A TODO PROBLEMA LE LLEGA SU SOLUCIÓN

Cambio de enfoque en el uso de problemas para colaborar a la inclusión desde las matemáticas

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Máster Universitario en Formación del Profesorado

de ESO, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Presentado por:

Dª ANA CILLERUELO TOBAJAS

Dirigido por:

Dª EVANGELINA HERRANZ PRADA

Alcalá de Henares, a 26 de junio de 2022

RESUMEN

Bajo una perspectiva de inclusión educativa como respuesta a la creciente diversidad del alumnado de los centros de Educación Secundaria Obligatoria, surge la necesidad de introducir nuevas metodologías y propuestas de trabajo que aumenten la participación y la toma de decisiones de los alumnos para que puedan desarrollar capacidades que les permitan reflexionar y ser competentes en la vida real.

A lo largo del trabajo se investigará sobre la situación actual de atención a la diversidad y de forma específica el impacto que las matemáticas puedan tener en este ámbito. Se procurará dar una respuesta metodológica cambiando el enfoque tradicional de resolución de problemas en el que los alumnos muestran poca predisposición a los mismos, a través de una propuesta flexible que favorezca la reflexión personal, el trabajo cooperativo, la opción de elegir, el razonamiento y, en definitiva, el aprendizaje de matemáticas, tratando de aproximar unos contenidos que a menudo se han presentado de forma muy abstracta desde contextos cercanos al alumnado.

Palabras clave: matemáticas, atención a la diversidad, inclusión, flexibilidad, didáctica, resolución de problemas, reflexión.

ABSTRACT

Under an educational inclusion’s perspective as a response to the growing diversity of students in educational centers, the need arises to introduce new methodologies and work proposals that increase the participation and decision-making of students so that they can develop skills that allow them to reflect and be competent in real life.

Throughout the work, the current situation of attention to diversity and specifically the impact that mathematics may have in this field will be investigated. An attempt will be made to provide a methodological response by changing the traditional problem-solving approach in which students show a little predisposition, through a flexible proposal that favors personal reflection, cooperative work, the option to choose, reasoning and, in short, the learning of mathematics, trying to approximate some contents that have often been presented in a very abstract way from contexts close to the students that favor their understanding.

Keywords: mathematics, attention to diversity, inclusion, flexibility, didactics, problem solving, reflection

Índice de Contenidos

I. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo académico, *A todo problema le llega su solución,* pone el punto de mira en la realidad de las aulas de Educación Secundaria Obligatoria, cada vez más cambiantes y diversas, en las que se sitúa un alumnado más heterogéneo, desigual y alterable, que reclama planteamientos escolares y metodologías acordes con sus características, dentro de un marco de actuación común que ofrezca posibilidades que se ajusten a las peculiaridades de cada uno. Así, se plantea una línea de actuación basada en la inclusión desde la asignatura de matemáticas, directamente relacionada con cuestiones como la participación y la motivación del alumnado.

Durante el transcurso del *Máster universitario en Formación del Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (especialidad en Matemáticas)* hemos tratado en diferentes asignaturas, la importancia de atender a la diversidad de un alumnado cargado de diferencias y, por tanto, el punto de partida del trabajo será profundizar en este ámbito y conocer cuáles son las respuestas que se están ofreciendo en la actualidad a favor de la inclusión, primero en un plano general para después tratar de comprender cómo abordar la situación desde las matemáticas.

Tras investigar acerca de las posibles situaciones excluyentes que se puedan dar desde esta materia, se aportará un nuevo enfoque basado en el uso de problemas con la intención de permitir que todos los alumnos participen de manera directa en sus propios procesos de aprendizaje. Antes de elaborar una propuesta didáctica de manera satisfactoria, será necesario revisar cuál es la situación actual en lo referente a resolución de problemas. Se defenderán diferentes motivos por los que convencer al lector de emplear problemas en el aula, a partir de un enfoque opuesto a lo que se ha hecho tradicionalmente, y se diferenciará entre distintos tipos de problemas revisando y seleccionando nuevos planteamientos atractivos de distintos profesores de secundaria que comparten con el resto sus ideas a través de libros, blogs, vídeos, etc.

En definitiva, con toda la investigación anterior se tratará de llegar a un conocimiento y una concienciación suficientes que permitan plantear una pequeña batería de problemas con la intención de aportar una nueva visión de los mismos, tratando de promover la reflexión del alumnado y ofreciendo diferentes posibilidades de acuerdo a los puntos de partida individuales de cada uno, poniendo el foco en lo que puede aportar cada persona, en vez de en sus carencias.

La diversidad del alumnado, al igual que los problemas que se planteen en el aula, debe entenderse como un reto, es decir, como un desafío que suponga un incentivo y sea necesario afrontar para poder dar una solución apropiada a partir de diferentes posibilidades.

Además, a lo largo del trabajo se intentará dar respuesta a algunas de las principales cuestiones que me han ido surgiendo en el planteamiento inicial del mismo:

¿Qué implicaciones tiene la multiculturalidad de las aulas? ¿Cuáles son las diferencias principales que presentan los alumnos?

- ¿Cómo podemos enfrentarnos a la realidad de la diversidad de las aulas desde unos contenidos matemáticos que se caracterizan por su universalidad?
- ¿Cómo debe de ser el currículo en matemáticas para favorecer la inclusión de todo el alumnado? ¿Y en general?
- ¿Qué margen de actuación tenemos los profesores frente a las políticas educativas instauradas y las prácticas educativas del centro en el que nos encontramos?
- ¿Están realizando los alumnos ejercicios adecuados para adquirir conocimientos de manera correcta y desarrollar en el camino las competencias clave?
- ¿Por qué plantear el uso de problemas para aprender mejor?
- ¿Existen problemas diferentes a los que se repiten sistemáticamente en los libros de texto?
- ¿Qué puedo aportar yo a la resolución de problemas?

OBJETIVOS

Se señalan a continuación los objetivos principales que se pretenden alcanzar durante el desarrollo del presente trabajo a partir de los interrogantes planteados y bajo la perspectiva de unas matemáticas lo más inclusivas posibles:

1. Profundizar en mi conocimiento personal sobre la atención a la diversidad, bajo un punto de vista inclusivo a partir de las propuestas que se están desarrollando en la actualidad.
2. Reflexionar sobre la asignatura de matemáticas durante los cursos de Educación Secundaria Obligatoria desde el foco de la inclusividad de manera que todo el alumnado tenga las mismas oportunidades de aprender.
3. Situar la resolución de problemas como una buena forma de contextualizar los contenidos del currículo de matemáticas y facilitar su comprensión para unos estudiantes que presentan dificultades para relacionar unos contenidos abstractos con la realidad.
4. Explorar sobre un nuevo enfoque en el uso de problemas, situándolos como uno de los ejes metodológicos principales para enseñar contenidos.
5. Realizar una recapitulación de los problemas tradicionales que parecen en los libros de texto frente a nuevas propuestas ricas y variadas que aparecen en la actualidad y ofrecen distintas formas de abordarlos para un alumnado cada vez más diverso.
6. Desarrollar una batería de nuevos problemas contextualizados en el siglo actual que supongan un reto para el alumnado y una manera de aprender más significativa y accesible para todos.
7. Elaborar una propuesta didáctica capaz de contribuir al desarrollo de las distintas competencias clave.

II. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Para poder alcanzar satisfactoriamente los objetivos establecidos previamente es necesario hacer una revisión de cuáles son las propuestas que se están llevando a cabo en la actualidad para abordar el tema de la atención a la diversidad de unas aulas cada vez más heterogéneas y cómo se puede afrontar esta pluralidad desde la asignatura de matemáticas.

En cuanto a la atención a la diversidad en educación en su sentido más amplio, se quiere dar una primera aproximación a través de lo que dicen las sucesivas leyes de educación sobre ella, desgranando uno de sus principales requisitos como es la inclusión educativa, bajo un objetivo común para todos basado en la flexibilización y las alternativas metodológicas.

Bajo la idea de una nueva perspectiva de inclusividad para atender esta diversidad de diversidades se tratarán diferentes ideas como la necesidad de que el profesor imparta una instrucción multinivel según las ideas que Collicot expone en el capítulo del libro "*Changing Canadian Schools: Perspectives on Disability and Inclusion"* (1991) donde recomienda estrategias a los docentes a partir del establecimiento de cuatro fases en el desarrollo de cualquier lección. A partir de estas premisas y otras similares se revisará la propuesta educativa que ha desarrollado la asociación Plena Inclusión (2021) a través de la Universidad Autónoma de Madrid, con el objetivo de la puesta en marcha de un currículo multinivel que, a su vez aplica, entre otros, las directrices del Diseño Universal de Aprendizaje propuesto por el Centro de Tecnología Especial Aplicada (2018).

Después de contemplar ciertas cuestiones a nivel general, se tratará de aclarar la misma cuestión dentro del ámbito de las matemáticas a través de algunas de las páginas del libro "*Educación matemática y exclusión*" (Giménez, Díez-Palomar, & Civil, 2007) y contando con las ideas que aporta el Comité Español de Matemáticas a través del documento "*Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria"* (CEM, 2021).

Tras esta breve revisión sobre la atención a la diversidad y antes de atreverme a plantear problemas dentro de la línea de las matemáticas incluyentes, se entrará a considerar las cuestiones más relevantes en cuanto al uso de problemas en la actualidad de las aulas para tratar de diferenciar nuevas propuestas que ofrecen distintas posibilidades al alumnado frente a los problemas tradicionales que abundan en los libros.

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD DESDE LAS MATEMÁTICAS

Atención a la diversidad

Se va a comenzar a tratar el tema de la diversidad del alumnado a través de una primera aproximación conceptual y normativa sobre la atención a la diversidad.

La Constitución Española recoge en su artículo 27 el derecho a la educación y la obligatoriedad de la enseñanza básica. Cuando la escolaridad no era obligatoria, aquellos que no desarrollaban habilidades suficientes a lo largo de la etapa educativa acababan desapareciendo del sistema escolar, pero a través de este reconocimiento y unido a una realidad cada vez más multicultural, ha surgido en las aulas un alumnado cada vez más heterogéneo y diverso. De aquí nace la importancia de identificar las diferencias individuales para poder así facilitar el máximo desarrollo potencial de cada uno a través de una escuela integradora y compensadora que defienda la igualdad de oportunidades.

Con la aparición de la Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) se reconoce el derecho de todas las personas a una buena educación básica, se extiende la escolarización obligatoria y común hasta los dieciséis años y, se favorece la incorporación a la escuela ordinaria de una población cada vez más amplia y diversa. Es decir, por primera vez una ley educativa contempla la atención a la diversidad. Este reto lanzado por la LOGSE lo definieron, en 2004, muy acertadamente Escudero y Martínez:

"Cómo abordar con calidad y equidad la diversidad creciente del alumnado que en un modelo de enseñanza comprensiva acude a las aulas cada día. O lo que para nosotros es lo mismo: Cómo abrir y ordenar nuestros sistemas educativos ordinarios para dejar vivir en ellos a quienes hasta hace apenas dos décadas quedaban excluidos, garantizando que todas las personas sin excepción puedan disfrutar de su derecho a una educación de calidad"

Posteriormente en el título Preliminar de la LOE se añaden o modifican varios artículos en relación con varios asuntos como la inclusión educativa o la aplicación de los principios del Diseño Universal del Aprendizaje (DUA) del que se hablará más adelante. Se empieza a introducir una nueva necesidad de proporcionar al alumnado múltiples medios de representación, de acción y expresión, y de formas de implicación en la información que se le presenta.

En el artículo 22 de esta ley que se mantiene en las sucesivas leyes de educación se establecen algunos de los principios generales para educación secundaria obligatoria que se incluyen a continuación:

> «4. *La educación secundaria obligatoria se organizará de acuerdo con los* ***principios de educación común y de atención a la diversidad del alumnado****. Corresponde a las Administraciones educativas regular las medidas de atención a la diversidad, organizativas y curriculares, que permitan a los centros, en el ejercicio de su autonomía, una organización flexible de las enseñanzas.*
>
> «7. *Las* ***medidas de atención a la diversidad*** *que adopten los centros estarán orientadas a la consecución de los objetivos de la educación secundaria obligatoria por parte de todo su alumnado y no podrán, en ningún caso, suponer una discriminación que les impida alcanzar dichos objetivos y la titulación correspondiente.»*

Con la publicación de la nueva ley de educación, la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE) se suscriben los anteriores principios y se añade el siguiente:

> *«8. Asimismo, se pondrá especial atención en la* ***potenciación del aprendizaje de carácter significativo*** *para el desarrollo de las competencias que promuevan la autonomía y la reflexión.»*

En el preámbulo de esta ley, se describe con relación al currículo que a través de su redefinición se pretende "*garantizar una estructura del* ***currículo al servicio de una educación inclusiva*** *y acorde con la adquisición de competencias, que valore además la diversidad*".

Además, se modifican los apartados 1, 2 y 6 del artículo 26, quedando redactados en los siguientes términos:

> *«1. Los centros elaborarán sus propuestas pedagógicas para todo el alumnado de esta etapa atendiendo a su diversidad. Asimismo, arbitrarán* ***métodos que tengan en cuenta los diferentes ritmos de aprendizaje del alumnado****, favorezcan la capacidad de aprender por sí mismos y promuevan el trabajo en equipo.*
>
> *Las Administraciones educativas determinarán las condiciones específicas en que podrá configurarse una oferta organizada por ámbitos y dirigida a todo el alumnado o al alumno o alumna para quienes se considere que su avance se puede ver beneficiado de este modo.*

2. En esta etapa se prestará una atención especial a la adquisición y el desarrollo de las competencias establecidas y se fomentará la correcta expresión oral y escrita y el uso de las matemáticas. A fin de promover el hábito de la lectura, se dedicará un tiempo a la misma en la práctica docente de todas las materias.

Para fomentar la integración de las competencias trabajadas, se dedicará un tiempo del horario lectivo a la realización de proyectos significativos y relevantes y a la ***resolución colaborativa de problemas,*** *reforzando la autoestima, la autonomía, la reflexión y la responsabilidad.»*

«6. La lengua castellana o la lengua cooficial sólo se utilizarán como apoyo en el proceso de aprendizaje de las lenguas extranjeras. En dicho proceso se priorizarán la comprensión y la expresión oral.

Se establecerán ***medidas de flexibilización y alternativas metodológicas*** *en la enseñanza y evaluación de las lenguas extranjeras para el alumnado con necesidad específica de apoyo educativo que presenta dificultades en su comprensión y expresión.»*

Así, puede definirse la atención a la diversidad como un conjunto de actuaciones educativas dirigidas tanto al alumnado como a su entorno, que intentan prevenir y dar respuesta a las necesidades concretas, temporales o permanentes, del alumnado a través de una atención personalizada que facilite la adquisición de las competencias clave y el logro de los objetivos de la etapa, bajo un enfoque inclusivo que no les impida lograr dichas metas ni alcanzar la titulación pertinente.

Entre este alumnado se puede destacar a aquellos que necesitan de una actuación determinada debido a factores personales o sociales y en relación con situaciones muy variadas: por presentar necesidades educativas especiales, altas capacidades intelectuales, dificultades específicas de aprendizaje, incorporación tardía al sistema educativo, condiciones personales o de historial compleja, etc. Es responsabilidad de todas las personas que forman la comunidad educativa que estas actuaciones se lleven a cabo.

Además de estos casos peculiares que se reflejan directamente en la ley y requieren de un diagnóstico previo por parte de profesionales especializados, la diversidad es mucho más general. En el aula hay una diversidad de diversidades, ser distinto es una característica intrínseca de capa persona. Todos pensamos, sentimos y actuamos a nuestra manera, independientemente de nuestras semejanzas como especie a través de unos patrones cognitivos, afectivos y conductuales parecidos. Esta variabilidad unida a las capacidades, necesidades preferenticas, ritmos y situaciones personales, entre otras, genera un sinfín de circunstancias que debemos contemplar. Esta diversidad del alumnado provoca que en los centros se desarrollen procesos de enseñanza-aprendizaje adaptados al grupo y a los individuos a través de actuaciones educativas más complejas a nivel de aula y de centro.

Así, según Arnaiz y Haro, en los centros "*encontramos estudiantes que presentan gran diversidad de ideas, experiencias y actitudes previas; diversidad de estilos de aprendizaje, ocasionada por las diferentes maneras de aprender, ya se refiera a los estilos de pensamiento (inducción, deducción, pensamiento crítico), a la estrategias de aprendizaje, a las relaciones de comunicación establecidas (trabajo cooperativo, individual) y a los procedimientos lingüísticos que mejor dominen; diversidad de ritmos, cada persona necesita un tiempo para asimilar el conocimiento; diversidad de intereses, motivaciones y expectativas, en cuanto a los contenidos y a los métodos; y diversidad de capacidades y de ritmos de desarrollo*" (1997).

En el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, aparece de nuevo la necesidad de atender a la diversidad en el artículo 7 sobre la autonomía de los centros:

> *«2. Los centros docentes desarrollarán y complementarán, en su caso, el currículo y las* ***medidas de atención a la diversidad*** *establecidas por las Administraciones educativas, adaptándolas a las características del alumnado y a su realidad educativa con el fin de atender a todo el alumnado. Asimismo, arbitrarán* ***métodos que tengan en cuenta los diferentes ritmos de aprendizaje del alumnado, favorezcan la capacidad de aprender por sí mismos y promuevan el trabajo en equipo****.»*

Además, se hace referencia en el mismo documento al alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo (art. 9), así como las posibles medidas que pueden darse (art.16) y en el artículo 10 sobre los principios generales en Educación Secundaria Obligatoria, se detalla lo siguiente:

> *«3. La Educación Secundaria Obligatoria se organiza de acuerdo con los principios de* ***educación común y de atención a la diversidad*** *del alumnado. Las medidas de atención a la diversidad en esta etapa estarán orientadas a* ***responder a las necesidades educativas concretas del alumnado y al logro de los objetivos*** *de la Educación Secundaria Obligatoria* ***y la adquisición de las competencias***

correspondientes y no podrán, en ningún caso, suponer una discriminación que les impida alcanzar dichos objetivos y competencias y la titulación correspondiente.»

La finalidad de este trabajo no es profundizar en las actuaciones específicas de este alumnado, sino dar constancia de la diversidad del aula y contemplar un marco común que pueda dar oportunidades a todos ellos y proponer ejercicios adecuados para lograrlo.

Además de las distintas clasificaciones de estos alumnos y alumnas que parece que son inevitables para intentar identificar sus dificultades y poder subsanarlas, como hemos aclarado la diversidad del alumnado se plasma en un nivel más general. Todos los estudiantes tienen distintos puntos de partida, diferentes niveles de apoyo fuera de la escuela que pueden ser determinantes, capacidades, ritmos y estilos de aprendizaje variados, es decir, no hay dos individuos iguales, y, por tanto, supone un error plantear a todos el mismo tipo de trabajo. Una persona que tiene poca preparación y escasos conocimientos adquiridos se retrasará más todavía si no se le proporciona ningún tipo de ayuda. Dar las mismas oportunidades a todo el alumnado es para muchos el mayor desafío de la enseñanza. Es evidente que no se puede adaptar la clase en función de cada uno, pero el profesor puede servirse de todas las diferencias individuales para generar un marco común.

Todavía en las aulas aparecen con frecuencia adaptaciones curriculares excluyentes en las que se adapta el currículo oficial a su nivel de aprendizaje reduciendo el nivel de sus contenidos o se diversifica al alumnado a través de grupos de refuerzo separándoles del grupo de referencia para recibir apoyo educativo. Estos grupos se suelen crear para alumnos con necesidades educativas especiales, inmigrantes, minorías o aquellos que no dominan la lengua. Rápidamente se derivan consecuencias negativas de ello, como aumentar las diferencias entre los alumnos, reducir la calidad y el ritmo de aprendizaje lo que deriva en menores oportunidades, disminuyen las expectativas y por tanto la autoestima de los propios alumnos y contribuye a etiquetar y clasificar a los alumnos.

En 2011, se publicaron los resultados del proyecto INCLUD-ED basados en el estudio y análisis de diferentes sistemas educativos a nivel europeo y los principales informes de evaluación internacional, en los que se ofrecen evidencias suficientes para intentar trabajar bajo un mismo marco común para todos los alumnos que favorezca la interacción y la participación de todo el alumnado mediante acciones flexibles de tipo inclusivo que permita alcanza unos objetivos generales de formas diversas.

Educación inclusiva y aprendizaje multinivel

Bajo la idea de una nueva perspectiva de inclusividad para atender a la diversidad de las aulas han surgido diferentes propuestas que tratan de dar respuesta a esta realidad.

Instrucción multinivel. Estrategias para el profesor

Dentro del marco común que reclamábamos en el apartado anterior para poder impartir una lección flexible que implique a todos los alumnos, empleando distintas formas de presentar la información y métodos variados tanto de práctica como de evaluación, la instrucción multinivel ofrece una posibilidad desde la que desarrollar este marco general.

La instrucción multinivel constituye una perspectiva opuesta a la de una adaptación curricular. Ofrece un marco común a toda la clase con la capacidad de adaptarse a las necesidades del alumnado, pero es el individuo el que se adapta y no el entorno, es decir, no se le impone un camino diferente al resto. Además, no debe entenderse como un conjunto de estrategias que se lleven a cabo en ocasiones puntuales, sino que debe de ser un proceso que se desarrolle a lo largo del currículo. Así, promueve en todo momento la inclusión y la integración de todos los estudiantes, los que muestran dificultades y los que presentan mejores habilidades, y no solo favorece el ámbito académico de los alumnos, sino que también responde a sus necesidades sociales y emocionales.

Por el contrario, para el docente supone un mayor compromiso al tener que replantear su práctica, favoreciendo la participación de todos los estudiantes. Por tanto, el profesor debe planificar un escenario teniendo en cuenta a todos como punto de partida y no llevar a cabo adaptaciones paralelas para sus alumnos. Según Collicot (1991), para que una lección pueda ser verdaderamente multinivel debe de cumplir ciertos requisitos:

- Considerar todos los estilos de aprendizaje del alumnado y planificar cómo se va a presentar la información según lo anterior.
- Involucrar a todos en la lección a través de la formulación de preguntas que activen diferentes niveles de pensamiento.
- Ser consciente de la necesidad de ajustar los resultados de aprendizaje para casos concretos.
- Dar opción a los estudiantes para que empleen el método que prefieran para demostrar la comprensión de un concepto.
- Aceptar que todos los métodos tienen el mismo valor.
- Evaluar según las diferencias individuales de cada uno.

Así, para desarrollar una lección que reúna todas las condiciones anteriores es necesario seguir un proceso adecuado:

1. Identificar los conceptos subyacentes que se quieren enseñar en una unidad didáctica o una lección en particular y lo que se busca que comprendan todos los alumnos al finalizar esta. Se pueden contemplar diferentes contenidos intermedios según las diferencias de los alumnos, pero los conceptos que deriven de ellos deben de ser los mismos para todos.
2. Ajustar los modos de presentar la información. Es evidente que, si se quieren dar las mismas oportunidades a todos, no es suficiente con un único modo de presentar la información. Los alumnos y las alumnas tienen estilos de enseñanza muy diversos, la mayoría de ellos son visuales, pero no podemos despreciar a aquellos que aprenden mejor recibiendo información por la vía auditiva o a través del movimiento y la manipulación (cinestesia). Además, los estudiantes cuentan con distintos niveles cognitivos y muestran diferentes formas de razonar. Plantear preguntas abiertas, que puedan contestar a diferentes niveles permite que todos los alumnos puedan participar. Por el contrario, si buscamos una respuesta concreta limitaremos mucho sus posibilidades. Por último, puede tenerse en cuenta la participación parcial, es decir, que algunos estudiantes puedan realizar únicamente una parte de la actividad basada en su nivel.
3. Determinar qué métodos son útiles para que el alumnado muestre lo que ha comprendido. Para ello deben ofrecerse tareas variadas y basadas en distintos modos de aprendizaje y niveles cognitivos. Además, el profesor debe de ser consciente de que todos los métodos tienen el mismo valor. A parte de los medios, el alumnado también puede expresar diferentes niveles de comprensión. Dentro de la flexibilidad, el profesor debe valorar si las propuestas de sus alumnos y alumnas presentan un equilibrio adecuado entre lo que conocen y la necesidad de aprender nuevas habilidades o no están desarrollando realmente su potencial.
4. De igual manera la evaluación debe basarse en los puntos de partida y las habilidades de cada uno, y se deben admitir distintos procedimientos de evaluación.

Currículo multinivel

A partir de las ideas de Collicot y de la puesta en práctica de diferentes iniciativas y metodologías, la asociación Plena Inclusión en colaboración con la Universidad

Autónoma de Madrid elaboró una propuesta educativa sobre el currículo multinivel para hacer realidad el reto de la inclusión.

El currículo multinivel pretende ser una herramienta que permita planificar cómo se desarrolla una unidad didáctica para poder enseñar de igual manera a estudiantes muy diversos, con diferentes competencias, conocimientos, preferencias y estilos de aprendizaje, todo ello a través de un marco común de experiencias de aprendizaje compartidas. A través de la misma lección se debe responder a las necesidades de todos los estudiantes de un aula cada vez más heterogénea. No todos van a aprender lo mismo, pero si lo van a hacer bajo el mismo escenario. Además de promover el aprendizaje de todos enfrentando al alumnado a tareas que puede desarrollar con éxito, el currículo multinivel mejora la relación del grupo a través de la cooperación en lugar de la competitividad, aumentando la autoestima y la participación del alumnado. Por el contrario, supone un considerable aumento en la planificación de las secuencias didácticas y en la preparación de los recursos.

Como ya se ha explicado, existen alternativas a las adaptaciones curriculares que con frecuencia han segregado al alumnado con dificultades. Planificar desde un inicio cómo va a funcionar la clase pensando en todo el alumnado es la base del currículo multinivel. Con esto no quiere darse a entender la idea de planificar una lección individualizada para cada uno para cada sesión sino llevar a cabo una propuesta flexible que incluya diferentes estilos, métodos, niveles y, en definitiva, posibilidades para el alumnado.

El profesor para poder definir una secuencia abierta para todos debe conocer las características de sus alumnos y para ello, el currículo multinivel ha creado perfiles de aprendizaje a nivel individual de los alumnos y general de cada grupo. El objetivo es conocer dónde se encuentran los estudiantes en cada momento, cuáles son sus ritmos de aprendizaje, qué objetivos serán capaces de alcanzar, en qué escenario y bajo que estilos de aprendizaje se desenvuelven mejor y qué apoyos pueden necesitar para aprender y sentirse mejor en el aula. No solo trata propiamente los aspectos cognitivos, sino que también se tienen en cuenta los aspectos sociales y afectivos, sus actitudes y preferencias, etc. Una vez recogida la información de cada alumno, se lleva a cabo una síntesis a través del perfil de aprendizaje de la clase para tratar de definir qué aspectos pueden optimizar tanto el aprendizaje como el desarrollo del alumnado en un nivel más amplio.

