DÍFICULTADES EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL BLOQUE DE GEOMETRÍA. RECURSOS MANIPULATIVOS Y DIGITALES

Máster universitario en formación del profesorado de enseñanza secundaria obligatoria, bachillerato, formación profesional y enseñanza de idiomas

Presentado por:

Brigytte Suheidy Daza Vega

Tutora: María Arántzazu Fraile Rey

Co-tutor: Alberto Lastra Sedano

AGRADECIMIENTOS

A mi tutora María Arántzazu Fraile por su motivación y entusiasmo ante la propuesta de este trabajo. Sin sus consejos, críticas y sobre todo dedicación no me hubiera sido posible llevarlo a cabo.

A Alberto Lastra por todo lo que me enseñó en sus asignaturas y darme la oportunidad de realizar el trabajo con ambos tutores.

A mis abuelos paternos Flora y Efrain, que aunque ya no estén a mi lado siempre están cuidando de mí.

A mi hermano David por haber superado juntos nuestros respectivos finales de etapa.

A Rubén, mi compañero de vida, por cuidarme, quererme y apoyarme incondicionalmente a lo largo de este máster.

Mi más sincero agradecimiento.

RESUMEN

En este trabajo, se han diseñado actividades manipulativas y digitales para solventar los errores en el proceso de enseñanza – aprendizaje en el bloque de Geometría.

Para ello, se empezará con una pequeña introducción que irá seguida por el diseño y los objetivos que nos marcamos para este trabajo. Se continua con el marco teórico y el marco metodológico dónde se analizan estadísticamente las encuestas que creamos para profesores y alumnos para detectar los errores y dificultades en el bloque de geometría.

Por último, se diseñan las actividades manipulativas y los recursos digitales propuestos para solucionar los errores encontrados en el marco teórico y en las encuestas y se termina con las conclusiones dónde se hablará del grado de consecución de los objetivos, las limitaciones y futuras líneas de investigación.

Palabras clave: errores, dificultades, geometría, recursos manipulativos, recursos digitales.

ABSTRACT

In this work, we have designed manipulative and digital activities to solve the errors in the teaching-learning process in the Geometry area.

We will start with a short introduction followed by the design and the objectives we set for this master’s thesis. It continues with the theoretical and methodological framework where we statistically analyse the surveys we created for teachers and students to detect errors and difficulties in the geometry area.

Finally, we design the manipulative activities and digital resources to solve the errors found in the theoretical framework, in the surveys and we end with the conclusions where we will talk about the degree of achievement of the objectives, the limitations and the future lines of research.

Keywords: errors, difficulties, geometry, manipulative resources, digital resources.

Índice

Índice de figuras

Índice de tablas

1. Introducción

Como profesores, es importante conocer las dificultades y errores que encuentran los alumnos en nuestra materia con el objetivo de planificar secuencias didácticas que mejoren el proceso de enseñanza – aprendizaje. Es importante conocer el origen de los errores, con el fin de acompañar el proceso de reestructuración de los esquemas mentales de los alumnos, para que puedan lograr comprender el tema estudiado (Bocco y Canter, 2010). Los errores han estado presentes a lo largo de nuestra historia, de hecho, el avance se consigue por el reconocimiento, análisis y posterior superación de estos. El estudio de errores está conectado con la práctica docente y resulta muy útil para los profesores que tratan de diagnosticar sus causas y así llegar a minimizarlos.

Este trabajo Fin de Máster tiene como finalidad la identificación y el estudio de los errores y dificultades que existen en el aprendizaje de los contenidos propios del bloque de Geometría para posteriormente diseñar actividades manipulativas y digitales que ayuden a suprimir dichos errores.

En el área de la didáctica de las matemáticas, existen numerosas investigaciones centradas en el estudio de los errores que se producen en el aprendizaje (Bocco y Canter, 2010; Franchi y Rincón, 2004; Movshovitz-Hadar et al., 1987; Radatz, 1979; Rico, 1995; Socas, 1997). Los errores forman parte de la enseñanza de las matemáticas, no solo se producen en alumnos "menos capaces" sino que casi todos los alumnos realizan algún error o poseen alguna dificultad en su aprendizaje (Socas, 2007). Es importante saber que los errores son una herramienta que los profesores pueden utilizar para crear estrategias que mejoren el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas (Socas, 2007), por lo que el docente no solo debe saber cuáles son esos errores sino también por qué se producen.

El análisis de los errores en el bloque de Geometría no ha sido estudiado en profundidad pese a que en esta rama de las matemáticas, en general, los alumnos presentan dificultades (Bocco y Canter, 2010; Guzmán, C. y Bohórquez, J., 2014). Por el contrario, si existen numerosas investigaciones que proponen la utilización del software GeoGebra para ayudar a comprender numerosos conceptos del bloque de Geometría como se verá en el marco teórico.

A través de este trabajo fin de máster trataremos de dar solución a los errores más comunes que tengan los alumnos en el área de geometría utilizando la herramienta de geometría dinámica GeoGebra. El uso de las tecnologías con fines educativos permite abrir nuevas dimensiones y posibilidades en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por eso en este trabajo vamos a utilizar el enorme potencial de esta herramienta para paliar los errores más generales de los alumnos en el bloque de Geometría.

El trabajo se divide en cinco capítulos. Primero se describe el diseño de la investigación, así como los objetivos generales y específicos que nos marcamos. En segundo lugar, se realiza la descripción del marco teórico de nuestro trabajo, compuesto por el modelo de razonamiento de Van Hiele, el análisis de dificultades y errores desde la perspectiva de varios autores en el aprendizaje de las matemáticas y el programa GeoGebra, así como las investigaciones previas que utilizan dicho programa para mejorar el proceso de enseñanza – aprendizaje.

Posteriormente, se diseñaron dos encuestas, una para el profesorado y otra para el alumnado, con el objetivo de conocer, a través de la experiencia docente y estudiantil, las dificultades y atractivos de los diferentes bloques en matemáticas y, particularmente para el bloque de geometría, saber si han utilizado o utilizan materiales manipulativos o recursos digitales para su enseñanza. Además de averiguar el origen de los errores y dificultades específicas del bloque de geometría. Es en el capítulo tres dónde se desarrolla el marco metodológico, describiendo con profundidad dichas encuestas.

En cuarto lugar, se mostrarán las actividades manipulativas y digitales creadas para trabajar los errores y dificultades analizados por los profesores en las encuestas. Terminaremos el trabajo comentando las conclusiones de nuestro estudio, el grado de consecución de los objetivos que nos marcamos y las futuras líneas de investigación.

2. Diseño y objetivos del Trabajo Fin de Máster

2.1. Diseño de la investigación

Tal y como hemos recogido en la introducción pretendemos realizar un estudio dónde identifiquemos y estudiemos cuáles son los errores y dificultades que existen en el aprendizaje del bloque de Geometría en la ESO.

Hemos preparado dos encuestas a través de los Formularios de Google, una diseñada para profesores y otra para el alumnado de ESO y Bachillerato. Una vez estudiadas las encuestas en profundidad con ayuda del programa estadístico SPSS, pasamos a diseñar actividades manipulativas y digitales que permitan disminuir los errores y dificultades analizados tanto en las encuestas como en investigaciones previas.

2.2. Objetivos de la investigación

Los objetivos han sido divididos en dos: general y específicos. El objetivo general es:

- Estudiar los errores y dificultades de los alumnos en la ESO para el bloque de Geometría y proponer actividades manipulativas y digitales que ayuden a dichos errores y dificultades observados.

Los objetivos específicos son:

- Detallar el origen de las errores y dificultades del alumnado.
- Diseñar una encuesta para el profesorado que nos ayude a detectar los errores en el bloque de Geometría en su práctica diaria.
- Diseñar una encuesta para los alumnos que nos ayude a comprender cómo ven el bloque de Geometría.
- Analizar e interpretar ambas encuestas estadísticamente.

3. Marco teórico

En este apartado, pasamos a describir el marco teórico de nuestra investigación. Comenzaremos describiendo el modelo de razonamiento matemático de Van Hiele, que es el marco teórico más provechoso actualmente para organizar la enseñanza de geometría (Gutiérrez y Jaime, 2012). Un modelo que complementa al anterior es el de Viner (1991) quién definió cómo se produce el aprendizaje de conceptos matemáticos con fuerte contenido gráfico o visual, y propone a los profesores formas de prevenir o corregir aprendizajes erróneos. En este epígrafe, mostraremos también las líneas generales del modelo de Vinner aunque no se desarrollen en su totalidad.

En el segundo epígrafe, se mostrarán las principales líneas de investigación en el tratamiento de los errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas desde diversos enfoques. En la tercera sección mostraremos las características teóricas del programa GeoGebra así como diversas investigaciones previas que muestran que el uso de GeoGebra en el área de Geometría mejora los procesos de enseñanza – aprendizaje.

3.1. El modelo de razonamiento de Van Hiele.

Hasta finales de la década de los 70, las teorías de Piaget constituían el marco teórico predominante en didáctica de las matemáticas. En décadas posteriores, se popularizaron otros marcos teóricos que podían ser aplicados a la enseñanza de cualquier área de las matemáticas, aunque muchos sólo se desarrollaban en algunas áreas concretas. Respecto a la geometría, el modelo de razonamiento de Van Hiele es el marco teórico cuya aplicación al desarrollo curricular está obteniendo mejores resultados. En este epígrafe, comentaremos las características más importantes de este modelo (niveles y fases) que nos han ayudado a diseñar las actividades propuestas en el Capítulo 5.

Cuando un profesor o un libro de texto presenta conceptos nuevos de geometría elemental se suele recurrir a dos métodos de enseñanza: por un lado, enunciar una definición matemática de dicho concepto (más o menos formal según el curso) y a continuación, plantear ejercicios de memorización y de reconocimiento de figuras concretas; o, por otro lado, presentar ejemplos de figuras concretas que representan ese concepto haciendo una descripción de sus características, después, enunciar su definición matemática para terminar planteando ejercicios de memorización de la definición (Gutiérrez y Jaime, 2012) En ambos casos, los profesores ponen más énfasis en las definiciones que en los ejemplos sin darse cuenta de que son los últimos los que más impactan en os estudiantes y los que producen un efecto mental más duradero y profundo.

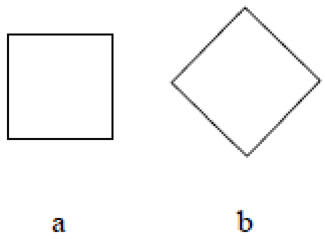
Vinner (1991) sostiene que cuando leemos o escuchamos el nombre de un concepto conocido, se estimula nuestra memoria y se evoca algo, que raramente es la definición del concepto, sino un conjunto de representaciones visuales, imágenes, impresiones o experiencias. Este "algo" es lo que Vinner llama la imagen del concepto (o imagen conceptual). En el caso de conceptos geométricos, la imagen conceptual que se crea en la mente de los estudiantes está compuesta por las diversas figuras, dibujos o representaciones que recuerdan los estudiantes como ejemplos de dicho concepto, junto al conjunto de propiedades que el estudiante asocia al concepto (Gutiérrez y Jaime , 2012).

El modelo de Van Hiele considera que existen varios niveles de razonamiento matemático, desde las formas más básicas en Educación Infantil y primeros cursos de Primaria hasta las más sofisticadas en Bachillerato o la universidad. A continuación, vamos a definir las principales características de los distintos niveles y pondremos un ejemplo ilustrativo de cada uno de ellos:

- *Nivel 1 (Reconocimiento)*. Los estudiantes juzgan un objeto geométrico por su apariencia física y lo consideran como un todo (Gualdrón y Gutiérrez, 2007). Aunque identifican lados, ángulos y algunas propiedades básicas, el significado que dan a estos elementos es más físico que matemático (Gutiérrez, 2006).

  Ejemplo (Gutiérrez, 2006): Se les da a niños de 2º de Primaria la Figura 1.

  Figura 1. *Ejemplo Gutiérrez (2006).*

  Un niño de 2º de Primaria dice que el dibujo a sí es un cuadrado, pero el b no lo es "porque creía que estaba mal colocado", otro compañero da la misma respuesta y la justifica diciendo "como estaba así puesto …". Como se puede observar, la posición de las figuras es una propiedad fundamental para clasificarlas.
- *Nivel 2 (Análisis)*. Los estudiantes identifican los componentes de las figuras geométricas y las describen por medio de sus propiedades (Gualdrón y Gutiérrez, 2007). Las deducciones que hacen están basadas en la observación y la medición. Aparece la capacidad de generalización, de forma que los estudiantes consideran una propiedad observada en unos pocos ejemplos (muchas veces en un solo ejemplo) como verdadera para toda la familia. Se empiezan a comprender y utilizar las partículas lógicas sencillas ("y", "no", "siempre", etc.), pero hay dificultad con las más complejas ("o", "a veces", "por lo menos", etc.) (Gutiérrez, 2006).

  Ejemplo (Gutiérrez, 2006). Al pedir a un estudiante de ESO que demuestre que la suma de los ángulos de un triángulo es $180°$, contestó que "esto se debe a que el valor de dichos ángulos es $60°$, porque $60 + 60 + 60 = 180$". Este ejemplo muestra que cuando la adquisición del Nivel 2 es baja, los estudiantes se conforman con verificar un solo caso.
- *Nivel 3 (Deducción informal)*. Los estudiantes son capaces de definir y clasificar lógicamente las familias de figuras (Gualdrón y Gutiérrez, 2007). También son capaces de usar correctamente las diferentes partículas lógicas y

de realizar implicaciones sencillas en un contexto abstracto. En consecuencia, pueden realizar tanto clasificaciones inclusivas como exclusivas de familias, dependiendo de las definiciones usadas y basadas en el análisis de éstas. Sus demostraciones consisten en argumentos deductivos abstractos, aunque no formales, que pueden estar basados en la observación de ejemplos concretos. Son capaces de comprender demostraciones formales sencillas explicadas por el profesor y de reproducirlas con pequeñas variaciones, pero no pueden realizar demostraciones formales de manera autónoma (Gutiérrez, 2006).

