

Universidad de Alcalá
Departamento de Electrónica
Escuela Politécnica Superior

MÁSTER UNIVERSITARIO EN
INGENIERÍA ELECTRÓNICA

Trabajo Fin de Máster

Estimación de la ubicación del tren en una
línea ferroviaria a partir de la medida de la
impedancia eléctrica

Autor: GABRIEL GARCÍA GUTIÉRREZ

Director: FELIPE ESPINOSA ZAPATA

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ
Escuela Politécnica Superior

Máster Universitario en Ingeniería Electrónica

Trabajo de Fin de Máster

Estimación de la ubicación del tren en una línea
ferroviaria a partir de la medida de la impedancia
eléctrica

Autor: Gabriel García Gutiérrez

Tutor: Felipe Espinosa Zapata

TRIBUNAL:

Presidente: José Luis Martín Sánchez

Vocal 1: Julio Pastor Mendoza

Vocal 2: Fco Javier Rodríguez Sánchez

FECHA: Septiembre, 2022

Estimación de la ubicación del tren en una línea ferroviaria a partir de la medida de la impedancia eléctrica

*Dedico el presente trabajo a mis padres María y Jorge,
a mis hermanos Gabriela y Alex, y a Melisa.
Por su apoyo incondicional este logro es por ellos y para ellos.*

*Agradezco a la Universidad de Alcalá por los invaluable conocimientos impartidos y a mi tutor
Felipe Espinosa por su guía en la realización de cada una de las fases del presente trabajo.*

RESUMEN

En la actualidad, los circuitos de vía tienen una gran importancia en la detección de un tren que circula por un tramo de la línea ferroviaria. Eléctricamente, un circuito de vía se aborda como una línea de transmisión con parámetros R, L, C, G por unidad de longitud que dependen tanto de la frecuencia como de la humedad relativa del balasto; siendo esta última, fuente de incertidumbre a la hora de estimar la posición del tren. En el presente trabajo, se analiza y simula el efecto de la humedad relativa, primero en el comportamiento eléctrico de la vía y después en la estimación de la posición del tren. Además, se estudia y simula el efecto de una vía ocupada en la detección de señal de una vía paralela y libre, a partir del acoplamiento de corrientes de fuga entre vías paralelas.

Palabras Clave: *Circuito de vía, posición del tren en vía, corrientes de fuga, línea de transmisión, incertidumbre en la impedancia de vía.*

ABSTRACT

Track circuits play an important role in detecting the presence of a train on a railway track. Electrically, track circuits are studied under the line-transmission approach considering R, L, C, G per-length parameters which depend on the frequency as well as on ballast relative humidity. In this regard, the ballast relative humidity is a source of uncertainty when estimating the train position on track. In this work, the effect of the relative humidity is simulated and analyzed; first, considering the electrical behavior of the track and then estimating the train position. In addition, the simulation and analysis of the effect that an occupied railway has in the signal detection on a parallel and empty railway is presented; for this purpose, a model for coupled leakage currents among two railways is considered.

Key Words: *Track circuit, On-track train position, leakage currents, transmission line, Railway impedance uncertainty.*

ÍNDICE DE CONTENIDO

RESUMEN.....	i
ABSTRACT	i
ÍNDICE DE CONTENIDO.....	iv
ÍNDICE DE FIGURAS.....	vi
ÍNDICE DE TABLAS	viii
CAPÍTULO I.....	1
INTRODUCCIÓN.....	1
1.1. Objetivos	4
1.2. Trabajos Previos.....	4
1.3. Organización del documento y retos.....	5
CAPITULO II	6
EFFECTO DE LA FRECUENCIA Y HUMEDAD RELATIVA EN LOS PARÁMETROS CARACTERÍSTICAS DEL CIRCUITO DE VÍA.....	6
2.1. Resistencia Eléctrica por unidad de longitud, R.....	6
2.2. Inductancia Eléctrica por unidad de longitud, L.....	6
2.3. Conductancia Eléctrica por unidad de longitud, G.....	7
2.3.1. Cálculo del Estimador del Modelo	8
2.3.2. Incertidumbre del Modelo de Conductancia.....	10
2.4. Capacidad Eléctrica por unidad de longitud, C.....	11
2.4.1. Cálculo del Estimador del Modelo	12
2.4.2. Incertidumbre del Modelo de Permitividad Eléctrica.....	13
2.4.3. Cálculo de la Capacidad.....	14
2.4.4. Estimador del modelo de corrección de capacidad	18
2.4.5. Incertidumbre del Modelo de Corrección de Capacidad Eléctrica.....	19
CAPÍTULO III	21
ANÁLISIS DE LA INCERTIDUMBRE EN LA ESTIMACIÓN DE LA POSICIÓN DEL TREN EN VÍA.....	21
3.1. Análisis de variabilidad de Impedancia de entrada de vía.....	23
3.4.1. Variación de Impedancia de Entrada respecto a Longitud de la Vía y Humedad Relativa del Balasto.....	24
3.4.2. Variación de Impedancia de Entrada respecto a Impedancia de carga y Frecuencia de Operación.....	25
3.4.3. Variación de Impedancia de Entrada respecto a Frecuencia de Operación y Humedad Relativa del Balasto.....	26

3.4.4.	Variación de Impedancia de Entrada respecto a Frecuencia de Operación y Humedad Relativa del Balasto	27
3.4.5.	Variación de Impedancia de Entrada respecto a Longitud de Vía y Frecuencia de Operación	28
3.4.6.	Variación de Impedancia de Entrada respecto a Longitud de Vía e Impedancia de Carga.....	29
3.2.	Impedancia de Entrada del Circuito con vía ocupada	30
3.3.	Cálculo de la posición del tren a partir de la impedancia medida en el transmisor del circuito de vía.....	33
3.4.	Estimación de la posición del tren en vía.	34
3.5.1.	Incertidumbre de la Capacidad por unidad de longitud.....	35
3.4.2.	Incertidumbre de la Conductancia por unidad de longitud.....	36
3.4.3.	Incertidumbre de la Impedancia Característica	37
3.4.4.	Incertidumbre de la Constante de Propagación	37
3.4.5.	Incertidumbre de la Impedancia de Entrada de Vía.....	38
3.4.6.	Incertidumbre de la Posición del Tren en Vía	38
3.5.	Simulación de la posición estocástica del tren en vía	39
3.5.1.	Variación de Impedancia Característica y Constante de Propagación en función de la incertidumbre de HR.	39
3.5.2.	Variación de la Impedancia de Entrada medida en el nodo transmisor ..	42
3.5.3.	Incertidumbre en la Estimación de la posición del tren en vía.	44
CAPÍTULO IV		47
MODELADO DE CORRIENTES DE FUGA ENTRE VÍAS PARALELAS		47
4.1.	Simulación de Efecto de Corrientes de Fuga sin Tren	48
4.2.	Simulación de Efecto de Corrientes de Fuga con Tren.....	50
CAPÍTULO V		54
CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.....		54
BIBLIOGRAFÍA.....		55

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Diagrama de bloques de circuito de vía: a) vía libre b) vía ocupada.	1
Figura 2. Modelos discretizados para líneas de transmisión en L, T y H.	2
Figura 3. Modelo de Línea de Transmisión con Parámetros Concentrados.	3
Figura 4. Modelo de Línea de Transmisión con Parámetros Distribuidos Discretizado.	3
Figura 5. Gráfica de la resistencia de vía en función de la frecuencia [6].	6
Figura 6. Gráfica de la inductancia en función de la frecuencia [6].	7
Figura 7. Conductancia del balasto vs frecuencia, para ciertos porcentajes de humedad [7].	8
Figura 8. Comparación de modelo obtenido para la conductancia, G.	10
Figura 9. Permittividad Eléctrica del suelo vs frecuencia, para ciertos porcentajes de humedad [7].	11
Figura 10. Comparación de modelo obtenido para la permitividad relativa del suelo, ϵ_r	13
Figura 11. Método de Imágenes para el cálculo de la capacidad.	14
Figura 12. Valores de C obtenidos y valores para corrección.	17
Figura 13. Residuos obtenidos para estimar modelo.	17
Figura 14. Ajuste de modelo de corrección de capacidad para HR = 0.1%.	19
Figura 15. Modelo de Capacidad en función de f y HR.	20
Figura 16. Esquema eléctrico, por unidad de longitud, del modelo en H de vía.	21
Figura 17. Esquema para impedancia de entrada de un tramo de vía.	22
Figura 18. Variación del módulo de la constante de propagación, $ \gamma $, respecto a la frecuencia y a la humedad relativa.	23
Figura 19. Variación del módulo de la impedancia característica, $ Z_0 $, respecto a la frecuencia y a la humedad relativa.	24
Figura 20. Variación de impedancia de entrada respecto a la longitud de vía y humedad relativa. Caso de terminación en circuito abierto (izda) y cortocircuito (dcha)	25
Figura 21. Variación de impedancia de entrada respecto a la frecuencia de operación e impedancia de carga, para diferentes tramos de vía.	26
Figura 22. Variación de impedancia de entrada respecto a la frecuencia de operación y humedad relativa del balasto, para una longitud de vía dada y valores límites de impedancia de carga.	27
Figura 23. Variación de impedancia de entrada respecto a la humedad relativa del balasto e impedancia de carga.	27
Figura 24. Variación de impedancia de entrada respecto a la frecuencia de operación y longitud de vía, para valores límites de impedancia de carga y condición de balasto (seco y húmedo).	28
Figura 25. Variación de impedancia de entrada respecto a la impedancia de carga y longitud de vía, para frecuencia de trabajo constante y diferentes condiciones de humedad del balasto.	29
Figura 26. Diagrama de bloques de modelo de vía con tren.	30
Figura 27. Diagrama equivalente de modelo de vía con tren.	31
Figura 28. Perfil de velocidad y distancia recorrida por el tren en vía para propósitos de simulación.	32
Figura 29. Impedancia de entrada de vía, en función de la posición del tren, para f = 5 KHz y HR = 0.1 %.	32

Figura 30. Impedancia de entrada de vía con tren con $f = 5$ KHz y $HR = 10\%$	33
Figura 31. Distribuciones de probabilidad de Z_0 y γ con $HR = 0.1\% \pm 1\%$	39
Figura 32. Distribuciones de probabilidad de Z_0 y γ con $HR = 0.1\% \pm 5\%$	40
Figura 33. Distribuciones de probabilidad de Z_0 y γ con $HR = 0.1\% \pm 10\%$	40
Figura 34. Distribuciones de probabilidad de Z_0 y γ con $HR = 1\% \pm 1\%$	40
Figura 35. Distribuciones de probabilidad de Z_0 y γ con $HR = 1\% \pm 5\%$	41
Figura 36. Distribuciones de probabilidad de Z_0 y γ con $HR = 10\% \pm 1\%$	41
Figura 37. Distribuciones de probabilidad de Z_0 y γ con $HR = 10\% \pm 5\%$	41
Figura 38. Efecto de la incertidumbre de HR , en la variación de Z_0 con $HR_i = 0.1\%$...	42
Figura 39. Efecto de la incertidumbre de HR , en la variación de γ con $HR_i = 0.1\%$	42
Figura 40. Variación de Z_{in} , para $HR = 0.1\% \pm 1\%$ y distancia del tren conocida.....	43
Figura 41. Variación de Z_{in} , para $HR = 0.1\% \pm 5\%$ y distancia del tren conocida.....	43
Figura 42. Variación de Z_{in} , para $HR = 0.1\% \pm 10\%$ y distancia del tren conocida.....	44
Figura 43. Estimación de posición del tren para $HR = 0.1\% \pm 1\%$	45
Figura 44. Estimación de posición del tren para $HR = 0.1\% \pm 5\%$	45
Figura 45. Estimación de posición del tren para $HR = 0.1\% \pm 10\%$	46
Figura 46. Esquema general de acoplo de corrientes de fuga entre vías paralelas con presencia de tren en una de ellas.....	47
Figura 47. Esquema en Matlab, Simulink 2021 para simulación de modelo de acoplamiento de corrientes de fuga en vías paralelas desocupadas.....	48
Figura 48. Esquema de bloques que conforman modelos de vía discretizados.....	49
Figura 49. Resultados de acoplo de corrientes de fuga en vías paralelas sin tren.....	49
Figura 50. Esquema en Matlab, Simulink 2021 para simulación de modelo de acoplamiento de corrientes de fuga en vías paralelas con un tren que circula por una de ellas.....	50
Figura 51. Resultados de simulación de modelo de acoplamiento de corrientes de fuga para $HR = 0.1\%$	51
Figura 52. Resultados de simulación de modelo de acoplamiento de corrientes de fuga para $HR = 1\%$	51
Figura 53. Resultados de simulación de modelo de acoplamiento de corrientes de fuga para $HR = 10\%$	52
Figura 54. Resultados de simulación de modelo de acoplamiento de corrientes de fuga para $HR = 100\%$	52

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Consideraciones geométricas para obtención de Capacidad [7].	14
Tabla 2. Resultados experimentales de capacidad raíl – raíl para vía seca (HR=0.1%) [7].	16
Tabla 3. Resumen de resultados de simulación de modelo de acoplamiento de corrientes de fuga sin tren.	49
Tabla 4. Resumen de resultados de simulación de modelo de acoplamiento de corrientes de fuga con tren.	53

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

En el campo del transporte ferroviario, los circuitos de vía contribuyen en la operación esencial de funciones de seguridad y control de tráfico ya que permiten detectar la presencia de un tren en un tramo de vía de manera automática y permanente [1], [2]. Fueron inventados a finales del siglo XIX y operaban en principio con corriente directa (DC) [1]. Posteriormente, se han implementado circuitos de vía basados en corriente alterna (AC) que permiten codificación de datos [3], así como técnicas de modulación [4]; aunque el principio básico de funcionamiento no ha cambiado.

Un circuito de vía tiene tres elementos principales [2]:

- Transmisor: Conectado a los raíles en un extremo del circuito de vía, inyecta una corriente utilizando la vía como medio de transmisión. .
- Línea de transmisión (tramo de vía): Comprendida por dos raíles conductores por los que circula el tren y el balasto intermedio.
- Receptor: Conectado en el otro extremo del circuito de vía, recibe parte de la señal transmitida cuyo nivel dependerá de si la vía está o no ocupada.

El comportamiento eléctrico del tren se emula por su primer eje, con resistencia entre ruedas R_{shunt} , ubicado a una distancia específica, d , del inicio del tramo de vía.

Los bloques funcionales y sentidos de circulación de corriente en un circuito de vía se muestran en la siguiente Figura [1], [2]:-

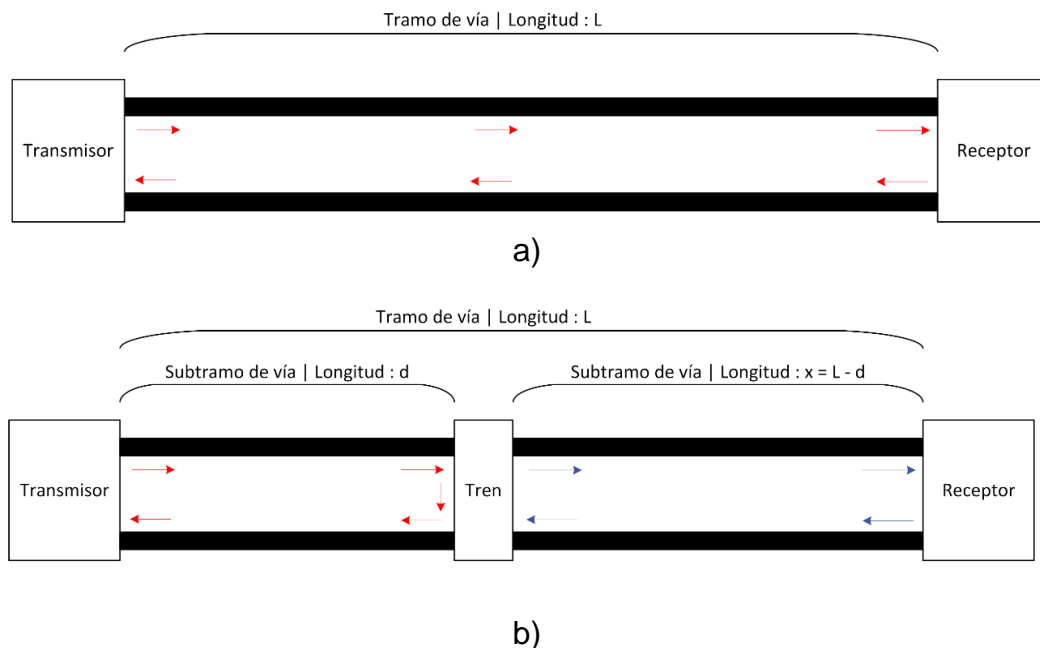


Figura 1. Diagrama de bloques de circuito de vía: a) vía libre | b) vía ocupada.

De lo mostrado en la Figura 1, se pueden derivar los dos modos de funcionamiento en los que se puede encontrar un circuito de vía:

1. Circuito de vía libre, en circuito abierto.- Gran parte de la señal del transmisor, atenuada por las características eléctricas de la vía, es medida por el receptor al final del tramo de vía.
2. Circuito de vía ocupado por tren.- El tren (en general material rodante), que eléctricamente es considerado como una resistencia shunt entre los dos raíles y que tiene un valor máximo de $R = 0.5 \Omega$ [5], sirve de camino directo de circulación de corriente entre los dos raíles. El receptor medirá entre sus terminales un potencial residual que permite determinar la presencia del tren en la vía [2].

Por otro lado, para evaluar el comportamiento eléctrico de circuitos de vía de audiofrecuencia es común recurrir a la teoría de líneas de transmisión [6], [7],[8], con modelos discretizados con los parámetros característicos (por unidad de longitud): resistencia R , inductancia L , capacidad C y conductancia G .

De la misma manera, se puede emplear diferentes configuraciones tanto el L, en T, o en H para los modelos discretizados de línea de transmisión según el objetivo del estudio a realizar, tal y como se muestra a continuación:

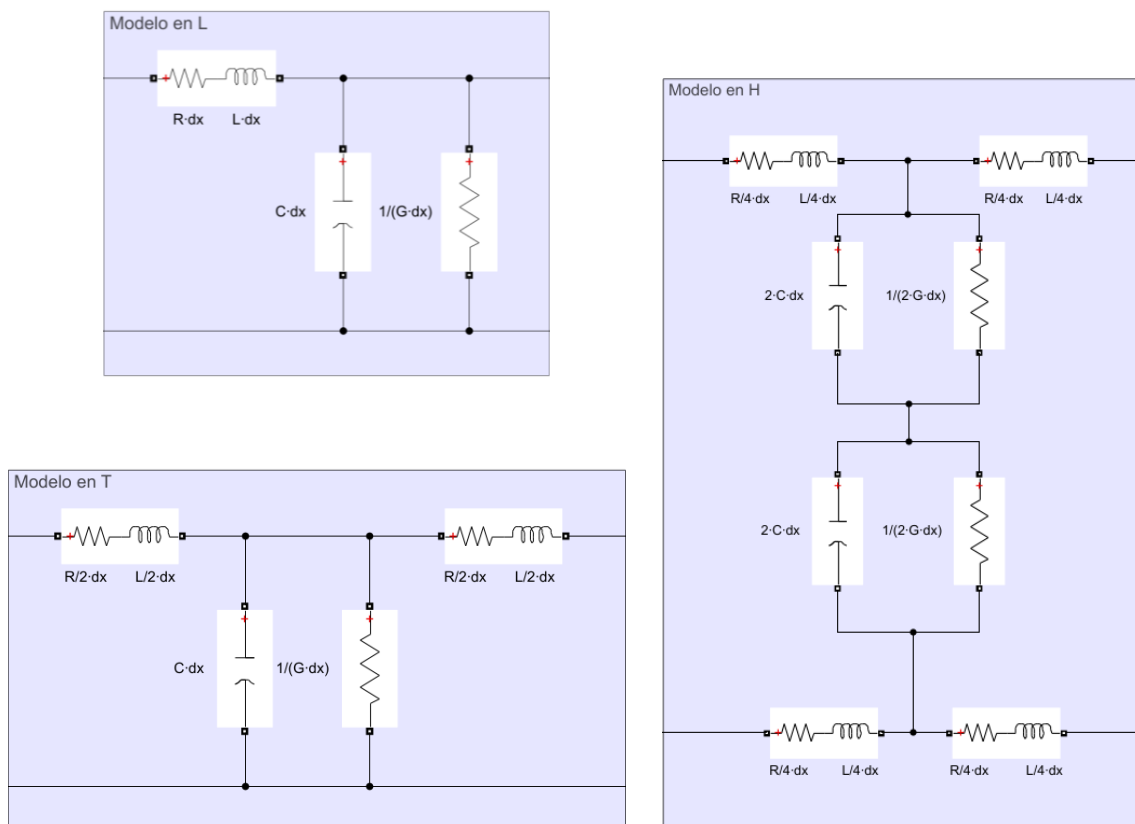


Figura 2. Modelos discretizados para líneas de transmisión en L, T y H.

Para el caso de un modelo discretizado de parámetros concentrados correspondiente a un tramo de vía de longitud L , se considera un tramo de vía como un único bloque en configuración L, T o H, tal como los mostrados en la Figura 2, con $dx = L$.

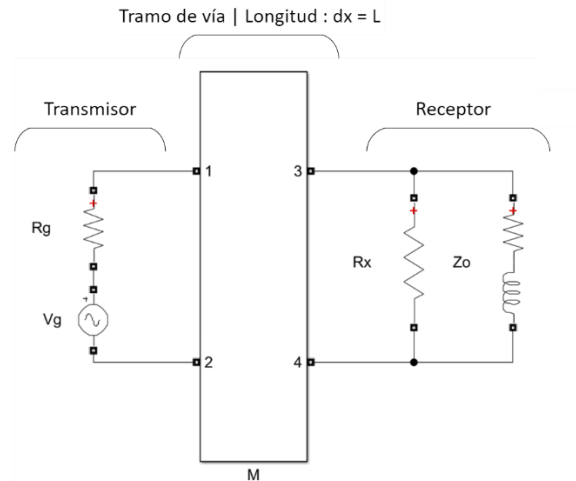


Figura 3. Modelo de Línea de Transmisión con Parámetros Concentrados.

Más acorde al estudio analítico de líneas de transmisión es la aproximación al modelo de parámetros distribuidos mediante la discretización de N sub-bloques. Así, para el caso de un tramo de vía de longitud L , se consideran N módulos en configuración L, T o H, concatenados en serie y con $dx \approx \Delta x = L/N$.

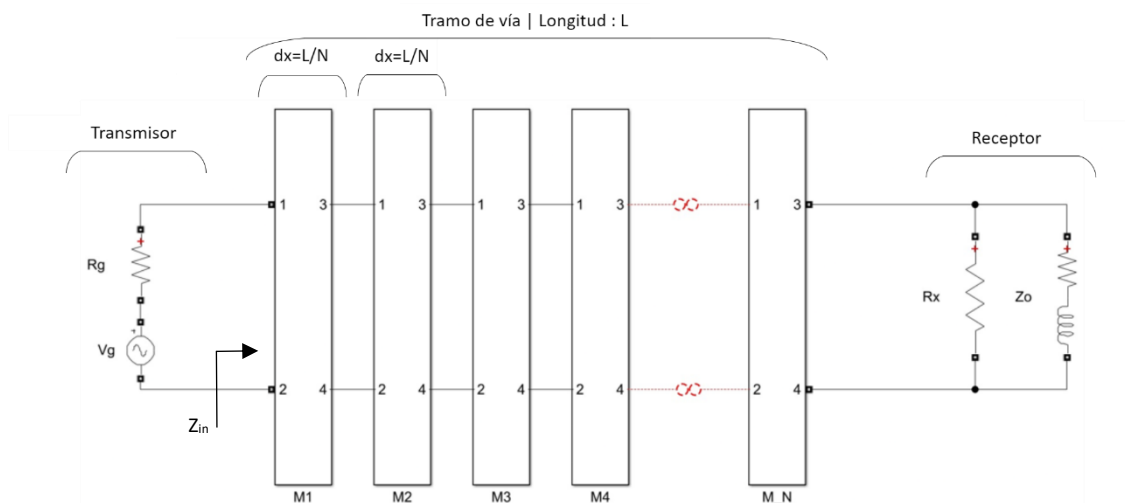


Figura 4. Modelo de Línea de Transmisión con Parámetros Distribuidos Discretizado.

