



Universidad  
de Alcalá

# ESCHER: TESELAS Y MOSAICOS EN EL AULA

Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación  
Secundaria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de  
Idiomas en la especialidad de Matemáticas

**Presentado por:**

**Ignacio de la Fuente Fernández**

**Dirigido por:**

**Dr. Carlos Hermoso Ortiz**

**Subdirigido por:**

**Dr. Alberto Lastra Sedano**

**Alcalá de Henares, a 25 de junio de 2022**

---

## Índice

Resumen.....	1
MOTIVACIÓN .....	2
INTRODUCCIÓN .....	2
LEGISLACIÓN .....	4
ESCHER Y TESELACIONES .....	9
CONTENIDOS TEÓRICOS.....	11
SECUENCIA DIDÁCTICA .....	14
Metodología .....	14
Objetivos.....	16
Interdisciplinariedad .....	17
Actividades.....	17
Temporalización.....	27
Evaluación .....	27
CONCLUSIONES.....	28
BIBLIOGRAFÍA .....	29
ANEXOS .....	30

# Resumen

En este trabajo de fin de máster nos centramos en contenidos del segundo ciclo de la ESO para desarrollar una secuencia didáctica. Para ello, nos apoyamos en la obra de Escher, buscando acercar esos contenidos (giros, simetrías...), de forma novedosa a los alumnos, y no obviarlos.

En un primer momento nos centramos en el contenido legal (contenidos, criterios, estándares, competencias...) para pasar a presentar una breve biografía de Escher y una síntesis teórica de los contenidos seleccionados. Posteriormente se presenta la secuencia didáctica, bajo la premisa del método Van Hiele, contando con 4 actividades y una evaluación de las mismas.

**Palabras clave:** Escher, teselas, giros, geometría.

# MOTIVACIÓN

A la hora de estudiar la geometría nos encontramos con toda una serie de complicaciones asociadas al grado de abstracción de esta rama de las matemáticas, junto con, en el caso de los estudiantes preuniversitarios -aquellos en los que nos vamos a centrar-, una dificultad añadida al ser la primera vez que tratan formalmente temas de geometría, unido a una cierta inmadurez y una limitación autoimpuesta por la “dificultad de las matemáticas que son para los listos”.

Este trabajo trata de apoyarse en la obra del artista neerlandés Maurits Cornelis Escher para acercar a los alumnos del segundo ciclo de la ESO, más concretamente de tercero, conceptos de geometría como las teselaciones, la simetría, las rotaciones... La idea de unir arte y matemáticas no es baladí. Como detalla el currículo hay toda una serie de competencias básicas que debemos trabajar a lo largo de la formación de nuestros alumnos. Por esto, junto a otras razones, apostamos por el aprendizaje de las matemáticas apoyado en el arte. Este aprendizaje decíamos que nos hará trabajar muchas de las competencias clave a desarrollar durante la ESO y el bachillerato -tal como veremos en la parte que hace referencia a la legislación-: desde la misma competencia matemática hasta la conciencia y expresiones culturales, pasando por la competencia digital.

A pesar de que esta razón ya tiene bastante peso, no deberíamos caer en ese formalismo y unirlos exclusivamente porque la ley indica que esas competencias deben trabajarse. Desde hace muchos siglos las matemáticas han estado ligadas a disciplinas tan dispares como la filosofía, la música o el arte; por eso consideramos que retomar ese camino que parece estar quedando a un lado, en la práctica, quizás no tanto en la normativa (que apuesta por la interdisciplinariedad y las relaciones entre distintas materias) es una gran idea, de ahí nace este trabajo.

# INTRODUCCIÓN

μην μπαίνεις εδώ που δεν ξέρει γεωμετρία

“No entre aquí quien no sepa geometría”. Así rezaba el famoso lema de la Academia de Platón en la antigua Grecia allá por el año 400 a.C. Fue su discípulo Euclides el que unos años más tarde decidió sistematizar en su tratado “Los Elementos” todos los conocimientos

que se tenían hasta la fecha sobre geometría. Esta sistematización no era sino el reflejo del interés por las cuestiones geométricas, que venía de más atrás, pudiendo retrotraernos hasta unos 2.000 años a.C., a pesar de que en esa época el interés no fuese desarrollar una serie de teoremas, sino de utilizar la geometría en muy diversas cuestiones. Este conocimiento de primer grado, la geometría, sigue en la actualidad suscitando interés a muchas personas, desde los mismos alumnos que se introducen en este campo en la escuela, pasando por aficionados a las matemáticas, físicos, artistas, filósofos o los mismos matemáticos...

En este largo camino que ha recorrido la geometría, tanto de una forma empírica (antigua Babilonia), como de una manera más formal (Euclides, Pitágoras y todos los sucesores), decíamos que ha tenido un papel esencial en el desarrollo de la sociedad, no es baladí el lema de la academia de Platón, ni que éste considerase la geometría como uno de los saberes básicos para los ciudadanos.

Dentro de la geometría, durante los años en los que recibimos la educación obligatoria, estamos acostumbrados a afrontar su estudio a través de la resolución de toda una serie de problemas, tanto de geometría plana (polígonos, haciendo hincapié en algunos más que en otros, áreas...) como de geometría espacial (volúmenes, poliedros...), todo ello, en muchos casos, como un mero estudio de fórmulas y dejando de lado contenidos del currículum como el caso de giros, simetrías... Estos contenidos, que acabamos de nombrar, decíamos que en muchas ocasiones son obviados o directamente ignorados, a pesar de la importancia que estos tienen en el desarrollo de habilidades y competencias como la espacial.

Las teselaciones, que podríamos definir como un conjunto de figuras, regulares o no, que cubren un plano sin dejar espacios ni superponerse, pueden ayudarnos a afrontar el estudio de todo un conjunto de contenidos de geometría de la ESO. Los giros, la simetría, los planos, la semejanza... A pesar de todo ello nos encontramos con que a lo largo de nuestra formación secundaria la aproximación que se hace a estos contenidos es muy leve o inexistente, tanto por falta de tiempo para desarrollarlo como por unos libros de texto en los que se recurre a dos o tres ejercicios para afrontar su estudio.

Estos contenidos a nuestro juicio son muy relevantes debido a que, como indicábamos, favorecen el desarrollo de competencias, hacen aumentar la visión espacial, el razonamiento lógico, la resolución de problemas o el pensamiento abstracto (Herrera, V. C. et al., 2010 ) y

dejan a un lado la memorización acrítica de fórmulas (uno de los males que están afrontando las matemáticas a la hora de ser impartidas).

Además de las razones que acabamos de exponer también existe el compromiso de los docentes con sus alumnos, que consiste en ayudarles y transmitirles toda una serie de conocimientos que, como mínimo, deberían de ser los que la legislación les obliga.