Ejemplo (Gutiérrez, 2006). Es habitual estudiar en ESO las sumas de los ángulos interiores de los polígonos. Planteado el caso general de un polígono de *n* lados, un estudiante dibujó un cuadrado, un pentágono y un hexágono. En cada caso, trazó todas las diagonales desde un vértice y contó la cantidad de triángulos que aparecen. Entonces escribió: "Vemos que en todos los casos se puede dividir un polígono en triángulos trazando diagonales. Si continuásemos con más polígonos veríamos que siempre el número mínimo de triángulos que podemos conseguir es el número de lados del polígono menos dos. Por tanto, para saber la suma de los ángulos de un polígono multiplicaremos $180°$ (los grados que suman los ángulos de un triángulo) por el número de triángulos, es decir, $(n - 2) \cdot 180°$ ". Parte de los estudiantes del nivel 2 no son capaces de responder a esta pregunta salvo para polígonos con números de lados concretos, y los que obtienen una fórmula general es porque descubren el patrón en la sucesión de sumas de ángulos del triángulo ($180°$), cuadrilátero ($360°$), pentágono ($540°$), ... Sin embargo, la respuesta anterior es de nivel 3 porque explica el origen del patrón que da lugar a la fórmula y, a continuación, la escribe.

- *Nivel 4 (Deducción formal).* Los estudiantes entienden el papel de los elementos de un sistema axiomático (axiomas, definiciones, teoremas, …), y pueden realizar demostraciones formales de manera autónoma (Gualdrón y Gutiérrez, 2007).

  Ejemplo. Sirve cualquier demostración de un teorema o resolución de un problema de manera deductiva formal, es decir, que el estudiante comprenda lo que está haciendo sin limitarse a repetir algo previamente memorizado (Gutiérrez, 2006).

En resumen, el primer nivel es típico de la enseñanza Primaria y es, en los últimos cursos de esta etapa, cuando los estudiantes deberían iniciar el paso al segundo nivel para terminar su transición durante los primeros cursos de la ESO. Al terminar la ESO, los alumnos deberían comenzar la transición hacia el tercer nivel y durante Bachillerato deberían completar la adquisición de este nivel e iniciar su camino al cuarto nivel.

El modelo de Van Hiele muestra que el paso a un nivel superior se logra adquiriendo experiencia dentro de un contexto adecuado. Para ayudar a los profesores a crear dichos contextos Van Hiele propone organizar la unidad didáctica o actividades en cinco fases de aprendizaje:

- *Fase 1 (Información).* Los estudiantes toman contacto con la unidad didáctica que van a empezar a trabajar y los profesores observan qué conocimientos previos poseen.
- *Fase 2 (Orientación dirigida).* Los estudiantes resuelven tareas para aprender los contenidos básicos de la unidad didáctica. En esta fase, el profesor debe ayudar a los alumnos a superar sus errores y dificultades y guiarles en caso de que su resolución no vaya bien encaminada.
- *Fase 3 (Explicitación).* Durante el trabajo autónomo, es muy importante que los estudiantes expresen de manera verbal o escrita el proceso seguido a la hora de resolver las tareas, así como preguntar o debatir con sus compañeros. En esta fase se pretende que los estudiantes abandonen el uso de sus propios términos y empiecen a usar términos matemáticos adecuados, con la ayuda del profesor. Es importante que, en ningún caso, el uso del vocabulario matemático se convierta en un obstáculo para el aprendizaje y la comprensión de conceptos (Gutiérrez, 2006).
- *Fase 4 (Orientación libre).* Los estudiantes resuelven tareas para profundizar en su conocimiento y en el nuevo uso del nuevo tipo de razonamiento aprendiendo contenidos más complejos. Las actividades deben ser variadas y contextualizadas, evitando la repetición o la simple aplicación de un resultado. Sería conveniente que las actividades diseñadas fueran abiertas, es decir, admitieran varias vías de resolución para llegar a solución. Esta fase es muy importante para potenciar la resolución de problemas de manera autónoma.

- *Fase 5 (Integración).* En esta fase el profesor y los alumnos repasan todo lo aprendido en la unidad didáctica y si se puede, lo pueden conectar con conocimientos de unidades anteriores o de otras asignaturas.

El modelo de Van Hiele tiene una utilidad doble, en primer lugar, los niveles sirven de guía para valorar el progreso de los alumnos en sus estrategias de pensamiento y, en segundo lugar, los niveles y las fases sirven como marco de referencia para organizar las sesiones didácticas.

3.2. Errores y dificultades

La continua presencia de errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas ha hecho que la función docente en el proceso de enseñanza y aprendizaje sea un foco de estudio e investigación en Educación Matemática. Existen diferentes autores que han propuesto diferentes modelos para sistematizar el conocimiento que requiere un profesor para enseñar matemáticas. Los principales modelos son Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) diseñado por Ball et al. (2008) y el Mathematics Teachers' Specialised Knowledge (MTSK) que plantean Carrillo et al. (2015).

Las dificultades, obstáculos y errores que presentan los alumnos en matemáticas, suelen ser en muchos casos desconocidos por parte de los profesores. Es fundamental que los docentes sean capaces de analizar las dificultades de aprendizaje y esto supone combinar estrategias generales y específicas a largo plazo con estrategias particulares e inmediatas que permitan facilitar un mejor aprendizaje de las matemáticas.

En las investigaciones en Educación Matemática se observa un creciente interés por lograr modelos que faciliten las concepciones inadecuadas y prevean e interpreten los errores de los alumnos (Socas, 2007). Las investigaciones se pueden dividir en dos etapas, por un lado, los estudios realizados antes de los ochenta comentan que el error es algo negativo que hay que erradicar y, por otro lado, a partir de esa década numerosos estudios coinciden que el error es un elemento normal entre los alumnos en su proceso de enseñanza – aprendizaje. En estos últimos estudios el error es un elemento de estudio con el que se puede profundizar en el proceso de construcción de los conocimientos matemáticos (Ruano et al., 2008).

Las dificultades que poseen los alumnos se evidencian a través de sus errores por lo que es importante reflexionar acerca de su significado y origen (Franchi y Rincón, 2004). Tradicionalmente se ha entendido el error asociado a la enseñanza como una diferencia entre lo que el profesor desea con respecto a la respuesta del alumno y la que éste le proporciona, pero algunos investigadores han presentado definiciones muy diferentes a la planteada (Franchi y Rincón, 2004) que se comentan a continuación.

Radatz (1979) sostiene que los errores no son simplemente la usencia de respuestas correctas o el resultado de accidentes desafortunados, son la consecuencia de procesos definidos cuya naturaleza debe ser descubierta. Considera que los errores ayudan a los profesores a planificar los contenidos teniendo en cuenta las dificultades de los alumnos. Para lograr que esto sea exitoso, es necesario diagnosticar de los errores cometidos y entender las causas de los mismos. Rico (1995) considera que el error es una posibilidad permanente de adquisición y consolidación de conocimiento.

Posteriormente, Brousseau (1997) dijo que el error no puede considerarse sólo como la evidencia de la ignorancia o del azar ya que puede ser producto de un conocimiento anterior que en su momento le ayudó a resolver distintas situaciones exitosamente pero ahora es falso o inadaptado, denominado obstáculo.

Socas (1997) afirma que el error es la presencia de un esquema cognitivo inadecuado en el alumno y afirma que su procedencia puede ser muy diversa, no es solamente una consecuencia de una falta específica de conocimiento o despiste.

Astolfi (1999) sostiene que los errores son indicios para lograr comprender el proceso de aprendizaje y para identificar las dificultades de los estudiantes. Es posible apoyarse en los errores para analizar y realizar una mejor intervención educativa. Es por ello por lo que propone que el error sea el centro del proceso de enseñanza – aprendizaje.

Para otros autores, la mayor parte de los errores que cometen los estudiantes de en la Educación Secundaria Obligatoria no son accidentales, sino que derivan de procesos que para ellos tienen sentido (Movshovitz – Hadar et al., 1987).

Aunque, en rasgos generales, todos los autores comparten la misma idea del significado de error e insisten en la importancia de estudiarlos, cada uno plantea una clasificación diferente que vamos a mostrar a continuación.

1. Modelo de clasificación de errores de Radatz (1979):

   R1. Errores debidos a la dificultad del lenguaje. Para muchos alumnos el lenguaje matemático es complicado y puede llegar a ser causa del error.

R2. *Errores debidos a dificultades para obtener información espacial*. Este error aparece cuando es imprescindible representar espacialmente la situación.

R3. *Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.* Estos errores incluyen las deficiencias en el contenido y problemas específicos de conocimiento, necesarios para desenvolverse en la tarea matemática.

R4. *Errores debidos a la rigidez de pensamiento*. Surgen por la falta de flexibilidad de pensamiento.

R5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Son aquellos producidos por la aplicación de reglas o estrategias similares en contenidos diferentes, por el desarrollo incorrecto de algoritmos, …

2. Modelo de clasificación de errores de Movshovitz – Hadar (1987):

M1. *Errores debidos a datos mal utilizados*. Discrepancia entre los datos del problema y cómo el alumno los trató.

M2. *Errores debidos a una interpretación incorrecta del lenguaje*. Incluye errores que surgen por traducir incorrectamente hechos matemáticos a un lenguaje coloquial y viceversa.

M3. *Errores debidos a inferencias no válidas lógicamente*. Incluye los errores que son cometidos por un razonamiento incorrecto.

M4. *Errores debido al uso de teoremas o definiciones deformadas.* Son errores que aparecen por una distorsión de un principio, teorema o definición.

M5. *Errores debidos a la falta de verificación de la solución*. Incluye los errores cometidos en el resultado final pero no en el proceso.

M6. *Errores técnicos*. Son los errores de cálculo, errores en la manipulación de símbolos algebraicos, errores al extraer datos de tablas, …

3. Modelo de clasificación de errores de Astolfi (1999):

A1. *Errores debidos a la redacción y comprensión de las instrucciones de trabajo*. Derivan de la dificultad para comprender los enunciados de las actividades o situaciones propuestas.

A2. *Errores como resultado de hábitos escolares o de una mala interpretación de las interpretaciones*. Los alumnos incorporan hábitos tales como creer que el problema propuesto se resuelve solo utilizando los nuevos conceptos aprendidos, desconfiar cuando la solución no es simple, dar respuestas sin razonar, …

A3. *Errores como resultado de las concepciones alternativas de los estudiantes*. El alumno se equivoca porque tiene aprendido un conocimiento que le ayudó en el pasado, pero ahora no le sirve.

A4. *Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas*. En determinadas ocasiones las operaciones son difíciles y el estudiante no puede dar una respuesta correcta.

A5. *Errores en los procesos adoptados*. Surgen cuando el alumno decide no seguir el procedimiento enseñado en clase y utiliza otro procedimiento.

A6. *Errores debidos a una sobrecarga cognitiva de la actividad a realizar.* Hay tareas que exigen su realización de manera inmediata. Este tipo de tareas su complejidad es alta y puede sobrecargar al alumnado.

A7. *Errores que tienen su origen en otra disciplina.* Estos errores surgen por el desconocimiento de los contenidos correspondientes a otras disciplinas.

A8. *Errores causados por la complejidad propia del contenido*. Una tarea compleja requiere más habilidades para ser resuelta. Las situaciones nuevas son las que ponen en evidencia las capacidades del alumnado.

4. Modelo de clasificación de errores de Socas (1997):

S1. *Errores que tienen su origen en un obstáculo*. Se considera al obstáculo como un conocimiento adquirido, no como una falta de conocimiento, pero que cuando el alumno utiliza dicho conocimiento en otro contexto esto da lugar a respuestas incorrectas.

S2. *Errores que tienen su origen en la ausencia de sentido*. Los divide en tres clases: errores aritméticos, de procedimiento y de mala interpretación.

S3. *Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales*. Son aquellos como los olvidos, bloqueos, falta de concentración, …

5. Modelo de clasificación de errores de Brousseau (2001):

B1. *Error a un nivel práctico*. En resumen, cuando el profesor considera que son errores de cálculo.

B2. *Error en la tarea*. Básicamente cuando el profesor considera que es un descuido.

B3. *Error de técnica*. Cuando el profesor cree que la ejecución no ha sido correcta.

B4. *Error de tecnología*. Cuando se equivocan al utilizar los procedimientos.

B5. *Error de nivel teórico*. Cuando el profesor incrimina los conocimientos teóricos del alumno que sirven de base a la tecnología y a las técnicas asociadas.

A continuación, en la Tabla 1 se muestra un ejemplo práctico de varios errores típicos en matemáticas clasificados según los modelos citados anteriormente.

Tabla 1. *Errores clasificados según los modelos citados.*

Error	**Radatz (1979)**	**Movshovitz – Hadar (1987)**	**Astolfi (1999)**	**Socas (1997)**	**Brousseau (2001)**
Utilizar datos de forma errónea.	-	M1	A1	S3	B3
Inventar datos.	-	M6	-	S3	B2
Confundir el concepto involucrado en la resolución del ejercicio.	R3	M4	A5	S2	B4
No relacionar el concepto con las unidades que le corresponden.	R4	-	A3	S1	B5

Fuente: Elaboración propia.

