



# **TRABAJO FIN DE MÁSTER: MATEMÁTICAS Y MÚSICA**

## **Trabajo Fin de Máster**

### **Máster Universitario en Formación del Profesorado**

**Presentado por:**

**D. Guillermo Pérez Salvador**

**Tutor:**

**Dr. Carlos Hermoso Ortiz**

**Cotutor:**

**Alberto Lastra Sedano**

**Alcalá de Henares, a 6 de julio de 2020**



## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quisiera agradecer el apoyo de mi familia y amigos, especialmente la confianza de mis padres hacia mí.

También quisiera mencionar el gran esfuerzo realizado por mi tutor Carlos Hermoso Ortiz para que este proyecto saliese adelante.

## RESUMEN

Este proyecto de fin de máster consiste en elaborar un trabajo de investigación sobre la relación que hay entre la música y las matemáticas.

Además, toda la información que aparece en esta tesis va dirigida a los profesores de matemáticas o música para que éstos la puedan llevar a cabo en sus clases con el objetivo de que sus alumnos aprendan a relacionar conceptos de diferentes materias.

En este informe se recogen tres tipos de actividades: la primera consiste en introducir el concepto de la simetría musical; la segunda, que propone que los alumnos aprendan probabilidad a partir de un vals compuesto por Mozart y en la tercera se muestran los diferentes ritmos a partir del algoritmo de Euclides.

Palabras clave: matemáticas, música, alumnos, probabilidad, máximo común divisor, ritmo.

### ABSTRACT

This thesis consists of a research project on the relationship between music and maths.

Moreover, this thesis is aimed at Maths and Music teachers. The main objective is getting students to relate concepts which are common in both fields of knowledge.

This thesis displays three types of activities: the first one consists in introducing the concept of the “musical symmetry”. In the second unit students will see the relationship between probability and music with a waltz composed by Mozart. The last kind of activities shows the different rhythms in the Euclidian Algorithm.

Key Words: Maths, music, students, probability, highest common denominator, rythm.



## ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN .....	9
1.1. Estructura del proyecto .....	9
1.2. Objetivos .....	10
2. EL ESTUDIO .....	12
2.1. TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN LA MÚSICA .....	12
2.1.1. Contexto.....	12
2.1.2. Objetivos.....	12
2.1.3. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje .....	12
2.1.4. Materiales .....	14
2.1.5. Desarrollo .....	14
2.1.6. Temporalización .....	15
2.1.7. Evaluación .....	15
2.2. JUEGO DE DADOS DE MOZART.....	18
2.2.1. Contexto.....	18
2.2.2. Objetivos.....	18
2.2.3. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje .....	19
2.2.4. Materiales .....	21
2.2.5. Desarrollo .....	21
2.2.6. Temporalización .....	28
2.2.7. Evaluación .....	28
2.3. RITMOS EUCLIDIANOS.....	30
2.3.1. Contexto.....	30
2.3.2. Objetivos.....	30
2.3.3. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje .....	30
2.3.4. Materiales .....	31
2.3.5. Desarrollo .....	32
2.3.6. Temporalización .....	43
2.3.7. Evaluación .....	43
3. ANÁLISIS PEDAGÓGICO DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS .....	45
4. CONCLUSIONES .....	47
5. BIBLIOGRAFÍA.....	48
6. ANEXOS.....	53

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Contenido, Criterios de Evaluación y Estándares de aprendizaje del bloque 4 de matemáticas de 2º ESO.....	12
Tabla 2. Contenido, Criterios de Evaluación y Estándares de Aprendizaje del bloque 1 de música de 2º ESO..	13
Tabla 3. Contenido, Criterios de Evaluación y Estándares de Aprendizaje del bloque 5 de matemáticas de 2º ESO.....	19
Tabla 4. Contenidos, Criterios de Evaluación y Estándares de Aprendizaje del bloque 1 de música de 2º ESO.....	20
Tabla 5. Primera tabla del Juego de dados (Mozart). .....	21
Tabla 6. Segunda tabla del Juego de dados (Mozart)..	21
Tabla 7. Probabilidades y Combinaciones posibles de cada resultado de la suma de los dados.....	23
Tabla 8. Compases repetidos de la primera tabla del Juego de Dados (Mozart).....	24
Tabla 9. Compases repetidos de la segunda tabla del Juego de Dados (Mozart)..	25
Tabla 10. Compases más probables de la primera tabla del Juego de Dados (Mozart)..	26
Tabla 11. Compases más probables de la segunda tabla del Juego de Dados (Mozart)..	26
Tabla 12. Probabilidad real de obtener los compases más probables de la primera tabla del Juego de Dados (Mozart).....	26
Tabla 13. Probabilidad real de obtener los compases más probables de la primera tabla del Juego de Dados (Mozart).....	26
Tabla 14. Número de compases diferentes en la primera tabla del Juego de Dados (Mozart).....	27
Tabla 15. Número de compases diferentes en la segunda tabla del Juego de Dados (Mozart).....	27
Tabla 16. Contenidos, Criterios de Evaluación y Estándares de Aprendizaje del bloque 2 de matemáticas de 1º ESO.....	30
Tabla 17. Contenidos, Criterios de Evaluación y Estándares de Aprendizaje del bloque 1 de música de 2º Bachillerato.....	31
Tabla 18. Primera tabla del Juego de dados (Mozart)..	62
Tabla 19. Segunda tabla del Juego de dados (Mozart)..	62
Tabla 20. Combinaciones posibles por cada resultado de la suma de dos dados .....	63

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Sistema armónico básico.....	28
Figura 2. Representación del máximo común divisor (Euclides).....	32
Figura 3. Segmentos AB y CD. ....	33
Figura 4. División del segmento AB entre el segmento CD.. ....	34
Figura 5. División del segmento CD entre el segmento EF. ....	34
Figura 6. Máximo común divisor de los segmentos AB y CD.....	34
Figura 7. Representación de un pulso musical. ....	35
Figura 8. Representación de un ritmo musical. ....	35
Figura 9. Ejemplo del ritmo euclidiano E (12,4).....	36
Figura 10. Ritmo euclidiano E (12,8).....	36
Figura 11. Distribución de los pulsos y silencios en el ritmo euclidiano de E (12,5)... ..	37
Figura 12. Formación de grupos entre notas y silencios del ritmo euclidiano de E (12,5) .....	37
Figura 13. Representación del tresillo. ....	38
Figura 14. Representación de la Habanera. ....	39
Figura 15. Representación del Charleston.....	39
Figura 16. Representación del tresillo en el Reggaetón. ....	40
Figura 17. Representación del cinquillo.....	40
Figura 18. Representación del Fume-fume.....	41
Figura 19. Representación del Bembé/Gamamla. ....	41
Figura 20. Representación de la Bossa-Nova.....	41
Figura 21. Recta en el que hay una sucesión de píxeles.....	42
Figura 22. Partitura de Duel Of Fates.....	54
Figura 23. Partitura de Duel Of Fates (parte 2). ....	54
Figura 24. Partitura del Canon del Cangrejo. ....	55
Figura 25. Partitura del Duo de la Mesa.....	56
Figura 26. Análisis de la partitura del Juego de Dados de Mozart.....	57
Figura 27. Partitura del Juego de Dados.....	61



## 1. INTRODUCCIÓN

En el sistema educativo actual existe una falta de comprensión por parte del alumnado a la hora de relacionar conceptos muy similares impartidos en diferentes asignaturas.

El presente Trabajo Fin de Máster desarrolla los diferentes conceptos matemáticos que tienen relación con la música con el propósito de motivar al alumnado de secundaria.

Asimismo, la idea es que todas las actividades que se van a mencionar en este informe se puedan poner en práctica el día 22 de noviembre, ya que es el "Día Internacional de la Música". Para ello, se realizarían en colaboración con el Departamento de Música.

El "Día Internacional de la Música" está dedicado a todos los músicos y a todas las personas que disfrutan de la música independientemente del estilo musical (diainternacionalde, 2020). Se celebra el día 22 de noviembre debido a la conmemoración de la muerte de Santa Cecilia, patrona de los músicos. El propósito principal de este día es promover la música como forma de unir a todas las naciones, ya que es un arte universal que traspasa barreras (wincalendar, 2020). Esto último lo queremos transmitir a los alumnos con la ayuda de las actividades que se mencionan en este informe.

### 1.1. Estructura del proyecto

El proyecto consiste en mostrar de manera efectiva las profundas interrelaciones entre los conceptos de Música y Matemáticas. Para ello, se proponen tres tipos de actividades que, además de manifestar esta interdisciplinariedad, pueden servir como apoyo de la práctica docente, tanto para alumnos como para profesores:

El primer tipo de actividad consiste en introducir el significado de "simetría musical" a los alumnos de 2º ESO relacionándolo con el contenido de las funciones en Matemáticas.

En el segundo tipo se analizan los conceptos de probabilidad que utilizó Mozart para componer su obra "Musikalisches Würfelspiel" (también llamado "El juego de dados

de Mozart). Además, los alumnos de 2º ESO deberán componer una canción de manera aleatoria siguiendo una tabla que se mencionará en el apartado 2.2.5.

La última práctica va dirigida a los alumnos de 2º Bachillerato y consiste en aplicar el algoritmo de Euclides, que permite calcular el máximo común divisor (M.C.D) de dos números enteros, para generar ritmos homogéneos (Gómez, s.f.). Asimismo, se estudiará la evolución de estilos musicales en relación con el ritmo musical.

Finalmente, se hará una conclusión y reflexión sobre este proyecto.

## **1.2. Objetivos**

Los objetivos principales de este proyecto son:

- Motivar a los estudiantes de secundaria.
- Analizar la “simetría musical” en algunas composiciones.
- Aplicar conceptos de la probabilidad para componer un vals en relación al “Juego de Dados” de Mozart.
- Análisis del ritmo de canciones en diferentes contextos musicales.