## LEGISLACIÓN

En este apartado vamos a indicar brevemente lo que consideramos más relevante de la legislación vigente, tanto a nivel nacional (Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre) como a nivel autonómico -tomando como referencia la Comunidad de Madrid- (Decreto 48/2015), al respecto de las competencias y objetivos en la ESO, junto con los contenidos, criterios y estándares, que se recogen de la geometría asociables a las teselaciones y los mosaicos de Escher. Este apartado es especialmente importante debido a que tanto la secuencia didáctica como su evaluación estarán basadas tanto en las competencias clave como en los contenidos, criterios y estándares de aprendizaje evaluables. Es decir, sobre este apartado legal se apoya la propuesta docente de esta parte de la geometría.

Al acudir al currículum nos encontramos en primer lugar con que en tercero de la ESO las matemáticas se dividen en dos: matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas y las matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. A la hora de presentar los contenidos que aparecen en el currículum indicaremos aquellos que son de una u otra rama, o compartidos si lo fuesen, para proponer una serie de actividades comunes, o exclusivas, por rama. Es decir, si los contenidos que nos interesan para este trabajo son comunes a las dos ramas, únicamente preparemos unas actividades que pueden compartirse; si hubiese contenidos distintos o más amplios en una rama que en otra, sí que nos tocaría modificar las actividades o ampliarlas. Comenzamos, pues, a exponer aquellos aspectos de la legislación que encontramos más interesantes para este trabajo. En primer lugar, dentro de la ESO, se fijan toda una serie de objetivos que detallamos a continuación. Estos objetivos, señala el artículo 11 del RD 1105/2014, buscan desarrollar en los alumnos unas capacidades que les permitan:

- a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
- b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.
- d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
- e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
- f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
- h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
- i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.
- j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.
- k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la

l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

En segundo lugar, dentro de la norma, dejando atrás esos objetivos generales de la ESO, nos encontramos toda una serie de competencias asociadas al currículum:

- a) Comunicación lingüística.
- b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- c) Competencia digital.
- d) Aprender a aprender.
- e) Competencias sociales y cívicas.
- f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
- g) Conciencia y expresiones culturales.

Buscando potenciar la comunicación lingüística, la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.

Avanzando dentro de la legislación nacional nos encontramos la parte específica del currículum que detalla toda la serie de contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables para cada materia y curso dentro de la ESO. En nuestro caso, nos centramos en el bloque 3 de matemáticas de tercero y cuarto de la ESO, donde ya aparecen contenidos que se corresponden con la secuencia didáctica que queremos plantear en torno a la obra de Escher. Hay que contar con que, a pesar de que en tercero de la ESO ya se da la división entre las matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas y las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, ambas ramas comparten casi todos los contenidos. Pero sobre todo, para lo que nos interesa en este trabajo, ambas ramas tratan el tema de las traslaciones, giros y simetrías; del mismo modo que en el temario de cuarto de la ESO ambas tratan las semejanzas aunque los contenidos no sean presentados del mismo modo.

Cabe destacar a este respecto que, mientras que en las matemáticas aplicadas de 4 de la ESO existe un estándar donde hablan específicamente de simetría y descomposición en figuras conocidas (EAE 1.2), en las matemáticas académicas no existe ese EAE, sino una mención a la semejanza dentro de los contenidos.



**Tabla 1.** Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. 3º ESO

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
<b>Bloque 3. Geometría</b>		
<p>Mediatriz, bisectriz, ángulos y sus relaciones, perímetro y área. Propiedades. Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas. Traslaciones, giros y simetrías en el plano. Geometría del espacio: áreas y volúmenes. El globo terráqueo. Coordenadas geográficas. Longitud y latitud de un punto.</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas.</li> <li>2. Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener medidas de longitudes, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos.</li> <li>3. Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala.</li> <li>4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.</li> <li>5. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1.1. Conoce las propiedades de los puntos de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo.</li> <li>1.2. Utiliza las propiedades de la mediatriz y la bisectriz para resolver problemas geométricos sencillos.</li> <li>1.3. Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos en los que intervienen ángulos.</li> <li>1.4. Calcula el perímetro de polígonos, la longitud de circunferencias, el área de polígonos y de figuras circulares, en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas.</li> <li>2.1. Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados. Establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes.</li> <li>2.2. Reconoce triángulos semejantes, y en situaciones de semejanza utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes.</li> <li>3.1. Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes en situaciones de semejanza: planos, mapas, fotos aéreas, etc.</li> <li>4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte.</li> <li>4.2. Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario.</li> <li>5.1. Sitúa sobre el globo terráqueo ecuador, polos, meridianos y paralelos, y es capaz de ubicar un punto sobre el globo terráqueo conociendo su longitud y latitud.</li> </ol>

**Tabla 2.** Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 3º ESO

<p>Geometría del plano. Lugar geométrico. Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas. Traslaciones, giros y simetrías en el plano. Geometría del espacio. Planos de simetría en los poliedros. La esfera. Intersecciones de planos y esferas. El globo terráqueo. Coordenadas geográficas y husos horarios. Longitud y latitud de un punto. Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas.</li> <li>2. Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos.</li> <li>3. Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala.</li> <li>4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.</li> <li>5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros.</li> <li>6. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1.1. Conoce las propiedades de los puntos de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo, utilizándolas para resolver problemas geométricos sencillos.</li> <li>1.2. Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos.</li> <li>2.1. Calcula el perímetro y el área de polígonos y de figuras circulares en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas.</li> <li>2.2. Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados y establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes.</li> <li>2.3. Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos.</li> <li>3.1. Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes y de superficies en situaciones de semejanza: planos, mapas, fotos aéreas, etc.</li> <li>4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte.</li> <li>4.2. Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario.</li> <li>5.1. Identifica los principales poliedros y cuerpos de revolución, utilizando el lenguaje con propiedad para referirse a los elementos principales.</li> <li>5.2. Calcula áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas, y los aplica para resolver problemas contextualizados.</li> <li>5.3. Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas.</li> <li>6.1. Sitúa sobre el globo terráqueo ecuador, polos, meridianos y paralelos, y es capaz de ubicar un punto sobre el globo terráqueo conociendo su longitud y latitud.</li> </ol>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**Tabla 3.** Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º ESO

Bloque 3. Geometría		
<p>Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes. Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos. Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes. Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad. Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.</p>	<p>1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales. 2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida. 3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.</p>	<p>1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos. 2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas. 2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones. 2.3. Utiliza las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas. 3.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores. 3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector. 3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla. 3.4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos. 3.5. Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad. 3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.</p>