Una de las claves que conduce a una educación lo más inclusiva posible es el entorno de aprendizaje. Además de la necesidad de crear un ambiente que favorezca la participación y sea tolerante para aceptar los argumentos de todos, se hace referencia a que el propio entorno físico fomente un buen ambiente de trabajo y sea accesible para todos, es decir, se eliminen las barreras tanto físicas como cognitivas.

El primer paso para desarrollar una lección multinivel según Collicot, es comenzar estableciendo los conceptos subyacentes como aquellos que todo el alumnado debe adquirir. Y a partir, de ahí, admitiendo que el nivel de profundidad en la adquisición de conceptos y el grado de desarrollo de las competencias van a ser distintos en los alumnos, determinar cómo presentar la información a través de distintas vías para aproximarse a los conceptos desde distintos caminos, qué métodos van a poder emplear los alumnos para demostrar lo que han aprendido y en qué grado, y cómo se va a llevar el proceso de evaluación admitiendo todas estas diferencias.

El currículo multinivel marca por tanto unos objetivos generales que deben de ser comunes para todo el alumnado y apoyar el desarrollo de las tres competencias prioritarias (comunicación lingüística, social y ciudadana, y aprender a aprender). No obstante, el nuevo Real Decreto 217/2022 insiste en que todos los aprendizajes deben de contribuir al desarrollo de todas las competencias sin establecer ninguna jerarquía entre ellas.

Además de estos objetivos comunes y a pesar de que no se vayan a realizar intervenciones individualizas, el currículo multinivel reconoce la necesidad de ajustar objetivos para algunos alumnos. Estos objetivos diferenciados deben de ser concretos y realistas y pueden definirse según distintos niveles de comprensión, formas de representar la realidad, la propia lógica de los contenidos, etc. Por ejemplo, si se ha definido como objetivo realizar de manera autónoma una tarea, se pueden diferenciar dentro de él varios objetivos diferenciados. En un primer nivel, se situaría que el alumno fuese capaz de realizar la tarea con apoyo continuo de un adulto, después que la realizase con el apoyo intermitente de un alumno o de un igual, a continuación que la realizase solo con la ayuda de unos pasos y, por último, que la llevase a cabo de manera autónoma.

En cuanto a qué tipo de estrategias metodológicas llevas a cabo lo importante es que estén centradas en la participación del alumnado. Será, además, indispensable la incorporación de recursos para presentar la información adecuados a las necesidades de los alumnos teniendo en cuenta de la gran variedad que ofrece la sociedad actual y permitir que los alumnos expresen lo aprendido según sus preferencias y estilos de aprendizaje. En cuanto a la planificación de tareas, tener en cuenta el contexto y las experiencias de los alumnos facilita que estos puedan crear sus propios significados.

Además, se recomienda elaborar actividades inicialmente complejas pensando en los estudiantes que muestran mayores capacidades y adecuarlas a distintos niveles a través de recursos o versiones más simplificadas que requieran dentro del mismo objetivo general distintos niveles de consecución. Es importante ofrecer alternativas al alumnado para darle la capacidad de elegir, lo que incrementará su motivación y su implicación en las tareas.

En lo referido a los métodos de presentar los contenidos es importante que las fuentes de información se ajusten a los estilos de aprendizaje presentes en el aula, que el lenguaje sea accesible a todo el alumnado tanto por el conocimiento de la lengua como por su complejidad, que todas las personas presentes en el aula participen en la presentación de dicha información, que se empleen diferentes recursos comunicativos que apoyen lo visual y la manipulación, y en todo caso variar en dichos métodos a lo largo de una misma lección.

Por último, la evaluación se lleva a cabo en dos fases. Una primera etapa de diagnóstico a partir de los perfiles de aprendizaje con el fin de recoger información del alumnado para poder planificar el proceso de enseñanza. Y una segunda fase que debe de ser entendida como una forma de supervisar este proceso con el fin de optimizar el aprendizaje de los alumnos y responder mejor a las necesidades que plantean marcando unos objetivos que puedan alcanzar.

Diseño universal del aprendizaje (DUA)

El currículum multinivel aplica, entre otros, las pautas y principios del Diseño Universal de Aprendizaje (de aquí en adelante, DUA) en las distintas lecciones, unidades didácticas o en cualquier proceso de enseñanza-aprendizaje. El DUA, desarrollado por el Centro de Tecnología Especial Aplicada (CAST), parte de reconocer la diversidad en el aprendizaje en multitud de aspectos y tratar de combatirla a través de una propuesta de equidad educativa en la que se asegure a cada persona aquello que necesita para aprender. A partir de una crítica al currículo tradicional en el que hay una parte del alumnado que no alcanza los aprendizajes previstos, la propuesta del DUA se traduce en una mayor flexibilidad para que este aprendizaje sea accesible para todos, insistiendo en la oportunidad que ofrecen los medios digitales.

El Diseño Universal (DU) surge en el ámbito de la arquitectura, a partir de las ideas de Ron Mace. En 1997, un grupo de arquitectos establecieron los siete principios del DU con el objetivo de tener en cuenta las necesidades de todas las personas en la fase de proyecto de un edificio. Una adaptación posterior a un problema de uso siempre supone más gastos y peores resultados que si se hubiese contemplado esta posibilidad en el diseño del edificio. La idea del DU nació de la imposibilidad que presentaban algunas personas que tenía algún tipo de discapacidad para acceder a edificios. El ejemplo clásico de la rampa ilustra esta idea. En la actualidad, en arquitectura se ha diseñado normativa para implementar medidas de accesibilidad y en cualquier desnivel, además de situar una escalera, será necesario incluir una rampa con unas características concretas. Con frecuencia además de incluir escaleras y rampas para salvar grandes desniveles, se convierte este espacio en una gran grada. Así, un elemento de tránsito se convierte en una zona de estancia. El punto clave es pensar en cómo el usuario va a utilizar un elemento y anticiparse a sus necesidades en la fase de diseño. Se descubrió que cuando se tenía en cuenta las necesidades de estas personas para crear condiciones que posibilitasen su acceso, el resto también se beneficiaba de estas nuevas opciones. A partir de este hallazgo, se concluyeron algunas implicaciones:

- Ofrecer distintas alternativas no solo beneficia a todos, sino que también permite dar a elegir entre varias opciones, cuál resulta la más adecuada y cómoda.
- La diversidad es inherente a las personas y las necesidades que deriven de ella no tienen por qué ser permanentes.
- La discapacidad se transfiere de las personas al entorno. Es el entorno el que no se ajusta a las necesidades de la persona y no al revés.

La pregunta en este momento es ¿cómo se entiende todo lo anterior bajo un enfoque didáctico? El DUA pretende aplicar los principios anteriores al currículo educativo y define este planteamiento como: «[…] *un enfoque basado en la investigación para el diseño del currículo —es decir, objetivos educativos, métodos, materiales y evaluación— que permite a todas las personas desarrollar conocimientos, habilidades y motivación e implicación con el aprendizaje*». (Alba, Sánchez, & Zubillaga, 2018, p.8).

De igual manera que en arquitectura, en educación comenzaron a tomarse medidas basadas en las nuevas tecnologías, como el diseño de libros electrónicos, para apoyar el proceso de aprendizaje de alumnos con algún tipo de discapacidad y de nuevo el resto de los compañeros se benefició de ello. De igual manera, las adaptaciones que se implantaban sobre la marcha (adaptaciones curriculares) eran poco funcionales y, desde luego, poco sugerentes para el alumnado con dificultades. Defendieron la idea de que los obstáculos que encontraban los alumnos y las alumnas para acceder al aprendizaje no se debían tanto a sus propias capacidades o habilidades, sino a los propios materiales didácticos y el modo de emplearlos. Así, entendían que el diseño del currículo debía hacerse desde un principio de manera flexible, con opciones personalizables, para atender a la diversidad del aula con un alumnado con características y puntos de partida muy distintos. Así, se rompe con la división entre alumnado con y sin discapacidad, y se trasladan las discapacidades de los estos al diseño del currículo, a los materiales y a los medios empleados para aprender.

En referencia a esto último, el DUA ha puesto en jaque los medios tradicionales de enseñanza basados en el libro, la pizarra y el discurso oral del docente, argumentando que hay medios apropiados para unos alumnos que no lo son tanto para otros y, por tanto, se debe tener en cuenta el amplio abanico de capacidades y preferencias del alumnado en su proceso de aprendizaje. Los medios no solo tienen que elegirse adecuándose al propio contenido o a la tarea que se quiere realizar, sino a los propios estudiantes. Disponer de diferentes medios para los alumnos supone una mayor planificación y esfuerzo de los docentes, que pueden ayudarse de los recursos digitales. El CAST justifica el uso de medios digitales gracias a su versatilidad (pueden ofrecer múltiples formatos), a su capacidad para modificarse, relacionarse con otros contenidos en red y aumentar la motivación del alumnado. No se pretende acabar con el medio oral, el texto escrito o la imagen estática, pero sí ofrecer más ventajas además de las que aportan estos medios.

Con toda esta información el CAST propone un marco para implementar el DUA estructurado en tres principios básicos que se desarrollan a su vez a través de tres pautas de aplicación y varios puntos de verificación. Estos principios son:

I. Proporcionar múltiples formas de representación
II. Proporcionar múltiples formas de expresión
III. Proporcionar múltiples formas de implicación

La aplicación de estos principios y las pautas correspondientes en la práctica docente permitirá crear currículos accesibles a todos, eliminar las barreras, flexibilizar los procesos de enseñanza-aprendizaje y dar opciones para maximizar las oportunidades del alumnado. La nueva ley educativa contempla estos principios entre sus líneas:

«Entre los principios y los fines de la educación, se incluye […] la inclusión educativa y la aplicación de los principios del Diseño universal de aprendizaje, es decir, la necesidad de proporcionar al alumnado múltiples medios de representación, de acción y expresión y de formas de implicación en la información que se le presenta.».

Matemáticas inclusivas. Educación matemática e inclusión

Tras tratar de manera general el tema de la inclusión y la diversidad, se traslada el debate a la materia que nos incumbe.

Estudiar matemáticas es una experiencia común para todas las personas de forma independiente a donde vivan o las lenguas que hablen, a través de un lenguaje universal formado por números, letras y símbolos matemáticos establecidos de manera convencional para poder expresar fenómenos y propiedades de la realidad que nos rodea. Para muchos estudiar matemáticas es una práctica desagradable y costosa que se ven obligados a realizar sin un mínimo ápice de motivación para ello. Uno de los principales motivos por los que sucede esto es que, al contrario de lo que sucede en otras materias que tienen contenidos más compartimentados, el aprendizaje en matemáticas es como una escalera, necesitas apoyarte en lo anterior para poder seguir avanzando, es decir, se basa en poder trabajar sobre unos conocimientos previos y, por tanto, aquellos estudiantes que no han adquirido ciertos contenidos tienen muchas dificultades para seguir adelante. Por ejemplo, un alumno no va a resolver ecuaciones adecuadamente si tiene muchas carencias en la realización de operaciones aritméticas. Esto no ocurre, por ejemplo, en historia. Puede que no hayas aprendido nada sobre la prehistoria, pero esto no te impedirá estudiar los acontecimientos que desembocaron en el estallido de la segunda guerra mundial. Debido a esta característica de la materia de matemáticas, en cuanto un estudiante no asimila bien un contenido es muy probable que esto le condicione en un futuro. De una manera más esperanzadora, puede verse como que constantemente se están revisando contenidos ya aprendidos, lo que provoca que no caigan en el olvido o que aquellos que no lo aprendieron en su momento puedan revertir su situación.

Por otra parte, una de las mayores problemáticas de las matemáticas es la imagen social que se ha formado en torno a ellas a través de diversos mitos perpetuados como que es una materia importante pero difícil, a menudo incomprensible debido a su abstracción alejada de la realidad y fuera del alcance de la mayoría. Salvo casos aislados a los que les apasiona esta disciplina, en general, los estudiantes muestran una actitud de rechazo y de alguna manera, el fracaso en esta materia está admitido. Sin embargo, casi todos ellos emplean matemáticas en su día a día y tienen conocimientos previos sobre ellas, pero no son conscientes y, no las identifican con los ejercicios y los algoritmos que surgen en el aula. Pero, no hay que olvidar que las matemáticas no nacen en el aula sino en la vida de cada uno. Están, por tanto, al servicio de todos y, hay muchos caminos distintos de llegar a ellas y muchas formas de razonar matemáticamente que debemos aceptar.

Desde que un alumno comienza a estudiar matemáticas empieza a formar su bagaje personal en la asignatura a partir de las experiencias que vive, los resultados que obtiene, los comentarios que recibe de los demás, etc. Cuando da el paso a la educación secundaria, es posible que ya esté retrasado respecto a su compañero de al lado, en sentido de la facilidad que va a mostrar para aprender nuevos contenidos. Dar las mismas oportunidades a todos, independientemente de su nivel de partida es el mayor reto para alcanzar la inclusión en matemáticas. Como ya se ha comentado, se ha demostrado que optar por adaptaciones excluyentes en las que se separan a los alumnos según su nivel solamente deriva en acrecentar las desigualdades de partida. Al contrario, depositar confianza, dar oportunidades en los estudiantes para que puedan expresar sus ideas y reflexiones, y aumentar las expectativas que se tiene en ellos, provoca que traten de afrontar retos matemáticos más complicados y da lugar a resultados más positivos

Además, conviene señalar que la importancia del conocimiento matemático va más allá de la escuela y de su relación con lo cotidiano, aparece en prácticamente todas las disciplinas de estudio y pueden ser una barrera o una puerta de acceso para optar por un itinerario formativo que permita a su vez situaciones más privilegiadas en un futuro.

Entre las grandes dificultades que se encuentra el alumnado se sitúa el tener que relacionar las matemáticas que se ven en la escuela con la vida real. A menudo, expresan ideas como “para qué me va a servir esto en mi vida”. Es necesario, incluir elementos o situaciones cotidianas de estos para contextualizar su aprendizaje a través de unos contenidos matemáticos a menudo demasiado abstractos. Hay que considerar que unos contextos que pueden parecer próximos a unos, pueden no serlo para otros y, por tanto, una condición indispensable para poder incluir a todos los estudiantes es empezar por conocerlos. Una manera sencilla de contextualizar las matemáticas y situarlas en un plano de aprendizaje real es, como se detallará más adelante, emplear problemas desde el inicio de las unidades didácticas y no limitar su uso al final una vez que se dominan las técnicas y los algoritmos de manera abstracta Entre las ventajas de contextualizar una tarea se encuentran el aumento de la motivación de los alumnos, la mejora de la comprensión de las matemáticas y de la importancia de su empleo y, la posibilidad de desarrollar capacidades reflexivas o creativas. No obstante, una de las mayores dificultades del conocimiento matemático es la transferencia de contenidos a la realidad, por eso desde un primer momento deben relacionarse las matemáticas del aula con la realidad.

Otro papel importante lo juega el lenguaje como elemento crucial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por un lado, puede haber en el aula personas que no comprendan bien la lengua española y tengan dificultades para seguir el ritmo de la clase y, por el otro, si se emplea un lenguaje demasiado técnico o elaborado es probable que muchos estudiantes no sigan el discurso al ser incapaces de conectar estas nuevas ideas con lo que ya conocen. Hay que ser conscientes de que el lenguaje puede suponer una doble barrera y establecer un punto medio adecuado entre el rigor y la precisión que exigen las matemáticas, y las expresiones o registros que pueda entender el alumnado. Además, no debemos perder la oportunidad de que crear espacios en el aula para que se desarrolle un diálogo igualitario en el que se compartan significados entre todos y experiencias que les puedan ser más próximos. A menudo, el profesor tiene demasiado alejada la experiencia de aprendizaje y no tiene en cuenta las posibles dificultades de sus alumnos, que se están aproximando a nuevas ideas por primera vez. Las personas desarrollan su conocimiento a partir de lo que ya conocen y las ideas de sus compañeros les serán más próximas que las del profesor. Es necesario, por tanto, permitir la participación del alumnado en las clases a través de prácticas inclusivas que cuestionen los planteamientos clásicos y valorar de igual forma todas las maneras de hacer y pensar de los alumnos a través de sus propios argumentos, para así establecer enlaces entre la universalidad de las matemáticas y las necesidades de un alumnado diverso.

Es imprescindible aclarar que las matemáticas no son en ningún término excluyentes sino el uso que se hace de ellas o sus modos de presentación aprobados. Somos las personas las que excluimos a los demás al dar como válidos unos contenidos en el currículo frente a otros que dejamos fuera o al aceptar unos métodos o estilos de aprendizaje como apropiados. Hace no mucho, en una academia en la que trabajo como profesora de clases de apoyo, apareció un alumno recién llegado de otro país al que habían situado en segundo curso de secundaria. Tenía dificultades para restar y le pregunté si le habían enseñado el algoritmo de la resta. No lo recordaba y al tratar de explicárselo me di cuenta de que, ante sus dificultades, era mucho más intuitivo que pensara cuánto le faltaba al número que estaba restando para alcanzar el otro número, fue capaz de hacerlo sin necesidad de escribir nada en el papel.

Las restas y de forma general las matemáticas, forman parte de la realidad, no las hemos inventado las personas (sí el lenguaje matemático). Existen muchas maneras de abordarlas y permitir solo ciertos métodos estandarizados dificultan que algunos alumnos las comprendan a partir de algoritmos que en ocasiones son realmente poco intuitivos. Partir del saber de los propios estudiantes para guiarles y permitir que descubran por ellos mismos razonamientos matemáticos a través de preguntas adecuadas, es un método más significativo que imponerles un algoritmo. Así, muchas veces se trata de un problema de alfabetización matemática, es decir, de conocer unos contenidos, técnicas y aplicaciones establecidos que permitan apreciar las matemáticas bajo contextos reales. Bajo una perspectiva inclusiva, la definición de alfabetización matemática consiste en adquirir un conjunto de competencias para las que todos estamos capacitados por naturaleza. Se trata de "*un conjunto de procedimientos y maneras de plantear, resolver y comunicar ideas matemáticas que se basan en convenciones sociales*" (Giménez, Díez-Palomar, & Civil, 2007). Un alumno o una alumna puede tener nociones de matemáticas, pero no saber expresar ni interpretar sobre el papel. Una forma de superar esta gran brecha no consiste en desestimar el lenguaje matemático con su innegable rigor y precisión, sino en establecer vías de acceso para que todo el alumnado pueda acceder en cierta medida a él. Para ello, hay que situarse en sus situaciones de partida y elaborar propuestas de aprendizaje atractivas que permitan establecer relaciones entre lo que ya conocen y la forma normativa de expresarlo, y además situar las matemáticas abstractas en contextos reales de sus experiencias cotidianas para que sean capaces de dotarlas de sentido.

Si las matemáticas en sí mismas no son excluyentes, ¿por qué hablamos de la necesidad de unas matemáticas inclusivas? La exclusión a través de las matemáticas comienza en las políticas educativas a través de un currículo sobredimensionado de contenidos que no permite profundizar demasiado y, de las posibles inversiones y reformas que se deciden llevar a cabo, y finaliza en las propias aulas donde los profesores en última instancia pueden elegir qué metodología es la más adecuada para responder a las necesidades que plantean sus alumnos o por el contrario, no involucrarse y optar por el método que le resulte más cómodo para su práctica educativa. Como en lo referente al papel que juega el currículo se tiene poco margen de maniobra, se va a intentar dar de manera conjunta y sintetizando ideas desarrolladas en las líneas anteriores, una respuesta a dos de las preguntas planteadas en la introducción: *¿Qué margen de actuación tenemos los profesores frente a las políticas educativas instauradas y las prácticas educativas del* *centro en el que nos encontramos?* y *¿Cómo podemos enfrentarnos a la realidad de la diversidad de las aulas desde unos contenidos matemáticos que se caracterizan por su universalidad?*

Bajo una perspectiva educativa caracterizada por la diversidad y las nuevas demandas de la sociedad del conocimiento, ha sido y está siendo todavía necesario reformular el papel del docente, desde su propia formación como profesor, hasta la puesta en práctica que debe llevar a cabo en su día a día. Lejos queda (o, más bien, debería quedar) el profesor autoritario que transmite conocimientos en una pizarra a través de una lección a modo de monólogo y que manda infinitud de ejercicios a sus alumnos para averiguar después, mediante exámenes escritos, aquello que han sido capaces de adquirir. El protagonismo se tiene que ir cediendo a los alumnos a partir de situaciones de aprendizaje estimulantes para ellos.

Diversas evidencias científicas sugieren que se debe dar paso a un modelo de facilitación y de guía al estudiante en su propio proceso de aprendizaje, es decir, debe de darse una cesión progresiva de control y de responsabilidad desde el profesor a sus alumnos en el desarrollo y la ejecución de las distintas actividades de aprendizaje. Para ello pueden emplearse técnicas como el trabajo cooperativo, llevar a cabo debates a modo de reflexión o de activación de ideas previa, facilitar el aprendizaje por descubrimiento o plantear problemas o situaciones estimulantes para los alumnos, todo ello siempre acompañado de los recursos y las posibilidades que ofrece el siglo XXI, no podemos limitarnos a la pizarra y al papel. Bajo un modelo de participación y de diálogo igualitario, todos los argumentos tienen cabida y la validez de los mismos la dictará el docente. El objetivo debe de ser aprender matemáticas desde distintos puntos de vista, a través de diferentes estilos de aprendizaje que ofrezcan oportunidades a todos los alumnos y a todas las alumnas a pesar de sus diferencias. Combinar diferentes estrategias en la docencia desemboca en un mejor resultado para los estudiantes.

Así, el profesor debe de ser capaz de ofrecer distintas posibilidades y aceptar la multiplicidad de caminos para llegar al conocimiento matemático. Sus alumnos deben tener la opción de elegir y a cambio desarrollar competencias que les permitan saber hacerlo de manera que favorezca su propio aprendizaje. En vez de encasillar a alumnos en situaciones excluyentes, se deben crear situaciones abiertas dentro de un marco común que pueda favorecer a todos.

III. ¿QUÉ SABEMOS DE PROBLEMAS HASTA AHORA?

Como se ha comentado en muchas de las líneas hasta aquí escritas, una gran posibilidad que permite facilitar el aprendizaje de todos es la utilización de los problemas, pero no de la manera que se ha hecho normalmente.

CONTEXTO. ¿POR QUÉ TRABAJAR CON PROBLEMAS?

Antes de intentar exponer ciertos argumentos a favor del uso de problemas para facilitar el aprendizaje de las matemáticas para el alumnado de educación secundaria obligatoria, se quieren revisar algunas de las principales acepciones de la palabra problema que ofrece el diccionario de la R.A.E.: *«1. m. Cuestión que se trata de aclarar. 2. m. Proposición o dificultad de solución dudosa. 3. m. Conjunto de hechos o circunstancias que dificultan la consecución de algún fin. 4. m. Disgusto o preocupación. 5. m. Planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos".»* La palabra problema lleva implícita otras cuestiones como dificultad, solución dudosa o desconocimiento, lo que de cierta manera invita a echarse rápidamente para atrás. De la propia etimología de la palabra y desde los contextos en que se utiliza, la palabra problema lleva asociada connotaciones negativas y a través de la experiencia que ha ido acumulando el alumnado desde sus inicios escolares, la palabra problema no invita al optimismo ni mucho menos a la motivación. Aunque desde este trabajo se invita a trabajar con problemas desde que los alumnos y las alumnas entran en la escuela, la realidad está lejos de ser así, y se presupone que el alumnado de secundaria contará con un bagaje de partida en el que asocien los problemas a tareas inabarcables y, por tanto, su predisposición a afrontarlos será escasa.

En contraposición a la palabra problema, se quiere plantear otro término que incluya connotaciones ciertamente más positivas y del que pueda derivarse una mejor predisposición por parte del alumnado a la hora de enfrentarse a él. Este nuevo término es reto, y la R.A.E. define su significado de estas maneras: *«1. m. Provocación o citación al duelo o desafío. 5. m. Objetivo o empeño difícil de llevar a cabo, y que constituye por ello un estímulo y un desafío para quien lo afronta.»* Con la palabra reto se sobreentiende un desafío asociado y un estímulo o ánimo para resolverlo.

No es necesario renombrar a los problemas como retos porque a la larga los alumnos descubrirían que bajo una nueva palabra se esconde la misma realidad de la que rehúyen. Lo importante es plantear los problemas bajo una nueva perspectiva que les suponga un desafío, con un nivel adecuado que parta de sus conocimientos previos y, del contexto y la realidad en la que se encuentran, para que sean capaces de acercarse a su solución, y suponga así un incentivo para ellos. Tras esta primera aclaración se pretende responder a otro de los interrogantes que surgieron en el planteamiento inicial del trabajo: *¿Por qué plantear el uso de problemas para aprender mejor?*

El papel de la repetición y de la reflexión en el aprendizaje

La repetición es, en ocasiones, un buen método de aprendizaje, pero no favorece en absoluto la motivación del alumnado. Con demasiada repetición, muchos de los alumnos se cansan fácilmente y abandonan la tarea que están realizando. Sin embargo, comprender algo exige activar procesos cognitivos más complejos que los que requiere la actividad de repetición. De esta manera, a las personas nos cuesta reflexionar porque es una tarea que necesita de un esfuerzo. Los humanos no reflexionan porque el cerebro no está dotado para reflexionar sino para evitar hacerlo (Willingham, 2011). Reflexionar, además de conllevar un esfuerzo para mantener una concentración adecuada, es un proceso arduo e incierto, es decir, muchas veces no conduce hacia ningún sitio, podemos estar reflexionando durante un gran periodo de tiempo y que nuestro proceso de razonamiento no nos acerque a una conclusión clara para resolver una situación o problema. Efectivamente, cómo motivar a los alumnos a reflexionar es uno de los mayores retos de la enseñanza. A menudo, encontramos estudiantes con gran capacidad de trabajo que son capaces de repetir las mismas tareas o memorizar infinidad de páginas, pero es más difícil reconocer en el alumnado una capacidad de reflexión que conduzca a tomar decisiones basadas en sus propias hipótesis ante retos nuevos o extraer conclusiones sobre lo aprendido. ¿Por qué invitar a los alumnos a reflexionar entonces? Lo que repetimos una y otra vez tiende a olvidarse rápidamente en el momento en que se deja de practicar. Sin embargo, aquello que logramos comprender, no lo olvidamos tan fácilmente. Recordamos mucho mejor aquello sobre lo que reflexionamos.

Cuando nos enfrentamos a un problema, antes de comenzar a reflexionar confiamos en nuestra memoria para encontrar una solución. Si somos capaces de reconocer una situación parecida que ya hemos resuelto antes, nos limitamos a hacer lo que nos sirvió en el pasado. Además, una tarea que en un primer momento pueda exigir mucha concentración se puede convertir, mediante la práctica, en una tarea automática que no precise de casi ninguna reflexión. Así, parece razonable pensar que hay una cierta relación entre repetición y reflexión. Ante situaciones nuevas nos vemos obligados a reflexionar y, a partir de la repetición continuada, automatizamos procedimientos y mecánicas que evitan tener que llevar a cabo reflexiones profundas. Ambas actividades son indispensables en el proceso de aprendizaje y, a menudo, en los centros educativos se incide demasiado en el aspecto de la repetición, “es que los alumnos no trabajan lo suficiente” y se da por imposible la posibilidad de que estos mismos alumnos reflexionen, es decir, prima lo cuantitativo frente a lo cualitativo.

