UAH

MATEMÁTICAS MANIPULATIVAS EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

Máster Universitario en formación del profesorado de enseñanza obligatoria, bachillerato, formación profesional y enseñanza de idiomas

Presentado por:

Dª Elena Oliver González-Ortega

Dirigido por:

Tutora: Dª Arantzazu Fraile

Cotutor: D. Alberto Lastra

Alcalá de Henares, a 31 de agosto de 2022

Resumen

Año tras año, se han llevado a cabo investigaciones sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas debido a la necesidad de cambiar o mejorar las metodologías tradicionales. Una de las propuestas más conocidas en los últimos años es la incorporación de los materiales manipulativos, siendo el centro de interés para muchos matemáticos y psicólogos dedicados a la educación.

El trabajo tiene como objetivo profundizar sobre diferentes aspectos de los materiales manipulativos, así como el origen, las ventajas o inconvenientes que conlleva su uso, la importancia de incluirlos en el aula o su clasificación. Además, este tipo de recursos se centrarán en los contenidos de una parte importante de las matemáticas, la probabilidad, y se propondrán procedimientos y estrategias útiles para implementarlos en el aula.

Palabras clave: Matemáticas, materiales manipulativos, enseñanza, aprendizaje, constructivismo, metodología y probabilidad.

Abstract

Every year, research has been carried out on the processes of teaching and learning mathematics due to the need to change or improve traditional methodologies. One of the best known proposals in recent years is the incorporation of manipulative materials, being the focus of interest for many mathematicians and psychologists dedicated to education.

The aim of this work is to explore different aspects of manipulative materials, such as their origin, the advantages and disadvantages of their use, the importance of including them in the classroom and their classification. In addition, this type of resource will focus on the contents of an important part of mathematics, probability, and useful procedures and strategies will be proposed to implement them in the classroom.

Keywords: Mathematics, manipulative materials, teaching, learning, constructivism, methodology and probability.

Índice

Introducción 5
Objetivos 7
Materiales manipulativos en el aprendizaje de las matemáticas 8
¿Qué es un material manipulativo? 8
Marco teórico 9
Importancia del uso de los materiales manipulativos en el aprendizaje de las matemáticas 15
Ventajas e inconvenientes del uso del material manipulativo 18
Qué dice la ley sobre el uso de los materiales manipulativos 21
Clasificación de los materiales manipulativos 22
Propuesta de enseñanza de la probabilidad a través del material manipulativo 23
Descripción de la unidad 23
Contexto y justificación 23
Metodología 25
Dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad 27
Material manipulativo 28
Desarrollo de los contenidos 29
Combinatoria y técnicas de recuento 29
Sucesos y operaciones con sucesos 34
Regla de Laplace y cálculo de probabilidades 38
Probabilidad condicionada 40
Otras actividades y juegos relacionados con la probabilidad y el uso de materiales manipulativos 43
Conclusión 44
Bibliografía 45
Anexos 48
Anexo I: Plantillas 48

Introducción

Hoy en día las matemáticas constituyen una parte muy importante de nuestro aprendizaje y están presentes en numerosas acciones en la vida cotidiana de las personas. Gracias a ellas podemos resolver problemas y dar respuesta a situaciones de la vida cotidiana, y por ello, se considera una de las materia para las que se hace imprescindibles un conocimiento y dominio básico que ha de adquirirse a lo largo del periodo de educación obligatoria, aunque es bien sabido que el porcentaje de alumnos que adquieren este mínimo dominio es escaso y que su enseñanza presenta algunas dificultades: ¿Cuántas veces hemos escuchado lo aburridas que son las clases de matemáticas? ¿Cuál es la asignatura más odiada por la mayoría de los estudiantes? Y como éstas, existen muchas más preguntas a las que es necesario encontrar una solución. Uno de los problemas más comúnmente señalado es el grado de abstracción con el que se presenta esta asignatura y lo complicado que es entenderla sin las herramientas adecuadas. Por ello este trabajo, el cual se centra en el estudio de un tipo soporte metodológico cuyo objetivo es enseñar las matemáticas de manera diferente facilitando el aprendizaje de los alumnos, denominado 'matemáticas manipulativas'. Su principal objetivo es utilizar la manipulación para poder entender los conceptos matemáticos y adquirir los conocimientos necesarios, antes de llegar a la abstracción que tanto caracteriza a las matemáticas.

Los materiales manipulativos son un tipo de recurso didáctico que facilita la enseñanza y el aprendizaje, estimulando los sentidos para adquirir habilidades, destrezas y actitudes. Las matemáticas que se apoyan en este material son muy útiles para aplicarlas en situaciones de la vida diaria y se basa en un aprendizaje autónomo, olvidando la transmisión directa del docente al alumno. Las investigaciones realizadas sobre los beneficios que presenta este tipo de enseñanza no son actuales, y se puede comprobar en la primera parte del trabajo, donde se realiza una recopilación de diversos autores que han desarrollado teorías sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Al exponer esas teorías nos damos cuenta de la importancia que tienen los materiales manipulativos y la necesidad de ser incluidos en el aula. Los apartados siguientes tratan aspectos sobre las matemáticas manipulativas, así como la importancia de su uso desde una visión tanto psicológica como matemática, los beneficios e inconvenientes que puede presentar a la hora de incluirlos en el aula, y la clasificación que podemos hacer de ellos.

Aunque la primera parte del trabajo se ha realizado de manera general para las matemáticas, en la segunda parte del trabajo se ha intentado realizar una propuesta

didáctica centrada en la enseñanza de la probabilidad a través de los materiales manipulativos. En ella se describe el contexto en el que se encuentra la unidad didáctica junto con las dificultades que suelen presentar los alumnos al adquirir dichos conocimientos. Y, por último, se presentan una serie de actividades o procedimientos basados en el aprendizaje de los conceptos básicos de probabilidad, utilizando el material manipulativo, que se pueden llevar a cabo para ejecutarlos en el aula.

Objetivos

El principal objetivo de este proyecto fin de máster es desarrollar una pequeña investigación sobre las matemáticas manipulativas en el aula y cómo el aprendizaje de los alumnos mejora con el uso de distintos materiales consiguiendo así la competencia matemática de manera adecuada. A continuación, se presentan los objetivos que se pretenden conseguir con el desarrollo de la parte general del trabajo y los objetivos relacionados con la propuesta de enseñanza de la probabilidad:

Objetivos generales

- Presentar las numerosas ventajas que conlleva impartir clases de matemáticas utilizando recursos didácticos como el material manipulativo; estos favorecen los procesos de enseñanza y aprendizaje
- Dar visibilidad de la percepción que el alumnado tiene de la asignatura de matemáticas.
- Concienciar al lector sobre la utilidad y la relevancia del uso de los materiales manipulativos en el aula, y en concreto en las clases de matemáticas.

Objetivos específicos

- Presentar una metodología basada en los materiales manipulativos para la enseñanza de la probabilidad.
- Proporcionar ideas de materiales manipulativos relacionados con la enseñanza de probabilidad.
- Facilitar a los docentes orientaciones para el uso de los materiales manipulativos.
- Proporcionar diversas actividades para llevarlas a cabo en el aula.
- Favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad gracias al uso de los materiales manipulativos.

Materiales manipulativos en el aprendizaje de las matemáticas

¿Qué es un material manipulativo?

Como su propia palabra indica, los materiales manipulativos, son aquellos que pueden ser manipulados. Diferentes autores, tras su recorrido realizando investigaciones y trabajos sobre los materiales manipulativos, los definen desde sus propias perspectivas:

En primer lugar, tenemos a (Alsina et al., 1988), donde los definen como todos aquellos objetos que ayuden a describir, entender y consolidad conceptos matemáticos. En (Cascallana, 1988), se entiende como fase manipulativa, aquella donde el alumno observa, manipula y opera con objetos, siendo la primera fase para adquirir conocimientos, y en (Carretero et al., 1995), se definen los materiales didácticos como aquellos que se crean con un fin educativo, aunque puede ser utilizado para otros fines.

Podemos observar que, a pesar de exponer cada uno su definición, todos tiene una idea en común y es que, si nos referimos a enseñanza y aprendizaje, los materiales manipulativos son aquellos creados para conseguir algún fin didáctico a través de la manipulación de estos.

Marco teórico

A partir de la década de 1800, la educación comenzó a incluir elementos manipulativos, ya que anteriormente no se consideraban herramientas para ello. A medida que avanzan los años, se introducen tableros de conteo y ábacos como los primeros materiales a parte de los propios dedos que era lo único que se utilizaba hasta entonces.

La publicación de *Emilio*, libro de Jean-Jacques Rousseau (1712-1778), filosofo suizo considerado un gran pensador de la Ilustración, provocó el cambio sobre el concepto del aprendizaje, ya que los nuevos conceptos que introdujo en el campo de la educación le hicieron ser el padre de la pedagogía moderna (Fernández y Tamaro, 2004). Dicho libro influyó en el pensamiento de Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827), pedagogo suizo cuya labor fue dirigida hacia la educación, defendiendo el uso del aprendizaje práctico y siendo su principal lema "Aprender con la cabeza, el corazón y la mano". A su vez, este último influyó en otro pedagogo, llamado Friedrich Wilhelm August Froebel (1782-1852), el cual basó sus estudios en la educación preescolar, defendiendo la creencia del aprendizaje experimental y desarrollando juegos educativos.

Fue en 1900 cuando aparece una nueva autora que sigue la misma línea que los anteriores, María Montessori (1870-1952), pedagoga italiana cuyo objetivo era que los niños aprendieran investigando y explorando. Además, desarrolló un método de aprendizaje cuyas bases eran el fomento de la iniciativa y la capacidad de respuesta utilizando el material didáctico.

Una vez visto el origen de estos recursos didácticos, podemos decir que, hasta la actualidad, han existido numerosos autores defendiendo el uso de los materiales manipulativos en las aulas de matemáticas con el fin de hacer desaparecer los procesos de enseñanza-aprendizaje mecánicos e irracionales, y por lo tanto introducir procesos reflexivos y racionales. A continuación, se mencionan algunos de ellos junto con las teorías que éstos defienden, apoyadas principalmente en un aprendizaje constructivista, definido como el aprendizaje que adquiere el alumno cuando procesa la información y construye su propio conocimiento sin utilizar la reproducción.