## 2. EL ESTUDIO

### 2.1. TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN LA MÚSICA

#### 2.1.1. Contexto

Este tipo de actividad va dirigido a los alumnos de 2º ESO, ya que según el Decreto 48/2015, de 14 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, los contenidos de 2º ESO contemplan conceptos básicos de funciones (en matemáticas) y de la interpretación musical (en música) (Consejería de Educación, Juventud y Deporte, 2015).

#### 2.1.2. Objetivos

El objetivo principal es que los alumnos aprendan a relacionar los conceptos básicos de funciones con la representación gráfica de las notas en un pentagrama.

#### 2.1.3. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje

Bloque 4. Funciones (2º ESO)		
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
1. El concepto de función: variable dependiente e independiente	1. Manejar las distintas formas de presentar una función lineal: lenguaje habitual, tabla numérica, gráfica y ecuación, pasando de unas formas a otras y eligiendo la mejor de ellas en función del contexto.	1.1. Pasa de unas formas de representación de una función a otras y elige la más adecuada en función del contexto.
Crecimiento y decrecimiento	2. Comprender el concepto de función. Reconocer, interpretar y analizar las gráficas funcionales	2.1. Reconoce si una gráfica representa o no una gráfica
Máximos y mínimos relativos		2.2. Interpreta una gráfica y la analiza, reconociendo sus propiedades más características
Análisis y comparación de gráficas		

Tabla 1. Contenido, Criterios de Evaluación y Estándares de aprendizaje del bloque 4 de matemáticas de 2º ESO. Fuente: (Consejería de Educación, Juventud y Deporte, 2015)

<b>Bloque 1. Interpretación y creación (2º ESO)</b>		
<b>Contenidos</b>	<b>Criterios de evaluación</b>	<b>Estándares de aprendizaje</b>
1. El sonido, los parámetros del sonido y su representación gráfica	1. Reconocer los parámetros del sonido y los elementos básicos del lenguaje musical, utilizando un lenguaje técnico apropiado y aplicándolos a través de la lectura o la audición de pequeñas obras o fragmentos musicales.	1.1. Reconoce los parámetros del sonido y los elementos básicos del lenguaje musical, utilizando un lenguaje técnico apropiado.
		1.2. Reconoce y aplica los ritmos y compases a través de la lectura o la audición de pequeñas obras o fragmentos musicales.
2. Profundización en el conocimiento del lenguaje musical y en su práctica	2. Distinguir y utilizar los elementos de la representación gráfica de la música (colocación de las notas en el pentagrama; duración de las figuras; signos que afectan a la intensidad y matices; indicaciones rítmicas y de tempo, etc.)	1.3. Identifica y transcribe dictados de patrones rítmicos y melódicos con formulaciones sencillas en estructuras binarias, ternarias y cuaternarias.
		2.1. Distingue y emplea los elementos que se utilizan en la representación gráfica de la música (colocación de las notas en el pentagrama; duración de las figuras; signos que afectan a la intensidad y matices; indicaciones rítmicas y de tempo, etc.)
3. Lectura y escritura musical como apoyo para la interpretación y la creación.	3. Improvisar e interpretar estructuras musicales elementales construidas sobre los modos y las escalas más sencillas y los ritmos más comunes.	3.1. Improvisa e interpreta estructuras musicales elementales construidas sobre los modos y las escalas más sencillas y los ritmos más comunes.
4. La voz, la palabra, los instrumentos y el cuerpo como medios de expresión musical: características y habilidades técnicas e interpretativas.		3.2. Utiliza los elementos y recursos adquiridos para elaborar arreglos y crear canciones, piezas instrumentales y coreografías.
5. Interpretación de un repertorio de piezas vocales, instrumentales y de danzas de diferentes géneros, estilos y culturas.	4. Analizar y comprender el concepto de textura y reconocer, a través de la audición y la lectura de partituras, los diferentes tipos de textura	4.1. Reconoce, comprende y analiza diferentes tipos de textura.
6. La interpretación individual y en grupo: pautas básicas de la interpretación.	5. Explorar las posibilidades de distintas fuentes y objetos sonoros.	5.1. Muestra interés por los paisajes sonoros que nos rodean y reflexiona sobre los mismos
		5.2. Investiga e indaga de forma creativa las posibilidades sonoras y musicales de los objetos.

Tabla 2. Contenido, Criterios de Evaluación y Estándares de Aprendizaje del bloque 1 de música de 2º ESO. Fuente: (Consejería de Educación, Juventud y Deporte, 2015).

#### 2.1.4. Materiales

Bolígrafos, papel, hoja de ejercicios, ordenador, internet y piano (opcional).

#### 2.1.5. Desarrollo

Antes de empezar la clase, el profesor entrega una hoja de ejercicios para que los alumnos la vayan haciendo (anexo 1). Éste explica que existe una similitud entre las funciones y la música (en un pentagrama el eje “x” representa el tiempo y el eje “y” el tono). En esta disciplina es muy habitual las “transformaciones geométricas” como la simetría musical. El docente deberá explicar el análisis de estas tres composiciones que se mencionan a continuación:

En el primer caso, una línea melódica puede seguir una función simétrica respecto a una nota (puede ser un mínimo o máximo relativo). Por ejemplo: Se observa que en la primera línea melódica de “Duel Of Fates” de la banda sonora de Star Wars (Williams, 2016) que aparece en el anexo 2 hay una nota más grave (un mínimo) y que es totalmente simétrica (asciende de un “Mi” hasta un “La”, luego hay un mínimo que es un “Si” y finalmente desciende de un “La” hasta un “Mi”). Ocurre lo mismo en los dos últimos compases que aparecen en el anexo 2, aunque en este caso asciende de un “Re sostenido” a un “Sol”, después hay un mínimo que es un “Si” y finalmente desciende de un “Sol” a un “Re sostenido”. ¿Qué significado tiene la simetría en esta canción?

Cuando una melodía asciende tiene un significado positivo, mientras que cuando desciende la melodía tiene una connotación negativa, o, dicho de otra manera, la melodía ascendente representa la “luz”, mientras que la melodía descendente representa la “oscuridad”. Es decir, existe un equilibrio entre el “bien” y el “mal” (Altozano, 2017). En la mayoría de las bandas sonoras tiene como función principal la “narración” de los acontecimientos que vemos en la pantalla (como se observa en el análisis de “Duel of Fates”).

También existen otras canciones que utilizan una simetría musical como es el caso del “Canon del Cangrejo” de J. S. Bach (anexo 3) en la que la línea melódica del pentagrama de arriba es igual que en el pentagrama de abajo, pero en sentido inverso (marcha atrás) (Cultura Inquieta, 2017) como se observa en el anexo 3. Al ser un canon, las melodías se van incorporando sucesivamente. Además, da igual si se toca desde el principio o desde atrás hacia delante (Muzás, s.f.).

Un dueto que compuso Mozart llamado “Dúo de la Mesa” (anexo 4) consiste en que un violinista toca la partitura de izquierda a derecha, mientras que el otro violinista reproduce las notas escritas girando  $180^\circ$  la partitura original. Esto se denomina música palíndroma (Curistoria, 2015) . ¿Cuál es la clave de que suene bien esta obra?

Observando en el anexo 4, se ha distinguido entre tres tipos de intervalo de notas (Vlashi & Cruz Araújo, 2018):

- Las notas en azul representan una monotonía (misma nota, aunque haya casos que sea en diferente octava).
- Las notas en verde representan los intervalos de tercera (armónicamente suenan bien, ya que forman como complemento al acorde o escala que se está tocando en ese momento).
- Las notas en dorado representan los intervalos de sexta (suenan armónicamente bien al igual que los intervalos de tercera).
- Las notas en rojo representan las otras notas para complementar la melodía principal.

Por lo tanto, analizando esta composición se observa que mayoritariamente hay notas azules y notas verdes. Esto quiere decir que esta obra es “casi simétrica”.

#### **2.1.6. Temporalización**

Se van a necesitar dos sesiones (cada clase equivale a 50 minutos) para llevar a cabo este bloque.

En la primera sesión, el profesor de Matemáticas explica las nociones básicas de las funciones (crecimiento, máximos y mínimos, simetría...) y la relación que tiene con la música, poniendo como ejemplo “Duel Of Fates” de la banda sonora de Star Wars, en su clase de 2º ESO.

En la segunda sesión el profesor de Música les explica la simetría musical que aparece en el “Canon del Cangrejo” y la música palíndroma relacionándolo con lo que han aprendido en la clase anterior de Matemáticas.

#### **2.1.7. Evaluación**

Cada estudiante tendrá que entregar la hoja de ejercicios que viene recogida en el anexo 1.

El profesor de Matemáticas evaluará el primer ejercicio de la ficha con una calificación del 1 al 10. En este primer ejercicio hay varios apartados por los que se evalúan varios estándares de aprendizaje del bloque de funciones de 2º ESO.

El profesor de Música evalúa los otros dos ejercicios, que están ligados a varios estándares, con una calificación del 1 al 10.



## **2.2. JUEGO DE DADOS DE MOZART**

### **2.2.1. Contexto**

Este tipo de actividad va dirigido a los alumnos de 2º ESO, ya que según el Decreto 48/2015, de 14 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, los contenidos de 2º ESO contemplan conceptos básicos de la probabilidad (en matemáticas) y de la composición musical (en música) (Consejería de Educación, Juventud y Deporte, 2015).

### **2.2.2. Objetivos**

El objetivo principal es que los alumnos puedan componer un vals con la ayuda de dos dados y relacionen conceptos de probabilidad con el vals” El Juego de Dados de Mozart” (anexo 5).

La idea, es que los alumnos hagan un análisis matemático de este vals aplicando conocimientos probabilísticos (Rodríguez García, Rocha Salamanca, & Carolina Mora, 2013).