Como se observa en la Tabla 1, cuando se categorizan los errores cometidos según los diversos autores, hay categorías que no se corresponden con ellos. Por tanto, no siempre se puede categorizar un error según una única clasificación de errores.

3.3. GeoGebra

El software dinámico GeoGebra es un software de libre acceso y proviene de la unión de dos palabras: geometría y álgebra. GeoGebra es definido a través de su página web como un software educativo de libre acceso que se centra en la presentación simultánea de la Geometría y el Algebra, mediante una interfaz muy sencilla que presenta una Vista Algebraica, una de las ventanas con las que se presenta el software, y la Vista

Geométrica, otra ventana en la que se muestran los objetos geométricos correspondientes. Además, GeoGebra no se limita a estas áreas, sino que a lo largo de los años ha ido sufriendo modificaciones dando como resultado versiones que también tienen implementadas otras ramas como la Estadística, a través de hojas de cálculo.

Tras una búsqueda bibliográfica extensa, la herramienta GeoGebra posee muchas ventajas para el proceso de enseñanza – aprendizaje:

- *Motivación del alumnado.* El uso de nuevas tecnologías estimula la participación del alumnado acercando el aprendizaje de las matemáticas a la sociedad actual (García y Romero, 2007). El software educativo es una herramienta para atraer a los alumnos. Además, GeoGebra posee una interfaz con diversos elementos para captar la atención del alumnado y focalizarlos. La herramienta también permite facilitar la comprensión de ciertos conceptos matemáticos que resultan complicados para el alumnado. Asimismo, el trabajo con software informático y ordenadores hace que los estudiantes lo vean como algo lúdico y tengan una mayor motivación (Ferro et al., 2009).
- *Innovación*. Usar herramientas tecnológicas permite diseñar actividades novedosas (García y Romero, 2007). Hay que tener en cuenta que no siempre una innovación educativa tiene como consecuencia un mejor rendimiento, pero el gran número de estudios acerca de esta herramienta hace que, en este caso, si ayude a mejorar los errores del alumnado.
- *Adaptación a los ritmos individuales de trabajo*. El uso de ordenador permite la posibilidad de adaptarse al ritmo de trabajo de cada alumno al existir la funcionalidad de guardado.
- *Individualización y autonomía del trabajo del alumnado*. El uso del ordenador fomenta la participación activa del alumno en la construcción de su aprendizaje (Macías, 2007). Además, el uso del ordenador conlleva que el alumno se vuelva más autónomo.

Sin embargo, aunque el programa posee numerosas ventajas, no debemos olvidar algunos de los inconvenientes. Sordo (2005) advierte ciertas limitaciones:

- La resolución automática de las operaciones podría conllevar una pérdida de habilidades operatorias por parte del alumnado. Esto se podría evitar realizando ejercicios a mano y a ordenador alternadamente.

- El ordenador siempre lo maneja una persona, es decir, el planteamiento debe ser creado por el alumno.
- La resistencia al cambio de diversos docentes a utilizar la tecnología en el aula.

Existen numerosas investigaciones que muestran cómo se desarrolla una experiencia educativa al aplicar el software de geometría dinámica GeoGebra en el aula (Aranda y Callejo, 2012; Choque, 2013; García, 2011; Gruszycki et al., 2012; Reid y Etcheverry, 2014).

García (2011) cuenta en su tesis doctoral que incorporar el programa GeoGebra al aula hizo que muchos estudiantes cambiaron considerablemente su actitud hacia las matemáticas, obteniendo así, un aprendizaje más significativo.

Aranda y Callejo (2012) sostienen que utilizar los applets del programa GeoGebra permite a los estudiantes desarrollar una mejor comprensión de la aproximación gráfica, superando la visión algorítmica y analítica, al mismo tiempo que proporciona un entorno favorable para construir una red de ideas relacionadas.

Gruszycki et al. (2012) diseñaron secuencias didácticas utilizando el software dinámico GeoGebra con el objetivo de mejorar la comprensión conceptual en geometría analítica. Sostienen que los alumnos superarían los errores y dificultades que tuvieran.

Choque (2013) investiga acerca de la influencia de GeoGebra en la resolución de problemas de Geometría para los estudiantes de 4º ESO. Concluyó que los que habían utilizado el software GeoGebra mejoraron la comprensión y el razonamiento geométrico.

Reid y Etcheverry (2014), tras detectar dificultades y limitaciones en el proceso de enseñanza – aprendizaje para el área de Geometría, diseñan una propuesta de mejora con la utilización del software GeoGebra. Además, este estudio se asemeja al diseño de una de mis actividades del TFM ya que también utilizan los rompecabezas en el proceso de aprendizaje. Las autoras sostienen que utilizar un rompecabezas fue percibido como una experiencia agradable que les permitió descubrir nuevas “cosas” y dio rienda suelta a su creatividad, facilitando así, el aprendizaje de conceptos geométricos.

4. Marco metodológico

En este apartado vamos a describir la muestra utilizada de cada una de las encuestas y continuaremos analizando estadísticamente los resultados de dichas encuestas con el objetivo de extraer el mayor número de conclusiones para nuestra muestra incidental.

La primera encuesta creada estaba destinada para profesores en activo para conocer su experiencia en la práctica diaria. El objetivo principal fue el de saber de primera mano cuáles son las principales dificultades en el bloque de geometría, así como los niveles de dificultad del resto de bloques y la utilización o no de material manipulativo y recursos digitales. La encuesta se diseñó en varias partes, en primer lugar quisimos conocer los años de experiencia en activo y la formación superior realizada para después estudiar si existía alguna correlación entre estas dos variables y el resto de las variables del estudio que se detallan a continuación. En segundo lugar, se buscó saber cómo clasificaban los diferentes bloques de la asignatura de matemáticas según su dificultad y su atractivo, conociendo también las dificultades específicas que habían experimentado los docentes en el bloque de geometría. En tercer lugar, se preguntó si habían utilizado o no tanto materiales manipulativos como recursos digitales y, en caso afirmativo, cuáles eran dichas herramientas. Por último, les preguntamos cuál creían que era el origen de los errores y dificultades en el bloque de geometría basándonos en las diferentes clasificaciones de errores estudiadas en el Capítulo 3.

La segunda encuesta fue destinada al alumnado de 3º, 4º y Bachillerato. En primer lugar, clasificamos a los estudiantes según su curso académico. En segundo lugar, se les pide clasificar, al igual que a los profesores, el atractivo y dificultad de cada uno de los bloques, así como cuáles son, bajo su punto de vista, las mayores dificultades en el área de geometría. Por último, quisimos averiguar si los alumnos han tenido la oportunidad de utilizar con materiales manipulativos o recursos digitales para la enseñanza de geometría, cuáles han sido y si los han utilizado con anterioridad o ha sido algo novedoso de este curso. Estas preguntas fueron diseñadas para conocer cuál es el nivel previo del alumnado respecto a los materiales manipulativos o respecto a los programas digitales.

4.1. Descripción de la muestra

Para la encuesta del profesorado, participaron 30 profesores en activo de las comunidades autónomas de Madrid, Castilla La Mancha y Cantabria. La muestra se ha seleccionado por muestreo incidental, seleccionando a los individuos a los que teníamos fácil acceso. Los profesores que han contestado a la encuesta son profesores en activo del IES José Luis López Aranguren, antiguos alumnos del Máster de Formación del Profesorado, mis tutores del TFM y sus compañeras y compañeros de departamento que están ejerciendo la labor docente.

Para la encuesta del alumnado, participaron 47 estudiantes de 3.º, 4.º de ESO y 1.º Bachillerato del IES José Luis López Aranguren, que fue el centro dónde realicé las prácticas de este máster. Es un centro público de la Comunidad de Madrid, situado en Fuenlabrada. La muestra, de nuevo, se ha seleccionado por muestreo incidental, seleccionando a los individuos a los que teníamos fácil acceso.

Hemos elegido realizar las encuestas a través de los Formularios de Google (Google Forms) ya que el uso de esta plataforma ha permitido garantizar la confidencialidad de nuestra muestra.

4.2. Análisis de la encuesta del profesorado

A continuación, se muestra el enlace del cuestionario aplicado a la muestra de profesores y también se podrán ver las preguntas en el Anexo A.

https://forms.gle/XWiSbgZk8cuwyACb8

Una vez todos los profesores contestaron la encuesta se exportaron los datos en un archivo *.csv* que la propia plataforma de Google permite descargar. Este archivo fue importado en el programa estadístico SPSS dónde realizamos diversos análisis estadísticos. Para hacer los análisis estadísticos empezamos categorizando las diferentes variables estadísticas ayudándonos del libro Pérez Juste et al. (2009) con el que dicotomizamos las variables necesarias y realizamos los diferentes test de correlación idóneos según la clasificación de las variables.

El coeficiente de correlación simple mide el valor de la covariación o variación conjunta de dos series de datos. El valor de ese coeficiente nos marca la existencia de una relación directa de variables (valores positivos) o inversa (valores negativos), es decir, los calores cuantitativos del coeficiente se sitúan entre -1 y 1. En el campo de investigación educativa nos enfrentamos al problema de cómo interpretar los valores de estos coeficientes. Debemos tener en cuenta que depende de diversos factores, entre otros, del procedimiento empleado en su cálculo y de la calidad de medida de las variables. Esto indica, que no es lo mismo una correlación de 0,60 en unas variables y otras. Aunque existen diversas directrices en su interpretación, en general, la mayor parte de los investigadores tienden a identificar tres aspectos (Pérez Juste et al., 2009):

- *El tipo de variables que se relacionan*: Cuando se da una similitud entre el valor del coeficiente encontrado en el estudio empírico y el encontrado en el mismo grupo en trabajos previos, también cuando se han encontrado unos valores elevados en anteriores estudios y se repite la misma tendencia de los datos.
- *La variabilidad del grupo*: Cuanto mayor es la variabilidad del grupo mayor será el coeficiente de correlación.
- *La finalidad a la que se destina el coeficiente*: Cuando el coeficiente se emplea para determinar la fiabilidad de un instrumento de medida debe tener valores por encima de 0,85; en cambio para determinar la validez con 0,60 puede ser aceptable.

Otro de los aspectos para los que no existe consenso entre diversos autores es el de establecer unos intervalos que categoricen y valoren los coeficientes de correlación. En la mayoría de las ocasiones se suelen aceptar las interpretaciones que se muestran en la Tabla 2 (Pérez Juste et al., 2009).

Tabla 2. *Interpretación del valor del coeficiente de correlación simple.*

Valor del coeficiente	Interpretación
Entre 0,00 y + o – 0,20	Correlación muy baja, indiferente, despreciable
Entre 0,21 y + o – 0,40	Correlación baja
Entre 0,41 y + o – 0,70	Correlación media, marcada, notable.
Entre 0,71 y + o – 0,90	Correlación alta, elevada, fuerte.
Entre 0,91 y + o – 1	Correlación muy alta, muy elevada.

En la investigación en educación la interpretación de los coeficientes se suele completar con su significación estadística, es decir, se trata de poder afirmar que la correlación entre dos variables es real y no se puede explicar por efecto del azar. En el caso del programa estadístico SPSS, cuando calcula los diferentes coeficientes de correlación mediante los paquetes estadísticos, junto al valor cuantitativo del coeficiente, aparece el valor de la significatividad estadística. Antes de comenzar nuestro análisis estadístico, es importante señalar que la elección de los diferentes coeficientes de correlación depende de dos aspectos: el nivel de medida de esas variables y la categoría de las mismas. Mostramos a continuación todos los análisis estadísticos que realizamos con el programa SPSS:

- **Porcentajes de Dificultades por Bloque.**

  Previamente a realizar los test de correlación, se realizaron *análisis descriptivos* dónde observamos cómo se distribuían los porcentajes de dificultad por bloque.

Figura 2. *Análisis descriptivo de Dificultad Bloque 2: Números y Álgebra.*

Dificultad_NumAlgebra

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	3	10,0	10,0	10,0
	2	5	16,7	16,7	26,7
	3	8	26,7	26,7	53,3
	4	14	46,7	46,7	100,0
	Total	30	100,0	100,0	

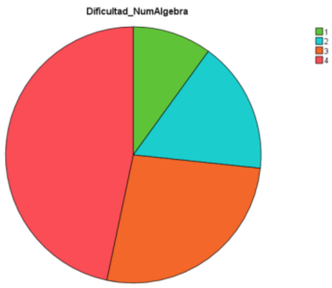


Figura 3. *Análisis descriptivo de Dificultad Bloque 3: Geometría.*

Dificultad_Geometria

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	4	13,3	13,3	13,3
	2	7	23,3	23,3	36,7
	3	13	43,3	43,3	80,0
	4	6	20,0	20,0	100,0
	Total	30	100,0	100,0	

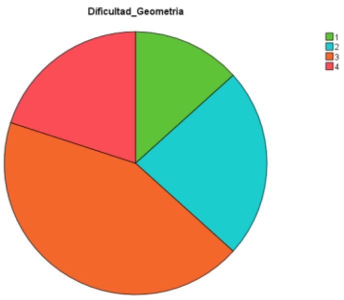


Figura 3. *Análisis descriptivo de Dificultad Bloque 4: Funciones.*

Dificultad_Funciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	3	10,0	10,0	10,0
	2	11	36,7	36,7	46,7
	3	8	26,7	26,7	73,3
	4	8	26,7	26,7	100,0
	Total	30	100,0	100,0	

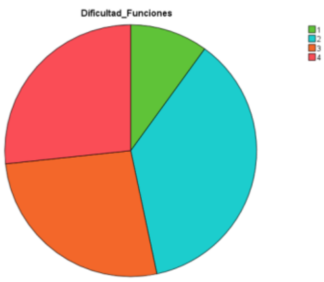
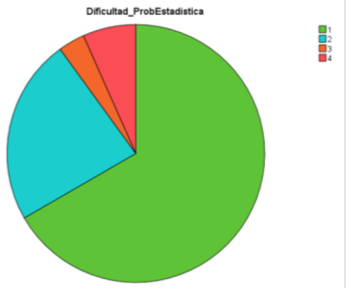


Figura 4. *Análisis descriptivo de Dificultad Bloque 5: Estadística y Probabilidad.*

Dificultad_ProbEstadística

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	20	66,7	66,7	66,7
	2	7	23,3	23,3	90,0
	3	1	3,3	3,3	93,3
	4	2	6,7	6,7	100,0
	Total	30	100,0	100,0	



A simple vista se puede observar que los profesores opinan que el Bloque más sencillo es el Bloque 5: Estadística y Probabilidad y los Bloques de Números y Álgebra y Geometría son los más difíciles.