Lev Semiónovich Vygotsky (1896-1934), fue un psicólogo y epistemológico ruso de origen judío (Fernández y Tamaro, 2004). Realizó numerosas investigaciones sobre el proceso de conceptualización en los esquizofrénicos y ejerció gran influencia en la

psicología pedagógica occidental. Vygotsky define la zona de desarrollo próximo (Prieto Abarquero, 2014), como la distancia entre el nivel de desarrollo real y potencial, es decir, es la distancia entre las habilidades del alumno y las que puede llegar a desarrollar si cuenta con ayuda externa.

Jean Willian Piaget (1896-1980), nació en Suiza y fue un psicólogo constructivista siendo el padre de la epistemología genética. Realizó varias publicaciones sobre psicología infantil y destacó en el estudio de este campo por su teoría constructivista del desarrollo de la inteligencia, (Fernández y Tamaro, 2004). La idea que seguía la teoría de Piaget se basaba en la construcción del conocimiento y esa construcción era esencialmente cognitiva. Visualiza el aprendizaje como un proceso de evolución donde los niños aprenden por la interacción con objetos concretos (Jiménez y Espinosa, 2019). A medida que un niño crece, su construcción del conocimiento irá progresando de los objetos a operaciones concretas o representaciones visuales hasta que al final llegue al pensamiento abstracto.

Piaget distingue tres tipos de conocimiento (Juárez Guevara, 2018): el conocimiento social que se transmite de manera oral, el conocimiento físico que se transmite por los sentidos y, el conocimiento lógico-matemático que se adquiere por abstracción reflexiva. En cuanto a este último que es el que nos interesa, Piaget afirma que la matemática se basa en establecer relaciones entre los objetos y sujetos, donde es imprescindible captar las propiedades de éstos a través de los sentidos.

Además de los tipos de conocimiento distinguidos por este autor, diferencia también cuatro etapas, (Jiménez y Espinosa, 2019), hasta llegar a la abstracción de manera progresiva. En primer lugar, define la etapa sensomotora, caracterizada por la acción sensorial sobre los objetos siendo una etapa práctica; a continuación tendríamos la etapa preoperacional, en la que se da un razonamiento intuitivo y se desarrollan los primeros símbolos o representaciones; en tercer lugar tendríamos la etapa de las operaciones concretas, donde aparece un razonamiento lógico sobre los objetos concretos, basado principalmente en las observaciones realizadas; y por último, define la cuarta etapa como la etapa de operaciones formales, en la cual ya pueden sacarse hipótesis y deducciones sobre objetos abstractos y realizar un razonamiento lógico sobre ello.

Según Piaget, existen varios factores que influyen en la construcción del conocimiento, de los que destaca, la organización y la estructuración en esquemas cognitivos que

presenta la mente, la adaptación según los estímulos del entorno, y la estimulación externa y la influencia sensorial que inciten al alumno y donde entran en juego los materiales y la capacidad del docente de incluir éstos en el aprendizaje, para llevar a cabo las etapas definidas anteriormente.

Zoltan Paul Dienes (1916-2014), fue un matemático nacido en Budapest. Se consideraba un practicante de la matemática moderna, lo que le llevó a comprender y a tener interés sobre las dificultades que suponía el aprendizaje de las matemáticas. Dienes, tal y como se indica en (Díaz Calvo, 2018) y en (Hincapié y Riaño, 2008) es único en el campo de la educación ya que se dedicó de lleno a la mejora de la educación matemática junto a otros, siendo fundador del Grupo de Estudio Internacional de Aprendizaje de las Matemáticas. Valoró el arte y la estética de éstas y decidió introducir ideas innovadoras para el estudio de los conceptos matemáticos que a priori se presentaban más complejos, incluyendo juegos, bailes y canciones, de manera que su conocimiento se adquiriera de forma creativa, divertida y desafiante. Es considerado un defensor del trabajo en grupo con materiales concretos y por ello creó diferentes materiales, los cuales son popularmente conocidos, como son los Bloques Aritméticos, los Bloques Multibase, los Bloques Lógicos, entre otros, que son muy útiles para aprender conceptos básicos de matemáticas, y que actualmente se siguen utilizando en las aulas de infantil y primaria. La metodología, seguida por Dienes, para la Enseñanza-Aprendizaje de las matemáticas, consta de seis etapas (Dienes et al., 1981), y se basa en el uso de objetos manipulativos. En primer lugar, tenemos la etapa de adaptación, en la que el alumno puede interactuar libremente con los objetos; por otro lado, tenemos la etapa de estructuración, donde se reúnen el mayor número de experiencias que posteriormente son útiles para dar significado a un mismo concepto. Como tercera etapa, tenemos la abstracción, encargada de deshacerse de los aspectos del juego que no tienen interés y se interioriza por tanto los conceptos relevantes. En cuarto y quinto lugar, tenemos la representación gráfica y la descripción de éstas. Con estas etapas se pretende llevar a lo visual lo aprendido en las anteriores etapas introduciendo el lenguaje matemático para describirlo. Por último, Dienes denomina la sexta etapa como la formalización o demostración, en la cual, el alumno debe ser capaz de haber interiorizado con éxito los conocimientos y desenvolverse fácilmente explicando todos los procesos teniendo en cuenta las experiencias anteriores.

Además de las seis etapas, Dienes propone cuatro principios basándose en las teorías psicológicas (Díaz Calvo, 2018). Los principios que propone Dienes son: El principio dinámico, por el cual se introducen actividades lúdicas siendo la base el conocimiento que se quiere impartir, el principio de constructividad, basado en la exploración del aprendizaje a través de las experiencias, el principio de variabilidad matemática, el cual busca todos los posibles caminos y asegura llegar a todos para conseguir un conocimiento pleno, y por último, el principio de variabilidad perceptiva, donde la abstracción de los contenidos se irá adquiriendo gracias a mostrar las diferentes formas de un contenido.

Junto a Dienes, otros matemáticos contemporáneos y grandes maestros de la Didáctica de la Matemática, estuvieron muy implicados en el uso de recursos manipulativos, aunque cabe destacar dos grandes psicólogos que, aunque no hayan estudiado en profundidad el campo de las matemáticas, establecieron unos principios de aprendizaje que pueden ser una base útil para crear actividades para los alumnos y en los cuales se les da importancia también al material manipulativo. Tanto las teorías del aprendizaje de Jerome Bruner como las de Jean Piaget han sido muy importantes en el campo de la educación matemática.

Jerome Bruner (1915-2016), nació en Nueva York y fue un psicólogo y pedagogo estadounidense. Bruner fue director del primer centro de psicología cognitiva, el Center for Cognitive Studies, ubicado en Harvard, y posteriormente, fue profesor en Oxford, (Fernández y Tamaro, 2004). Tanto Bruner como Dienes, afirman que el aprendizaje debe iniciarse con la manipulación de objetos físicos, y posteriormente de manera gráfica antes de llegar a la parte abstracta, y a Bruner se le conoce principalmente por la teoría del aprendizaje por descubrimiento, mencionado en (Vergara, 2020), (Juárez Guevara, 2018) y en (Díaz Calvo, 2018) basándose en la teoría de Bruner. Esta teoría afirma que todo conocimiento real es aprendido por uno mismo y que el alumno lo adquiere al descubrirlo por sí mismo. Es un proceso educativo basado en la participación, resolución de problemas y construcción de conocimientos integrados partiendo de la realidad. Este método de aprendizaje se sustenta en la actividad del alumno, donde el profesor se encarga de elegir y proporcionar a los alumnos problemas, actividades o retos para que éstos se involucren de manera íntegra en su resolución, incentivándoles y motivándoles. Durante ese proceso, los alumnos pueden observar, experimentar, comparar, formular, rechazar o cualquier acción relacionada con el conocimiento que quiere ser enseñado. Posteriormente, la parte analítica y abstracta de dicho conocimiento es esencial para llegar

a una conclusión sobre lo experimentado anteriormente, ya sea sacando algunas hipótesis, formular cosas concretas u obtener un enunciado verídico. De esta manera el conocimiento descubierto por los alumnos de manera visual y manipulativa es esencial para que asimilen de manera adecuada lo aprendido. Podemos observar con las teorías y metodologías tanto de Bruner como Dienes, que el aprendizaje debe iniciarse con la manipulación de objetos físicos, y posteriormente de manera gráfica antes de llegar a la parte abstracta.

Es obvio que son necesarios más factores que únicamente utilizar el material didáctico (Sarmiento Santana, 2007). Como decía Bruner (Sarmiento Santana, 2007), transferir el aprendizaje tiene que ser favorecido por: la actitud del alumno a la hora de intentar resolver el problema, los materiales deben ajustarse y ser compatibles al contexto de ese momento y la capacidad de manipular la información debe ser esencial para la integración del contenido. En las investigaciones realizadas por Bruner acerca de los procesos cognitivos del pensamiento, analizó las imágenes mentales que el sujeto tiene sobre los objetos de aprendizaje, y de ahí concluyó que existen tres modos de representación (Juárez Guevara, 2018): ejecutora donde se opera únicamente con la manipulación; icónica, es el paso intermedio entre lo concreto y lo abstracto donde el alumno trabaja con una imagen o esquema mental para relacionar conceptos; y por último tenemos la representación simbólica, en la cual se representan los conceptos mediante símbolos y permite al alumno adquirir el lenguaje propio del contenido y su compresión abstracta. En los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas esto se traduce en la metodología C-P-A (Concreto- Pictórico-Abstracto).

Por una parte, Bruner (Arce Sánchez et al., 2019) afirma que es esencial el diseño, la selección o el planteamiento de esos contenidos que pretenden activar al alumno para potenciar el aprendizaje por descubrimiento. Por otra parte, se apoya en la idea de la zona de desarrollo próximo de Vygotsky, y utilizando su definición, vista anteriormente, se plantea que en numerosas ocasiones será necesario utilizar la zona de desarrollo próximo para realizar de manera adecuada el aprendizaje por descubrimiento. En caso necesario, el proceso de descubrimiento será guiado o bien por el profesor o bien por otros alumnos, según las dificultades que presenten, para llegar así a desarrollar un conocimiento más amplio.