### 2.2.3. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje

Bloque 5. Probabilidad (2º ESO)		
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
Fenómenos deterministas y aleatorios	3. Diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios, valorando la posibilidad que ofrecen las matemáticas para analizar y hacer predicciones razonables acerca del comportamiento de los aleatorios a partir de las regularidades obtenidas al repetir un número significativo de veces la experiencia aleatoria, o el cálculo de su probabilidad.	3.1. Identifica los experimentos aleatorios y los distingue de los deterministas.
Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación		3.2. Calcula la frecuencia relativa de un suceso mediante la experimentación.
Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables		3.3. Realiza predicciones sobre un fenómeno aleatorio a partir del cálculo exacto de su probabilidad o la aproximación de la misma mediante la experimentación.
Espacio muestral en experimentos sencillos	4. Inducir la noción de probabilidad a partir del concepto de frecuencia relativa y como medida de incertidumbre asociada a los fenómenos aleatorios, sea o no posible la experimentación.	4.1. Describe experimentos aleatorios sencillos y enumera todos los resultados posibles, apoyándose en tablas, recuentos o diagramas en árbol sencillos.
Tablas y diagramas de árbol sencillos		4.2. Distingue entre sucesos elementales equiprobables y no equiprobables.
Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos		4.3. Calcula la probabilidad de sucesos asociados a experimentos sencillos mediante la regla de Laplace

Tabla 3. Contenido, Criterios de Evaluación y Estándares de Aprendizaje del bloque 5 de matemáticas de 2º ESO. Fuente: (Consejería de Educación, Juventud y Deporte, 2015).

<b>Bloque 1. Interpretación y creación (2º ESO)</b>		
<b>Contenidos</b>	<b>Criterios de evaluación</b>	<b>Estándares de aprendizaje</b>
1. El sonido, los parámetros del sonido y su representación gráfica	1. Reconocer los parámetros del sonido y los elementos básicos del lenguaje musical, utilizando un lenguaje técnico apropiado y aplicándolos a través de la lectura o la audición de pequeñas obras o fragmentos musicales.	1.1. Reconoce los parámetros del sonido y los elementos básicos del lenguaje musical, utilizando un lenguaje técnico apropiado.
		1.2. Reconoce y aplica los ritmos y compases a través de la lectura o la audición de pequeñas obras o fragmentos musicales.
2. Profundización en el conocimiento del lenguaje musical y en su práctica	2. Distinguir y utilizar los elementos de la representación gráfica de la música (colocación de las notas en el pentagrama; duración de las figuras; signos que afectan a la intensidad y matices; indicaciones rítmicas y de tempo, etc.)	2.1. Distingue y emplea los elementos que se utilizan en la representación gráfica de la música (colocación de las notas en el pentagrama; duración de las figuras; signos que afectan a la intensidad y matices; indicaciones rítmicas y de tempo, etc.)
3. Lectura y escritura musical como apoyo para la interpretación y la creación.		3.1. Improvisa e interpreta estructuras musicales elementales construidas sobre los modos y las escalas más sencillas y los ritmos más comunes.
4. La voz, la palabra, los instrumentos y el cuerpo como medios de expresión musical: características y habilidades técnicas e interpretativas.	3. Improvisar e interpretar estructuras musicales elementales construidas sobre los modos y las escalas más sencillas y los ritmos más comunes.	3.2. Utiliza los elementos y recursos adquiridos para elaborar arreglos y crear canciones, piezas instrumentales y coreografías.
5. Interpretación de un repertorio de piezas vocales, instrumentales y de danzas de diferentes géneros, estilos y culturas.		4.1. Reconoce, comprende y analiza diferentes tipos de textura.
6. La interpretación individual y en grupo: pautas básicas de la interpretación.	4. Analizar y comprender el concepto de textura y reconocer, a través de la audición y la lectura de partituras, los diferentes tipos de textura	5.1. Comprende e identifica los conceptos y términos básicos relacionados con los procedimientos compositivos y los tipos formales.
	5. Conocer los principios básicos de los procedimientos compositivos y las formas de organización musical.	6.1. Realiza improvisaciones y composiciones partiendo de pautas previamente establecidas.
7. Improvisación vocal, instrumental y corporal: individual y en grupo, libre y dirigida	6. Demostrar interés por las actividades de composición e improvisación y mostrar respeto por las creaciones de sus compañeros.	6.2. Demuestra una actitud de superación y mejora de sus posibilidades y respeta las distintas capacidades y formas de expresión de sus compañeros.

Tabla 4. Contenidos, Criterios de Evaluación y Estándares de Aprendizaje del bloque 1 de música de 2º ESO. Fuente: (Consejería de Educación, Juventud y Deporte, 2015)

### 2.2.4. Materiales

Bolígrafo, papel, dados, tablas del juego de los dados, ordenador, simulación del juego de dados e instrumentos en el aula de música (opcional).

### 2.2.5. Desarrollo

El Juego de Dados de Mozart (“Musikalisches Würfelspiel”) es una composición musical de Wolfgang Amadeus Mozart (1756-1791) que consiste en lo siguiente:

Mozart compuso 176 compases y los separó en dos tablas de 88 compases diferentes (anexo 6): en cada fila se señala la suma del lanzamiento de los dos dados (del 2 al 12, ya que cada dado tiene 6 caras) y en cada columna se le asocia el número de tiradas (16 en total) (Rodríguez García, Rocha Salamanca, & Carolina Mora, 2013).

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
<b>2</b>	96	22	141	41	105	122	11	30
<b>3</b>	32	6	128	63	146	46	134	81
<b>4</b>	69	95	158	13	153	55	110	24
<b>5</b>	40	17	113	85	161	2	159	100
<b>6</b>	148	74	163	45	80	97	36	107
<b>7</b>	104	157	27	167	154	68	118	91
<b>8</b>	152	60	171	53	99	133	21	127
<b>9</b>	119	84	114	50	140	86	169	94
<b>10</b>	98	142	42	156	75	129	62	123
<b>11</b>	3	87	165	61	135	47	147	33
<b>12</b>	54	130	10	103	28	37	106	5

Tabla 5. Primera tabla del Juego de dados (Mozart). Fuente: (Rodríguez García, Rocha Salamanca, & Carolina Mora, 2013).

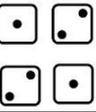
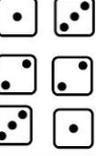
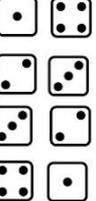
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
<b>2</b>	70	121	26	9	112	49	109	14
<b>3</b>	117	39	126	56	174	18	116	83
<b>4</b>	66	139	15	132	73	58	145	79
<b>5</b>	90	176	7	34	67	160	52	170
<b>6</b>	25	143	64	125	76	136	1	93
<b>7</b>	138	71	150	29	101	162	23	151
<b>8</b>	16	155	57	175	43	168	89	172
<b>9</b>	120	88	48	166	51	115	72	111
<b>10</b>	65	77	19	82	137	38	149	8
<b>11</b>	102	4	31	164	144	59	173	78
<b>12</b>	35	20	108	92	12	124	44	131

Tabla 6. Segunda tabla del Juego de dados (Mozart). Fuente: (Rodríguez García, Rocha Salamanca, & Carolina Mora, 2013).

Los alumnos tienen que lanzar dos dados y anotar el compás que determina el resultado de dicha suma por cada lanzamiento en la tabla. Por ejemplo: si en el primer lanzamiento aparece en un dado un 2 y en el otro un 4, entonces el compás correspondiente sería el 148. Si en la siguiente tirada aparecen un 1 y un 3, el compás que tienen que tocar es el 95, etc..

En esta actividad se puede trabajar una gran variedad de conceptos relacionados con la probabilidad: el espacio muestral (conjunto de todos los resultados posibles de un experimento) y distribución de probabilidad.

Después se les pregunta la probabilidad que hay en cada posible resultado de la suma de la puntuación de los dos dados (anexo 7).

<b>Espacio muestral (resultado de la suma de los dados)</b>	<b>Combinaciones</b>	<b>Probabilidad</b>
2		1/36
3		2/36
4		3/36
5		4/36
6		5/36

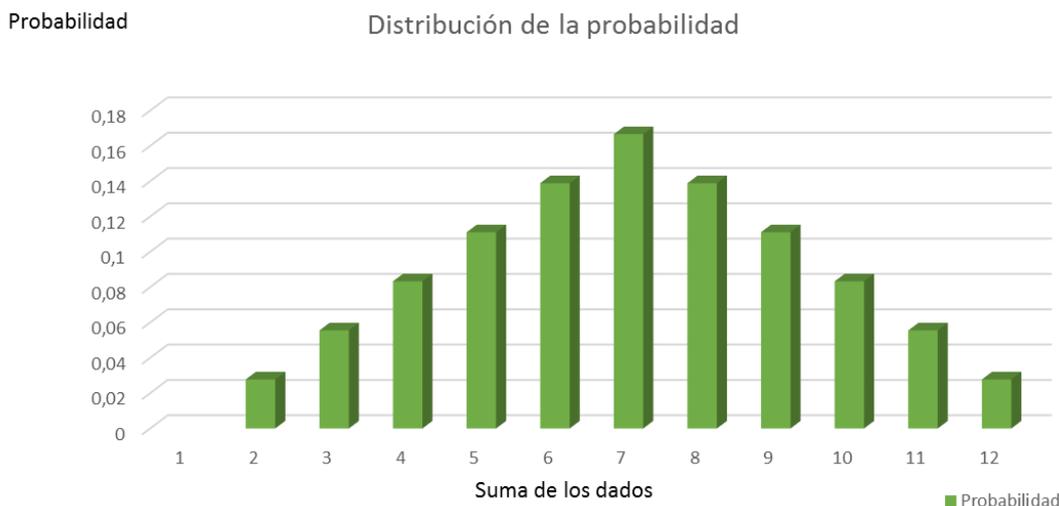
7		6/36
8		5/36
9		4/36
10		3/36
11		2/36
12		1/36

Tabla 7. Probabilidades y Combinaciones posibles de cada resultado de la suma de los dados. Fuente: Elaboración propia.

Esta tabla representa la probabilidad de cada elemento muestral teniendo en cuenta el número de combinaciones posibles. Para hallar la probabilidad de cada lanzamiento, los estudiantes tienen que emplear la regla de Laplace que consiste en dividir el número de casos favorables entre el número de casos posibles.