1.1. Objetivos

Este TFM está orientado al estudio de circuitos de vía analizando diferentes efectos que influyen en la señal recibida, tanto si el tramo está libre como ocupado por un tren. De ahí se plantean los siguientes objetivos:

- 1) A partir de publicaciones previas, modelar la dependencia no lineal de la impedancia característica de la vía con la frecuencia (pulsación ω) de la señal de trabajo y con la humedad relativa (HR) del balasto.
- 2) Admitiendo que el tren está ubicado en un punto de la vía, obtener la expresión analítica que determina la posición del tren, en función de la impedancia medida en el nodo transmisor (Z_{in}) y de los parámetros característicos de la vía, a su vez dependientes de ω y de la HR.
- 3) Teniendo en cuenta que la medida de HR proporciona una señal aleatoria gaussiana con varianza impuesta por el sensor utilizado, estimar la función de probabilidad de la variable aleatoria posición del tren.
- 4) Analizar la evolución de la impedancia de entrada de vía (Z_{in}), cuando un tren se desplaza a lo largo del tramo de vía.
- 5) Analizar la contribución de un modelo de acoplo de corrientes de fuga entre dos vías paralelas cuando un tren se desplaza únicamente por una de las dos vías.

1.2. Trabajos Previos

El proceso de estimar la posición de un tren en un tramo de vía a partir de la medición de la impedancia eléctrica de la vía puede resultar complejo debido a la incertidumbre existente en los valores de los parámetros eléctricos del modelo de circuito de vía, tal como son la resistencia por unidad de longitud, $R(\Omega/m)$, inductancia por unidad de longitud, $L(H/m)$, capacidad por unidad de longitud, $C(F/m)$, y conductancia por unidad de longitud, $G(S/m)$. Este problema ha sido abordado en trabajos previos que serán descritos de manera general a continuación:

En [6], se hace hincapié en la dependencia de la frecuencia de trabajo sobre la resistencia e inductancia del modelo eléctrico de vía, y se describe analíticamente esta dependencia no lineal.

En [7], se destaca la influencia de la frecuencia de trabajo y de la humedad relativa del balasto en los valores de capacidad y conductancia del modelo eléctrico de vía, para un rango de frecuencia de operación entre 20 Hz y 20 KHz. El rango de humedad relativa analizado está entre 0.1 % (vía seca) y 100 % (vía húmeda). Se presentan resultados experimentales tanto de la conductancia, G , como de la permitividad eléctrica relativa del balasto, ϵ_r , en función de la frecuencia y de la humedad relativa. A partir de estos datos experimentales, se obtendrá en el presente trabajo las expresiones matemáticas que estiman la influencia de la HR en los parámetros característicos G y C .

En [8], se plantea un modelo teórico y un estudio experimental para caracterizar las impedancias de línea del circuito de vía basado en mediciones en cortocircuito. De este trabajo se considerará la expresión que modela la impedancia de la vía, Z_{in} , en función de los parámetros R , L , C , G y de la longitud del tramo bajo estudio

En [9], se establece un modelo en configuración en H para analizar los efectos del balasto (tierra) como camino de acoplamiento de corrientes de fuga entre dos vías. Este trabajo sirve de referencia para analizar el efecto de recepción de señal en una vía cuando el tren está en un punto intermedio de la otra vía.

1.3. Organización del documento y retos

El presente trabajo contempla diferentes retos relacionados con el análisis y simulación de circuitos de vía bajo condiciones de frecuencia y humedad relativa del balasto específicas para la estimación de la posición del tren en un tramo de vía; así como el análisis en modelos de corrientes de fuga para analizar el acoplamiento entre dos vías cuando en una de estas circula un tren.

En el Capítulo II se analizará la variación de los parámetros R y L del modelo de línea de transmisión del circuito de vía en base a expresiones matemáticas que modelan su dependencia únicamente con la frecuencia de operación del circuito de vía, obtenidos de estudios previos [6]. De la misma manera, se analizará en base a estudios experimentales previos [7], la generación de expresiones matemáticas que estimen la dependencia de los parámetros C y G del modelo de línea de transmisión del circuito de vía, en función tanto de la frecuencia de operación como de las condiciones ambientales de humedad relativa (HR).

En el capítulo III, se realizará la estimación de la posición del tren en vía tomando en cuenta la incertidumbre en la medición de las condiciones ambientales de HR para la determinación de la impedancia de entrada vista por el transmisor hacia la vía con tren, Z_{in} . Para ello se empleará tanto el modelo teórico que describe la impedancia de entrada de vía, Z_{in} , como función tanto de la frecuencia, HR, y longitud de la vía [8]; así como simulaciones de circuitos de vía en Simulink, Matlab 2021b. En cada análisis se considerará las diferentes opciones de carga que se puede tener al final del tramo de vía como puede ser: circuito abierto, $Z_L = \infty$, impedancia característica de la línea, $Z_L = Z_0$, y tren, $Z_L = 0.5\Omega$.

En el capítulo IV, se analizará un modelo de acoplamiento para corrientes de fuga entre dos vías paralelas [9]. Se implementarán simulaciones en Simulink, Matlab 2021b y se analizará los resultados obtenidos.

Finalmente, en el capítulo V se presentarán las conclusiones del presente trabajo y propuestas de trabajos futuros.

CAPITULO II

EFFECTO DE LA FRECUENCIA Y HUMEDAD RELATIVA EN LOS PARÁMETROS CARACTERÍSTICAS DEL CIRCUITO DE VÍA.

En el presente trabajo, se empleará para los diferentes análisis un modelo eléctrico de vía caracterizado por sus parámetros en configuración en H tal como el presentado en la Figura 2. Por lo tanto, cabe a continuación analizar la dependencia de los diferentes parámetros R , L , C y G tanto con la frecuencia como con la humedad relativa.

2.1. Resistencia Eléctrica por unidad de longitud, R .

En [6], se ha determinado que la resistencia está relacionado con la frecuencia mediante la siguiente expresión:

$$R = 0.0533 \cdot \sqrt{f} \cdot 10^{-3} \Omega/m$$

En la Figura 5 se puede observar que la relación de incremento respecto a la frecuencia es no lineal.

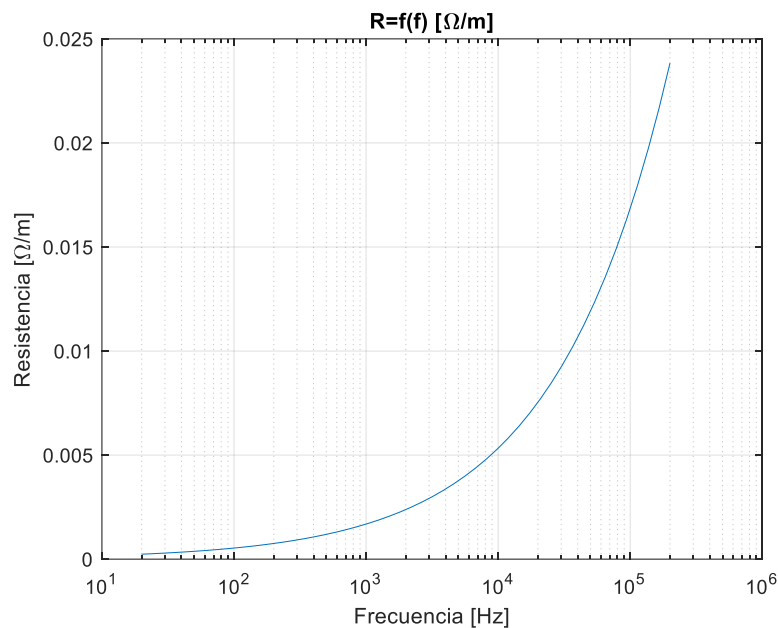


Figura 5. Gráfica de la resistencia de vía en función de la frecuencia [6].

2.2. Inductancia Eléctrica por unidad de longitud, L .

De la misma manera que para el parámetro de resistencia, en [6] se ha determinado que la inductancia de vía está relacionado con la frecuencia mediante la siguiente expresión:

$$L = 1.183567 + 8/\sqrt{f} \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$$

Y presenta un decremento no lineal en función de la frecuencia, que se puede visualizar en la Figura 6.

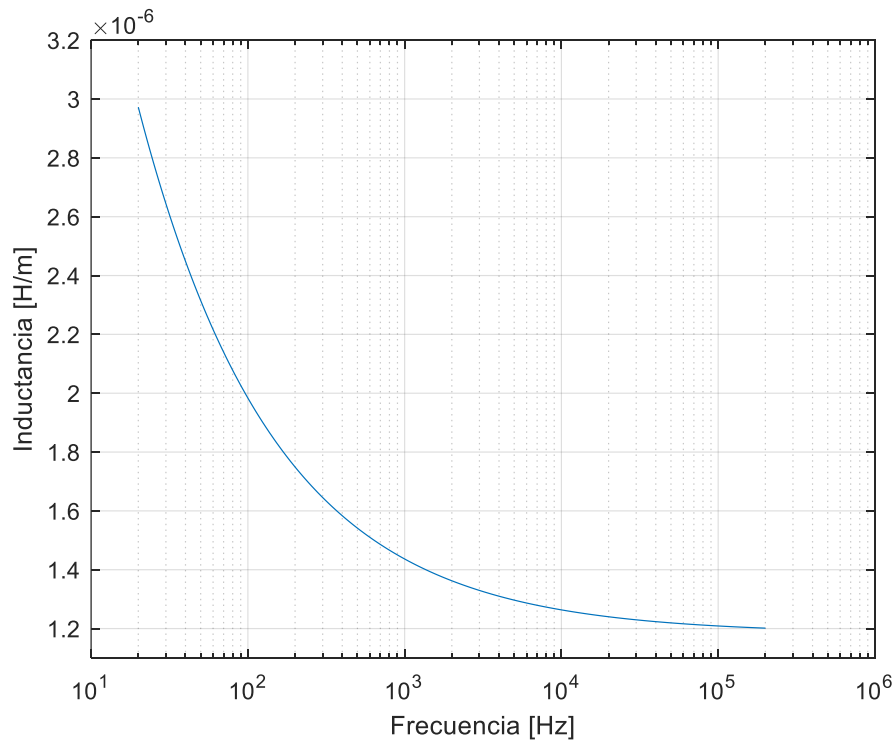


Figura 6. Gráfica de la inductancia en función de la frecuencia [6].

2.3. Conductancia Eléctrica por unidad de longitud, G.

Para estimar el modelo de conductancia, es necesario analizar la naturaleza de los datos experimentales de conductancia de trabajos anteriores mostrados en la Figura 7 [7]; se puede observar que presenta ejes logarítmicos decimales por lo que se buscará un modelo de esta naturaleza. Concretamente, se propone una estructura de modelo del tipo:

$$\log(G[n]) = \log(HR[n]) \cdot \theta_1 + \log(f[n]) \cdot \theta_2 + \theta_3 + g_x[n]$$

$n: 1, 2, \dots, N$ observaciones

Donde:

G: Conductancia eléctrica del modelo de vía.

HR: Humedad relativa del balasto.

f: frecuencia de operación.

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$: Parámetros del modelo a estimar.

g_x : Incertidumbre del modelo con distribución normal $g_x[n] \sim N(0, \sigma^2 \cdot I)$.

El modelo planteado permitirá obtener una estimación del valor de Conductancia del modelo de vía de acuerdo con valores de frecuencia, f , y humedad relativa, HR.

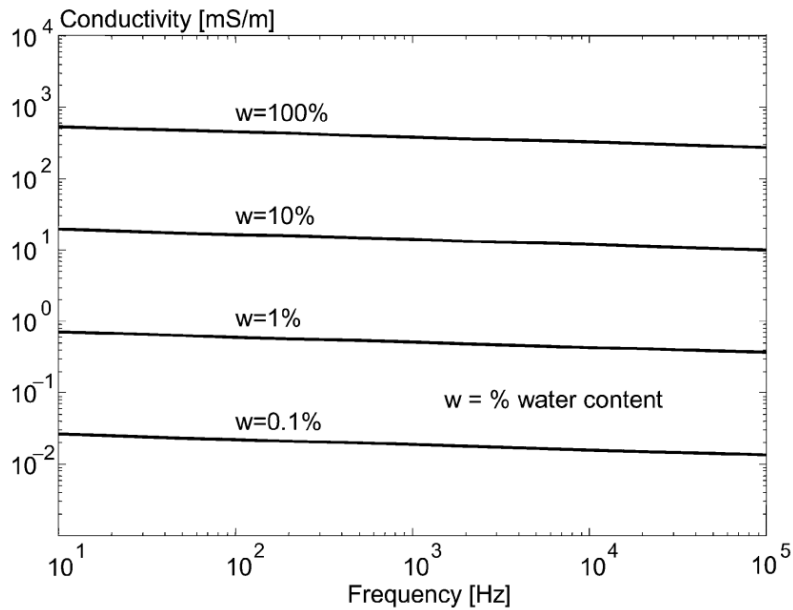


Figura 7. Conductancia del balasto vs frecuencia, para ciertos porcentajes de humedad [7].

2.3.1. Cálculo del Estimador del Modelo

Se reescribe el modelo de la siguiente forma, para poder determinar el estimador de mínima varianza de θ [10]:

$$X = H \cdot \theta_G + g_x$$

Al tratarse de trazados lineales se ha decidido contar con los valores extremos de cada trazado (en total 8 valores). Se tiene entonces:

$$\begin{bmatrix} \log(G[1]) \\ \log(G[2]) \\ \log(G[3]) \\ \log(G[4]) \\ \log(G[5]) \\ \log(G[6]) \\ \log(G[7]) \\ \log(G[8]) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log(HR[1]) & \log(f[1]) & 1 \\ \log(HR[2]) & \log(f[2]) & 1 \\ \log(HR[3]) & \log(f[3]) & 1 \\ \log(HR[4]) & \log(f[4]) & 1 \\ \log(HR[5]) & \log(f[5]) & 1 \\ \log(HR[6]) & \log(f[6]) & 1 \\ \log(HR[7]) & \log(f[7]) & 1 \\ \log(HR[8]) & \log(f[8]) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_x[1] \\ g_x[2] \\ g_x[3] \\ g_x[4] \\ g_x[5] \\ g_x[6] \\ g_x[7] \\ g_x[8] \end{bmatrix}$$

La matriz de observaciones resulta:

$$H = \begin{bmatrix} \log(HR[1]) & \log(f[1]) & 1 \\ \log(HR[2]) & \log(f[2]) & 1 \\ \log(HR[3]) & \log(f[3]) & 1 \\ \log(HR[4]) & \log(f[4]) & 1 \\ \log(HR[5]) & \log(f[5]) & 1 \\ \log(HR[6]) & \log(f[6]) & 1 \\ \log(HR[7]) & \log(f[7]) & 1 \\ \log(HR[8]) & \log(f[8]) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log(0.1) & \log(10) & 1 \\ \log(1) & \log(10) & 1 \\ \log(10) & \log(10) & 1 \\ \log(100) & \log(10) & 1 \\ \log(0.1) & \log(10e4) & 1 \\ \log(1) & \log(10e4) & 1 \\ \log(10) & \log(10e4) & 1 \\ \log(100) & \log(10e4) & 1 \end{bmatrix}$$

El vector de mediciones:

$$X = \begin{bmatrix} x[1] \\ x[2] \\ x[3] \\ x[4] \\ x[5] \\ x[6] \\ x[7] \\ x[8] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log(G[1]) \\ \log(G[2]) \\ \log(G[3]) \\ \log(G[4]) \\ \log(G[5]) \\ \log(G[6]) \\ \log(G[7]) \\ \log(G[8]) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log(2.7e - 2) \\ \log(7e - 1) \\ \log(2e1) \\ \log(5e2) \\ \log(1.5e - 2) \\ \log(3.9e - 1) \\ \log(10) \\ \log(2.9e2) \end{bmatrix}$$

El vector de parámetros:

$$\theta_G = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

El estimador de varianza mínima insesgado de θ , es:

$$\hat{\theta}_G = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_3 \end{bmatrix} = (H^T * H)^{-1} * H^T * X = \begin{bmatrix} 1.4263 \\ -0.0654 \\ -0.0786 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta}_G = \begin{bmatrix} 1.4263 \\ -0.0654 \\ -0.0786 \end{bmatrix}$$

A continuación, se superponen en la gráfica los datos del estimador obtenido analíticamente y de los datos de partida, se puede observar que se ha obtenido un buen ajuste:

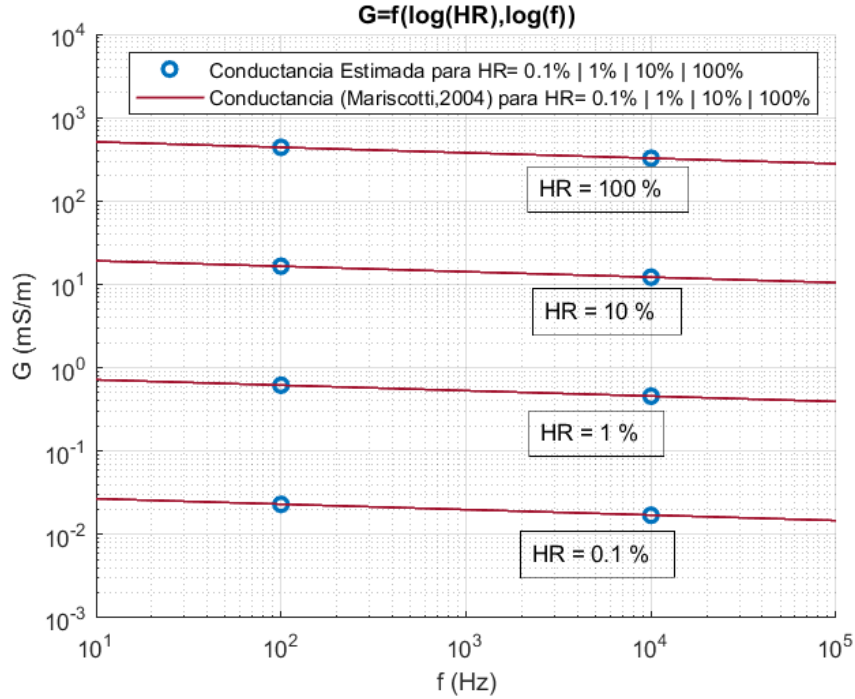


Figura 8. Comparación de modelo obtenido para la conductancia, G.

2.3.2. Incertidumbre del Modelo de Conductancia

Adicionalmente, debido a que no se conoce el valor real de la varianza (σ^2) de la variable aleatoria $g_x [n] \sim N (0, \sigma^2 \cdot I)$, se asume que el número de muestras obtenidas son lo suficientemente grandes para que la varianza obtenida analíticamente, S^2 , coincida con el valor de σ^2 .

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{x}[n] - x[n])^2}{N - 1} \quad ; \quad n = 1,2,3, \dots, N \quad ; \quad N = 8$$

$$\sigma^2 \cong S^2$$

$$\sigma^2 \cong 0.026$$

El modelo completo resulta, por lo tanto:

$$G = 10^{\{1.4263 \cdot \log(HR) - 0.0654 \cdot \log(f) - 0.0786 + g_x\}}$$

Donde:

$$g_x \sim N(0, 0.026)$$

2.4. Capacidad Eléctrica por unidad de longitud, C.

El modelo de capacidad se obtiene a partir de la permitividad del balasto. Para estimar la permitividad eléctrica del suelo, se ha empleado el mismo criterio que para la conductancia, G ; se puede observar que los datos experimentales de permitividad eléctrica relativa del balasto (Figura 9) tienen ejes logarítmicos decimales por lo que se buscará un modelo de esta naturaleza definido por la expresión:

$$\log(\varepsilon_r[n]) = \theta_1 \cdot \log(HR[n]) + \theta_2 \cdot \log(f[n]) + \theta_3 + c_x[n]$$

$n: 1, 2, \dots, N$ observaciones

Donde:

ε_r : Permitividad eléctrica relativa del suelo.

HR : Humedad relativa del balasto.

f : frecuencia de operación.

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$: Parámetros del modelo a estimar.

c_x : Incertidumbre del modelo que sigue una distribución normal $c_x [n] \sim N(0, \sigma^2 \cdot I)$.

El modelo planteado permitirá obtener una estimación del valor de Permitividad eléctrica relativa del suelo de acuerdo con valores de frecuencia, f , y humedad relativa, HR . Para este propósito, se han considerado como datos de entrada los mostrados a continuación:

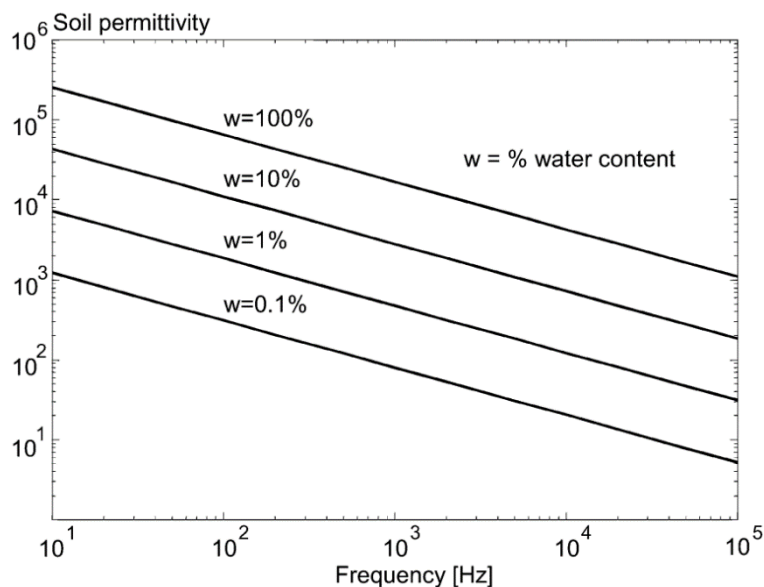


Figura 9. Permitividad Eléctrica del suelo vs frecuencia, para ciertos porcentajes de humedad [7].