David Ausubel (1918-2008), fue un psicólogo y pedagogo que nació en Nueva York y es considerado una figura importante en el constructivismo (Fernández y Tamaro, 2004). Su mayor aportación a esta corriente pedagógica se conoce como aprendizaje significativo, este se centra en establecer relaciones ente el conocimiento ya adquirido, los aprendizajes previos, con la nueva información, omitiendo el aprendizaje por repetición o memorístico (Juárez Guevara, 2018), (Arce Sánchez et al., 2019). Para Ausubel, la idea principal del aprendizaje significativo es que el estudiante desarrolle un aprendizaje que sea significativo para él y pueda relacionarlo con una imagen, un símbolo, un objeto o un concepto. Podemos observar que este último autor mencionado, no tiene en cuenta los materiales manipulativos, pero de nuevo hace referencia a un tipo de metodología que se aleja del aprendizaje memorístico y lo relaciona con contextos de la vida cotidiana.

Importancia del uso de los materiales manipulativos en el aprendizaje de las matemáticas

Las destrezas, habilidades o conocimientos adquiridos por los estudiantes vendrán determinados según las técnicas utilizadas durante el aprendizaje de las matemáticas. Por ello, en las últimas décadas, la didáctica de las matemáticas se ha centrado más en el acto de aprender que en el acto de enseñar, siendo necesario para cambiar los métodos tradicionales a los que actualmente se están incluyendo en la enseñanza (Arrieta, 1998). Aquí es donde adquiere importancia el aprendizaje significativo de Ausubel, el aprendizaje del estudiante debe relacionarse con conocimientos previos dotándose de significado en relación con el entorno.

Es muy común observar que los docentes dedicados a la enseñanza de las matemáticas siguen prefiriendo las clases tradicionales a la utilización de materiales y recursos didácticos. A la hora de impartir las clases de matemáticas, es fundamental escoger de manera adecuada los recursos y materiales que se van a utilizar, ya que son herramientas fundamentales para el desarrollo y enriquecimiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Esos recursos son usados para apoyar a los estudiantes en aspectos relacionados con el pensamiento, el lenguaje oral y escrito, la imaginación y la socialización, evitando así las memorizaciones forzosas sobre conceptos matemáticos que carecen de sentido para los estudiantes. Uno de los materiales didácticos más relevantes en los últimos años son los materiales manipulativos, siendo un recurso motivador y estimulante para los estudiantes, garantizando un aprendizaje más activo y asequible. El aprendizaje de las matemáticas apoyado con los materiales manipulativos presenta una serie de características positivas para adquirir dichos conocimientos, como por ejemplo la motivación existente gracias a la atracción hacia ese tipo de recurso, conteniendo un fuerte carácter exploratorio muy adecuado para la resolución de problemas, discusión, comunicación y reflexión. Por otro lado, la ambientación creada, gracias a estos métodos de enseñanza, facilita el desarrollo de las clases y la conexión entre los alumnos y las matemáticas, y, por supuesto, también la relación e inclusión de varios procedimientos para aprender conceptos específicos y no sólo métodos. A medida que los estudiantes trabajan con este tipo de herramientas durante el tiempo que ellos consideren y entiendan de manera adecuada los conceptos matemáticos, ellos mismos son conscientes que el material es un puente hacia las ideas abstractas y cada vez los necesitan con menos. Se debe entender que estos recursos manipulables son un complemento y no un sustituto. En

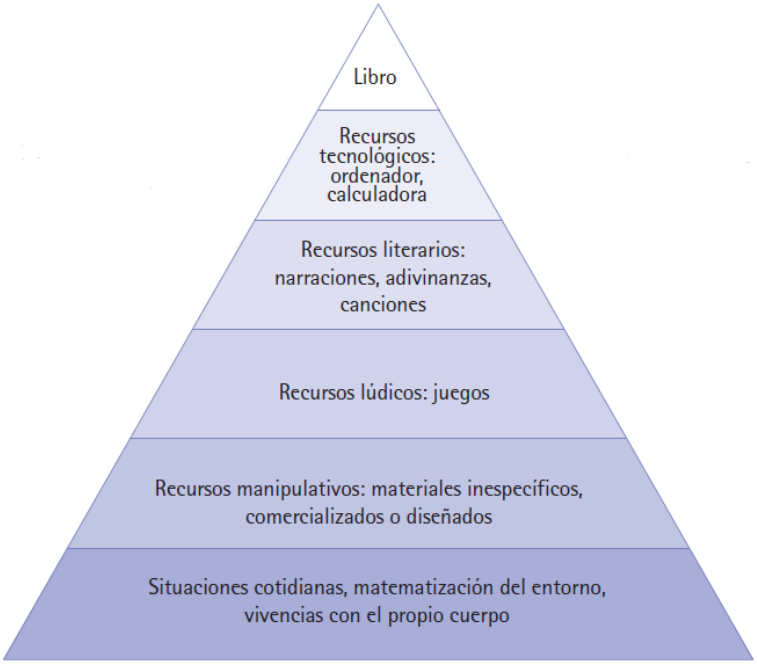
este punto, se puede mencionar la zona de desarrollo próximo de Vygotsky, que hemos explicado en el apartado anterior. En el momento que el alumno sea capaz de explicar a sus compañeros la actividad gracias a lo que él ya sabe y a los materiales, será el momento en el prescindirá de los recursos.

Con el desarrollo de las clases de matemáticas, se pretende que los alumnos adquieran la competencia matemática de manera satisfactoria. Se define la competencia matemática, según (MEFP, 2007), como la habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver problemas de la vida cotidiana. Para adquirir un pensamiento lógico-matemático, (Fernández Bravo, 2010) es necesario desarrollar cuatro capacidades a lo largo de su aprendizaje. En primer lugar, tenemos la observación, mediante la cual se puede percibir propiedades y relaciones de los conocimientos concretos que se quieren impartir. Por otro lado, tenemos la imaginación, la cual ayuda al aprendizaje debido a la variabilidad de situaciones en un mismo caso, es decir, que el alumno sea capaz de imaginarse todas las posibles opciones dentro de los principios, técnicas y modelos de las matemáticas. En tercer lugar, la intuición también juega un papel importante, ya que el alumno debe llegar a la solución mediante un razonamiento intuitivo y no utilizando técnicas adivinatorias. La cuarta capacidad que se debe mencionar es el razonamiento lógico, por el cual el alumno debe ser capaz de generar ideas con la estrategia adecuada ante una determinada situación.

Por último, cabe destacar, la pirámide de la educación matemática (Alsina, 2010), la cual ha sido analizada desde distintas disciplinas como la psicología educativa o la educación matemática. Debido a la falta de la competencia matemática, ya comentada anteriormente, es necesario replantearse las clases de matemáticas. Por ello, se compara la pirámide de la alimentación con la pirámide de la educación matemática con el fin de establecer diferentes niveles. Lo que sucede es que la representación piramidal muestra los distintos niveles y su importancia de acuerdo con un esquema que todos sabemos representar: la pirámide social, la pirámide de Maslow, la pirámide trófica, etc.

Figura 1

Pirámide de la educación matemática.



Nota: Tomada de "*La pirámide de la educación matemática"* (p. 14), por A. Alsina, 2010, Aula de Innovación Educativa, 189.

En la base de la pirámide se encuentra lo que se debería "consumir" todos los días para desarrollar el pensamiento matemático. Gracias a la observación y el análisis del entorno y de las situaciones cotidianas, se puede interiorizar distintos conocimientos asociados con las matemáticas. En segundo lugar, se encuentran los recursos didácticos que comentábamos anteriormente, sin olvidar los materiales manipulativos que como podemos observar es un pilar fundamental en la educación matemática. Con estos recursos y con el siguiente nivel, el cual hace referencia a los juegos, el alumno tiene la posibilidad de crear esquemas mentales de conocimiento o resolver situaciones problemáticas. A continuación, aparece lo que debería aparecer con menos frecuencia en las aulas, como, por ejemplo, los ordenadores, las calculadoras o recursos literarios como los cuentos. De manera sorprendente, tenemos en la cúspide de la pirámide lo que actualmente en las aulas se utiliza casi al cien por cien y en muchas ocasiones, de manera única, los libros de texto. De hecho, para muchos docentes, la pirámide está invertida y no les dan apenas importancia a los recursos didácticos como los materiales manipulativos y aún menos a relacionar las matemáticas con el entorno del alumno, apareciendo, por tanto, las clases repetitivas, los conceptos memorísticos y las actividades con reglas mnemotécnicas.

Ventajas e inconvenientes del uso del material manipulativo

El uso de materiales manipulativos en el aula de matemáticas presenta numerosas ventajas, seleccionadas de (Rodríguez Vicente, 2014), (Jiménez y Espinosa, 2019) y (González Marí, 2010):

- Los materiales manipulativos son muy estimulantes y atractivos como para cambiar la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas, tanto para aquellos que no presentan ningún interés, como para los que les gusta la materia, pero se encuentran aburridos.
- Se pueden establecer relaciones entre los objetos que le rodean y los conocimientos de matemáticas.
- Favorecen el trabajo cooperativo, y permiten que existan debates y diálogos entre los alumnos y con el profesor.
- Puede eliminar bloqueos hacia esta asignatura tan abstracta, mejorando la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas.
- Gracias al material se pueden desarrollar estrategias para resolver problemas.
- Permiten crear actividades matemáticas estimulantes.
- Favorecen la autonomía y creatividad de los estudiantes, ya que se enfrentan a problemas sin solución a priori.
- Impulsa a los alumnos a observar, experimentar, interpretar y a aplicar conocimientos.
- Son buenos instrumentos para evaluar la comprensión de los conocimientos.
- Se pueden crear actividades de cualquier nivel, adaptándolo a cada una de las diferencias que presentan los alumnos.
- Facilitan el paso a la abstracción de algunos conceptos.
- Permiten modelizar conceptos e ideas matemáticas, analizando sus propiedades, donde el alumno es capaz de comprender dichos conceptos sin necesidad de reproducirlos.
- Son útiles para poner en práctica el aprendizaje por descubrimiento donde pueden investigar por sí mismos.
- A través del ensayo-error con el material se puede utilizar como estrategia de aprendizaje y resolución de problemas.

Para que se produzcan cada uno de los resultados positivos mencionados, el profesor también debe tener en cuenta el conocimiento que se puede llegar a conseguir con cada

material y sus posibilidades, además de estar convencido de que su uso facilitará el aprendizaje, sin esperar buenos resultados a corto plazo. Por supuesto, las clases en las que se utilicen los materiales deben estar previamente planificadas con posibilidades de fallo.