Éstos se darán cuenta que la probabilidad no es siempre la misma, sino que en cada resultado hay una probabilidad diferente.

Es decir, los alumnos se percatarán que hay una mayor posibilidad de que la suma de los dos dados sea 7 si lo comparan con el resto de opciones. En la gráfica que viene a continuación se observa la distribución de la probabilidad:



Gráfica 1. Distribución de la probabilidad. Fuente: Elaboración propia.

Después el profesor pregunta a sus alumnos que observen si hay algún compás que se repita. El resultado es el siguiente (Camarero Linares, Martín Viscasillas, & Mínguez Monedero, 2014):

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

Tabla 8. Compases repetidos de la primera tabla del Juego de Dados (Mozart). Fuente: (Camarero Linares, Martín Viscasillas, & Mínguez Monedero, 2014).

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Tabla 9. Compases repetidos de la segunda tabla del Juego de Dados (Mozart). Fuente: (Camarero Linares, Martín Viscasillas, & Mínguez Monedero, 2014).

Hay que distinguir entre dos tipos de repeticiones de compases (Camarero Linares, Martín Viscasillas, & Mínguez Monedero, 2014):

- 1) Aquellos compases que se repiten con la misma puntuación del dado. Por ejemplo: si los alumnos sacan un 2 (en un dado aparece un 1 y en el otro también es un 1) en los compases que aparecen en la primera, segunda, quinta y sexta tirada, se percatarán de que éstos tienen la misma melodía (pentagrama en clave de sol), aunque la armonía sea un poco diferente (pentagrama en clave de fa) lo importante es que se encuentran en la misma escala (anexo 5).
- 2) Los compases que se repiten independientemente de la puntuación del dado. Este hecho ocurre solamente en el octavo y en el último lanzamiento (excepto en el compás 78).

El profesor les pregunta lo siguiente:

- a) ¿Cuál es la composición más probable? ¿Cuál es la probabilidad teórica (sin tener en cuenta la repetición de compases)? ¿Cuál es la probabilidad teniendo en cuenta la repetición de compases?
- b) El número de compases que realmente tiene esta obra.
- c) ¿Cuántos minuetos se pueden componer en total teniendo en cuenta la repetición de compases? Si cada compás dura 30 segundos aproximadamente, ¿cuánto tiempo necesitaríamos para tocar todas las composiciones?
- d) Tira los dados y anota la puntuación en cada lanzamiento. ¿Cuál es la probabilidad de tu composición?

Éstos tienen que completar una tabla en la que deben indicar la probabilidad más común en cada tirada para hacer el apartado a (anexo 7):

1º Tabla	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
<b>Resultado más probable en los dados</b>	7	7	7	7	7	7	7	7
<b>Compás más probable</b>	104	157	27	167	154	68	118	91
<b>Probabilidad</b>	6/36	6/36	6/36	6/36	6/36	6/36	6/36	6/36

Tabla 10. Compases más probables de la primera tabla del Juego de Dados (Mozart).

Fuente: (Camarero Linares, Martín Viscasillas, & Mínguez Monedero, 2014).

2º Tabla	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
<b>Resultado más probable en los dados</b>	7	7	7	7	7	7	7	7
<b>Compás más probable</b>	138	71	150	29	101	162	23	151
<b>Probabilidad</b>	6/36	6/36	6/36	6/36	6/36	6/36	6/36	6/36

Tabla 11. Compases más probables de la segunda tabla del Juego de Dados (Mozart).

Fuente: (Camarero Linares, Martín Viscasillas, & Mínguez Monedero, 2014).

La probabilidad teórica de obtener esta composición es de:  $(\frac{6}{36})^{16}$

1º Tabla	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
<b>Resultado más probable en los dados</b>	7	7	7	7	7	7	7	7
<b>Compás más probable</b>	104	157	27	167	154	68	118	91
<b>Probabilidad</b>	6/36	6/36	6/36	6/36	6/36	6/36	6/36	1

Tabla 12. Probabilidad real de obtener los compases más probables de la primera tabla del Juego de Dados (Mozart). Fuente: (Camarero Linares, Martín Viscasillas, & Mínguez Monedero, 2014).

2º Tabla	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
<b>Resultado más probable en los dados</b>	7	7	7	7	7	7	7	7
<b>Compás más probable</b>	138	71	150	29	101	162	23	151
<b>Probabilidad</b>	6/36	6/36	6/36	6/36	6/36	6/36	6/36	34/36

Tabla 13. Probabilidad real de obtener los compases más probables de la primera tabla del Juego de Dados (Mozart). Fuente: (Camarero Linares, Martín Viscasillas, & Mínguez Monedero, 2014).

Si tenemos en cuenta la repetición de los compases, la probabilidad de obtener esta composición es de:  $(\frac{6}{36})^{14} \cdot 1 \cdot (\frac{34}{36})$

Para saber el número de combinaciones posibles para componer un minueto utilizando el “Juego de Dados” de Mozart (apartado c) se elabora una tabla que indique el número de compases diferentes que hay en cada lanzamiento:

<b>Tabla 1</b>	<b>I</b>	<b>II</b>	<b>III</b>	<b>IV</b>	<b>V</b>	<b>VI</b>	<b>VII</b>	<b>VIII</b>
<b>Nº compases diferentes</b>	11	11	11	11	11	11	11	1

Tabla 14. Número de compases diferentes en la primera tabla del Juego de Dados (Mozart). Fuente: (Camarero Linares, Martín Viscasillas, & Mínguez Monedero, 2014).

<b>Tabla 2</b>	<b>I</b>	<b>II</b>	<b>III</b>	<b>IV</b>	<b>V</b>	<b>VI</b>	<b>VII</b>	<b>VIII</b>
<b>Nº compases diferentes</b>	11	11	11	11	11	11	11	2

Tabla 15. Número de compases diferentes en la segunda tabla del Juego de Dados (Mozart). Fuente: (Camarero Linares, Martín Viscasillas, & Mínguez Monedero, 2014).

Si multiplicamos en número de compases distintos por cada lanzamiento, hallamos el número de combinaciones que se puede componer:  $11^{14} \cdot 1 \cdot 2 = 7,59 \cdot 10^{14}$  composiciones distintas.

Si cada pieza dura aproximadamente 30 segundos, entonces se necesitarían:  $7,59 \cdot 10^{14} \cdot 30 = 2,28 \cdot 10^{16}$  segundos = 722 millones de años para tocar todas las composiciones posibles.

Finalmente, el profesor de música les explica el algoritmo armónico que ha empleado Mozart para componer esta obra, que consiste en la combinación de escalas del primer grado (tónica), el quinto grado (dominante) y el cuarto grado (subdominante) que en una escala de Do Mayor corresponderían al Do, al Sol y al Fa.

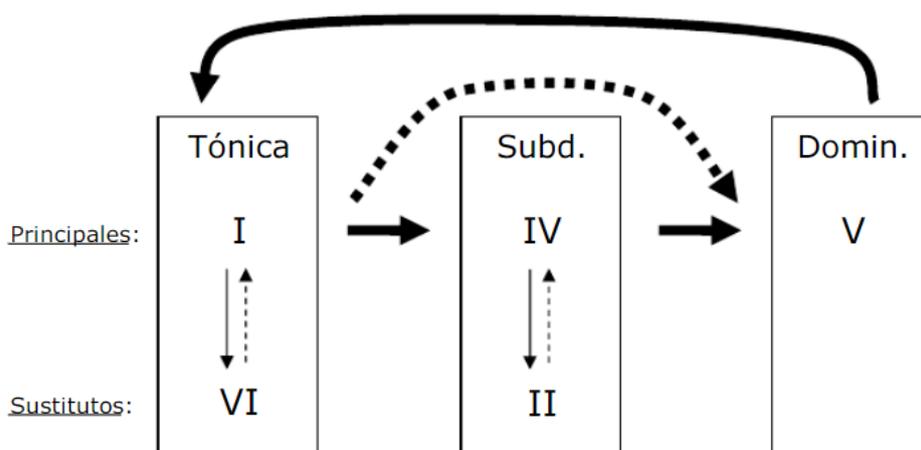


Figura 1. Sistema armónico básico. Fuente: (Robles).

### 2.2.6. Temporalización

Se requieren dos sesiones (cada clase equivale a 50 minutos) para llevar a cabo esta actividad.

En la primera sesión, el profesor de Matemáticas les explica los conceptos básicos de probabilidad y después les comenta la aplicación de la probabilidad en composiciones como el “Juego de Dados” de Mozart.

En la segunda sesión los alumnos analizan los compases que hay en este vals con ayuda del profesor de Música.

### 2.2.7. Evaluación

Cada estudiante tendrá que entregar la hoja de ejercicios del anexo 7.

El profesor de Matemáticas evaluará los dos primeros ejercicios de la ficha con una calificación del 1 al 10. En estos dos ejercicios se evalúan los estándares de aprendizaje del bloque de probabilidad de 2º ESO que aparecen en el apartado 2.2.3.

El profesor de Música evalúa los otros dos ejercicios relacionados con los estándares mencionados en el capítulo 2.2.3.



## 2.3.RITMOS EUCLIDIANOS

### 2.3.1. Contexto

Este tipo de actividad va dirigido a los estudiantes de 2º Bachillerato, ya que, aunque aparezcan conceptos de matemáticas que los alumnos han estudiado en cursos anteriores (como el máximo común divisor), un requisito imprescindible para llevar a cabo esta actividad es que los alumnos tengan desarrollado un oído musical para identificar diferentes ritmos musicales (Consejería de Educación, Juventud y Deporte, 2015).

### 2.3.2. Objetivos

- Distinguir diferentes ritmos en distintos contextos musicales.
- Relacionar el M.C.D con el ritmo.
- Diferenciar los distintos tipos de ritmos euclidianos.
- Conocer el algoritmo de Euclides para hallar el M.C.D.
- Análisis de la evolución rítmica del tresillo.