**Tabla 4.** Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. 4º ESO

<p>Figuras semejantes. Teoremas de Tales y Pitágoras. Aplicación de la semejanza para la obtención indirecta de medidas. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos semejantes. Resolución de problemas geométricos en el mundo físico: medida y cálculo de longitudes, áreas y volúmenes de diferentes cuerpos. Uso de aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.</p>	<p>1. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas, y aplicando, así mismo, la unidad de medida más acorde con la situación descrita. 2. Utilizar aplicaciones informáticas de geometría dinámica, representando cuerpos geométricos y comprobando, mediante interacción con ella, propiedades geométricas.</p>	<p>1.1. Utiliza los instrumentos apropiados, fórmulas y técnicas apropiadas para medir ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas, interpretando las escalas de medidas. 1.2. Emplea las propiedades de las figuras y cuerpos (simetrías, descomposición en figuras más conocidas, etc.) y aplica el teorema de Tales, para estimar o calcular medidas indirectas. 1.3. Utiliza las fórmulas para calcular perímetros, áreas y volúmenes de triángulos, rectángulos, círculos, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas, y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades correctas. 1.4. Calcula medidas indirectas de longitud, área y volumen mediante la aplicación del teorema de Pitágoras y la semejanza de triángulos. 2.1. Representa y estudia los cuerpos geométricos más relevantes (triángulos, rectángulos, círculos, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas) con una aplicación informática de geometría dinámica y comprueba sus propiedades geométricas.</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

# ESCHER Y TESELACIONES

Este apartado nos servirá como punto de unión entre la primera parte del trabajo, la que hace referencia a la motivación y el apartado legal, y la segunda parte del trabajo, la secuencia didáctica que vamos a plantear. Para ello haremos un breve recorrido a la vida y obra de Escher, presentando con ello distintos tipos de teselaciones. Es decir, en este apartado uniremos la parte biográfica con una breve introducción sobre las teselaciones y los distintos movimientos que nos interesa estudiar. Será en el siguiente apartado donde incluyamos un aspecto más “formal” de esos contenidos teóricos.

Nacido en una familia flamenca a finales del siglo XIX, tras un periplo académico no demasiado brillante decidió comenzar el estudio de técnicas gráficas como el grabado, de la mano de su mentor Samuel Haarlem. Una vez descubierto el arte como motor de su vida decidió viajar en busca de inspiración. Tras su paso por Italia, donde fue perfeccionado su técnica de la xilografía, siguió su viaje llegando a España. Fue precisamente en España, en la Alhambra de Granada donde su vida dio un vuelco. Quedó fascinado por los mosaicos nazaríes afirmando con lástima respecto de estos: “¡Qué lástima que el Islam les prohibiera a estos artistas reproducir figuras! Los diseños que utilizan en sus azulejos siempre estuvieron limitados a figuras geométricas. Que yo sepa, ningún artista arabe se atrevió nunca (¿o es que a ninguno se le ocurrió?) a utilizar formas concretas y fácilmente identificables que existen en la naturaleza -peces, aves, reptiles, humanos- para dividir una superficie. Esta limitación me parece tanto más incomprensible, cuanto que la posibilidad de identificar las figuras de mis propios dibujos es la razón de mi vivo y permanente interés por el tema de la partición regular.” (Argilés, 2018; Escher, 2008)

A partir de ese momento se interesó mucho sobre las matemáticas llegando a tomar estas como la base sobre la que fundamentar su obra. No en vano en las mismas presentaciones que hacía de sus obras era este papel (el matemático) el que más destacaba, por encima de la técnica empleada, llegando a afirmar: “identificar las figuras de mis propios dibujos es la razón de mi vivo y permanente interés por la partición regular”. (Escher, 2008)

Para acercarse a estos conceptos matemáticos de tesela, simetría, rotación, traslación...

Escher leyó artículos de los matemáticos George Pólya y Harold Coxeter. Del primero sacó en claro que existían, al menos, los 17 grupos de simetría que exponía ese artículo, mientras que del segundo de ellos, se interesó en la división hiperbólica del plano y en la representación del infinito en dos planos (Quero, 2007)

La obra de Escher ha sido ampliamente estudiada y clasificada en función de muchas categorías, desde el mero desarrollo temporal de la misma (Quero, 2007), los temas y categorías, estando estos interconectados por las matemáticas (Ernst, B., 2022), los tipos de obras (Escher, 2008; Quero, 2007); junto al análisis de otros muchos autores.

En este caso, como nos vamos a centrar en los mosaicos y teselaciones, vamos a dejar a un lado una parte muy significativa de su obra, pero, apoyándonos en ella, daremos unas breves pinceladas (tomémonos esta pequeña licencia artística), sobre los conceptos matemáticos que nos interesan destacar de ellas en nuestro estudio de los contenidos de la ESO. Para ello tomaremos como referencia la segunda división, pero sólo tomando las teselaciones y mosaicos.

En este caso nos vamos a centrar en la división del plano, una de las mayores obsesiones de Escher, como hemos visto. Las teselaciones que realiza Escher se pueden dividir, siguiendo su propia exposición en el libro editado en 2008 por Taschen, entre las particiones regulares del plano y las irregulares.

En este primer grupo, Escher tenía el siguiente proceso de creación, partiendo de una serie de figuras geométricas regulares como el triángulo o el hexágono, las modificaba, creando otras figuras que también completaban el plano a través de giros y otros movimientos, sin dejar espacios ni superponerse entre sí.

Dentro de las teselaciones de Escher podemos destacar 4 tipos: la primera, que hemos comentado, donde los mosaicos se completan con una misma figura del mismo tamaño donde únicamente se dan rotaciones para encajarse entre sí; la segunda, en la que en los mosaicos existen distintos tipos de figuras; la tercera, en la que en los mosaicos se da una transformación o metamorfosis (así las llamaba él mismo); y, por último, las teselaciones “en las que se alcanza el infinito”. Dentro de los anexos presentamos una obra de cada tipo a modo de aclaración, yendo desde el anexo 1 al anexo 4 en el orden expuesto.

En base a estas teselaciones vamos a desarrollar un poco más adelante una serie de actividades, enmarcadas dentro de la secuencia didáctica, que van a buscar acercar estos contenidos a alumnos de tercero de la ESO.

# CONTENIDOS TEÓRICOS

En este trabajo, hacíamos mención a toda una serie de contenidos del bloque de geometría que nos interesa trabajar. Estos contenidos hacen referencia a las traslaciones, giros y simetrías en el plano. De una forma general, y siguiendo el trabajo de Silvestre (2010), donde se realiza una presentación muy sencilla pero pormenorizada de las transformaciones geométricas, vamos a detallar las ideas que más nos interesan para el desarrollo de este trabajo.

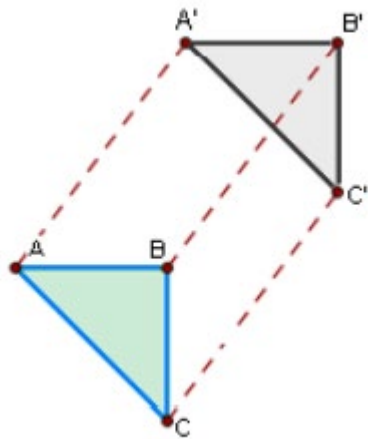
Al comienzo de su trabajo (en la página 1 del mismo), define las transformaciones geométricas como *“la operación o el conjunto de operaciones geométricas que permiten generar una nueva figura a partir de otra dada u original. Es decir, hacen corresponder a cada punto del plano otro punto del plano y como consecuencia, las figuras se transforman en otras figuras. A la figura resultante se le denomina homóloga”* (Silvestre, 2010).

