\beta}, \hat{\alpha}$, los cuales son los siguientes:

GARCH(1,1) Conditional Variance Model (Gaussian Distribution):

	Value	StandardError	TStatistic	PValue
Constant	7.1829e-05	6.3025e-06	11.397	4.3325e-30
GARCH{1}	0.84182	0.010667	78.917	0
ARCH{1}	0.12983	0.0083207	15.603	6.8916e-55

Donde:

$$\widehat{\omega} = 7{,}1829\text{e-}05 \qquad \hat{\beta} = 0{,}84182 \qquad \hat{\alpha} = 0.79786$$

Como podemos ver en la tabla podemos considerar que todos los parámetros son significativos, puesto que su p-valor es menor que 0,05

Una vez que tenemos estos parámetros necesitamos, por un lado, generar los generar una serie de números aleatorios que se distribuyan según una $N(0,1)$, tan grande como el número de días que falte hasta el vencimiento de la opción. Para ellos hemos generado la siguiente variable:

eta = randn(days,1)

Con la que el programa MATLAB nos genera tantos números distribuidos como una N (0,1) como días quedan hasta el vencimiento de la opción (Puesto que *days* es la variable que hemos definido para poder valorar opciones con diferentes plazos de vencimiento)

Tras obtener el valor de los parámetros, definir que el tipo de interés libre de riego es igual 0, y haber generado los números aleatorios podemos calcular las sendas de ε_t, h_t, Y_t, y, S_t aplicando las fórmulas teorías expuestas en el apartado anterior. Únicamente debemos indicar al programa MATLAB el número de simulaciones que queremos hacer para cada uno de los valores de dicha senda, en nuestro caso hemos hecho 100.000 simulaciones. Esto quiere decir que por ejemplo para S_1 (el precio del subyacente al día siguiente del que termina nuestra serie histórica) tendremos 100.000 posibles valores.

De esta forma tenemos, por un lado, la estimación del valor del subyacente en el vencimiento, y partimos del supuesto de que al inicio de la simulación (es decir en el último dato de la serie histórica) el valor del subyacente es igual al strike, puesto que como hemos comentado anteriormente en un inicio partimos de la hipótesis de que las opciones están “at the money”. Por lo que, para calcular el valor de las opciones utilizaremos las condiciones de contorno del modelo de Black-Scholes.

De forma que para para estimaremos el valor final de una opción call bajo la simulación i-ésima como el máximo de (S_{Ti} −X, 0)

Mientras que para las put estimaremos su valor final bajo la simulación i-ésima como el máximo de ($X - S_{Ti}$, 0)

Donde:

S_{Ti}: es el precio final del subyacente en la fecha de vencimiento de la opción, obtenido en la i-ésima simulación

X: es el precio del subyacente el último día de nuestra serie histórica (en nuestro caso el 31 de marzo del 2022)

Posteriormente, estimamos el valor de la call como el valor actual (actualizado al tipo de interés libre de riesgo, que como hemos comentado anteriormente en nuestro caso es 0) de la media bajo todas las simulaciones (i=1,…,100.000) de los valores del máximo de (S_{Ti} −X, 0). Análogamente para la put hacemos lo mismo, pero con los valores máximos de ($X - S_{Ti}$, 0)

Mediante todo lo explicado anteriormente hemos obtenido las valoraciones de las opciones, tanto calls como puts europeas vinculadas al Bitcoin para diferentes plazos de vencimiento, a través del modelo de Black-Scholes y del modelo con volatilidades que siguen un modelo GARCH (1,1). Estos resultados y las diferencias apreciadas las mostraremos en el siguiente apartado.

4. Resultados

A lo largo de este apartado se van a exponer los diferentes resultados que se han obtenido para la valoración de puts y calls europeas vinculadas al Bitcoin con diferentes plazos de vencimiento. Por un lado, utilizando el modelo de Black-Scholes y, por otro lado, utilizando el modelo con volatilidades que siguen un modelo GARCH (1,1). A continuación, trataremos de explicar las diferencias existentes entre los resultados obtenidos mediante ambos modelos.