2.4.1. Cálculo del Estimador del Modelo

El cálculo se realiza de la misma manera que en el apartado de conductancia para determinar el estimador de mínima varianza de θ [10]:

$$X = H \cdot \theta_\varepsilon + c_x$$

Se tiene entonces:

$$\begin{bmatrix} \log(\varepsilon_r[1]) \\ \log(\varepsilon_r[2]) \\ \log(\varepsilon_r[3]) \\ \log(\varepsilon_r[4]) \\ \log(\varepsilon_r[5]) \\ \log(\varepsilon_r[6]) \\ \log(\varepsilon_r[7]) \\ \log(\varepsilon_r[8]) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log(HR[1]) & \log(f[1]) & 1 \\ \log(HR[2]) & \log(f[2]) & 1 \\ \log(HR[3]) & \log(f[3]) & 1 \\ \log(HR[4]) & \log(f[4]) & 1 \\ \log(HR[5]) & \log(f[5]) & 1 \\ \log(HR[6]) & \log(f[6]) & 1 \\ \log(HR[7]) & \log(f[7]) & 1 \\ \log(HR[8]) & \log(f[8]) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_x[1] \\ c_x[2] \\ c_x[3] \\ c_x[4] \\ c_x[5] \\ c_x[6] \\ c_x[7] \\ c_x[8] \end{bmatrix}$$

La matriz de observaciones resulta:

$$H = \begin{bmatrix} \log(HR[1]) & \log(f[1]) & 1 \\ \log(HR[2]) & \log(f[2]) & 1 \\ \log(HR[3]) & \log(f[3]) & 1 \\ \log(HR[4]) & \log(f[4]) & 1 \\ \log(HR[5]) & \log(f[5]) & 1 \\ \log(HR[6]) & \log(f[6]) & 1 \\ \log(HR[7]) & \log(f[7]) & 1 \\ \log(HR[8]) & \log(f[8]) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log(100) & \log(10) & 1 \\ \log(100) & \log(10e4) & 1 \\ \log(10) & \log(10) & 1 \\ \log(10) & \log(10e4) & 1 \\ \log(1) & \log(10) & 1 \\ \log(1) & \log(10e4) & 1 \\ \log(0.1) & \log(10) & 1 \\ \log(0.1) & \log(10e4) & 1 \end{bmatrix}$$

El vector de mediciones:

$$X = \begin{bmatrix} x[1] \\ x[2] \\ x[3] \\ x[4] \\ x[5] \\ x[6] \\ x[7] \\ x[8] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log(\varepsilon_r[1]) \\ \log(\varepsilon_r[2]) \\ \log(\varepsilon_r[3]) \\ \log(\varepsilon_r[4]) \\ \log(\varepsilon_r[5]) \\ \log(\varepsilon_r[6]) \\ \log(\varepsilon_r[7]) \\ \log(\varepsilon_r[8]) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log(2.5e5) \\ \log(1.1e3) \\ \log(4.3e5) \\ \log(1.95e2) \\ \log(7e3) \\ \log(30) \\ \log(1.3e3) \\ \log(5) \end{bmatrix}$$

El vector de parámetros:

$$\theta_\varepsilon = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

El estimador de varianza mínima insesgado de θ_ε es:

$$\hat{\theta}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_3 \end{bmatrix} = (H^T * H)^{-1} * H^T * X = \begin{bmatrix} 0.7740 \\ -0.5927 \\ 4.4533 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta}_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0.7740 \\ -0.5927 \\ 4.4533 \end{bmatrix}$$

A continuación, se superponen en la gráfica los datos del estimador obtenido analíticamente y de los datos de partida, se puede observar que se ha obtenido un buen ajuste:

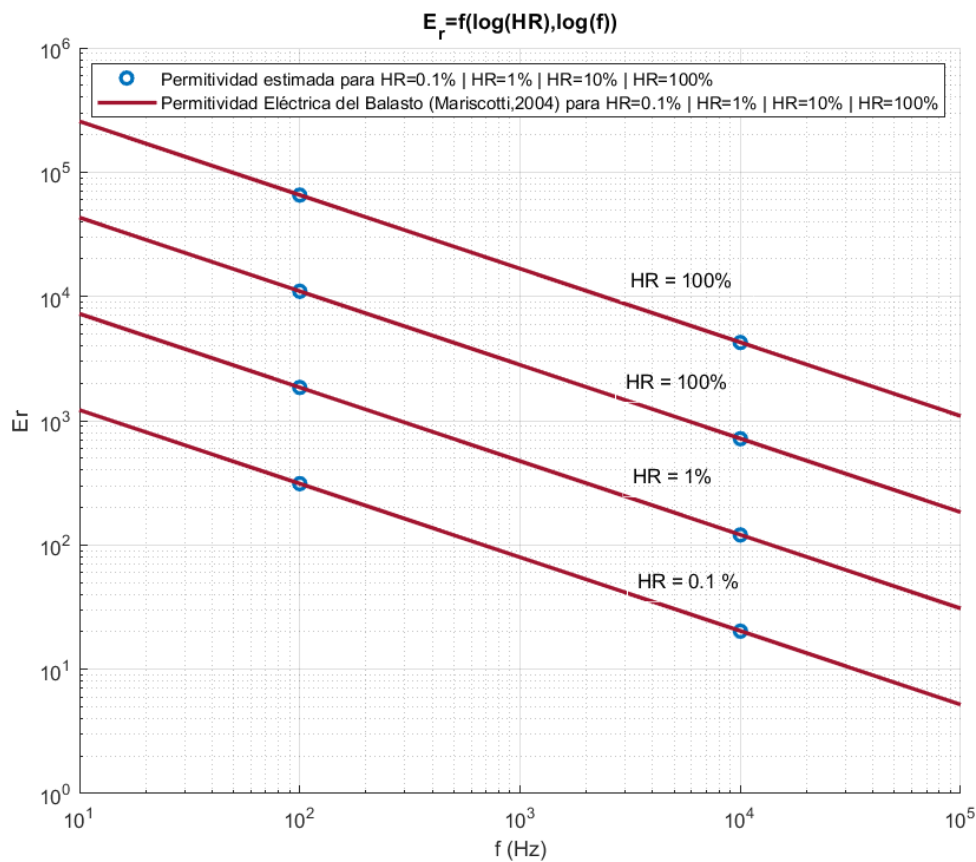


Figura 10. Comparación de modelo obtenido para la permitividad relativa del suelo, ε_r .

2.4.2. Incertidumbre del Modelo de Permitividad Eléctrica

De la misma manera que con la conductancia, se calcula la varianza, S^2 :

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{x}[n] - x[n])^2}{N - 1} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad ; \quad N = 8$$

$$\sigma^2 \cong S^2$$

$$\sigma^2 \cong 0.0003$$

El modelo completo resulta, por lo tanto:

$$\varepsilon_r = 10^{\{0.7740 \cdot \log(HR) - 0.5927 \cdot \log(f) + 4.4533 + c_x\}}$$

$$c_x \sim N(0, 0.0003)$$

A continuación, para obtener la permitividad absoluta, ε , debemos multiplicar la permitividad relativa, ε_r , por la permitividad del vacío, ε_0 :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$$

$$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \left[\frac{F}{m} \right]$$

2.4.3. Cálculo de la Capacidad

Para obtener el valor de capacidad se recurre al Método de Imágenes [11], [12] para una línea de transmisión monofásica, este método consiste en analizar cada conductor de la línea de transmisión (cada raíl) como una carga puntual con su correspondiente Imagen, ambas separadas una distancia, h , de tierra; tal y como se muestra en la siguiente figura:

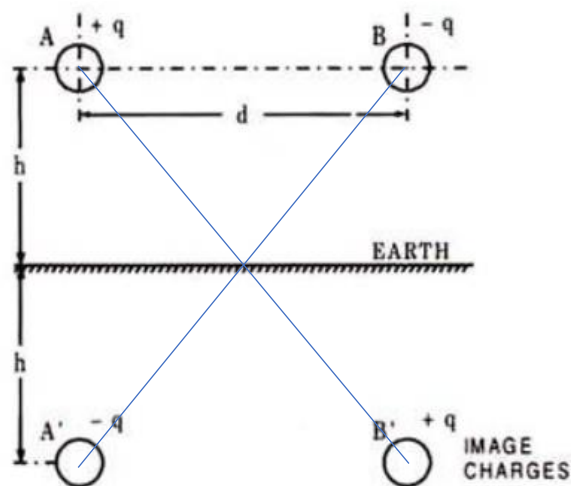


Figura 11. Método de Imágenes para el cálculo de la capacidad.

Se calcula la diferencia de potencial V_{AB} , que equivaldría a la diferencia de potencial entre raíles, con las siguientes consideraciones geométricas de la vía [7]:

Tabla 1. Consideraciones geométricas para obtención de Capacidad [7].

Descripción	Parámetro	Valor
Altura de los raíles al suelo	h	0.2 m
Distancia entre los raíles	d	1.43 m
Sección transversal de los raíles (se asume circular).	A	0.007354 m ²
Radio de cada raíl	r	0.0484 m

$$V_{AB} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[q_A \cdot \log\left(\frac{d}{r}\right) + q_B \cdot \log\left(\frac{r}{d}\right) + q_{A'} \cdot \log\left(\frac{\sqrt{4h^2 + d^2}}{2h}\right) + q_{B'} \cdot \log\left(\frac{2h}{\sqrt{4h^2 + d^2}}\right) \right]$$

Donde; q_A , q_B , $q_{A'}$ y $q_{B'}$ corresponden a las 4 cargas resultantes de aplicar el método de imágenes en la Figura 11 (A, A', B, B'). Adicionalmente, $q_A = q_B = q_{A'} = q_{B'} = q$; por lo tanto, la expresión resulta:

$$V_{AB} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[q \cdot \log\left(\frac{d}{r}\right) - q \cdot \log\left(\frac{r}{d}\right) - q \cdot \log\left(\frac{\sqrt{4h^2 + d^2}}{2h}\right) + q \cdot \log\left(\frac{2h}{\sqrt{4h^2 + d^2}}\right) \right]$$

$$V_{AB} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[q \cdot \log\left(\frac{2hd}{r\sqrt{4h^2 + d^2}}\right) - q \cdot \log\left(\frac{r\sqrt{4h^2 + d^2}}{2hd}\right) \right]$$

$$V_{AB} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[q \cdot \log\left(\frac{\frac{2hd}{r\sqrt{4h^2 + d^2}}}{\frac{r\sqrt{4h^2 + d^2}}{2hd}}\right) \right]$$

$$V_{AB} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[q \cdot \log\left(\frac{4h^2 d^2}{r^2(4h^2 + d^2)}\right) \right]$$

$$V_{AB} = \frac{q}{\pi\epsilon} \left[\log\left(\frac{2hd}{r\sqrt{4h^2 + d^2}}\right) \right]$$

Se calcula la capacidad mediante la siguiente definición:

$$C = \frac{q}{V_{AB}} = \frac{q}{\frac{q}{\pi\epsilon} \left[\log\left(\frac{2hd}{r\sqrt{4h^2 + d^2}}\right) \right]}$$

Por lo tanto:

$$C = \frac{\pi\epsilon}{\log\left(\frac{2hd}{r\sqrt{4h^2 + d^2}}\right)}$$

Donde ϵ , hace referencia al modelo de permitividad eléctrica obtenido anteriormente dependiente de la frecuencia y de la HR:

$$\epsilon = 8.85e - 12 \cdot 10^{\{0.7740 \cdot \log(HR) - 0.5927 \cdot \log(f) + 4.4533 + c_x\}}$$

$$c_x \sim N(0, 0.0003).$$

Se reescribe la expresión de la capacidad reemplazando:

$$K = \log\left(\frac{2hd}{r\sqrt{4h^2 + d^2}}\right) = 2.0749$$

$$K = 2.0749$$

Se obtiene la siguiente expresión para el modelado de la capacidad característica de la vía en función de la frecuencia y de la HR.

$$C = \frac{\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{\{0.7740 \cdot \log(HR) - 0.5927 \cdot \log(f) + 4.4533 + c_x\}}}{2.0749}$$

con

$$c_x \sim N(0, 0.0003)$$

Para corregir los valores de capacidad a 1 KHz presentados en [7] e interpolar una expresión para todo el rango de frecuencias y valores de HR; se incluirá en la expresión de capacidad presentada anteriormente, C, un término de corrección C_c que se obtendrá ajustando los resultados obtenidos, a los resultados presentados en [7] para una vía seca a 5 Hz, 100 Hz, 1 KHz y 10 KHz:

$$C = 10^{\left\{ \log \left[\frac{\pi \cdot 8.85 e^{-12} \cdot 10^{\{0.7740 \cdot \log(HR) - 0.5927 \cdot \log(f) + 4.4533 + c_x\}}}{2.0749} \right] + \log [C_c] \right\}}$$

Tabla 2. Resultados experimentales de capacidad raíl – raíl para vía seca (HR=0.1%) [7].

Capacidad raíl – raíl (nF/m)	
Frecuencia [Hz]	Capacidad [nF/m]
5	3.5
100	1.35
1000	1.38
10000	0.65

En la siguiente ilustración, se muestran los valores obtenidos mediante la ecuación de C, y los valores deseados de la Tabla 2 para $HR = 0.1 \%$:

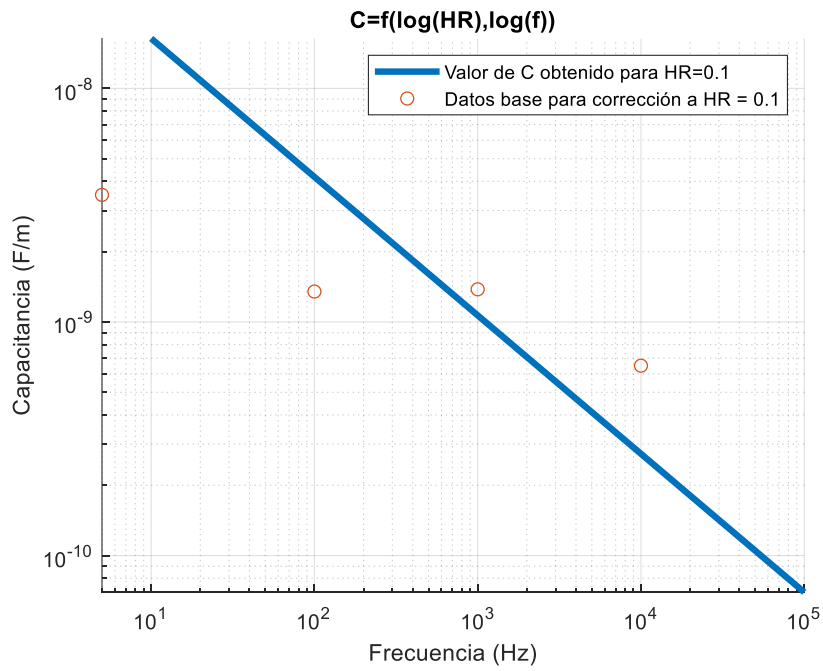


Figura 12. Valores de C obtenidos y valores para corrección.

A continuación, obtenemos los residuos correspondientes a los dos conjuntos de datos mostrados en la Figura 13 y los graficamos para tener una idea del modelo de corrección a estimar:

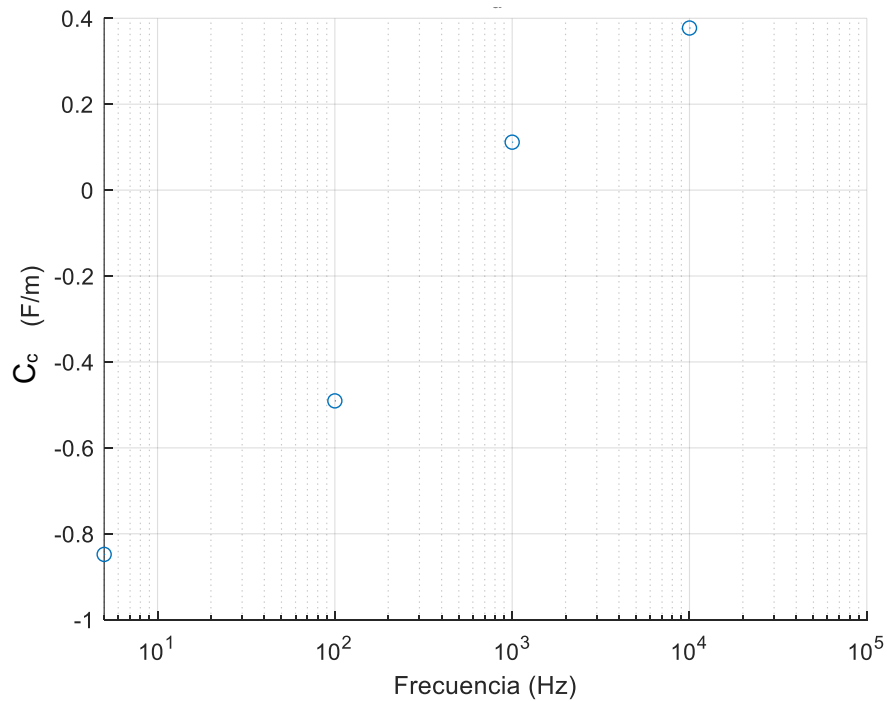


Figura 13. Residuos obtenidos para estimar modelo.

2.4.4. Estimador del modelo de corrección de capacidad

De acuerdo con la naturaleza de los residuos obtenidos en la Figura 13, se estimará un modelo polinomial de primer orden de la forma:

$$\log(C_c) = \theta_1 \cdot \log(f[n]) + \theta_2 + d_x[n]$$

$n: 1, 2, \dots, N$ observaciones

Donde:

C_c : Residuo a compensar en ecuación de C para $HR = 0.1$ %.

f : frecuencia de operación.

θ_1, θ_2 : Parámetros del modelo a estimar.

d_x : Incertidumbre del modelo que sigue una distribución normal $d_x[n] \sim N(0, \sigma^2 \cdot I)$.

El modelo planteado permitirá obtener una ecuación de corrección de la capacidad en función frecuencia, f . El cálculo se realiza de la misma manera que en el apartado de conductancia y permitividad para determinar el estimador de mínima varianza de θ [10]:

$$X = H \cdot \theta_\varepsilon + W$$

Se tiene entonces:

$$\begin{bmatrix} \log(C_c[1]) \\ \log(C_c[2]) \\ \log(C_c[3]) \\ \log(C_c[4]) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log(f[1]) & 1 \\ \log(f[2]) & 1 \\ \log(f[3]) & 1 \\ \log(f[4]) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x[1] \\ d_x[2] \\ d_x[3] \\ d_x[4] \end{bmatrix}$$

La matriz de observaciones resulta:

$$H = \begin{bmatrix} \log(f[1]) & 1 \\ \log(f[2]) & 1 \\ \log(f[3]) & 1 \\ \log(f[4]) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log(50) & 1 \\ \log(100) & 1 \\ \log(1000) & 1 \\ \log(10000) & 1 \end{bmatrix}$$

El vector de mediciones:

$$X = \begin{bmatrix} x[1] \\ x[2] \\ x[3] \\ x[4] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log(C_c[1]) \\ \log(C_c[2]) \\ \log(C_c[3]) \\ \log(C_c[4]) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log(3.5 \cdot 10^{-9}) \\ \log(1.35 \cdot 10^{-9}) \\ \log(1.38 \cdot 10^{-9}) \\ \log(0.65 \cdot 10^{-9}) \end{bmatrix}$$

El vector de parámetros:

$$\theta_{C_c} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

El estimador de varianza mínima insesgado de θ_{C_c} es:

$$\hat{\theta}_{C_c} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{bmatrix} = (H^T * H)^{-1} * H^T * X$$

$$\hat{\theta}_{C_c} = \begin{bmatrix} 0.3903 \\ -1.159 \end{bmatrix}$$

A continuación, se grafican los puntos iniciales y los valores del estimador para verificar el ajuste:

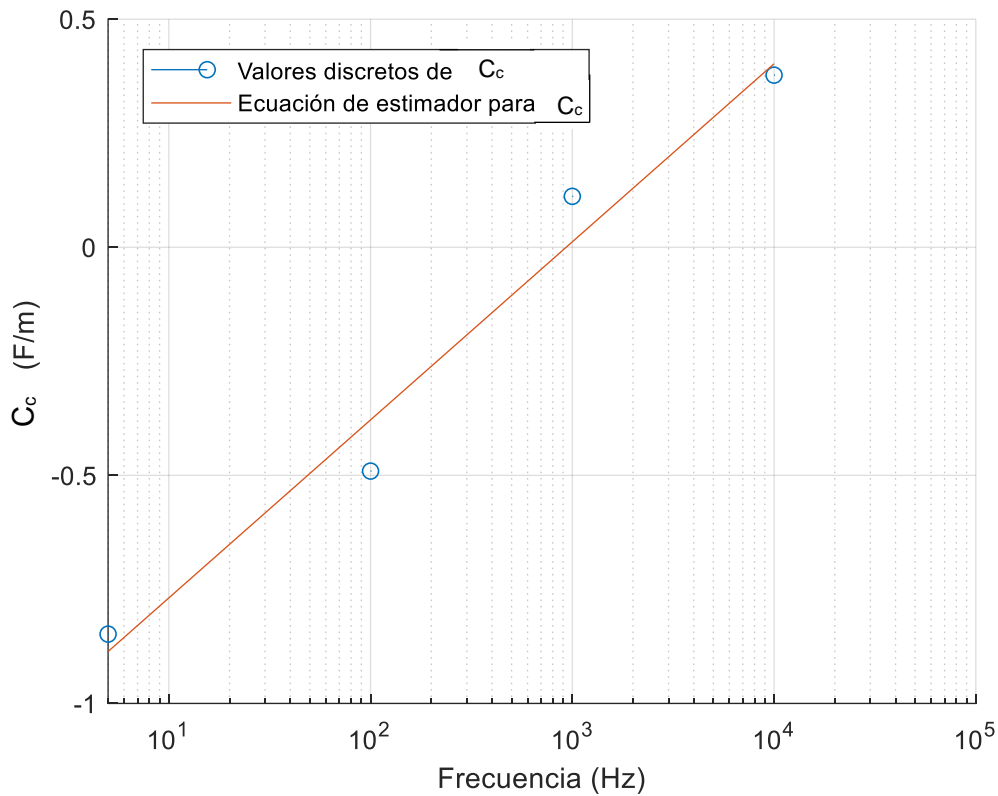


Figura 14. Ajuste de modelo de corrección de capacidad para $HR = 0.1\%$.

2.4.5. Incertidumbre del Modelo de Corrección de Capacidad Eléctrica

Se calcula la varianza, S^2 :

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{x}[n] - x[n])^2}{N - 1} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad ; \quad N = 8$$

$$\sigma^2 \cong S^2$$

$$\sigma^2 \cong 0.0082$$

El modelo de corrección resulta, por lo tanto:

$$\log(C_c) = 0.3903 \cdot \log(f) - 1.159 + d_x$$

$$d_x \sim N(0, 0.0082)$$

Finalmente, la ecuación de capacidad con el término de corrección de frecuencia que interpola los resultados en todo el rango de valores de frecuencia, f (10 Hz – 100 KHz), y HR (0.1 % – 100 %), resulta:

$$C = 10^{\left\{ \log \left[\frac{\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{\{0.7740 \cdot \log(HR) - 0.5927 \cdot \log(f) + 4.4533 + c_x\}}}{2.0749} \right] + 0.3903 \cdot \log(f) - 1.159 + d_x \right\}}$$

Con

$$c_x \sim N(0, 0.0003)$$

$$d_x \sim N(0, 0.0082)$$

Los resultados del modelo estimado para la capacidad en función de la frecuencia y de HR se muestran en la Figura 15:

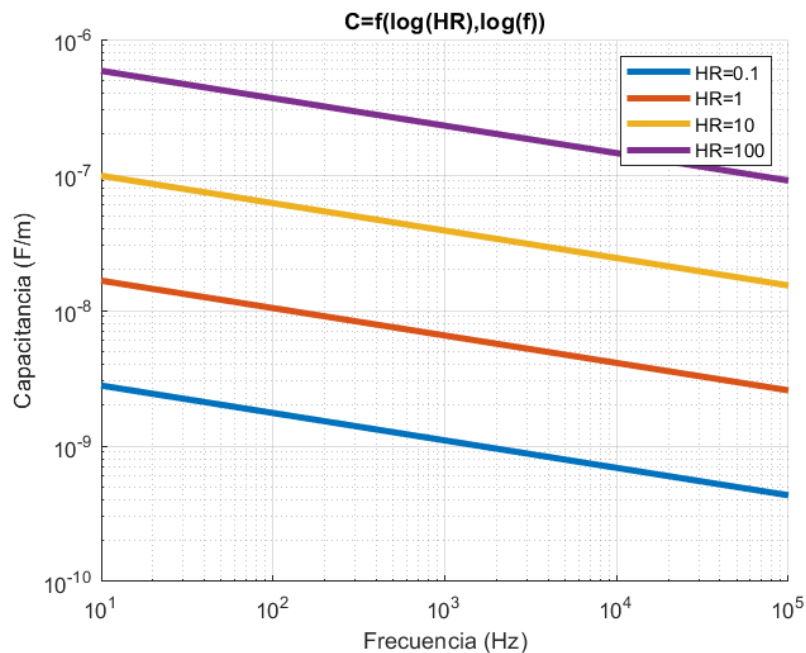


Figura 15. Modelo de Capacidad en función de f y HR.

Para aproximarse a los valores de Jakubas [6], los valores de la gráfica anterior habría que dividirlos por 1000.

CAPÍTULO III

ANÁLISIS DE LA INCERTIDUMBRE EN LA ESTIMACIÓN DE LA POSICIÓN DEL TREN EN VÍA

Para analizar el comportamiento eléctrico de la vía, se recurre al modelo más utilizado en la literatura [6]–[8], [13], que es el de una línea de transmisión caracterizada por su impedancia característica, Z_o , y constante de propagación, γ . El esquema eléctrico por unidad de longitud con los parámetros R , L , C , G con el que se trabajará es el modelo en H de la Figura 16.

$$Z_o = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)}$$

Donde:

$R = f(\omega)$: Resistencia eléctrica por unidad de longitud en Ω/m .

$L = f(\omega)$: Inductancia eléctrica por unidad de longitud en H/m.

$G = f(\omega, HR)$: Conductancia eléctrica por unidad de longitud en S/m.

$C = f(\omega, HR)$: Capacidad eléctrica por unidad de longitud en F/m.

$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$: Pulsación (siendo f la frecuencia) de operación.