Dentro de estas transformaciones se hace referencia a una clasificación de las mismas en función de su sentido o de su forma. A nosotros nos interesa, esencialmente, la transformación isométrica, también conocida como *“movimiento del plano”*, que es el contenido al que hace referencia el currículo, aunque también es importante que hagamos una referencia a las transformaciones isomórficas, donde *“la figura resultante u homóloga conserva la forma de la figura original y los ángulos, pero no las dimensiones, aunque mantienen una relación de proporcionalidad entre las dimensiones del homólogo con el original”*, y la transformaciones anamórficas, donde *“cambia la forma de la figura original”*. (Silvestre, 2010)

Hemos señalado que las transformaciones que más nos interesan son las isométricas con sus cuatro tipos de movimientos en el plano, dos de ellos directos y otros dos inversos.

**Traslación (movimiento directo):** en este movimiento todos los puntos de la figura original se desplazan a una misma distancia y en la misma dirección, sin rotarlo ni voltearlo.

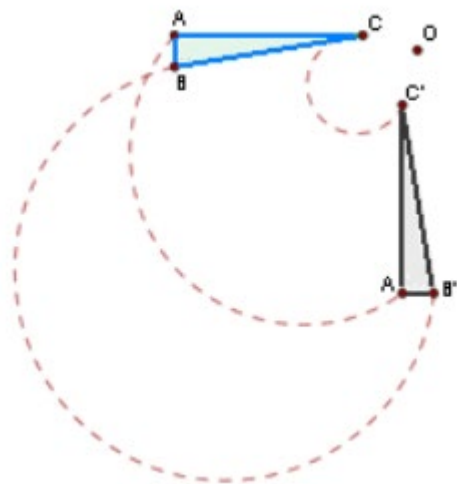
En esta figura cada uno de los vértices se desplazaría siguiendo el vector formado entre cada uno de ellos, por ejemplo, el vector AA’.



**Figura 1.** Movimiento de traslación. Fuente: Silvestre (2010)

**Rotación (movimiento indirecto):** movimiento que respeta las características propias de la figura original, pero que gira en torno a un punto concreto, el centro de rotación, un ángulo y un sentido.

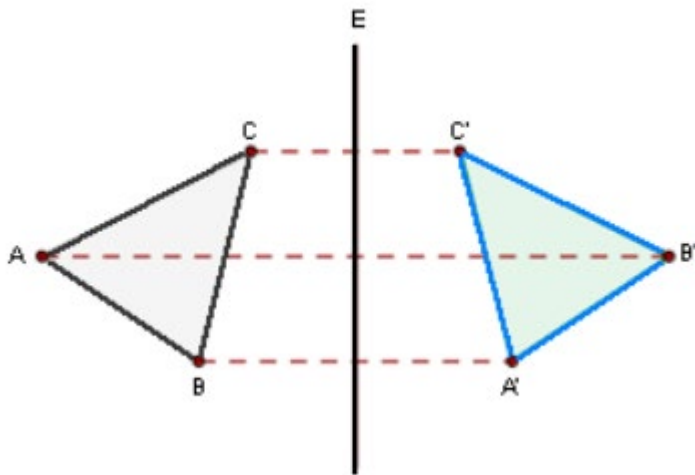
En esta figura el punto sobre el que gira es el punto O, en el sentido inverso a las agujas del reloj.



**Figura 2.** Movimiento de rotación. Fuente: Silvestre (2010)

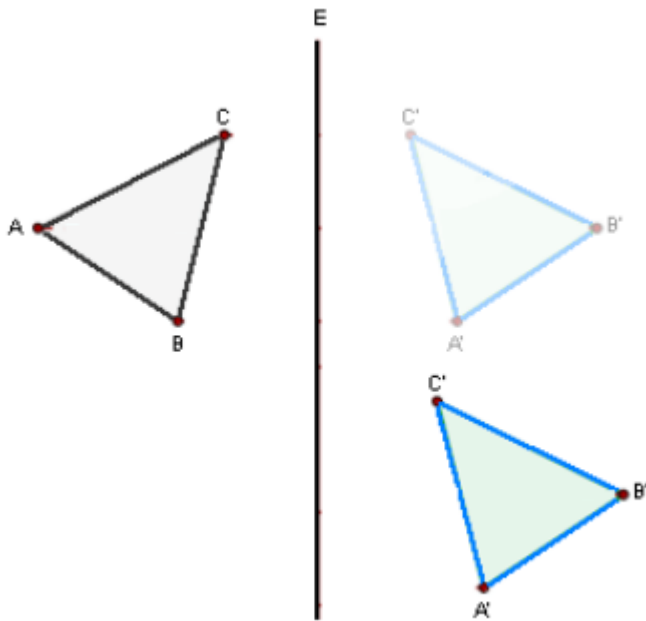
**Reflexión (movimiento inverso):** movimiento en el que la figura original se invierte a partir de un eje de simetría y una dirección.

En esta figura el eje de simetría lo representa la recta E, siendo esa recta la mediatriz entre cada punto y su simétrico.



**Figura 3.** Movimiento de simetría. Fuente: Silvestre (2010)

**Reflexión con desplazamiento (movimiento inverso):** en este caso nos encontramos ante una mezcla de dos movimientos previos, la reflexión, que se realiza en primer lugar, y la traslación.



**Figura 4.** Movimiento de reflexión con desplazamiento. Fuente: Silvestre (2010)

Dejando atrás las transformaciones en el plano vamos a recuperar a las teselaciones o mosaicos, que habíamos definido al principio del trabajo como un conjunto de figuras que cubren un plano sin dejar espacio entre ellas ni superponerse. En el apartado anterior

hacíamos referencia a que Escher, en los libros sobre su obra donde él escoge el orden y forma de presentarla, distingue entre particiones regulares e irregulares del plano. (Escher, 2008)

Aunque, formalmente, la partición regular hace referencia a aquellas teselaciones en las que se parte de un tipo de polígonos, exclusivamente, no debemos pensar que esos polígonos deben ser regulares, podrían serlo, del mismo modo que podrían no serlo. Si (no) lo fuesen sería una partición regular mediante polígonos (irregulares) regulares. Así mismo, también existen las particiones regulares pero no poligonales, donde se modifica una figura simple que tesela un plano, en una mucho más compleja, que también lo haga (Anexo 1, por ejemplo).

## SECUENCIA DIDÁCTICA

Dentro de este apartado dedicado a la secuencia didáctica, pensada para las matemáticas académicas de tercero de la ESO, detallamos la metodología seguida, los objetivos planteados para ella, unos apuntes sobre la interdisciplinariedad y el trabajo de distintas competencias y, finalmente, las actividades, junto a la forma de evaluación de las mismas.

### Metodología

En este apartado, comentábamos que incluiríamos toda una serie de actividades para trabajar unos contenidos específicos del bloque de geometría para alumnos de tercero de la ESO.

Dentro de cada una de las actividades incluimos tanto los contenidos como criterios y estándares trabajados. Al mismo tiempo haremos referencia a las competencias trabajadas en el apartado de evaluación, donde detallaremos la forma de calificar.