Lo primero que hemos hecho es valorar mediante los modelos de Black-Scholes y GARCH (1, 1), opciones calls y puts, con diferentes plazos de vencimiento, suponiendo que las opciones se encuentran "at the money" (es decir que el valor del subyacente es igual que el del Strike) y tomando como Strike el valor del Bitcoin a 31 de marzo del 2022 el cual es de 45.525$. Aplicando estas condiciones, los resultados son los siguientes:

	Valores con Strike a 31/03/2022 = 45.525		Valores con Strike a 31/03/2022 = 45.525	
	BS		GARCH (1,1)	
Plazo (días)	**Call**	**Put**	**Call**	**Put**
10	2.311,10	2.311,10	1.717,10	1.754,00
50	5.153,90	5.153,90	5.181,50	5.332,00
90	6.896,10	6.896,10	7.898,90	8.032,70
100	7.264,30	7.264,30	8.490,00	8.547,40
120	7.946,90	7.946,90	9.569,20	9.743,50
160	9.151,70	9.151,70	11.390,00	11.679,00

A priori los resultados son coherentes puesto que por la paridad put-call (fruto de la no existencia de arbitraje en el modelo), que asume el modelo de Black-Scholes el valor de ambas opciones debe cumplir la siguiente igualdad put-call: $c + X * e^{-rT} = p + S$. Por lo que en nuestro caso ya que asumimos que r es igual a 0 (puesto que hemos hecho valoraciones con el Euribor a 31 de marzo de 2022, que era próximo a 0 y los resultados son muy similares) se cumple la paridad put-call y a su vez se cumple que S = X. En cuanto a los resultados obtenidos con la utilización del modelo GARCH (1, 1) podemos ver que la paridad no se cumple al 100%, esto se debe a que para el cálculo de este modelo no utilizamos una fórmula exacta como en Black-Scholes, sino que para este se está calculando el valor en base a simulaciones de Monte Carlo, por lo que estas pequeñas variaciones se pueden deber a las simulaciones realizadas.

Adicionalmente, para ambos modelos se puede apreciar que a medida que aumenta el plazo de vencimiento aumenta el valor de las opciones, algo que teóricamente parece lógico.

Si pasamos a comparar los valores obtenidos por ambos modelos, podemos ver que para vencimientos muy cortos el modelo Black-Scholes proporciona mayores valores de la opción, pero a medida que los vencimientos son más largos el modelo GARCH (1, 1) cada vez proporciona mayores valores comparados con los proporcionados por Black-Scholes.

Hasta este momento hemos estimando el valor de las opciones "at the money", pero es necesario recordar que esta casuística se da muy pocas veces en los mercados reales, ya que es bastante concreta. Por ello, para continuar analizando la estimación de los modelos vamos a relajar esta hipótesis y vamos a valorar opciones "In the money" y "out of the money".

Decimos que una opción está "in the money" (o en dinero) cuando el propietario de la opción esté interesado en ejercerla, puesto que obtendría una ganancia. Esta situación se da para una opción call, cuando el precio del subyacente es superior al precio de Strike o de ejercicio fijado en la opción. Por el contrario, esta situación se da para una opción put cuando el precio del subyacente es inferior al precio de ejercicio y por tanto ejerciendo la opción (en este caso de venta) se percibe una ganancia.

Sin embargo, decimos que una opción está "out of the money" (o fuera de dinero) cuando el propietario de la opción no esté interesado en ejecutarla, puesto que de ejecutarla perdería dinero. Esta situación se da para una opción call cuando el precio del subyacente es inferior al precio de ejercicio fijado, en este caso no ejecutaría la opción, puesto que podría adquirir el activo más barato en el mercado. Por contra, una opción put se encuentra "out of the money" cuando el precio del subyacente es mayor al precio de Strike fijado en la opción, ya que en este caso el propietario de la opción podría obtener mayor beneficio vendiendo el activo en el mercado, que ejerciendo la opción.

Tras estas aclaraciones acerca del estado en el que se puede encontrar la opción, vamos a explicar cómo hemos cambiado la formulación del programa MATLAB para que nos permita obtener resultados para opciones que no tienen por qué estar "at the money".

Lo primero que hemos hecho es generar en el programa MATLAB una variable, la cual hemos llamado *Shock*.