- **Correlación entre Dificultad Bloque y Años de experiencia**.

  La variable Dificultad Bloque es una variable clasificada en categorías (1, 2, 3, 4, siendo 4 el de mayor y 1 el de menor dificultad) y la variable Años de experiencia también es una variable clasificada en categorías (Menos de 10, Entre 10 y 15, Entre 15 y 20, Entre 20 y 30, Más de 30).

  Por tanto, el test de correlación debe ser el coeficiente de Contingencia (C), que en el programa SPSS se realiza clicando las siguientes pestañas: *Analizar – Estadísticos descriptivos – Tablas cruzadas*. Se obtuvieron los siguientes resultados.

Figura 5. *Correlación Dificultad Bloque 2: Números y Álgebra y Años de Experiencia.*

Medidas simétricas[c]

		Valor	Significación aproximada
Nominal por Nominal	Coeficiente de contingencia	,615	,108
N de casos válidos		30	

c. Los estadísticos de correlación están disponibles sólo para datos numéricos.

Figura 6. *Correlación Dificultad Bloque 3: Geometría y Años de Experiencia.*

Medidas simétricas[c]

		Valor	Significación aproximada
Nominal por Nominal	Coeficiente de contingencia	,642	,050
N de casos válidos		30	

c. Los estadísticos de correlación están disponibles sólo para datos numéricos.

Figura 7. *Correlación Dificultad Bloque 4: Funciones y Años de Experiencia.*

Medidas simétricas[c]

		Valor	Significación aproximada
Nominal por Nominal	Coeficiente de contingencia	,529	,472
N de casos válidos		30	

c. Los estadísticos de correlación están disponibles sólo para datos numéricos.

Figura 8. *Correlación Dificultad Bloque 5: Estadística y Probabilidad y Años de Experiencia.*

Medidas simétricas[c]

		Valor	Significación aproximada
Nominal por Nominal	Coeficiente de contingencia	,600	,154
N de casos válidos		30	

c. Los estadísticos de correlación están disponibles sólo para datos numéricos.

Todos los test de contingencia están cercanos al valor 0,60 por lo que podríamos decir que la correlación es media, marcada o notable. De hecho, hay algunos bloques como son el de Números y Álgebra y Geometría que poseen un nivel de correlación superior a 0,60, por lo que se interpreta como que existe una relación más fuerte entre la dificultad de estos bloques y los años de experiencia.

- **Correlación entre Dificultad Bloque y Formación Superior**.

  La variable Dificultad Bloque ya ha sido estudiada en el apartado anterior y la variable Formación Superior es una variable cualitativa que ha sido dicotomizada de la siguiente manera: 0 – estudios superiores diferentes a matemáticas y 1 – estudios superiores análogos a matemáticas. Con este tipo de variables según Pérez Juste et al. (2009) hay que utilizar el coeficiente de correlación Biserial pero en el programa SPSS basta con utilizar el coeficiente de correlación de Pearson. Para calcularlo clicamos las siguientes pestañas: *Analizar – Correlacionar – Bivariadas – Coeficiente de correlación de Pearson*. Se obtuvieron los siguientes resultados:

Figura 9. *Correlación Dificultad Bloque 2: Números y Álgebra y Formación Superior.*

Correlaciones

		Estudios_Superiores_Dicotomica	Dificultad_NumAlgebra
Estudios_Superiores_Dicotomica	Correlación de Pearson	1	,086
	Sig. (bilateral)		,650
	N	30	30
Dificultad_NumAlgebra	Correlación de Pearson	,086	1
	Sig. (bilateral)	,650	
	N	30	30

Figura 10. *Correlación Dificultad Bloque3: Geometría y Formación Superior.*

Correlaciones

		Estudios_Superiores_Dicotomica	Dificultad_Geometria
Estudios_Superiores_Dicotomica	Correlación de Pearson	1	,223
	Sig. (bilateral)		,237
	N	30	30
Dificultad_Geometria	Correlación de Pearson	,223	1
	Sig. (bilateral)	,237	
	N	30	30

Figura 11. *Correlación Dificultad Bloque 4: Funciones y Formación Superior.*

Correlaciones

		Estudios_Superiores_Dicotomica	Dificultad_Funciones
Estudios_Superiores_Dicotomica	Correlación de Pearson	1	-,132
	Sig. (bilateral)		,488
	N	30	30
Dificultad_Funciones	Correlación de Pearson	-,132	1
	Sig. (bilateral)	,488	
	N	30	30

Figura 12. *Correlación Dificultad Bloque 5: Estadística y Probabilidad y Formación Superior.*

Correlaciones

		Estudios_Superiores_Dicotomica	Dificultad_ProbEstadística
Estudios_Superiores_Dicotomica	Correlación de Pearson	1	-,199
	Sig. (bilateral)		,293
	N	30	30
Dificultad_ProbEstadística	Correlación de Pearson	-,199	1
	Sig. (bilateral)	,293	
	N	30	30

Se observa a simple vista que los coeficientes de Pearson obtenidos indican que hay una relación muy baja, indiferente o despreciable entre las variables menos para el Bloque de Geometría que es una relación baja. Aún así, esto implica que no hay relación entre ambas variables.

- **Porcentaje de Atractivo por Bloques.**

Una de las preguntas comunes que tenían ambas encuestas (profesores y alumnos) era que ordenaran los bloques según su atractivo. Con esta pregunta queríamos observar si había relación entre el atractivo que mostraban los profesores y los alumnos. Para ello, se realizaron análisis descriptivos dónde observamos cómo se distribuían los porcentajes de atractivo por bloque.

Figura 13. *Análisis descriptivo (profesores) del Atractivo Bloque 2: Números y Álgebra.*

Atractivo_NumAlgebra

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	12	40,0	40,0	40,0
	2	5	16,7	16,7	56,7
	3	6	20,0	20,0	76,7
	4	7	23,3	23,3	100,0
	Total	30	100,0	100,0	

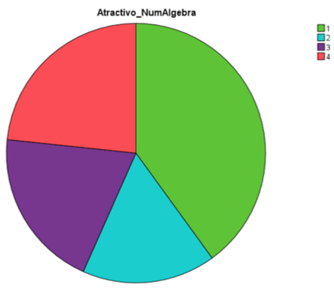


Figura 14. *Análisis descriptivo (profesores) del Atractivo Bloque 3: Geometría.*

Atractivo_Geometria

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	3	10,0	10,0	10,0
	2	10	33,3	33,3	43,3
	3	9	30,0	30,0	73,3
	4	8	26,7	26,7	100,0
	Total	30	100,0	100,0	

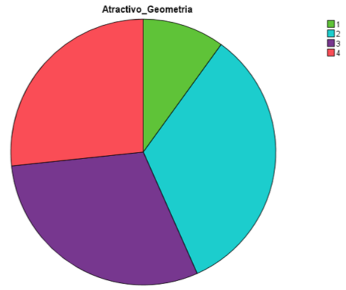


Figura 15. *Análisis descriptivo (profesores) del Atractivo Bloque 4: Funciones.*

Atractivo_Funciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	12	40,0	40,0	40,0
	2	7	23,3	23,3	63,3
	3	7	23,3	23,3	86,7
	4	4	13,3	13,3	100,0
	Total	30	100,0	100,0	

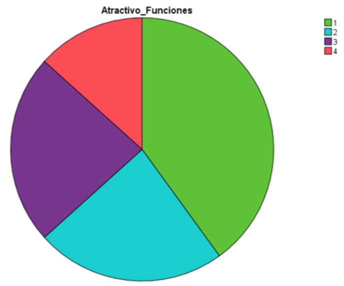
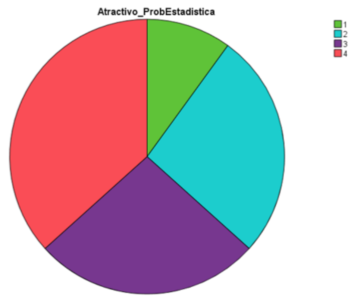


Figura 16. *Análisis descriptivo (profesores) del Atractivo Bloque 5: Estadística y Probabilidad.*

Atractivo_ProbEstadistica

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	3	10,0	10,0	10,0
	2	8	26,7	26,7	36,7
	3	8	26,7	26,7	63,3
	4	11	36,7	36,7	100,0
	Total	30	100,0	100,0	



Podemos ver que para los profesores los bloques más atractivos son Estadística y Probabilidad, después Geometría, posteriormente Números y Álgebra y en último lugar Funciones.

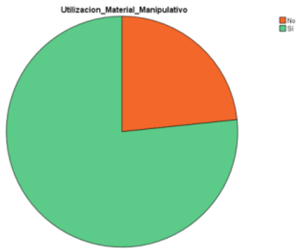
- **Porcentaje de Utilización de material manipulativo.**

Previamente a realizar cualquier correlación entre la variable Utilización material manipulativo y otra, se realizó un *análisis descriptivo* para observar cuántas personas utilizaban dicho material para el bloque de Geometría en su práctica diaria. Se obtuvo los resultados que se muestran en la Figura 15.

Figura 17. *Análisis descriptivo (profesores) de Utilización de material manipulativo.*

Utilizacion_Material_Manipulativo

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	No	7	23,3	23,3	23,3
	Sí	23	76,7	76,7	100,0
	Total	30	100,0	100,0	



Se observa que 23 personas utilizan material manipulativo frente a 7 que no, esto se traduce en hay un 76,7 % de los profesores encuestados que lo utilizan.

- **Correlación entre Utilización de material manipulativo y Años de experiencia.**

La variable Utilización material manipulativo se codificó como una variable dicotómica (0 – No, 1 – Sí) y la variable años de experiencia es una variable clasificada en categorías, como hemos visto anteriormente. De esta manera, el test de correlación utilizado será nuevamente el de contingencia y en la Figura 16 podrán observar los resultados.

Figura 18. *Correlación Utilización material manipulativo y Años de experiencia.*

Medidas simétricas[c]

		Valor	Significación aproximada
Nominal por Nominal	Coeficiente de contingencia	,411	,193
N de casos válidos		30	

c. Los estadísticos de correlación están disponibles sólo para datos numéricos.

El test de contingencia arroja un valor de 0,411 por lo que la relación entre estas dos variables es media.

- **Correlación entre Utilización de material manipulativo y Formación Superior.**

En este caso, las dos variables son dicotómicas y el test apropiado para este tipo de variables es el coeficiente Phi (ϕ). Para realizar este test con el programa SPSS se deben clicar las pestañas: *Analizar – Estadísticos descriptivos – Tablas cruzadas – Estadísticos – Phi y V de Cramer*.

Figura 19. *Correlación Utilización de material manipulativo y Formación Superior.*

Medidas simétricas

		Valor	Error estándar asintótico[a]	T aproximada[b]	Significación aproximada
Nominal por Nominal	Phi	-,323			,077
	V de Cramer	,323			,077
	Coeficiente de contingencia	,308			,077
Intervalo por intervalo	R de Pearson	-,323	,147	-1,808	,081[c]
Ordinal por ordinal	Correlación de Spearman	-,323	,147	-1,808	,081[c]
N de casos válidos		30			

a. No se presupone la hipótesis nula.

b. Utilización del error estándar asintótico que presupone la hipótesis nula.

c. Se basa en aproximación normal.

Podemos observar en la Figura 17, que el coeficiente Phi es $-0{,}323$ que indica una correlación baja entre la utilización de material manipulativo y la formación de los docentes.

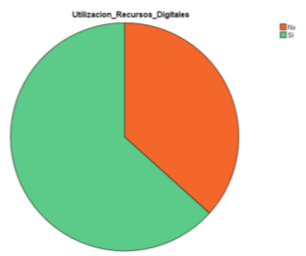
- **Porcentaje de Utilización de recursos digitales.**

Análogo a lo anterior, antes de realizar cualquier correlación entre la variable Utilización de recursos digitales y cualquier otra, se realizó un *análisis descriptivo* para observar cuántas personas utilizaban dichos recursos para el bloque de Geometría en su práctica diaria. Se obtuvo los resultados que se muestran en la Figura 18.

Figura 20. *Análisis descriptivo (profesores) de Utilización de recursos digitales.*

Utilizacion_Recursos_Digitales

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	No	11	36,7	36,7	36,7
	Sí	19	63,3	63,3	100,0
	Total	30	100,0	100,0	



De nuevo, hay más profesores que han utilizado recursos digitales frente a los que no, pero la proporción es menor que aquellos que usan material manipulativo. En este caso hay 19 “si” y 11 “no”, que equivale a que un 63,3 % utiliza recursos digitales para enseñar el Bloque de Geometría.