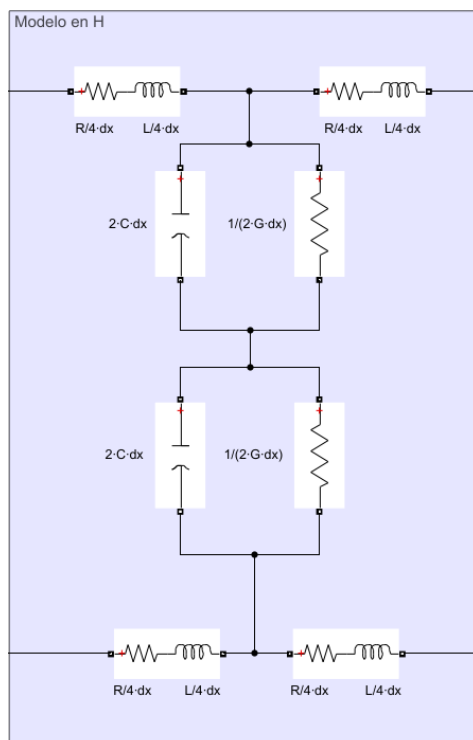


Figura 16. Esquema eléctrico, por unidad de longitud, del modelo en H de vía.

Adicionalmente, la impedancia de entrada, Z_{in} , de un tramo de vía de longitud l como el mostrado en la Figura 17, se puede obtener de manera analítica mediante la expresión [8]:

$$Z_{in} = Z_o \cdot \frac{Z_L + Z_o \tanh(\gamma \cdot l)}{Z_o + Z_L \tanh(\gamma \cdot l)}$$

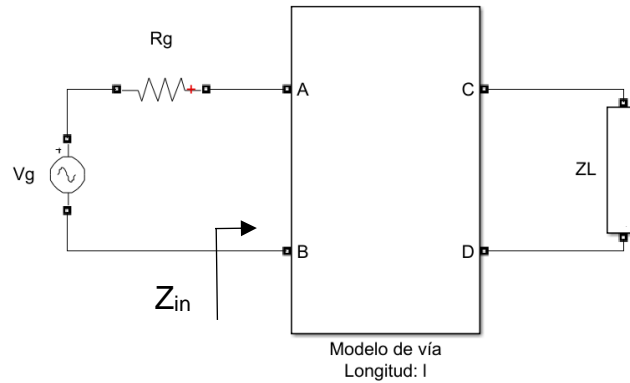


Figura 17. Esquema para impedancia de entrada de un tramo de vía.

Donde:

Z_L : Impedancia de carga del modelo de vía.

Z_o : Impedancia característica del modelo de vía.

γ : Constante de propagación del modelo de vía.

l : Longitud del tramo de vía bajo estudio.

De acuerdo con las diferentes terminaciones de impedancia de carga, Z_L , que puede tener el modelo de vía, se establecen los siguientes casos particulares de valores de impedancia de entrada, Z_{in} , a partir de su expresión analítica [8]:

Para $Z_L = 0$:

$$Z_{in} = Z_o \cdot \tanh(\gamma \cdot l)$$

Para $Z_L = \infty$:

$$Z_{in} = \frac{Z_o}{\tanh(\gamma \cdot L)}$$

Para $Z_L = Z_o$:

$$Z_{in} = Z_o$$

Otro caso especial es cuando $Z_L = 0.5 \Omega$, es decir tramo de vía terminado con resistencia shunt del tren:

$$Z_{in} = Z_o \cdot \frac{0.5 + Z_o \tanh(\gamma \cdot l)}{Z_o + 0.5 \tanh(\gamma \cdot l)}$$

Adicionalmente para todos los casos:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} Z_{in} = Z_o$$

3.1. Análisis de variabilidad de Impedancia de entrada de vía

De acuerdo con la definición analítica de la impedancia de entrada de vía, Z_{in} , se establece su dependencia respecto a la frecuencia de operación, impedancia de carga, longitud de la vía, y condiciones ambientales de humedad relativa de la misma:

$$Z_{in} = f(\omega, l, Z_o, Z_L)$$

Donde:

$$Z_o = f(R, L, C, G, \omega) = f(\omega, HR)$$

$$\gamma = f(R, L, C, G, \omega) = f(\omega, HR)$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$100 \text{ Hz} \leq f \leq 20 \text{ KHz}$$

$$100 \text{ m} \leq l \leq 2.5 \text{ Km}$$

$$R = f(\omega) \quad ; \quad L = f(\omega)$$

$$C = f(\omega, HR) \quad ; \quad G = f(\omega, HR)$$

$$\therefore Z_{in} = f(\omega, l, HR, Z_L)$$

Como una primera aproximación, cabe analizar el comportamiento de los parámetros específicos del modelo de vía como son la impedancia característica, Z_o , y la constante de propagación, γ , en función de la frecuencia, ω , y de la humedad relativa, HR .

En las siguientes figuras se muestran estas dependencias.

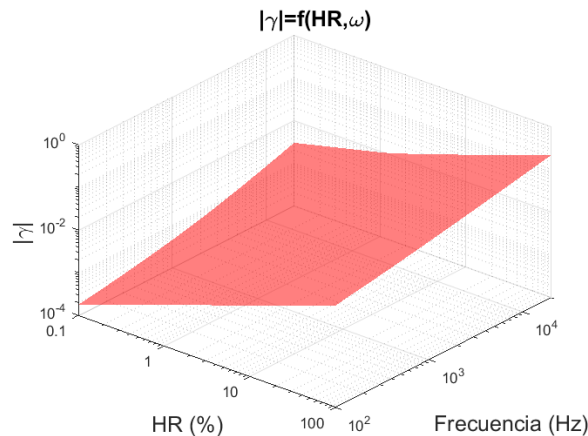


Figura 18. Variación del módulo de la constante de propagación, $|\gamma|$, respecto a la frecuencia y a la humedad relativa.

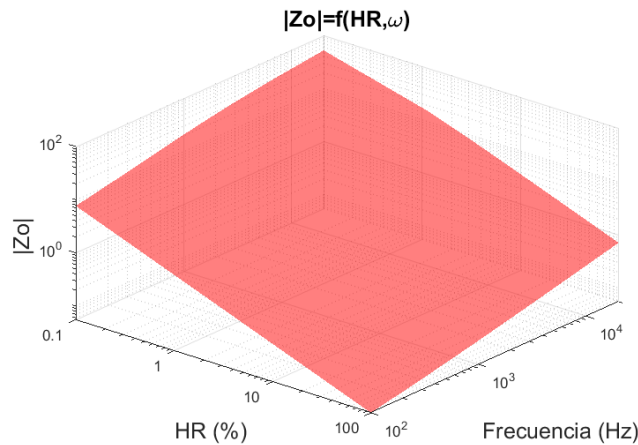


Figura 19. Variación del módulo de la impedancia característica, $|Z_0|$, respecto a la frecuencia y a la humedad relativa.

A partir de las Figuras 18 y 19, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- La constante de propagación, $|\gamma|$, incrementa su valor cuando incrementa la frecuencia de operación del circuito de vía, f .
- La constante de propagación, $|\gamma|$, incrementa su valor cuando incrementa la humedad relativa, HR .
- La impedancia característica, $|Z_0|$, incrementa conforme disminuye la humedad relativa del balasto, HR .
- La impedancia característica, $|Z_0|$, incrementa su valor cuando se incrementa la frecuencia de operación, f .

A continuación, se realizará el análisis del comportamiento del valor de impedancia de entrada en función de las diferentes variables de las que es dependiente.

3.4.1. Variación de Impedancia de Entrada respecto a Longitud de la Vía y Humedad Relativa del Balasto.

Para este análisis, se ha establecido una frecuencia de operación constante de $f = 5 \text{ KHz}$, dentro del rango de audiofrecuencia típico utilizado en circuitos de vía; así como una impedancia de carga con sus diferentes valores posibles, circuito abierto $Z_L = \infty$, cortocircuito $Z_L = 0$ y resistencia shunt del tren $Z_L = 0.5 \Omega$. Se muestran los resultados en la Figura 20.

- Teniendo en cuenta que $\text{th}(x) \approx 1$ para $x \geq 2$, independientemente de la impedancia Z_L , para longitudes de vía suficientemente grandes ($l > 2/\gamma$), Z_{in} tiende al valor de Z_0 .
- Para $Z_L = 0$, se tiene que $Z_{in} = Z_0 \cdot \tanh(\gamma \cdot l)$; por lo que para longitudes de vía $l < 2/\gamma$, resulta que $Z_{in} < Z_0$ ya que se cumple la condición $\tanh(\gamma \cdot l) < 1$.
- Para $Z_L = \infty$, se tiene que $Z_{in} = Z_0 / \tanh(\gamma \cdot l)$; por lo que para longitudes de vía $l < 2/\gamma$, resulta que $Z_{in} > Z_0$ ya que se cumple la condición $\tanh(\gamma \cdot l) < 1$.

- Para cualquier valor de impedancia de carga, Z_L ; a valores más bajos de HR, son necesarias longitudes de vía mayores para cumplir la condición $Z_{in} = Z_o$; mientras que a valores más altos de HR, son necesarias longitudes de vía menores para cumplir la condición $Z_{in} = Z_o$.
- La impedancia característica es independiente de la longitud del tramo de vía, más no de la humedad relativa.

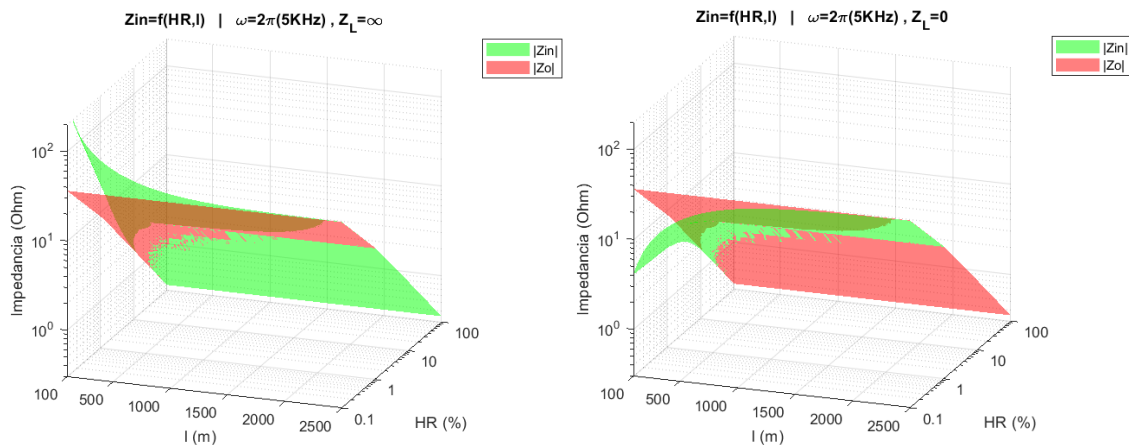


Figura 20. Variación de impedancia de entrada respecto a la longitud de vía y humedad relativa. Caso de terminación en circuito abierto (izda) y cortocircuito (dcha)

3.4.2. Variación de Impedancia de Entrada respecto a Impedancia de carga y Frecuencia de Operación.

Para este análisis, se han establecido longitudes de vía, $l = 2500 \text{ m}$, 500 m , 100 m y 20 m ; para valores de humedad relativa, $HR = 0.1\%$, 1% , 10% y 100% , respectivamente. Los valores de longitud de vía, l , para cada valor de HR, han sido definidos de esta manera debido a que, en el modelo analítico de impedancia de entrada, Z_{in} , la condición $Z_{in} = Z_o$ se cumple a menores distancias con valores más altos de HR; es decir, $\tanh(\gamma \cdot l) \approx 1$. Se muestran los resultados para los diferentes valores en la Figura 21, y se puede concluir:

- Para un valor de longitud de vía, l , y HR constantes, se observa que el valor de Z_{in} , para los casos de impedancia de carga, $Z_L = \infty$ y $Z_L = 0$, tiende al valor de Z_o conforme se incrementa f . Esto se debe a que, conforme se incrementa f , la constante de propagación γ se incrementa (Figura 18); es decir, se cumple en la expresión de Z_{in} la condición $\tanh(\gamma \cdot L) \approx 1$ con menores valores de l y a mayores valores ω .
- Conforme la frecuencia de operación, f , se incrementa, se incrementa la impedancia de entrada, Z_{in} . Esto es debido a que el incremento de f conlleva un incremento de la impedancia característica, Z_o , del modelo de vía (Figura 19).

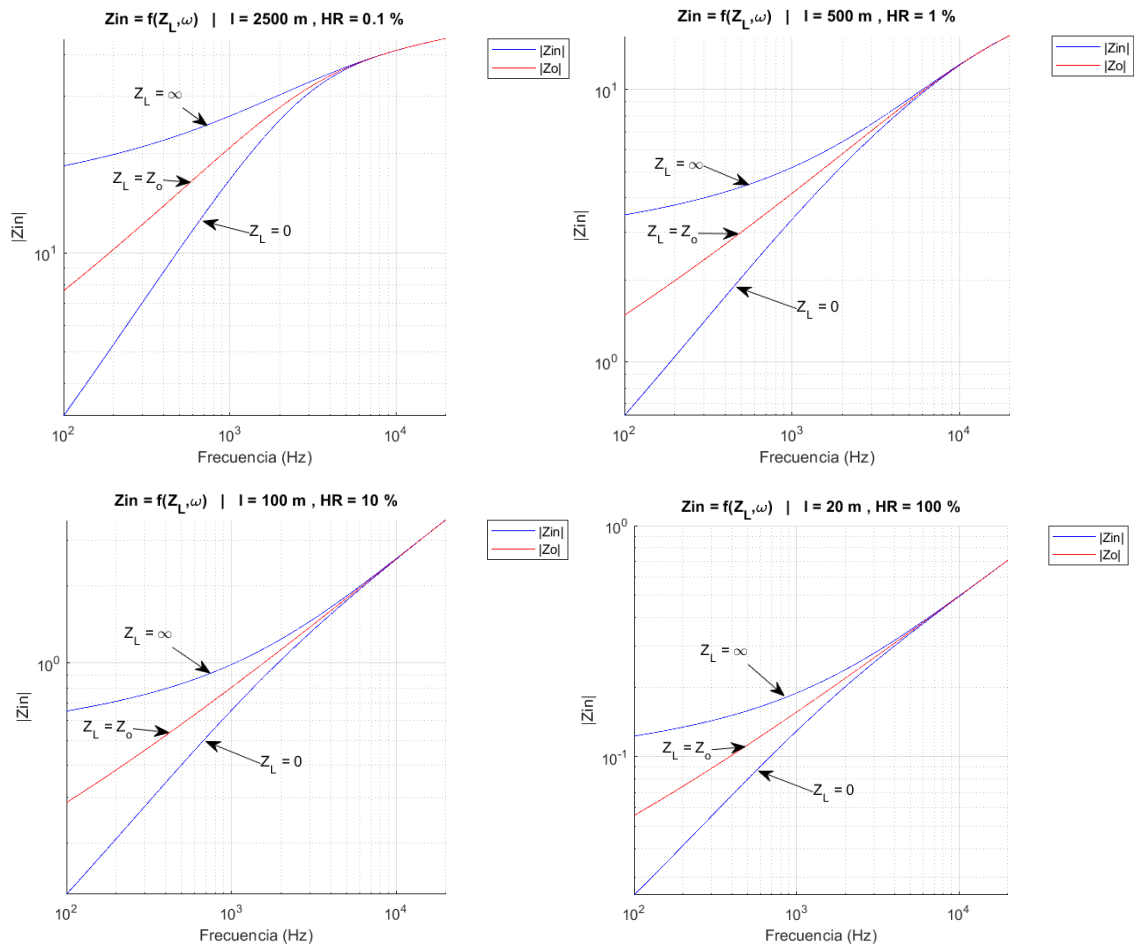


Figura 21. Variación de impedancia de entrada respecto a la frecuencia de operación e impedancia de carga, para diferentes tramos de vía.

3.4.3. Variación de Impedancia de Entrada respecto a Frecuencia de Operación y Humedad Relativa del Balasto

Para este análisis, se ha establecido una longitud de vía constante de $l = 2500$ m; así como una impedancia de carga con sus valores límite, $Z_L = \infty$ y $Z_L = 0$. Se muestran los resultados en la Figura 22, comprobándose que

- Para un valor de longitud de vía constante y para los casos de impedancia de carga límite ($Z_L = \infty$ y $Z_L = 0$), el valor de Z_{in} tiende al valor de Z_o conforme se incrementa f . Esto es debido a que conforme se incrementa f , la constante de propagación γ y se incrementa (Figura 18); es decir, se cumple en la expresión de Z_{in} la condición $\tanh(\gamma \cdot l) \approx 1$ a mayores valores f con una longitud de vía constante.
- Conforme la humedad relativa HR se incrementa, disminuye su valor la impedancia de entrada, Z_{in} . Esto debido a que el incremento de HR conlleva una disminución en el valor de impedancia característica Z_o , como se muestra en la Figura 19.

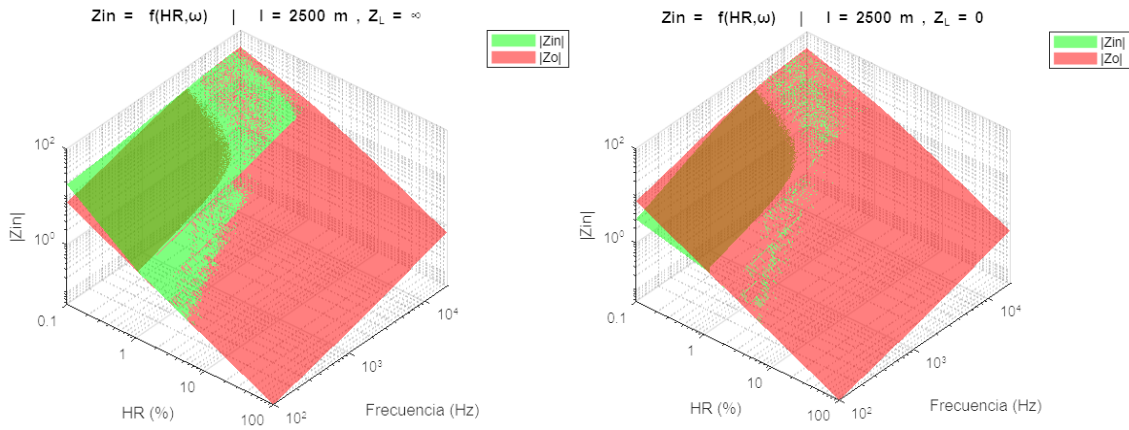


Figura 22. Variación de impedancia de entrada respecto a la frecuencia de operación y humedad relativa del balasto, para una longitud de vía dada y valores límites de impedancia de carga.

3.4.4. Variación de Impedancia de Entrada respecto a Frecuencia de Operación y Humedad Relativa del Balasto

Para este análisis, se ha establecido una frecuencia de operación constante de $f = 5 \text{ KHz}$ dentro del rango de audiofrecuencia típico en el diseño de circuitos de vía; así como dos longitudes de vía diferentes, $l = 500 \text{ m}$ y $l = 100 \text{ m}$. Se muestran los resultados en la Figura 23.

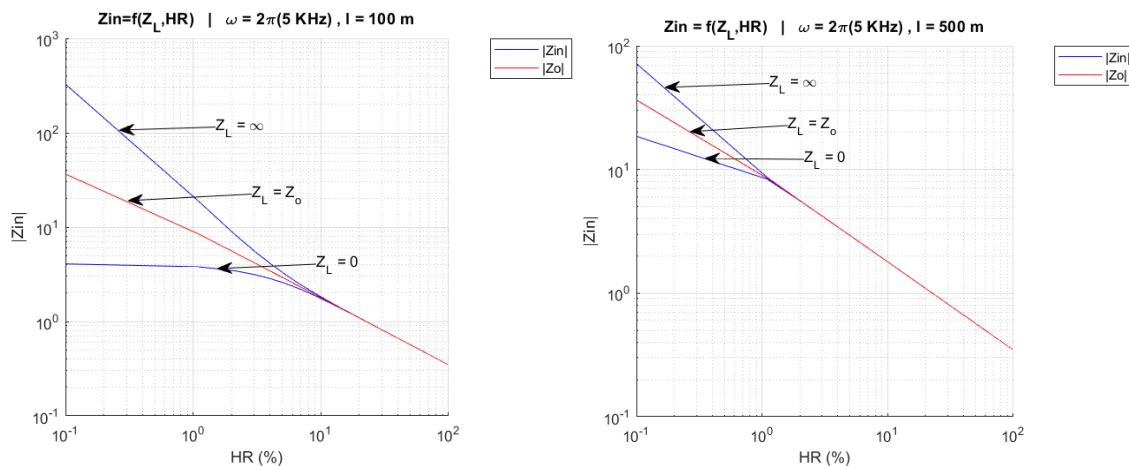


Figura 23. Variación de impedancia de entrada respecto a la humedad relativa del balasto e impedancia de carga.

Se puede observar que

- Conforme incrementa el valor de humedad relativa, HR , el valor de Z_{in} , para los casos de impedancia de carga, $Z_L = \infty$ y $Z_L = 0$, tiende al valor de Z_0 ; esto se justifica en que el coeficiente de propagación γ incrementa su valor con el incremento de HR y la condición $\tanh(\gamma \cdot l) \approx 1$ de la expresión analítica de Z_{in} para una longitud de vía constante;

- El efecto de la variación de humedad relativa HR , sobre el valor de impedancia de entrada Z_{in} , es menos evidente conforme la longitud de vía l analizada es mayor.

3.4.5. Variación de Impedancia de Entrada respecto a Longitud de Vía y Frecuencia de Operación

Se han establecido valores de humedad relativa constantes, HR , de $HR = 0.1 \%$, 1% y 100% ; así como una impedancia de carga con sus diferentes valores límites, $Z_L = \infty$, $Z_L = 0$. Se muestran los resultados en la Figura 24.

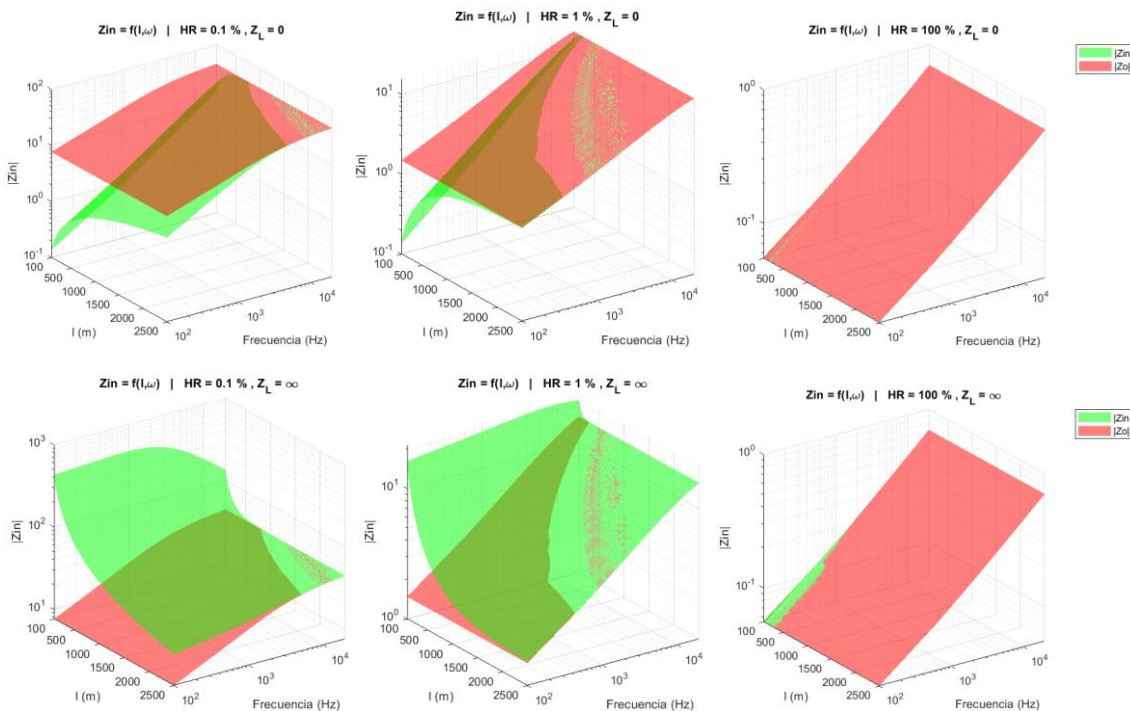


Figura 24. Variación de impedancia de entrada respecto a la frecuencia de operación y longitud de vía, para valores límites de impedancia de carga y condición de balasto (seco y húmedo).