Esta variable lo que nos va a permitir es alterar el valor del Strike, de forma que si a esta variable le damos por ejemplo el valor de 1,1 el valor del Strike se verá incrementado en un 10%. En nuestro caso, en el que el que el valor del Bitcoin a 31 de marzo del 2022 es de 45.525$, tras darle el valor de 1,1 a la variable *Shock* el valor de nuestro nuevo strike pasa a ser de 50.077,5$. Si por el contrario a la variable *Shock* le damos el valor de 0.9 nuestro strike pasara de 45.525$ a 40.972,5$, puesto que se ve reducido en un 10%.

Una vez definida esta variable, la forma de incluirla en el modelo de Black-Scholes que tenemos en el programa MATLAB es la siguiente:

Anteriormente la fórmula que teníamos para calcular el modelo de Black-Scholes era esta:

[Call,Put] = blsprice(Price,Strike,Rate,Time,Volatility)

Por lo que incluyendo la variable *Shock* la formula pasa a ser esta:

[Call,Put] = blsprice(Price,Price*Shock,Rate,Time,Volatility)

Puesto que bajo este supuesto para obtener el valor del Strike le aplicamos un Shock al valor actual del subyacente (Strike=Price*Shock)

De esta forma, siempre que la variable *Shock* sea distinta de 1 romperemos la igualdad entre el valor del subyacente y el valor del Strike, por lo que dejaremos de tener opciones "at the money".

Tras incluir la variable *Shock* en el modelo GARCH (1,1), incluimos esta variable en el modelo con volatilidades que siguen un modelo GARCH (1,1). Para ello debemos modificar las formulas utilizadas para la valoración del valor de las opciones.

Para la valoración de una call utilizábamos la siguiente formula:

$$\text{Max}(S_{Ti} - \text{X}, 0)$$

Esta formula no se va a ver alterada, pero ahora X pasa a ser $S_{Ti} * Shock$

De igual forma, para la valoración de una put utilizábamos la siguiente formula:

$$\text{Max}(X - S_{Ti}, 0)$$

Pero al igual que para el caso de la call ahora la X pasa a ser $S_{Ti} * Shock$

Por lo que al igual que en el caso del modelo de Black-Scholes ahora dejaremos de tener opciones "at the money".

Con estas modificaciones en el programa procedemos a ver los resultados de ambos modelos con un incremento del Strike de un 10%, por lo que pasa a ser 50.077,5$, y los resultados se muestran en la siguiente tabla:

	Valores con Strike Shockeado a 31/03/2022 = 45.525+10%		**Valores con Strike Shockeado a 31/03/2022 = 45.525+10%**	
	BS		**GARCH (1,1)**	
Plazo (días)	**Call**	**Put**	**Call**	**Put**
30	2.305,20	6.857,70	2.046,00	6.602,70
60	3.919,80	8.472,30	4.331,20	8.890,90
90	5.185,90	9.738,40	6.199,60	10.943,00
120	6.258,70	10.811,00	7.838,70	12.704,00
180	8.056,40	12.260,90	10.881,00	15.621,00

La primera diferencia que podemos apreciar tras la inclusión del Shock es la diferencia entre el valor de la call y de la put. Cuando partíamos del supuesto de que las opciones se encontraban "at the money" veíamos que para el caso de las valoraciones obtenidas mediante el modelo de Black-Scholes se cumplía que c=p (esto se cumple gracias a que suponemos que r = 0), y en el caso de las valoraciones obtenidas mediante el modelo GARCH (1,1) veíamos que no se cumplía esta igualdad al 100% pero los valores eran muy similares.

Ahora podemos ver que existe una gran diferencia entre el valor de call y put. Esto se debe a que al incrementar el valor del Strike un 10% la opción call pasa a estar "out of the money", puesto que el valor del subyacente pasa a ser inferior al del Strike, por lo que al propietario de la call no le interesa ejecutarla. Por el contrario, la opción put pasa a estar "in the money", puesto que ahora el valor del Strike es mayor que el del subyacente y es interesante ejecutarla, ya que vende el activo por un valor mayor al que se está vendiendo en el mercado en el momento del vencimiento.