- **Correlación entre Utilización de recursos digitales y Años de experiencia.**

De nuevo, tenemos que utilizar el coeficiente de contingencia porque utilización de recursos digitales es una variable dicotómica (0 – No, 1 – Sí) y los años de experiencia es categórica. Los resultados se pueden observar en la Figura 21.

Figura 21. *Correlación Utilización de recursos digitales y Años de experiencia.*

Medidas simétricas

		Valor	Significación aproximada
Nominal por Nominal	Coeficiente de contingencia	,369	,315
N de casos válidos		30	

El valor que da SPSS es 0,369 por lo que la relación entre ambas variables es baja.

- **Correlación entre Utilización de recursos digitales y Formación Superior.** De nuevo nos encontramos dos variables dicotómicas por lo que tenemos que calcular el coeficiente Phi.

Figura 22. *Correlación Utilización de recursos digitales y Formación Superior.*

Medidas simétricas

		Valor	Significación aproximada
Nominal por Nominal	Phi	-,107	,558
	V de Cramer	,107	,558
N de casos válidos		30	

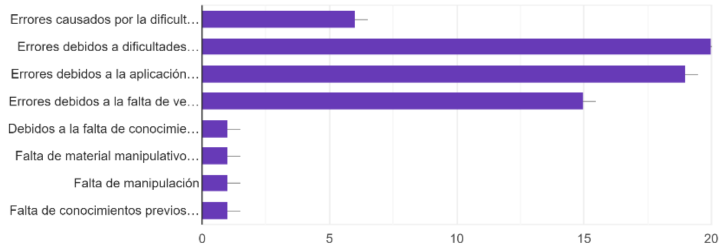
Tras analizar la salida vemos que obtenemos un valor de $-0,107$ por lo que la relación entre ambas variables es muy baja, indiferente o despreciable.

Tras terminar los análisis estadísticos con el programa SPSS se observa que no hay mucha relación, para nuestra muestra, de las variables utilizadas. Únicamente se observa que hay una relación más fuerte entre la Dificultad de los bloques y los años de experiencia dando clase.

Hubo otra serie de preguntas de respuesta larga, como las preguntas 2.2, 2.4, 2.9 y 2.11, que fueron diseñadas con el objetivo de obtener palabras claves que definieran los errores y dificultades de los alumnos en el bloque de Geometría. Las palabras claves que se encontraron, para posteriormente diseñar actividades que trataran de solucionar dichos problemas, fueron: visión espacial, abstracción, razonamiento y memorización de fórmulas.

Para terminar con el análisis de la encuesta de los profesores, diseñamos la penúltima pregunta de la encuesta con el objetivo de conocer cuál creen que es el origen de los errores en la enseñanza del Bloque de Geometría. Era una pregunta multiopción dónde podían clicar en varios apartados y se puede observar en la Figura 23 cuáles fueron los resultados.

Figura 23. *Análisis de los errores y dificultades Bloque Geometría.*



Se observa que la mayoría de los profesores sostienen que el origen se debe a dificultades para trabajar la información espacial; debidos a la aplicación de reglas, fórmulas o estrategias irrelevantes; o debidos a la falta de verificación de la solución y las unidades de las mismas. Además existía una opción dónde cada profesor podía añadir el origen de las dificultades y errores que quisiera y vemos que dos de ellos muestran la necesidad de que se use material manipulativo en clase, otra persona lo achaca a una falta de conocimientos previos y otra a la falta de conocimiento de los profesores en Primaria y Secundaria. Ayudándonos de esta pregunta, se diseñaron las diferentes actividades que se mostrarán en el Capítulo 5.

4.3. Análisis de la encuesta del alumnado

A continuación, se muestra el enlace del cuestionario aplicado a la muestra de alumnos y las preguntas se pueden observar en el Anexo B.

https://forms.gle/iXMotDmuUefFuvQe9

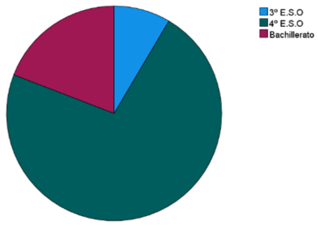
De igual manera que con la encuesta de los profesores, exportamos las respuestas de los alumnos al programa SPSS y realizamos diferentes análisis estadísticos que nos ayudaron a resumir la información y compararla con las respuestas de los profesores. Mostramos a continuación los diferentes análisis realizados:

- **Distribución por cursos.**

Figura 24. *Distribución de alumnos por curso.*

Curso

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	3º E.S.O	4	8,5	8,5	8,5
	4º E.S.O	34	72,3	72,3	80,9
	Bachillerato	9	19,1	19,1	100,0
	Total	47	100,0	100,0	



Se puede observar a simple vista que la mayor parte de alumnado que contestó a la encuesta son alumnos de 4º ESO.

- **Porcentaje de Atractivo por Bloques.**

Con el objetivo de comparar la pregunta del atractivo de los profesores y los alumnos, se realizaron los mismos análisis descriptivos para observar cómo se distribuían los porcentajes de atractivo por bloque.

Figura 25. *Análisis descriptivo (alumnos) del Atractivo Bloque 2: Números y Álgebra.*

Atractivo_NumAlg

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	8	17,0	17,0	17,0
	2	9	19,1	19,1	36,2
	3	11	23,4	23,4	59,6
	4	19	40,4	40,4	100,0
	Total	47	100,0	100,0	

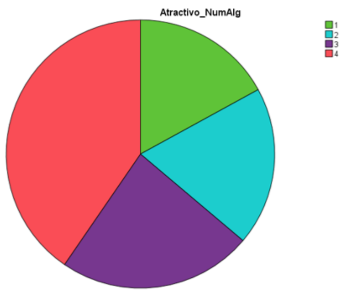


Figura 26. *Análisis descriptivo (alumnos) del Atractivo Bloque 3: Geometría.*

Atractivo_Geometria

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	16	34,0	34,0	34,0
	2	9	19,1	19,1	53,2
	3	16	34,0	34,0	87,2
	4	6	12,8	12,8	100,0
	Total	47	100,0	100,0	

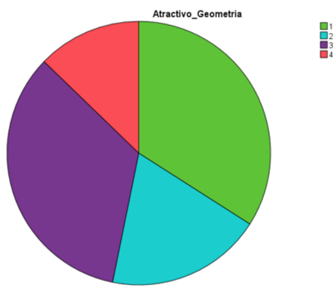


Figura 27. *Análisis descriptivo (alumnos) del Atractivo Bloque 4: Funciones.*

Atractivo_Funciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	10	21,3	21,3	21,3
	2	16	34,0	34,0	55,3
	3	17	36,2	36,2	91,5
	4	4	8,5	8,5	100,0
	Total	47	100,0	100,0	

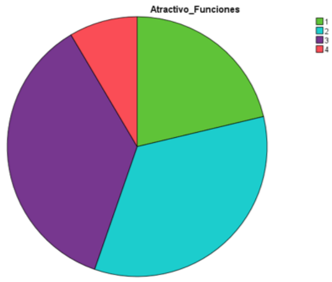
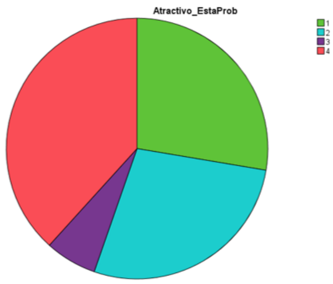


Figura 28. *Análisis descriptivo (alumnos) del Atractivo Bloque 5: Estadística y Probabilidad.*

Atractivo_EstaProb

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	1	13	27,7	27,7	27,7
	2	13	27,7	27,7	55,3
	3	3	6,4	6,4	61,7
	4	18	38,3	38,3	100,0
	Total	47	100,0	100,0	



En el análisis de las encuestas de los profesores vimos que, para ellos, los más atractivos eran Estadística y Probabilidad, después Geometría, posteriormente Números y Álgebra y en último lugar Funciones. Sin embargo, para los alumnos, el bloque más atractivo es Números y Álgebra, después Estadística y Probabilidad, posteriormente Geometría y por último Funciones.

En mi opinión, el orden de atractivo que han puesto los alumnos es por lo bien o lo mal que se les dan los diferentes bloques. De hecho, me llama mucho la atención que el segundo bloque más atractivo sea el de Estadística y Probabilidad ya que cuando elaboraron la encuesta mi tutor de prácticas me comentó que nunca habían visto ese bloque en la ESO. Para terminar, vemos que nada tiene que ver el atractivo que sienten los profesores al enseñar unos u otros bloques que el que tiene el alumnado,

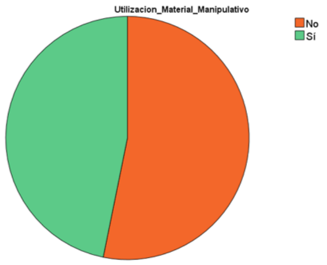
- **Porcentaje de Utilización de material manipulativo.**

Quisimos obtener las estadísticas de cuántos estudiantes habían tenido la oportunidad de utilizar material manipulativo para el aprendizaje del bloque de Geometría.

Figura 29. *Porcentaje (alumnos) de utilización de material manipulativo.*

Utilizacion_Material_Manipulativo

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	No	25	53,2	53,2	53,2
	Sí	22	46,8	46,8	100,0
	Total	47	100,0	100,0	



En el diagrama de sectores se puede observar que hay 22 personas que sí han utilizado y 25 que no. Esto se debe a que los profesores del instituto dónde realicé las prácticas son profesores que están a punto de jubilarse que basan su práctica diaria en la clase magistral sin utilizar ningún recurso novedoso.

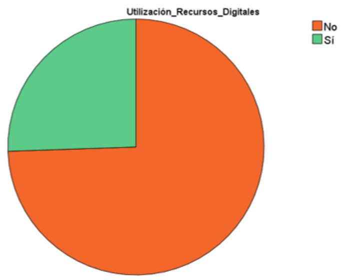
- **Porcentaje de Utilización de recursos digitales.**

También quisimos tener una estadística acerca de la utilización de programas informáticos o recursos digitales. Para ello se realizó un análisis descriptivo que se puede observar en la Figura 31.

Figura 30. *Porcentaje (alumnos) de utilización de recursos digitales.*

Utilización_Recursos_Digitales

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	No	35	74,5	74,5	74,5
	Sí	12	25,5	25,5	100,0
	Total	47	100,0	100,0	



De igual forma que para el material manipulativo, aunque esta vez de una manera más rotunda, se ve a simple vista que existe gran número de estudiantes que nunca antes ha utilizado recursos digitales para el aprendizaje del bloque de Geometría, algo que en mi opinión, es preocupante. Hoy en día existen multitud de herramientas digitales para que los alumnos aprendan o afiancen conceptos matemáticos.

5. Actividades manipulativas y digitales

En capítulos anteriores, hemos tratado de identificar algunas dificultades en relación con la enseñanza y aprendizaje del bloque de Geometría. A través de las encuestas, hemos identificado que gran parte de los problemas surgen por el razonamiento, la visión espacial, la abstracción, memorización de fórmulas. De esta manera, surge la necesidad de integrar recursos, específicamente materiales manipulativos y digitales a las prácticas diarias, que permitan fortalecer las carencias que se han observado y los estudiantes adquieran los conocimientos necesarios para resolver algunos problemas de su entorno escolar y cotidiano.

5.1. Desarrollo de las tareas

A continuación, pasamos a mostrar cada una de las tareas diseñadas para eliminar o disminuir los posibles errores y dificultades en el área de Geometría.

1. Descubriendo con el rompecabezas de Van Hiele

En la enseñanza de la Geometría, los rompecabezas pueden ser utilizados como un recurso para la enseñanza de conceptos matemáticos específicos, inspirando la observación de los alumnos, la imaginación, el análisis de las formas, la creatividad y el pensamiento lógico (Yang y Chen, 2010). Esta actividad fue diseñada en parte por la importancia que se da en el modelo de Vinner (1991) a la representación o la visualización, haciendo hincapié en la experiencia del alumno se ve potenciada a través de la manipulación manual y digital. Las manipulaciones son consideradas una herramienta fundamental de aprendizaje, permitiendo que los estudiantes, muevan, giren y roten objetos en la pantalla a través de la manipulación con el ratón (Moyer et al., 2002; Sedig, 2008). Es por eso, que la primera actividad que diseñamos fue adaptar el uso del rompecabezas de manera manipulativa y de manera digital para apoyar el aprendizaje.

Para elaborar esta actividad se han tenido en cuenta los niveles y fases del modelo de razonamiento de Van Hiele. Es una actividad muy completa diseñada para afianzar el nivel 2 y empezar la transición hacia el nivel 3. Combina la utilización de material manipulativo y los recursos digitales con la herramienta GeoGebra. Permite a los alumnos aprender los conceptos involucrados de una manera manipulativa ya que cada alumno tendrá a su disposición el rompecabezas en goma EVA y un ordenador con el que poder explorar los diferentes applets creados. Tanto la actividad como los applets de GeoGebra creados son de elaboración propia.

Pueden comprobar el análisis didáctico de la actividad en el **Anexo C**, la ficha diseñada para los alumnos en el **Anexo D** y la ficha con la descripción minuciosa para el profesor en el **Anexo E**.

Una vez el alumnado ha realizado la actividad utilizando tanto material manipulativo como el recurso digital, el profesor puede pasar a mostrar los recursos digitales (https://www.geogebra.org/m/rnfhbues y https://www.geogebra.org/m/megjgj4s), dónde se clasifican los triángulos según ángulos o lados, así como los cuadriláteros.