Para que un estudiante pueda reflexionar necesita por un lado de conocimiento sobre el que reflexionar, ya sea de su memoria o del entorno y, además, cuanto más sea capaz de realizar procedimientos que ha podido desarrollar a través de la repetición, mayor será su capacidad para reflexionar ya que tendrá que prestar menos atención a cómo realizar ciertos mecanismos porque ya los tiene interiorizados. Es decir, por lo general cada uno tendrá mejor capacidad de reflexionar cuanta más ideas previas tenga y mejor sepa manejarse con los procedimientos que tiene que utilizar.

Frente a la repetición asidua de tareas parece que la reflexión pueda ser una actividad más motivante. Sin embargo, el problema principal es que la falta de costumbre que muestra el alumnado a reflexionar y no llegar a ninguna conclusión en un breve espacio de tiempo hará que rápidamente abandonen la tarea. Mediante el uso de problemas se puede incitar al alumnado a reflexionar, pero será necesario buscar retos asumibles para ellos, teniendo en cuenta sus conocimientos de partida para que puedan avanzar en sus reflexiones apoyándose en lo que ya conocen. De lo contrario, se frustrarán enseguida y rechazarán aquellas actividades que les exijan pensar. De igual manera, si planteamos un problema sin ningún tipo de dificultad, el esfuerzo que tendrán que realizar será mínimo y no supondrá ningún estímulo su resolución. Así, aunque puedan mostrar una curiosidad inicial según el tipo de problema planteado, será una dificultad razonable del problema la que mantendrá el interés y la motivación de todo el alumnado.

No obstante, el desarrollo de estrategias para resolver problemas debe adquirirse empleando contenidos procedimentales y el dominio de las técnicas que es consecuencia inmediata de la práctica repetida. Será imposible que nuestros alumnos y alumnas resuelvan problemas si no cuentan con el conocimiento de los procedimientos necesarios para ello, pero a la vez incidir en la repetición de tareas similares no tiene sentido si no viene acompañada de una capacidad de análisis, de crítica y de relación con el contexto. Por tanto, en un sistema escolar en el que a menudo se ha hecho demasiado hincapié en la repetición, la memorización y la extensión de contenidos, hay que dar dará cabida a la comprensión, la reflexión y la profundización, para que los estudiantes, bombardeados continuamente por distintas fuentes en una sociedad caracterizada por la diversidad de perspectivas, sean capaces de desarrollar a partir de los contenidos, otras capacidades o competencias a nivel general que les permitan a su vez aportarle significado a esos contenidos y ser capaces de aplicarlos en nuevos contextos.

Las personas encuentran placer en la resolución de problemas

Además de ser un ejercicio adecuado para que los alumnos puedan reflexionar, si estos razonamientos les conducen a conclusiones razonables, los problemas darán al alumnado cierto grado de entusiasmo. Cuando resolvemos una tarea nueva o un problema que no hemos visto antes, automáticamente tenemos una sensación de satisfacción o placer. Esta es mayor según nos hayamos involucrado en la tarea. Si vemos la solución directamente puede que nos alivie momentáneamente, pero cuántos de nosotros ante un simple acertijo que se nos resistía, hemos dicho "no me lo digas, que lo quiero sacar yo solo". Si somos capaces de dar con el resultado, nuestro razonamiento será fructífero, es decir, llevará asociado una sensación de logro. Por el contrario, si no lo conseguimos es posible que nos cree una expectativa de no ser capaces de resolver retos nuevos. De aquí surge nuevamente la necesidad de elaborar problemas asumibles en los que se pueda dar una solución, aunque sea parcial para tener la sensación de poder avanzar.

Otro de los motivos por los que se defiende el uso de problemas es, por tanto, la posibilidad de desarrollar procesos de razonamiento que puedan ser fructíferos. La neurociencia ha demostrado que cuando solucionamos un problema, el cerebro libera una pequeña dosis de dopamina que proporciona placer (Willingham, 2011). Normalmente, en las aulas, los problemas se introducen al final de los temas; es decir, después de repetir una infinitud de algoritmos matemáticos con números, letras y símbolos de manera abstracta, pretendemos que los alumnos asocien inmediatamente estas técnicas a situaciones de contexto y, sean capaces de identificar cuáles son similares y llevan intrínsecos los mismos procesos subyacentes.

Se trata así de modificar el prejuicio general existente en las aulas, a partir del cual muchos alumnos se creen incapaces de solucionar problemas. "Yo es que los problemas no sé resolverlos" o "los problemas son demasiado difíciles para mí" son algunas de las frases estrella que salen por la boca de los alumnos y las alumnas de secundaria. Cambiar esta percepción sobre los problemas es estrictamente necesario y solo se puede llevar a cabo a través de los propios problemas que deben plantearse de otra manera, en otro momento de la secuencia didáctica y con más frecuencia de lo que estamos habituados.

Trabajar sobre la realidad mediante problemas

Un último punto para tratar de convencer de la utilidad de emplear problemas en el aprendizaje de las matemáticas es la dificultad que tienen los alumnos para comprender nuevas ideas abstractas o una vez comprendidas estas, para aplicarlas a diversas situaciones. Por ejemplo, si tratamos de explicar a nuestros estudiantes la diferencia entre proporcionalidad directa e inversa a través de tablas de datos aislados de cualquier contexto, es posible que en un primer momento entiendan fácilmente cómo funciona la proporcionalidad directa y se equivoquen en mayor medida en la inversa. Con un poco de práctica puede que identifiquen y distingan rápidamente entre ambas, y rellenen tablas incompletas empleando siempre los mismos algoritmos, pero si dejan de practicar en cuanto pase algo de tiempo es probable que la mayoría de la clase no recuerde nada. Sería mucho más sensato tratar de que comprendiesen la diferencia mediante una explicación a través de ejemplos concretos, que les fueran familiares. El modo más adecuado para ayudar al alumnado a comprender una nueva idea abstracta es explicarla a partir de diferentes versiones de concreciones de la misma. Cada idea nueva debe construirse a partir de otras que ya conozca o a través de un acercamiento a su realidad concreta.

Aunque los alumnos parezcan comprender una idea nueva, la pueden comprender a niveles muy distintos. Por ejemplo, pueden entender bien el ejemplo en concreto, pero después ser incapaces de reconocer el mismo problema desde una perspectiva distinta u otro ejemplo que aplique lo mismo, pero bajo otro contexto. Para una comprensión más profunda de un contenido es necesario aplicar el mismo conocimiento en diferentes contextos que compartan la misma estructura profunda, es decir, que requieran del mismo razonamiento para su resolución y posteriormente comparar dichos ejemplos.

El contexto en sí no tiene efecto en la solución del problema, pero sí facilita la comprensión del estudiante, ya que si le resulta familiar podrá concentrarse en buscar una solución para el propio problema. En cambio, si el tema se aleja de los conocimientos y de la realidad del alumnado, provocará que gaste parte de sus esfuerzos en entenderlo, lo que limitará mucho su capacidad para resolverlo. Por tanto, podemos emplear problemas para incluir situaciones próximas al alumnado y relacionar unos contenidos de carácter abstracto con su realidad para facilitar su resolución y crear escenarios capaces de liberar la reflexión de estos para un aprendizaje más significativo y profundo que utilice los conocimientos y las técnicas que ya han adquirido previamente para facilitar la adquisición de ideas nuevas a partir de lo que ya se conoce.

Atender directamente a la diversidad

El cambio de perspectiva sobre los problemas lleva a situarlos como punto de partida del conocimiento, de manera que diferentes contenidos matemáticos puedan emerger de situaciones y problemas reales propuestos al alumnado. Generalmente los problemas se han empleado de manera instrumental tras la exposición de la teoría por parte del docente y la práctica a través de ejercicios, pero pocas veces se los ha situado con la intención de extraer a partir de ellos contenidos no vistos previamente.

Así se puede pasar de una enseñanza que desemboca en que los alumnos sean capaces de resolver problemas en última instancia, a un nuevo enfoque en el que la enseñanza se lleve a cabo a través de los problemas. De esta manera los estudiantes se enfrentan a situaciones sin saber qué contenidos tienen que emplear y, se promueve su reflexión e indagación hasta alcanzar razonamientos que les acerquen a unos contenidos y a una posible solución. El profesor debe de ser capaz de guiarles preferiblemente a través de preguntas, para que sean ellos mismos los que se aproximen a los nuevos conceptos que se quieren introducir y llevar a cabo una puesta en común. Esta propuesta además de permitir practicar contenidos que ya se han tratado y técnicas heurísticas, ofrece la posibilidad de introducir conceptos nuevos o ideas que acerquen a ellos de manera más significativa para los alumnos (Beltrán-Pellicer & Martínez-Juste, 2021).

Algunos elementos fundamentales de este modelo de enseñanza es la posibilidad de trabajar en grupo para favorecer la interacción de todos y la cesión de responsabilidad por parte del profesor. Los estudiantes pasan de limitarse a escuchar al docente y repetir tareas similares, a pensar verdaderamente en matemáticas.

En muchos de los problemas no se trata de terminar con una solución concreta e igual a la del resto, sino en llevar a cabo un proceso desarrollado argumentado en el que el alumno vaya creando sus propios significados. La idea principal es que los contenidos nazcan de la actividad de los alumnos según sus puntos de partida y para que se pueda dar esto es necesario aportar tareas flexibles que permitan adaptar los contenidos o la secuencia de los mismos en función de las necesidades de cada uno.

Con la resolución de problemas abiertos o variados se asume la atención de un alumnado diverso, partiendo de la idea de que todos los alumnos no aprenden igual ni lo hacen a los mismos niveles de comprensión. Se le debe dar a cada uno la oportunidad de crear sus propios significados en matemáticas y para ello, las secuencias didácticas y las actividades propuestas en ellas, deben facilitar el desarrollo de los mismos. Así, emplear problemas diferentes a los que aparecen frecuentemente en los libros y actividades de suelo bajo y techo alto, permiten que todo el alumnado pueda acceder a ellos y que todos sean capaces de progresar a sus propios ritmos según sus bagajes particulares dando diferentes significados personales a estos contenidos.

El docente debe reflexionar sobre la intención que busca con cada problema o, desde un punto de vista más general, sobre las preguntas que ayudan a los alumnos a construir conocimiento matemático. A través de preguntas sobre un contexto concreto, podemos construir un problema y conducir a los alumnos a descubrir propiedades matemáticas por sí mismos, o a desgranar un algoritmo establecido a partir de un razonamiento más intuitivo (Calvo, 2019). Ya se ha hablado de la necesidad de aceptar las diferentes formas que puedan mostrar los alumnos a la hora de demostrar que poseen un conocimiento. Existen diversos algoritmos asociados a las mismas operaciones y técnicas, y a lo mejor unos modos les resultan a unos alumnos más intuitivos que otros. No se debe obligar a nadie a seguir un único camino.

Atender a la diversidad de manera inclusiva desde la asignatura de matemáticas conlleva ser flexibles, plantear situaciones abiertas comunes a todos para permitir que cada uno pueda elegir, según cuál sea su punto de partida, cómo desarrollar una actividad, para facilitar la participación de todos y ofrecer la posibilidad de que todos los alumnos y la alumnas interactúen entre sí, compartan ideas y debatan para que puedan aprender unos de otros, sin dejar de aspirar a que cada uno desarrolle al máximo su potencial.

Lo que dice la norma sobre resolución de problemas

En el Anexo I del RD 1105/2014, se especifican las distintas materias que forman parte de los distintos cursos. En matemáticas se hace referencia constante a la necesidad de emplear problemas. Por ejemplo, para las matemáticas de primer y segundo curso de Educación Secundaria obligatoria, se dice los siguiente:

«*La* ***resolución de problemas*** *y los proyectos de investigación constituyen* ***ejes fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas****. La habilidad de formular, plantear, interpretar y resolver problemas es una de las capacidades esenciales de la actividad matemática, ya que permite a las personas emplear los procesos cognitivos para abordar y resolver situaciones interdisciplinares reales, lo que resulta de máximo interés para el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico. En este proceso de resolución e investigación están involucradas muchas otras competencias, además de la matemática, entre otras, la comunicación* *lingüística, al leer de forma comprensiva los enunciados y comunicar los resultados obtenidos; el sentido de iniciativa y emprendimiento al establecer un plan de trabajo en revisión y modificación continua en la medida que se va resolviendo el problema; la competencia digital, al tratar de forma adecuada la información y, en su caso, servir de apoyo a la resolución del problema y comprobación de la solución; o la competencia social y cívica, al implicar una actitud abierta ante diferentes soluciones.*

***Partiendo de los hechos concretos hasta lograr alcanzar otros más abstractos**, la enseñanza y el aprendizaje de Matemáticas permite al alumnado adquirir los conocimientos matemáticos, familiarizarse con el contexto de aplicación de los mismos y desarrollar procedimientos para la resolución de problemas.*

Los nuevos conocimientos que deben adquirirse tienen que apoyarse en los ya conseguidos: los contextos deben ser elegidos para que el alumnado se aproxime al conocimiento de forma intuitiva mediante situaciones cercanas al mismo, y vaya adquiriendo cada vez mayor complejidad, ampliando progresivamente la aplicación a problemas relacionados con fenómenos naturales y sociales y a otros contextos menos cercanos a su realidad inmediata.

A lo largo de las distintas etapas educativas, el alumnado debe progresar en la adquisición de las habilidades de pensamiento matemático, en concreto en la capacidad de analizar e investigar, interpretar y comunicar de forma matemática diversos fenómenos y problemas en distintos contextos, así como de proporcionar soluciones prácticas a los mismos […].»

Para el resto de los cursos, se exponen ideas similares. La norma sitúa así la resolución de problemas como uno de los ejes fundamentales del proceso de enseñanza-aprendizaje de los alumnos, pero realmente, ¿esto está ocurriendo?

Contribuir al desarrollo de las competencias clave

En el fragmento anterior del RD 1105/2014 se hace referencia a la contribución del proceso de resolución de problemas al desarrollo del resto de las competencias clave. En cuanto a la propia competencia matemática añade:

«*La materia Matemáticas contribuye especialmente al desarrollo de la competencia matemática, reconocida como clave por la Unión Europea. Esta se entiende como habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver diversos problemas en situaciones cotidianas; en concreto, engloba los siguientes aspectos y facetas: pensar, modelar y razonar de forma matemática, plantear y resolver* *problemas, representar entidades matemáticas, utilizar los símbolos matemáticos, comunicarse con las Matemáticas y sobre las Matemáticas, y utilizar ayudas y herramientas tecnológicas; además, el pensamiento matemático ayuda a la adquisición del resto de competencias.*

Por tanto, las matemáticas dentro del currículo favorecen el progreso en la adquisición de la competencia matemática a partir del conocimiento de los contenidos y su amplio conjunto de procedimientos de cálculo, análisis, medida y estimación de los fenómenos de la realidad y de sus relaciones, como instrumento imprescindible en el desarrollo del pensamiento de los individuos y componente esencial de comprensión, modelización y transformación de los fenómenos de la realidad.»

Con todo lo anterior, a continuación, se va a dar una breve explicación sobre cómo puede contribuir la resolución de problemas al desarrollo de cada una de las competencias.

1. Comunicación lingüística: resolver problemas conlleva leer y comprender diferentes enunciados, debatir la información con el resto de los compañeros, y aprender a comunicar lo que se quiere decir.
2. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología: los problemas representan directamente esta competencia mediante el uso de contenidos matemáticos bajo un enfoque de reflexión y pensamiento matemático.
3. Competencia digital: podemos servirnos de infinitud de recursos digitales para apoyar la fase de planteamiento de un problema y nos pueden ayudar a interpretar la solución obtenida.
4. Aprender a aprender: a partir de diferentes posibilidades, se pretende que los alumnos prueben entre distintas opciones y aprendan a identificar cuáles favorecen su propio aprendizaje y se ajustan a su ritmo de trabajo.
5. Competencias sociales y cívicas: se plantean retos abiertos que fomenten la participación y colaboración de los alumnos a partir de la interacción y el debate.
6. Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor: se da libertad al alumno para elegir cómo afrontar una situación a partir de sus conocimientos. Así, tendrá que tomar la iniciativa en la búsqueda de recursos que le permitan resolver el problema.
7. Conciencia y expresiones culturales: los problemas permiten introducir contextos que puedan reflejar elementos que forman parte de la cultura humana o plantear situaciones transversales propositivas al alumno.

CRITERIOS PARA ELABORAR PROBLEMAS

A continuación, se identifican algunas posibilidades que ofrece Pozo (2010) para convertir tareas rutinarias en verdaderos problemas, desde tres ámbitos:

	PLANTEAMIENTO del problema
1.	«Plantear **tareas abiertas**, que admitan varias vías posibles de solución e incluso varias soluciones posibles, evitando las tareas cerradas.»
2.	«Modificar el **formato** o definición de los problemas, evitando que el alumnado identifique una forma de presentación con un tipo de problema.»
3.	«Diversificar los **contextos** en que se plantea la aplicación de una misma estrategia, haciendo que el alumno trabaje los mismos tipos de problemas en distintos momentos del currículo y ante contenidos conceptuales diferentes.»
4.	«Plantear las tareas no sólo con un formato académico, sino también en **escenarios cotidianos y significativos** para el alumnado, procurando que éste establezca conexiones entre ambos tipos de situaciones.»
5.	«Adecuar la definición del problema, las preguntas y la información proporcionada a los objetivos de la tarea, mediante la utilización, en distintos momentos, de formatos más o menos abiertos, en función de esos mismos objetivos.»
6.	«Utilizar los problemas con **fines diversos** durante el desarrollo o secuencia didáctica de un tema, evitando que las tareas prácticas aparezcan como ilustración, demostración o ejemplificación de unos contenidos previamente presentados al alumnado.»
	Tipo de SOLUCIÓN
7.	«Habituar al alumnado a adoptar sus propias decisiones sobre el proceso de solución, así como a reflexionar sobre ese proceso, concediéndole una **autonomía** creciente en ese proceso de toma de decisiones.»
8.	«Fomentar la **cooperación** entre los alumnos en la realización de las tareas, pero también incentivar la **discusión** y los puntos de vista diversos, que obliguen a explorar el espacio del problema, para confrontar las soluciones o vías de solución alternativas.»
9.	«Proporcionar a los alumnos la información que precisen durante el proceso de solución, realizando una **labor de apoyo**, dirigida más a hacer preguntas o fomentar en los alumnos el hábito de preguntarse que a dar respuesta a sus preguntas.»
	EVALUACIÓN
10.	«Evaluar más los **procesos** de solución seguidos por el alumnado que la corrección final de la respuesta obtenida, o sea, evaluar más que corregir.»
11.	«Valorar especialmente el grado en que ese proceso de solución implica una **planificación** previa, una reflexión durante la realización de la tarea y una **autoevaluación** por parte del alumnado del proceso seguido.»
12.	«Valorar la **reflexión** y la **profundidad** de las soluciones alcanzadas por el alumnado y no la rapidez con la que son obtenidas.»

Tabla con algunos criterios para convertir ejercicios escolares en problemas según Pozo (2010, p.78)

Se han señalado algunas de las palabras asociadas a los problemas que me han resultado clave y que tendré en cuenta en la propuesta didáctica de este trabajo.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

A lo largo de la historia de las matemáticas son muchos los que han aportado su granito de arena al debate de la resolución de problemas. No es objeto de este documento profundizar sobre esta cuestión, pero se van a resumir algunas de las ideas Polya para adentrarnos en lo que supone enfrentarse a un problema y explicar brevemente algunas de las estrategias que van a aparecer después.

En qué consiste resolver un problema

Existen un sinfín de definiciones de lo que supone la resolución de problemas. Según Polya (1961), *"resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no se consigue de forma inmediata, utilizando los medios adecuados"*, es decir, enfrentarse a un reto que entraña alguna dificultad sobre el que inmediatamente no puedes dar con su respuesta y que exige un proceso de reflexión personal a partir de ciertos medios. Con la idea de "encontrar la forma" quiero hacer hincapié en que resolver un problema no es una cuestión cerrada que se tenga que llevar a cabo rápidamente y de forma mecánica, sino que la persona que quiera enfrentarse a uno tendrá que aportar una actitud positiva para ser capaz de dar con una estrategia acorde a sus propios medios y a las características del problema.

Así, resolver un problema no debe de ser una actividad en la que se repita un mismo patrón una y otra vez de manera automática, sino un proceso completo que implique la comprensión de unas premisas y un objetivo y, la aplicación de recursos aprendidos o la adquisición de nuevas ideas para alcanzar dicho objetivo a través de diferentes estrategias y teniendo en cuenta posibles experiencias anteriores.

Fases de resolución

De igual manera, se han propuesto diferentes metodologías para abarcar la resolución de un problema con diferentes fases o sugerencias. A continuación, se van a exponer las diferentes fases que contempla el modelo de Polya a partir de una serie de preguntas:

I. <u>Comprender el problema</u>: Entender la formulación verbal del problema y qué se nos está pidiendo. Para ello se deben buscar los diferentes elementos del problema, tanto los que son visibles como los desconocidos (incógnitas), así como las posibles relaciones que de dan entre todos ellos o las premisas establecidas, para ver cómo conectar con la solución. Las preguntas de esta primera fase serían:

- *¿Qué es lo que no conocemos? ¿Cuáles son los datos conocidos?*
- *¿Hay alguna condición? ¿Es posible satisfacerla?*

II. Elaborar un plan: establecer ideas a partir de los datos y las relaciones entre ellos, para alcanzar un objetivo. Estas ideas se apoyan en el entendimiento de la asignatura, pero también en la experiencia y en el conocimiento adquirido a través de ella. Es decir, el conocimiento, la reflexión y la memoria son útiles a la hora de concebir un plan. Podemos preguntar lo siguiente establecer un plan:

- *¿Conoces un problema relacionado? Observa los datos desconocidos y trata de buscar un problema con el mismo tipo de planteamiento.*
- *He aquí un problema similar resuelto anteriormente. ¿Puedes usarlo?*
- *¿Puedes reformular el problema de otra forma? ¿Has empleado todos los datos? ¿Y las condiciones?*

III. Llevar a cabo el plan: a partir de las ideas de la fase anterior, hay que comprobar que cada paso encaja con el plan elaborado y no perder la perspectiva general del mismo. Se puede revisar si la ejecución del plan es correcta a través de:

- *¿Puedes ver claramente que el paso es correcto? ¿Puedes demostrarlo?*

IV. Mirar hacia atrás: Una vez alcanzada una solución, es importante echar un vistazo a lo anterior y comprobar si la solución tiene sentido en el contexto y hay suficientes razones para creer que es correcta. Podemos preguntar:

- *¿Puedes comprobar el resultado? ¿Y verificar el razonamiento?*
- *¿Podrías haber obtenido el resultado de otra manera? Hay opciones más eficientes que otras. ¿Puedes dar con ellas de un vistazo?*
- *¿Puedes usar el resultado o el método para otros problemas?*

Además, intentar encontrar una solución puede provocar que cambiemos nuestro punto de vista hacia al problema una y otra vez y, saltemos de una fase a otra.

En parte de los problemas propuestos se llevará una metodología similar a través de cuatro fases secuenciadas:

- Comprensión: obtener los datos del enunciado, el objetivo del problema y todas las posibles relaciones y conexiones entre estos. Pueden emplearse diagramas.
- Reflexión: analizar los datos y las relaciones a partir de representaciones, en búsqueda de la estrategia más conveniente para dar con la solución del problema.
- Pasar a la acción: una vez elegida la estrategia, transformar las ideas pensadas en representaciones matemáticas que nos permitan alcanzar la solución.

- Mirar hacia atrás: conectar de nuevo con el contexto, comprobar si la solución encontrada es adecuada, y dar una respuesta coherente con el problema.

Posibles estrategias

Existen infinitas estrategias para utilizar en la resolución de problemas y, si bien, ninguna es mejor que otra, según la naturaleza del problema será más eficiente emplear una frente a otras. No obstante, debería darse al alumnado libertad para elegir aquella con la que se encuentre más cómodo y facilite su aprendizaje. A continuación, se van a señalar algunas estrategias más conocidas:

→ Estrategias básicas

Son las que se emplearán en los problemas multinivel propuestos.

1. <u>Modelización</u>: crear un modelo manipulativo a partir de objetos o a través de distintas representaciones, que sirvan como ayuda o apoyo a la resolución del problema. Puede emplearse también para organizar la información en la fase inicial de comprensión del problema.
   - Objetos: estructurados (regletas, bloques, ábacos), semiestructurados (geoplano, tangram) cotidianos (palillos, cajas, canicas)
   - Representaciones planas: dibujos, planos, mapas, figuras y cuerpos geométricos.
   - Representaciones informatizadas: a través de aparatos electrónicos con diferentes recursos de *Interne*t como, por ejemplo, *GeoGebra* o *MathsBot*.
2. <u>Ensayo-error</u>: establecer una hipótesis y comprobar si es válida hasta dar con la solución que satisfaga las condiciones del problema. Puede apoyarse en tablas sencillas en las que se reflejen todos los componentes del problema, siendo la última columna, la del elemento conocido, la que nos permite comprobar si la hipótesis planteada es cierta o no. Existen tres variantes según la forma de trabajar:
   - Fortuito: al azar, sin razonamiento previo. Se pueden realizar muchos ensayos y no dar con todas las soluciones posibles.
   - Sistemático: al hacer todos los ensayos de manera ordenada, se eliminan posibles repeticiones y se terminan encontrando todas las soluciones.
   - Dirigido: a partir del contraste de un primer ensayo orientativo, se razona qué tipo de ensayo conviene realizar a continuación. Es mucho más eficiente y no requiere realizar todos los ensayos posibles al ir precisando cuál es el objetivo buscado.
3. <u>Organización de la información</u>: organizar la información a partir de representaciones gráficas o simbólicas adecuadas. Se puede apoyar en diagramas, tablas o gráficos.

- Razonamiento aritmético: establecer relaciones numéricas entre los datos y las situaciones que plantea el problema. Puede apoyarse en tablas o diagramas.
- Diagramas partes-todo: representar a partir de un diagrama las partes conocidas del problema y las desconocidas en su relación con el total. Incluye razonamiento aritmético. Hay cuatro variantes:
    a. Se conocen las partes y no se conoce el todo (suma)
    b. No se conoce una de las partes, pero si el todo (resta)
    c. Se conocen las partes y son todas iguales, pero no el todo (multiplicar)
    d. Se conoce el todo, pero no las partes que son iguales o no se conoce el valor de cada parte (dividir)
- Codificación algebraica: a partir de la definición de unas incógnitas y con el planteamiento de diferentes estructuras algebraicas que permitan dar con la solución buscada.

→ Estrategias auxiliares

Complementarias (por sí solas no resuelven los problemas).