Por otro lado, vemos que al igual que pasaba cuando las opciones se encuentran “at the money” a medida que aumenta el plazo también aumenta el valor de las opciones. Así como que a medida que los plazos de vencimiento son más largos el modelo GARCH (1, 1) proporciona valores mayores.

Como podemos ver en la tabla superior se confirma la teoría, puesto que las opciones calls con este nuevo shock se encuentran más “out of the money” y por tanto valen menos y las opciones puts cada vez se encuentran más “in the money” y su valor es mayor.

Mediante estos shocks hemos podido comprobar que los modelos responden de acuerdo a la teoría ante variaciones que aumentan el valor del Strike, pero para comprobar si mantiene este buen comportamiento en los casos en los que el shock reduce el valor del Strike hemos aplicado un shock que reduce en un 10% el valor del strike dejándolo en 40.972,5$. Los resultados son los siguientes:

	Valores con Strike Shockeado a 31/03/2022 = 45.525-10%		Valores con Strike Shockeado a 31/03/2022 = 45.525-10%	
	BS		GARCH (1,1)	
Plazo (días)	**Call**	**Put**	**Call**	**Put**
30	6.497,00	1.944,50	6.246,50	1.710,30
60	7.936,30	3.383,80	8.139,90	3.787,10
90	9.071,90	4.519,40	9.891,40	5.527,70
120	10.036,00	5.484,00	11.576,00	7.096,50
180	11.656,00	7.103,10	14.050,00	9.747,40

En esta tabla podemos apreciar que el comportamiento de los modelos es acorde a la teoría, puesto que pasa lo opuesto que, en los casos anteriores, es decir, ahora las opciones calls se encuentran “in the money” puesto que el propietario de la opción puede comprar el Bitcoin por un valor inferior al que tiene en el mercado, por lo que le compensa ejecutar la opción. En contra posición, ahora las opciones puts se encuentran “out of the money”, puesto que ejecutar la opción supondrían vender el Bitcoin por un precio inferior al que obtendría de acudir al mercado.

De igual forma, vemos que a medida que los plazos de vencimiento aumentan los valores que nos proporciona el modelo GARCH (1,1) son mayores respectos a los proporcionados por el modelo Black-Scholes.

A la vista de los resultados expuestos, podemos decir que ambos modelos respaldan los fundamentos teóricos sobre los que se sustentan, tanto para opciones “at the money” como para opciones “out of the money” o “in the money”. Así como que se comportan de un modo lógico a medida que los plazos de vencimiento de las opciones aumentan.

Una vez que tenemos cierta confianza en los modelos podemos apreciar que entre ellos existen diferencias a la hora de estimar el valor de las opciones. De entrada podemos apreciar que ya bajo el supuesto de que las opciones se encuentren “at the money” existen diferencias entre los valores que le da a las opciones el modelo de Black-Scholes y los que le da el modelo con volatilidades que siguen un modelo GARCH (1,1), pero lo que más nos llama la atención es que esta diferencia entre las valoraciones de los modelos se incrementan a medida que las opciones van estando más alejadas de dicha situación.

Esto nos hace pensar que cuando las opciones que valoramos tienen un pazo de vencimiento muy corto nos encontramos unas valoraciones muy similares para ambos modelos, pero que a medida que estos plazos de vencimiento aumentan parece preferible la utilización del modelo GARCH (1, 1), ya que recoge los efectos que hemos observado en la serie histórica de volatilidad variable.

Teniendo esto en cuenta, vamos a poner más el foco en estas diferencias y trataremos de explicar a qué se debe y porque se incrementan a medida que las opciones se alejan más del "at the money".