En esta secuencia didáctica nos vamos a basar en el modelo Van Hiele para aproximar esos contenidos de geometría a nuestros alumnos, por ello, como veremos más adelante tendremos actividades para cada fase o para varias de ellas al mismo tiempo.

Este modelo busca, básicamente, ampliar el razonamiento geométrico, enseñando a los alumnos a partir del punto de razonamiento geométrico poseído (Chavarria-Pallarco, 2020).

Para presentar este modelo nos hemos apoyado en los artículos Chavarria-Pallarco, N. A. (2020), Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990) y Vargas, G. V., & Araya, R. G. (2013); que



presentan de forma sencilla las ideas principales, que era el objetivo que tenemos antes de desarrollar cada una de las actividades.

Como recogen esos artículos el modelo contiene fundamentalmente dos ideas principales, los niveles de razonamiento geométrico y las fases de aprendizaje. Los primeros podemos sintetizarlos de la siguiente forma:

**Nivel 1. Visualización o reconocimiento:** primer acercamiento que nos permite hacernos a la idea del punto de partida. Se busca el reconocimiento de figuras sin detenerse demasiado en sus propiedades, sino en acercarnos a ellas.

**Nivel 2. Análisis:** se “aislan” (cuando se habla de aislar se hace referencia a no tomar a las figuras geométricas como un todo, sino que se busca analizarlas de forma más específica) las figuras tratando de conocer sus elementos, propiedades, características, etc. Para ello las actividades hacen que los estudiantes midan, toquen, razonen, exploren sobre esas figuras.

**Nivel 3. Deducción informal u orden:** se crean relaciones entre figuras y sus características, como unas pueden derivar de otras. En esta fase se sigue haciendo hincapié en la manipulación para asentar las ideas. El debate, e intercambio de ideas también es característico de esta fase.

**Nivel 4. Deducción:** en esta fase se es capaz de seguir y realizar demostraciones. Ha asimilado que hay distintos modos de demostrar las proposiciones.

**Nivel 5. Rigor:** finalmente se obtiene la habilidad y capacidad de analizar distintos sistemas deductivos y, a partir de cada uno de los mismos, escoger el que se considera mejor. Es un nivel que distintos autores identifican con alumnos de estudios superiores por la complejidad y grado de abstracción.

Para el progreso en el aula, la asimilación y el aprendizaje real de los alumnos, Van Hiele propone una serie de fases de aprendizaje (la segunda de las características esenciales de su método).

**Fase 1. Información e interrogación:** se busca conocer el punto de partida del alumnado, conocimientos previos sobre el tema y aprovecharlos para presentar los nuevos contenidos. Con esta fase se puede hacer a la idea del nivel y adaptar las actividades si lo considera necesario.

**Fase 2. Orientación dirigida:** se realizan una serie de actividades, creadas para que los alumnos lleguen a las conclusiones, o puedan al menos intuir las, sobre los conocimientos que el profesor considera. Es un acercamiento a esa “apertura a nuevos razonamientos”.

**Fase 3. Explicitación:** es una fase en la que el debate, compartir ideas con compañeros o el mismo profesor ayuda a asentar los conceptos que interesan. También permite eliminar los erróneos, motivar el aprendizaje porque los alumnos pueden ver que sus intuiciones en muchos casos son las correctas y afianzar ese aprendizaje con el lenguaje oportuno.

**Fase 4. Orientación libre:** tras un acercamiento a los nuevos conocimientos en esta fase se busca plasmarlos a través de actividades que conlleven algo más que el simple uso de un algoritmo. Es una fase donde dar cierta libertad a los alumnos para ver el grado de conocimiento, esfuerzo y capacidades de cada uno. Más que una actividad totalmente pautada, debe ser una actividad guiada, en el sentido de proporcionar una base mínima sobre la que ellos deben desarrollar el trabajo.

**Fase 5. Integración:** organización de los contenidos asimilados durante las fases previas. Actividades sin novedades de contenidos, sino que faciliten esa “recuperación” de lo previo para obtener un mapa, una visión general de lo aprendido.

## Objetivos

Dentro de esta secuencia nos hemos planteado una serie de objetivos, que nos permitirán realizar una evaluación sobre su logro cara a poder realizar cambios y mejoras. Los objetivos son los siguientes:

- Trabajar los contenidos de geometría asociados a los giros, simetrías, etc., definidos en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre.

- Utilizar herramientas digitales para la presentación de los contenidos y la realización de las tareas, incidiendo especialmente en el uso de Geogebra.
- Trabajar el máximo número de competencias clave posibles (en el siguiente apartado detallamos cuales son y las razones).
- Relacionar el arte y las matemáticas, buscando despertar un mayor interés por parte de los alumnos en ambos campos.
- Dar un mayor peso al alumnado durante las sesiones, tomando el profesor un papel de guía en el aprendizaje.

## Interdisciplinariedad

Al desarrollar esta secuencia didáctica “cubriremos” los contenidos que hemos detallado del currículo de matemáticas. Aún así, las actividades que hemos planteado amplían esos contenidos trabajando prácticamente todas las competencias, como detallaremos a continuación. Pero, sobre todo, se podría ampliar a la asignatura de Historia, enfocando en la historia del arte, y en Lengua, centrándonos en la capacidad de expresión oral y escrita de los alumnos y en su capacidad de distinción de ambas.

Respecto a las competencias trabajadas podemos detallar de forma esquemática las trabajadas y las razones.

La primera de ellas es, evidentemente, la competencia matemática y en ciencia y tecnología, que no hace falta que expliquemos; la competencia lingüística, trabajada en las sesiones al pedir a los alumnos que debatan, expongan y usen lenguaje adecuado; la competencia digital y aprender a aprender, al trabajar en Geogebra; y la competencia conciencia y expresiones culturales, al presentar distintas obras de Escher e incidir en la importancia del arte y las matemáticas.