4. Analogía: apoyarse en problemas de características similares resueltos previamente y seguir el mismo plan para resolverlo (con sus respectivos diagramas y estrategias).
5. Simplificación.: plantear una situación equivalente a la dada pero más sencilla, es decir, modificar la forma del problema para facilitar su comprensión a través de un método más intuitivo o más fácil de resolver.
    - Sustitución: sustituir los datos numéricos complejos por otros más sencillos que favorezcan el cálculo.
    - Particularización:
        a. Modificar el orden de los enunciados para que resulte más familiar
        b. Proponer distintos ejemplos de enunciados que se resuelvan igual
    - Dividir un problema en partes:
        a. Dividir el problema en subproblemas
        b. Usar diferentes secuencias en el problema
        c. Hacer un estudio de casos más sencillos.

→ Estrategias específicas

6. Eliminar: eliminar soluciones de un conjunto dado hasta dar con la solución correcta. A través de una lista de posibles soluciones y, mediante la lógica y la eliminación de proposiciones incoherentes, se da con la respuesta correcta.

- Deducir el orden en que se ha producido una situación concreta
- Problemas que indican varias proposiciones y la indicación de que unos dicen la verdad y otros mienten
- Los que indican dos o más grupos de variables y una serie de relaciones entre ellas
- Los que dan un único grupo de variables y una serie de relaciones entre ellas (P. ej.: sudokus, cuadrados mágicos, etc.)
- Los que dan un mensaje codificado y algunas condiciones para intentar descifrar el mensaje (P. ej.: diagrama numérico)

7. Trabajar marcha atrás: ordenar secuencias de acciones desde el objetivo hasta los datos iniciales, es decir, reconstruir una situación hacia atrás a partir de la secuencia de unos pasos u operaciones contrarias que han llevado del estado inicial al objetivo. Se apoya en diagramas con flechas para ordenar las secuencias.
8. Exploración: experimentar y buscar regularidades.
   - Buscar patrones: ordenar el aparente desorden de un conjunto formado por distintos elementos en busca de regularidades, leyes o patrones que constituyan la estructura del conjunto y faciliten su comprensión para localizar la solución. Se puede facilitar esta búsqueda a partir del uso de tablas.
   - Generalización: va un paso más allá que la estrategia anterior al buscar la ley que generalice esos patrones o esas regularidades encontradas. No se trata de hallar una solución sino la ley que permite resolver cualquier variante del problema.
9. Técnicas generales matemáticas: de nivel más avanzado.
   - Contradicción. Reducción al absurdo: demostrar que un resultado es cierto partiendo de suponer que el resultado que se quiere demostrar es falso y llegando a una contradicción.
   - Método de inducción matemática: estrategia de razonamiento que permite inducir de unas premisas particulares que se cumplen para un caso, demostrando que tiene que ser ciertas para el siguiente, unas reglas generales.

En los problemas propuestos se van a emplear sobre todo las estrategias básicas, aunque se podría realizar cualquier tipo de estrategia, incluso algunas que no estén definidas bajo un nombre concreto, siempre y cuando estén apoyadas en argumentos y muestren razonamientos adecuados en relación al contenido concreto.

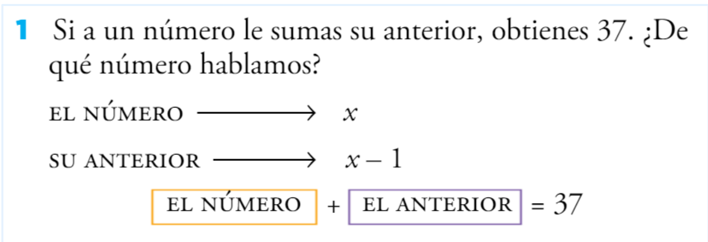
TIPOS DE PROBLEMAS

En este apartado quiere darse una breve descripción de algunos de los diferentes tipos de problemas que aparecen hoy en día en todo tipo de fuentes (libros de texto, páginas webs, blogs, vídeos, etc.) y las ventajas que pueden suponer para el alumnado.

Problemas repetitivos

Se denomina problema repetitivo a aquel que aparece con frecuencia en los libros de texto de los alumnos, generalmente en las últimas páginas de cada tema. Puede parecer que el objetivo es bombardear a los alumnos con problemas una vez se ha explicado la “teoría” con sus ejemplos pertinentes y se han trabajado los suficientes ejercicios como para dominar las técnicas y los algoritmos correspondientes. Muchas veces la repetición no reside en los propios problemas e incluso puede haber problemas interesantes en los libros. La repetición nace más del enfoque y uso que se hace de ellos, que de los propios problemas.

Por ejemplo, en la siguiente imagen encontramos un problema de un libro de 1º ESO que perfectamente podría ser tratado como un problema multinivel (*ver Anexo I, p.* ***61***), pero la repetición reside en la intención: se busca que el alumno sea capaz de traducir a lenguaje algebraico el problema y resuelva una ecuación.



1 Si a un número le sumas su anterior, obtienes 37. ¿De qué número hablamos?

EL NÚMERO ⟶ x

SU ANTERIOR ⟶ $x - 1$

$\boxed{\text{EL NÚMERO}} + \boxed{\text{EL ANTERIOR}} = 37$

Problema de álgebra, fuente *ESO 1, Matemáticas* (Anaya, 2015)

A continuación, es probable que se planteen varios problemas similares con el mismo objetivo. Los alumnos que no hayan interiorizado aun el uso del álgebra, lo que es bastante común siendo alumnos de primer curso, estarán las siguientes clases en blanco, sin poder avanzar y ganando argumentos a favor de la idea de que los problemas son difíciles.

A través de la propuesta repetitiva y poco eficaz de los libros, Dan Meyer, profesor de secundaria estadounidense, diagnostica una falta de razonamiento matemático en el alumnado a partir de cinco síntomas:

1. Falta de iniciativa de los estudiantes cuando se enfrentan a un problema
2. Falta de perseverancia para dar con un razonamiento adecuado

3. Falta de capacidad de retención de contenidos
4. Aversión a los problemas descriptivos
5. Búsqueda de fórmula que aplicar directamente

Critica los problemas que aparecen en los libros porque se basan en prototipos en los que se intercambian los números y se modifica el contexto, pero que provocan que los alumnos se limiten a extraer los datos y apliquen fórmulas sin ningún tipo de reflexión sobre el problema. Así, los alumnos pueden resolver problemas simplemente entendiendo el formato del libro, se les da todo demasiado hecho y se limita su capacidad de reflexión (Meyer, 2010).

Problemas ricos o variados

Los problemas, o a un nivel más general, las tareas ricas o abiertas son aquellas que anteponen un buen razonamiento matemático a conocer mucho de la materia (Omatos). Algunas de sus características son:

- Se relacionan con un contexto con el fin de provocar interés
- Todos los alumnos pueden comenzar la tarea, debe permitir que cada uno pueda demostrar lo que sabe y no reflejar lo que todavía no es capaz de hacer
- Así, debe permitir a los alumnos con más capacidades profundizar
- El contenido puede mantener un nivel simple, pero debe dar lugar a un alto nivel de razonamiento matemático
- Debe poner en marcha procesos cognitivos más profundos como elaborar hipótesis, predecir, demostrar, comprobar, etc.

Una buena forma de afrontar un problema de este tipo es emplear el *modelo CPA* a través de tres pasos:

C. Comenzar con una situación concreta en la que los alumnos empiecen a comprender un concepto (pueden apoyarse de materiales manipulativos).

P. En adelante, los alumnos avanzan hacia lo pictórico, a través de representaciones que pueden ser dibujos, imágenes, diagramas (se puede incluir el uso de recursos tecnológicos).

A. Por último, se avanza hacia la abstracción para tratar de comprender lo que subyace, es decir, el significado del concepto en sí mismo.

Se pueden encontrar infinitud de tareas y problemas de este tipo en diversos blogs y páginas webs (*ver Anexo II, p. **64***).

Dan Meyer y su método "Matemáticas en tres actos"

Así, una propuesta contraria a los problemas repetitivos anteriores sería involucrarse en su formulación y redefinir su naturaleza tratando de favorecer el razonamiento matemático de los alumnos y provocando a su intuición. Para combatir los prejuicios sobre los problemas con los que cuentan sus alumnos, Dan Meyer da una serie de consejos:

1. Usar recursos tecnológicos para acercarse a la realidad
2. Promover la intuición del alumnado
3. Formular una pregunta corta que inicie el debate
4. Permitir que los alumnos construyan el problema
5. Intervenir menos en favor de los alumnos

Su propuesta consiste en presentar a su alumnado problemas que activen su reflexión, que les sugiera otras preguntas y la necesidad de darles respuesta. La metodología que emplea en sus clases sigue tres actos:

1. Presentación de la situación del problema (cuanto más llamativa e interesante mejor). No se aportan datos. Solo se busca que los alumnos comiencen a pensar en distintas estrategias de resolución y formulen las primeras preguntas.
2. Búsqueda de la solución a partir de las preguntas planteadas. En vez de ofrecer los datos del problema directamente, se fuerza a los alumnos a reclamarlos.
3. Presentar y corroborar la solución. Se inicia una discusión a modo de síntesis.

Para llevar a cabo su metodología, formula problemas nuevos y adapta otros que encuentra en los libros de texto (*ver Anexo I, p. 62*).

Cecilia Calvo y la necesidad de hacer buenas preguntas

Cecilia Calvo, profesora de matemáticas de Barcelona, ha dedicado sus últimos años a la formación de maestros y profesores, además de colaborar en la creación del blog *Puntmat* y en la propuesta del proyecto actual *Innovamat*. En su práctica docente, una de sus mayores preocupaciones ha sido la necesidad de aprender a formular buenas preguntas que faciliten que sus alumnos puedan construir su conocimiento:

"Para que los alumnos se planteen preguntas no solo hace falta plantear situaciones suficientemente abiertas que les den lugar, sino que los maestros debemos ser conscientes de nuestro papel como modelos en este sentido".

Una buena manera de incluir preguntas en el aula de matemáticas es a través de la resolución de problemas. Una posibilidad para ello es planificar qué preguntas hacer, pero la experiencia juega también un papel fundamental.

Presenta tres diferentes situaciones sobre las que hacer preguntas e invitar a reflexionar a los alumnos:

1. Preguntas que provoquen que los alumnos descubran propiedades, a partir de la manipulación con casos concretos.
2. Preguntas que permitan relacionar algoritmos complejos con su sentido real. El empleo de un algoritmo no deja de ser un acuerdo para realizar una operación o un procedimiento concreto.
3. Preguntas que se puedan ajustar a las necesidades de cada uno dentro de tareas pensadas para practicar a partir de un mismo enunciado inicial donde cada uno pueda darle un enfoque personal.

Se pueden encontrar algunas actividades propuestas por ella en el Anexo I (*p.* ***63***).

Problemas abiertos (con varias soluciones)

Se define problema abierto como aquel que admite varias soluciones. A partir de un mismo problema, los alumnos pueden desarrollar recorridos distintos según su nivel o dentro del mismo itinerario profundizar más o menos.

Es una variante de los problemas anteriores, bajo la condición de que se admitan soluciones diferentes.

¿Cuál no pertenece al grupo?

Which one doesn't belong? es una página web de gran interés que ofrece multitud de fichas para desarrollar la capacidad de razonamiento de los alumnos. Cada ficha está formada por cuatro imágenes y la intención es buscar argumentos por las que cada una de ellas no pertenece al grupo que forman las demás. Algunas son sobre figuras, otras sobre números o letras, gráficas, ecuaciones, imágenes reales, etc.

Es una tarea claramente abierta en la que se admiten todo tipo de respuestas y cada uno puede presentar sus propios argumentos para excluir una de las cuatro imágenes. Este tipo de actividades permite la participación de todos a distintos niveles por lo que pueden plantearse debates en clase que promuevan la capacidad de los alumnos a hablar sobre matemáticas con cierto rigor.

Se pueden ver algunos ejemplos de esta página web en el *Anexo II (p.**66**).*

Problemas multinivel (vías de solución abiertas)

Por último, se entiende como problema multinivel aquel que ofrece diferentes formas de alcanzar una misma solución. Es decir, se parte de un principio cerrado y se trata de alcanzar una respuesta única, pero hay múltiples maneras de llegar a ella a partir de diferentes estrategias y razonamientos.

Como hemos visto los libros de texto incluyen algunos problemas que pueden ser tratados bajo un enfoque multinivel, el problema es que en los libros en particular y en las aulas en general se trabajan los contenidos de manera muy compartimentada entre cursos y dentro de un mismo nivel. La evaluación raramente es continua y aunque se han mostrado las posibles estrategias que podrían emplearse para resolver un problema sencillo de álgebra, en la realidad se espera que el alumno plantee una ecuación a partir de la traducción a lenguaje algebraico de unos datos y unas relaciones, y las resuelva. Todo lo que no sea eso se calificará como no válido.

Proyecto Newton Matemáticas para la vida por la SCPM

El proyecto Newton nace a partir de las pruebas Pisa del año 2011, en las que los resultados de Canarias fueron negativos y se decide actuar en consecuencia. El objetivo del proyecto fue generar un cambio y se decidió trabajar a partir de la resolución de problemas como eje metodológico principal para potenciar el razonamiento, la conexión entre contenidos y la reflexión, y trabajar así la competencia matemática.

Basándose en las cuatro fases del modelo de resolución de problemas de Polya, establecen las suyas propias que son comprender, pensar, ejecutar y responder. El objetivo principal es desarrollar la capacidad de emplear las matemáticas en diferentes contextos a partir del razonamiento y apoyándose en distintos conocimientos y herramientas. Ofrecen recursos en las que la fase de ejecución del problema es completamente libre, es decir, una vez que el alumno ha comprendido el problema puede llevar a cabo la estrategia que le parezca más evidente o acorde a su nivel.

Matemáticas Singapur

Por último, una última fuente de inspiración para desarrollar problemas inclusivos es la metodología Singapur y, en concreto, el *modelo de barras*.

Esta metodología se basa en el *modelo CPA* de Bruner que ya se ha comentado anteriormente, en que el aprendizaje de los procedimientos y la comprensión de los conceptos deben trabajarse paralelamente, en la variedad de representaciones, es decir, ofrecer diferentes puntos de vista y en el aprendizaje construido a partir de la zona de desarrollo próximo.

Una de las herramientas más potentes es el *modelo de barras.* Se introduce en Educación Primaria para trabajar problemas aritméticos. Algunos de estos problemas son los mismos que trabajan con dificultad los alumnos de Secundaria en las aulas españolas. Consiste simplemente en representar la información del problema a través de rectángulos, ya sean barras físicas o dibujos que las representen. La longitud de las barras representa las cantidades y el objetivo es descubrir de manera intuitiva qué operaciones hay que hacer para poder dar con la solución del problema. Se trata de una herramienta de pensamiento visual que facilita ver qué dificultades muestra el alumno en la comprensión del problema (Ramos, 2019).

El modelado de barras aporta una estrategia intuitiva para trabajar muchos problemas que estamos acostumbrados a resolver solo con álgebra a partir de un cierto momento. Sobre todo, es útil en los problemas de comparación, para representar los datos y las relaciones existentes entre ellos a través de un modelo muy visual, en problemas de fracciones y porcentajes, y para dar la introducción al lenguaje algebraico.

En el *Anexo II (p.**66**)* se indican algunos recursos donde encontrar problemas que puedan resolverse con diferentes estrategias.

Síntesis sobre los tipos de problemas

Recapitulando sobre los tipos de problemas que se han diferenciado en el trabajo, destaca la abundancia de problemas similares que se repiten en los libros de texto y se implementan en las secuencias didácticas casi siempre al final con el fin de "afianzar" contenidos.

En contraposición a los anteriores, se ha pretendido a través de distintos ejemplos de problemas en su mayoría contextualizados, mostrar como puede tratarse la resolución de problemas bajo un nuevo enfoque metodológico a través de la resolución de problemas. Hemos visto como algunos de los problemas que se emplean en las aulas podrían tratarse de manera multinivel si se dispusiera de una organización más flexible del currículo. Además, diversos profesores proponen nuevas perspectivas para emplear problemas (y además las comparten gracias al uso de la tecnología), a través de lo que se ha denominado problemas variados que buscan promover la reflexión y el razonamiento de los alumnos a través de tareas distintas que no tengan que adherirse necesariamente a unos contenidos concretos. De igual manera, también se ha hablado de problemas abiertos como aquellos que admiten varias soluciones o respuestas adecuadas al nivel de cada alumno, poniendo el foco en lo que conocen y no en sus carencias.

<table>
<tr><th></th><th>TIPO DE PROBLEMAS</th><th>Dónde aparecen</th><th>Intención buscada</th><th>Cantidad</th></tr>
<tr><td></td><td>REPETITIVOS</td><td>Libro de texto, aulas</td><td>Practicar técnicas ya vistas bajo un contexto</td><td>Muchos</td></tr>
<tr><td rowspan="3">INCLUSIVOS</td><td>RICOS O VARIADOS</td><td>Blogs, páginas webs</td><td>Reflexionar sobre el proceso, razonar.</td><td>Pocos</td></tr>
<tr><td>ABIERTOS</td><td>Blogs, páginas webs</td><td>Formular diferentes respuestas según nivel</td><td>Pocos</td></tr>
<tr><td>MULTINIVEL</td><td>Blogs, páginas webs, libro de texto</td><td>Ofrecer varias vías para alcanzar una solución</td><td>Normal</td></tr>
</table>

Tabla resumen de los tipos de problemas que se han diferenciado

Se da por terminada esta indagación sobre cuál es el estado actual de la resolución de problemas con una cita de Einstein.

"La mera formulación de un problema es mucho más esencial que su solución, que puede ser simplemente una cuestión de habilidad matemática o experimental. Plantear nuevas preguntas, nuevas posibilidades, considerar viejos problemas desde un nuevo ángulo requiere imaginación creativa y marca avances reales en la ciencia".

IV. PROPUESTA DIDÁCTICA: BATERÍA DE PROBLEMAS

CONTEXTO

Es preciso indicar que, en el momento de realización del presente trabajo, se encuentran vigentes algunos de los nuevos documentos oficiales que desarrollan la nueva ley de educación pero que no entrarán en vigor en la práctica hasta el próximo curso y, por tanto, a expensas de más información detallada sobre el currículo de educación secundaria, se justifica el empleo del *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato* para relacionar los problemas con los posibles contenidos del curso. No obstante, una de las características de los problemas que se van a plantear a continuación es su flexibilidad en cuanto a la metodología y no es prioritario definir sus contenidos según su dificultad y asociarlos a un curso en concreto, por lo que no supone ningún inconveniente.

El objetivo de todo lo expuesto anteriormente era poder justificar la creación de una pequeña batería de problemas con unas características concretas para trabajar algunos de los contenidos de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria. Varios de los problemas podrán aplicarse a su vez en Educación Primaria según qué estrategias se lleven a cabo.

Además, estos problemas tratarán de relacionarse con temas que puedan ser del interés para alumnos de edades comprendidas entre los 12 y 16 años, con el fin de conectar el aprendizaje de matemáticas con su vida real. Si bien, aproximarnos al interés de todos los alumnos es complicado, sí será esencial que el contexto de los problemas sea del conocimiento de todos ellos, evitando formular enunciados con información que dificulte el entendimiento de estos afectando a cómo los alumnos van a enfrentarse a ellos.

Con todo lo visto hasta aquí, se cree que trabajando los problemas en grupos de cuatro se dará la posibilidad de que los alumnos compartan ideas y ayudará a aquellos que puedan estar inicialmente más limitados a aproximarse a los problemas. Así mismo se cree conveniente realizar un debate general de la clase para la puesta en común de diferentes planteamientos llevados a cabo en la que todos puedan participar y aportar ideas nuevas.

BATERÍA DE PROBLEMAS

Los problemas y tareas que se exponen a continuación son de creación personal a partir de las ideas expuestas a lo largo del trabajo y bajo la influencia de los problemas seleccionados como referentes en el tema.

Se indicará para cada uno un enunciado, el tipo de problema que representa, los contenidos que se pueden trabajar y los objetivos que persigue. Se anexarán variaciones, estrategias e indicaciones para su resolución, siempre con la idea de que todas las soluciones argumentadas tienen la misma validez y con la posibilidad de que pueda haber nuevas maneras de dar con la solución que serán siempre bienvenidas.

Para los problemas multinivel (1-5) el alumno deberá conocer las distintas estrategias que se pueden llevar a cabo y saber elegir cuál es más eficaz según el problema y su nivel, los posibles diagramas o representaciones para organizar la información y sus ventajas, y estar abierto a nuevos caminos que sean igual de válidos. El resto de los problemas (6-10) se apoyarán en preguntas que potencien la reflexión y el razonamiento de los alumnos.

Para facilitar que el alumnado se familiarice con la metodología general puede ser de ayuda al principio apoyarse sobre una ficha de resolución de problemas. Se ha creado una ficha para los problemas multinivel y otra para los variados (*ver Anexo III, p. **69***).

Índice de problemas

Problema 1 | Redes sociales

Enunciado

Este año la clase de 1º ESO A está formada por 27 alumnos.
18 de ellos tienen un perfil abierto en TikTok y 13, en Instagram. Solamente, hay 5 alumnos que no tengan ninguna de estas dos redes sociales.
¿Cuántos de los alumnos tienen perfil en ambas redes?

Tipo de problema

Problema Multinivel

Objetivos

→ Buscar la comprensión y la reflexión de los alumnos, evitando la repetición sistemática de algoritmos.
→ Aportar un contexto que pueda llamar la atención del alumnado.
→ Adaptarse a distintos niveles (dentro de un mismo curso y entre cursos).
→ Ofrecer posibilidades en forma de estrategias de resolución.
→ Reflexionar sobre las estrategias: ¿Cuál eligen los alumnos? ¿Cuál es más eficiente según el problema? ¿En qué diagramas se apoya?

Contenidos y estrategias

Es un problema aritmético sencillo con números naturales, que podría aplicarse por sus contenidos desde mitad de primaria hasta los primeros cursos de educación secundaria. Por el contexto elegido, está orientado hacia estos últimos cursos. No obstante, si se desea plantearlo en primaria sería conveniente cambiar el contexto, por ejemplo, poner como condición dos actividades extraescolares.

El nivel más básico de resolución implicaría la estrategia de modelización utilizando a los propios alumnos o con representaciones gráficas sencillas y el más elevado, la codificación algebraica, reservada para los alumnos de secundaria. Otras posibles estrategias serían ensayo-error u, organizar la información a partir de un diagrama parte-todo o llevar a cabo un razonamiento aritmético mediante una tabla de doble entrada.

→ *Apuntes sobre el problema 1 (Anexo IV, p.73)*

Problema 2 | Derrotas y victorias

Enunciado

En la temporada 2021/2022, el Real Madrid se proclamó campeón de la liga española, concediendo tan solo 4 derrotas en las 38 jornadas disputadas. En total alcanzó los 86 puntos para terminar en lo más alto de la clasificación. Sabrías decir:

- *¿Cuántos partidos ganó?*
- *¿Podría haber alcanzado esa puntuación con otro número de victorias?*

(Nota: En el campeonato de liga se conceden 3 puntos por la victoria, 1 en caso de empate y ningún punto por la derrota).

Tipo de problema

Problema Multinivel

Objetivos

→ Buscar la comprensión y la reflexión de los alumnos, evitando la repetición sistemática de algoritmos.

→ Aportar un contexto que pueda llamar la atención del alumnado.

→ Adaptarse a distintos niveles (dentro de un mismo curso y entre cursos).

→ Ofrecer posibilidades en forma de estrategias de resolución y reflexionar sobre las mismas.

Contenidos y estrategias

Es un problema aritmético sencillo con números naturales, que podría aplicarse por sus contenidos desde mitad de primaria hasta los primeros cursos de secundaria. El contexto es adecuado para cualquier curso.

El nivel más básico de resolución implicaría la estrategia de modelización a partir de objetos físicos o con representaciones gráficas sencillas y el más elevado, la codificación algebraica, reservada para los alumnos de secundaria. Otras posibles estrategias serían ensayo-error u, organizar la información a partir de un diagrama parte-todo o llevar a cabo un razonamiento aritmético mediante una tabla simple.

→ *Apuntes sobre el problema 2 (ver Anexo IV, p.76)*

Problema 3 | Contra Bolt nunca es suficiente ventaja

Enunciado

En 2009, Usain Bolt estableció en los mundiales de atletismo celebrados en Berlín, un récord en la carrera de 100m, pulverizando en 11 centésimas los 9.69s que había establecido él mismo en los Juegos Olímpicos de Japón un año antes. Tras su retirada en 2017 es posible que aun corra los 100m en torno a los 10s. Una persona normal puede recorrer los 100m en 15s, es decir, si retara al actual Bolt cuando él cruzase la meta todavía le quedarían por recorrer ¡más de 30 m! Para poder competir contra el mejor corredor de todos los tiempos, se da la posibilidad de que Bolt empiece a correr desde antes de la línea de salida. ¿Cuál debería de ser esta distancia (m) de ventaja como mínimo?

Tipo de problema

Problema Multinivel

Objetivos

- → Buscar la comprensión y la reflexión de los alumnos, evitando la repetición sistemática de algoritmos.
- → Adaptarse a distintos niveles (dentro de un mismo curso).
- → Ofrecer posibilidades en forma de estrategias de resolución y reflexionar sobre las mismas.
- → Probar si los alumnos saben discernir datos relevantes de los que no los son.
- → Dar a conocer información sobre uno de los atletas más importantes de la historia a unos alumnos que no vivieron de manera directa sus logros.

Contenidos y estrategias

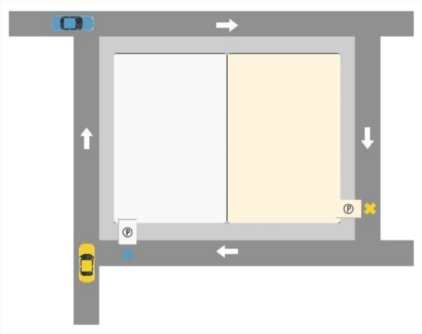
Es un problema de movimiento contextualizado que se puede relacionar con la asignatura de física al tratar con velocidades. Por tanto, se recomienda su uso en 3º y 4º de la ESO, pero se podría ver también en cursos anteriores a partir del uso del razonamiento proporcional.

Para su resolución, puede emplearse cualquiera de los métodos de resolución básicos.

→ *Apuntes sobre el problema 3 (ver Anexo IV, p.79)*

Problema 4 | A vueltas con la manzana

Enunciado



A la salida de clase de inglés la madre de Marcos le recoge en su coche azul y al volver a casa por el camino más cercano tiene la mala suerte de tener que dar toda la vuelta a la manzana, para poder entrar al garaje. Lo mismo les pasa a los padres de Paula, que después de recogerla de natación con su nuevo coche amarillo tienen que rodear la manzana para meterlo en su garaje. Mientras el coche azul recorre 84m, el coche amarillo tiene que hacer 78m para alcanzar sus respectivos garajes desde la situación que indica la imagen.

¿Cuál es el perímetro de la dichosa manzana?