Para tratar de conocer mejor las diferencias a la hora de valorar que existen entre ambos modelos primero vamos a cuantificarlas. Para ello, vamos a calcular primeramente la tasa de variación que existe entre los valores que proporcionan los diferentes modelos para cada opción, mediante la siguiente formula:

$$\%Variación = \frac{(Valor\ de\ la\ opción\ con\ GARCH\ (1{,}1) - Valor\ de\ la\ opción\ con\ BS)}{Valor\ de\ la\ opción\ con\ BS} x100$$

De esta forma veremos de una forma clara, cual es el porcentaje de la diferencia y adicionalmente conoceremos cual es el signo, es decir su el modelo GARCH (1,1) estima un valor mayor o menor frente al modelo de Black-Scholes. Tras realizar este cálculo el resultado es el siguiente:

	Strike = 45.525		Strike = 45.525			
	GARCH (1,1)		BS			
Plazo	**Call**	**Put**	**Call**	**Put**	**Variación GARCH vs BS**	
30	3.616,00	3.698,60	3.997,60	3.997,60	-9,55%	-7,48%
60	5.930,20	6.047,10	5.642,00	5.642,00	5,11%	7,18%
90	7.972,40	7.932,10	6.896,10	6.896,10	15,61%	15,02%
120	9.848,60	9.676,70	7.946,90	7.946,90	23,93%	21,77%
180	12.000,00	12.659,00	9.693,90	9.693,90	23,79%	30,59%

Lo primero que podemos ver es que a medida que los plazos aumentan también aumentan las diferencias entre modelos. Esto se puede deber a lo que varios estudios como del de Derman y Kani (1994) denominan "el efecto estructura temporal de la volatilidad", por el cual las volatilidades tienden a estar relacionadas con el plazo que falta para el vencimiento de la opción.

Este efecto no lo puede recoger el modelo de Black-Scholes, puesto que al asumir volatilidad constante está tiene el mismo peso independientemente del plazo de vencimiento de la opción. Por el contrario, este efecto si parece recogerlo el modelo con volatilidades que siguen un modelo GARCH (1,1), puesto que la volatilidad deja de ser constante a mayor plazo de vencimiento mayor impacto tiene dicha volatilidad. Según los estudios anteriormente citados el comportamiento real de los mercados tiende a ser más próximo a los valores obtenidos mediante el modelo GARCH (1,1).

Debido a este efecto podemos explicar parte de las diferencias, pero numerosos estudios como el de Rubinstein (1994) y posteriormente el de Peña, Rubio y Serna de (1999 y 2001), sugieren que las volatilidades implícitas en el modelo de Black-Scholes tienden a estar relacionadas con el precio de ejercicio de la opción, a esta relación se la conoce como la "sonrisa de volatilidad" o *"Volatility Smile"*.

Este efecto se debe a que bajo el modelo de Black-Scholes asumimos que la distribución de probabilidad que sigue el subyacente es Log-normal, mientras que la distribución que siguen en realidad los precios no tiene por qué seguir esta distribución.

Tanto en los estudios anteriormente citados como el de Hull (2002), nos indican que el efecto "*Smile",* se aprecia especialmente cuando las opciones se encuentran muy "out of the money" o "in the money", por ello vamos a calcular mediante la misma fórmula las variaciones que se aprecian entre ambos modelos cuando se aplican Shocks y de esta forma salimos del estado de "at the money".

Variación GARCH vs BS +10%		**Variación GARCH vs BS +20%**		**Variación GARCH vs BS -10%**		**Variación GARCH vs BS -20%**	
Call	**Put**	**Call**	**Put**	**Call**	**Put**	**Call**	**Put**
-11,24%	-3,72%	-12,39%	-1,03%	-3,86%	-12,04%	-1,30%	-12,64%
10,50%	4,94%	13,98%	4,00%	2,57%	11,92%	2,36%	19,25%
19,55%	12,37%	28,66%	9,60%	9,03%	22,31%	6,63%	31,86%
25,24%	17,51%	36,60%	13,26%	15,34%	29,40%	10,43%	42,98%
35,06%	27,41%	40,28%	20,08%	20,54%	37,23%	15,92%	49,56%

Como podemos ver y de acuerdo a los estudios anteriormente citados, las diferencias se incrementan a medida que la opción deja de esta "at the money". Especialmente llama la atención para los casos en los que se encuentra muy "out of the money", en las que la diferencia entre la valoración de los modelos llega casi al 50%.