Tal y como se deduce de la expresión analítica de la impedancia de entrada, en la Figura 24 se aprecia que

- Para $Z_L = 0$, el valor de Z_{in} es menor a Z_o para distancias menores a aproximadamente $2 / \gamma$.
- Para $Z_L = \infty$, el valor de Z_{in} es mayor a Z_o para distancias menores a aproximadamente $2 / \gamma$.
- Incrementar la frecuencia de operación tiene como efecto el incremento de valor de impedancia de entrada, Z_{in} , como ya se ha explicado en puntos anteriores.
- El valor de impedancia de entrada tiende al valor de la impedancia característica, $Z_{in} = Z_o$, cuando la longitud de vía se incrementa progresivamente, $l \rightarrow \infty$.

3.4.6. Variación de Impedancia de Entrada respecto a Longitud de Vía e Impedancia de Carga

El estudio se ha realizado para diferentes valores de humedad relativa, $HR = 0.1\%$, 1% , 10% y 100% ; así como para la frecuencia de operación $f = 5\text{ KHz}$. Se muestran los resultados en la Figura 25 y se comprueba que, tal y como cabía esperar de la definición analítica de la impedancia de entrada:

- Para $Z_L = 0$, se observa que el valor de Z_{in} es menor a Z_o para distancias menores a aproximadamente $2/\gamma$.
- Para $Z_L = \infty$, se observa que el valor de Z_{in} es mayor a Z_o para distancias menores a aproximadamente $2/\gamma$.
- Se puede observar que conforme incrementa la longitud de vía l , para los casos límite de impedancia de carga ($Z_L = \infty$ y $Z_L = 0$), el valor de Z_{in} tiende al valor de Z_o .

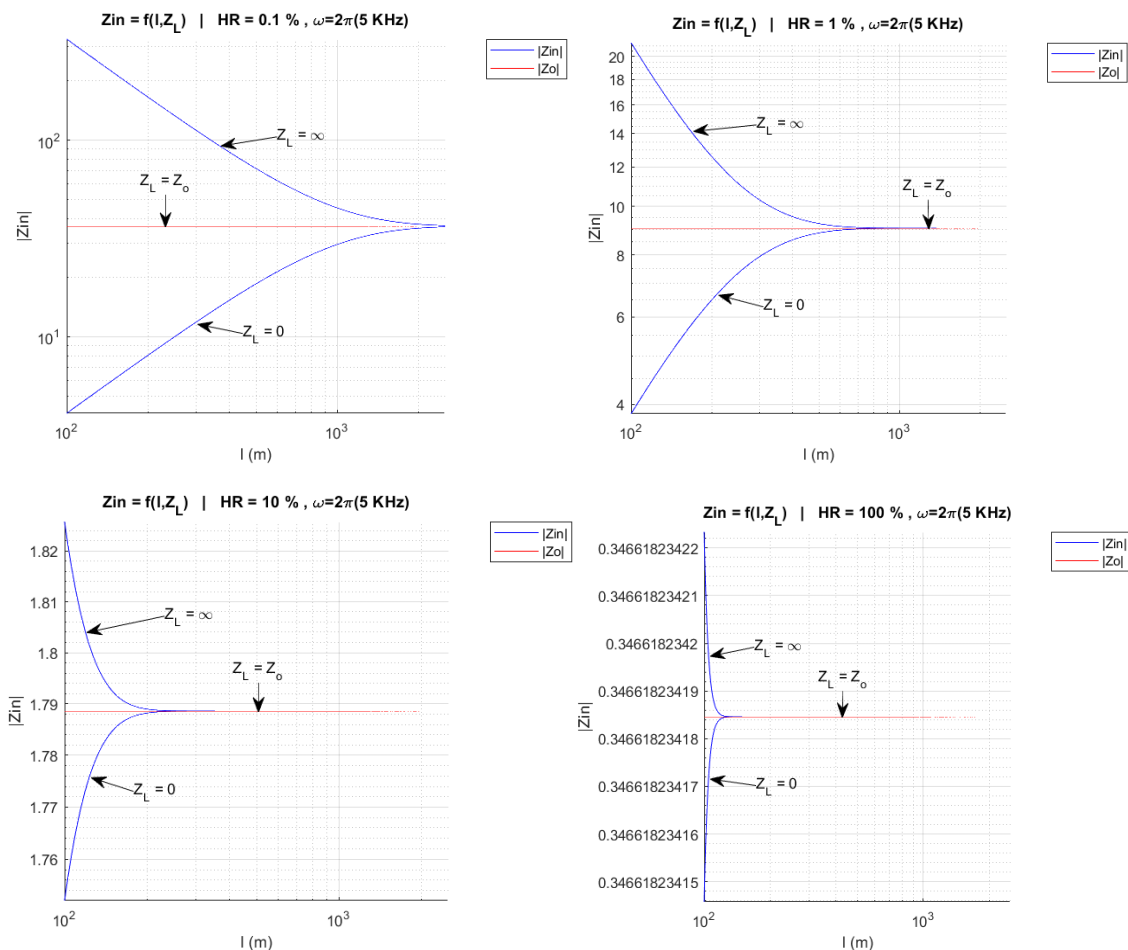


Figura 25. Variación de impedancia de entrada respecto a la impedancia de carga y longitud de vía, para frecuencia de trabajo constante y diferentes condiciones de humedad del balasto.

3.2. Impedancia de Entrada del Circuito con vía ocupada

Hasta ahora se ha analizado la impedancia vista desde el emisor de un circuito de vía, en diferentes condiciones de trabajo y en ausencia de tren. El objetivo de este capítulo es evaluar el efecto de la posición del tren, dentro del tramo supervisado por un circuito de vía, a partir de la impedancia vista en el emisor.

Para ello se consideran dos subtramos, el comprendido entre el emisor y el punto de localización del tren, y entre éste y el receptor, tal y como se muestra en el siguiente diagrama:

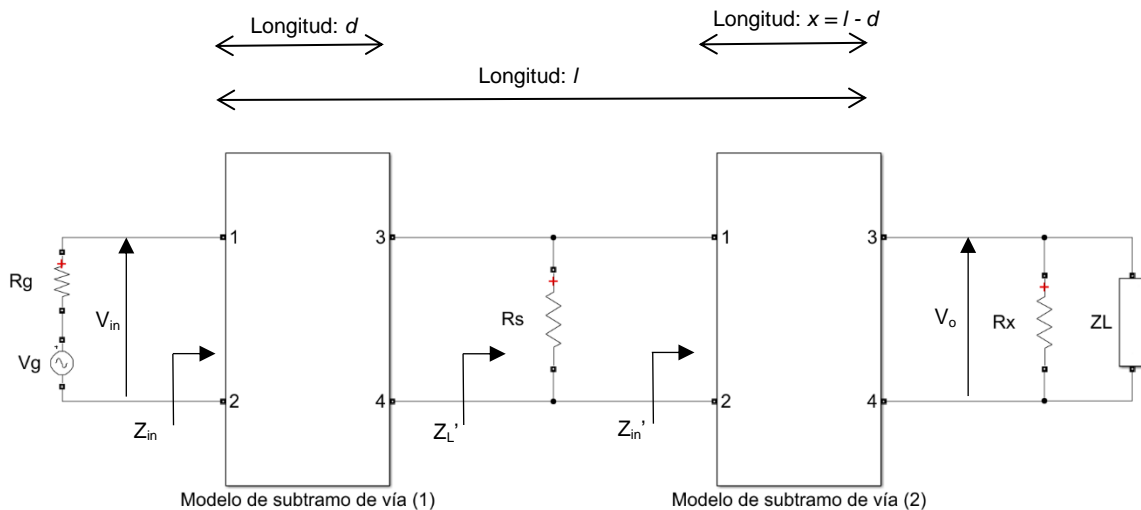


Figura 26. Diagrama de bloques de modelo de vía con tren.

Donde:

R_g : Resistencia interna del transmisor.

V_g : Voltaje del generador de señal de audiofrecuencia del transmisor.

d : Distancia del subtramo de vía (1) del transmisor al tren.

$x = l - d$: Distancia del subtramo de vía (2) del tren al receptor.

R_s : Resistencia shunt equivalente entre ruedas del tren.

R_x : Resistencia del receptor.

Z_L : Impedancia de carga al final de la vía. Para efectos prácticos, $Z_L = Z_o$.

Z_{in} : Impedancia de entrada vista por el transmisor.

Z_{in}' : Impedancia de entrada vista por el tren hacia el final de la vía.

Z_L' : Impedancia de carga equivalente del subtramo de vía (1).

En este sentido, la impedancia de entrada del subtramo de vía (2), se puede obtener mediante la expresión analítica de impedancia de entrada de vía, de la siguiente manera:

$$Z'_{in} = Z_o \cdot \frac{(R_x || Z_L) + Z_o \tanh(\gamma \cdot x)}{Z_o + (R_x || Z_L) \cdot \tanh(\gamma \cdot x)}$$

A continuación, la impedancia de carga del subtramo de vía (1) resulta ser la impedancia equivalente $Z'_L = R_s || Z'_{in}$:

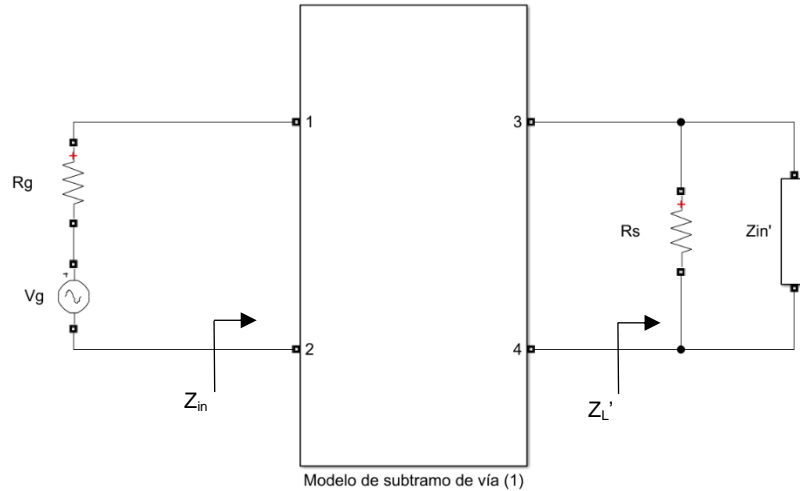


Figura 27. Diagrama equivalente de modelo de vía con tren.

Finalmente, se obtiene la expresión de impedancia de entrada vista por el transmisor, Z_{in} , de una vía con tren que se desplaza a través de ella:

$$Z_{in} = Z_o \cdot \frac{Z'_L + Z_o \tanh(\gamma \cdot d)}{Z_o + Z'_L \cdot \tanh(\gamma \cdot d)}$$

$$Z'_L = R_s || Z'_{in} \approx R_s \quad ; \quad R_s = 0.5 \Omega$$

$$Z'_{in} = Z_o \cdot \frac{(R_x || Z_L) + Z_o \tanh(\gamma \cdot x)}{Z_o + (R_x || Z_L) \cdot \tanh(\gamma \cdot x)}$$

A continuación, se puede observar los diferentes valores de impedancias analizados cuando el tren se desplaza a través del tramo de vía de longitud $l = 2500 \text{ m}$, con velocidad máxima de $120 \text{ Km/h} = 33.33 \text{ m/s}$, aceleración de hasta $65 \text{ Km/h}^2 = 0.67 \text{ m/s}^2$ [14], y en diferentes condiciones de humedad relativa del balasto. Para este análisis se han considerado valores de $R_s = 0.5 \Omega$, $R_x = 1 \text{ k}\Omega$, y $Z_L = Z_o$.

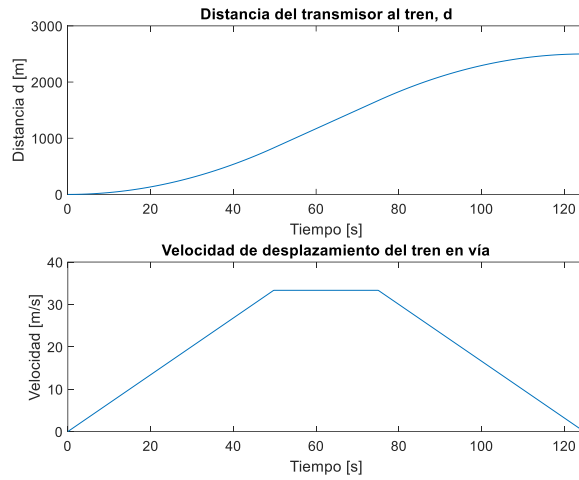


Figura 28. Perfil de velocidad y distancia recorrida por el tren en vía para propósitos de simulación.

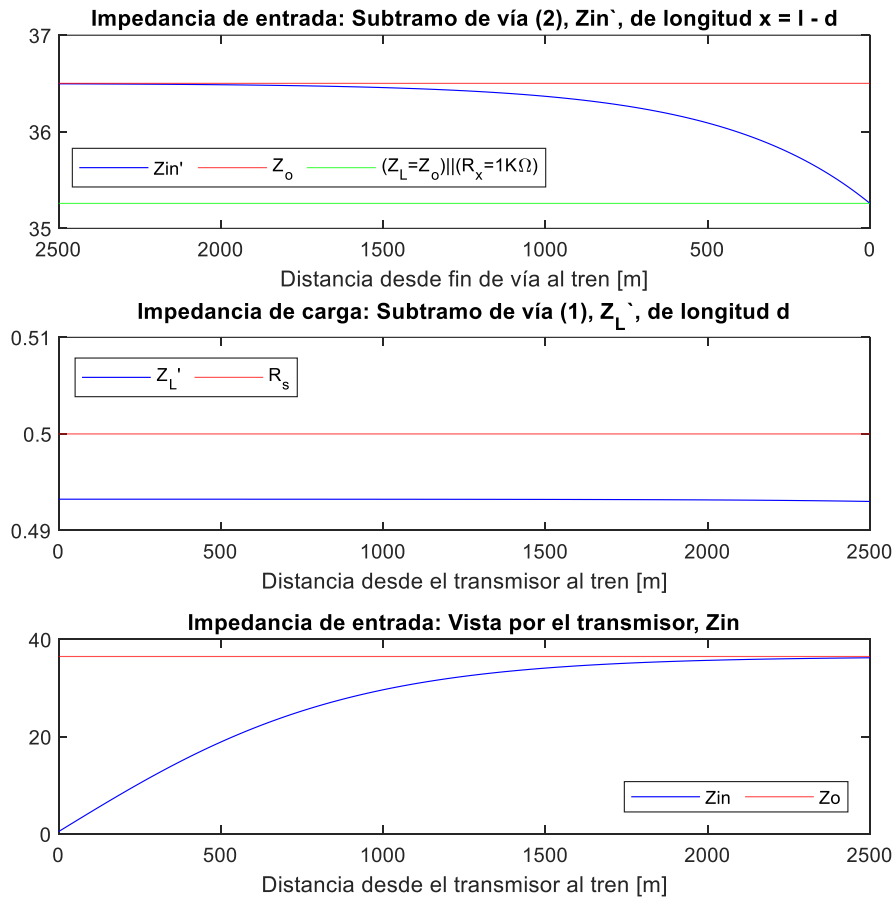


Figura 29. Impedancia de entrada de vía, en función de la posición del tren, para $f = 5 \text{ KHz}$ y $HR = 0.1 \%$.

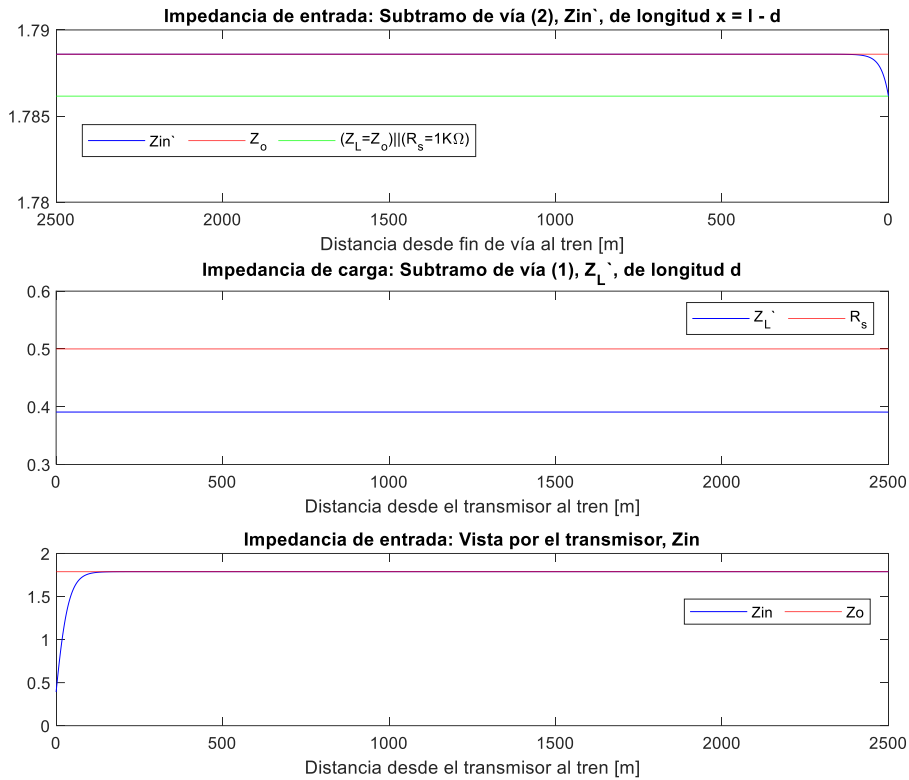


Figura 30. Impedancia de entrada de vía con tren con $f = 5 \text{ KHz}$ y $HR = 10 \%$.

De acuerdo con los resultados mostrados en la Figura 28 y Figura 29, se puede observar que conforme el tren se aleja del transmisor una distancia suficientemente grande, se cumple la condición $Z_{in} = Z_o$. En condiciones de vía seca, el rango de distancias recorridas por el tren con efecto en la impedancia de entrada vista desde el transmisor llega hasta valores próximos a los 1500 m. Sin embargo, en la medida en que aumenta la humedad relativa del balasto, es difícil apreciar el efecto de la posición del tren en la impedancia de entrada Z_{in} ,

3.3. Cálculo de la posición del tren a partir de la impedancia medida en el transmisor del circuito de vía.

De la expresión de impedancia de entrada vista por el transmisor definida en la sección anterior, Z_{in} , se puede obtener la expresión analítica para la posición del tren en vía al despejar la variable correspondiente a la distancia del transmisor al tren. Para este caso, se asume que la impedancia de entrada, medida en el transmisor del circuito de vía, es conocida.

$$Z_{in} = Z_o \cdot \frac{Z_L' + Z_o \tanh(\gamma \cdot d)}{Z_o + Z_L' \cdot \tanh(\gamma \cdot d)}$$

$$Z_{in} \cdot [Z_o + Z_L' \cdot \tanh(\gamma \cdot d)] = Z_o \cdot [Z_L' + Z_o \tanh(\gamma \cdot d)]$$

$$Z_{in} \cdot Z_o + Z_{in} \cdot Z_L' \cdot \tanh(\gamma \cdot d) = Z_o \cdot Z_L' + Z_o^2 \cdot \tanh(\gamma \cdot d)$$

$$\tanh(\gamma \cdot d) \cdot [Z_{in} \cdot Z_L' - Z_o^2] = Z_o \cdot Z_L' - Z_{in} \cdot Z_o$$

$$\tanh(\gamma \cdot d) = \frac{Z_o \cdot Z'_L - Z_{in} \cdot Z_o}{Z_{in} \cdot Z'_L - Z_o^2}$$

$$d = \frac{\operatorname{atanh}\left(\frac{Z_o \cdot (Z'_L - Z_{in})}{Z_{in} \cdot Z'_L - Z_o^2}\right)}{\gamma}$$

Donde:

$$Z'_L = R_s || Z'_{in} \approx R_s \quad ; \quad R_s = 0.5 \Omega$$

3.4. Estimación de la posición del tren en vía.

De acuerdo con la expresión obtenida en el apartado anterior, se puede ver que la posición del tren en vía depende de las siguientes variables:

$$d = f(Z_o, \gamma, Z_{in})$$

Para poder encontrar la expresión de incertidumbre de la posición d del tren en vía será necesario partir de las expresiones de incertidumbre de las variables de impedancia característica Z_o , y constante de propagación γ ; que dependen de los parámetros eléctricos de la vía, $R = f(\omega)$, $L = f(\omega)$, $C = f(\omega, HR)$ y $G = f(\omega, HR)$, como se estudió anteriormente.

Para el presente análisis, se considerará que $f = 5 \text{ KHz}$ (sin incertidumbre), y HR se asume medida con un sensor que presenta un valor de incertidumbre en su salida.

$$HR = HR_i \pm \Delta HR$$

Donde:

HR : Humedad relativa del balasto medida por el sensor.

HR_i : Valor medido de humedad relativa entregado por el sensor.

ΔHR : Valor de incertidumbre en la medición de humedad relativa que sigue una distribución normal gaussiana, $\Delta HR \sim N(0, \sigma_{\Delta HR}^2)$.

El valor $\sigma_{\Delta HR}^2$ se definirá tomando en cuenta que una variación máxima del $\pm 5\%$ sobre el valor medido:

$$\sigma_{\Delta HR} = 0.05 \cdot HR_i$$

Adicionalmente, debido a que los parámetros del modelo de vía referentes a las condiciones de humedad relativa del balasto, C y G , dependen de la HR , será necesario expresarlas de la siguiente manera:

$$C = C_i \pm \Delta C$$

$$G = G_i \pm \Delta G$$

Donde:

- C: Capacidad por unidad de longitud de modelo de vía.
- C_i : Valor de capacidad estimada por unidad de longitud del modelo de vía. Se considera únicamente el valor de capacidad del modelo obtenido en el Capítulo II sin incluir la incertidumbre de dicho modelo.
- ΔC : Valor de incertidumbre de capacidad que sigue una distribución normal gaussiana, $\Delta C \sim N(0, \sigma_{\Delta C}^2)$.
- G: Conductancia por unidad de longitud de modelo de vía.
- G_i : Valor de conductancia estimada por unidad de longitud del modelo de vía. Se considera únicamente el valor de conductancia del modelo obtenido en el Capítulo II sin incluir la incertidumbre de dicho modelo.
- ΔG : Valor de incertidumbre de conductancia que sigue una distribución normal gaussiana, $\Delta G \sim N(0, \sigma_{\Delta G}^2)$.