2. La hormiga en el terrón.

En la enseñanza tradicional de Geometría, se formaban excelentes calculistas de medida, alumnos teóricos que en el contexto del aula eran capaces de resolver complicados problemas geométricos pero que en la vida cotidiana dudaban cuando tenían que resolver un problema geométrico elemental (Barrantes, 2003). Los contenidos actuales se caracterizan por tener una visión práctica del aprendizaje, valorando y aplicando los contenidos dentro y fuera del aula. En resumen, es fundamental que sean capaces de resolver ejemplos que desarrollen la creatividad y el ingenio promoviendo contenidos más intuitivos que analíticos.

En primer lugar, la actividad busca que los estudiantes descubran y manipulen los diferentes elementos de los cuerpos geométricos (aristas y vértices). En segundo lugar, se pretende conectar la geometría espacial con la geometría plana, ya que, en muchas ocasiones estas dos partes de la geometría aparecen totalmente separadas, aspecto que hace que los estudiantes lleguen a pensar que son independientes (Barrantes, 2003). De nuevo, la actividad fue diseñada partiendo del modelo de Vinner (1991) dónde la visualización es fundamental y se vuelve a ver potenciada a través de la manipulación manual y digital. Esta actividad es de elaboración propia si bien es cierto que para diseñarla se tomaron de ayuda ejemplos del NRICH (https://nrich.maths.org/). En tercer lugar, también se diseñó tras analizar las respuestas de los profesores quienes sostenían que los fallos provenían de no ejercitar la visión espacial, por lo que esta tarea busca hacerlo.

Pueden comprobar el análisis didáctico de la actividad en el **Anexo F**, la ficha diseñada para los alumnos en el **Anexo G** y la ficha con la descripción minuciosa para el profesor en el **Anexo H**.

Una vez el alumnado ha realizado la actividad utilizando tanto material manipulativo como el recurso digital, el profesor puede pasar a mostrar el recurso digital (https://www.geogebra.org/m/yhsxm7fz), dónde se realiza el desarrollo plano de los diferentes cuerpos geométricos: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro.

6. Conclusiones

En base al trabajo desarrollado vamos a valorar el grado de consecución de los objetivos generales formulados para nuestra investigación.

6.1. Grado de consecución de los objetivos

Al principio de este trabajo planteamos una serie de objetivos generales y específicos que se pretendían alcanzar. En este epígrafe vamos a valorar su grado de consecución.

Objetivos específicos.

- **Detallar el origen de las errores y dificultades del alumnado.**

Considero que el primer objetivo específico lo hemos cumplido. En primer lugar, ha hecho una clasificación teórica del origen de los errores desde la perspectiva de cinco autores. Además, se han diseñado dos encuestas para alumnos y profesores dónde también hemos analizado sus puntos de vista, determinando de una manera específica los errores en el bloque de geometría.

- **Diseñar una encuesta para el profesorado que nos ayude a detectar los errores en el bloque de Geometría en su práctica diaria.**

Este objetivo también ha sido satisfecho. Desde un primer momento, se trató de diseñar una encuesta para docentes que nos permitiera conocer la práctica diaria desde la perspectiva de profesores en activo. Fue muy útil analizarla como se ha visto en capítulos anteriores y gracias a ese análisis, se diseñaron actividades que pudieran solucionar los errores tipificados por los profesores. El único aspecto a mejorar es el número de profesores encuestados, que han sido un número poco significativo.

- **Diseñar una encuesta para los alumnos que nos ayude a comprender cómo ven el bloque de Geometría.**

De igual forma, el diseño y análisis de la encuesta de los alumnos también fue muy importante. Es igual de necesario saber la perspectiva docente como la estudiantil. Además, en el diseño de las actividades también se tuvieron en cuenta las perspectivas de los estudiantes. Al igual que para la encuesta de profesores, el número de respuestas fue muy bajo por lo que para mejorar el estudio habría que pasar la encuesta a más alumnos.

- **Analizar e interpretar ambas encuestas estadísticamente.**

Ayudándonos del programa SPSS, hemos analizado e interpretado la diferente información que nos mostraban las encuestas. Ha sido fundamental encontrar el libro de Pérez Juste et al. (2009) que nos ayudó a realizar las correlaciones entre las diferentes variables de manera adecuada. Por tanto, considero que este objetivo también está conseguido.

Objetivo general:

- **Estudiar los errores y dificultades de los alumnos en la ESO para el bloque de Geometría y proponer actividades manipulativas y digitales que ayuden a dichos errores y dificultades observados.**

Por tanto, considero que el objetivo general del trabajo ha sido satisfecho. Hemos analizado teóricamente el origen de los errores y dificultades de los alumnos en la enseñanza de las matemáticas y en el bloque de geometría. Se han diseñado encuestas que nos han permitido acercarnos a la práctica diaria de los profesores y alumnos y para finalizar, hemos diseñado actividades manipulativas y digitales que ayudan a solucionar los problemas observados anteriormente.

6.2. Limitaciones y futuras líneas de investigación

Las principales limitaciones a la hora de realizar este trabajo han sido: la muestra de ambas encuestas es poco significativa y el hecho de no poder llevar a la práctica las actividades diseñadas con el fin de evaluarlas.

Así, este trabajo fin de máster puede mejorar en varios sentidos. En primer lugar, pasar las encuestas a un número más amplio de profesores y alumnos. En segundo lugar, poner en práctica las actividades creadas con grupos de control con el fin de comprobar si dichas actividades consiguen paliar los errores y dificultades del bloque de Geometría, así como evaluarlas de acuerdo a unos criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables adecuados mediante la creación de rúbricas. Por último, continuar diseñando actividades manipulativas o digitales que puedan mejorar el proceso de enseñanza – aprendizaje.

7. Bibliografía

Aranda, C. y Callejo, M.L. (2012) Aproximación al concepto de función primitiva: un experimento de enseñanza con applets de geometría dinámica, 247 – 256.

Astolfi, J. P. (1999). El "error", un medio para enseñar. DIADA Editora.

Ball, D. L.; Thames, M. H. y Phelps, G. (2008) Content knowledge for teaching: what makes it special? Journal of Teacher Education, 59(5), 389-407.

Barrantes, M. (2003). Caracterización de la enseñanza-aprendizaje de la Geometría en Primaria y Secundaria.

Bocco, M. y Canter, C. (2010). Errores en geometría: clasificación e incidencia en un curso preuniversitario. Revista Iberoamericana de Educación, 53 (2).

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in Mathematics. Editado y traducido por Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. y Warfield, V. Mathematics Education Library.

Brousseau, G. (2001). Les erreurs des élèves en mathématiques. Traducido por Brigitte Bernard. Artículo no publicado.

. Carrillo J., Muñoz, M. Contreras, L Rojas, N. Montes, M. y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. Gaceta de la Real Sociedad Matematica Española. 18, (3), 589-605.

Choque, G. E. (2013). Influencia del uso del software GeoGebra en la resolución de problemas de geometría de los estudiantes de cuatro de secundaria de la IE La Cantuta.

Ferro, C., Martínez, A.I. y Otero, Mª. C. (2009). Ventajas del uso de las TIC's en el proceso de enseñanza – aprendizaje desde la óptica de los docentes universitarios españoles. Edutec: Revista electrónica de Tecnología Educativa, 29, 3 – 6.

Franchi, L. y Rincón, A. (2004). Tipología de errores en el área de geometría plana.

García, M. M. (2011). Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir GeoGebra en el aula. Universidad de Almería.

Gruszycki, A. E., Oteiza, L. N., Maras, P. M., Gruszycki, L. O., y Balles, H. A. (2012). Uso de Geogebra para potenciar las diferentes representaciones en geometría analítica. In *Conferencia Latinoamericana de GeoGebra. 520-523*.

Gualdrón, É., y Gutiérrez, Á. (2007). Una aproximación a los descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele para la semejanza.

Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. *Geometría para el siglo XXI,* Síntesis.

Gutiérrez, Á., y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. Tecné, Episteme y Didaxis: TED, 32, 55-70.

Guzmán, C. y Bohórquez, J. M. (2014). Errores en la visualización de figuras en el área de la geometría plana. Estudio de caso.

Macías, D. (2007). Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas. Revista Iberoamericana de Educación, 42(4).

Movshovitz – Hadar, N, Zaslavsky, O. y Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in High School Mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 18, 3 – 14.

Moyer, P. S., Bolyard, J. J. y Spikell, M. A. (2002). What are virtual manipulatives? Teaching Children Mathematics, 8(6), 372-377.

Pérez Juste, R., García, J. L., Gil, J.A. y Galán, A. (2009). Estadística aplicada a la educación. Pearson Prentice Hall.

Radatz, H. (1979). Error Analysis in the Mathematics Education. Journal for Research in Mathematics Education, 9, 163 – 172.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, 69 – 108 en Kilpatrik, J., Gómez, P. y Rico, L.: Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamericana.

Ruano, R., Socas, M., y Palarea, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*.

Ruiz, M., Ávila, P., y Villa-Ochoa, J. (2013). Uso de GeoGebra como herramienta didáctica dentro del aula de matemáticas.

Sedig, K. (2008). From Play to Thoughtful Learning: A design strategy to engage children with mathematical representations. The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 27(1), 65-101.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria, 125 – 154 en Rico, L. y otros: La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Horsori.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje d elas matemáticas. Análisis del enfoque lógico semiótico, 19 – 52.

Sordo, J. M. (2005). Estudio de una estrategia didáctica basada en las nuevas tecnologías para la enseñanza de la geometría. Universidad Complutense de Madrid.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (ed.), Advanced mathematical thinking, 65-81.

Yang, J. C. y Chen, S. Y. (2010). Effects of gender differences and spatial abilities within a digital pantomimes game. Comput. Educ., 55(3), 1220-1233.

Anexo A. Cuestionario profesores.

Encuesta para profesores sobre la Dificultad del Bloque de Geometría

Muchas gracias por su tiempo y participación en este cuestionario. Sus datos y aportaciones serán usados exclusivamente para la elaboración de mi trabajo de fin de máster y tratados con total confidencialidad.

1. Datos profesionales

1.1. Años de experiencia profesional.

- ○ Menos de 10 años.
- ○ Entre 10 y 15 años.
- ○ Entre 15 y 20 años.
- ○ Entre 20 y 30 años.
- ○ Más de 30 años.

1.2. Estudios superiores realizados

____

2. Experiencia en la práctica docente.

2.1. Ordena de mayor a menor dificultad que supone para el alumnado los siguientes bloques, siendo 4 el de mayor dificultad y 1 el de menor.

	1	2	3	4
Números y Álgebra	○	○	○	○
Geometría	○	○	○	○
Funciones	○	○	○	○
Estadística y Probabilidad	○	○	○	○

2.2. ¿Qué dificultades concretas observa en el bloque de Geometría?

____

2.3. Ordena de mayor a menor los siguientes bloques en función del **atractivo** que supone para el alumnado, siendo 4 el de mayor atractivo y 1 el de menor.

	1	2	3	4
Números y Álgebra	○	○	○	○

Geometría	○	○	○	○
Funciones	○	○	○	○
Estadística y Probabilidad	○	○	○	○

2.4. Desde su perspectiva docente. ¿Cuáles crees que son los atractivos de enseñar el bloque de Geometría?

____

2.5. ¿Ha utilizado o utiliza material manipulativo para enseñar el bloque de Geometría?

- ○ Sí.
- ○ No.

2.6. En caso afirmativo, para qué cursos y para qué conceptos han sido utilizados.

____

2.7. ¿Ha utilizado o utiliza alguna herramienta digital (blogs, vídeos, programas informáticos, …) para enseñar el bloque de Geometría?

- ○ Sí.
- ○ No.

2.8. En caso afirmativo, para qué cursos y para qué conceptos han sido utilizados.

____

2.9. ¿Cuáles cree que son los beneficios de utilizar los materiales manipulativos y/o las herramientas digitales?

____

2.10. Analizando el origen de los errores en la enseñanza del bloque de Geometría. Marque aquellas opciones con las que esté de acuerdo.

- ○ Errores causados por la dificultad del contenido.
- ○ Errores debidos a dificultades para trabajar la información espacial.
- ○ Errores debidos a la aplicación de reglas, fórmulas o estrategias irrelevantes.
- ○ Errores debidos a la falta de verificación de la solución y las unidades de las mismas.
- ○ Otra …

2.11. Para finalizar, si tiene alguna experiencia, aportación o sugerencia respecto a la enseñanza del bloque de geometría puede introducirla a continuación. ________________

Fuente: Elaboración propia.

Anexo B. Cuestionario alumnado.

Encuesta para alumnos sobre la Dificultad del Bloque de Geometría

Muchas gracias por su tiempo y participación en este cuestionario. Sus datos y aportaciones serán usados exclusivamente para la elaboración de mi trabajo de fin de máster y tratados con total confidencialidad.

1. ¿En qué curso estás?
    - ○ 1º ESO
    - ○ 2º ESO
    - ○ 3º ESO
    - ○ 4º ESO
    - ○ Bachillerato
2. Ordena de mayor a menor los siguientes bloques en los que se divide la asignatura de matemáticas en función del **atractivo** que tienen para ti, siendo 4 el de mayor atractivo y 1 el de menor.