Tipo de problema

Problema Multinivel

Objetivos

- → Buscar la comprensión y la reflexión de los alumnos, evitando la repetición sistemática de algoritmos.
- → Adaptarse a distintos niveles (dentro de un mismo curso y entre cursos).
- → Ofrecer posibilidades en forma de estrategias de resolución y reflexionar sobre las mismas.
- → Probar si los alumnos saben discernir datos relevantes de los que no los son.

Contenidos y estrategias

Es un problema aritmético en el que aparecen cuestiones básicas de geometría, que podría aplicarse por sus contenidos desde mitad de primaria hasta los primeros cursos de secundaria. Se podría cambiar el contexto y los datos, o trabajar con números decimales.

Se puede resolver por todas las estrategias básicas vistas, desde modelización hasta codificación algebraica.

→ *Apuntes sobre el problema 4 (ver Anexo IV, p.**82**)*

Problema 5 | Secretos a voces

Enunciado

María tiene un secreto que comparte durante la primera hora de la mañana con sus dos mejores amigos. Al cabo de una hora, estos les cuentan el secreto a otras dos personas de su círculo cercano, y estas a su vez lo harán en la siguiente hora a otra pareja de personas. Si el secreto corre de unas personas a otras a este ritmo y en clase de María son 28 compañeros, ¿a qué hora de la mañana conocerán todos el contenido de su secreto?

Tipo de problema

Problema Multinivel

Objetivos

- → Buscar la comprensión y la reflexión de los alumnos.
- → Promover el razonamiento lógico, que el alumnado haga predicciones y que compruebe la veracidad de las mismas.
- → Adaptarse a distintos niveles (dentro de un mismo curso y entre cursos).
- → Ofrecer posibilidades en forma de estrategias de resolución y reflexionar sobre las mismas.

Contenidos

Es un problema de aritmética que se puede tratar por su contexto desde cursos de primaria mediante la propia representación de la situación con los alumnos, hasta 3º ESO formalizando la situación a partir de una sucesión.

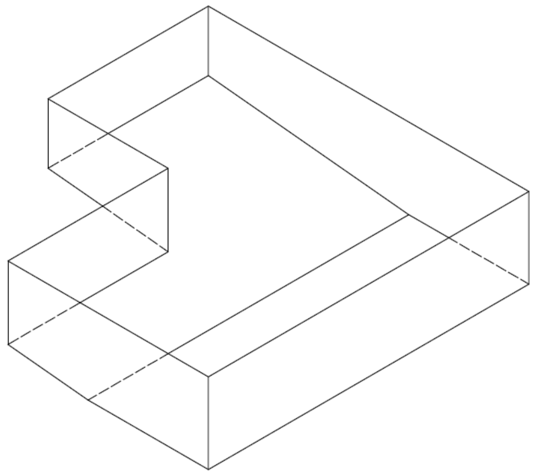
Se pueden trabajar series de manera sencilla con ejemplos cotidianos para que los vayan aproximándose a la idea en sí, antes de tratar de generalizar estas regularidades a partir de fórmulas. Lo único que tienen que saber es sumar, multiplicar y observar, y razonando, podrán dar con la solución.

→ *Apuntes sobre el problema 5 (ver Anexo IV, p.**85**)*

Problema 6 | Reformulando un clásico

Enunciado

El dueño de una piscina ha decidido que quiere pintarla para el próximo verano. Si la piscina está llena hasta arriba, ¿cuánto tiempo le llevará pintarla?



Tipo de problema

Problema Rico o Variado

Objetivos

Con este problema se busca cambiar el enfoque sobre clásico problema de geometría que pide calcular el área y/o el volumen de una piscina o de un depósito y que aparece en casi todos los libros. A partir de una pregunta que parece que poco tiene que ver con los datos que ofrece el problema, la intención es iniciar un debate sobre qué es lo que puede afectar a la cuestión que se plantea y que sean los alumnos los que vayan construyendo los pasos del problema para facilitar su comprensión y no el propio enunciado o los datos que se ofrecen en el texto.

Contenidos

Los contenidos se sitúan en el bloque de geometría, en concreto en el cálculo de áreas y de volúmenes de cuerpos en situaciones contextualizadas. Por las características de la piscina sería un problema avanzado para 3º ESO y adecuado para 4º. Con una simplificación de la piscina (eliminando la rampa, por ejemplo) podría ser apropiado para 2º ESO.

→ *Apuntes sobre el problema 6 (ver Anexo IV, p.88)*

Problema 7 | El sentido de los polinomios

Enunciado

Instrucciones:

1. En grupos, elegir un cuerpo geométrico para construir una caja en la que meter cosas. Se recomienda construirla. Es importante que todos los lados midan un número natural de centímetros. Cada caja puede tener forma distinta según el nivel que se quiera alcanzar: cubo, prisma de base cuadrangular, ortoedro…
2. Calcular su área o su volumen. *¿Qué pasaría si duplico cada uno de los lados?*
3. Modificar el tamaño de la caja: aumentar o reducir los lados de diferentes formas. *¿Cuál es ahora el volumen de la caja? ¿Y el área de sus caras?*
4. Si se quiere obtener un volumen concreto. *¿Cuánto han de variar los lados?*
5. Si, en cambio, se desea que el fondo sea de una medida concreta. *¿Cómo debería modificarse la caja?*

(Materiales: cartón o papel, pegamento, celo, tijeras)

Tipo de problema

Tarea Rica o Variada

Objetivos

Con esta tarea se pretende que los alumnos trabajen polinomios sobre una situación concreta, para que puedan operar con ellos o factorizar dentro de un ejemplo real, y así acercarles estos contenidos que siempre se presentan de una forma muy abstracta. Además, la tarea permitirá reflexionar sobre otras cuestiones como las igualdades notables o extrapolar el razonamiento proporcional a dos y tres dimensiones.

Contenidos

Para poder enfrentarse a este problema será recomendable que los alumnos sepan operar polinomios correctamente y, calcular el área y el volumen de cuerpos geométricos sencillos. Los contenidos concretos son los referidos a operación con polinomios y factorización. Por lo tanto, este ejercicio se adecúa a 3º y 4º ESO y se puede graduar su dificultad en función de la situación de cada alumno.

→ *Apuntes sobre el problema 7 (ver Anexo IV, p.**91**)*

Problema 8 | ¿Cuánto mide la clase?

Enunciado

Fase 1: Midiendo la clase.

Observa atentamente la clase en la que te encuentras. *¿Cuánto mide el aula?*

Fase 2: La clase sobre el papel.

Debate sobre cómo trasladar las medidas al papel.

¿Serías capaz de dibujarla de manera proporcionada sobre el papel?

Fase 3: Una vez dibujada el aula, dibuja tu distribución ideal de la misma (puedes situar el mobiliario como quieras).

(Materiales: metro o cinta métrica, papel cuadriculado, regla o escalímetro)

Tipo de problema

Tarea Rica o Variada

Objetivos

Con esta tarea se pretende acercar a los alumnos al concepto de escala a partir de la visualización, medición, estimación y representación de los elementos que componen el aula. La intención no es que repliquen el aula en el papel de manera exacta, sino que se familiaricen con lo que es una escala a partir de razonamiento proporcional. Además, pueden plantearse otras tareas de geometría sobre lo representado como cálculo de áreas o volúmenes.

Con la última fase se busca aumentar la motivación de los alumnos frente a la actividad, pudiendo tener en cuenta sus ideas o dar pie a realizar una reflexión grupal sobre cómo organizar el aula de manera adecuada.

Contenidos

Para poder enfrentarse a este problema será recomendable que los alumnos dominen las unidades de medida y conceptos geométricos muy básicos. Aunque, por lo general, se introduce el concepto de escala en 2º, el nivel de la actividad podría ser válido en 1º a partir de un razonamiento proporcional, sin formalizar el significado de escala.

→ *Apuntes sobre el problema 8 (ver Anexo IV, p.**94**)*

Problema 9 | Todo es probable

Enunciado

Inventa situaciones en las que se den casos que cumplan las siguientes probabilidades. ¿Se te ocurre alguna más?

$P(A) = 2/5$	$P(KKL) = 1/40 \cdot 1/4 \cdot 3/40$
$P(B) = 1/2$	$P(M \cap N) = 1/3$
$P(C) = 2/7$	$P(OR) = 1/6 \cdot 1/2$
$P(D) = 1/4$	$P(S) = 1/365$
$P(F \cup G) = 5/6$	$P(T \cup U \cup V) = 11/12$
$P(H) = \emptyset$	$P(\overline{W} \cap X) =$
$P(\overline{I}) = 7/12$	$P(Y) = 1$
$P(J) = 19/20$	$P(Z) = 3/2$

Por ejemplo, para P(A) = 2/5:

A: «*Comprar* una vocal cerrada en la ruleta de la suerte» A = {i, u} E = {a, e, i, o, u}

(Nota: pueden crearse todas las situaciones que se quiera, pero para una misma situación pueden crearse casos que encajen con varias probabilidades)

Tipo de problema

Tarea Abierta

Objetivos

Con este problema se trata de invertir la situación en la que el enunciado plantea casos sobre ciertas situaciones de las que se tienen que calcular las probabilidades correspondientes. Se busca que, a partir de ciertas probabilidades, sea el alumno el que proponga casos dentro de contextos reales que las cumplan, ajustándose a su nivel y sus posibilidades.

Contenidos

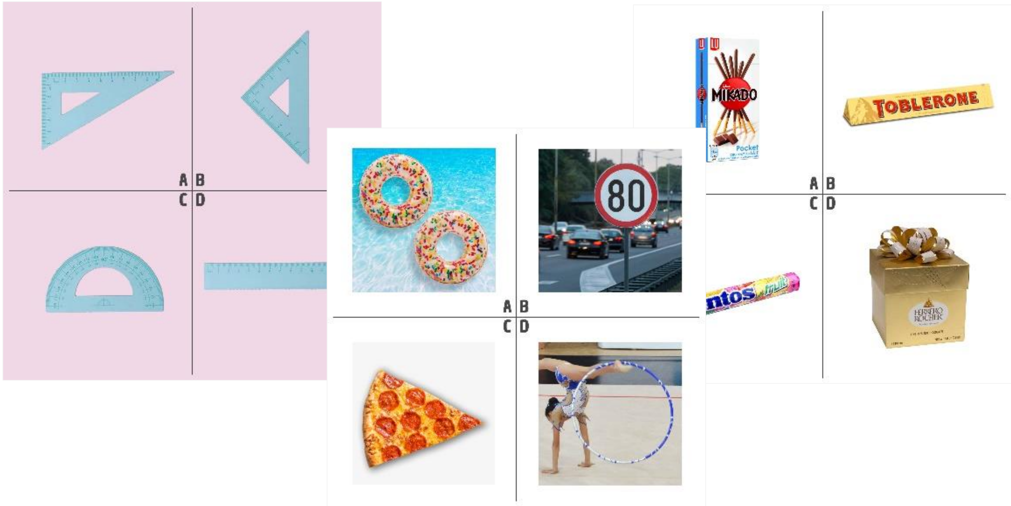
Los contenidos de probabilidad están incluidos en los cursos pares de educación secundaria. Se podrán incluir probabilidades sobre experimentos sencillos o sobre sucesos compuestos sencillos sobre dos experimentos simultáneos o consecutivos.

→ *Apuntes sobre el problema 9 (ver Anexo IV, p.97)*

Problema 10 | Diferentes e iguales

Enunciado

¿Cuál de las cuatro imágenes no pertenece al grupo que forman las demás? Presenta tus argumentos.



Tipo de problema

Problema Abierto

Objetivos

Con estas fichas se trata de que los alumnos aprendan de la importancia de esclarecer similitudes y diferencias entre los distintos elementos que puedan aparecer en cualquier ámbito de estudio tanto de las matemáticas como de cualquier otro objeto, para alcanzar un nivel mayor de comprensión. También es importante que los alumnos hablen de matemáticas para mejorar su expresión y hablar con mayor rigor.

Contenidos

Estas fichas están orientadas al bloque de geometría. Las dos primeras son de geometría plana, de las relaciones y las propiedades de las figuras de las imágenes, y están orientadas para 1º ESO, pero también se podrían utilizar para últimos cursos de primaria mediante el empleo de un lenguaje más simple. La última ficha contiene geometría en el espacio que generalmente se empieza a ver en 2º ESO.

→ *Apuntes sobre el problema 10 (ver Anexo IV, p.99)*

V. CONCLUSIONES

Se concluye el trabajo con la impresión de haber expuesto suficientes motivos como para tratar de responder al reto de la diversidad del alumnado presente en cualquier aula educativa a través de prácticas y metodologías flexibles, acordes a las características de nuestros tiempos y siendo consciente de la implicación y el esfuerzo que conlleva.

Aunque el margen de maniobra del profesorado tenga sus limitaciones frente a las políticas educativas y los currículos sobredimensionados de contenidos en los que ha primado con demasiada frecuencia lo cuantitativo frente a lo cualitativo, cada profesor es el responsable en última instancia de lo que sucede en su aula y puede elegir si responder a las múltiples necesidades de sus alumnos desde un marco común pero flexible o no implicarse.

La propuesta didáctica elaborada se ha basado en el convencimiento de que en la asignatura de matemáticas los alumnos cada vez razonan menos y se limitan a repetir algoritmos de forma mecánica sin reflexión alguna y escaso entendimiento. Cuando llega la hora de enfrentarse a los problemas de final del tema, enseguida rondan en la cabeza de los alumnos ideas como que ellos no saben resolver problemas o que los problemas son difíciles. Cuando un alumno comienza a enfrentarse a las matemáticas de pequeño, empieza a construir un bagaje personal que le llevará al rechazo de los problemas.

Sin embargo, parece que a través de un poco de sentido común pueda surgir una idea no muy absurda a cerca de que pueda ser más fácil resolver ejercicios aplicados a un contexto en el que los alumnos puedan pensar y aportar ideas que ya conocen, frente a una hoja con números y operadores matemáticos sin ningún tipo de relación con el mundo real. Me queda todavía la duda, tras haber contemplado ideas que nos han mostrado durante el desarrollo del máster junto a otras que he podido investigar por mi cuenta para elaborar el presente trabajo, de porqué se ha perpetuado un aprendizaje completamente desligado del contexto hasta las últimas páginas de los temas de los libros.

A lo largo del trabajo se han defendido diferentes motivos basados en evidencias reales por los que emplear problemas de una manera distinta. Quiero contemplar a continuación parte de mi experiencia durante mi periodo de práctica donde me encontré a alumnos desmotivados y con poca capacidad de trabajo.

Entre otras clases, pude asistir a aquellas en las que los alumnos de primero de Educación Secundaria Obligatoria se enfrentaban con álgebra casi por primera vez. Antes de mi llegada ya habían trabajado operaciones con monomios y traducción a lenguaje algebraico. Estuvimos varias semanas tratando de que aprendieran a resolver ecuaciones de primer grado y, al final, llegaron los problemas. No quiero centrarme en esta pequeña reflexión en los problemas en sí, sino en la compartimentación de los contenidos del currículo. Los alumnos tenían que resolver un problema real a partir de operaciones con letras que todavía no dominaban. Ahora me pregunto que si no podrían haber dado la respuesta a partir de razonamientos aritméticos o de manera intuitiva. Estoy segura de que, si se les plantease un problema análogo a los que aparecían en clase, fuera del aula de matemáticas, sabrían dar una respuesta o al menos se aproximarían a ella.

Parte de los problemas que se han propuesto son multinivel, es decir, permiten que los alumnos los resuelvan de diferentes formas, según el nivel en el que se encuentren a lo largo de un mismo curso o durante toda su etapa educativa. Estos problemas además muestran la relación existente entre los contenidos de matemáticas. Además, también se han incluido otro tipo de problemas, los que se han denominado ricos o variados y una variante de estos cuando no tenían una solución concreta, los problemas abiertos. Con todos ellos se pretende dar lugar a diferentes modos de pensar a partir de situaciones contextualizadas, en las que todos los alumnos tengan algo que aportar desde la reflexión, la conexión con sus ideas previas y sus situaciones personales.

En definitiva, esta es una propuesta personal sobre cómo facilitar la comprensión del alumnado a través de la relación de unos contenidos abstractos con situaciones reales que les permitan comprender conceptos, que se ajusta a los distintos niveles que aparecen en el aula, pero existen otras metodologías y prácticas que conducen hacia esa flexibilidad educativa necesaria para situar la educación dentro de un marco común para todo el alumnado, y en última instancia, el profesor es el qué elige qué camino dar a sus alumnos.

VI. BIBLIOGRAFÍA

Alba, C., Sánchez, J. M., & Zubillaga, A. (2018). *Diseño universal para el aprendizaje (DUA): Pautas para su introducción en el currículo.* EducaDUA. Madrid: Edelvives. Obtenido de https://www.educadua.es/doc/dua/Si%CC%81ntesis-Pautas%20DUA-Adaptado-V-2018.pdf

Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J. M., Giménez, J., & Torra, M. (1998). *Enseñar matemáticas* (2ª ed.). Barcelona: Graó.

Anaya. (2015). *ESO 1, Matemáticas.* Madrid: ANAYA.

Beltrán-Pellicer, P., & Martínez-Juste, S. (2021). Enseñar a través de la resolución de problemas. *Suma, 98,* 11-21.

Calvo, C. (2019). Enseñar matemáticas un compromiso con el oficio de preguntar. *Suma, 92,* 9-15.

Calvo, C. (13 de marzo de 2021). *En la clase de matemáticas, preguntamos para enseñar.* [Diapositiva de PowerPoint] Presentaciones de Google. https://docs.google.com/presentation/d/10C1lK6MMRHAhuhC1J-rbLbedqZZM_8fO3pIigfeY_M4/present?slide=id.g4cfd097844_0_3

Calvo, C. [CREAMAT1] (2021) *Graella numèrica. Cecilia Calvo. 1r ESO* [Vídeo] YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=VBf9UNceOgc&ab_channel=CREAMAT1

Coll, César. (2010). Enseñar y aprender, construir y compartir: procesos de aprendizaje. En C. Coll, *Desarrollo, aprendizaje y enseñanza en la educación secundaria* (1ª ed., págs. 31-62). Barcelona: Graò.

Collicot, J. (1991). Impartir una instrucción multinivel. Estrategias para los profesores de aula. En G. L. Porter, D. Richler, & M. Fullan, *Changing Canadian Schools: Perspectives on disability and inclusion* (A. González del Yerro, Trad., págs. 191-218). North Yotk, Ont: The Roeher Institute.

Comité Español de Matemáticas. (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria.* Obtenido de https://fespm.es/wp-content/uploads/2021/06/Bases-Matematicas-CEMat-mayo-2021.pdf

Díez-Palomar, J., Giménez, J., & García, P. (2007). Una aproximación dialógica de la inclusión en matemáticas en la escuela obligatoria. El caso del razonamiento proporcional. En J. Giménez, J. Díez-Palomar, & M. Civil, *Educación matemática y exclusión* (1ª ed., págs. 147-178). Barcelona: Graò.

García, M. (Julio de 2018). Proyecto Newton. Matemáticas para la vida. *Números, 98,* 45-58.

Giménez, J., Díez-Palomar, J., & Civil, M. (2007). Exclusión y matemáticas. Elementos que explican la investigación actual en el área. En J. Giménez, J. Díez-Palomar, & M. Civil, *Educación matemática y exclusión* (1ª ed., págs. 9-44). Barcelona: Graó.

Gónzalez del Yerro, A. (2021). *Cuadernos de Buenas Prácticas: Hacia la puesta en marcha del currículo multinivel (Cuaderno 1).* Universidad Autónoma de Madrid, Educación.

Madrid: Plena Inclusión. Obtenido de https://www.plenainclusion.org/wp-content/uploads/2021/05/cm_cuarderno_1.pdf

Herranz Prada E. (2021) *Problemas aritméticos* [Diapositivas de PowerPoint]

Herranz Prada E. (2021) *Resolución de problemas* [Diapositivas de PowerPoint]

Matemáticas Newton Canarias (2019). *Estrategias de resolución de problemas* [Diapositivas de PowerPoint]

Matemáticas Newton Canarias. (2020). *Estrategias de resolución de problemas.* Obtenido de https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoescuela/recursosdigitales/2020/04/07/infografia-resolucion-de-problemas/

Meyer, D. (6 de Marzo de 2010). *Math class needs a makeover.* Obtenido de TED: https://www.ted.com/talks/dan_meyer_math_class_needs_a_makeover

Ministerio de Educación. (2011). *Actuaciones de éxito en las escuelas europeas.* Instituto de Formación del Profesorado, Investigación e Innovación Educativa, INCLUD-ED Consortium. Madrid: Secretaría general técnica.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2014). *Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* BOE num.3 de 03/01/2015.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2020). *Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.* BOE num.340 de 30/12/2020.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2022). *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.* BOE num.76 de 30/03/2022.

Omatos, A. (s.f.). *Tareas abiertas*. Obtenido de Ideas y recursos para clase de matemáticas: http://recursosmates.aomatos.com/tareas_abiertas.html

Pólya, G. (1957). Main divisions, main questions. In G. Pólya, *How To Solve It. A New Aspesct of Mathematical Method* (2nd ed., pp. 5-23). New Jersey: Princeton Science Lybrary.

Pozo, J. I. (2010). El aprendizaje de contenidos escolares y la adquisicion de competencias. En C. Coll, *Desarrollo, aprendizaje y enseñanza en la educación secundaria* (1ª ed., págs. 63-84). Barcelona: Graò.

Ramos, P. (2019). *Aritmética para maestros.* Estados Unidos: Lulu.com.

UNICEF. (2017). *Guía para asegurar la inclusión y la equidad en educación.* Obtenido de https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000259592/PDF/259592spa.pdf.multi

Willingham, D. T. (2011). *¿Por qué a los niños no les gusta ir a la escuela?* (B. Jiménez, Trad.) Barcelona: Graó. Obtenido de https://educa.fme.cl/wp-content/uploads/2021/06/%C2%BFPor-que-a-los-ninos-no-les-gusta-ir-al-colegio.pdf

VII. ANEXOS

ANEXO I: IDEAS PARA CREAR PROBLEMAS INCLUSIVOS

De un problema tradicional a un enfoque multinivel

1 Si a un número le sumas su anterior, obtienes 37. ¿De qué número hablamos?

EL NÚMERO ⟶ x

SU ANTERIOR ⟶ $x - 1$

$\boxed{\text{EL NÚMERO}} + \boxed{\text{EL ANTERIOR}} = 37$

i. Resolución mediante álgebra:

Si llamamos *x* al número pedido, el número anterior será *x-1*. Podemos establecer la relación del enunciado mediante la siguiente ecuación:

$$x+(x-1)=37;$$

Operando obtenemos: $2x-1=37;\ 2x=38;\ x=19$

ii. Resolución mediante aritmética:

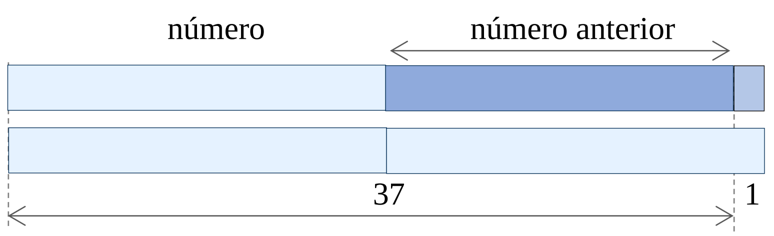
A través de un razonamiento sencillo podemos pensar que si un número y su anterior suman otro número, ese mismo número inicial sumado a él mismo dará como resultado una cifra más. Es decir, el número pedido es (37+1)/2=19

iii. Resolución mediante ensayo-error dirigido:

Número	Número anterior	Suma de ambos
17	16	33 **X**
19	18	37 **V**

Al comprobar la primera hipótesis, la suma es 33 por lo que faltan 4 para llegar a 37. Como se están sumando dos números, el número buscado será dos unidades mayor que 17, es decir, el 19.

iv. Resolución mediante modelado de barras:

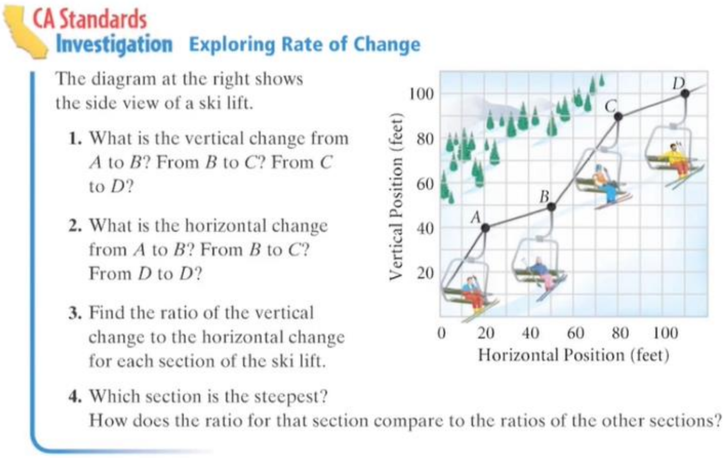


A partir del modelo de barras se ve fácilmente que el número buscado es (37+1)/2=19

→ *Volver al cuerpo del trabajo: pg.* ***38***

Adaptaciones de problemas por Dan Meyer

El siguiente problema está tomado de una conferencia impartida por Dan Meyer el 6 de marzo de 2010.



Problema de investigación sobre el concepto de pendiente, fuente TED.com

Es un problema de investigación con el objetivo de definir qué es la pendiente a partir de un teleférico de esquí. Meyer desgrana el problema en cuatro capas y explica que la combinación de estas provoca la motivación del alumno para resolver el mismo:

1. Una ilustración: la imagen de fondo
2. La estructura matemática: cuadrícula con ejes, escala de medida y leyenda
3. Texto con diferentes pasos: subetapas que componen el problema
4. Una pregunta final

Meyer elimina los pasos y los datos, es decir, la segunda y la tercera capa. Su problema quedaría de la siguiente manera:

Simplificación el problema

Partiendo de la ilustración y la pregunta final se puede argumentar a partir de las propias ideas de los alumnos qué se necesita para alcanzar dicha pregunta. Cuando esto ocurre enseguida se vuelve tedioso hablar de la posición de los distintos teleféricos y la propia lógica del problema pide la estructura matemática, es decir, los alumnos usar letras

(A-D) para referirnos a estas posiciones y unas medidas (datos) que permitan presentar sus argumentos.

De esta manera las matemáticas están al servicio de la conversación de los alumnos y se da paso al razonamiento matemático. A partir de un proceso guiado se consigue que el alumnado pueda asumir el reto razonando qué necesita realmente para dar una contestación a la pregunta inicial.