### 2.3.3. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje

Bloque 2. Números y álgebra (1º ESO)			
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje	
Divisibilidad de los números naturales	2. Conocer y utilizar propiedades y nuevos significados de los números en contextos de paridad, divisibilidad y operaciones elementales, mejorando así la comprensión del concepto y de los tipos de números.	2.1. Reconoce nuevos significados y propiedades de los números en contextos de resolución de problemas sobre paridad, divisibilidad y operaciones elementales	
Criterios de divisibilidad		2.2. Aplica los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9 y 11 para descomponer en factores primos	
Descomposición de un número en factores primos			2.3. Identifica y calcula el máximo común divisor de dos o más números naturales mediante el algoritmo adecuado y lo aplica problemas contextualizados
Divisores comunes a varios números			
El máximo común divisor de dos o más números naturales			

Tabla 16. Contenidos, Criterios de Evaluación y Estándares de Aprendizaje del bloque 2 de matemáticas de 1º ESO. Fuente: (Consejería de Educación, Juventud y Deporte, 2015).

<b>Bloque 1. Percepción, análisis y documentación (2º bachillerato)</b>		
<b>Contenidos</b>	<b>Criterios de evaluación</b>	<b>Estándares de aprendizaje</b>
1. Escucha y visionado de obras de música y de danza representativas. Características estéticas y estilísticas	1. Expresar juicios personales mediante un análisis estético o un comentario crítico a partir de la audición o visionado de una obra determinada, considerando aspectos técnicos, expresivos e interpretativos, utilizando los conocimientos adquiridos y la terminología apropiada.	1.1. Realiza desde una perspectiva personal una valoración estética y crítica de una obra concreta, o de una interpretación de la misma.
		1.2. Domina el vocabulario y la terminología científica aplicados a la música y a la danza.
2. La obra artística en su contexto histórico. Función social de la música y de la danza y de los artistas en las diferentes épocas.	2. Situar cronológicamente una obra, tras su escucha o visionado, o comparar obras de similares características, representativas de los principales estilos o escuelas, señalando semejanzas y diferencias entre ellas.	2.1. Identifica y sitúa cronológicamente los diferentes periodos de la historia de la música y de la danza.
		2.2. Contextualiza la obra en su momento histórico y/o estilístico
3. Elaboración de argumentaciones y juicios personales, utilizando el léxico y la terminología específica, sobre obras y textos relacionados con la música o la danza, con las corrientes estéticas o con los autores.	3. Identificar las circunstancias culturales o sociológicas que puedan incidir en el desarrollo evolutivo de las distintas épocas, estilos o autores más representativos de la historia de la música y de la danza.	3.1. Comprende y explica la complejidad del fenómeno artístico extrayendo conclusiones propias en base a los conocimientos adquiridos en la materia.
		3.2. Entiende y explica la función de las obras, la influencia en la sociedad y en otras disciplinas artísticas en el momento de su creación.
4. Elaboración de valoraciones estéticas propias sobre autores y obras, interrelacionando la música y la danza con su contexto y utilizando la información procedente de diversas fuentes, incluidas las tecnológicas.	4. Explicar, a partir de un ejemplo propuesto, a través de un análisis o comentario, la utilización de la música y de la danza como soporte de un texto literario o como medio de intensificación dramática en óperas, ballet, cine o teatro.	3.3. Comprende y describe el proceso creativo de músicos y coreógrafos.
		4.1. Comprende y explica el papel de la música y de la danza y la manera en que se relaciona con otras artes para configurar junto a ellas una obra artística total.
		4.2. Explica la utilización que se ha hecho de la música en una situación concreta.
		4.3. Selecciona piezas musicales para sonorizar o ambientar situaciones artísticas concretas.

Tabla 17. Contenidos, Criterios de Evaluación y Estándares de Aprendizaje del bloque 1 de música de 2º Bachillerato. Fuente: (Consejería de Educación, Juventud y Deporte, 2015)

### 2.3.4. Materiales

Pizarra, tizas, papel, bolígrafos, hoja de ejercicios, ordenador e Internet.

### 2.3.5. Desarrollo

#### 2.3.5.1. Introducción

Esta sesión estructurada en tres partes:

La primera es sobre el concepto de máximo común divisor (M.C.D) y se explicará un método para hallar el MCD de dos números con el algoritmo de Euclides.

La segunda es sobre la relación entre este algoritmo y el ritmo.

La tercera parte es sobre la aplicación de los ritmos euclídeos (o euclidianos) en diferentes estilos musicales.

#### 2.3.5.2. Algoritmo de Euclides

El profesor explicará a sus alumnos una nueva forma de definir el concepto de división como una formación de grupos de objetos. El dividendo es el número total de objetos, mientras que el divisor es el tamaño de los grupos. Por lo tanto, el cociente es el número de grupos.

Sin embargo, cuando el número de grupos no es exacto, aparece el resto de una división. Por ejemplo: si tenemos 14 objetos (en la figura 2 se han representado estos objetos con unos) y queremos distribuirlos en 4 grupos, entonces en cada grupo habrá 3 objetos y sobran dos (se representan por filas el número de grupos) (Gómez, El algoritmo de Euclides como principio musical, 2018):

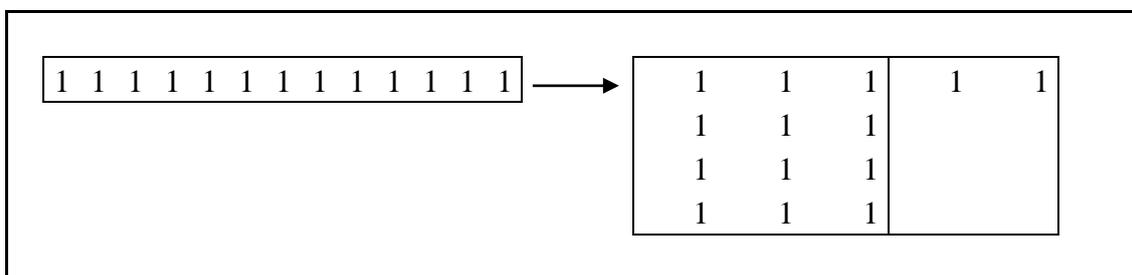


Figura 2. Representación del máximo común divisor (Euclides). Fuente: (Gómez, El algoritmo de Euclides como principio musical, 2018).

En esta tabla se puede deducir la ecuación general de la división como:  $D=d \cdot c+r$  donde  $D$  es dividendo,  $d$  es divisor,  $c$  es el cociente y  $r$  es el resto. Es decir, en el ejemplo anterior se comprueba que:  $14=4 \cdot 3+2$

Después el profesor explica a sus alumnos una forma de encontrar el M.C.D de dos números que es mediante el algoritmo de Euclides que es descrito por este Euclides en su obra “Elementos”. Se basa en lo siguiente (Khan Academy, 2017):

- $MCD(A,0) = A$ .
- $MCD(A,B) = MCD(B,R)$  donde  $A=B \cdot C+R$  (ecuación general de la división).

Este proceso se puede repetir hasta que el resto sea igual a cero (propiedad 1). Además, hay que tener en cuenta que cada vez el resto será menor. Por lo tanto, el máximo común divisor será el último resto no nulo que se obtiene en esta serie de divisiones sucesivas.

Para demostrar que la primera propiedad es cierta hay que tener en cuenta que si el dividendo de una división (B) es igual a cero, entonces para que se cumpla que  $A=B \cdot C+R$ , R tiene que ser igual a A.

Además, si  $R=0$ , entonces el M.C.D (A, B) = B. Por ejemplo: el M.C.D de (12,4) = 4, ya que el resto es igual a 0, y el 4 es el divisor común de 12 y 4.

Una forma más sencilla de que el profesor explique la demostración del algoritmo de Euclides es mediante una explicación geométrica (Archimedes Tube, 2020):

El profesor escribe dos segmentos de diferentes tamaños:

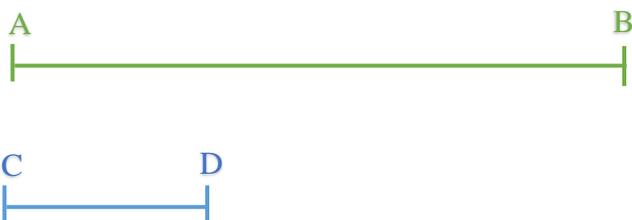


Figura 3. Segmentos AB y CD. Fuente: Elaboración propia

Los segmentos AB y CD tienen un tercer segmento que pueda dividir tanto el segmento AB como el segmento CD.

El siguiente paso es comprobar cuantas veces se puede incluir el segmento pequeño (CD) en el segmento grande:



Figura 4. División del segmento AB entre el segmento CD. Fuente: Elaboración propia.

Se observa que el segmento AB es igual a 3 veces el segmento CD más el segmento EB.

Después se comprueba cuántos segmentos EB caben en el segmento CD:

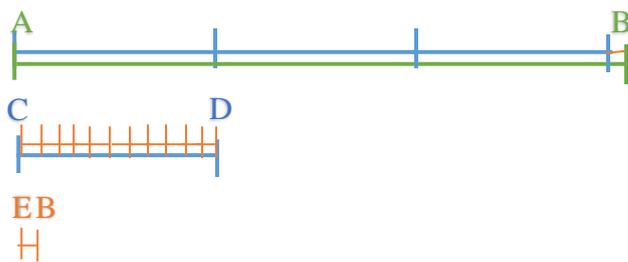


Figura 5. División del segmento CD entre el segmento EF. Fuente: Elaboración propia.

Se observa que hay exactamente 11 segmentos EB en CD. Si  $AB=3CB+EB$ , y  $CB=11EB$ , entonces  $AB=3 \cdot 11+1=34$  segmentos EB. Hemos descubierto un segmento que puede dividir tanto a AB como a CD de forma exacta.