	1	2	3	4
Números y Álgebra	○	○	○	○
Geometría	○	○	○	○
Funciones	○	○	○	○
Estadística y Probabilidad	○	○	○	○

3. Como estudiante, ¿Cuáles crees que son los atractivos del bloque de Geometría?

    ____

4. Ordena de mayor a menor la **dificultad** de los siguientes bloques, siendo 4 el de mayor dificultad y 1 el de menor.

	1	2	3	4
Números y Álgebra	○	○	○	○
Geometría	○	○	○	○
Funciones	○	○	○	○
Estadística y Probabilidad	○	○	○	○

5. ¿Qué dificultades concretas tienes en el bloque de Geometría?

   ____

6. ¿Has utilizado o utilizas materiales manipulativos (geoplanos, tangram, cuerpos geométricos, pajitas, …) para trabajar el bloque de Geometría?
   - Sí.
   - No.
7. En caso afirmativo, qué materiales y para qué conceptos han sido utilizados.

   ____

8. ¿Has utilizado o utilizas alguna herramienta digital (blogs, vídeos, programas informáticos, …) para trabajar el bloque de Geometría?
   - Sí.
   - No.
9. En caso afirmativo, cuáles y para qué conceptos han sido utilizados.

   ____

10. ¿Crees que utilizar materiales manipulativos y/o herramientas digitales ayudan a comprender conceptos geométricos?

    ____

Fuente: Elaboración propia.

Anexo C. Análisis didáctico de la actividad Descubriendo con el Rompecabezas de Van Hiele.

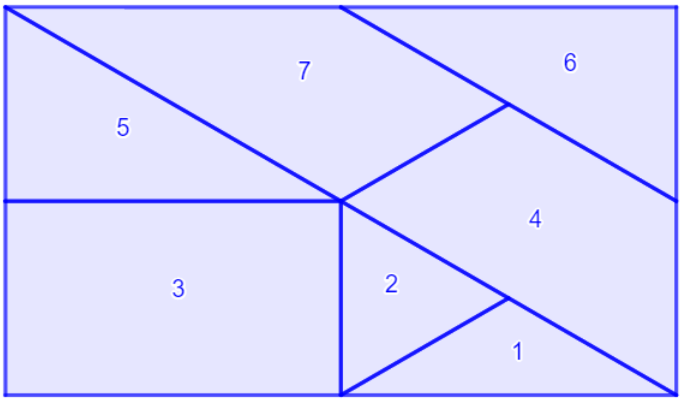
Tabla 3. *Análisis didáctico de la actividad: Descubriendo con el rompecabezas de Van Hiele.*

Objetivo	- Utilizar material manipulativo para el reconocimiento de figuras geométricas. - Componer figuras a partir de lados y ángulos.
Material	- Lápiz o bolígrafo. - Ficha del alumno y del profesor. - Rompecabezas de Van Hiele en goma EVA. - Aula de ordenadores. - Recursos digitales GeoGebra: o https://www.geogebra.org/m/prqveepn o https://www.geogebra.org/m/rnfhbues o https://www.geogebra.org/m/megjgj4s
Agrupamiento	Individual.
Nivel	1º - 2º ESO
Competencias clave	- Competencia Matemática y competencias básicas en Ciencia y Tecnología. - Competencia Digital. - Competencia Lingüística. - Aprender a aprender.
Contenidos	- Elementos básicos de la geometría del plano. Relaciones y propiedades de figuras en el plano: Paralelismo y perpendicularidad. - Ángulos y sus relaciones. - Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales. - Clasificación de triángulos y cuadriláteros. Propiedades y relaciones. - Medida y cálculo de ángulos de figuras planas. - Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

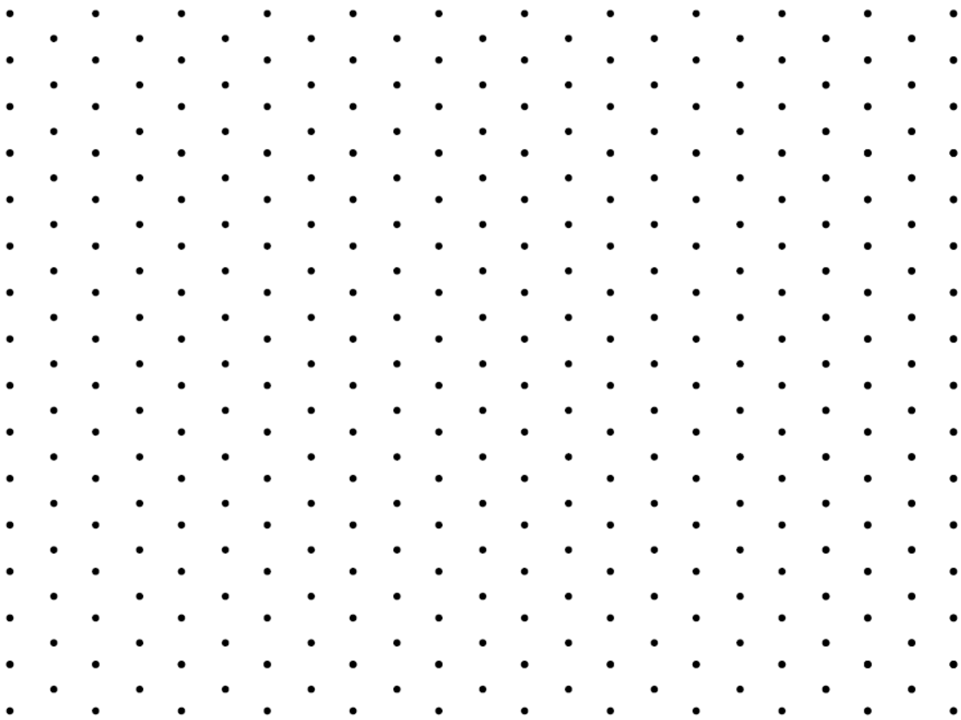
Fuente: Elaboración propia.

Anexo D. Ficha del alumno. Descubriendo con el rompecabezas de Van Hiele

A continuación, se puede observar un rompecabezas de sietes piezas denominado de Van Hiele. Con ayuda del material manipulativo adjunto responderemos a las cuestiones planteadas en esta ficha.



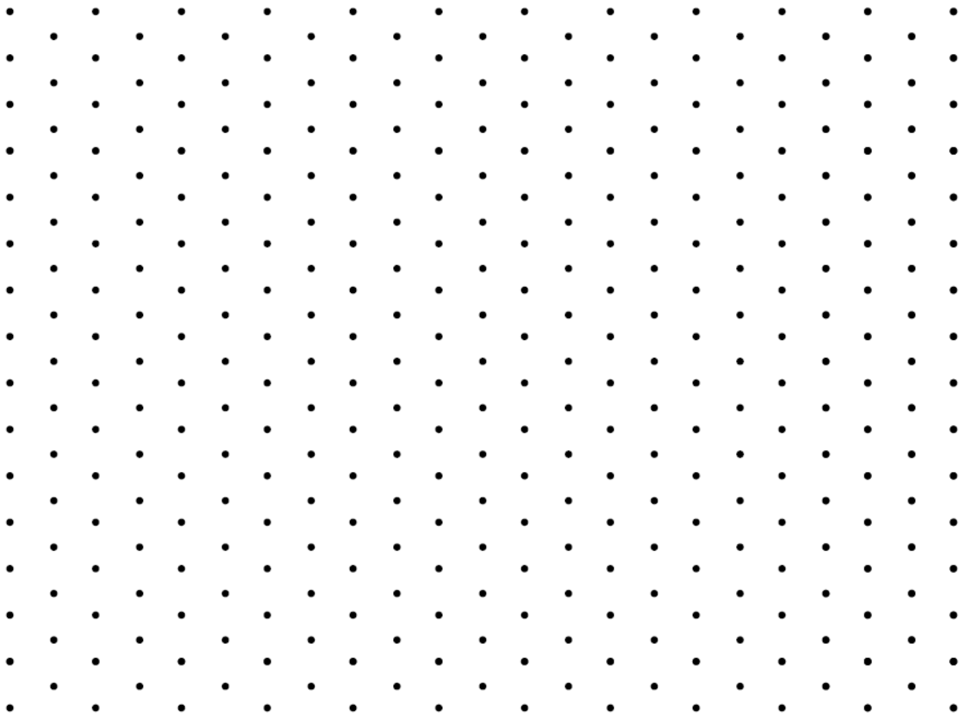
1. ¿Podrías construir una figura a partir de dos piezas? Representa las combinaciones de piezas indicando el número asociado en la Figura 1.



2. ¿Existen piezas que no pueden ser construidas por otras? ¿Por qué?

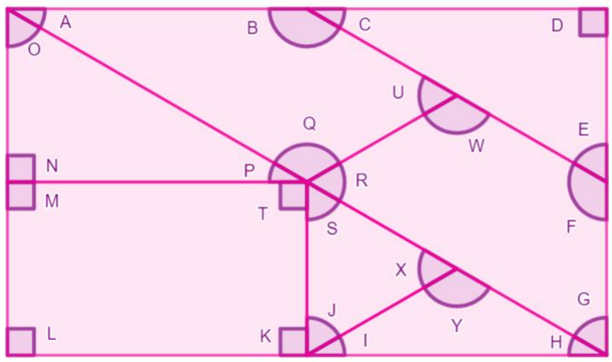
3. ¿Podrías construir figuras utilizando más de dos piezas? Representa las combinaciones de piezas indicando el número asociado en la Figura 1.

Ayuda: https://www.geogebra.org/m/prqveepn



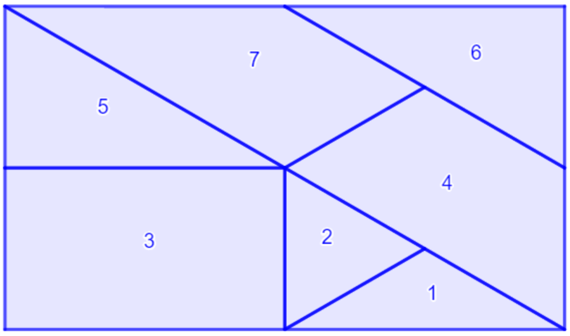
4. ¿Qué se necesita para hacer coincidir piezas?

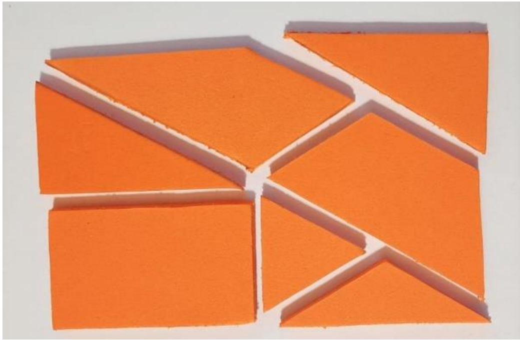
5. ¿Qué podrías decirme de los ángulos que se encuentran en el rompecabezas de Van Hiele? ¿Puedes calcular el valor de cada ángulo?



A =	B =	C =	D =	E =	F =	G =	H =
I =	J =	K =	L =	M =	N =	O =	P =
Q =	R =	S =	T =	U =	W =	X =	Y =

Anexo E. Ficha del profesor. Descubriendo con el rompecabezas de Van Hiele.

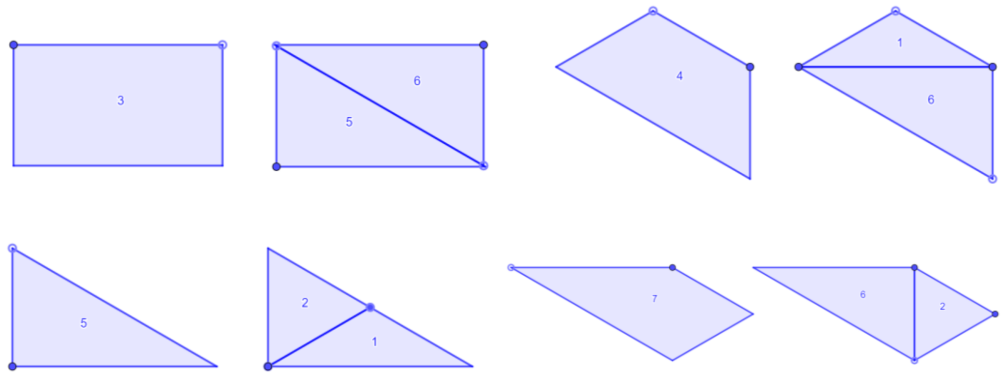




1. ¿Podrías construir una figura a partir de otras? Escribe una lista con las piezas que integran otras piezas guiándote de los números de la Figura 1.

Los alumnos deberán utilizar el material manipulativo que se les ofrece para superponer piezas y así conocer las distintas combinaciones entre ellas.

Solución:

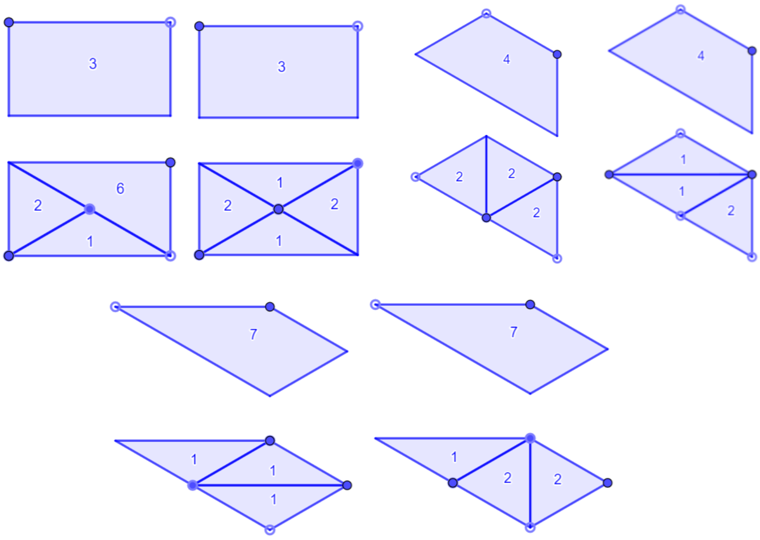


2. ¿Existen piezas que no pueden ser construidas por otras? ¿Por qué?