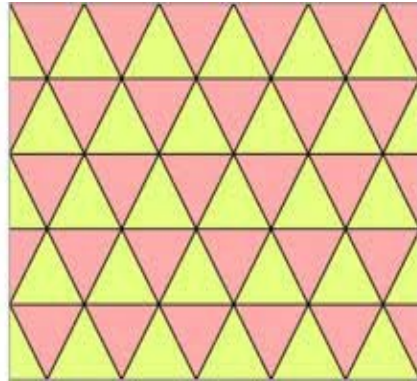
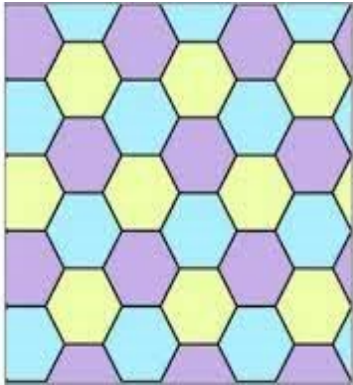
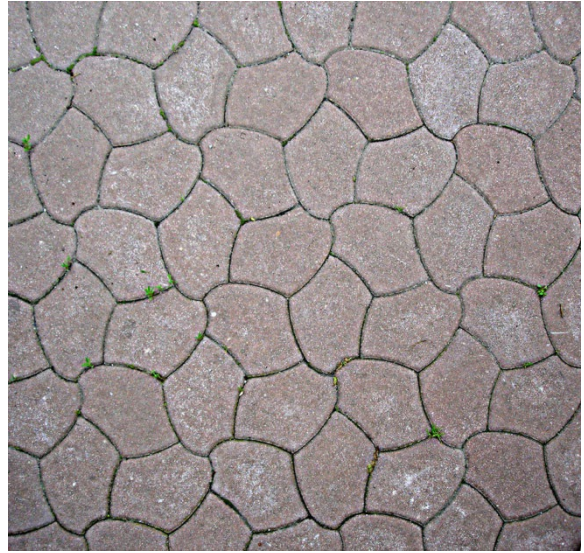
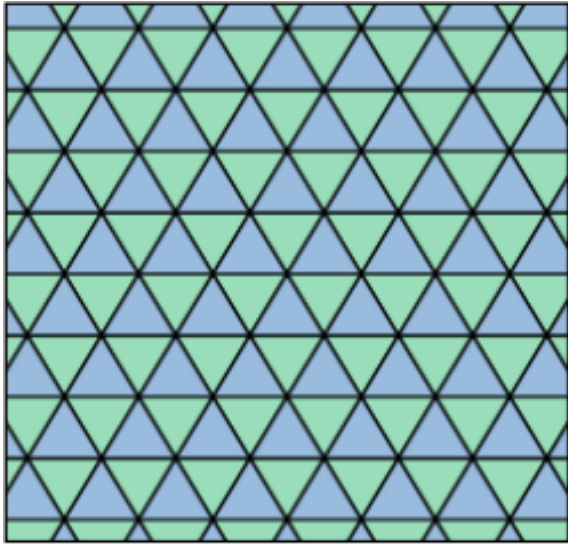
De este modo, un contenido que era obviado puede trabajarse en pocas sesiones e incluir muchos elementos del currículo.

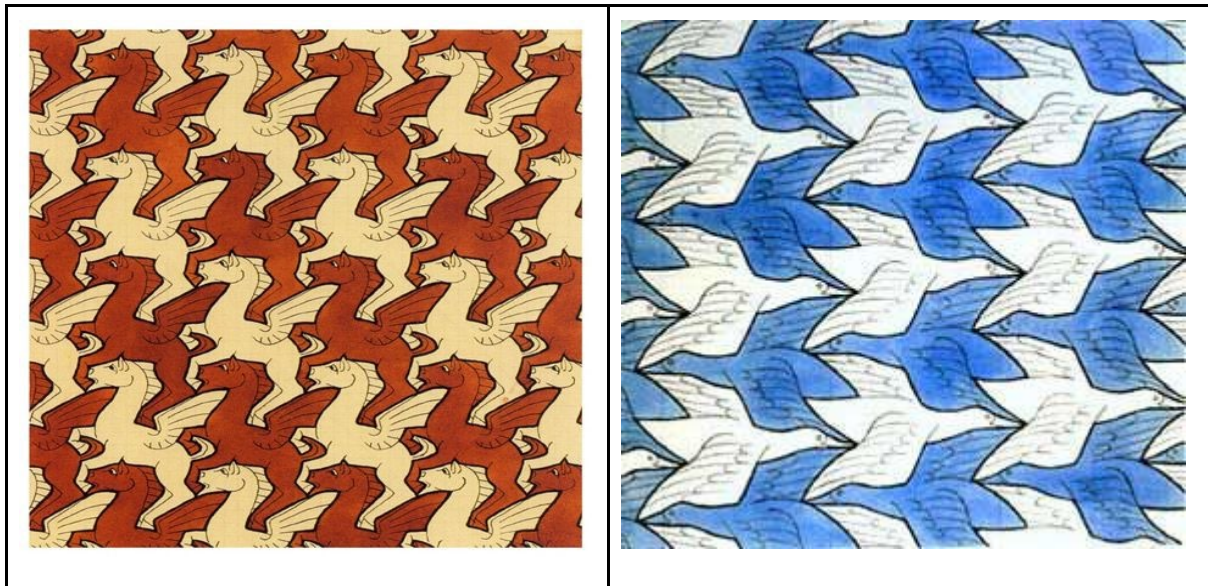
## Actividades

### **Actividad 1: Identificación de teselas (Fase 1)**

Esta actividad introductoria busca presentar a los alumnos las teselas. Se proyectarán en el aula una serie de fotografías, desde unas más sencillas hasta llegar a la obra de Escher.

Las fotografías serán las siguientes:





A lo largo de la proyección se plantean una serie de cuestiones:

- ¿Reconocéis algo del dibujo?
- ¿Alguien conoce el nombre de estos dibujos?
- ¿Os parece que sigue algún tipo de patrón?
- ¿Si tuvieseis que replicar el dibujo a pequeña escala, qué dibujaríais?
- ¿Conocéis algún dibujo similar? ¿Dónde?
- ¿Por qué creéis que vamos a ver estos contenidos en clase?
- ¿Cómo creéis que se forman?

Con esta última pregunta se presenta a los alumnos una representación en Geogebra de la configuración de una obra de Escher. Lo haremos desde este enlace de

<https://www.geogebra.org/m/dAqNKuXH>

Todas estas cuestiones son planteadas a la clase. A los alumnos se les explica previamente que la participación cuenta para la nota.

### **Contenidos:**

#### **Bloque 1.**

Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc  
Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.

### Bloque 3.

Traslaciones, giros y simetrías en el plano.

Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

#### **Criterios:**

### Bloque 1.

3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.

6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.

### Bloque 3.

4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.

5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros.

#### **E estándares de aprendizaje evaluables:**

### Bloque 1.

3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.

6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios.

### Bloque 3.

4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte.

5.3. Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas.

## **Actividad 2: Creación teselas y debate (Fase 2 y 3)**

Esta segunda actividad tiene dos fases y se realiza por grupos de 3 o 4 personas. La idea es muy sencilla, se facilita a los alumnos una serie de polígonos regulares (triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono y octógono) plastificados para que no se rompan y se les pide que traten de teselar con ellos un plano, dando total libertad a los grupos. Se proyectan una serie de preguntas en la pizarra. Los miembros de cada grupo deben ir debatiendo en torno a ellas y en la segunda fase de la actividad se realiza un “debate” o puesta en común de todos los grupos, guiados por el profesor. Durante la primera fase el profesor recorre el aula viendo el trabajo de los grupos y sus miembros.

Las preguntas serán las siguientes:

- ¿Se puede realizar una tesela en el plano usando únicamente polígonos del mismo tipo?
- ¿Si es posible, con cuáles? ¿Si no lo es, con cuáles sí y con cuáles no?
- ¿Por qué ocurre esto? Una pista, calcula la suma de los ángulos de cada polígono unidos en cada vértice
- ¿Conociendo esa suma, qué te llama la atención?
- Escoge una teselación, represéntala en un papel y describe brevemente algún movimiento.