Después el profesor pondrá un ejemplo para que los alumnos entiendan mejor este concepto: queremos saber el M.C.D de 81 y 18. Tenemos que el segmento  $AB=81$  y el segmento  $CD=18$  para resolver dicho problema:

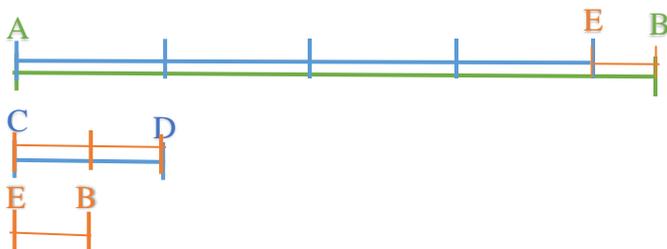


Figura 6. Máximo común divisor de los segmentos AB y CD. Fuente: Elaboración propia.

Se observa que cuatro segmentos CD caben en el segmento AB. Este suceso se puede comprobar dividiendo 81 entre 18, cuyo cociente es 4 (justo el número de segmentos CD que aparecen en el segmento AB) y el resto es 9 (lo que mide EB).

A continuación, hay que averiguar cuántos segmentos EB caben en el segmento CD. Se realiza el mismo procedimiento que antes. Como la división entre 18 y 9 es exacta (su cociente es 2, que es el número de segmentos EB que aparecen CD).

Si  $AB = 4CD + EB$  y  $CD = 2EB$ , entonces el máximo común divisor de (81, 18):  
 $AB = 4(2EB) + EB \longrightarrow AB = 9EB \longrightarrow 81 = 9EB \longrightarrow EB = 9$ .

Por lo tanto, el M.C.D de 81 y 18 es igual a 9.

A continuación, los alumnos tienen que realizar unos ejercicios de hallar el M.C.D de dos números utilizando el algoritmo de Euclides (Anexo 8).

### 2.3.5.3. Relación entre el algoritmo de Euclides y el ritmo musical

Existen diferentes aplicaciones para el algoritmo de Euclides entre las cuales está la relación que hay entre este algoritmo y la música.

Para que el profesor pueda introducir este tema, es importante que los estudiantes sepan conceptos de música como:

- Pulso: unidad para medir el tiempo en fragmentos iguales. Este elemento musical es imprescindible para el músico, ya que le sirve como referencia temporal. (Pérez Porto & Merino, 2015)

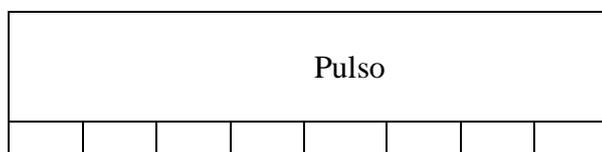


Figura 7. Representación de un pulso musical. Fuente: (Pérez Porto & Merino, Definición de Pulso Musical, 2015).

- Ritmo: está formado por una sucesión de sonidos (notas y silencios) que se tocan en el pulso (Pérez Porto & Gardey, Definición de Ritmo Musical, 2014).

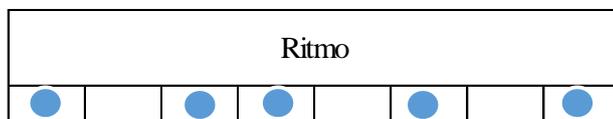


Figura 8. Representación de un ritmo musical. Fuente. (Pérez Porto & Gardey, Definición de Ritmo Musical, 2014).

A continuación, el docente comenta a sus alumnos que van a crear ritmos empleando las propiedades del algoritmo de Euclides.

Para ello se va a realizar un ejercicio en clase (como ejemplo) para que los alumnos observen la distribución de las notas en un tramo temporal con un cierto número de pulsos. Para ello, el ritmo se indicará con un 1, mientras que los silencios se harán con un 0. El ejercicio consiste en lo siguiente: Hay que repartir 4 notas en un tramo temporal de 12 pulsos. Por lo tanto, hay que dividir 12 por 3, cuyo resultado es 4. El ritmo resultante sería:

1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Figura 9. Ejemplo del ritmo euclidiano E (12,4). Fuente: (Gómez, El algoritmo de Euclides como principio musical, 2018)

Sin embargo, existe un inconveniente: ¿cómo podemos distribuir un número de notas ( $n$ ) en un tramo temporal de  $x$  pulsos y cuya división entre  $x$  y  $n$  el cociente no sea un número entero? (Gómez, El algoritmo de Euclides como principio musical, 2018). Por ejemplo: si se quiere tocar 8 notas en 12 pulsos ¿cómo haríamos la distribución? Aunque si hiciese la división entre 12 y 8 (el cociente es  $3/2$ ), hay que tener en cuenta que las fracciones de pulso no existen. La solución pasa por seguir “el principio de regularidad”. ¿En qué consiste este principio?

Se trata de distribuir de la manera más uniforme el número de notas respecto al total de pulsos que hay en una línea temporal. Se basa en dos propiedades (Gómez, El algoritmo de Euclides como principio musical, 2018):

1. Solo puede haber dos distancias entre las notas.
2. Esas distancias tienen que ser  $d$  y  $d+1$ .

Siguiendo el ejercicio anterior para distribuir 8 notas en 12 pulsos se colocaría un silencio cada dos notas con el fin de aplicar este principio. La sucesión de distancias sería (1,2,1,2,1,2,1,2):

0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Figura 10. Ritmo euclidiano E (12,8). Fuente: (Gómez, El algoritmo de Euclides como principio musical, 2018).

El profesor pregunta a sus alumnos cuántas veces se repite el patrón (011). Hay que tener en cuenta que el número de repeticiones coincide con el M.C.D de 12 y 8, ya que indirectamente se está aplicando el algoritmo de Euclides. De hecho, este tipo de ritmos se les denomina “ritmos euclidianos”.

Después, el profesor comenta que hay un algoritmo para desarrollar ritmos euclidianos denominado “Algoritmo de Bjorklund” que se basa en lo siguiente (Gómez, El algoritmo de Euclides como principio musical, 2018):

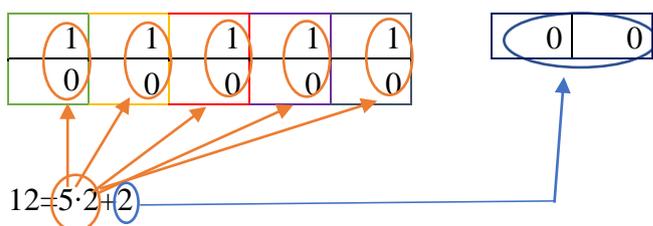
- 1) Queremos distribuir 5 notas en 12 pulsos (12,5). Lo primero que hay que hacer es poner las notas (se le asigna un 1) por un lado, y por el otro, los silencios (en este caso son 7, ya que es el resultado de restar el número de pulsos menos el número de notas):

1	1	1	1	1
---	---	---	---	---

0	0	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---

Figura 11. Distribución de los pulsos y silencios en el ritmo euclidiano de E (12,5).  
Fuente: (Gómez, El algoritmo de Euclides como principio musical, 2018).

- 2) Se van a formar grupos de 5 entre silencios y notas:



Observamos que hay 5 grupos de “uno – cero” y ha sobrado dos silencios. Posteriormente se formarán grupos con el resto de la división de 12 entre 5 (en este caso es 2).

- 3) Se agrupan las notas o silencios del resto (en nuestro caso es 1,0,1,0) y en vez de colocarse en filas de 7, se va a hacer en filas de dos, ya que es el mismo número de filas que hay en el resto del apartado 2:

1	1
0	0
1	1
0	0

0
1
0
0

Figura 12. Formación de grupos entre notas y silencios del ritmo euclidiano de E (12,5).  
Fuente: (Gómez, El algoritmo de Euclides como principio musical, 2018)

$5=2\cdot 2+1$ . Es decir, se han formado 2 grupos de (1010) y nos ha sobrado un patrón que no se repite (0100). Se deja de aplicar este algoritmo cuando solo haya un grupo sobrante, es decir, que el resto de la división sea igual a uno.

- 4) El patrón que estamos buscando se lee por columnas (de izquierda a derecha). La solución sería: (101010100100). Es importante destacar que da igual el orden del patrón, es decir, también estaría bien (100101010100) u otras combinaciones posibles que sigan el mismo patrón.

Es importante que el profesor de importancia al procedimiento descrito anteriormente, ya que realmente se ha aplicado una versión del algoritmo de Euclides. Es decir, se ha formado grupos de notas y silencios relacionando el máximo común divisor entre el número de notas y de silencios:  $(12,5)=(5,2)=(2,1)$ .

#### 2.3.5.4. Aplicación de los ritmos euclídeos

Después los alumnos tendrán que hacer unos ejercicios sobre el algoritmo de Bjorklund (anexo 8) y el profesor explicará en qué canciones aparecen dichos ritmos:

El primer ejemplo que aparece en la ficha es E(8,3) cuyo ritmo euclidiano es (10010010) y aparece en muchas canciones de diferentes estilos. Este patrón rítmico se le denomina “tresillo” (ritmo) en EE. UU (no confundirse con la otra acepción de tresillo que significa que se tocan dos notas en vez de tres). El tresillo (ritmo) aparece en distintos géneros musicales como Rock, Reggaeton, Pop.. (Bennett, 2018)

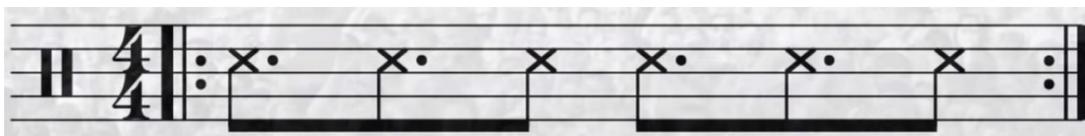


Figura 13. Representación del tresillo. Fuente: (Bennett, 2018)

Seguidamente, éste les enseña cómo es este ritmo y les pregunta si conocen alguna canción que tenga este ritmo. Además, les mostrará estos dos videos que recopilan varias canciones con este ritmo y que además son muy conocidas como, por ejemplo: Despacito (Fonsi, 2017) o Shape of you (Sheeran, 2017) (Hit Song Helix, 2017).