Las piezas 1 y 2 no pueden ser compuestas por otro par de piezas al ser las de menor tamaño.

3. ¿Podrías construir figuras utilizando más de dos piezas? Representa las combinaciones de piezas indicando el número asociado en la Figura 1.

En este caso la utilización de la herramienta de geometría dinámica GeoGebra nos ayuda con la duplicación o triplicación de piezas que les permitirá trabajar con mayor facilidad.



4. **¿Qué se necesita para hacer coincidir piezas?**

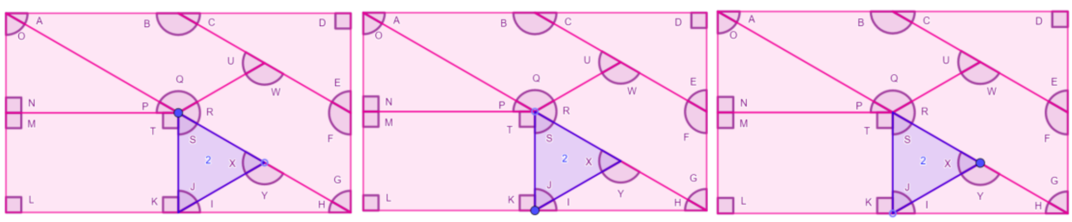
Es el momento en el que alumnado debe analizar los lados y ángulos de las diferentes figuras, y cuando el profesorado mediante orientación guiada empieza a introducir los nombres por los que son conocidos dichos conceptos.

5. **¿Qué podrías decirme de los ángulos que se encuentran en el rompecabezas de Van Hiele? ¿Puedes calcular el valor de cada ángulo?**

Con esta pregunta incidimos en los diferentes tipos de ángulos e incluso nos adentramos en los conceptos de ángulo complementario y suplementario dependiendo del conocimiento previo del alumnado.

Por ejemplo:

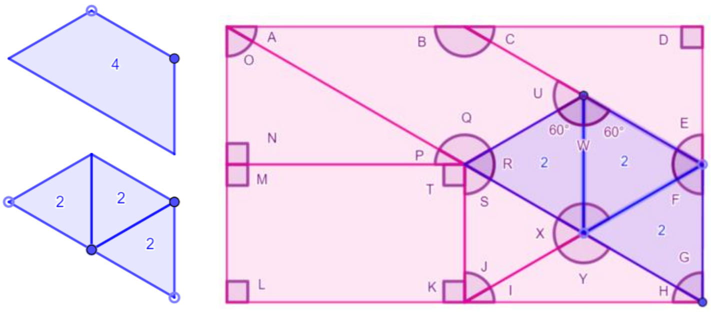
Utilizando la pieza 2 y girándola podemos observar que, independientemente de donde se sitúe el punto azul, los ángulos S, J y X deberán ser el mismo para que la pieza coincida tras girarla. Al coincidir los lados y los ángulos de esta pieza podemos definirla como triángulo equilátero.



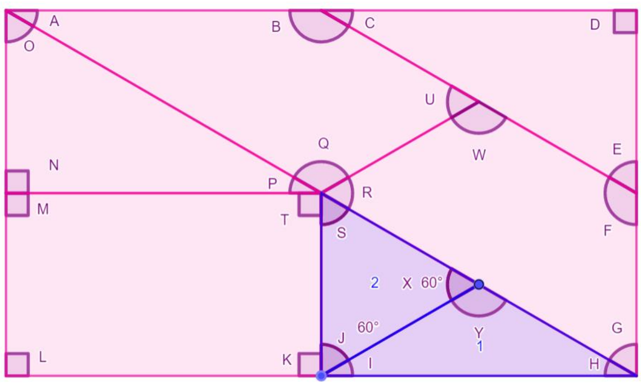
Además, nuevamente dependiendo del nivel del alumno, si conocen que los ángulos interiores de un triángulo son 180º, sabrán que S, J y X son 60º. Por tanto, la superposición de la pieza 2 será un buen recurso para el cálculo de ángulos. Una pieza que no necesita la ayuda de la pieza 2, si se conoce el concepto de ángulo recto, es la pieza 3. Con este concepto, el de ángulo complementario y suplementario podemos ir deduciendo el resto de los ángulos.

Ejemplo:

Teniendo en cuenta la combinación de piezas que se ha realizado en la cuestión tres, podemos ver que el ángulo W es la suma de dos ángulos de 60º, al igual que el ángulo F.



Los conceptos de ángulos complementarios y suplementarios serán de utilidad en algún caso como el ejemplo mostrado a continuación. Donde el ángulo I es complementario de J y el ángulo Y es el suplementario de X.



Solución:

A =30°	B =150°	C =30°	D = 90°	E =60°	F =120°	G =60°	H =30°
I =30°	J =60°	K = 90°	L = 90°	M = 90°	N = 90°	O =60°	P =30°
Q =120°	R = 60°	S = 60°	T = 90°	U = 60°	W =120°	X = 60°	Y =120°

Anexo F. Análisis didáctico de La hormiga en el terrón.

Tabla 4. *Análisis didáctico de la actividad La hormiga en el terrón.*

Objetivo	- Utilizar material manipulativo para el reconocimiento de cuerpos geométricos así como sus elementos. - Conectar la geometría plana con la espacial. - Mejorar la visión espacial.

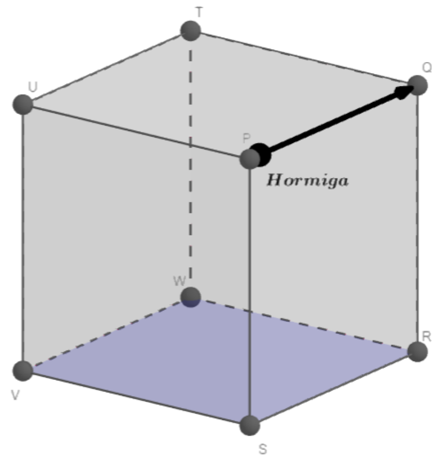
Material	- Lápiz o bolígrafo.
	- Ficha del alumno y del profesor.
	- Plastilina de colores.
	- Palos de madera
	- Aula de ordenadores.
	- Recursos digitales GeoGebra:
	  o https://www.geogebra.org/m/vjjp78wm
	  o https://www.geogebra.org/m/yhsxm7fz

Agrupamiento	Individual.
Nivel	1º - 2º ESO
Competencias clave	- Competencia Matemática y competencias básicas en Ciencia y Tecnología. - Competencia Digital. - Competencia Lingüística. - Aprender a aprender.
Contenidos	- Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales. - Poliedros y cuerpos de revolución. Elementos característicos, clasificación. Áreas y volúmenes. - Propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros. Cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico. - Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Fuente: Elaboración propia.

Anexo G. Ficha del alumno. La hormiga en el terrón

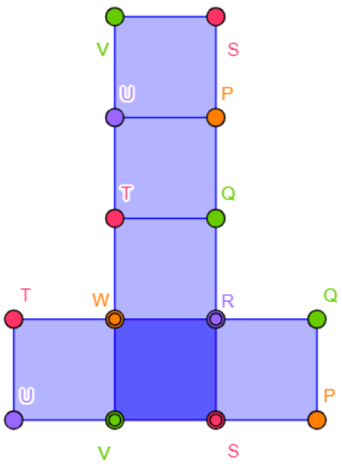
Tenemos una hormiga la que su madre le ha planteado un reto: Debe moverse por el terrón de azúcar de una manera muy especial para volver a encontrarse con ella en el punto de inicio. Comenzará su recorrido en el punto P y se dirigirá en la dirección que le indica la flecha. Una vez llega al primer borde, punto Q, debe elegir si dirigirse a la izquierda o a la derecha. Cuando llegue al borde siguiente y tomará la dirección contraria a la elegida anteriormente, es decir, girará a la derecha o a la izquierda alternativamente.



1. Crea mediante plastilina y palos de madera una estructura similar al terrón de azúcar. Para que te sea más sencillo ver el recorrido de la hormiga. **Pista:** Utiliza diferentes colores para los puntos opuestos.
2. ¿Cuántos caminos posibles tiene nuestra pequeña hormiga?¿Cuáles son?

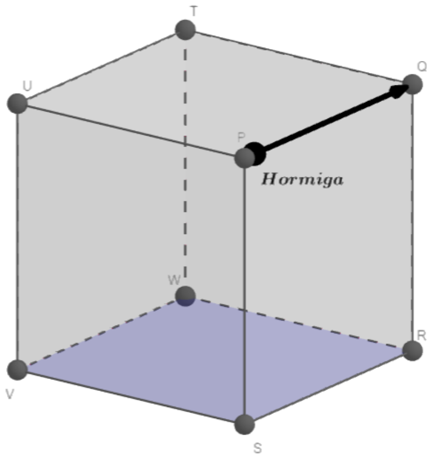
3. ¿Cuántas aristas recorre la hormiga antes de volver con su madre?

4. Sabemos que la figura geometrica que se esconde detrás del terrón de azucar es un cubo. El cual tiene hasta onces decomposiciones planas. ¿Podrías trazar las aristas por las que camina la hormiga en la siguiente descomposición? Marcalas con color rojo.



5. ¿Crees que es la mejor descomposición plana para representar el camino que realiza la hormiga? Compruébalo con la ayuda de la siguiente aplicación de GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/vjjp78wmq

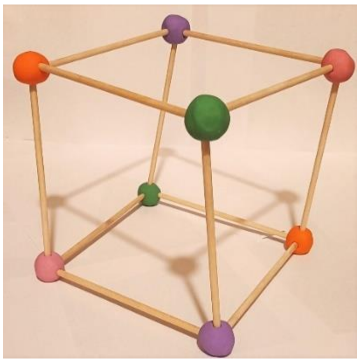
Anexo H. Ficha del profesor. La hormiga en el terrón

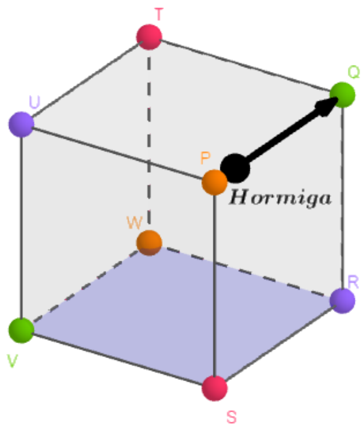


1. Crea mediante plastilina y palos de madera una estructura similar al terrón de azúcar. Para que te sea más sencillo ver el recorrido de la hormiga. Pista: Utiliza diferentes colores para los puntos opuestos.

Con la utilización de la plastilina de colores y los palos de madera, los cuales se pueden sustituir por gominolas y palillos respectivamente, se realiza la construcción del terrón. Gracias a la manipulación de los elementos del cubo, aristas y vértices, el alumno se capaz de entenderlos mediante la experimentación.

A través del siguiente enlace: https://www.geogebra.org/m/vjjp78wmq que se propocionará a los alumnos en la cuestión cinco, podrán visualizar el cubo de la manera que se muestra a continuación.





2. ¿Cuántos caminos posibles tiene nuestra pequeña hormiga?

Gracias a la pista del enunciado anterior podemos crear las dos secuencias ayudandonos de los para ver el recorrido con mayor facilidad.

$$P \to Q \to R \to W \to V \to U \to P$$

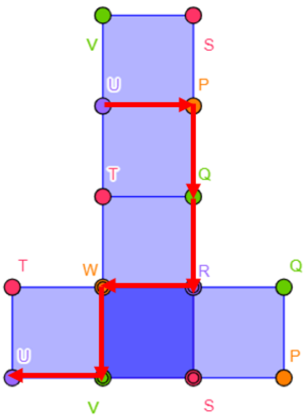
$$P \to Q \to T \to W \to V \to S \to P$$

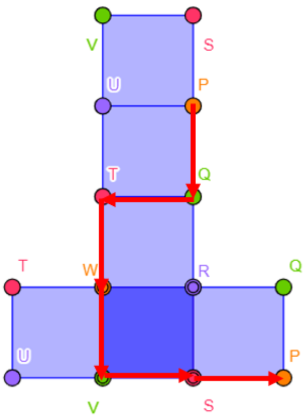
3. ¿Cuántas aristas recorre la hormiga antes de volver con su madre?

Al realizarlo como una secuencia en el apartado anterior es facil ver que las flechas corresponden a las aristas, y son un total de seis.

4. Sabemos que la figura geometrica que se esconde detrás del terrón de azucar es un cubo. El cual tiene hasta onces decomposiciones planas. Podrías trazar las aristas por las que camina la hormiga en la siguiente descomposición.

Dependiendo de la descomposición que se elija, el punto P de inicio nos permitirá volver o no a si mismo de manera ininterrumpida. Como podemos ver a continuación, a la izquierda, al trazar la útlima arista que corresponde con el segmento UP, los alumnos se darán cuenta de que no es posible seguir la secuencia de forma continua. A la derecha se puede ver como en la misma decomposición un camino nos lleva a la solución de manera continua.





5. ¿Crees que es la mejor descomposición plana para representar el camino que realiza la hormiga? Compruébalo con la ayuda de la siguiente aplicación de GeoGebra.

Una posible solución es la que está asociada a la descomposición número diez del enlace. Podemos observar que es sencillo dibujar ambos caminos en una secuencia ininterrumpida.