Como se puede observar, existen numerosos beneficios producidos por el uso de los materiales manipulativos. En cambio, la utilización de éstos no evita una serie de problemas e inconvenientes que aparecen al introducirlos en el aula y dificultan las clases al usarlos. Pueden ser dificultades relacionadas tanto con las personas implicadas ya sea el profesor, los alumnos o el centro educativo, como con el contenido matemático con el cual va a estar relacionado el material. Podemos destacar los siguientes inconvenientes escogidos de (Rodríguez Vicente, 2014), (Jiménez y Espinosa, 2019) y (González Marí, 2010):

- En algunas ocasiones, el material puede ser insuficiente para comprender por completo algún concepto de matemáticas.
- Existe falta de conocimiento en cuanto al manejo del material manipulativo
- No se cuenta con suficiente material para todos los estudiantes, ya sea por coste o por poco interés por parte de la institución, lo que dificulta el desarrollo de algunas actividades.
- La falta de madurez por parte de algunos estudiantes puede provocar distracciones con el material.
- Se debe dedicar mucho tiempo a la preparación y planificación tanto del material como de las actividades para utilizarlo.
- Según el centro, se pueden dar problemas en cuanto al espacio, grupos, ruido…
- Incomprensión por parte de los padres o de otros profesores y/o presión por parte del centro a la hora de obtener resultados a corto plazo.
- Complejidad del material en algunos temas concretos de las matemáticas.
- Falta de acompañamiento teórico en la actividad, creyendo que con el material es más que suficiente.
- Mala selección de materiales o no adecuación al concepto al que se quiere asociar.

Existen diversas estrategias para abordar las dificultades presentadas por el uso de los materiales manipulativos, (Jiménez y Espinosa, 2019) . En primer lugar y las más importantes serían garantizar la cantidad de material necesario y asegurar el conocimiento por parte de los docentes sobre los conceptos específicos que se vayan a impartir de esa

manera. Además, es necesario dar el uso adecuado a los materiales, dándoles a los estudiantes una orientación clara y concreta teniendo en cuenta el nivel de complejidad de la actividad y el nivel que presentan los estudiantes. A parte de estas estrategias clave, si se diseñan actividades y materiales los cuales se puedan adaptar a distintos niveles y unidades didácticas, muchos de las desventajas mencionadas anteriormente se solventarían.

Qué dice la ley sobre el uso de los materiales manipulativos

El desarrollo de las competencias específicas de matemáticas es el objetivo principal que se presenta en el *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria*, al hablar sobre el progreso curricular del perfil del alumno que debe conseguir con la asignatura de matemáticas. Los saberes básicos de las matemáticas, así como el razonamiento, la argumentación, la toma de decisiones, el control de la incertidumbre, la optimización de recursos, la creatividad…, son esenciales, ya que permitan a los alumnos desenvolverse en situaciones personales, académicas, sociales y laborales a lo largo de su vida. Si reflexionamos sobre ello, es posible pensar que modificar las clases de enseñanza de las matemáticas, sería un gran acierto. Una modificación posible podría incluir los materiales manipulativos en la metodología de la enseñanza de las matemáticas y que, gracias a sus beneficios y las características positivas que presentan, tal y como se ha comentado anteriormente, se pueda conseguir el perfil del alumno adecuado.

Por otro lado, en el *Diseño curricular base,* (MEC, 1989), existe una sección donde se habla específicamente de los materiales manipulativos en la educación. En dicho documento, se afirma que los materiales manipulables son un recurso eficaz para el aprendizaje a pesar de su poco uso. No podemos confirmar que no sean recursos conocidos dado que, desde su fecha de publicación hasta la actualidad, la perspectiva de los docentes a la hora de enseñar matemáticas ha cambiado. Además, se pone en duda que los materiales solo sean efectivos para las primeras edades, ya que para los alumnos de secundaria también son adecuadas debido a las acciones que conlleva utilizarlos, como por ejemplo la observación, la experimentación y la reflexión.

Clasificación de los materiales manipulativos

Los materiales manipulativos dirigidos a la enseñanza de las matemáticas son todos aquellos materiales que apoyan y potencian el razonamiento matemático, y que, a su vez, se puedan manipular.

En primer lugar, mencionamos una clasificación propuesta por (Cascallana, 1988). Se puede distinguir entre material no estructurado y estructurado. El primer tipo hace referencia a cualquier objeto físico del entorno que el estudiante puede manipular y utilizar para el crecimiento y evolución de su conocimiento. Estos objetos pueden despertar interés y contribuyen al desarrollo de sus capacidades motoras y a la generalización de conceptos. Por otro lado, tenemos el material estructurado, que hace referencia a los objetos que han sido diseñados y elaborados específicamente para la enseñanza de las matemáticas para un fin didáctico concreto, ya sean de creación propia o no.

Otra gran clasificación que podemos hacer es en función del contenido matemático en el que los materiales son utilizados y se dividirían en los distintos bloques que componen la asignatura de matemáticas (geometría, álgebra, funciones…). Aunque existan materiales que pueden ser utilizados en distintas áreas, lo más sencillo sería tener materiales específicos de cada contenido ya que sería más fácil su elaboración.

Existen más clasificaciones de los materiales manipulativos, como por ejemplo, la que nos presenta (Corbalán, 1994) en función del momento en el que se utilice dentro del aula, y se divide en tres opciones: pre-instruccional, que hace referencia al inicio de la clase o al introducir un concepto, co-instruccional, el cual se daría en el desarrollo de la clase o donde se trabaja un concepto, y post-instrucional, denominado para aquellos materiales que sirven para repasar un concepto o es utilizado al terminar la clase. Otras clasificaciones podrían ser según el tipo de actividad realizada con el material o bien con los diferentes tipos de aprendizajes que se pretender desarrollar. El primer caso hace referencia a acciones como plantear, mostrar o buscar estrategias, mientras que la segunda clasificación apunta a acciones como retener información, aplicar algoritmos o dominar la técnica.

Propuesta de enseñanza de la probabilidad a través del material manipulativo

Descripción de la unidad

Contexto y justificación

Actualmente, la probabilidad, debido a sus diversas aplicaciones en multitud de situaciones, se considera un parte importante de las matemáticas. El pensamiento probabilístico es necesario que se desarrolle desde las primeras edades, puesto que, en numerosas situaciones de la vida real, el azar está presente, considerando la incertidumbre un aspecto inevitable de la condición humana, (García Cruz, 2000). Dado que, en muchas ocasiones, las personas no estamos seguras de que algo pueda ocurrir con certeza o seguridad al no disponer de información suficiente, sacamos conclusiones o respuestas, de un conjunto de creencias o aproximaciones, para afirmar que dicha cosa suceda o no. En ese momento, la probabilidad entra en juego, definida como una medida asociada a un suceso según este pueda ocurrir o no.

Algo entra en contradicción cuando decimos que es importante para la vida si después en muchos cursos es el bloque más olvidado. Tanto el bloque de álgebra como el de geometría son dos bloques muy desarrollados de manera manipulativa, por lo que, en este trabajo hemos puesto el punto central en el aprendizaje de la probabilidad a través de materiales manipulativos siguiendo la metodología que se explicará a continuación. Se ha elegido el cuarto curso de educación secundaria obligatoria para enseñar y demostrar que, a pesar de ser más mayores que los que, por lo general, contienen más recursos, pueden aprender matemáticas con materiales de la misma forma que el resto.

En *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria*, establece la necesidad de desarrollar unas destrezas que permiten dominar contextos numéricos, métricos, geométricos, algebraicos, estocásticos y socioafectivos, de los cuales, cabe destacar el sentido estocástico, definido como la destreza que permite elaborar conjeturas, tomar decisiones o comprender e interpretar datos a través de la estadística.

En la tabla 1, podemos observar los contenidos y saberes básicos que debe adquirir el alumno al cursar matemáticas en cuarto curso, según dicha ley (MEFP, 2022).

Tabla 1

Saberes básicos de probabilidad asociado al nivel de matemáticas A.

Matemáticas A: Saberes básicos	**E. Sentido estocástico.** **2. Incertidumbre.**
Experimentos compuestos: planificación, realización y análisis de la incertidumbre asociada. Probabilidad: cálculo aplicando la regla de Laplace y técnicas de recuento en experimentos simples y compuestos (mediante diagramas de árbol, tablas…) y aplicación a la toma de decisiones fundamentadas.	

Nota: Tomada de *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.*(p. 41739 y p. 41744), por Ministerio de educación y formación profesional, 2022, BOE, núm. 76.

Metodología

La metodología que se va a seguir a partir de los materiales manipulativos requiere un gran dominio por parte del docente ya que incluir dichos recursos no siempre es beneficioso y pueden surgir algunos contratiempos como ya se han comentado en los inconvenientes. Además de las destrezas que debe presentar el docente, las bases o reglas, en las que se basa el desarrollo de la clase, tienen que ser los suficiente estrictas para no confundir el momento de utilizar el material como un descanso o tiempo para jugar en el aula. Aunque a priori parezca muy sencillo incluir material manipulativo en las clases de probabilidad, el objetivo que se pretende conseguir con esta unidad es utilizar el material para que, a través de la experimentación, el alumno entienda conceptos clave, y no tanto para realizar ejemplos típicos con cajas, bolas o fichas.

A pesar de que los alumnos cobran mucha importancia al introducir los recursos manipulativos, no nos podemos olvidar que el docente sigue teniendo el papel más importante, ya que, sin su guía y su ayuda, el estudiante no haría bien el proceso. Tal y como se ha comentado en la clasificación de los materiales manipulativos, existen diferentes tipos según se incluyan al principio, en mitad o al final de la adquisición del conocimiento. La mayoría de los materiales que se van a presentar a continuación son del tipo pre-instruccional, ya que el objetivo que persiguen es introducir un concepto de probabilidad a través de dicho material. Sin embargo, los recursos que se utilicen no pueden ser independientes de cualquier otra metodología, sino que lo esencial es que vaya relacionándose con una metodología algo más tradicional, es decir, el uso de los materiales facilitará el entendimiento de los conocimientos requeridos, pero no puede ser el único componente para ello. Aquí podemos destacar la construcción del conocimiento que defendía Piaget y que se ha explicado en el marco teórico.