Como se explica en diversos estudios, este efecto se debe a que las colas de la función de distribución del precio del subyacente, que se asumen bajo el modelo de Black-Scholes (que es log-normal), tiene las colas más ligeras que la función de distribución que se asumen bajo el modelo GARCH (1,1). Esto quiere decir, que el modelo GARCH (1,1) es más sensible para las opciones "out of the money", ya que entiende que para que esa opción se ejecute el precio del subyacente debe tener una gran subida (para el caso de las calls) o una gran bajada (para el caso de las calls)

5. Conclusiones

Tras los análisis realizados a lo largo del presente trabajo en este apartado expondremos las conclusiones a las que hemos llegado.

Lo primero destacable es que para opciones “at the money” y con un plazo de vencimiento corto o próximo ambos modelos realizan unas estimaciones similares, por lo que no se puede determinar que modelo sería más conveniente, teniendo en cuenta que la complejidad que requiere el modelo GARCH (1, 1) para su estimación es claramente superior a la requerida por el modelo Black-Scholes con un programa como MATLAB.

Como hemos podido observar estas diferencias se hacen apreciables a medida que los plazos de vencimiento aumentan, esto se debe a ”el efecto estructura temporal de la volatilidad”. Efecto que el modelo Black-Scholes no puede recoger al asumir volatilidad constante si es recogido por el modelo GARCH (1, 1), ya que nos permite utilizar volatilidades variables.

Adicionalmente a este efecto, como varios estudios anteriormente citados nos explican, se puede apreciar el efecto “sonrisa de volatilidad”. Este efecto nos indica que la asunción de que el subyacente sigue una distribución de probabilidad Log-normal, que realiza el modelo Black-Scholes hace que las estimaciones que realiza dicho modelo se alejen de los mercados reales a medida que las opciones se encuentran más “out of the money” e “in the money”. Esto se debe a que el peso que le da a las colas la distribución Log-normal es inferior al peso que le da la distribución que se asumen bajo el modelo GARCH (1,1), por lo que Black-Scholes tiende a infravalorar las opciones “out of the money” e “in the money”.

Teniendo todo esto en cuenta y ligado con los artículos citados a lo largo del apartado *Resultados* podemos concluir que el modelo GARCH (1,1) parece corregir en parte las carencias que tiene el modelo de Black-Scholes, puesto que como los diferentes autores de los artículos afirman, lo fórmula de Black-Scholes es monótona creciente en volatilidad y los mercados reales tienden a valorar más las opciones “out of the money” e “in the money” que dicha formula.

6. Bibliografía

A lo largo del desarrollo del presente trabajo, se ha empleado la siguiente documentación, que incluye páginas web, artículos de revistas y libros.

Páginas webs

- https://www.investing.com/

Artículos y manuales:

- Black, F. and M. Scholes (1973). “The pricing of options and corporate liabilities”, Journal of Political Economy 81, 637-659.
- Hull, J. (2009). “Options Futures And Other Derivatives”. Prentice hall finance.
- Li, Johnny Siu-Hang. Hardy, Mary R. Tan, Ken Seng. “On Pricing And Hedging The No-Negative-Equity Guarantee In Equity”, Journal of Risk and Insurance; Jun 2010; 77, 2; ABI/INFORM Complete pg. 499
- Andrés, Montoya López. Alfredo, Trespalacios. “Valoración de opciones cuando la varianza no es constante “, Revista Soluciones de Postgrado EIA, Numero 13. p. 37-53. Envigado, Julio-Diciembre de 2014
- “The Bitcoin options market: A first look at pricing and risk” de Akanksha, Jalan. Roman, Matkovskyy and Saqib, Aziz. “The Bitcoin options market: A first look at pricing and risk” Applied Economics, 53:17, 2026-2041, (2020)
- Derman, E. and Kani I. (1994), “Riding on a smile”, Risk 7, 18-20.
- Rubinstein, M. (1994), “Implied Binomial Trees”, Journal of Finance 49, 771-818.
- Peña, I., Rubio, G. and G. Serna (1999). “Why do we smile? On the determinants of the implied volatility function”, Journal of Banking and Finance 23, 1151-1179.
- Peña, I., Rubio, G. and G. Serna (2001). “Smiles, Bid-Ask Spreads and Option Pricing”, European Financial Management 7 (3), 351-374.
- HULL, J.C. (2002): "Introducción a los mercados de futuros y opciones". Prentice-Hall.