Asimismo, el profesor explica la evolución de este ritmo:

El origen de este ritmo se remonta en Africa (subsahariana) hace más de 500 años. Los esclavos africanos que fueron a Cuba, transmitieron este estilo musical a los cubanos y se popularizó en la población. Los cubanos pusieron nombre a este ritmo y lo llamaron



- Nacimiento del Reggaeton (años 90): Dem Bow (Ranks, 2017) es una canción jamaicana que se publicó en 1990 y que supuso el nacimiento de un género musical que actualmente es muy popular: el Reggaetón. Además, el origen de dicho estilo musical fue en Puerto Rico y se ha ido expandiendo en todo el mundo. Un ejemplo de una canción muy popular de Reggaetón que utiliza el tresillo es “Gasolina” (Yankee, 2017). Otro ejemplo es “Hips don’t lie” (Shakira, 2009) (Bennett, 2018). Ambas canciones siguen este patrón, que es el que actualmente se escucha en el Reggaeton (Bennett, 2018):



Figura 16. Representación del tresillo en el Reggaetón. Fuente: (Bennett, 2018)

- Pop y Reggaeton (actualidad): Los productores empezaron a apostar por este estilo rítmico (tresillo) a partir de los 2000. Actualmente la base de la mayoría de las canciones de Reggaeton es la misma que la que aparece en la imagen anterior como, por ejemplo: Despacito (Fonsi, 2017) o “Be The One” (Lipa, 2015) (Hit Song Helix, 2017).

El segundo ejercicio que aparece en la ficha es E(8,5) con un patrón rítmico de (10110110) que se le denomina “Cinquillo” en Cuba. Este tipo de ritmo aparece en diferentes géneros musicales como en el jazz, en la música cubana o en el Rock & Roll (años 50). Este ritmo euclidiano está muy relacionado con el tresillo. Un ejemplo de una canción que aparezca un tresillo y cinquillo es “Hound Dog” de Elvis Presley (1956). El cinquillo es el ritmo que tocan las palmas y el piano suena con un ritmo de tresillo.

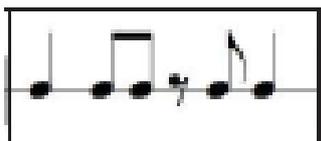


Figura 17. Representación del cinquillo. Fuente: (Gómez, El algoritmo de Euclides como principio musical, 2018).

Una actividad para llevar a cabo lo que han aprendido del tresillo y del cinquillo es que el profesor muestre la canción de Elvis que anteriormente se ha analizado y que la mitad

de la clase toque las palmas con un ritmo de cinquillo y la otra mitad, con un ritmo de tresillo.

El siguiente ejercicio que aparece en el anexo 8 es  $E(7,3)$  cuyo ritmo euclídeo es (1010100) que aparece en la canción “Money” de Pink Floyd (1973) (Derivando, 2019).

El cuarto ejercicio es  $E(3,2)$  característico de la cueca (género musical de Sudamérica) que aparece en este video: <https://www.youtube.com/watch?v=2LgAbnsXaNQ>

El quinto y sexto apartado aparecen ritmos característicos de África como son  $E(12,5)$  y  $E(12,7)$  cuyas pautas rítmicas son (10101010100) y (101011010101) respectivamente. El primer ritmo euclidiano se le denomina Fume-fume y el segundo se le llama gamamla o Bembé. El profesor puede enseñar este video (<https://www.youtube.com/watch?v=d2yDN-nN2k0>) para que los alumnos asimilen estos ritmos africanos.

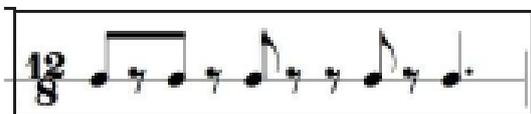


Figura 18. Representación del Fume-fume. Fuente: (Gómez, El algoritmo de Euclides como principio musical, 2018).

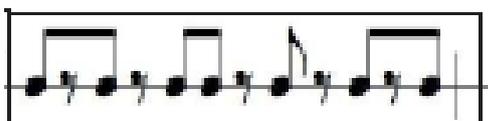


Figura 19. Representación del Bembé/Gamamla. Fuente: (Gómez, El algoritmo de Euclides como principio musical, 2018).

El último apartado es un ritmo euclidiano de  $E(16,5)$  de una Bossa-Nova (1001001001001000), estilo musical que es muy popular en Brasil y que sigue el siguiente (Gómez, El algoritmo de Euclides como principio musical, 2018).

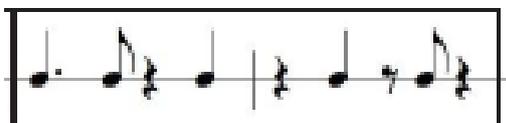


Figura 20. Representación de la Bossa-Nova. Fuente: (Gómez, El algoritmo de Euclides como principio musical, 2018).

En este video se muestra cómo se toca una bossa nova:  
[https://www.youtube.com/watch?v=mZ\\_mEmaJu98](https://www.youtube.com/watch?v=mZ_mEmaJu98)

Este otro video es una versión de Bossa Nova de la canción Rolling in the Deep:  
<https://www.youtube.com/watch?v=eDpTtge16F0>

Estopa compuso una canción que se titula “Bossanova” inspirada justamente en este ritmo: [https://www.youtube.com/watch?v=SXo1cQFA\\_rk](https://www.youtube.com/watch?v=SXo1cQFA_rk)

### Otras aplicaciones

Además de utilizar el algoritmo de Euclides para hallar una gran variedad de ritmos, también tiene otras utilidades como: sincronización en los aceleradores de neutrones y dibujo de rectas digitales. (Gómez, Si Euclides lo supiese...se sentiría orgulloso , 2014).

- Sistema de sincronización en los aceleradores de neutrones que consistía en activar unas puertas, que controlaban el voltaje de dicho acelerador de partículas, dentro de los  $n$  intervalos de tiempo de la manera más homogénea.
- Dibujo de rectas digitales: el principal objetivo es trazar una recta entre dos puntos en el plano en el que hay una sucesión de píxeles. En la siguiente figura se representa de azul los píxeles. Curiosamente, el patrón que sigue el número de píxeles que se encuentran situados debajo de la recta es: (43333) que coincide con el ritmo euclidiano de  $E(16,5)$ : (1000100100100100). Hay que tener en cuenta que el punto  $(16,5)$  es el punto óptimo para unir con el punto inicial  $(0,0)$  con el objetivo de que dicha recta se vea con mayor nitidez en las pantallas de cualquier dispositivo electrónico.

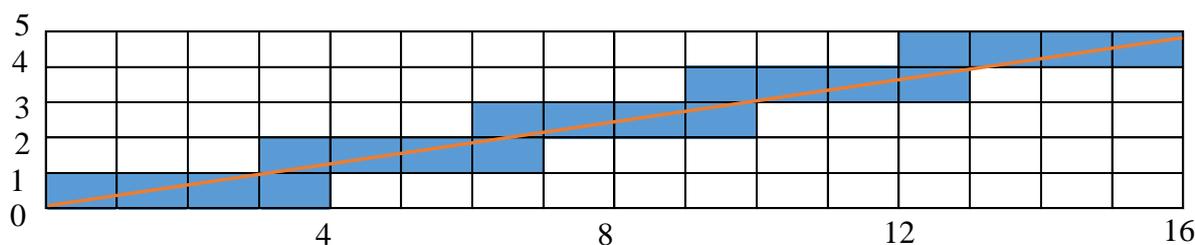


Figura 21. Recta en el que hay una sucesión de píxeles. Fuente: (Gómez, Si Euclides lo supiese...se sentiría orgulloso , 2014)

### **2.3.6. Temporalización**

Serán necesarias un par de sesiones (cada clase equivale a 50 minutos) para poner en práctica todo lo que se ha citado respecto a los ritmos euclidianos.

En la primera sesión, el profesor de Matemáticas les explica el algoritmo de Euclides y su demostración.

En la segunda sesión, los alumnos analizan los diversos estilos musicales que emplean ritmos euclidianos en la clase de música.

### **2.3.7. Evaluación**

Los alumnos tendrán que entregar la hoja de ejercicios del anexo 8 a su profesor de Música.

Éste será el encargado de evaluar los ejercicios de la ficha del anexo 8, ya que el contenido que aparece en las actividades de los ritmos euclidianos está más relacionado con el currículo de música de 2º Bachillerato.



### **3. ANÁLISIS PEDAGÓGICO DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS**

Estas actividades van dirigidas a los alumnos de secundaria. Un factor clave para motivar a los estudiantes es adaptar sus gustos musicales al contenido que se quiere impartir.

En el primer bloque se analiza la simetría musical. Para ello se ha seleccionado una banda sonora (como es el caso de Star Wars) con el propósito de estimular al alumnado (esta saga es muy popular entre los adolescentes).

En la segunda actividad se emplea una metodología denominada “Gamificación” que consiste en que los estudiantes aprendan contenido (en este caso de probabilidad) mediante juegos. La ventaja principal es que cuando los alumnos asocian un contenido a un juego, llegan a interiorizar mejor los conocimientos que han ido adquiriendo durante todo el proceso de aprendizaje.

En la tercera actividad se analizan los ritmos euclidianos de estilos musicales que predominan en los adolescentes de hoy en día (como el reggaetón) con la intención de que éstos observen la aplicación del máximo común divisor (algoritmo de Euclides) en canciones que suelen escuchar. Además, también se estudian ritmos euclidianos en otros géneros musicales (como el rock) para aquellos estudiantes que prefieren otros estilos musicales para que éstos puedan participar en esta actividad y se sientan motivados.

Después de finalizar cada actividad se entregará una encuesta a cada alumno para que la completen (anexo 9). Su finalidad es recopilar la opinión de los estudiantes para ver qué aspectos se pueden mejorar.



#### **4. CONCLUSIONES**

Las matemáticas y la música han estado muy relacionadas a lo largo de la historia. De hecho, las matemáticas han servido para que evolucione la música y haya mayor variedad musical como se ha mencionado en este informe (por ejemplo, los ritmos euclidianos o las simetrías musicales).