El objetivo principal de la metodología implementada con material manipulativo en la enseñanza de la probabilidad es que los estudiantes descubran cómo se comporta el azar en diversas situaciones utilizando para ello ejemplos muy sencillos para así posteriormente avanzar hacia el conocimiento específico del curso específico de manera progresiva. La idea es que sean autónomos para descubrir procedimientos y fórmulas que más adelante utilizarían para ejercicios más difíciles. Algo parecido ocurre en el aprendizaje significativo defendido por David Ausubel, que afirma que los conocimientos previos que tiene el alumno puede relacionarse con las situaciones u objetos cotidianos guiándoles al aprendizaje, y con el aprendizaje por descubrimiento de Jerome Bruner,

donde explica que se puede aprender a través de la experimentación, observación, etc.; ambos aprendizajes pueden verse favorecidos con el uso de los materiales manipulativos, omitiendo así el aprendizaje memorístico o repetitivo. En definitiva, es importante considerar las actividades en las que se use el material manipulativo como un medio para llegar al conocimiento buscado permitiendo la reflexión, comprensión y asimilación de los contenidos, no como un fin.

Dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad

Las dificultades que pueden estar presentes en los estudiantes a la hora de estudiar probabilidad vienen dadas por el cambio de lo determinista hacia el azar. (Piaget e Inhelder, 1951) abordan la misma pregunta y concluyen que los más pequeños entienden el azar como un resultado impredecible tras varias causas actuando a la vez. (Batanero, s.f.) nos cuenta que los niños de preescolar no comprenden la aleatoriedad, como por ejemplo el movimiento y el cambio de posición de unas bolas en una bandeja que al principio están ordenadas y se mezclan progresivamente. Este experimento explicado en (Piaget e Inhelder, 1951), afirma que los niños a esa edad no comprenden bien la relación entre causa y efecto. Debe desarrollarse un razonamiento lógico-matemático, para que, posteriormente, a partir de los 11-12 años, los alumnos sean capaces de progresar a un razonamiento combinatorio, y para ello, su enseñanza es necesaria para desarrollarlo de manera completa. Una forma sencilla de llevarlo a cabo sería con situaciones cuyos resultados sean finitos y en la mayoría de los casos equiprobables, como por ejemplo lanzar un dado cúbico. La idea sencilla e intuitiva de explicar probabilidad, la cual se basa en las frecuencias, puede ser delicado para algunos alumnos, ya que los estudiantes tienden a pensar que las situaciones relacionadas con el azar son cuestiones de la suerte que tengan las personas o directamente no creen que los casos sean equiprobables, por ejemplo, al tirar un dado cúbico.

Con la propuesta que se expone a continuación, se pretende incluir el material manipulativo en la enseñanza de la probabilidad e intentar que en los alumnos adquieran el razonamiento combinatorio y el concepto de la aleatoriedad pudiendo solventar las dificultades presentadas, aunque no se puede asegurar con certeza hasta que se realice un estudio de ello.

Material manipulativo

Los materiales que serán empleados en el desarrollo de la unidad didáctica de probabilidad son los siguientes:

1º. Láminas de acetato de colores, o en su defecto, carpetas de colores

Imagen 1 de elaboración propia

2º. Plantillas del espacio muestral y subconjuntos (imprimibles)

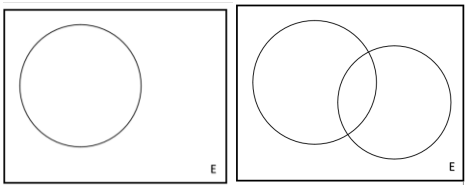


Imagen 2 de elaboración propia

3º. Fichas de colores

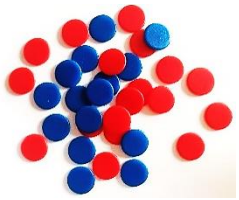


Imagen 3 de elaboración propia

4º. Bolsa pequeña introducir las fichas de colores

Imagen 4 de elaboración propia

5º. Fichas enumeradas

Imagen 5 de elaboración propia

Desarrollo de los contenidos

Las actividades y ejemplos empleados para explicar la probabilidad a través de los materiales manipulativos se han elegido para 4.ºESO. Es una propuesta muy sencilla, pero podría ser muy efectiva para explicar la procedencia de diferentes fórmulas y entender el procedimiento que se seguirá en ejercicios de mayor dificultad. En cambio, al ser una unidad didáctica que se imparte desde 1.ºESO, algunos ejemplos pueden ser útiles para otros cursos ya que en todos los contenidos presentados se comienza con algo muy simple y fácil de entender. A medida que se vayan explicando las actividades se podrá observar las ventajas que supone incluir los materiales en el aula de probabilidad y cómo se ven reflejadas algunas de las teorías que se comentaron en la primera parte.

Combinatoria y técnicas de recuento

Contenido

Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones.

Objetivos didácticos

- Usa técnicas de recuento sencillas
- Aplica la combinatoria en problemas contextualizados.
- Identifica y describe situaciones y fenómenos de carácter aleatorio.

Material manipulativo

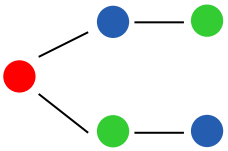
Dado que la combinatoria trata de ordenar o agrupar elementos escogidos de un grupo, se puede utilizar cualquier material, aunque en este caso se han elegido las fichas de colores (3º) ya que son fáciles de manejar y más visuales que los números o letras.

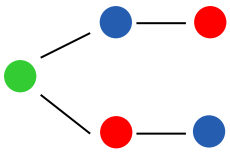
Procedimiento

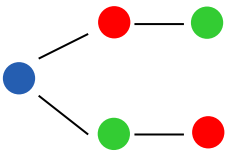
Para poder llevar a cabo las actividades en esta parte de la unidad didáctica, es necesario que el alumno haya recibido previamente una lección sobre el principio de multiplicación y los diagramas de árbol.

En primer lugar, veamos cómo impartir las permutaciones utilizando las fichas de colores. Las permutaciones se pueden definir como las diferentes maneras de colocar un conjunto de elementos. Para poder entender cuántas serían las posibles maneras de colocar m elementos y permutarlos, se les pide a los alumnos que lo hagan de manera progresiva. Pueden comenzar con dos fichas (1 azul y 1 roja) y permutarlas de todas las formas posibles, obteniendo:

De la misma manera, pueden hacerlo con 3 fichas distintas (azul, roja y verde) y comprobar si consiguen encontrar un patrón entre ambos ejercicios. Lo más probable es que se queden confusos, por lo que el siguiente paso sería colocar las fichas como un diagrama de árbol y contar las opciones posibles para aplicar el principio de la multiplicación. Supongamos que colocamos la ficha roja en primer lugar, después de ella, tendríamos 2 opciones, o la azul o la verde. Si continuamos con el tercer lugar, en el caso de estar en la primera opción de fichas, solo nos quedaría por colocar una verde, y en la otra opción, una azul, por lo que en esa posición no se puede elegir ficha, solo existiría una posibilidad.







Dado que hemos elegido la ficha roja en primer lugar, tendríamos otros dos casos idénticos para la ficha azul y verde si las colocamos en esa posición. Entendido esto se les puede pedir a los alumnos que cuenten las fichas que pueden contar en cada posición, es decir, en la primera posición pueden colocar cualquiera de las 3, y una vez colocada esa, en la segunda posición, solo quedarían dos opciones, y por descarte, en la última posición, no se podría elegir. Aplicando el principio de multiplicación, el número total de permutaciones con 3 fichas sería $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Pueden comprobarlo colocando un árbol completo con las fichas.

¿Qué pasaría entonces si tengo 4 fichas distintas? Si han entendido el proceso, el resultado que deberían hallar sería: el número de maneras posibles de colocar 4 fichas distintas, es decir, $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ posibilidades, siendo los números las opciones de fichas que pueden

ser colocadas en cada una de las posiciones. Lo que deben realizar como segundo paso sería encontrar una relación entre las fichas que tienen inicialmente y cómo obtienen el resultado. Al ver varios ejemplos es fácil darse cuenta de que la manera de hallar todas las posibilidades sería multiplicar el número de fichas por todos los anteriores hasta 1. En el caso de tener 20 fichas, tendríamos $20 \cdot 19 \cdot 18 \ldots 2 \cdot 1$ posibilidades.

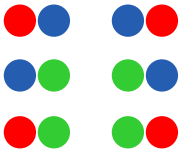
Una vez comprendido este ejemplo, y explicándoles el concepto del número factorial, se les puede introducir el número factorial para así enseñarles la fórmula:

$$\text{Permutaciones de } m \text{ elementos: } P_m = m! = m \cdot (m-1) \cdot \ldots 2 \cdot 1$$

Supongamos ahora que tenemos m elementos, pero no los queremos ordenar todos, sino que cogemos n elementos de esos m. Es aquí cuando aparecen las variaciones, definidas como el modo de ordenar n elementos extraídos de un conjunto de m elementos, siendo $n < m$, ya que, si coinciden, serían permutaciones. Veamos varios ejemplos con fichas en la tabla 2.

Tabla 2

Ejemplos de variaciones

	Elementos	**Combinaciones**
Si tenemos 2 elementos y los escogemos de 1 en 1		2 posibilidades
Si tenemos 3 elementos y los escogemos de 2 en 2		6 posibilidades 

Una vez probadas las variaciones con algunos ejemplos, se les pide a los estudiantes que interpreten los resultados de la misma manera que han hecho con las permutaciones. ¿Cuántas opciones tienes para colocar en cada posición? En segundo ejemplo de la tabla, tenemos dos posiciones, pudiendo colocar en la primera 3 fichas distintas, y una vez que está colocada, en la segunda posición, solo nos quedarían 2 opciones, por lo que las variaciones de 3 elementos cogidas de 2 en 2 sería $3 \cdot 2 = 6$ maneras de combinarlas.

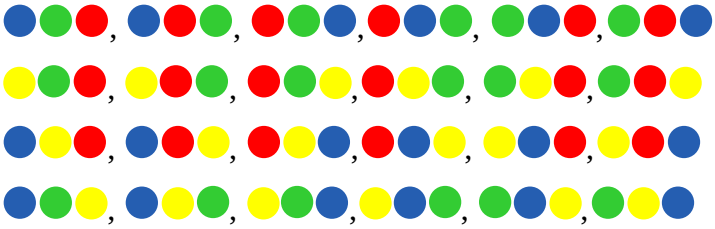
Si quieren probarlo con otro ejemplo también les vale esta técnica de recuento. Por ejemplo, si tenemos 5 fichas y las cogemos de 3 en 3. Tenemos 3 posiciones, y por la misma razón que antes, en la primera posición hay 5 opciones, en la siguiente 4 y en la última 3, por lo que el resultado sería 5·4·3=60 posibilidades. De nuevo, antes de pasar a la manera general, deberían interpretar la relación que existe entre las fichas que tienen, las posiciones posibles y el resultado. Es sencillo comprobar que funciona de la misma manera que las permutaciones, pero sin llegar a multiplicar todos los números hasta el 1, sino que multiplica tantos como fichas puede coger. ¿Qué ocurriría si tenemos 20 fichas y las cogemos de 4 en 4? En total tendríamos 20·29·18·17 posibilidades.
Por último, se les daría la fórmula para formalizar los resultados que obtienen:

$$\text{Variaciones de } m \text{ elementos escogidos de } n \text{ en } n : V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Si, además, el objetivo es saber de dónde sale dicha expresión, se puede ahondar más en los ejemplos y las propiedades que presentan los números factoriales para entenderla.