→ *Volver al cuerpo del trabajo: pg.* ***40***

La importancia de las preguntas por Cecilia Calvo

En la siguiente presentación se muestran tres ejemplos distintos de diferentes bloques de contenido (geometría, numeración y álgebra) que invitan a la reflexión de los alumnos:

preguntamos para enseñar - Presentaciones de Google

Así de los diferentes tipos de problema que había diferenciado, plantea actividades:

1. Para descubrir propiedades:
   - Manipulación con todo tipo de poliedros.
   - Trabajando con la tabla numérica del 100
     https://www.youtube.com/watch?v=VBf9UNceOgc&ab_channel=CREAMAT1
     Esta actividad se basa en preguntas que permiten a todos los alumnos participar en el debate conjunto y, además invitan a profundizar y sacar conclusiones de manera individual. Se divide en tres fases: la presentación de la actividad, la fase de experimento (predicción y comprobación) y una puesta final en la que cada uno saca sus propias conclusiones.
2. Para acordar los algoritmos más eficientes:
   - Algoritmo de la división de números
   - Algoritmo de la división de polinomios
     A partir de dos secuencias razonadas de ambas operaciones, se observa qué información es redundante para obtener el algoritmo final.
3. Preguntas para razonar mientras se practica
   - Resolución de ecuaciones de segundo grado
     Guiar la actividad con preguntas para que los alumnos puedan sacar conclusiones y mejorar su comprensión.

→ *Volver al cuerpo del trabajo: pg.* ***40***

ANEXO II: ENLACES DE INTERÉS

Problemas ricos o variados

1. Proyecto NRICH

El equipo NRICH de la Universidad de Cambridge ha elaborado una web en la que incorpora una gran variedad de tareas ricas de matemáticas que pueden ser útiles tanto a los alumnos como a los profesores. Si bien hay tareas de todo tipo, pueden encontrarse infinidad de problemas distintos a los habituales que favorezcan el razonamiento. La página web en cuestión es:

NRICH - Mathematics Resources for Teachers, Parents and Students to Enrich Learning (maths.org)

Se recomienda dentro de la misma web un artículo interesante sobre la repercusión que puede tener en el alumnado emplear preguntas estimulantes para favorecer su pensamiento matemático. Se dan algunas pautas para formular buenas preguntas y su relación con los niveles de pensamiento y comprensión de la taxonomía de Bloom:

Using Questioning to Stimulate Mathematical Thinking (maths.org)

Antonio Omatos incluye en su blog una recopilación de algunas tareas interesantes que ha encontrado ordenadas por nivel de dificultad:

NRICH y otras hierbas | Ideas y Recursos para la clase de matemáticas (aomatos.com)

2. Visual Patterns

En esta página pueden visualizarse imágenes con patrones de todo tipo. Si bien no son tareas contextualizadas, pueden ser interesantes para trabajar series gráficamente y tratar de encontrar un patrón:

Visual Patterns - 1-20

3. Estimation180

En este caso, esta web creada por Andrew Stadel, nos ofrece diferentes imágenes para que los alumnos comiencen a reflexionar sobre la actividad de estimar.

Estimation 180 – Building Number Sense

4. Blog de Don Stewart

En este blog hay muchos recursos, incluidos problemas, sobre todo tipo de actividades que se puedan realizar en la clase de matemáticas.

MEDIAN Don Steward mathematics teaching .

5. Blog de Dan Meyer

Dan Meyer tiene en su blog personal dy/dan una recopilación de muchas actividades a partir de su modelo *Three-Act Math:*

Dan Meyer's Three-Act Math Tasks - Google Drive

De igual manera Omatos incluye en su blog una recopilación de algunas de sus actividades más interesantes:

Lo mejor de Dan Meyer - Presentaciones de Google

6. Blog Puntmat

PuntMat es un espacio de divulgación de matemáticas de educación secundaria que cuenta con actividades, materiales y reflexiones que pueden ser de gran utilidad.

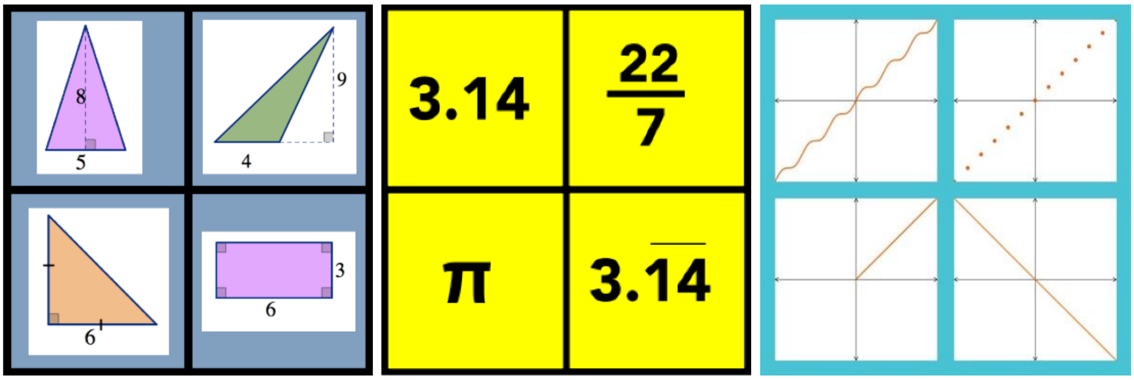
PuntMat: Pràctica productiva: equacions de segon grau

→ *Volver al cuerpo del trabajo: pg.* ***39***

Problemas abiertos

7. Which one doesn`t belong?

WODB? Ofrece multitud de fichas, entre ellas algunas incompletas para que las completen los alumnos. A continuación, se muestra algunos ejemplos de lo que podemos encontrar:



Fichas tomadas de la web de *WODB?*

En cada una de las fichas se puede excluir cada una de las cuatro imágenes por múltiples razones que son más o menos evidentes, pero todos los alumnos podrán dar algún argumento válido acorde a su nivel. Evidentemente algunas de las cuatro opciones muestran más diferencias que otras, pero no se busca una respuesta en concreto, sino que los alumnos debatan, se expresen con rigor y presenten razonamientos adecuados.

Por ejemplo, de la primera ficha se podrían presentar los siguientes motivos:

"*No pertenece al grupo porque es la única que…*"

1. *Tiene un área mayor que 19u^2. Tiene todos sus ángulos agudos.*
2. *Tiene un ángulo cóncavo. Su baricentro "cae" fuera del polígono. No tiene ningún eje de simetría. No tiene ningún lado igual.*
3. *Tiene dos ángulos complementarios.*
4. *No es un triángulo. Sus ángulos suman 360º. Tiene diagonales. Tiene lados paralelos.*

De la segunda figura podrían decir:

"*No pertenece al grupo porque es la única que…*"

1. *Es un número racional exacto.*
2. *Se representa a partir de una fracción. Su valor está por encima del valor de pi.*
3. *Es una letra griega. Representa el valor exacto de pi. No es un número racional.*
4. *Es un número periódico mixto.*

De igual manera, de la última se podría argumentar:

"*No pertenece al grupo porque es la única que…*"

1. *No es constante. Tiene infinitas rectas tangentes.*
2. *No es continua.*
3. *Solo toma valores de x positivos. Toma solo valores de y positivos. No presenta simetría central.*
4. *Es decreciente.*

→ *Volver al cuerpo del trabajo: pg.* ***41***

Problemas multinivel

8. Proyecto Newton

La página web del gobierno de Canarias ofrece un apartado de recursos educativos digitales de gran interés. En el siguiente enlace pueden verse problemas resueltos a partir de diferentes estrategias y materiales sobre resolución de problemas:

https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoescuela/recursosdigitales/?s=problema+newton

Además, Francisco Morales, autor de los vídeos, tiene un blog con un apartado de problemas multinivel:

Resolución de problemas – Recursos de Paco (wordpress.com)

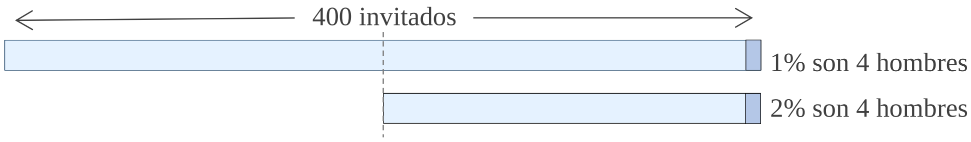
9. Problemas de aritmética de Pedro Ramos

En su libro "*Aritmética para maestros*", Pedro Ramos propone ideas basadas en su experiencia sobre cómo enseñar aritmética en Educación Primaria poniendo el foco en la importancia de la comprensión. A lo largo del libro se plantean diversos problemas aritméticos sobre comparación, fracciones, porcentajes, etc. y todos ellos se resuelven a través del *modelo de barras*. Todos estos problemas se trabajan en Secundaria, en primero todavía desde la aritmética para ir dando paso al álgebra gradualmente.

Pueden emplearse muchos de los problemas del libro para trabajar de manera multinivel. A continuación, incluyo un problema que me gustó resolver en una conferencia que impartió Pedro durante el desarrollo del máster:

"En una fiesta con 400 invitados el 99% son mujeres. ¿Cuántas mujeres tendrían que salir de la fiesta para que el porcentaje de mujeres pase a ser el 98% (Se supone, claro, que el número de hombres no cambia en ese tiempo)". (p.134)

- Resolución mediante modelado de barras:



El 1% de los invitados son hombres, lo que equivale a 4 y, por tanto, hay 396 mujeres. Si estos mismos 4 hombres tienen que representar el 2%, es decir, el doble de los que eran inicialmente respecto del total (y no pueden entrar más hombres a la fiesta) se necesita que el total pase a ser la mitad. Por tanto, tienen que abandonar la fiesta 200 mujeres.

- Resolución mediante álgebra:

Si inicialmente hay *x* mujeres y salen *y* mujeres de la fiesta,

1. Las mujeres que están en la fiesta representan el 99%:

$$\frac{x}{400} = \frac{99}{100}; x = 4 \cdot 99; x = 396 \; mujeres$$

2. Si se marchan y mujeres, representarán el 98% del total:

$$\frac{x-y}{400-y} = \frac{98}{100}; 100(396-y) = 98(400-y);\; y = 200 \; mujeres$$

Se podrían llevar a cabo otras estrategias como ensayo-error.

10. OpenMiddle

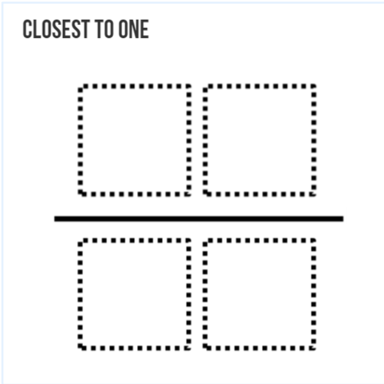
Esta web proporciona distintas actividades que comparten algunas características:

- Tienen un comienzo y final cerrado.

- Cuentan con un medio abierto, es decir, hay múltiples maneras de resolución.
- Aunque solo hay una solución óptima, admite resultados próximos a esta.
- Requieren de mayor reflexión que problemas tradicionales.

A continuación, se van a mostrar dos ejemplos de actividades que podemos encontrar:

Ejemplo 1. La más cercana a uno



Actividad tomada de la web *OpenMiddle*

Enunciado: *Utilizar dígitos comprendidos del 1 al 9 (solo se puede emplear cada dígito una vez) para crear la fracción que más se acerque al 1.*

Pistas: i. *Cuando cambias el denominador, ¿qué ocurre con el total?* ii. *Nombra fracciones que estén muy cercanas a 1. ¿Cómo sabes que están cerca del 1?* iii. *¿Qué está más cerca del 1, 2/3 o 5/6?* Solución: *79/81*

Ejemplo 2. ¿Qué círculo es mayor?

Enunciado: *¿Qué círculo es mayor: uno con un área de 30u2 o uno con una circunferencia de 30u? ¿Cómo lo sabes?*

Pista: *¿Qué información necesitas para comparar dos círculos?*

Posibles procedimientos:

- *Comparar los radios de cada círculo a través de las fórmulas del círculo y de la circunferencia.*
- *Pensar directamente en las fórmulas sin necesidad de hallar los radios. En el área el radio se presenta al cuadrado, lo que provoca que el área aumente más que la circunferencia del mismo radio.*
- *Investigar qué es lo que sucede para un radio de 1u, de 2u, de 3u e intentar prever el resultado.*

Solución: *Es mayor el círculo cuya circunferencia mide 30u.*

→ *Volver al cuerpo del trabajo: pg. 43*

ANEXO III: FICHAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Ficha 1: Resolución de problemas en cuatro fases

Se orienta a los problemas multinivel, a partir de las cuatro fases que se han planteado en el apartado de resolución de problemas:

1. Comprender: obtener los datos del enunciado, el objetivo del problema y todas las posibles relaciones y conexiones entre todos ellos.
2. Pensar: representar los datos obtenidos de distintas formas y analizarlos en búsqueda de la estrategia más conveniente para dar con la solución del problema.
3. Ejecutar: transformar las ideas pensadas en representaciones matemáticas que nos permitan alcanzar la solución.
4. Revisar: conectar de nuevo con el contexto, comprobar si la solución encontrada es adecuada, y dar una respuesta coherente con el problema.

Se aporta así una primera ficha, similar a las que ofrece el *proyecto Newton* a sus alumnos, que pueda servir de ayuda cuando todavía no estén muy familiarizados con la resolución de problemas (p.70).

Ficha 2: Reflexionar para resolver problemas

Para aquellos problemas más ricos que estén más planteados a generar el debate de la clase, a promover la reflexión de los alumnos y facilitar su descubrimiento personal a través de preguntas, puede seguirse un modelo similar al siguiente:

1. Presentación de la situación del problema con la formulación de una pregunta.
2. Debate en grupos: nuevas cuestiones, posibles estrategias, etc.
3. Búsqueda de una solución a partir de las nuevas cuestiones.
4. Corroborar la solución. Discusión a modo de síntesis.

Esta segunda variante está enfocada a las metodologías de Dan Meyer y Cecilia Calvo, buscando enriquecer los problemas a partir de la participación de los propios alumnos en los mismos y generando un ambiente de debate. Se puede buscar una solución concreta o que los argumentos no tengan que conducir a una respuesta fija (problemas abiertos). Puede darse a los alumnos una ficha para que tomen nota de sus ideas y descubrimientos (p. 71).

Para ambas fichas se da una segunda hoja común a las dos para el desarrollo (p.72).

→ *Volver al cuerpo del trabajo: pg.* ***46***

FICHA: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

PROBLEMAS MULTINIVEL

ENUNCIADO

C O M P R E N D E R

01 FASE

DATOS · *lo conocido*
¿Qué me dan?

OBJETIVO · *desconocido*
¿Qué me piden?

RELACIONES

DIAGRAMAS
Tablas, diagramas, representaciones gráficas...

P E N S A R

02 FASE

ANÁLISIS + ELEGIR ESTRATEGIA.

BÁSICAS
- ☐ Modelización
- ☐ Organización de la información
  - ☐ Aritmética
  - ☐ Algebraica
  - ☐ Diagrama Parte-Todo
  - ☐ Representación gráfica
- ☐ Ensayo-Error

AUXILIARES
- ☐ Analogía
- ☐ Simplificación

ESPECÍFICAS
- ☐ ____________

TÁCTICAS

A C T U A R

03 FASE

RAZONAMIENTO.

OTRA HOJA

Enfréntate al problema a través de las estrategias y las tácticas que has elegido, transformando tus ideas a lenguaje matemático

SOLUCIÓN

R E V I S A R

04 FASE

CONECTAR CON EL CONTEXTO.

COMPROBAR LA SOLUCIÓN

¿Hay solución?
¿Puede haber varias?
¿Cumple las relaciones?
¿Tiene lógica?

DAR UNA RESPUESTA
Según el contexto

FICHA: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

PROBLEMAS VARIADOS

ENUNCIADO

PRESENTACIÓN

01 FASE

PREGUNTAS INICIALES.

OBJETIVO· *desconocido*

¿Qué me piden?

DATOS· *conocido o desconocido*

¿Tengo datos suficientes?

¿Qué afecta al objetivo?

RELACIONES

NUEVAS PREGUNTAS

Surgen a partir del debate

DEBATE

02 FASE

CONSTRUCCIÓN DEL PROBLEMA.

SECUENCIA DEL PROBLEMA

NUEVOS DATOS

ACTUAR

03 FASE

RAZONAMIENTO.

OTRA HOJA

Una vez constuido el problema, enfréntate a él transformando tus ideas a lenguaje matemático

POSIBLE SOLUCIÓN

ANÁLISIS

04 FASE

CONECTAR CON EL CONTEXTO

CORROBORAR LA SOLUCIÓN

¿Hay solución?
¿Puede haber varias?
¿Cumple las relaciones?
¿Tiene lógica?

CONCLUSIONES DEL PROBLEMA

FICHA: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

FASE 03: ACTUAR

ANEXO IV: CUESTIONES DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

Problema 1 | Redes sociales

Enunciado generalizado

Se puede generalizar el enunciado para crear otro problema análogo. Se recomienda que sea en un contexto cercano a los alumnos o que se cree a partir de datos reales que aporten ellos mismos.

Este año la clase de (introducir curso) está formada por (número) alumnos. (número) de ellos (condición 1) y (número), (condición 2). Solamente, hay (número) alumnos que no cumplen ninguna de las dos condiciones.
¿Cuántos de los alumnos (cumplen ambas condiciones)?

Posibles estrategias de resolución

Aunque pueda haber alumnos que se sientan más cómodos con unas estrategias a priori más difíciles, se enumeran las estrategias que se van a utilizar por orden de dificultad:

- Modelización: representación gráfica
- Ensayo-Error
- Organización de la información:
    - Diagrama parte-todo
    - Razonamiento aritmético (tabla de doble entrada)
    - Codificación algebraica: sistema de tres ecuaciones

En las páginas siguientes, se da un posible procedimiento de resolución del problema a partir de la ficha creada para los problemas multinivel.

→ *Volver al problema 1 (p.47)*

FICHA: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

PROBLEMAS MULTINIVEL

ENUNCIADO

Este año la clase de 1º ESO A está formada por 27 alumnos.
18 de ellos tienen un perfil abierto en TikTok y 13, en Instagram.
Solamente, hay 5 alumnos que no tengan ninguna de estas dos redes sociales.
¿Cuántos de los alumnos tienen perfil en ambas redes?

01 FASE — COMPRENDER

DATOS · *lo conocido*
¿Qué me dan?

27 alumnos
- 18 perfil TikTok
- 13 perfil Instagram
- 5 ninguna R.S.

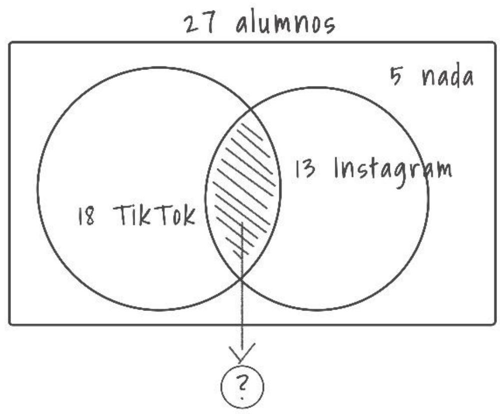
OBJETIVO · *desconocido*
¿Qué me piden?

¿Alumnos con perfil en TikTok y en Instagram a la vez?

Las personas que tienen perfil en ambas redes las estamos contando dos veces: 18+13+5>27

RELACIONES

DIAGRAMAS
Tablas, diagramas, representaciones gráficas...



02 FASE — PENSAR

ANÁLISIS + ELEGIR ESTRATEGIA.

BÁSICAS
- ☒ Modelización
- ☒ Organización de la información
- ☒ Ensayo-Error

- ☒ Aritmética
- ☒ Algebraica
- ☒ Diagrama Parte-Todo
- ☐ Representación gráfica

AUXILIARES
- ☐ Analogía
- ☐ Simplificación

ESPECÍFICAS
- ☐ ____________

TÁCTICAS
Usar tablas, representaciones y codificar algeb.

03 FASE — ACTUAR

RAZONAMIENTO. OTRA HOJA

Enfréntate al problema a través de las estrategias y las tácticas que has elegido, transformando tus ideas a lenguaje matemático

SOLUCIÓN

9+4+9+5=27 ✓

- 9 personas tienen solo TikTok.
- 4 personas tienen solo Instagram.
- 9 personas usan ambas redes sociales.

04 FASE — REVISAR

CONECTAR CON EL CONTEXTO.

COMPROBAR LA SOLUCIÓN

¿Hay solución?
¿Puede haber varias?
¿Cumple las relaciones?
¿Tiene lógica?

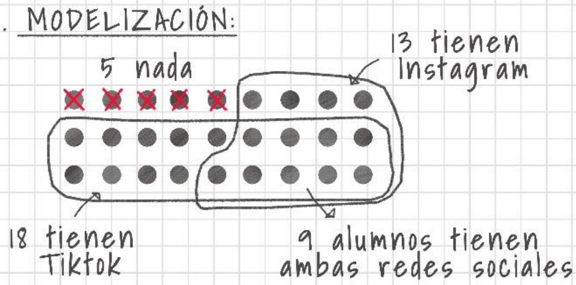
DAR UNA RESPUESTA
Según el contexto

De los 27 alumnos, 9 tienen ambas redes sociales: TikTok e Instagram.

FICHA: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

FASE 03: ACTUAR

I. MODELIZACIÓN:



*Se podría hacer la modelización con los propios alumnos, en vez de usar un dibujo.

II. ENSAYO-ERROR: (T: usa solo TikTok, TI: usa ambas redes, I: usa Instagram)

18 (T + TI) 13 (TI + I)

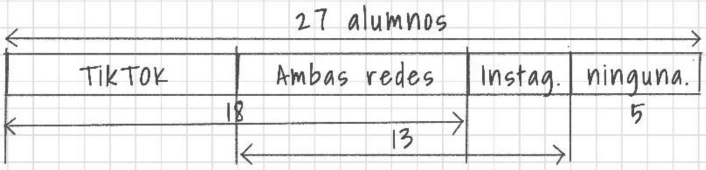
T	TI	I	Total
12	6	7	× 25
10	8	5	× 23
9	9	4	✓ 22
8	10	3	× 21
(18−T)	(13−TI)		(22)

Total → 27−5=22 tienen alguna red social

−2   −2 → ¿T=9? Comprobar

Comprobar si no hay +soluciones

III. ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN: Diagrama Parte-Todo



Del diagrama se deduce que 27−5=22 alumnos tienen redes sociales.
Instagram tienen 22−18=4 alumnos y TikTok 22−13=9 alumnos.
Los que tienen ambas redes son: 18−9=13−4=9 alumnos.

IV. ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN: Razonamiento Aritmético (tabla doble)

1.

		Instagram Sí	Instagram NO	
TikTok	Sí			18
TikTok	No		5	
		13		27

Datos del problema

2.

		Instagram Sí	Instagram NO	
TikTok	Sí			18
TikTok	No		5	9 (27−18)
		13	14 (27−13)	27

3.

		Instagram Sí	Instagram NO	
TikTok	Sí	9	9 (14−5)	18
TikTok	No	4 (9−4)	5	9
		13	14	27

V. ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN: Codificación algebraica

Alumnos con...
T: solo TikTok
I: solo Instagram
TI: ambas redes

$$\begin{cases} T+TI=18 \\ I+TI=13 \\ T+I+TI+5=27; \quad T+\underbrace{I+TI}=22 \end{cases}$$

$T+13=22$; $\boxed{T=9}$

$TI=18-T=18-9=9$; $\boxed{TI=9}$

$I=13-TI=13-9=4$; $\boxed{I=4}$

Problema 2 | Derrotas y victorias

Variantes del enunciado

En el problema se han dado los datos del campeón de la liga 2021/22. A partir de la clasificación general, puede darse el número de puntos y la cantidad del equipo que quieran según sus gustos, y realizar un problema análogo, en el que tengan que descubrir la cantidad de victorias y de empates. En la tabla siguiente se indican los datos:

EQUIPO	PTOS	V	E	D
Real Madrid	**86**	26	8	**4**
Barcelona	**73**	21	10	**7**
Atlético de Madrid	**71**	21	8	**9**
Sevilla	**70**	18	16	**4**
Real Betis	**65**	19	8	**11**
Real Sociedad	**62**	17	11	**10**
Villarreal	**59**	16	11	**11**
Athletic de Bilbao	**55**	14	13	**11**
Valencia	**48**	11	15	**12**
Osasuna	**47**	12	11	**15**
Celta de Vigo	**46**	12	10	**16**
Rayo Vallecano	**42**	11	9	**18**
Elche	**42**	11	9	**18**
Espanyol	**42**	10	12	**16**
Getafe	**39**	8	15	**15**
Mallorca	**39**	10	9	**19**
Cádiz	**39**	8	15	**15**
Granada	**38**	8	14	**16**
Levante	**35**	8	11	**19**
Alavés	**31**	8	7	**23**

Posibles estrategias de resolución

Se enumeran las estrategias que se van a utilizar por orden de dificultad:

- Modelización: no se va a llevar a cabo. Proceso análogo al del ejercicio anterior
- Ensayo-Error
- Organización de la información:
    - Diagrama parte-todo
    - Razonamiento aritmético (tabla simple)
    - Codificación algebraica: sistema de dos ecuaciones

En las páginas siguientes, se da un posible procedimiento de resolución.

→ *Volver al problema 2 (p.**48**)*

FICHA: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
PROBLEMAS MULTINIVEL

ENUNCIADO

En la temporada 2021/2022, el Real Madrid se proclamó campeón de la liga española, concediendo tan solo 4 derrotas en las 38 jornadas disputadas. En total alcanzó los 86 puntos para terminar en lo más alto de la clasificación. Sabrías decir:

-¿Cuántos partidos ganó?

-¿Podría haber alcanzado esa puntuación con otro número de victorias? (ampliación)

(Nota: En el campeonato de liga se conceden 3 puntos por la victoria, 1 en caso de empate y ningún punto por la derrota).

COMPRENDER — 01 FASE

DATOS · *lo conocido*
¿Qué me dan?

- 38 partidos
- 4 derrotas
- 86 puntos

OBJETIVO · *desconocido*
¿Qué me piden?

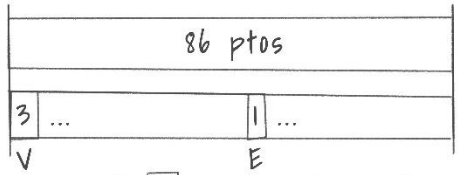
¿Cuántos partidos ha ganado?
Número de victorias

- Si gana el partido, se lleva 3 ptos.
- Si empata el partido, se lleva 1 pto.
- Si pierde el partido, se lleva 0 ptos.

Sumando todos los puntos se obtiene 83.

RELACIONES

DIAGRAMAS
Tablas, diagramas, representaciones gráficas...



número de ☐ : número de partidos

	V	E	D	Total
Partidos	?	?	4	38
Ptos/partido	3	1	0	—
Puntos	?	?	0	86

(V:victorias E:empates D:derrotas)

PENSAR — 02 FASE

ANÁLISIS + ELEGIR ESTRATEGIA.

BÁSICAS
- ☐ Modelización
- ☒ Organización de la información
- ☒ Ensayo-Error

- ☒ Aritmética
- ☒ Algebraica
- ☒ Diagrama Parte-Todo
- ☐ Representación gráfica

AUXILIARES
- ☐ Analogía
- ☐ Simplificación

ESPECÍFICAS
- ☐ ____________

TÁCTICAS
Usar tablas, representaciones y codificar algeb.