Para la obtención de los valores de incertidumbre ΔC y ΔG , se realiza un análisis de propagación de incertidumbre [15]; a partir de los estimadores obtenidos en el Capítulo II y de la incertidumbre aportada por la medición de HR:

3.5.1. Incertidumbre de la Capacidad por unidad de longitud.

Para el análisis de la incertidumbre de capacidad, se expresará el modelo obtenido en el Capítulo II en términos de un valor medio, C , junto con un término de incertidumbre, ΔC . La incertidumbre del modelo de capacidad dependerá de la incertidumbre del modelo de permitividad eléctrica, $\Delta \varepsilon$, de la siguiente manera:

$$C = 10^{\left\{ \log \left[\frac{\pi \cdot (\varepsilon)}{2.0749} \right] + T_c \right\}}$$

$$T_c = \log(C_c) = 0.3903 \cdot \log(f) - 1.159 \pm d_x$$

Donde T_c es un término de corrección. Se obtendrá en primer lugar, la expresión de incertidumbre resultante de permitividad eléctrica, $\Delta \varepsilon$, para el modelo obtenido en el Capítulo II:

$$\varepsilon = 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{\{0.7740 \cdot \log(HR_i) - 0.5927 \cdot \log(f) + 4.4533 \pm c_x\}}$$

Para tal efecto, se calcula la variación que aporta la variación de humedad relativa, HR , en la permitividad eléctrica, ε , mediante derivadas parciales [15]:

$$\Delta \varepsilon = \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial HR_i} \right| \cdot \Delta HR$$

$$\Delta \varepsilon = \frac{4.4791 \cdot 10^{-7} \cdot HR_i^{0.782201}}{f^{1.36474}} \cdot \Delta HR$$

Continuando con la expresión de capacidad por unidad de longitud, C :

$$C = 10^{\left\{\log\left[\frac{\pi \cdot (\varepsilon)}{2.0749}\right] + T_c\right\}}$$

Obtenemos la expresión para la variación de capacidad, ΔC , respecto a la variación de permitividad eléctrica, $\Delta\varepsilon$:

$$\Delta C = \left| \frac{\partial C}{\partial \varepsilon} \right| \cdot \Delta\varepsilon$$

$$\Delta C = \left| \frac{\partial \left[10^{\left\{\log\left[\frac{\pi \cdot (\varepsilon)}{2.0749}\right] + T_c\right\}} \right]}{\partial \varepsilon} \right| \cdot \Delta\varepsilon$$

La expresión final de incertidumbre de capacidad resulta:

$$\Delta C = \frac{5.98457 \cdot 10^{\log(\varepsilon) + T_c}}{\varepsilon} \cdot \Delta\varepsilon$$

Donde:

$$\varepsilon = 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{[0.7740 \cdot \log(HR_i) - 0.5927 \cdot \log(f) + 4.4533 \pm c_x]}$$

$$\Delta\varepsilon = \frac{4.4791 \cdot 10^{-7} \cdot HR_i^{0.782201}}{f^{1.36474}} \cdot \Delta HR$$

$$T_c = 0.3903 \cdot \log(f) - 1.159 \pm d_x$$

$$\Delta HR \sim N(0, \sigma_{\Delta HR}^2) \quad ; \quad \sigma_{\Delta HR} = 0.05 \cdot HR_i$$

$$c_x \sim N(0, 0.0003)$$

$$d_x \sim N(0, 0.0082)$$

3.4.2. Incertidumbre de la Conductancia por unidad de longitud.

De la misma manera que para el análisis de incertidumbre de capacidad, se expresa el modelo de conductancia obtenido en el Capítulo II en términos de un valor medio, G , junto con un término de incertidumbre, ΔG . En este caso, la incertidumbre del modelo de conductancia dependerá únicamente de la incertidumbre de HR .

$$G = 10^{\{1.4263 \cdot \log(HR_i) - 0.0654 \cdot \log(f) - 0.0786 \pm g_x\}}$$

Obtenemos la expresión para la variación de conductancia, ΔG , respecto a la variación de HR , ΔHR :

$$\Delta G = \left| \frac{\partial G}{\partial HR_i} \right| \cdot \Delta HR$$

La expresión final de incertidumbre de conductancia resulta:

$$\Delta G = \frac{2.74 \cdot HR_i^{2.284}}{f^{0.1505}} \cdot \Delta HR$$

Donde:

$$\Delta HR \sim N(0, \sigma_{\Delta HR}^2) \quad ; \quad \sigma_{\Delta HR} = 0.05 \cdot HR_i$$

3.4.3. Incertidumbre de la Impedancia Característica

Para este análisis, se parte de la expresión de impedancia característica y se calcula su variación respecto a los parámetros de capacidad y conductancia, de la siguiente manera:

$$Z_o = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

Se calcula la incertidumbre mediante derivadas parciales:

$$\Delta Z_o = \left| \frac{\partial Z_o}{\partial C} \right| \cdot \Delta C + \left| \frac{\partial Z_o}{\partial G} \right| \cdot \Delta G$$

Por lo tanto:

$$\Delta Z_o = -\frac{1}{2} \cdot Z_o \cdot \frac{\Delta G + j\omega \Delta C}{G + j\omega C}$$

3.4.4. Incertidumbre de la Constante de Propagación

De la misma manera que para el apartado anterior, se parte de la expresión de la constante de propagación:

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)}$$

$$\Delta \gamma = \left| \frac{\partial \gamma}{\partial C} \right| \cdot \Delta C + \left| \frac{\partial \gamma}{\partial G} \right| \cdot \Delta G$$

Por lo tanto:

$$\Delta \gamma = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \frac{\Delta G + j\omega \Delta C}{G + j\omega C}$$

3.4.5. Incertidumbre de la Impedancia de Entrada de Vía.

En el presente apartado, se analizará la incertidumbre en la medición de la impedancia de entrada de vía vista por el nodo emisor, es necesario considerar esta incertidumbre ya que dicha impedancia de entrada depende de la incertidumbre de HR y sus respectivas propagaciones tanto en Z_o como en γ .

$$Z_{in} = Z_o \cdot \frac{Z'_L + Z_o \tanh(\gamma \cdot d)}{Z_o + Z'_L \cdot \tanh(\gamma \cdot d)}$$

Aproximando $Z'_L \approx R_s$:

$$Z_{in} = Z_o \cdot \frac{R_s + Z_o \tanh(\gamma \cdot d)}{Z_o + R_s \cdot \tanh(\gamma \cdot d)}$$

Para un valor de posición del tren, d , conocida, se determina como varia respecto a Z_o y γ :

$$\Delta Z_{in} = \left| \frac{\partial Z_{in}}{\partial Z_o} \right| \cdot \Delta Z_o + \left| \frac{\partial Z_{in}}{\partial \gamma} \right| \cdot \Delta \gamma$$

Por lo tanto, resulta:

$$\Delta Z_{in} = \left[\frac{\tanh(d \cdot \gamma) \cdot (2 \cdot R_s \cdot Z_o \cdot \tanh(d \cdot \gamma) + R_s^2 + Z_o^2)}{(R_s \cdot \tanh(\gamma \cdot d) + Z_o)^2} \right] \cdot \Delta Z_o + \left[\frac{d \cdot (Z_o^3 - R_s^2 \cdot Z_o) \cdot (\operatorname{sech}(d \cdot \gamma))^2}{(R_s \cdot \tanh(\gamma \cdot d) + Z_o)^2} \right] \cdot \Delta \gamma$$

3.4.6. Incertidumbre de la Posición del Tren en Vía

Finalmente, se analiza la expresión de la posición del tren en vía cuya incertidumbre es función de las variaciones de incertidumbre tanto de Z_o , γ y Z_{in} :

$$d = \frac{\operatorname{atanh}\left(\frac{Z_o \cdot (R_s - Z_{in})}{Z_{in} \cdot R_s - Z_o^2}\right)}{\gamma}$$

$$\Delta d = \left| \frac{\partial d}{\partial Z_o} \right| \cdot \Delta Z_o + \left| \frac{\partial d}{\partial \gamma} \right| \cdot \Delta \gamma + \left| \frac{\partial d}{\partial Z_{in}} \right| \cdot \Delta Z_{in}$$

A continuación, se tiene:

$$\Delta d = \left[\frac{(R_s - Z_{in}) \cdot (R_s \cdot Z_{in} + Z_o^2)}{\gamma \cdot (R_s^2 - Z_o^2) \cdot (Z_{in}^2 - Z_o^2)} \right] \cdot \Delta Z_o + \left[\frac{\operatorname{atanh}\left(\frac{Z_o \cdot (R_s - Z_{in})}{Z_{in} \cdot R_s - Z_o^2}\right)}{\gamma^2} \right] \cdot \Delta \gamma + \left[\frac{Z_o}{\gamma \cdot (Z_o^2 - Z_{in}^2)} \right] \cdot \Delta Z_{in}$$

Cabe recalcar que cada uno de los valores Δd , $\Delta \gamma$, ΔZ_o , etc; representan los valores de desviación estándar de incertidumbre de una distribución normal.

3.5. Simulación de la posición estocástica del tren en vía

Debido a que la posición del tren en vía, d , depende tanto de Z_o , γ , y Z_{in} , cada una con una incertidumbre asociada con la incertidumbre en la medición de HR, se analizará en primer lugar los efectos de la incertidumbre de HR en cada una de las variables de las que depende la posición del tren en vía; esto con el fin de tener una mejor perspectiva en cuanto a los resultados a esperar de la incertidumbre en la estimación de la posición. Se empleará para el análisis, las expresiones de incertidumbre obtenidas en el apartado anterior.

3.5.1. Variación de Impedancia Característica y Constante de Propagación en función de la incertidumbre de HR.

En concordancia con lo dicho anteriormente, a continuación, se representa la variación del módulo de impedancia característica, $|\Delta Z_o|$, y constante de propagación, $|\gamma|$, debido a la incertidumbre de HR; se empleará para el análisis valores de $HR_i = 0.1\%$, y 10% , con valores de incertidumbre del $\pm 1\%$, $\pm 5\%$ y $\pm 10\%$. Para cada una de las simulaciones estocásticas se han considerado 1000 realizaciones del proceso aleatorio.

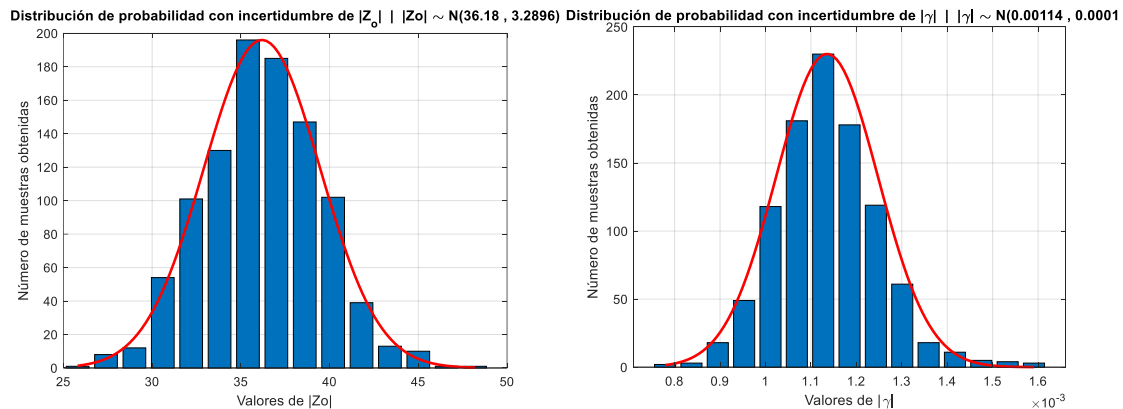
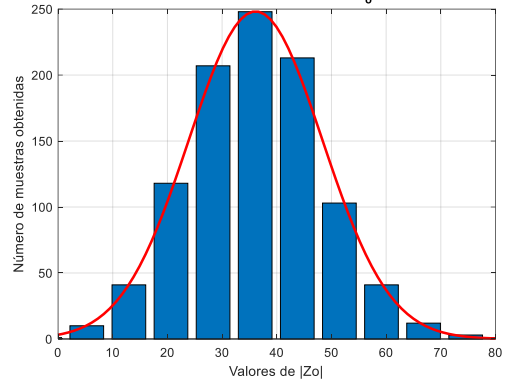


Figura 31. Distribuciones de probabilidad de Z_o y γ con $HR = 0.1\% \pm 1\%$.

Distribución de probabilidad con incertidumbre de $|Z_0|$ | $|Z_0| \sim N(36.16, 12.23)$



Distribución de probabilidad con incertidumbre de $|\gamma|$ | $|\gamma| \sim N(0.0011, 0.0003)$

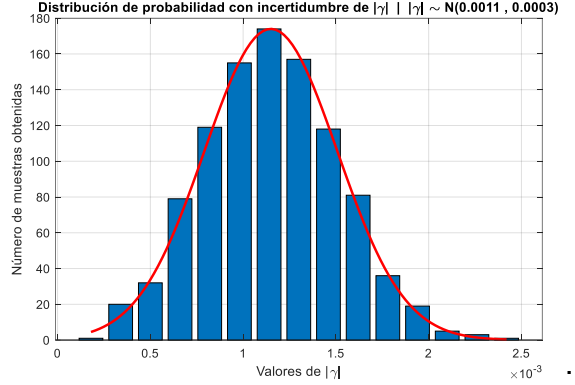
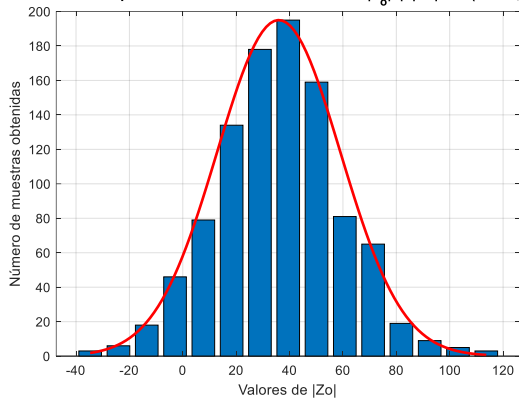


Figura 32. Distribuciones de probabilidad de Z_0 y γ con $HR = 0.1\% \pm 5\%$.

Distribución de probabilidad con incertidumbre de $|Z_0|$ | $|Z_0| \sim N(35.94, 23.11)$



Distribución de probabilidad con incertidumbre de $|\gamma|$ | $|\gamma| \sim N(0.0012, 0.00075)$

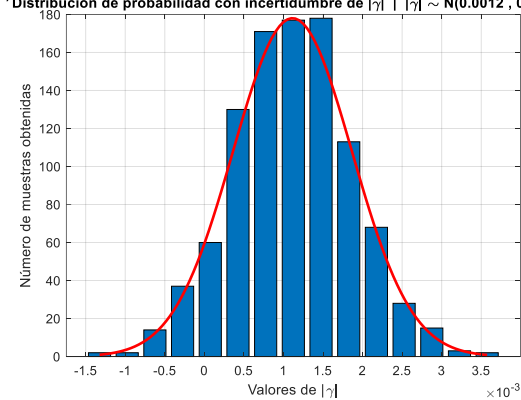
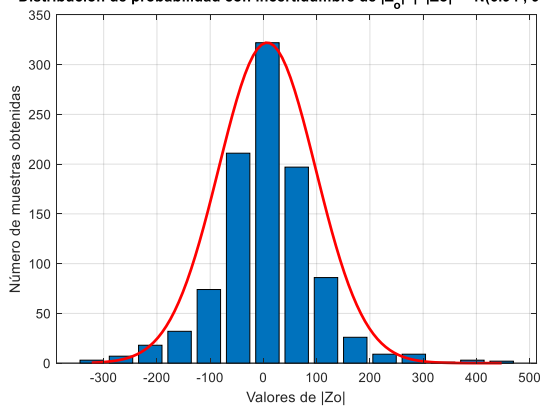


Figura 33. Distribuciones de probabilidad de Z_0 y γ con $HR = 0.1\% \pm 10\%$.

Distribución de probabilidad con incertidumbre de $|Z_0|$ | $|Z_0| \sim N(6.94, 91.13)$



Distribución de probabilidad con incertidumbre de $|\gamma|$ | $|\gamma| \sim N(0.022, 0.035)$

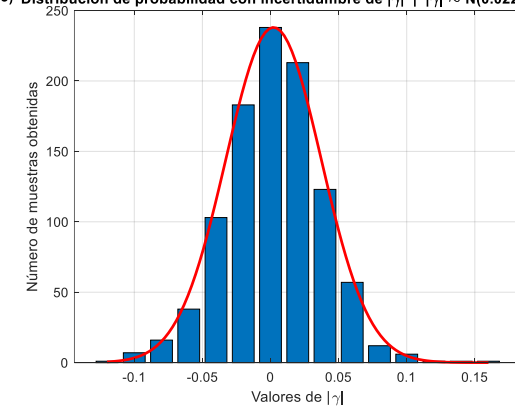


Figura 34. Distribuciones de probabilidad de Z_0 y γ con $HR = 1\% \pm 1\%$.

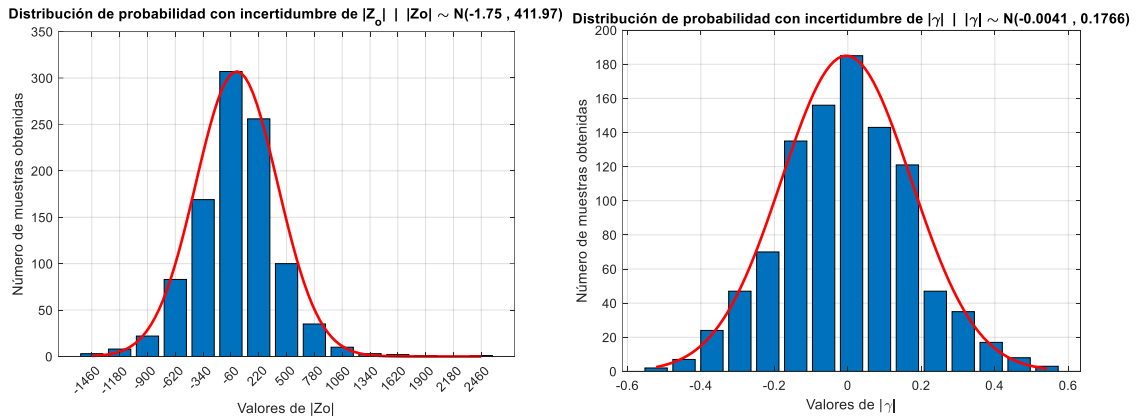


Figura 35. Distribuciones de probabilidad de Z_0 y γ con $HR = 1 \% \pm 5\%$.

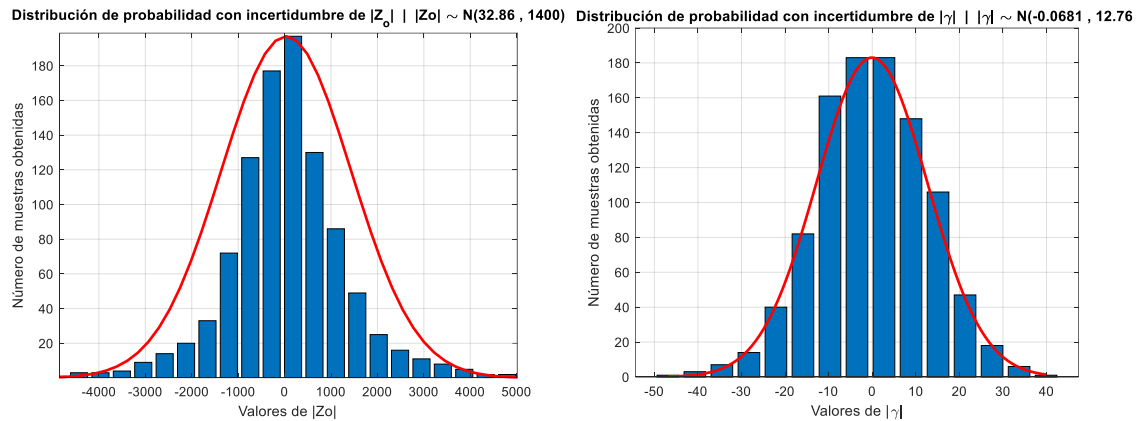


Figura 36. Distribuciones de probabilidad de Z_0 y γ con $HR = 10 \% \pm 1\%$.

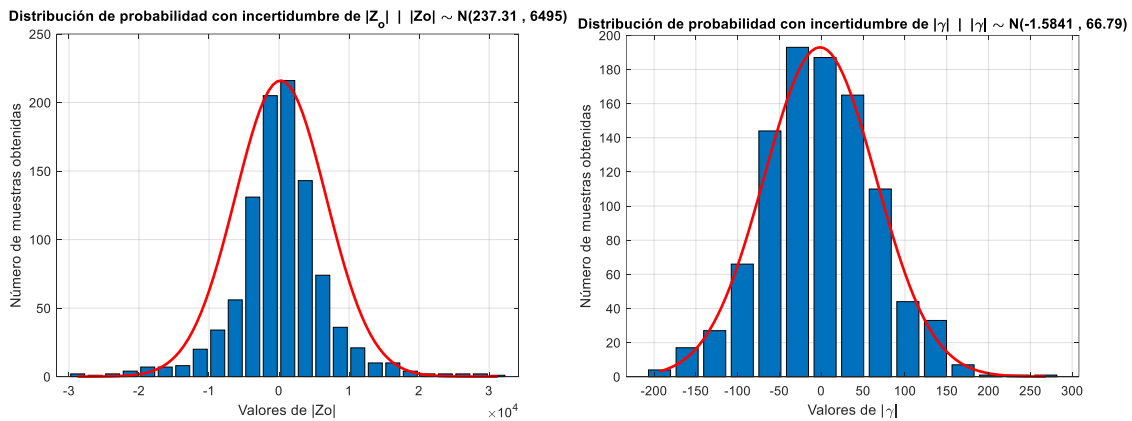


Figura 37. Distribuciones de probabilidad de Z_0 y γ con $HR = 10 \% \pm 5\%$.

A continuación, se muestra de manera gráfica el efecto de la incertidumbre de HR en la variación de Z_0 y γ . Este análisis gráfico se ha llevado a cabo únicamente con el caso de vía seca $HR_i = 0.1\%$ ya que como se puede ver en las Figuras 34, 35, 36, 37, el efecto de la incertidumbre de HR para valores medios de $HR_i > 1\%$ ocasiona resultados desproporcionados de incertidumbre tanto para Z_0 como para γ .

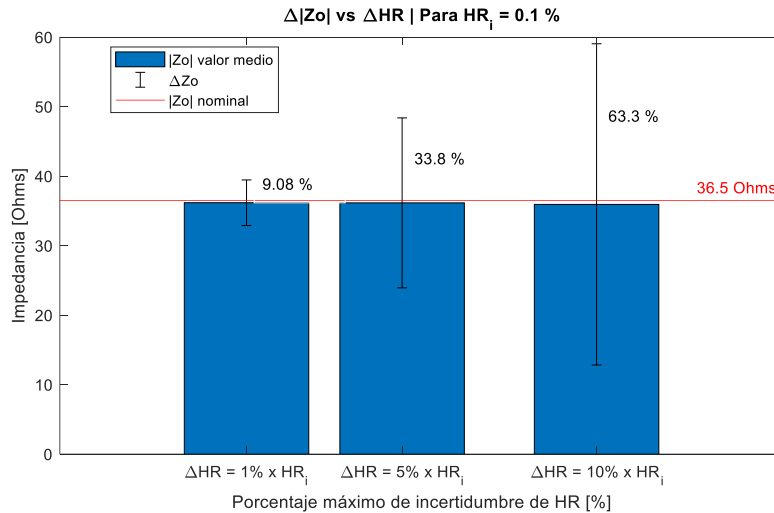


Figura 38. Efecto de la incertidumbre de HR, en la variación de Z_o con $HR_i = 0.1\%$.

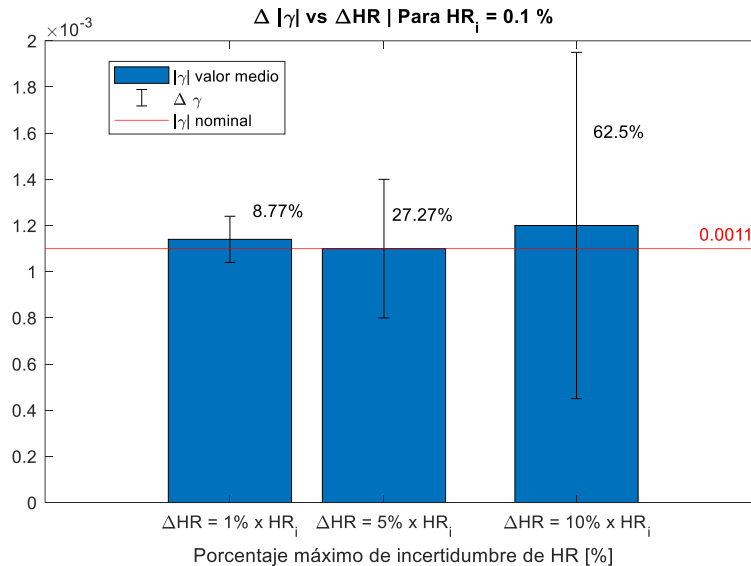


Figura 39. Efecto de la incertidumbre de HR, en la variación de γ con $HR_i = 0.1\%$.

De acuerdo con los resultados obtenidos, se puede concluir que la incertidumbre de HR afecta considerablemente a los valores de Z_o y γ , con valores observables en condiciones de $HR_i = 0.1\%$; y variaciones extremadamente grandes para valores $HR_i > 10\%$.

3.5.2. Variación de la Impedancia de Entrada medida en el nodo transmisor

En concordancia con los resultados obtenidos en el apartado anterior, cabe analizar la variación de impedancia de entrada, Z_{in} , para el caso $HR_i = 0.1\%$ y valores de incertidumbre máxima del $\pm 1\%$, $\pm 5\%$ y $\pm 10\%$.

Adicionalmente, ya que Z_{in} depende de la distancia del tren, se considerará esta conocida y acorde al perfil de desplazamiento mostrado en la Figura 28.

Para llevar a cabo la simulación, se han implementado 1000 realizaciones del proceso aleatorio con el fin de obtener el valor medio y varianza de la impedancia de entrada para diferentes valores de posiciones del tren que se asumen conocidas.