Para finalizar la combinatoria con el material manipulativo, quedaría explicar las combinaciones, definidas como el número de posibilidades de agrupar m elementos escogidos de n en n sin importar el orden. La idea que seguimos para explicarles combinaciones es utilizando las variaciones y permutaciones. En definitiva hacer combinaciones de m elementos escogidos de n en n, es lo mismo que hacer variaciones de m elementos escogidos de n en n, pero quitando los casos que se repiten, ya que en las combinaciones no importa tener las fichas colocadas de una manera u otra. Veamos un ejemplo; supongamos que tenemos 3 fichas y las queremos escoger de dos en dos, entonces tendríamos 6 posibilidades, tal y como se ha explicado en el ejemplo anterior, pero en el caso de ser combinaciones, tenemos que agruparlas y no ordenarlas, por lo que sería lo mismo tener azul-roja que roja-azul, así que esas opciones hay que eliminarlas. ¿Cuántas posibilidades tendríamos que quitar? Esta parte es la más difícil de entender para los estudiantes, por lo que se les podría explicar que, al no importar el orden, las permutaciones entre las agrupaciones iguales no valdrían y hay que eliminarlas. La forma de hacerlo sería dividir el número de posibilidades totales entre las permutaciones posibles de esos elementos, para quedarnos únicamente con las agrupaciones sin orden. Un ejemplo sería:
Queremos hacer combinaciones de 4 elementos ( ) tomados de 3 en 3; si calculamos las variaciones de esos elementos tendríamos un total de 4·3·2=24

posibilidades, pero teniendo en cuenta que sería lo mismo que , , … y en total tendríamos 6 opciones, ya que son las permutaciones de 3 elementos. Veámoslo en con todas las opciones:



Como en cada una de las filas se han permutado las tres fichas escogidas de las 4, únicamente nos quedamos con una opción de las 6 que salen. Al hacer eso con cada una de las elecciones de fichas, hay que hallar el número de filas que saldrían sabiendo que en total tenemos 24 posibilidades, pero se repiten de 6 en 6, entonces existirían un total de $\frac{24}{6}=4$ agrupaciones distintas de 4 elementos tomados de 3 en 3.

Para finalizar, tal y como se ha hecho en el resto, se les expondría la fórmula para concretar dicho concepto.

Combinaciones de m elementos escogidos de n en n:

$$C_{m,n}=\binom{m}{n}=\frac{V_{m,n}}{P_n}=\frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!}=\frac{m!}{n!\cdot(m-n)!}$$

De la misma manera se haría para la combinatoria en cuyos casos se permita la repetición. Lo ideal una vez entendido de donde provienen las fórmulas, es practicar ejercicios en los que, los estudiantes identifiquen si tienen que utilizar permutaciones, variaciones o combinaciones y después apliquen la fórmula o las técnicas de recuento que vean convenientes.

Sucesos y operaciones con sucesos

Contenido

Sucesos, tipos de sucesos y operaciones elementales con sucesos (intersección $\cap$, y unión $\cup$).

Objetivos didácticos

- Utiliza la terminología adecuada para describir sucesos.
- Interpreta y utiliza de manera correcta la intersección y unión de sucesos.

Material manipulativo

El desarrollo de esta parte de la unidad didáctica se verá facilitado con unas plantillas en cartulinas del espacio muestral con diferentes circunferencias representando los subconjuntos de dicho espacio. Además, será necesario unas láminas de colores, recortadas previamente con las formas necesarias, para diferenciar las partes de las plantillas (2º), y las fichas enumeradas (5º). Es cierto que tanto el espacio muestral como los subconjuntos se pueden pintar y colorear a mano, pero de esta forma, la actividad facilita la acción del alumno y es más visual y llamativo, sin contar que a no todos los estudiantes se les tiene que dar bien el dibujo.

Procedimiento

El procedimiento seguido para utilizar este material manipulativo dedicado a los sucesos se puede ver en varias partes según el orden de los conocimientos que deben adquirir los estudiantes.

En primer lugar, definido como el paso 0, dado que es algo de repaso de cursos anteriores, las plantillas y las láminas de colores se utilizan para identificar y definir los sucesos (subconjuntos del espacio muestral). Es decir, si tenemos la primera plantilla, los estudiantes pueden identificar el suceso A y el contrario de éste, $\overline{A}$.

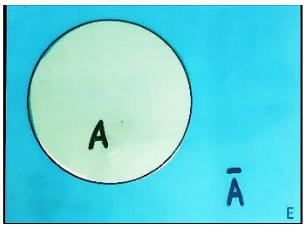


Imagen 6 de elaboración propia

De la misma manera se hace con la segunda plantilla combinando los sucesos correspondientes, $A, \overline{A}, B$ y $\overline{B}$. En esta plantilla se les puede recordar las operaciones intersección $\cap$, y unión $\cup$.

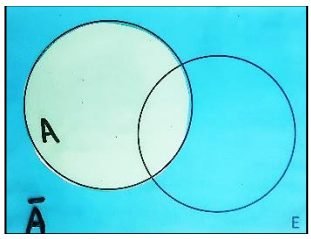


Imagen 7 de elaboración propia

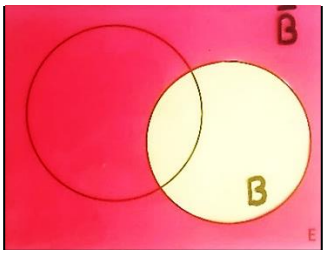


Imagen 8 de elaboración propia

El paso 1 para poner en práctica este contenido de la unidad será uno dedicado a la definición de diferentes sucesos y a la variedad de tipos que existen. La idea es que los alumnos, una vez tengan la definición teórica de los sucesos, practiquen varios ejercicios dirigidos por el docente utilizando las plantillas y las fichas enumeradas. Por ejemplo, supongamos que se les pide que formen dos sucesos complementarios, entonces el alumno debería organizar las fichas en la plantilla adecuada para obtener el resultado, y, además, escribirlo de manera matemática para mezclar ambas metodologías, tal y cómo se ha explicado anteriormente, y que no sea únicamente visual. Así podrá adquirir mejor dicho conocimiento. El resultado podría ser, por ejemplo, $A =$ {múltiplos de 3}:

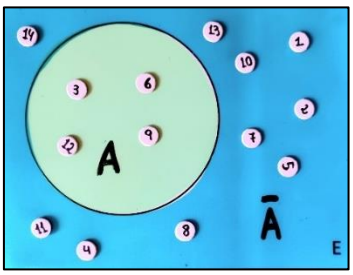


Imagen 9 de elaboración propia

Otro ejemplo de esta parte sería hacerlo, al contrario, y así obtener una actividad diferente. En este caso se le indica a alumno lo siguiente: Dados las fichas del 1 al 14 y utilizando las plantillas y las láminas de colores, tenemos los sucesos $A =$ {números pares} y $B =$ {números mayores que 10}. Si definen los sucesos, obtendrían:

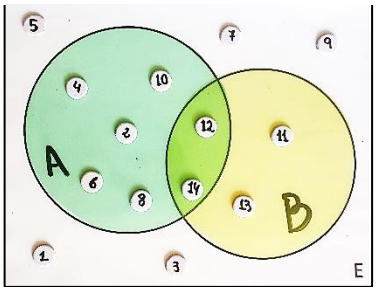


Imagen 10 de elaboración propia

Se pueden pedir varias opciones como, por ejemplo: fichas impares y fichas menores o iguales a 10. El resultado sería algo como:

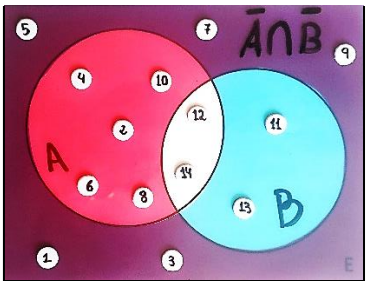


Imagen 11 de elaboración propia

Podemos observar que los colores de las láminas facilitan hallar lo que pide el ejercicio.

Tal como estos ejercicios se pueden hacer diferentes según el material que escojamos, aunque lo ideal es hacer alguno de ejemplo con el material ya que es visual y llamativo, pero al ser ejercicios sencillos, no deberían tener inconveniente alguno para dejar de usarlo.

Como último paso del procedimiento, subimos el nivel de dificultad y el objetivo será deducir las fórmulas utilizadas en problemas de probabilidad que relacionan la intersección y unión con sucesos. La idea es que descubran con las piezas de colores y las plantillas, las diferentes combinaciones de los sucesos $A, \bar{A}, B$ y $\bar{B}$ con las operaciones $\cup$ y $\cap$, por ejemplo, si quieren descubrir qué obtienen al poner $\bar{A} \cap B$, deberían utilizar esa combinación con el material:

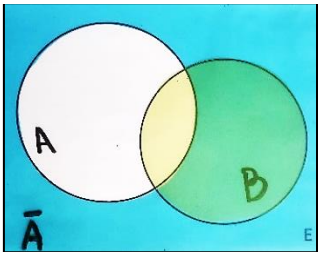


Imagen 12 de elaboración propia

Al ver cómo se mezclan las láminas de colores, tienen que coger el trozo del espacio muestral que tiene en común el suceso $\overline{A}$ (color azul) con el suceso B (color amarillo), es decir sería lo que queda pintado de verde. La solución sería el suceso B excepto $A \cap B$. Por lo tanto: $B - A \cap B$

Gracias a los colores, les será más fácil descubrir cuál es la fórmula sin necesidad de tener que aprendérsela de memoria, dado que, en muchas ocasiones, se les cambian las letras asociadas a los sucesos y eso les supone una dificultad. En este caso, se acostumbran a deducir el resultado con el material, y si posteriormente no se acuerdan de la fórmula obtenida, solo tendrían que dibujarlo para saberlo.