### **Contenidos:**

#### Bloque 1.

Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc

Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.

#### Bloque 3.

Traslaciones, giros y simetrías en el plano.

### **Criterios:**

#### Bloque 1.

3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.

#### Bloque 3.

4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.

5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros.

#### **Estándares de aprendizaje evaluables:**

##### Bloque 1.

3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.

6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios.

8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada

##### Bloque 3.

4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte.

5.3. Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas.

#### **Actividad 3: Creación en Geogebra de una tesela (Fase 4)**

En este caso la actividad va a ser individual. La tarea consiste en realizar, fuera del horario escolar una tesela en Geogebra. Se da libertad total al alumnado para que puedan realizar la que ellos consideren. Evidentemente se valorará más aquellas que tengan una dificultad mayor.

Se utiliza Geogebra porque es una herramienta gratuita y en Internet existen cientos de vídeos y actividades realizadas, que los alumnos pueden consultar para realizar este trabajo.

#### **Contenidos:**

##### Bloque 1:

Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.

Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para:



c). facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.

### Bloque 3.

Traslaciones, giros y simetrías en el plano.

Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

### **Criterios:**

#### Bloque 1.

8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. 9.

Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.

10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.

11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.

#### Bloque3.

4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.

5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros.

### **E estándares de aprendizaje evaluables:**

#### Bloque 1.

8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada.

8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación.

8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso.

8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas.

9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de

matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.

10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares.

11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente

11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas

### Bloque 3.

4.2. Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario.

5.3. Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas

### **Actividad 4: Trabajo final sobre las actividades previas (Fase 5)**

Este trabajo final busca consolidar los conocimientos adquiridos durante esas sesiones y el trabajo autónomo en casa de la actividad 3. Para ello se les pide que realicen un pequeño informe sobre las teselas, en general, y sobre la que ellos han realizado en Geogebra, en particular.

Se les proporciona un esquema de la rúbrica de evaluación sobre la que el profesor se basará para calificar su trabajo sobre esta secuencia didáctica.

El esquema está dividido en aquellos aspectos que se consideran básicos, intermedios y avanzados. Sería el siguiente:

#### Básico:

- Detalla qué es una tesela con el rigor y lenguaje adecuado.
- Indica distintos tipos de teselas.
- Responde a las preguntas de la actividad 2 de forma correcta y con el lenguaje adecuado.
- Investiga y presenta al menos dos teselaciones existentes en la actualidad.
- Es el autor de la tesela que presenta en su informe.

#### Intermedio:

- Detalla la forma de construcción de su tesela de forma que cualquier compañero pueda realizarla.

- Indica cada uno de los giros y simetrías de su tesela, si los hay.
- Realiza una tesela usando el método de áreas compensadas.

Avanzado:

- Realiza una tesela basada en la obra de Escher.

**Contenidos:**

**Bloque 1.**

Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.

Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.

Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para:

e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos.

Bloque 3.

Traslaciones, giros y simetrías en el plano.

Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

**Criterios:**

Bloque 1.

5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.

8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. 9.

Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.

10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.

11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.

12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en

Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.

### Bloque 3.

4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.

5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros

### **Estándares de aprendizaje evaluables:**

#### Bloque 1.

5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico-probabilístico.

8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada.

8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación.

8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas.

9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.

10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares.

11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.

12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido,...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada, y los comparte para su discusión o difusión.

#### Bloque 3.

4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte.

4.2. Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario.

5.3. Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas.

## Temporalización

La idea es que las actividades uno y dos ocupen una sesión cada una. Aún así, cabe la posibilidad de ampliar la de la actividad 2 a dos sesiones, que en caso de ser demasiado tiempo podría aprovecharse para enseñar contenidos de Geogebra cara a la actividad 3, junto con recursos en los que apoyarse.

A pesar de dedicar esas sesiones en el aula el profesor debe estar disponible para resolver todas las posibles dudas planteadas por los alumnos durante el desarrollo de las actividades.

## Evaluación

Al respecto de la evaluación debemos tener en cuenta que los contenidos tratados dentro de esta secuencia didáctica no son muy amplios y por lo general, por falta de tiempo suelen ser obviados, por eso, más que realizar un examen sobre ellos, se va a pedir dos actividades entregables que, en principio, no suponen una carga muy grande de trabajo a los alumnos. En la última actividad de la secuencia didáctica se proporcionaba un guión a los alumnos de los contenidos requeridos en ese informe desglosando su importancia en tres niveles, que se corresponden a la importancia que les daremos dentro de la rúbrica creada para la evaluación de estos contenidos.

La rúbrica consistirá, como he señalado, en una serie de aspectos divididos entre básicos, intermedios y avanzados. De cada uno de ellos se obtendrá un determinado nivel de logro, que irá desde el 0 al 4, siendo, nada, insuficiente, suficiente, normal y bastante; respectivamente.

Para obtener un 5 se necesitará un 5 en los aspectos considerados como básicos. A partir de ahí, los dos puntos que siguen hasta el 7 dependen de la nota del 5 al 10 que se obtenga en los básicos. Entre el 7 y el 9 corresponde a los intermedios y entre el 9 y el 10 corresponde a los avanzados.

La rúbrica se presenta en el anexo 5.

Junto con esta rúbrica se proporcionará un pequeño formulario a los alumnos para que ellos valoren esta metodología de aprendizaje y poder buscar posibles mejoras cara al próximo año. Este formulario está añadido en el anexo 6.

Tras la evaluación y análisis de la experiencia se decidirá si volver a realizar la actividad en ulteriores ocasiones, junto con toda una serie de propuestas de mejora.

## CONCLUSIONES

Dentro de este trabajo hemos podido enfrentarnos a varios retos u objetivos. El primero de ellos era investigar sobre la obra de Escher tratando de conocer el fundamento matemático de la misma. Una vez conocida la parte matemática de algunas de sus obras, nos centramos en conocer el currículo, con intención de crear una serie de actividades en las que unos contenidos de este tuviesen cabida. Para ello, seleccionamos el curso de tercero de la ESO de matemáticas académicas porque encajaba a la perfección.

Otro de los objetivos que teníamos era reconocer la importancia de esos contenidos dentro de las matemáticas y criticar cómo en muchos institutos se decide obviar esto por falta de tiempo o cualquier otra cuestión.

Tras la creación de las cuatro actividades proponemos una sencilla rúbrica de evaluación porque a fin de cuentas tampoco evaluamos tantos estándares.

Es significativa la importancia que se da en estas actividades al componente tecnológico, el uso de Geogebra nos resulta esencial, y más aún para contenidos de geometría, que requieren de una capacidad de abstracción y de visión espacial que no todos los alumnos tienen. Por ello, se intenta que ellos se “molesten” en investigar, en manejar el programa y en “hacer matemáticas de una forma más lúdica y atractiva” (aunque este no es un objetivo en sí mismo). Muy ligado al uso de Geogebra está el trabajo de toda una serie de competencias clave que, como hemos detallado, es uno de los objetivos esenciales marcados en el currículo y que conseguimos abordar con esas actividades.