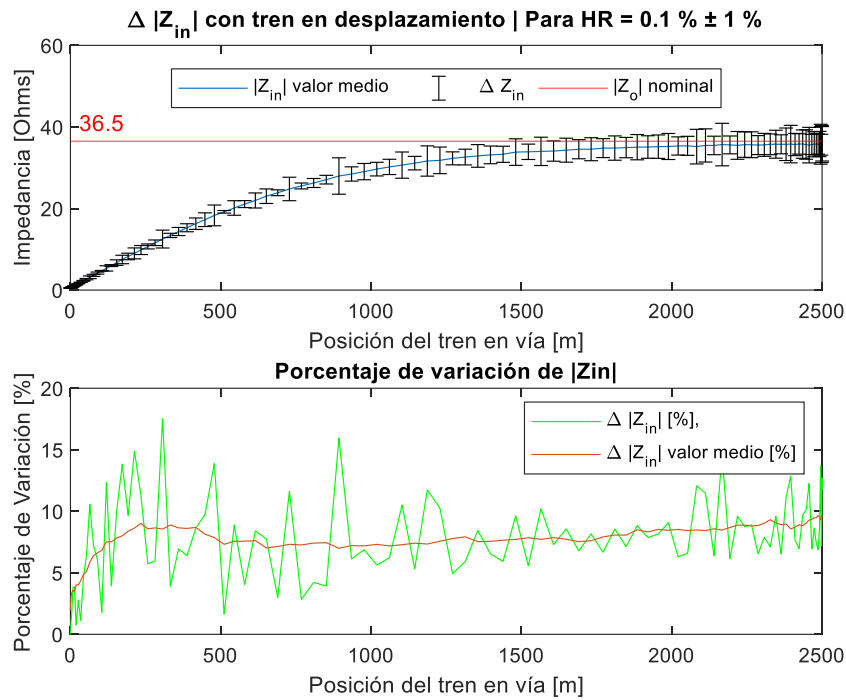


Figura 40. Variación de Z_{in} , para $HR = 0.1\% \pm 1\%$ y distancia del tren conocida.

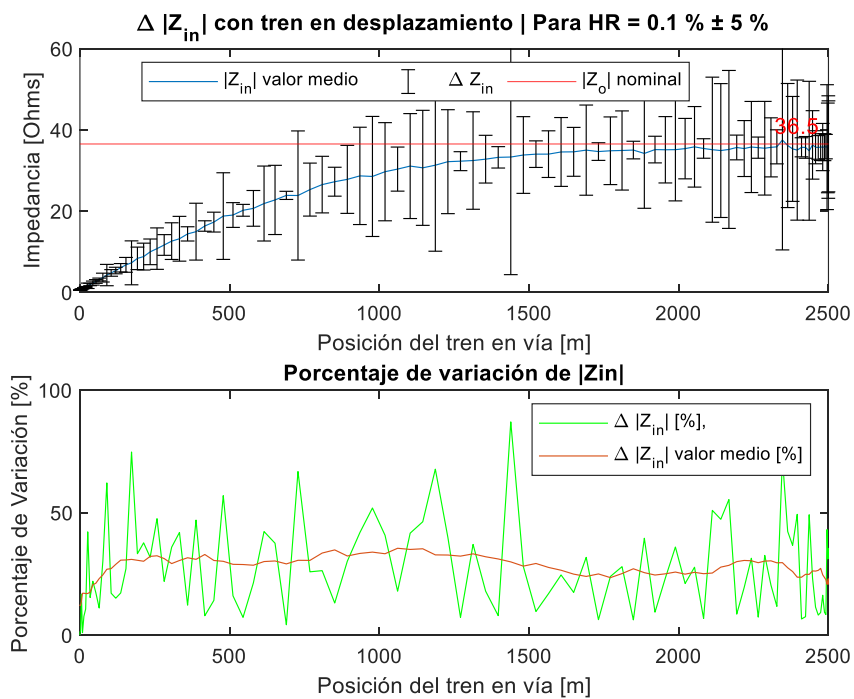


Figura 41. Variación de Z_{in} , para $HR = 0.1\% \pm 5\%$ y distancia del tren conocida.

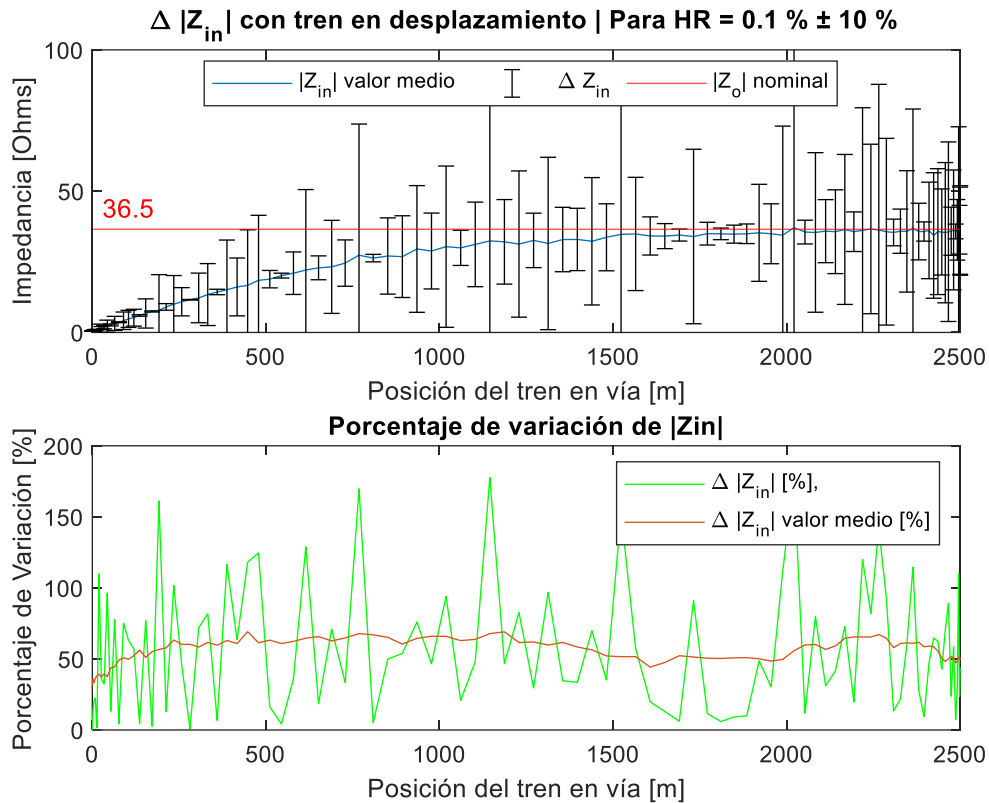


Figura 42. Variación de Z_{in} , para $HR = 0.1\% \pm 10\%$ y distancia del tren conocida

De los resultados obtenidos, se puede concluir que conforme incrementa la incertidumbre de HR , la impedancia de entrada medida en el nodo emisor presentará mayor variación. Sin embargo, cabe mencionar que a pesar de que la incertidumbre de Z_{in} incrementa con el incremento de incertidumbre de HR , el valor medio de Z_{in} se mantiene en un valor aceptable.

Se observa que la variación de Z_{in} es independiente de la posición del tren de vía ya que para el análisis solo se han considerado las aportaciones de incertidumbre de HR en los valores de impedancia característica y constante de propagación.

3.5.3. Incertidumbre en la Estimación de la posición del tren en vía.

Para la simulación del presente apartado, se emplearán las 1000 realizaciones del proceso aleatorio de impedancia de entrada obtenidas en el apartado anterior, esto para simular la impedancia de entrada vista por el nodo emisor que presenta una variación asociada a la incertidumbre en la medición de HR .

Se simulará el proceso aleatorio correspondiente a la estimación de la posición del tren en vía y se analizará su variación en función de la incertidumbre de HR , para el caso $HR_i = 0.1\%$ y valores de incertidumbre máxima del $\pm 1\%$, $\pm 5\%$ y $\pm 10\%$.

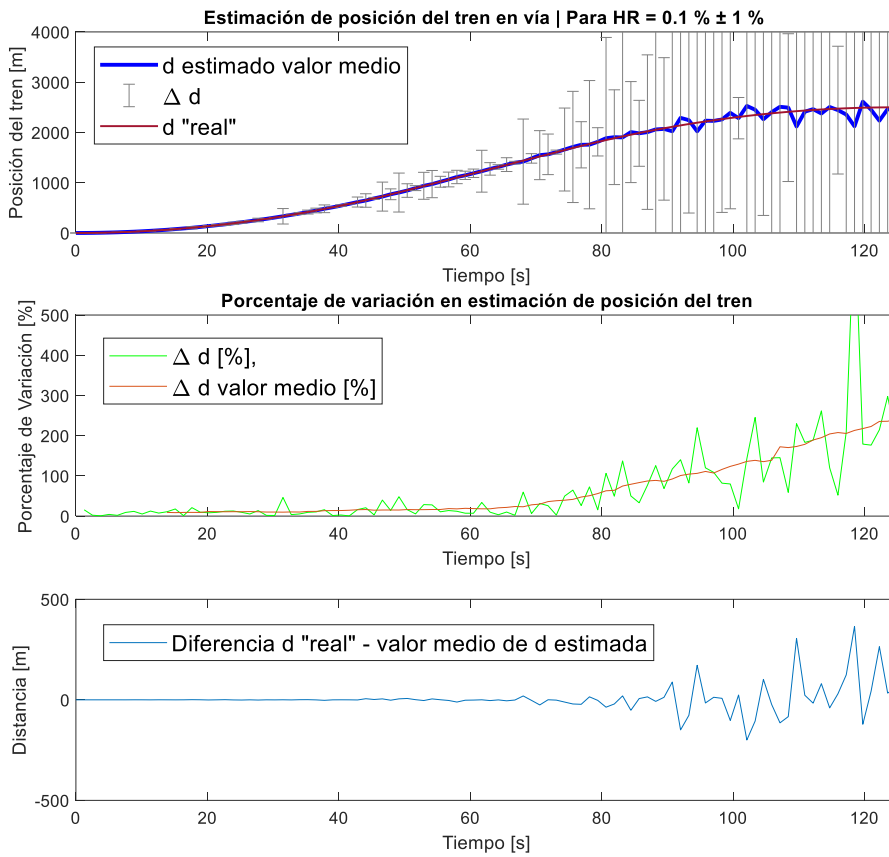


Figura 43. Estimación de posición del tren para HR = 0.1% ± 1%

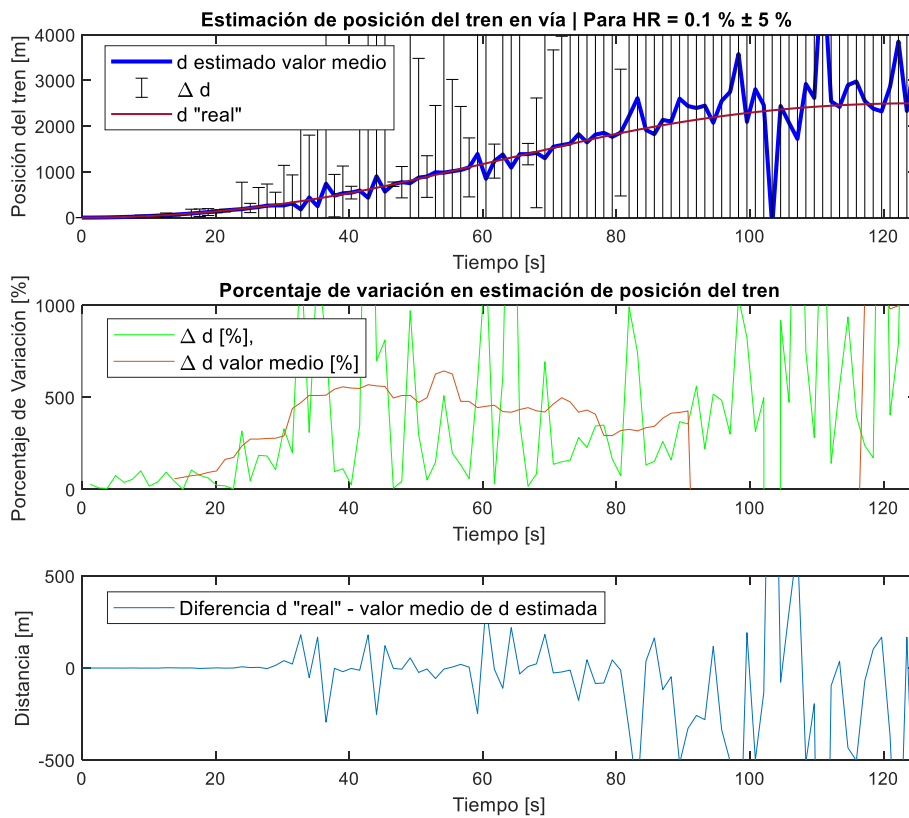


Figura 44. Estimación de posición del tren para HR = 0.1% ± 5%

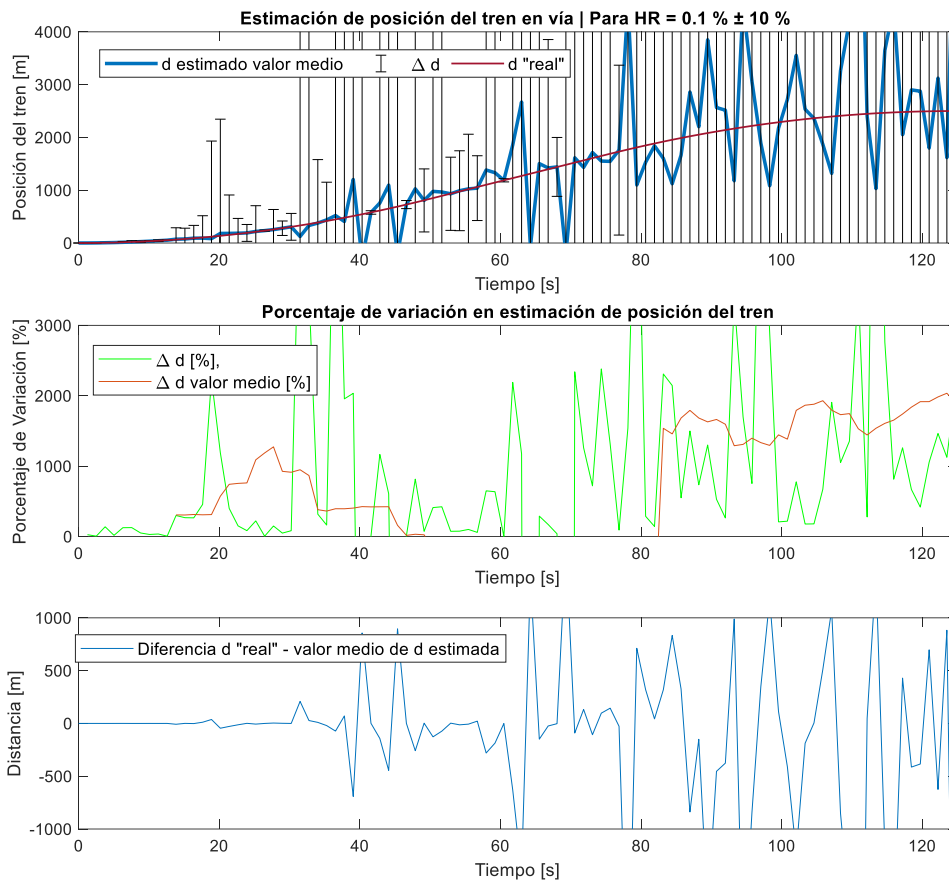


Figura 45. Estimación de posición del tren para $HR = 0.1\% \pm 10\%$

Se puede concluir de manera general que el incremento en la incertidumbre de la humedad relativa del balasto, HR , incrementa la incertidumbre en la estimación de la posición del tren en vía. Por otro lado, dado el gran efecto que tiene la incertidumbre de HR para valores de $HR_i \geq 1\%$, en la variación de los parámetros característicos del modelo de vía e impedancia de entrada medida por el nodo transmisor, se vuelve inviable la estimación de la posición del tren.

Para valores de $HR_i = 0.1\%$ con incertidumbre máxima del $\pm 1\%$ y únicamente con la medición de Z_{in} , es posible estimar la posición con errores menores a 50 m hasta distancias entre transmisor y tren de aproximadamente 1500 m; con incertidumbre máxima del $\pm 5\%$, es posible estimar la posición con errores menores a 50 m hasta distancias entre transmisor y tren de aproximadamente 300 m; mientras que con incertidumbre máxima del $\pm 10\%$, la estimación de la posición con baja incertidumbre se limita unas pocas decenas de metros. Sin embargo, si se conoce la naturaleza estocástica del fenómeno, el estimador de valor medio de la posición del tren en vía (Figura 43, 44, 45 (1)) nos permite tener estimaciones con errores pequeños en tramos de vía más largos, esto para cada uno de los casos de incertidumbre máxima de HR ($\pm 1\%$, $\pm 5\%$ y $\pm 10\%$).

CAPÍTULO IV

MODELADO DE CORRIENTES DE FUGA ENTRE VÍAS PARALELAS

En el presente capítulo se propone un modelo de acoplamiento para el estudio de corrientes de fuga entre dos vías paralelas, a partir del modelo eléctrico de circuito de vía de audio frecuencia presentado en [9]. El objetivo es determinar la relación de acoplo de señal entre dos vías, tanto para el caso en que las dos vías están desocupadas, como en el caso en que por una de las vías circula un tren. El esquema de análisis con vía ocupada se muestra a continuación:

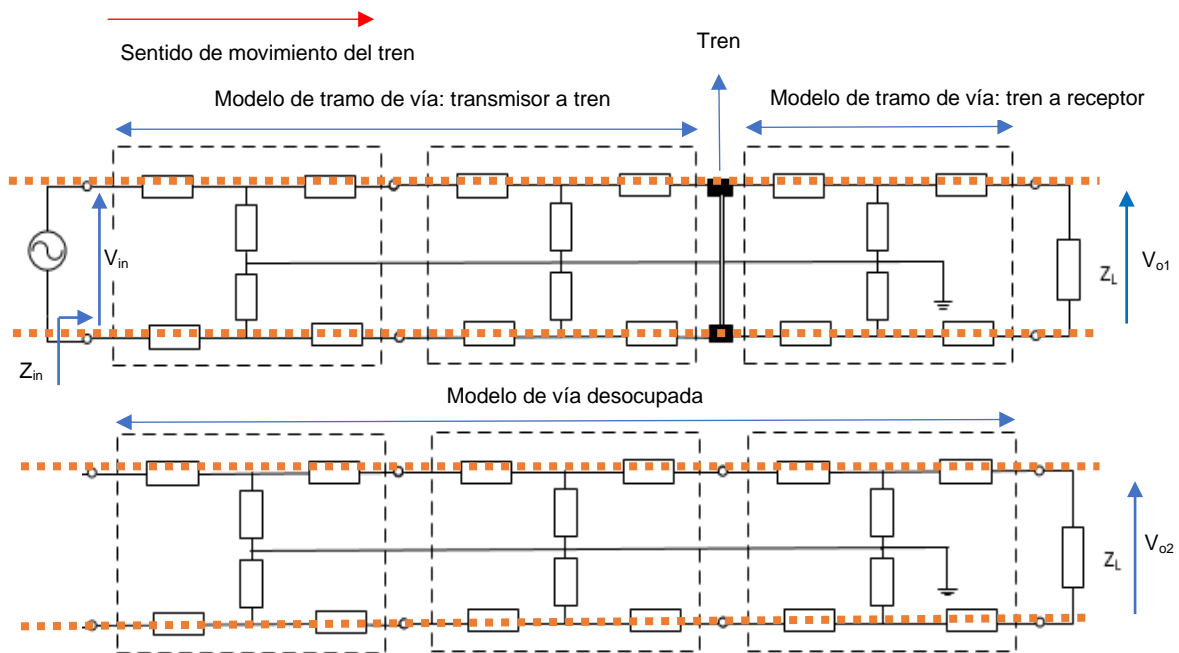


Figura 46. Esquema general de acoplo de corrientes de fuga entre vías paralelas con presencia de tren en una de ellas.

$$\text{Relación de acoplo de señal (\%)} = \frac{V_{o2(rms)}}{V_{in(rms)}} \cdot 100$$

Para implementar el modelo de simulación, es necesario establecer los parámetros constantes referentes a la frecuencia de pulsación, f , longitud de tramo de vía, l , y resistencia shunt del tren, R_s , resumidos a continuación:

$$V_{in} = 100 V_p$$

$$f = 5 \text{ KHz}$$

$$l = 2500 \text{ m}$$

$$R_s = 0.5 \Omega$$

De los capítulos previos se tiene el modelo de vía a emplear para diferentes casos de humedad relativa del balasto.

4.1. Simulación de Efecto de Corrientes de Fuga sin Tren

El esquema que se empleará busca simular el efecto del acoplamiento de corrientes de fuga en dos vías paralelas sin tren. Para la simulación se presenta 2 modelos de vía que correspondientes a:

- Tramo de vía 1 desocupada
- Tramo de vía 2 desocupada.

Para cada modelo de vía se ha empleado un enfoque discretizado con parámetros distribuidos y con configuración en H [9], donde el balasto (tierra) representa el camino de acoplamiento común para las dos vías y por donde circularán corrientes de fuga de acuerdo con a las condiciones ambientales del balasto.

El número de módulos de impedancia concatenados en los modelos de vía se ha establecido en $N = 100$ ya que con dicho valor se ha obtenido una buena aproximación del modelo de parámetros concentrados respecto al modelo teórico. Cabe recalcar que si se incrementase N se mejora la aproximación a costa de un mayor costo computacional de simulación. El esquema de simulación implementado en Simulink, Matlab 2021, se muestra a continuación:

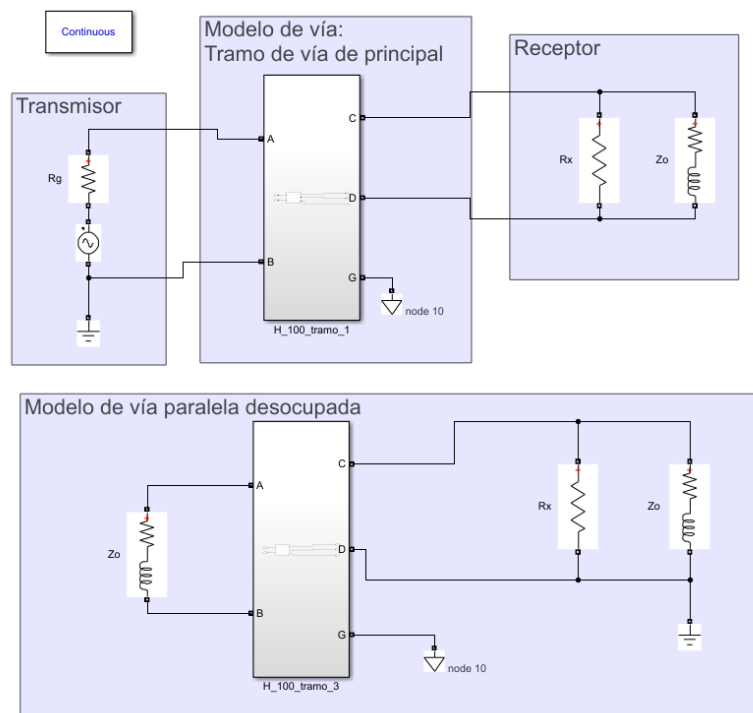


Figura 47. Esquema en Matlab, Simulink 2021 para simulación de modelo de acoplamiento de corrientes de fuga en vías paralelas desocupadas.