ACTUAR — 03 FASE

RAZONAMIENTO. OTRA HOJA

Enfréntate al problema a través de las estrategias y las tácticas que has elegido, transformando tus ideas a lenguaje matemático

SOLUCIÓN

- Ha ganado 26 partidos (78ptos)
- Ha empatado 8 partidos (8 ptos)

26+8+4=38p; 78+8=86ptos ✓

REVISAR — 04 FASE

CONECTAR CON EL CONTEXTO.

COMPROBAR LA SOLUCIÓN

¿Hay solución?
¿Puede haber varias?
¿Cumple las relaciones?
¿Tiene lógica?

DAR UNA RESPUESTA
Según el contexto

El Real Madrid ha ganado 26 partidos en la temporada 2021/2022.

FICHA: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

FASE 03: ACTUAR

I. ENSAYO-ERROR:

Victorias 3pts	Empates 1pt	Total 86pts
28 84pts	6 6pts	34 90pts ×
27 81pts	7 7tps	34 88pts ×
26 78pts	8 8pts	34 86pts ✓
25 75pts	9 9pts	34 84pts ×

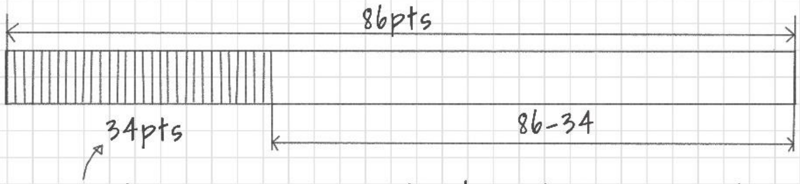
-1

-2 → ¿V=26?

38-4=34 partidos entre empates y derrotas

Comprobar si no hay + soluciones

II. ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN: Diagrama Parte-Todo



Los puntos se suman a partir de victorias y empates. Por cada uno de los 34 partidos restantes, se sumará al menos 1 punto. El resto de puntos se tendrá que alcanzar a partir de victorias (2ptos más). → Victorias: $\frac{86-34}{2} = \frac{52}{2} = 26$

III. ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN: Codificación Algebraica

Número de:

V: victorias

E: empates

D: derrotas (4)

Ecuaciones:

Partidos: $V+E+D=38$; $V+E=34$

Puntos: $3V+1E+0D=86$; $3V+E=86$

$2V=52$; $\boxed{V=26}$ → $E=34-26=8$ $\boxed{E=8}$

IV. ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN: Razonamiento Aritmético (tabla)

Victorias 3pts	Empates 1pt	Derrotas 0pts	38 86pts
28 84pts	2 2pts	8 0	
27 81pts	5 5pts	6 0	
26 78pts	8 8pts	4 0	
25 75pts	11 11pts	2 0	
24 72pts	14 14pts	0 0	
23 69pts	×		

86-69=17pts

Solo quedan 38-23=15 partidos

*Con esta tabla puede resolverse la segunda pregunta del enunciado: se podrían haber conseguido 86 puntos de 5 formas distintas.

$$\begin{array}{r|l} 86 & 3 \\ \hline 26 & 28 \\ 2 & \end{array}$$

Para un total de 86 puntos, como mucho pueden haberse dado 28 victorias.

Se comienza por el máximo de victorias (28) y se van analizando los puntos que faltan para llegar a 86. Los puntos restantes se tendrán que conseguir mediante el mismo número de empates. El resto de partidos que falten hasta llegar a 38, serán derrotas.

Problema 3 | Contra Bolt nunca es suficiente ventaja

Enunciado generalizado

Se puede dar una versión simplificada de este problema en un contexto genérico para los primeros cursos de secundaria. Si bien no tienen nociones de velocidad, sí han empezado a trabajar el razonamiento proporcional.

Dos amigos corren una carrera de 100m y uno de ellos llega a la meta cuando al otro todavía le restan 8m para llegar. El ganador le ofrece la posibilidad de repetir la carrera empezando a correr desde un poco más atrás.
¿A partir de qué distancia, ganaría la carrera el corredor más lento?

Posibles estrategias de resolución

Se enumeran las estrategias que se van a utilizar por orden de dificultas:

- Ensayo-Error
- Organización de la información:
    - Representación gráfica
    - Razonamiento aritmético (tabla): proporcionalidad directa
    - Codificación algebraica: ecuación

En las páginas siguientes, se da un posible procedimiento de resolución.

→ *Volver al problema 3 (p.**49**)*

FICHA: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

PROBLEMAS MULTINIVEL

ENUNCIADO

[...] Tras su retirada en 2017 es posible que Usain Bolt aun corra los 100m en torno a los 10s. Una persona normal puede recorrer los 100m en 15s, es decir, si retara al actual Bolt cuando él cruzase la meta todavía le quedarían por recorrer ¡más de 30 m!
Para poder competir contra el mejor corredor de todos los tiempos, se da la posibilidad de que Bolt empiece a correr desde antes de la línea de salida.
¿Cuál debería de ser esta distancia (m) de ventaja como mínimo?

COMPRENDER — 01 FASE

DATOS · *lo conocido*
¿Qué me dan?

- $t_{Bolt}=10s$
- $t_{Normal}=115s$
- $S=100m$

OBJETIVO · *desconocido*
¿Qué me piden?

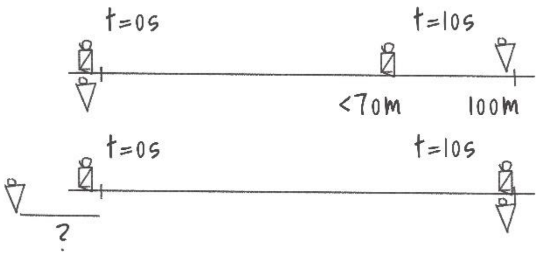
¿Cuánto espacio debe recorrer Bolt para llegar a la vez?

En el espacio pedido, el tiempo será común.
La distancia de Bolt deberá ser >100m.

- $V_{Bolt}=100m/10s$
- $V_{Normal}=100m/15s$

RELACIONES

DIAGRAMAS
Tablas, diagramas, representaciones gráficas...



	Espacio	Tiempo	Velocidad
BOLT	100m	10s	10m/s
PERSONA	100m	15s	6,67m/s

PENSAR — 02 FASE

ANÁLISIS + ELEGIR ESTRATEGIA.

BÁSICAS
- ☐ Modelización
- ☒ Organización de la información
- ☒ Ensayo-Error

- ☒ Aritmética
- ☒ Algebraica
- ☐ Diagrama Parte-Todo
- ☒ Representación gráfica

AUXILIARES
- ☐ Analogía
- ☐ Simplificación

ESPECÍFICAS
- ☐ ____________

TÁCTICAS
Emplear nociones sobre velocidad y representaciones matemáticas.

ACTUAR — 03 FASE

RAZONAMIENTO. OTRA HOJA

Enfréntate al problema a través de las estrategias y las tácticas que has elegido, transformando tus ideas a lenguaje matemático

SOLUCIÓN
La distancia a recorrer por Bolt debe de ser >150m.

REVISAR — 04 FASE

CONECTAR CON EL CONTEXTO.

COMPROBAR LA SOLUCIÓN
¿Hay solución?
¿Puede haber varias?
¿Cumple las relaciones?
¿Tiene lógica?

DAR UNA RESPUESTA
Según el contexto
En una carrera de 100m, la ventaja debe de ser superior a 50m para poder llegar a la meta antes que Bolt.

FICHA: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

FASE 03: ACTUAR

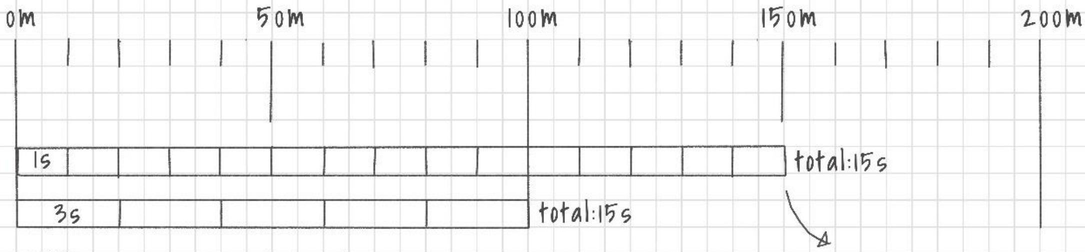
I. ENSAYO-ERROR:

Una persona normal recorre los 100m en 15s.
La velocidad de Bolt es 10m/s.
Bolt tendrá que tardar >15s en recorrer los metros asignados para perder:

Ventaja	Distancia (m)	Tiempo (s)
30 $\xrightarrow{+100m}$	130m $\xrightarrow{t=\frac{s}{v}}$	13s
50	150m	15s
51	151m	15.1s

$$\boxed{V(m/s)=\frac{s(m)}{t(s)}}$$

II. ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN: Representación gráfica



$\boxed{1s}$ En 1 segundo, Bolt recorre 10m.

$\boxed{1s}$ En 1 segundo, una persona normal recorre 6.67m,
→ en 3s, recorre 20m. $\boxed{3s}$

Si una persona tarda 15s en recorrer 100m, ¿cuántos metros corre Bolt en 15s?

III. ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN: Razonamiento aritmético (tabla)

Una persona normal recorre 100m en 15s.
En esos 15s, ¿cuántos metros corre Bolt?

t(s)	1	2	3	4	5	...	10	...	15
s_M	6.67	13.33	20	26.67	33.33	...	66.67	...	100
s_{Bolt}	10	20	30	40	50	...	100	...	150

Prop. Directa (K=V)
K=6,67(m/s)
K=10(m/s)

A Bolt en 15s, le da para recorrer 50m más.

IV. ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN: Codificación algebraica

Siendo x(m) la ventaja que tiene Bolt.

$$V_{Bolt}=\frac{100+x}{t}(m/s) \qquad V_{Normal}=\frac{100}{15}(m/s)$$

Para empatar la carrera los tiempos tienen que coincidir:

$(100+x)(m)=15(s)\cdot 10(m/s)$; $100+x=150$; $\boxed{x=50m}$

Problema 4 | A vueltas con la manzana

Enunciado generalizado

Se puede ajustar el contexto del problema a partir de situaciones muy variadas y cambiar el polígono sobre el que se trabaja. En este problema la manzana tiene forma rectangular y se da información sobre las sumas de algunos de sus lados. También se podría haber dado información de las diagonales para un nivel de dificultad mayor o trabajar con otros polígonos como triángulos.

Posibles estrategias de resolución

Se enumeran las estrategias que se van a utilizar por orden de dificultas:

- Modelización: a partir de una representación gráfica. Se podría hacer de forma manipulativa a través de *policubos*
- Ensayo-Error
- Organización de la información:
    - Diagrama parte-todo
    - Codificación algebraica: sistema de ecuaciones

En las páginas siguientes, se da un posible procedimiento de resolución.

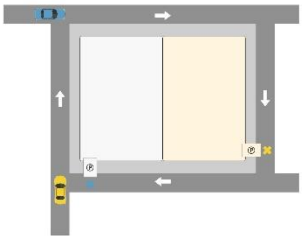
→ *Volver al problema 4 (p.**50**)*

FICHA: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

PROBLEMAS MULTINIVEL

ENUNCIADO

A partir de la situación de la imagen en la que las carreteras solo tienen un sentido de circulación, el coche azul tiene que recorrer 84m para entrar al garaje. Mientras, el coche amarillo debe recorrer 78m.
¿Cuánto mide el perímetro de la manzana?



COMPRENDER

01 FASE

DATOS · *lo conocido*
¿Qué me dan?

Manzana rectangular

Distancias: tres lados

OBJETIVO · *desconocido*
¿Qué me piden?

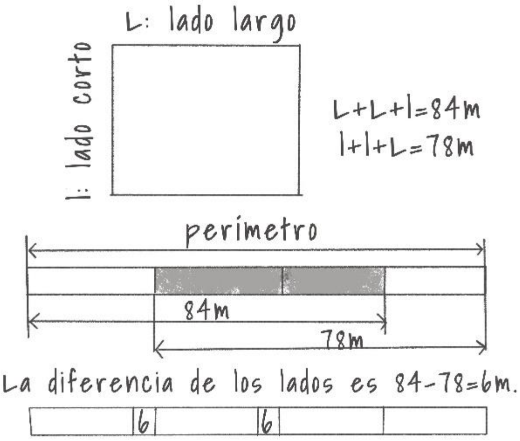
¿Cuánto mide el perímetro de la manzana?

Sumas distintas de tres lados: 84m y 78m.

Caso I: se suman dos lados largos y uno corto.
Caso II: se suman dos lados cortos y uno largo.

RELACIONES

DIAGRAMAS
Tablas, diagramas, representaciones gráficas...



La diferencia de los lados es 84-78=6m.

PENSAR

02 FASE

ANÁLISIS + ELEGIR ESTRATEGIA.

BÁSICAS
- ☒ Modelización
- ☒ Organización de la información
- ☒ Ensayo-Error

- ☐ Aritmética
- ☒ Algebraica
- ☒ Diagrama Parte-Todo
- ☐ Representación gráfica

AUXILIARES
- ☐ Analogía
- ☐ Simplificación

ESPECÍFICAS
- ☐ ____________

TÁCTICAS

Usar tablas, representaciones y codificar algeb.

ACTUAR

03 FASE

RAZONAMIENTO.

OTRA HOJA

Enfréntate al problema a través de las estrategias y las tácticas que has elegido, transformando tus ideas a lenguaje matemático

SOLUCIÓN

El lado largo mide 30m.
El lado corto mide 24m.

30+30+24=84m 30+24+24=78m ✓

REVISAR

04 FASE

CONECTAR CON EL CONTEXTO.

COMPROBAR LA SOLUCIÓN

¿Hay solución?
¿Puede haber varias?
¿Cumple las relaciones?
¿Tiene lógica?

DAR UNA RESPUESTA
Según el contexto

El perímetro de la manzana mide 108m.

FICHA: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

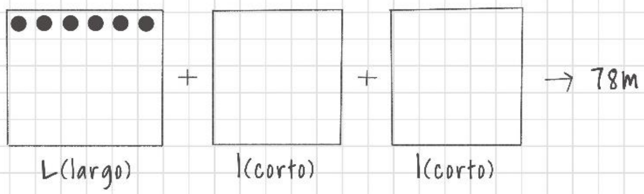
FASE 03: ACTUAR

I. MODELIZACIÓN:

● = 1m

78-6=72m a repartir entre tres → 24m.

El lado largo (L) mide 6m más que el corto (l)



*Si no se deduce del enunciado que la diferencia de los lados es de 6m, puede construirse mediante policubos una tira de 78m y otra de 86m.
↳ Juntándolas se tiene tres veces cada lado. 78+84=162.
↳ La suma de un lado corto y otro largo será 162/3=54.
↳ El perímetro, por tanto, 54·2=108m

II. ENSAYO-ERROR:

(l: lado corto   L: lado largo)

Dos opciones:
1. Se deduce que la diferencia de los lados es 6m.
2. No se conoce.

+6   (78)

l	L	l+l+L
20	26	66 ✗
21	27	69 ✗
24	30	78 ✓
25	31	81 ✗

+1   +3   → ¿l=24?   Comprobar

Comprobar si no hay + soluciones

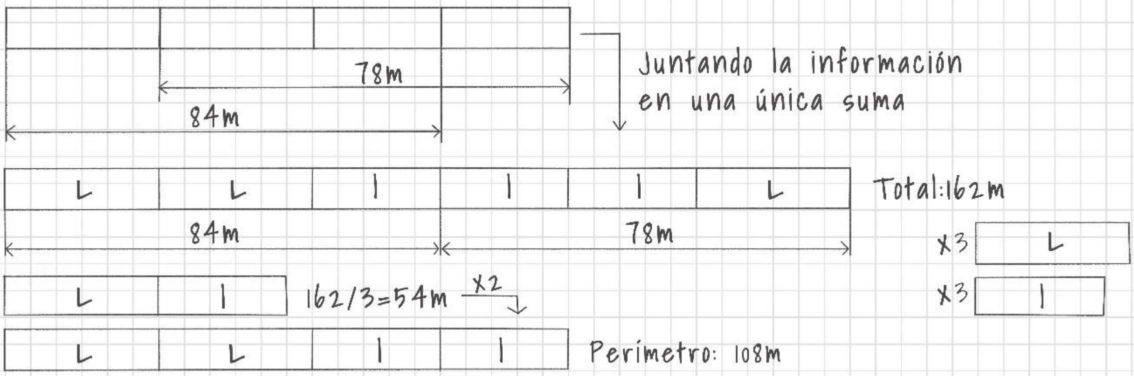
2l+L=78   (78)   (84)

l	L	l+l+L	L+L+l
20	38	78	96 ✗
22	34	78	90 ✗
24	30	78	84 ✓
25	28	78	81 ✗

+2   −6

Perímetro=2l+2L=108

III. ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN: Diagrama Parte-Todo



IV. ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN: Codificación Algebraica

Medida de...
L: lado largo
l: lado corto

Perímetro= 2L+2l

$L+L+l=84;\ 2L+l=84$
$l+l+L=78;\ 2l+L=78$

$4L+2l=168$
$2l+L=78$
$3L=90 \rightarrow \boxed{L=30}$

$l=84-2L=84-60$
$\boxed{l=24}$

Perímetro= $2\cdot30+2\cdot24=108m$

Problema 5 | Secretos a voces

Cuestiones sobre el enunciado

Se ha elegido ese contexto como se podría haber seleccionado cualquier otro. La idea es que se muestren alumnos situaciones reales o hipotéticas apoyadas en situaciones reales en las que aparezcan regularidades y patrones. Pueden ser series sobre números, letras, diagramas, dibujos o imágenes reales.

Posibles estrategias de resolución

Se enumeran las estrategias que se van a utilizar por orden de dificultad:

- Modelización: representación gráfica o con los propios alumnos.
- Organización de la información:
    - Diagrama de árbol
    - Codificación algebraica: formulación de un término general

En las páginas siguientes, se da un posible procedimiento de resolución.

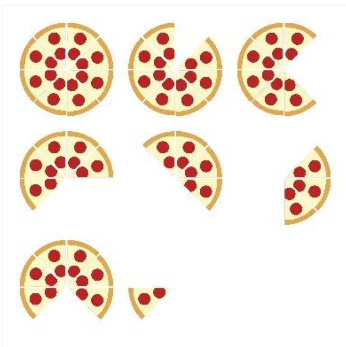
Otros ejemplos similares

1. *Amazon* da la posibilidad de vender tarjetas regalo estandarizadas a partir de los importes de la imagen. ¿Cuál se espera que sea el importe de la siguiente tarjeta regalo? ¿Puedes encontrar un patrón?

En un primer nivel es suficiente con que los alumnos identifiquen verbalmente el patrón y sean capaces de deducir qué elementos vendrían a continuación, pero a partir de 3º ESO conviene formalizar el patrón bajo el término general de una sucesión. A partir de observaciones generales los alumnos deberían llegar a expresarlo así: $a_n = 25 \cdot 2^{n-1}$.

Así, con series sencillas que aparecen en la vida real se puede introducir el tema de las sucesiones, que generalmente se trabajan de una manera muy abstracta.

2. Pueden darse también series en las que no se pueda formalizar ninguna expresión mediante una fórmula. En esta figura aparece una pizza entera, en la siguiente falta 1/8, a continuación 2/8 y así hasta que falta la pizza entera. Además, va variando la posición de los trozos que faltan una unidad en cada pizza.



→ *Volver al problema 5 (p.51)*

FICHA: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
PROBLEMAS MULTINIVEL

ENUNCIADO

María tiene un secreto que comparte durante la primera hora de la mañana con sus dos mejores amigos. Al cabo de una hora, estos les cuentan el secreto a otras dos personas de su círculo cercano, y estas a su vez lo harán en la siguiente hora a otra pareja de personas. Si el secreto corre de unas personas a otras a este ritmo y en clase de María son 28 compañeros, ¿a qué hora de la mañana conocerán todos el contenido de su secreto?

COMPRENDER — 01 FASE

DATOS · *lo conocido*
¿Qué me dan?

28 personas

Cada persona que descubre el secreto se lo cuenta a otras 2 en el plazo de 1h

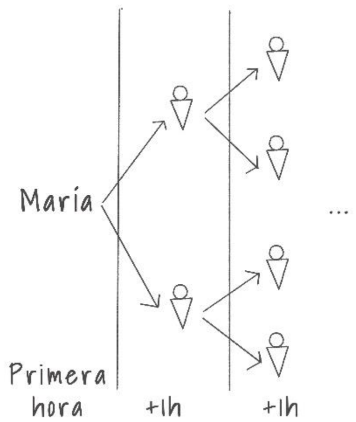
OBJETIVO · *desconocido*
¿Qué me piden?

¿En cuántas horas sabe toda la clase el secreto?

- Las personas que ya han contado el secreto no lo vuelven a contar.
- En la primera hora solo una persona conoce el secreto, la propia María.

RELACIONES

DIAGRAMAS
Tablas, diagramas, representaciones gráficas...



PENSAR — 02 FASE

ANÁLISIS + ELEGIR ESTRATEGIA.

BÁSICAS
- ☒ Modelización
- ☒ Organización de la información
  - ☐ Aritmética
  - ☒ Algebraica
  - ☐ Diagrama Parte-Todo
  - ☒ Representación gráfica
- ☐ Ensayo-Error

AUXILIARES
- ☐ Analogía
- ☐ Simplificación

ESPECÍFICAS
- ☐ ____________

TÁCTICAS

usar diagramas de árbol y tratar de formalizar un término general.

ACTUAR — 03 FASE

RAZONAMIENTO.

OTRA HOJA

Enfréntate al problema a través de las estrategias y las tácticas que has elegido, transformando tus ideas a lenguaje matemático

SOLUCIÓN

En 4h desde que María cuente su secreto lo conocerá toda la clase.

REVISAR — 04 FASE

CONECTAR CON EL CONTEXTO.

COMPROBAR LA SOLUCIÓN

¿Hay solución?
¿Puede haber varias?
¿Cumple las relaciones?
¿Tiene lógica?

DAR UNA RESPUESTA
Según el contexto

Si María cuenta su secreto a primera hora, a quinta hora lo conocerá ya toda la clase.

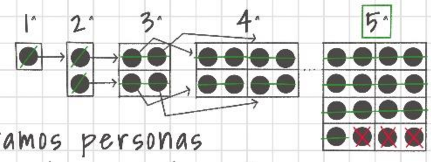
FICHA: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

FASE 03: ACTUAR

I. MODELIZACIÓN:

Se podría representar la situación con los propios alumnos. Sobre el papel:

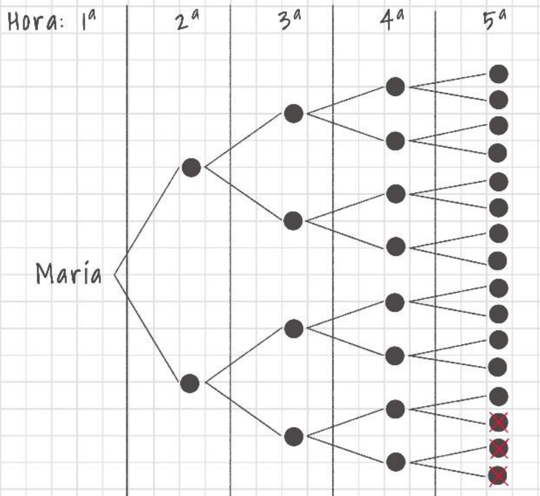
Como cada persona cuenta el secreto a otras dos personas, cada hora de la mañana lo descubren el doble de personas.



Contamos personas hasta alcanzar las 28.

(●: persona)

II. ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN: Diagrama de Árbol



Personas que...					
Lo descubren	1	2	4	8	~~16~~ 13
Lo saben	1	3	7	15	28

III. ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN: Codificación Algebraica

A primera hora sabe el secreto solo María

A segunda hora, lo saben $2 \cdot 1$ personas más $(+2)$ $\times 2$

A tercera hora, lo saben $2 \cdot 2$ personas más $(+4)$ $\times 2$

A cuarta hora, lo saben $2 \cdot 4$ personas más $(+8)$

A la hora h, lo saben $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{h \text{ veces}} - 1$ personas.

Total

$1+2=3=2^2-1$

$3+4=7=2^3-1$

$7+8=17=2^4-1$

↓

Generalizando

$\boxed{p_h=2^h-1}$

Expresión que relaciona el número de personas que saben el secreto, según la hora: $\boxed{p_h=2^h-1}$ siendo p: número de personas y h: número de horas

$28=2^h-1;\ 29=2^h;$

$\log_2 29=h=4.86$ ⟶ Durante la quinta hora todos sabrán el secreto.

Problema 6 | Reformulando un clásico

Enunciado generalizado

Se pueden buscar muchos objetos cotidianos con distintas formas para adecuarlos a todos los niveles de secundaria. Para 1º ESO se podría trabajar un problema similar pero que solo trate áreas (problema clásico: recintos) y, a partir de 2º se pueden buscar muchas situaciones distintas que requieran figuras más o menos complicadas hasta llegar a 4º. En todas estas propuestas, la metodología sería similar a la propuesta de Dan Meyer: eliminar los pasos y los datos para generar un debate que los vaya reclamando.

Posible guion para el problema propuesto

1. Presentación de la situación del problema con la formulación de una pregunta:

A partir del enunciado, se plantea una situación con una pregunta a la que dar respuesta: *¿cuánto tiempo lleva pintar la piscina?*

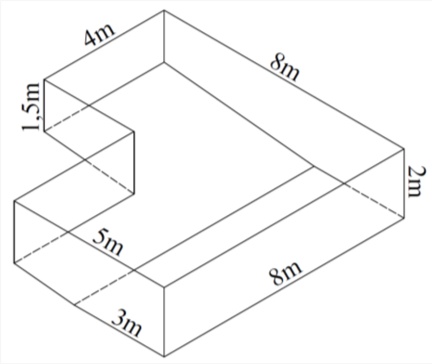
2. Debate en grupos:

A continuación, los alumnos trabajando en grupos deberán debatir sobre el problema y les surgirán nuevas cuestiones que podrán responder intuitivamente. Lo ideal es que las preguntas las formulen los propios alumnos, pero si el profesor ve que necesitan ayuda puede guiarles. Preguntas similares a las siguientes deberían aparecer en el debate:

- *¿Qué se necesita para pintar la piscina? Pintura. Si suponemos que el dueño la tiene ya comprada, lo primero será vaciar la piscina.*
- *¿Vaciar la piscina cuánto tiempo lleva? Dependerá del volumen. Y, además, se necesitará un desagüe. Pero ¿a qué velocidad se vacía la piscina?*
- *Se necesitan medidas para calcular el volumen, ¿cuáles? ¿falta alguna más?*
- *Una vez se vacíe la piscina, ¿cuánto se tarda en pintar? Dependerá de la superficie y de cuántas personas pinten y la habilidad que tengan para hacerlo más o menos rápido.*

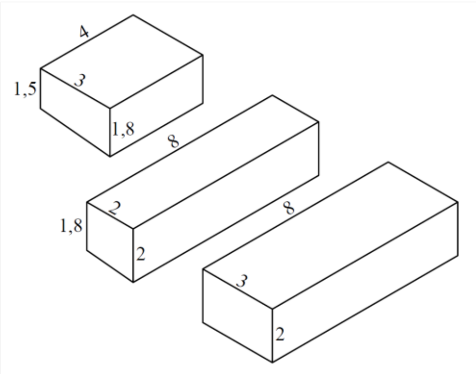
Cuando los alumnos hablen del problema se darán cuenta de qué parámetros afectan y cuáles son los datos que necesitan saber. Necesitan medidas (el profesor puede dárselas directamente o se pueden estimar entre todos), saber cuál es el caudal a partir del cual se vacía la piscina (dato o investigación en internet) y quién va a pintar la piscina, en este caso será el dueño. A continuación, se ofrecen unos datos orientativos para el problema.