No tuve la oportunidad de poder trabajar con un grupo de tercero de la ESO durante el prácticum, pero comenté con mi tutora la idea de las actividades que tenía y me explicó que ella siempre que había podido explicar eso lo había hecho con la obra de Escher y creía que acercar así los contenidos era muy importante.

El objetivo principal de este trabajo era realizar una propuesta didáctica sobre unos contenidos, que como hemos comentado previamente, poco trabajados como son los movimientos en el plano. Para ello, hemos querido asociar las Matemáticas y el Arte, usando la obra de Escher, lo que nos permite ampliar la perspectiva de nuestros alumnos, afrontar el estudio de esos contenidos de una forma diferente y aplicar el método Van Hiele para nuestras actividades.

# BIBLIOGRAFÍA

Argilés, F. M. (2018). Del papel de la matemática a la matemática en papel. Maurits Cornelis Escher. Entorno Abierto, 20, 13-15.

Chavarria-Pallarco, N. A. (2020). Modelo Van Hiele y niveles de razonamiento geométrico de triángulos en estudiantes de Huancavelica. Investigación Valdizana, 14(2), 85-95.

de España, G. (2015). Competencias clave. Orden ECD/65/2015, de 21 de enero. Recuperado de: <https://www.educacionyfp.gob.es/educacion/mc/lomce/el-curriculo/curriculoprimeria-eso-bachillerato/competencias-clave/competencias-clave.html>

de España, G. (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, (3). Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Madrid.

Escher M.C, (2008). Estampas y dibujos. Introducción y comentarios de M.C. Escher. Ed. Taschen.

Ernst, B. (2022). El espejo mágico de Escher. Ed. Taschen.

Herrera, V. C., Montes, Y. E., Cruz, A. C., & Vargas, Á. R. (2010). Teselaciones: Una Propuesta para la Enseñanza y el Aprendizaje de la Geometría a Través del Arte.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En Llinares, S.; Sánchez, M. V. Teoría y Práctica de educación matemática, pp. 299 - 384. Recuperado de: <https://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf>

Quero, F. A. (2007). Escher y el arte imposible. Manual formativo de ACTA, (45), 61-74.

Silvestre, M. (2010). Generación de teselaciones periódicas: Grupos Cristalográficos. Madrid, España: Universidad Politécnica de Madrid.

Vargas, G. V., & Araya, R. G. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. Uniciencia, 27(1), 74-94.

## Otros recursos

Manuel Sada. Teselaciones Escher. Rescatado: <https://www.geogebra.org/m/dAqNKuXH>

# ANEXOS

## Anexo 1:



Fuente: Wikioo

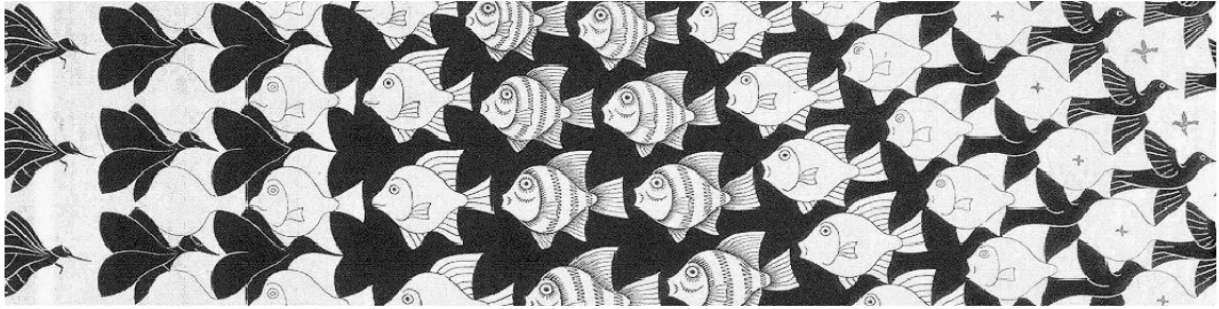
## Anexo 2:



Fuente: Área fractal. Rescatado: <http://areafactal.tierradenomadas.com/escher.html>



### Anexo 3: Metamorfosis



Fuente: Blog Sobre todo, matemáticas. Rescatado:  
<https://matemelga.wordpress.com/2016/05/05/metamorphosis/>

### Anexo 4:



Fuente: Academia Play. Rescatado: <https://academiaplay.es/artista-imposible-escher-20-sorprendentes-datos-20-impactantes-imagenes/>

## Anexo 5: Rúbrica de evaluación

Rúbrica Geometría	Nivel de logro			
	0-1-2-3-4			
<b>Básico:</b> Participa en las actividades de clase de forma activa Expone argumentos razonados sobre las cuestiones planteadas por el profesor Respeto a sus compañeros durante la actividad Detalla qué es una tesela con el rigor y lenguaje adecuado. Indica distintos tipos de teselas. Responde a las preguntas de la actividad 2 de forma correcta y con el lenguaje adecuado. Investiga y presenta al menos dos teselaciones existentes en la actualidad. Es el autor de la tesela que presenta en su informe. Realiza el informe y entrega el informe a tiempo				<b>Código de interpretación de niveles de logro</b>
				0 Nunca/Nada
				1 Alguna vez/Poco
				2 A menudo/Suficiente
				3 Casi siempre/Bastante
				4 Siempre/Mucho
<b>Intermedio:</b> Detalla la forma de construcción de su tesela de forma que cualquier compañero pueda realizarla. Indica cada uno de los giros y simetrías de su tesela, si los hay. Realiza una tesela usando el método de áreas compensadas. Usa un lenguaje adecuado (tanto la forma como el contenido)				
<b>Avanzado:</b> Realiza una tesela basada en la obra de Escher.				
				Un 2 de media en los básicos = 5
				Un 4 en todos los básicos = 7
				Un 4 en todos los básicos e intermedios = 9
				Un 4 en todos los indicadores = 10
	Calificación			

## Anexo 6: Formulario metodología

Este formulario se proporciona a los alumnos a través de un enlace, dando unos minutos en clase para que respondan.

Responde valorando del 0 al 4, siendo 0 nada y 4 mucho, a las siguientes preguntas sobre la metodología empleada para esta secuencia didáctica.

1. ¿Has trabajado durante estas sesiones?
2. ¿Cuando se discutía en grupo, participabas?
3. ¿Consideras que la actividad 1 fue valiosa para aprender?
4. ¿Consideras que la actividad 2 fue valiosa para aprender?
5. ¿Consideras que la actividad 3 fue valiosa para aprender?
6. ¿Consideras que la actividad 4 fue valiosa para aprender?
7. ¿Has aprendido más trabajando así los contenidos que durante una clase tradicional?
8. ¿Ves útil manejar Geogebra?
9. ¿La labor del profesor como guía ha sido suficiente?
10. Aporta cualquier tipo de sugerencia que ayude a mejorar