Un punto muy positivo de este ejercicio y algo que suelen carecen las matemáticas es que no presenta abstracción de fórmulas en ningún momento y gracias a unas simples láminas de colores pueden obtenerse todas las operaciones de sucesos que normalmente los estudiantes se las aprenden de memoria.

Regla de Laplace y cálculo de probabilidades

Contenido

Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace.

Objetivos didácticos

- Utiliza el cálculo de probabilidades en la resolución de diferentes problemas mediante la regla de Laplace.

Material manipulativo

El material utilizado para poner en práctica la actividad será una bolsa (4º) individual donde se introducirían un conjunto de fichas de colores (3º).

Procedimiento

El objetivo de utilizar el material manipulativo en el cálculo de probabilidades, tal y como hemos explicado en la metodología, es deducir la regla de Laplace mediante la experimentación. En este caso el material será utilizado por todos los alumnos en una actividad conjunta en el aula. La idea es que utilicen los conocimientos de estadística, que anteriormente se les debe haber impartido, y las fichas del material manipulativo. Debido a que la probabilidad se obtiene al dividir las frecuencias relativas entre las totales, el cálculo que deberán realizar será el número de extracciones con reemplazamiento indicadas por el docente dividido entre el total de extracciones en común por toda la clase. A medida que esas extracciones vayan aumentando se aproximaran a la probabilidad obtenida mediante la regla de Laplace.

Supongamos que tienen fichas de colores (al menos de dos colores) y el objetivo es calcular la probabilidad de obtener uno de los colores, por ejemplo, la probabilidad de sacar una ficha roja al realizar una extracción (de manera similar se haría con las fichas azules en el caso de considerar el ejercicio con dos colores). Si los estudiantes cuentan con un total de 10 fichas, de las cuales 7 fichas son rojas y 3 azules, la probabilidad a la que tienen que llegar sería $\frac{7}{10}$.

El procedimiento para llegar al resultado deseado consta de tres pasos. En primer lugar, los alumnos deben seguir las instrucciones e ir realizando extracciones de las fichas anotando cuántas fichas sacan del color que se quiere calcular la probabilidad, siendo rojo en nuestro ejemplo. La primera extracción será de una ficha, después de 5 fichas, a

continuación de 10… y así hasta que el docente lo considere necesario. Cada alumno puede rellenar una tabla como la siguiente:

Tabla 3

Experimento para obtener la regla de Laplace

Número de fichas extraídas por alumno	1	5	10	20
Fichas rojas obtenidas				
Fichas rojas en total / fichas extraídas total				

El segundo paso consiste en que los alumnos reflexionen y deduzcan a qué valor se acercan con los números obtenidos y si tienen alguna relación con las fichas que se les han repartido (7 fichas rojas y 3 azules). De esta manera consiguen descubrir la fórmula de Laplace mediante la experimentación y asociando dicho conocimiento con las frecuencias relativas y totales. Por último, lo esencial sería presentarles la fórmula para afianzar el conocimiento y utilizarla para ejercicios posteriores.

$$\text{Regla de Laplace: } P(A) = \frac{n^o\, casos - favorables}{n^o\, casos - posibles}$$

Al realizar este ejercicio podemos favorecer el trabajo cooperativo al ser una actividad conjunta en el aula, aunque también puede hacerse por grupos, facilitando los debates y diálogos entre los alumnos y el docente. Además, es útil para poner en práctica el aprendizaje por descubrimiento donde los alumnos experimentan e investigan a través del material. Todas estas ventajas ya fueron comentadas en la primera parte del trabajo.

Probabilidad condicionada

Contenido

Probabilidad condicionada

Objetivos didácticos

- Interpreta y utiliza de forma adecuada la fórmula de la probabilidad condicionada.
- Resuelve problemas sencillos asociados a la probabilidad condicionada.

Material Manipulativo

El material adecuado para entender la probabilidad condicionada del material presentado sería la segunda plantilla (2º) junto con las fichas enumeradas (5º). Gracias a la parte de sucesos se ha debido entender cómo funciona los subconjuntos representados en la plantilla, por lo que, a priori, no debería ser necesario utilizar las láminas de colores, pero pueden usarse igualmente en cualquier otro caso.

Procedimiento

El objetivo principal de usar el material manipulativo en este contenido es entender de dónde proviene la fórmula de la probabilidad condicionada, $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, en lugar de exponérsela directamente a los alumnos para realizar ejercicios.

En primer lugar, se les explicaría el significado de tener un suceso condicionado $(/B)$, es decir, si tuviésemos el conjunto A/B, lo que dicha expresión da lugar a otro suceso en el que debemos calcular cuando ocurre A, si sabemos que B ocurre con seguridad. Si introducimos la probabilidad, al tener la expresión $P(A/B)$, se pretende calcular la probabilidad de A si B se cumple. Una vez entendido eso, lo más sencillo es ponerles un ejemplo para que los estudiantes, de manera autónoma, descubran la fórmula.

Utilizando el material indicado, podemos ponerles el siguiente ejemplo: Suponemos que tenemos fichas enumeradas del 1 al 14, y los sucesos, $A=$ {números pares} y $B=$ {números mayores que 10}, y queremos calcular la probabilidad de escoger un número par si sabemos que es mayor que 10. La respuesta es fácil de obtener contando los números, pero no es el objetivo del ejercicio, ya que en el caso de que fuera más

complicado no podrían hacerlo con ese método. Con el material deben representar el enunciado y tendrían algo como:

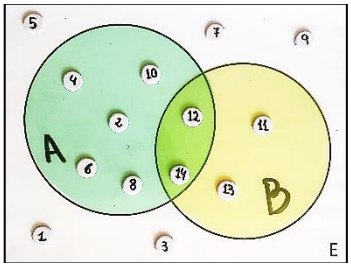


Imagen 13 de elaboración propia

Una vez que llegan a este punto los estudiantes, se les plantea la siguiente cuestión: Hay que recordar que, para calcular probabilidades por la regla de Laplace, teníamos que hacer el cociente entre los casos favorables y los totales; en este caso como nos piden la probabilidad de que la ficha sea par si sabemos que es mayor que 10, al saber con certeza que es mayor que 10, los números que no cumplan esa condición no interesan (del 1 al 10), por lo que el espacio muestral se reduce, es decir, los casos totales ya no serían del 1 al 14, sino del 11 al 14. Si entienden esta parte, ahora tendrían que fijarse únicamente en el subconjunto de B, y olvidar el resto. Una vez que nos fijamos en ese subconjunto, aplicamos la regla de Laplace para saber qué números son pares, y comprobamos que hay 2 casos (12 y 14) de los 4 números que se encuentran en B.

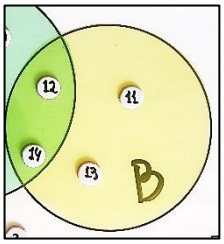


Imagen 14 de elaboración propia

En último lugar se les pide a los alumnos que se fijen en la plantilla y escriban de manera matemática a que hacen referencia ese 2 y ese 4 respectivamente, consiguiendo así la fórmula de la probabilidad condicionada, es decir, el 2, en la plantilla total es la intersección de ambos sucesos y el 4 son los casos que aparecen en B.

$$P(A/B)=\frac{n^{o}\,casos-favorables-pares}{n^{o}\,casos-posibles->10}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

De nuevo, comprobamos que es una metodología que impulsa a los alumnos a experimentar e interpretar resultados, a la vez que permite evaluar la comprensión de conocimientos anteriores. Además, facilita el paso a la abstracción de dicha fórmula. Una vez realizada esta actividad, los estudiantes deben estar preparados para enfrentarse a ejercicios con más nivel sin necesidad de utilizar el material.

Otras actividades y juegos relacionados con la probabilidad y el uso de materiales manipulativos

Una vez entendido los conceptos de probabilidad más importantes, se pueden incluir en el aula otro tipo de material, como por ejemplo el virtual, para que, una vez trabajado el material concreto, poder afianzar o interactuar con otros ejemplos, aprovechando la disponibilidad que hay hoy en día sobre las nuevas tecnologías. A continuación, se presentan algunas actividades relacionadas con los contenidos vistos anteriormente de probabilidad.

En primer lugar, tenemos un simulador del lanzamiento de un dado, en el cual se realizan todos los lanzamientos que uno quiere y comprueba que la probabilidad asociada a que salga una cara en concreto es la que viene dada por la regla de Laplace. Es el mismo experimento que se pretende realizar con los alumnos utilizando las fichas de colores, pero de manera virtual: https://www.geogebra.org/m/cSfwCRkM

En la misma línea que el anterior, existe otro simulador muy conocido "El método de Monte Carlo", el cual averigua el valor de Pi gracias a la regla de Laplace: https://www.geogebra.org/m/cF7RwK3H

Por último, tenemos un ejercicio muy famoso sobre un concurso llamado "El problema de Monty Hall" donde se trata de conseguir un coche que se encuentra detrás de una de tres puertas que componen el juego, mientras que en las otras dos no hay premios. Este simulador viene muy bien para repasar la probabilidad condicionada, ya que a priori es un ejercicio que incita al alumno a equivocarse sobre las probabilidades que se deben asignar a las puertas:
https://www.estadisticaparatodos.es/taller/montyhall/montyhall.html

Conclusión

Con la realización de este trabajo, se ha querido hacer una pequeña investigación sobre el proceso de aprendizaje en las aulas de matemáticas. Gracias a la fundamentación teórica que se ha desarrollado en la primera parte, donde se exponen diversos autores, matemáticos o psicólogos, se ha podido hacer una reflexión global sobre el proceso que se lleva a cabo actualmente en las aulas y cuál sería la metodología ideal vista en las distintas teorías que defienden estos autores. La idea que presentan todos en común es modificar la metodología que se sigue en la enseñanza de las matemáticas para conseguir alternativas diferentes a las clases tradicionales, que lamentablemente no son efectivas para adquirir los conocimientos matemáticos necesarios de la manera adecuada. Una de las maneras de lograrlo es incluir los materiales manipulativos en el aula, dado que presenta numerosas ventajas y actualmente es una metodología que está en continuo desarrollo. La manipulación puede darse en cualquier bloque o contenido de las matemáticas siempre que se le dedique tiempo y el docente presente las habilidades y las ganas suficientes para llevarlo a cabo.