Cabe mencionar que en el interior de los bloques H_100_tramo_1, H_100_tramo_2, se han implementado $N = 100$ módulos de impedancia en configuración en H, tal y como se muestra a continuación:

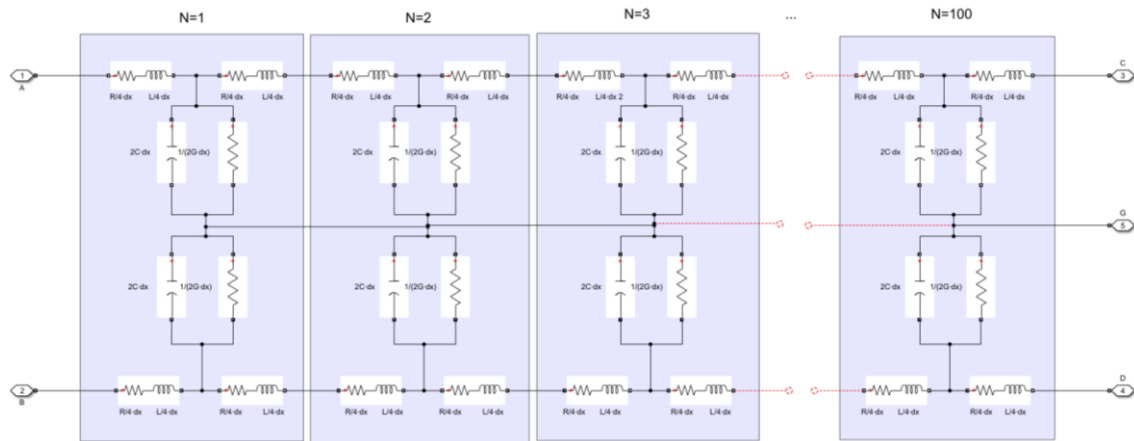


Figura 48. Esquema de bloques que conforman modelos de vía discretizados.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos para la simulación de ambas vías paralelas sin tren y se resumen en la Tabla 3:

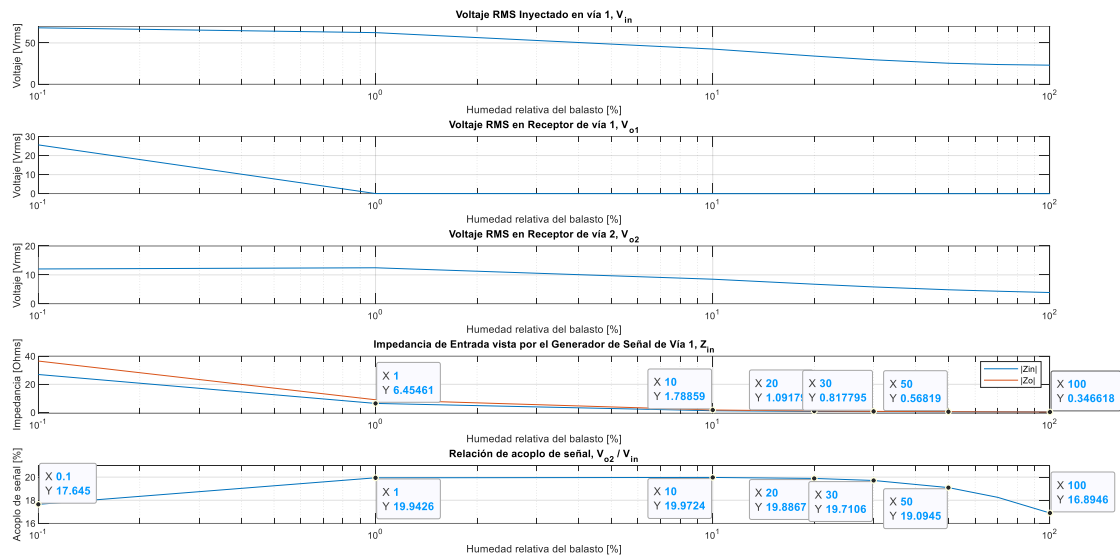


Figura 49. Resultados de acoplo de corrientes de fuga en vías paralelas sin tren.

Tabla 3. Resumen de resultados de simulación de modelo de acoplamiento de corrientes de fuga sin tren.

HR (%)	Porcentaje de señal acoplada (%)
0.1	17.64
1	19.94
10	19.97
100	16.89

Se puede observar que la HR afecta ligeramente (entre 16% y 20%) a la relación de señal acoplada. En detalle, existe un incremento del porcentaje de señal acoplada conforme se incrementa la humedad relativa; sin embargo, para valores de humedad relativa $HR > 10\%$ donde se tiene que $Z_{in} \approx Z_o \rightarrow 0$, el porcentaje de señal acoplada disminuye.

Por otra parte, en condiciones de vía seca, las corrientes de fuga reducen la impedancia de entrada vista por el transmisor, con respecto al caso de vía única.

4.2. Simulación de Efecto de Corrientes de Fuga con Tren

En este apartado, el esquema que se empleará busca simular el efecto del acoplamiento de corrientes de fuga en dos vías paralelas cuando un tren circula por una de ellas. Para la simulación se presenta 3 modelos de vía que correspondientes a:

- Tramo de vía 1 entre el transmisor y el tren.
- Tramo de vía entre el tren y el receptor de vía 1.
- Tramo de vía 2, desocupado.

De la misma manera que para el apartado anterior, se ha empleado un enfoque discretizado con parámetros distribuidos y con configuración en H [9] donde el balasto(tierra) representa el camino de acoplamiento común para las dos vías y por donde circularán corrientes de fuga de acuerdo tanto a las condiciones ambientales del balasto, como de la posición del tren en la vía.

Se ha empleado el mismo número de módulos de impedancia concatenados en los modelos de vía $N = 100$. El esquema de simulación implementado en Simulink, Matlab 2021, se muestra a continuación:

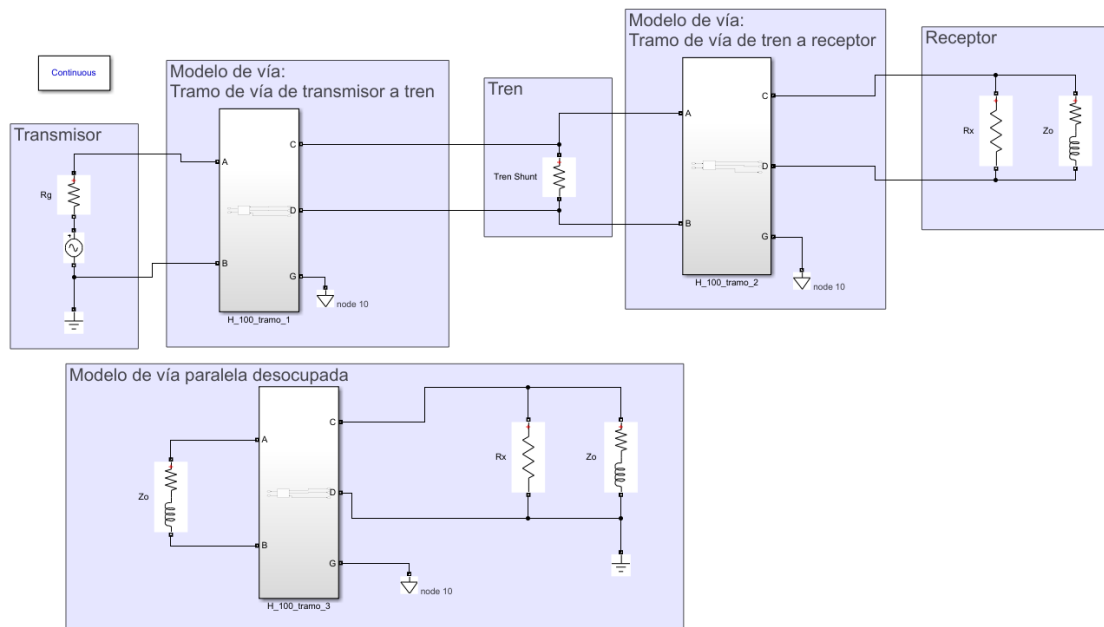


Figura 50. Esquema en Matlab, Simulink 2021 para simulación de modelo de acoplamiento de corrientes de fuga en vías paralelas con un tren que circula por una de ellas.

Para este caso, tanto los bloques H_100_tramo_1, H_100_tramo_2, y H_100_tramo_3 se han implementado $N = 100$ módulos de impedancia en configuración en H, tal y como se muestra en la Figura 50.

Para un tren que se desplaza de acuerdo con el perfil de velocidad mostrado en la Figura 28, los resultados obtenidos se muestran a continuación:

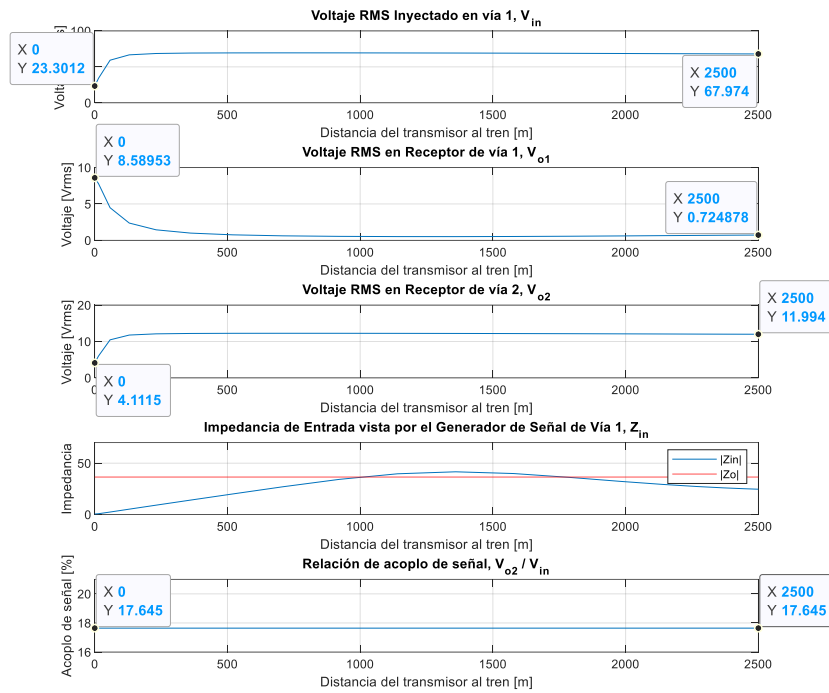


Figura 51. Resultados de simulación de modelo de acoplamiento de corrientes de fuga para $HR = 0.1 \%$.

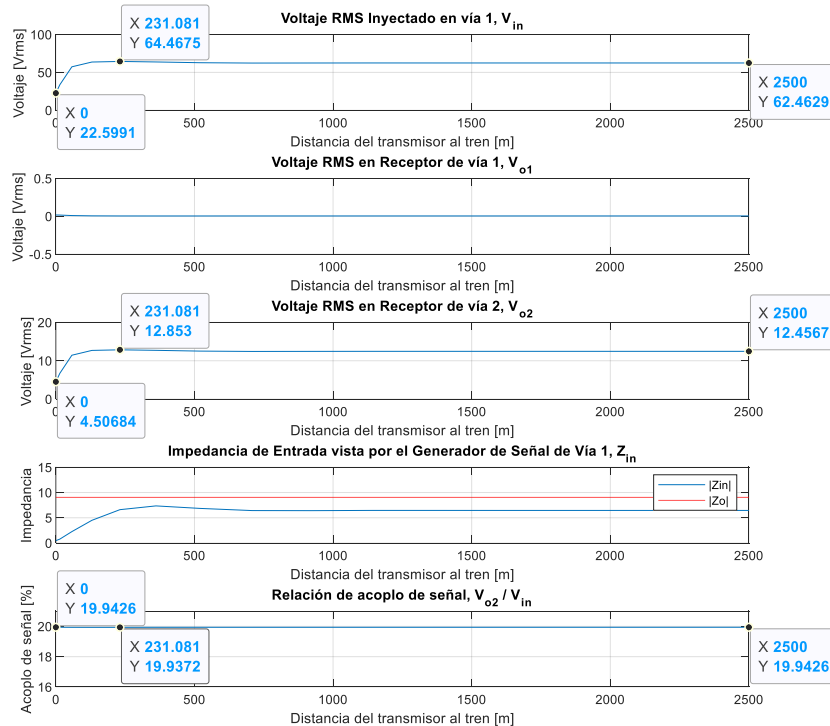


Figura 52. Resultados de simulación de modelo de acoplamiento de corrientes de fuga para $HR = 1 \%$.

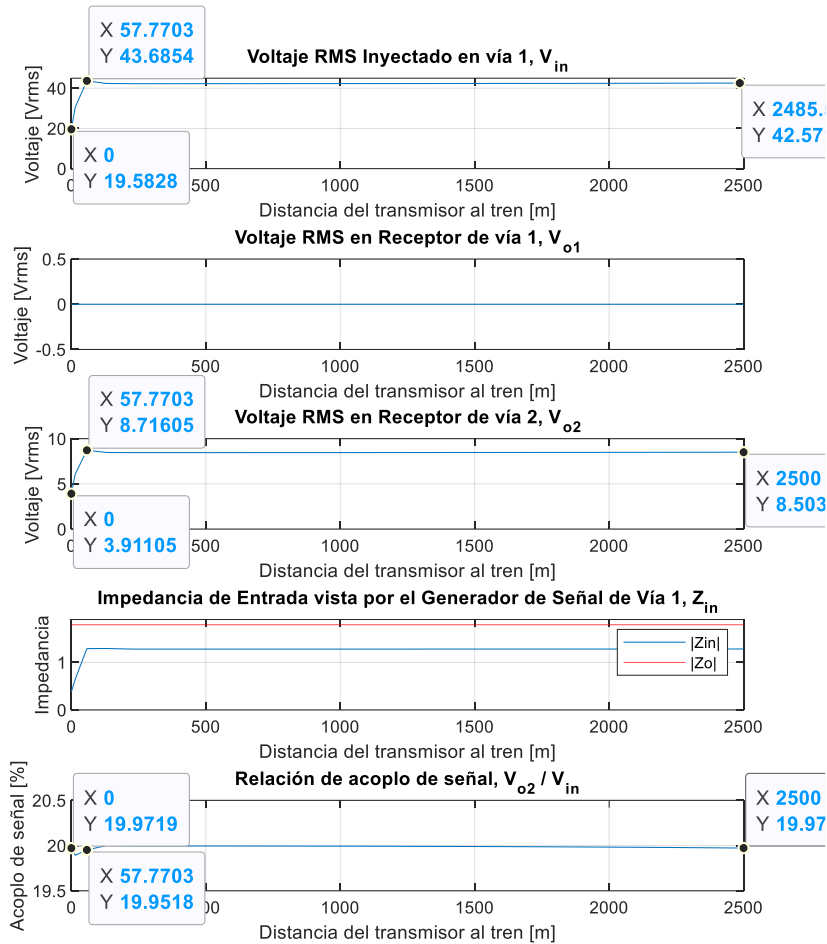


Figura 53. Resultados de simulación de modelo de acoplamiento de corrientes de fuga para $HR = 10\%$.

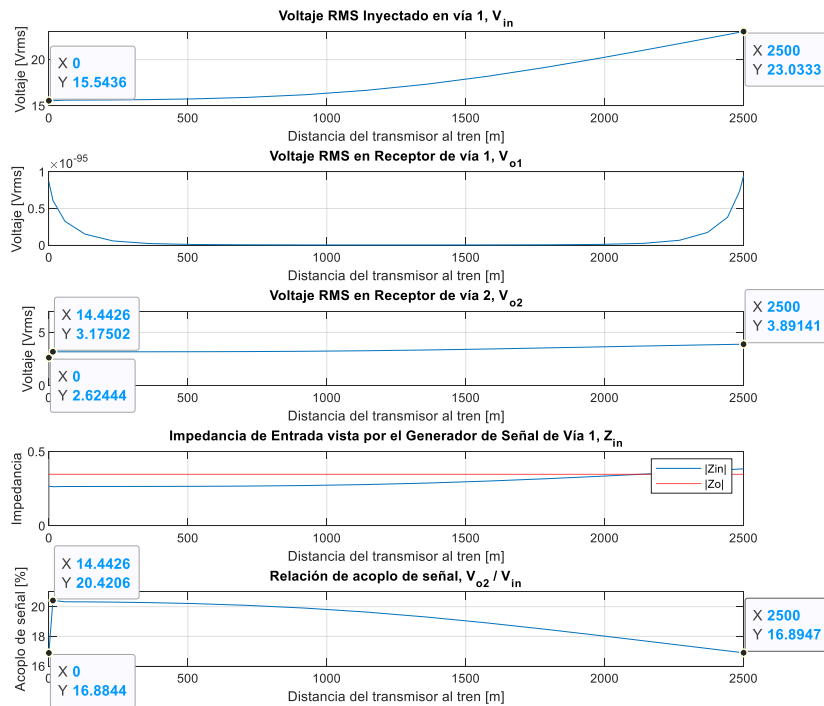


Figura 54. Resultados de simulación de modelo de acoplamiento de corrientes de fuga para $HR = 100\%$.

Los resultados se resumen en la siguiente tabla:

Tabla 4. Resumen de resultados de simulación de modelo de acoplamiento de corrientes de fuga con tren.

HR (%)	Porcentaje máximo de señal acoplada (%)	Porcentaje mínimos de señal acoplada (%)
0.1	17.64	17.64
1	19.94	19.93
10	19.97	19.95
100	20.42	16.89

Se puede observar que dado el bajo valor óhmico de la resistencia shunt, tanto en la vía ocupada como en libre los valores de señal se mantienen constantes para para pocos metros (aprox 500m) de separación del tren del punto de emisión. Si bien, el porcentaje máximo de señal acoplada aumenta ligeramente con la humedad relativa.

Si se analiza la impedancia de entrada en vía seca (HR=0.1%), para una misma distancia de tren, el valor registrado en el nodo transmisor es inferior si se considera el acoplamiento entre vías, basta comparar las figuras 32 y 51. Además, en el caso de vía única, se aprecian variaciones de impedancia de entrada hasta los 2000m recorridos por el tren, distancia que se reduce a la mitad en el caso de vía doble acoplada. Claramente estos valores se reducen al aumentar la humedad del balasto.

El estudio analítico más detallado, incluso con otros modelos de corrientes de fuga se puede abordar en trabajos futuros.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

La finalidad de este trabajo ha sido estimar la posición de un tren que circula por un tramo ferroviario supervisado por un circuito de vía, a partir de la impedancia eléctrica medida en el nodo transmisor.

Una vez abordados los fundamentos teóricos del circuito de vía, se ha obtenido una expresión analítica de los parámetros característicos en función de la frecuencia de trabajo y de la humedad relativa del balasto. Además, a partir de medidas experimentales publicadas, se ha modelado la naturaleza estocástica de dichos parámetros. Todo ello ha permitido realizar el estudio analítico y la correspondiente simulación del comportamiento del circuito de vía desocupada y ocupada con un tren representado por su resistencia shunt.

Se ha comprobado que conforme se incrementa la humedad relativa, la incertidumbre en la estimación de la posición se incrementa. Además, el incremento de HR conlleva que la impedancia característica disminuya considerablemente, haciendo que la estimación de la posición del tren en vía se limite a decenas de metros.

La simulación de un modelo de acoplamiento de corrientes de fuga entre dos tramos paralelos de circuito de vía ha permitido observar para diferentes valores de HR que, si bien los niveles de señal inyectados son diferentes para cada caso, el porcentaje de señal acoplada en una vía paralela desocupada se mantiene prácticamente constante, próxima al 18%.

En cuanto al modelo de acoplo de corrientes de fuga entre vías paralelas, resulta complejo establecer un modelo analítico empleando las herramientas de la literatura de líneas de transmisión ya que existe un punto de conexión común de acoplamiento (tierra) que condiciona dicho análisis.

A partir de este TFM cabe mencionar futuras vías de trabajo futuro:

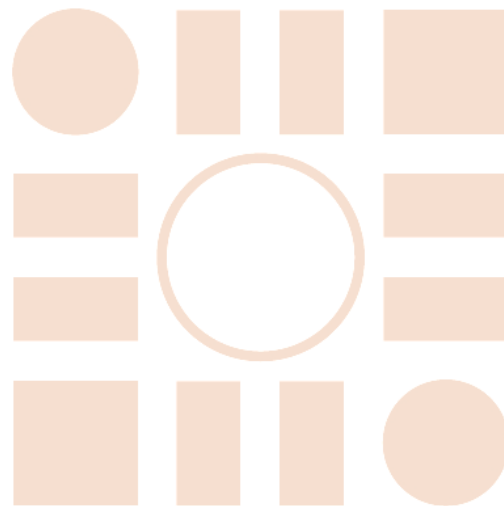
- Generar un interfaz gráfico de usuario que facilite la interpretación de resultados del comportamiento de un circuito de vía en función de la frecuencia de trabajo y de la humedad relativa del balasto, incluyendo la incertidumbre de parámetros.
- Completar el estudio realizado con una fuente de señal sinusoidal utilizando señal codificada, aplicando técnicas habituales en los circuitos de vía comerciales.
- Profundizar en el modelo analítico que describa el acoplo de corrientes de fuga entre dos vías paralelas, con el fin de poder evaluar con más detalle, tanto el efecto de las condiciones ambientales como la posición del tren.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. Scalise, «How Track Circuits detect and protect trains». 5 de noviembre de 2014. Accedido: 11 de julio de 2022. [En línea]. Disponible en: <https://www.railwaysignalling.eu/how-track-circuits-pdf-detect-and-protect-trains>
- [2] X. Lorang, S. Kerbal, L. Lemarchand, V. L. Cam, y J.-J. Mogoro, «New detection criteria and shunting monitoring in railway track circuit receivers», p. 11, oct. 2018.
- [3] Diamond Valley Railway Inc, «Using AC Track Circuits for Signal Control». https://www.dvr.com.au/all-about-us/AC_Track_Circuits.pdf (accedido 12 de julio de 2022).
- [4] V. Havryliuk, «Audio Frequency Track Circuits Monitoring Based on Wavelet Transform and Artificial Neural Network Classifier», en *2019 IEEE 2nd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON)*, jul. 2019, pp. 491-496. doi: 10.1109/UKRCON.2019.8879833.
- [5] Railcorp, «Audio Frequency Jointless Track Circuits for Main Line Applications», p. 16, may 2020.
- [6] W. Jakubas, M. Jaraczewski, y R. Mielnik, «Simulation study of a track circuit to determine the traffic parameters of a railway vehicle», *Czas. Tech.*, vol. 2016, n.º Elektrotechnika Zeszyt 2-E 2016, Art. n.º Elektrotechnika Zeszyt 2-E 2016, dic. 2016, doi: 10.4467/2353737XCT.16.255.6054.
- [7] A. Mariscotti y P. Pozzobon, «Determination of the electrical parameters of railway traction lines: calculation, measurement, and reference data», *IEEE Trans. Power Deliv.*, vol. 19, n.º 4, pp. 1538-1546, oct. 2004, doi: 10.1109/TPWRD.2004.835285.
- [8] J. C. García *et al.*, «Characterization of railway line impedance based only on short-circuit measurements: RAILWAY LINE IMPEDANCE BASED ON SHORT-CIRCUIT MEASUREMENTS», *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol. 43, n.º 8, pp. 984-994, ago. 2015, doi: 10.1002/cta.1987.
- [9] C. G. Ram, A. Nithya, V. Jayashankar, y P. R. Goundan, «Fail Safe Operation of Audio Frequency Track Circuits for Railway Signalling», en *2009 Annual IEEE India Conference*, dic. 2009, pp. 1-5. doi: 10.1109/INDCON.2009.5409373.
- [10] N. Vaswani, «Linear Models, Detection and Estimation Theory, # 3». Accedido: 24 de abril de 2022. [En línea]. Disponible en: https://www.ece.iastate.edu/~namrata/EE527_Spring08/l3.pdf
- [11] International Telecommunication Union (ITU), «Directives concerning the protection of telecommunication lines against harmful effects from electric power and electrified railway lines - Volume II: Calculating induced voltages and currents in practical cases». 1999. Accedido: 25 de abril de 2022. [En línea]. Disponible en: <https://www.itu.int:443/en/publications/ITU-T/Pages/publications.aspx>
- [12] B.-C. Ahn, «Calculation of The Capacitance Coefficients of Two Non-contacting Metallic Spheres with The Method of Image», *J. Ind. Sci. Technol. Inst.*, 2019, doi: 10.54726/jisti.33.1.10.

- [13] R. J. Hill, S. Brillante, y P. J. Leonard, «Electromagnetic field modelling for transmission line distributed parameters of railway track», *IEE Proc. - Electr. Power Appl.*, vol. 146, n.º 1, p. 53, 1999, doi: 10.1049/ip-epa:19990193.
- [14] Renfe, «Trenes de Cercanías 447». <https://www.renfe.com/es/es/grupo-renfe/grupo-renfe/flota-de-trenes/447> (accedido 10 de agosto de 2022).
- [15] V. Lindberg, «Uncertainties and Error Propagation», *Uncertainties and Error Propagation Part I of a manual on Uncertainties, Graphing, and the Vernier Caliper*, 1 de julio de 2020. <https://www.geol.lsu.edu/jlorenzo/geophysics/uncertainties/Uncertaintiespart2.html#functions> (accedido 11 de agosto de 2022).
- [16] R. J. Hill y P. C. Coles, «A user-friendly simulator for modelling audio frequency track circuit operation», en *Proceedings of the 1993 IEEE/ASME Joint Railroad Conference*, abr. 1993, pp. 77-86. doi: 10.1109/RRCON.1993.292960.

Universidad de Alcalá
Departamento de Electrónica
Escuela Politécnica Superior



ESCUELA POLITECNICA
SUPERIOR



Universidad
de Alcalá