Para poder resolver el problema, se deben conocer/estimar como mínimo estas medidas:



El resto puede calcularse jugando con las mismas.

Para hallar el volumen se puede descomponer la piscina en tres prismas:

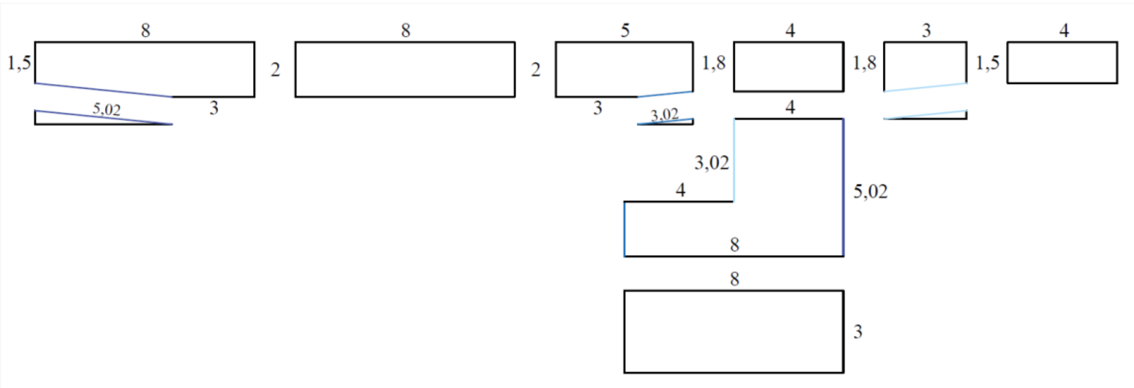


(medidas en m)

1. Volumen prisma pequeño de base trapezoidal: $V_1 = \left(\frac{(1{,}5+1{,}8)}{2} \cdot 3\right) \cdot 4 = 19{,}8\ m^3$
2. Volumen prisma grande de base trapezoidal: $V_2 = \left(\frac{(1{,}8+2)}{2} \cdot 2\right) \cdot 8 = 30{,}4\ m^3$
3. Volumen paralelepípedo: $V_2 = (3 \cdot 2) \cdot 8 = 48\ m^3$

Así el volumen total será: $V_T = 19{,}8 + 30{,}4 + 48 = 98{,}2\ m^3$

Para calcular el área que se necesita pintar, se calculan las áreas de todas las caras de la piscina:



(medidas en m)

El área de las caras laterales, de izquierda a derecha según la descomposición de la figura anterior son:

1. $A_1 = 8 \cdot 2 - \frac{5 \cdot 0,5}{2} = 14,75\ m^2$
2. $A_2 = 8 \cdot 2 = 16\ m^2$
3. $A_3 = 5 \cdot 2 - \frac{2 \cdot 0,2}{2} = 9,8\ m^2$
4. $A_4 = 4 \cdot 1,8 = 7,2\ m^2$
5. $A_5 = \frac{(1,8+1,5)}{2} \cdot 3 = 4,95\ m^2$
6. $A_6 = 4 \cdot 1,5 = 6\ m^2$

El fondo está compuesto por dos planos distintos:

7. $A_7 \approx 8 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 28\ m^2$
8. $A_8 = 8 \cdot 3 = 24\ m^2$

Así el área total será, sumando todas las anteriores: $A_T = 110,7\ m^2$

Otros datos que se necesitan saber son:

- El caudal con el que se vacía la piscina: $Q = 10\ m^3/h$
- La velocidad con la que el dueño de la casa pinta la piscina: $V = 40\ m^2/h$

3. <u>Búsqueda de una solución</u> a partir de las nuevas cuestiones:

Una vez entendido cuál es el procedimiento para resolver el problema que se ha creado a partir del debate de todos y se conocen todos los datos necesarios, según un procedimiento parecido a lo anterior, los alumnos deberían obtener resultados similares a un volumen de 98,2 m^3 y un área de 110,7 m^2. Con la información sobre el caudal y la velocidad del dueño para pintar, se obtiene el tiempo pedido:

$$t_{vaciar} = \frac{98,2\ m^3}{10\ m^3/h} = 9,8\ h; \quad t_{pintar} = \frac{110,7\ m^2}{40\ m^3/h} = 2,8\ h$$

Así el tiempo total será, como mínimo 12,6 h, es decir, 12h y 36 min.

4. <u>Discusión a modo de síntesis</u>:

Para cerrar el problema se hace una puesta en común general en la clase a partir de los resultados de todos los grupos. *¿Tiene sentido la solución? ¿Cómo podría organizar el dueño estas 12h para tener la piscina lo antes posible?*

El objetivo del problema no es tanto acercarse a un resultado concreto, sino que los alumnos sean partícipes del mismo y mejoren su entendimiento respecto a él.

→ *Volver al problema 6 (p.52)*

Problema 7 | El sentido de los polinomios

Cuestiones sobre el enunciado

El enunciado de la tarea se irá concretizando durante el desarrollo de la misma. La idea principal es que cada grupo construya una caja y vaya experimentando a partir de las preguntas que el profesor vaya formulando con la intención de que los alumnos reflexionen sobre la importancia de los polinomios y para qué pueden servir.

Según la caja inicial y las modificaciones que se realicen, se podrá variar la dificultad del ejercicio. Así, se pueden dar opciones muy variadas según las medidas de los lados de la caja y las distintas modificaciones que se hagan después:

CUERPO INICIAL	MODIFICACIONES
CUBO de lado (*l*)	Aumentar/reducir (*x*) dos de los lados
	Aumentar/reducir (*x*) todos los lados
	Aumentar/reducir (*x*) dos lados e (*y*) el tercer lado
	Aumentar/reducir (*x*) un lado e (*y*) otro
PRISMA de base cuadrada de lado (*l*) y altura (*h*)	Aumentar/reducir los tres lados de forma distinta (*x*, *y*, *z*)
	Aumentar un lado (*x*) y reducir otro lado la misma medida
	Aumentar dos lados (*x*) y reducir el tercero la misma medida
	Aumentar dos lados (*x*) y reducir el tercero (*y*)
ORTOEDRO de lados (*a*), (*b*), (*c*)	Aumentar un lado (x) y reducir los otros dos (*x*)
	Aumentar un lado (x) y reducir los otros dos (*y*)
	Aumentar un lado (x), reducir otro (*y*) y el último (*z*)
	Aumentar un lado (x), otro (*y*) y reducir el último (*z*)

Cualquier cuerpo inicial puede modificarse con algunas de las opciones de la tabla y de muchas formas más que no se han contemplado. Mientras (*l*), (*h*), (*a*), (*b*) y (*c*) toman valores naturales (la medida que se elija para cada lado de la caja), las modificaciones se mantienen como incógnitas: (*x*), (*y*) y (*z*).

Posible guion para el problema propuesto

A continuación, se va a detallar como podría ser la dinámica del problema partiendo de un cubo de lado 8 cm.

1. Se recomienda <u>construir</u> el cubo, pero puede hacerse un dibujo de este.

2. Se empieza con una tarea sencilla para activar a los alumnos: <u>calcular el área y el volumen</u> que han escogido para construir la caja:

$$A_{cubo} = (8cm)^2 = 64cm^2; \quad V_{cubo} = (8cm)^3 = 512cm^3$$

3. Plantear las primeras preguntas:

- *¿Qué pasaría si duplico cada uno de los lados? ¿Y si los triplico?*
- *¿Cómo afecta al área de cada cara y al volumen del cubo?*
- *¿Puedes encontrar un patrón?* (+ nivel)

Estas cuestiones pueden dar lugar a que los alumnos hagan sus predicciones (si se ha construido la caja pueden probar a rellenarla) y luego se comprueben todos juntos:

Duplicando el lado del cubo (2l):

$$A_{cara\ 2l} = (2 \cdot 8cm)^2 = 4 \cdot 64cm^2 = 256\ cm^2 = 4 \cdot A_{cara}$$
$$V_{cubo\ 2l} = (2 \cdot 8cm)^3 = 8 \cdot 512cm^3 = 4096\ cm^2 = 8 \cdot V_{cubo}$$

Si se triplica el lado del cubo (3l):

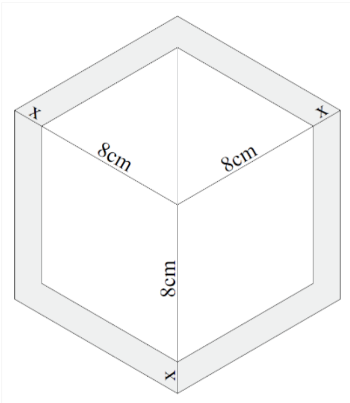
$$A_{cara\ 3l} = (3 \cdot 8cm)^2 = 9 \cdot 64cm^2 = 576\ cm^2 = 9 \cdot A_{cara}$$
$$V_{cubo\ 3l} = (3 \cdot 8cm)^3 = 27 \cdot 512cm^3 = 13824\ cm^2 = 27 \cdot V_{cubo}$$

Generalizando para un aumento de *n* veces el lado:

$$A_{cara\ nl} = (n \cdot 8cm)^2 = n^2 \cdot 64cm^2 = n^2 \cdot A_{cara}$$
$$V_{cubo\ nl} = (n \cdot 8cm)^3 = n^3 \cdot 512cm^3 = n^3 \cdot V_{cubo}$$

Una vez se ha debatido cómo aumenta el área y el volumen en función de algunas modificaciones específicas (duplicar el lado, aumentarlo *n* veces, etc.), se propone aumentar o reducir el lado una longitud desconocida.

En este ejemplo, se va a aumentar x todos los lados del cubo, como en la siguiente figura.



Surgen nuevas preguntas:

- *¿Cuál es ahora el área de la caja?*

$$A_{cara'} = l^2 = (x+8)^2 = (x+8) \cdot (x+8) = x^2 + 8x + x8 + 8^2 = x^2 + 16x + 8^2$$

- *¿A caso no es eso una identidad notable?* $(x+n)^2 = x^2 + 2nx + n^2$
- *¿Cuál es el volumen de esta nueva caja?*

$$V_{cubo'} = (x+8)^3 = (x+8)^2 \cdot (x+8) = (\ \ x^2 + 16x + 8^2\ \ ) \cdot (x+8) = (x^3 + 16x^2 + 64x) + (8x^2 + 128x + 512) = x^3 + 24x^2 + 192x + 512$$

- *¿Si elevamos binomios al cubo obtenemos otras igualdades notables?*

Para responder a la pregunta, podemos colocar los monomios semejantes de la siguiente manera:

$$V_{cubo'} = (x+8)^3 = (x+8)^2 \cdot (x+8) = (\,x^2 + 2 \cdot 8x + 8^2\,) \cdot (x+8) = (x^3 + 2 \cdot 8x^2 + 8^2x) + (8x^2 + 2 \cdot 8^2x + 8^3) = x^3 + 3 \cdot 8x^2 + 3 \cdot 8^2x + 8^3$$

Obtenemos la siguiente igualdad notable: $(x+n)^3 = x^3 + 3nx^2 + 3n^2x + n^3$

- *¿Podemos extrapolar esto a binomios elevados a otras potencias?* (+nivel)

Probando con otras potencias, podríamos descubrir una relación general para binomios elevados a la potencia *k*:

$$(x+n)^k = x^k + knx^{k-1} + k^2n^2x^{k-2} + \ldots + k^2n^{k-2}x^2 + kxn^{k-1}x + n^k$$

4-5. Por último, se puede plantear un volumen genérico que tienen que cumplir todas las cajas y de igual manera un tamaño estándar para la base, para que los alumnos tengan que factorizar sus polinomios. Algunos ejemplos serían:

a. La base debe medir 50cm^2.

Las medidas del cubo inicial eran: $A_{cubo} = 64cm^2$; $V_{cubo} = 512cm^3$

El área de la cara del cubo era 64cm^2, así que, si se quiere mantener la forma de cubo, tienen que reducirse todos los lados para alcanzar el área pedida, ¿cuánto?:

$$A_{cara'} = x^2 + 16x + 64 = 50;\ x^2 + 16x + 14 = 0$$

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14}}{2 \cdot 1} = \frac{-16 \pm \sqrt{200}}{2} = \frac{-16 \pm 10\sqrt{2}}{2} = -8 \pm 5\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = -0.93 \text{ cm y } x_2 = -15{,}07\ cm$$

- *¿Tienen sentido las soluciones?*

No tiene sentido disminuir el lado 15 cm porque mide 8. Así que para que la caja tenga una base de 50 cm^2 debe disminuirse el lado 0,93cm. Si el lado midiera 7cm, sabemos que la superficie sería de 49cm^2, por lo que la solución tiene sentido.

b. El volumen debe de alcanzar los 800cm^3.

Se seguiría un procedimiento análogo: $V_{cubo'} = x^3 + 24x^2 + 192x + 512 = 800$. Al ir a buscar las soluciones de $x^3 + 24x^2 + 192x - 288 = 0$, los alumnos deberían darse cuenta de que solo saben resolver este tipo de ecuaciones cuando las raíces son enteras. Para dar con el incremento del lado, puede emplearse *WolframAlpha* o *Geogebra*. La única solución real es:

$$x = 2(10^{\frac{2}{3}} - 4) \approx 1{,}28.$$

Por lo tanto, debería aumentarse el lado por encima de los 9cm.

→ *Volver al problema 7 (p.53)*

Problema 8 | ¿Cuánto mide la clase?

Cuestiones sobre el enunciado

El enunciado de la tarea se irá completando con preguntas durante el desarrollo de esta. La tarea está pensada para que las mediciones del aula se hagan en grupos y el debate sobre cómo trasladar la realidad al papel a nivel de clase. El profesor puede orientar a los alumnos para que entiendan la escala como una relación de proporción entre las medidas del papel y las de la realidad.

Posible variante: concurso de habitaciones

Una vez entendido todo lo anterior, se podría hacer una actividad similar en la que los alumnos dibujasen sus habitaciones. Otra opción sería dibujar cualquier otra estancia de su casa. Es preferible empezar con el aula para poder trabajar todos juntos y ayudarse de las ideas de los demás, y después, si se desea, poder aplicarlo de manera individual.

Formalización de la escala

Mediante el debate se pretende que los alumnos entiendan que una escala no es más que un acuerdo entre la realidad y su representación en el papel, en la que una medida queda representada por otra menor. Podrían darse ideas parecidas a las siguientes:

Se puede establecer una relación entre ambas medidas a partir de una fracción:

$$escala = \frac{medida\ en\ el\ papel}{medida\ real};$$

La manera acordada para dar una escala es:

$$medida\ en\ el\ papel : medida\ real$$

Además, en las escalas estandarizadas se da una de las dos medidas como unidad. Así, aparecen la escala: 1:1, 1:25, 1:50, 1:100, 1:200, etc. Por ejemplo, una escala 1:100 significa que 1cm en el papel equivalen a 100cm en la realidad, o lo que es lo mismo, 1m. Todas estas escalas son de reducción, es decir, lo que se dibuja en el papel se muestra reducido respecto la realidad. Pero, puede hacerse el proceso contrario para ampliar objetos muy pequeños en escalas 2:1, 5:1, 10:1, 50:1, etc.

Otra opción es dar una escala gráfica. Como los alumnos van a trabajar con papel cuadriculado siempre pueden indicar que un cuadro representa cierta medida real. Se recomienda usar escala gráfica para los alumnos que tengan más dificultades o si se quiere trabajar en primer curso de secundaria.

Para esta actividad se recomienda emplear papel cuadriculado con los cuadrados de 1cm. Según el tamaño de lo que se quiera reflejar convendrá usar una escala u otra y diferentes tamaños de papel:

Actividad: ¿Cuánto mide la clase?

- Lo ideal sería poder dibujar a escala 1:25 en papel A3. Cada centímetro del papel equivaldría a 0,25m, es decir 4cm del papel serían 1m en la realidad.
- Si se quiere trabajar en A4, habría que reducir la escala a 1:50. Cada 2cm tendríamos 1m de la realidad.

Actividad: Concurso de habitaciones

- Se puede trabajar la escala 1:25 en papel A4.

En la siguiente página se ofrece un folio tamaño A4 con cuadrícula de 1cm.

Una vez entendido lo que es una escala y cómo representar la realidad en el papel, se podría hablar de planos y de acotación de manera superficial.

→ *Volver al problema 8 (p.**54**)*

Problema 9 | Todo es probable

Cuestiones sobre el enunciado

Se pueden dar las probabilidades que se deseen o incluso invitar a los alumnos a buscar un caso para cualquier fracción comprendida entre [0,1] que se les ocurra.

- Para 2º ESO se recomiendan dar probabilidades simples de experimentos sencillos individuales. Se puede introducir el complementario de un suceso.
- Para 4º ESO se pueden incluir además experimentos compuestos sucesivos o simultáneos (mediante uniones e intersecciones)

Posibles soluciones

A continuación, se ofrecen posibles experimentos para las probabilidades dadas. Siempre se puede inventar una situación o recurrir a una caja de bolas o a los dados:

- P(A) = 2/5:

A: «*Comprar* una vocal cerrada en la ruleta de la suerte» A = {i, u} E = {a, e, i, o, u}

A: «Ir al instituto y tener educación física hoy» (Dependerá del horario, pero se tiene clase dos de los cinco días de cada semana)

- P(B) = 1/2

B: «Tirar una moneda y que salga cara» B = {c} E = {c, x}

B: «Tirar un dado y que salga un número par» B = {2, 4, 6} E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

- P(C) = 2/7

C: «Nacer el fin de semana» C = {s, d} E = {l, m, x, j, v, s, d}

C: «Elegir al azar un continente y que toque una de las dos Américas» C = {AN, AS} E = {7 continentes}

- P(D) = 1/4 =10/40

D: «Sacar una carta de una baraja española y que sea de oros» C = {As de oros, dos de oros, …, Rey de oros} E = {40 cartas}

D: «Lanzar un dado icosaédrico y que salga múltiplo de 4» D = {4, 8, 12, 16, 20} E = {20 caras}

- P(F∪G) = 5/6 = 10/12

F: «Lanzar un dado y que salga impar» G: «Lanzar un dado y que sea mayor que 3» F∪G = {1, 3, 4, 5, 6} E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

F: «Nacer en un mes par» G: «Nacer antes de agosto» F∪G = {ene, feb, mar, abr, may, jun, jul, ago, oct, dic} E = {12 meses}

- P(H) = ∅

H: «Tirar un dado convencional y que salga un número mayor o igual que 7»

H: «Sacar una bola negra de una bolsa llena de bolas blancas»

- $P(\bar{I}) = 7/12 = 21/36$

I: «Tirar dos dados y que sumen más de 7» $\bar{I}$: «Tirar dos dados y que 7 o menos»

I: «Nacer antes de junio» $\bar{I}$: «Nacer después de mayo»

- $P(J) = 19/20$

J: «Sacar un número distinto de 17 en un dado con forma de icosaedro»

J: «Ganar a un juego en el que la probabilidad de acierto es del 95%»

- $P(KKL) = 1/40 \cdot 1/4 \cdot 3/40$

KKL: «Sacar tres cartas con remplazamiento y que sean el tres de espadas, una de oros y una figura de copas, respectivamente»

- $P(M \cap N) = 1/3 = 2/6$

M: «Sacar un número par tirando un dado» N: «Sacar un divisor de 6» N ={1, 2, 3, 6}

M: «Sacar un múltiplo de 2» N: «Sacar un número mayor que 3»

- $P(OR) = 1/6 \cdot 1/2$

ÑO: «Sacar un 6 al tirar un dado y una cruz al tirar una moneda»

- $P(S) = 1/365$

Q: «Nacer el 1 de enero»

- $P(T \cup U \cup V) = 11/12$

R: «Nacer en el último trimestre del año» S: «Nacer en los meses de verano» T«Nacer antes de mayo»

- $P(\bar{W} \cap X) = 9/52$

W: «Salga una carta de picas» X: «Salga una figura» $\bar{W} \cap X$: «Salga una figura que no sea de picas»

- $P(Y) = 1$

Y: «Sacar un número mayor que cero al tirar un dado»

Y: «Sacar un número mayor que cero al tirar un dado»

- $P(Z) = 3/2$

No hay ninguna situación para esta probabilidad porque cualquier probabilidad de un suceso no puede ser mayor que uno por definición.

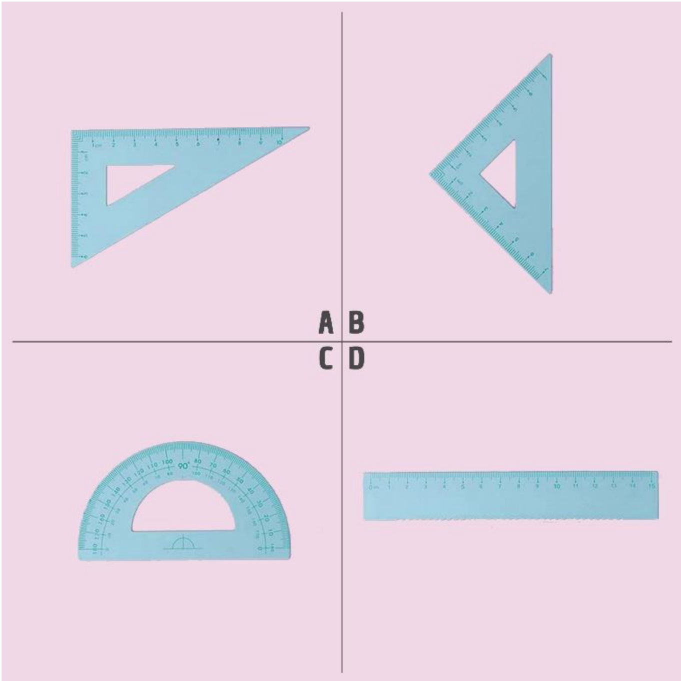
→ *Volver al problema 9 (p.**55**)*

Problema 10 | Diferentes e iguales

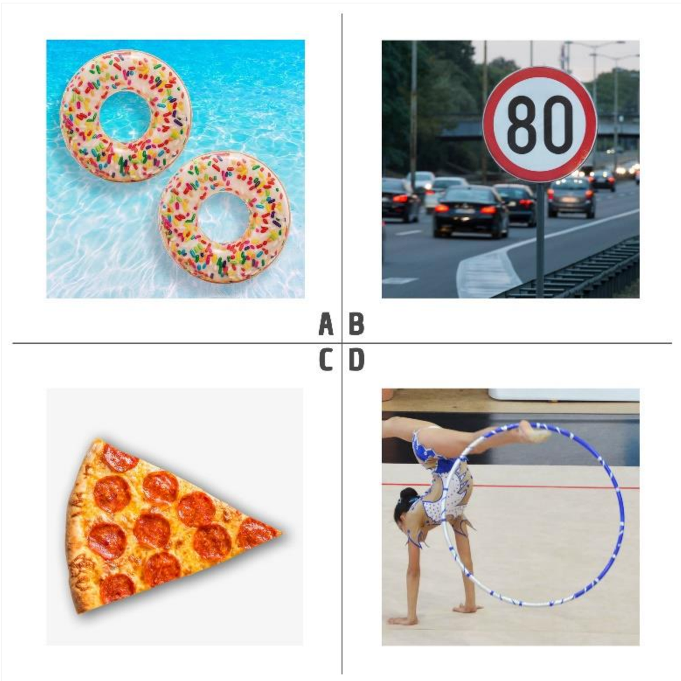
Fichas

Podrían crearse fichas a partir de cualquier contexto e infinitos objetos de la realidad relacionados con los contenidos de matemáticas (figuras, gráficas, números, expresiones algebraicas, etc.). Se ha elegido la geometría, por su facilidad para relacionarlo con objetos reales. Se han creado las siguientes fichas:

1.



2.



3. 

Las fichas son de elaboración propia pero las imágenes se han cogido a través de *Google Imágenes* en las siguientes páginas:

Ficha 1:

- https://www.amazon.es/Selma-triangulares-geometr%C3%ADa-transportador-estudiantes/dp/B07WJH5L9K

Ficha 2:

- https://www.fengyuanhanxi.top/products.aspx?cname=intex+56263&cid=1
- https://cincodias.elpais.com/cincodias/2020/09/11/legal/1599839657_703332.html
- http://blogdematematicasdemaria.blogspot.com/2018/05/trozo-de-pizza.html
- https://www.movieduca.cl/web/?product=aro-gimnasia-ritmica

Ficha 3:

- https://shop.pomnatura.it/merendine-e-snack-dolci/5292-saiwa-mikado-latte-75-gr.html
- https://swissmade.direct/es/tienda/comida-y-bebida-suiza/chocolate/barra-de-chocolate/chocolate-toblerone-original-100g/
- https://otpravka.com.ua/product-mentos-fruit-1-szt-9510466223.html
- https://www.walmart.com/ip/seot/22790197?listRegistryId=8f7a6c17-3039-4640-84b7-49ad07b5237a&listRegistryType=WL

Posibles respuestas

A continuación, se ofrecen algunos argumentos para descartar una de las cuatro imágenes de cada ficha:

- Ficha 1:

"*La imagen X no pertenece al grupo porque es la única que…*"

A. *No presenta ninguna simetría. Tiene sus tres lados diferentes.*
B. *Tiene dos ángulos iguales. Tiene ángulos complementarios iguales.*
C. *Está limitada por una semicircunferencia. Tiene solo un lado recto.*
D. *Tiene lados paralelos dos a dos. Es un cuadrilátero. No tiene un hueco a partir de una figura proporcional en su interior. Tiene más de un ángulo recto.*

- Ficha 2:

"*La imagen X no pertenece al grupo porque es la única que…*"

A. *Aparecen dos figuras. Son coronas circulares. Tienen volumen considerable.*
B. *Es un círculo completo. Presenta toda el área comprendida por una circunferencia.*
C. *Es un sector circular. No representa los 360º que forman el círculo. Tiene lados rectos.*
D. *Es una circunferencia. Está formada solo por un perímetro.*

- Ficha 3:

"*La imagen X no pertenece al grupo porque es la única que…*"

A. *Es un ortoedro. Todas sus caras son rectángulos.*
B. *Es un prisma de base triangular. Dos de sus caras con triángulos. Tiene tres caras laterales.*
C. *Dos de sus caras son círculos. Presenta líneas curvas. No es un poliedro, es un cuerpo de revolución.*
D. *Representa un cubo con todas las caras iguales. Sus caras son cuadrados. Es una figura regular.*

→ *Volver al problema 10 (p.**56**)*