Dado que este trabajo es una investigación que no se ha puesto a prueba, con el desarrollo de la segunda parte, se pueden hacer futuros estudios para verificar los beneficios en el campo de la probabilidad y comprobar si la propuesta de la unidad didáctica que se plantea es correcta o no. Los recursos que se han escogido junto con la metodología que se presenta para dicha unidad, se pretende darlos a conocer para que, en un futuro, junto a los recursos tradicionales, se ponga en práctica en las aulas y se consiga un conocimiento global de los conceptos de probabilidad elegidos.

Por último, cabe destacar que, debido a la época en la que nos encontramos, donde cada vez existen más recursos dedicados a la enseñanza, elegir los materiales didácticos adecuados y emplearlos, son estrategias innovadoras que motivan al alumno y captan su interés. Por ello, las matemáticas manipulativas pueden ser un instrumento muy útil e interesante en el aprendizaje.

Bibliografía

Alsina, À. (2010). La pirámide de la educación matemática: una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de innovación educativa*, núm. 189, 12-16.

Alsina, C., Burgués, C., & Fortuny, J. M.ª (1988). *Materiales para construir la Geometría.* Editorial Síntesis. Madrid.

Arce Sánchez, M., Conejo Garrote, L., & Muñoz Escolano, J. M. (2019). Ideas generales sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. En *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. 27-47. Madrid: Síntesis, S. A.

Arrieta, M. (1998). Medios materiales en la enseñanza de la matemática. *Revista de psicodidáctica*, núm. 5, 107-114.

Batanero, M. C. (s.f.) Azar y probabilidad en la Escuela Primaria, ¿Qué podemos aprender de la investigación?

Corbalán, (1994). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid, Síntesis.

Cascallana, M. T. (1988). *Iniciación a la matemática: Materiales y recursos didácticos.* Madrid: Santillana

Carretero, R., Coriat, M. & Nieto, P. (1995). *Secuenciación organización de contenidos y actividades de Aula.* Junta de Andalucía. Materiales curriculares.

Díaz Calvo, C. (2018). Matemáticas y su descubrimiento: investigación de metodologías y desarrollo de un libro de texto para el quinto curso de Educación Primaria.

Dienes, Z. P., Tortella, J., & Azcárate, C. (1981). *Las seis etapas del aprendizaje en matemática*. Teide.

Fernández Bravo, D. J. A. (2010). Las metodologías para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático.

Fernández, T. y Tamaro, E. (2004-2022). Biografías y vidas, [en línea]. Recuperado de https://www.biografiasyvidas.com/

García Cruz, J. A. (2000). Unas notas sobre la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad. *Formación del profesorado e investigación en educación matemática II*, 121-128.

González Marí, J. L. (2010). Recursos, material didáctico y juegos y pasatiempo. *Didáctica de la Matemática*. Obtenido de https://s35363d91a4170858.jimcontent.com/download/version/1401891388/module/6480611852/name/materiales_infantil_primaria_y_ESO._Consideraciones_generales.pdf

Hincapié, G., & Riaño, H. (2008). *Zoltan Paul Dienes un matemático inconforme.* En Luque, Carlos Julio (Ed.), Memorias XVIII Encuentro de Geometría y VI Encuentro de Aritmética, 97-114. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Jiménez, L. R., & Espinosa, C. I. (2019). Aprovechamiento del material manipulativo para fortalecer el pensamiento matemático en aula multigrado. *Educación y Ciencia*, (23), 513-529.

Juárez Guevara, P. D. M. (2018). Estrategias didácticas para mejorar el proceso de Enseñanza-Aprendizaje en matemáticas de los estudiantes de primaria.

Ministerio de educación y ciencia (1989). *Diseño curricular base.* https://sede.educacion.gob.es/publiventa/diseno-curricular-base-educacion-secundaria-obligatoria/educacion-secundaria/912

Ministerio de educación y formación profesional (2007). Competencias clave para el aprendizaje permanente. Un marco de referencia europeo. Comisión europea. https://www.educacionyfp.gob.es/dctm/ministerio/educacion/mecu/movilidad-europa/competenciasclave.pdf?documentId=0901e72b80685fb1

Ministerio de educación y formación profesional (2022). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. BOE, núm. 76, 41571-41789. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217

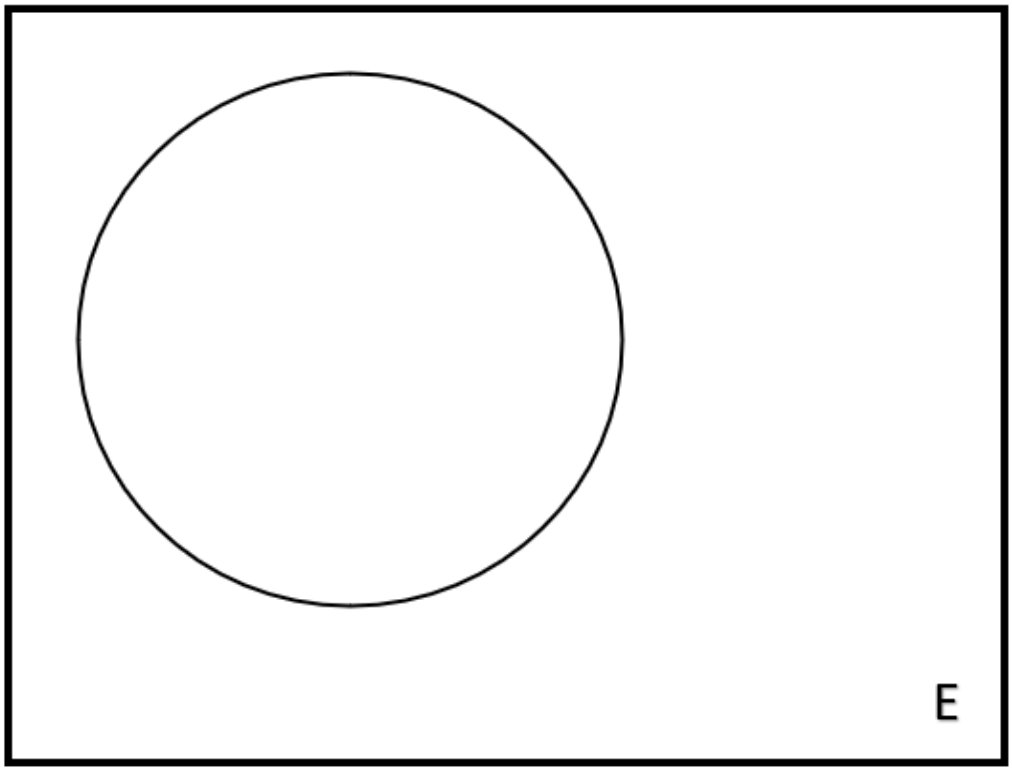
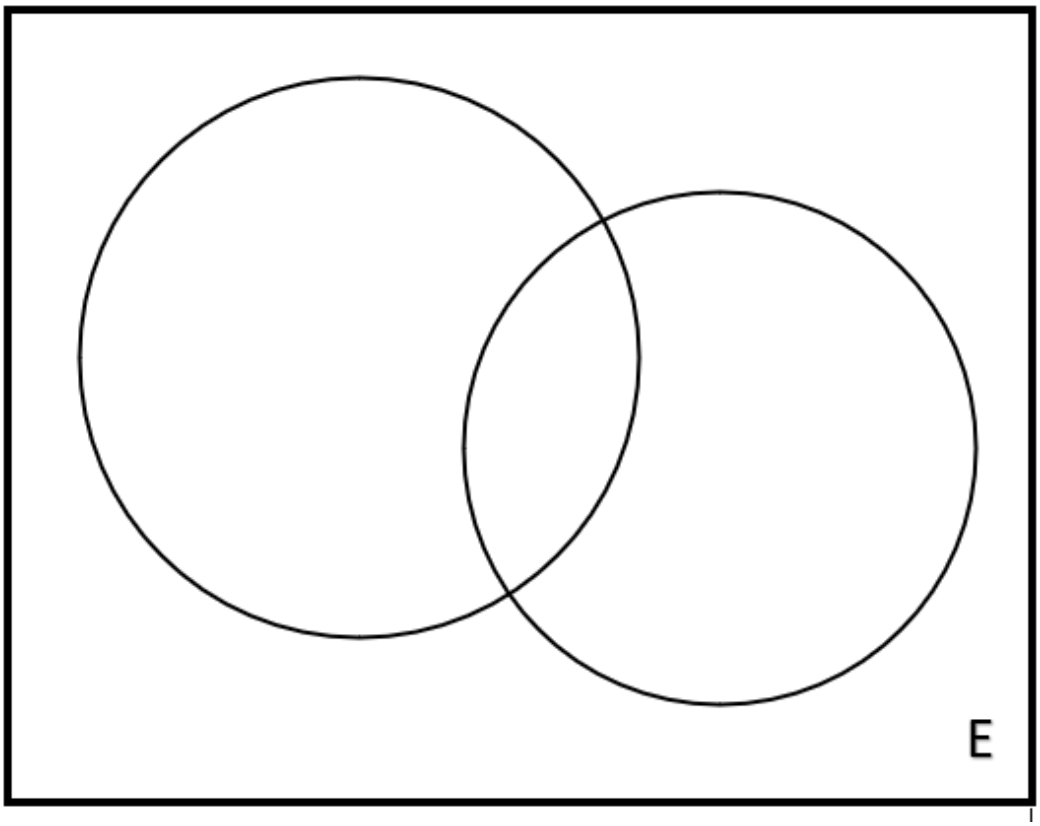
Piaget, J., & Inhelder, B. (1951). La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant, par Jean Piaget et Bärbel Inhelder. Presses universitaires de France.

Prieto Abarquero, B. (2014). Materiales manipulativos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Rodríguez Vicente, D. (2014). Utilización de materiales manipulativos en la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos del Currículo de Secundaria.

Sarmiento Santana, M. (2007). *La enseñanza de las matemáticas y las Ntic. Una estrategia de formación permanente*. Universitat Rovira i Virgili.

Vergara, C. (2020). *La teoría del desarrollo cognitivo de Jerome Bruner*. Actualidad en Psicología. https://www.actualidadenpsicologia.com/teoria-desarrollo-cognitivo-jerome-bruner/

Anexos

Anexo I: Plantillas