Asimismo, el objetivo principal de este trabajo es que los alumnos de la ESO y Bachillerato aprendan a relacionar conceptos matemáticos con la música a partir de los ejercicios propuestos, que puedan desarrollar una mayor riqueza musical y que sean más críticos cuando éstos escuchen una composición musical.

Para ello, es necesario adaptar estas actividades a los gustos de los adolescentes como el Reggaetón, Rock o la banda sonora de Star Wars y utilizar metodologías didácticas como la gamificación para motivar al alumnado.

## 5. BIBLIOGRAFÍA

- Altozano, J. (21 de diciembre de 2017). *Análisis de la Banda Sonora de Star Wars. EL LADO OSCURO*. Obtenido de [https://www.youtube.com/watch?v=pobDlg\\_ShIw](https://www.youtube.com/watch?v=pobDlg_ShIw)
- Archimedes Tube. (18 de febrero de 2020). *El Algoritmo de Euclides: Una Explicación GEOMÉTRICA*. Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=9yOk0RU5mDs>
- Arriagada, H. (4 de noviembre de 2014). *3º Cueca Campeones de arica 2014*. Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=2LgAbnsXaNQ>
- Bennett, D. (2 de agosto de 2018). *Tresillo- The Rhythm of 2010s Pop Music*. Obtenido de [https://www.youtube.com/watch?v=DZ\\_yT\\_ukkKA](https://www.youtube.com/watch?v=DZ_yT_ukkKA)
- bossanova diletant. (22 de agosto de 2012). *Rolling In The Deep (Bossanova version)*. Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=eDpTtge16F0>
- Camarero Linares, P., Martín Viscasillas, E., & Mínguez Monedero, S. (2014). *¿Sabía Mozart matemáticas?* Madrid.
- Cheng, J. W. (1999). *Duel of the Fates (from Star Wars)*. Obtenido de <https://es.scribd.com/doc/316271642/Duel-of-the-Fates-From-Star-Wars-Piano-Sheet-Music>
- Consejería de Educación, Juventud y Deporte. (14 de mayo de 2015). *Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid*. Obtenido de DECRETO 48/2015, de 14 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria: [https://www.bocm.es/boletin/CM\\_Orden\\_BOCM/2015/05/20/BOCM-20150520-1.PDF](https://www.bocm.es/boletin/CM_Orden_BOCM/2015/05/20/BOCM-20150520-1.PDF)
- Cultura Inquieta. (22 de julio de 2017). *El genial "canon cangrejo" de J.S. Bach visualizado como una cinta de Möbius*. Obtenido de <https://culturainquieta.com/es/arte/musica/item/7300-el-genial-canon-cangrejo-de-j-s-bach-visualizado-como-una-cinta-de-moebius.html>

Curistoria. (2015). *Música palíndroma, Mozart y el Dueto del Espejo*. Obtenido de <https://www.curistoria.com/2015/05/musica-palindroma-mozart-y-el-dueto-del.html>

Derivando. (25 de diciembre de 2019). *¿Vas a alucinar con los RITMOS EUCLIDIANOS! Matemáticas y música*. Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=qxRW5pDT2o4>

diainternacionalde. (22 de noviembre de 2020). *Día Internacional del Músico*. Obtenido de <https://www.diainternacionalde.com/ficha/dia-internacional-del-musico>

drummercouk. (20 de agosto de 2010). *6/8, 12/8 (ternary) African, Afro Cuban cowbell patterns, 19 bell rhythms*. Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=d2yDN-nN2k0>

Drumset Fundamentals. (21 de agosto de 2016). *Bossa Nova (Hi-hat) - Drum Groove*. Obtenido de [https://www.youtube.com/watch?v=mZ\\_mEmaJu98](https://www.youtube.com/watch?v=mZ_mEmaJu98)

Estopa. (5 de julio de 2015). *Bossanova*. Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=YkrHwgQdZgg>

Floyd, P. (25 de junio de 2014). *Pink Floyd - Money (Official Music Video)*. Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=-0kcet4aPpQ>

Fonsi, L. (13 de enero de 2017). *Luis Fonsi - Despacito ft. Daddy Yankee*. Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=kJQP7kiw5Fk>

Gómez, P. (2014). *Si Euclides lo supiese...se sentiría orgulloso*. Obtenido de <http://webpgomez.com/artes/musica-y-ciencia/384-si-euclides-lo-supiese-se-sentiria-orgulloso>

Gómez, P. (2018). *El algoritmo de Euclides como principio musical*. Madrid: Universidad Politécnica.

Gómez, P. (s.f.). *Del máximo común divisor y su enseñanza*. Obtenido de <http://www.webpgomez.com/ciencias/matematicas/357-del-maximo-comun-divisor-y-su-ensenanza>

Hit Song Helix. (31 de agosto de 2017). *Tresillo Rhythm in Hit Songs*. Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=ZPezmcKrPFI>

- Khan Academy. (2017). *El algoritmo de Euclides*. Obtenido de <https://es.khanacademy.org/computing/computer-science/cryptography/modarithmetic/a/the-euclidean-algorithm>
- Lipa, D. (29 de octubre de 2015). *Dua Lipa - Be The One (Official Music Video)*. Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=-rey3m8SWQI>
- Mozart. (1777). *Musikalisches Würfelspiel*.
- Muzás, J. M. (s.f.). *Bach-Moebius*. Obtenido de [http://matematicasentumundo.es/CURIOSIDADES/Bach\\_Moebius.htm](http://matematicasentumundo.es/CURIOSIDADES/Bach_Moebius.htm)
- New Orleans Music Review. (29 de diciembre de 2011). *Jelly Roll Morton - New Orleans Blues*. Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=4CtyQXFtu2U>
- oldtimecharlie. (18 de noviembre de 2008). *James P Johnson The Charleston 1925*. Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=3kJWdUFzL0Y>
- Pérez Porto, J., & Gardey, A. (2014). *Definición de Ritmo Musical*. Obtenido de <https://definicion.de/ritmo-musical/>
- Pérez Porto, J., & Merino, M. (2015). *Definición de Pulso Musical*. Obtenido de <https://definicion.de/pulso-musical/>
- Presley, E. (4 de junio de 2013). *Elvis Presley- Hound dog (Audio)*. Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=-0kcet4aPpQ>
- Ranks, S. (31 de agosto de 2017). *Dem bow*. Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=Wx9dNPFMR-k>
- Robles, L. (s.f.). *Tema 3. El sistema armónico básico*. Obtenido de <https://es.scribd.com/document/171648677/Tema-03-El-Sistema-Armonico-Basico>
- Rodríguez García, Y., Rocha Salamanca, P., & Carolina Mora, D. (2013). *El Juego de Dados de Mozart: Un Recurso Didáctico Para La Enseñanza- Aprendizaje De La Probabilidad*. Colombia: Universidad Distrital Francisco José De Caldas.
- Ros, C. R. (21 de febrero de 2016). *La partitura del espejo o de la mesa*. Obtenido de <https://fuentemusica.blogspot.com/2016/02/la-partitura-del-espejo-o-de-la-mesa.html>

Shakira. (3 de octubre de 2009). *Shakira - Hips Don't Lie (Official Music Video) ft. Wyclef Jean*. Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=DUT5rEU6pqM>

Sheeran, E. (30 de enero de 2017). *Ed Sheeran - Shape of You [Official Video]*. Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=JGwWNGJdvx8>

Vlashi, F., & Cruz Araújo, M. (2018). *Guía didáctica Música o Matemáticas*.

Williams, J. (2016). *Duel Of The Fates (from "Star Wars Episode 1: The Phantom Menace") [Official Audio] [Grabado por London Symphony Orchestra]*. Londres.

wincalendar. (2020). *Día Internacional de la Música en 2020*. Obtenido de <https://www.wincalendar.com/es/Dia-internacional-de-la-Musica>

Yankee, D. (18 de noviembre de 2017). *Daddy Yankee - Gasolina (Video Oficial)*. Obtenido de [https://www.youtube.com/watch?v=CCF1\\_jI8Prk](https://www.youtube.com/watch?v=CCF1_jI8Prk)



## 6. ANEXOS

### ANEXO 1. EJERCICIOS DE SIMETRÍA MUSICAL

Nombre: \_\_\_\_\_ Apellidos: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_ Curso: \_\_\_\_\_

Ejercicio 1. Contesta a las siguientes preguntas sobre “Duel Of Fates”:

- ¿Qué nota es la más aguda y la más grave?
- Escribe la línea melódica como si fuese una función (el eje x representa el tiempo, mientras que el eje y representa el tono). P.D: El punto (0,0) representaría un do central si fuese la primera nota del primer compás.
- ¿Qué significado tiene la simetría musical en esta canción?

Ejercicio 2. ¿Por qué decimos que el “Canon del Cangrejo” tiene una simetría musical?

Ejercicio 3. ¿Qué patrones armónicos hay en el “Duo de la Mesa”? ¿Por qué suena armónicamente bien esta pieza musical?



Figura 22. Partitura de Duel Of Fates. Fuente: (Cheng, 1999)



Figura 23. Partitura de Duel Of Fates (parte 2). Fuente: (Cheng, 1999)

ANEXO 3. PARTITURA DEL “CANON DEL CANGREJO”



The image displays a musical score for the piece "Canon del Cangrejo". The score is written in 4/4 time and consists of six systems, each with two staves. The key signature is one flat (B-flat). The notation includes various rhythmic values such as quarter, eighth, and sixteenth notes, as well as rests and accidentals. The piece is characterized by its intricate rhythmic patterns and the interplay between the two staves in each system.

Figura 24. Partitura del Canon del Cangrejo. Fuente: (Cultura Inquieta, 2017)

ANEXO 4. PARTITURA DE “DUO DE LA MESA”

**Der Spiegel – Duett für zwei Violinen – The Mirror**  
based upon an earlier edition by Fred Nachbaur (fredn@netidea.com)

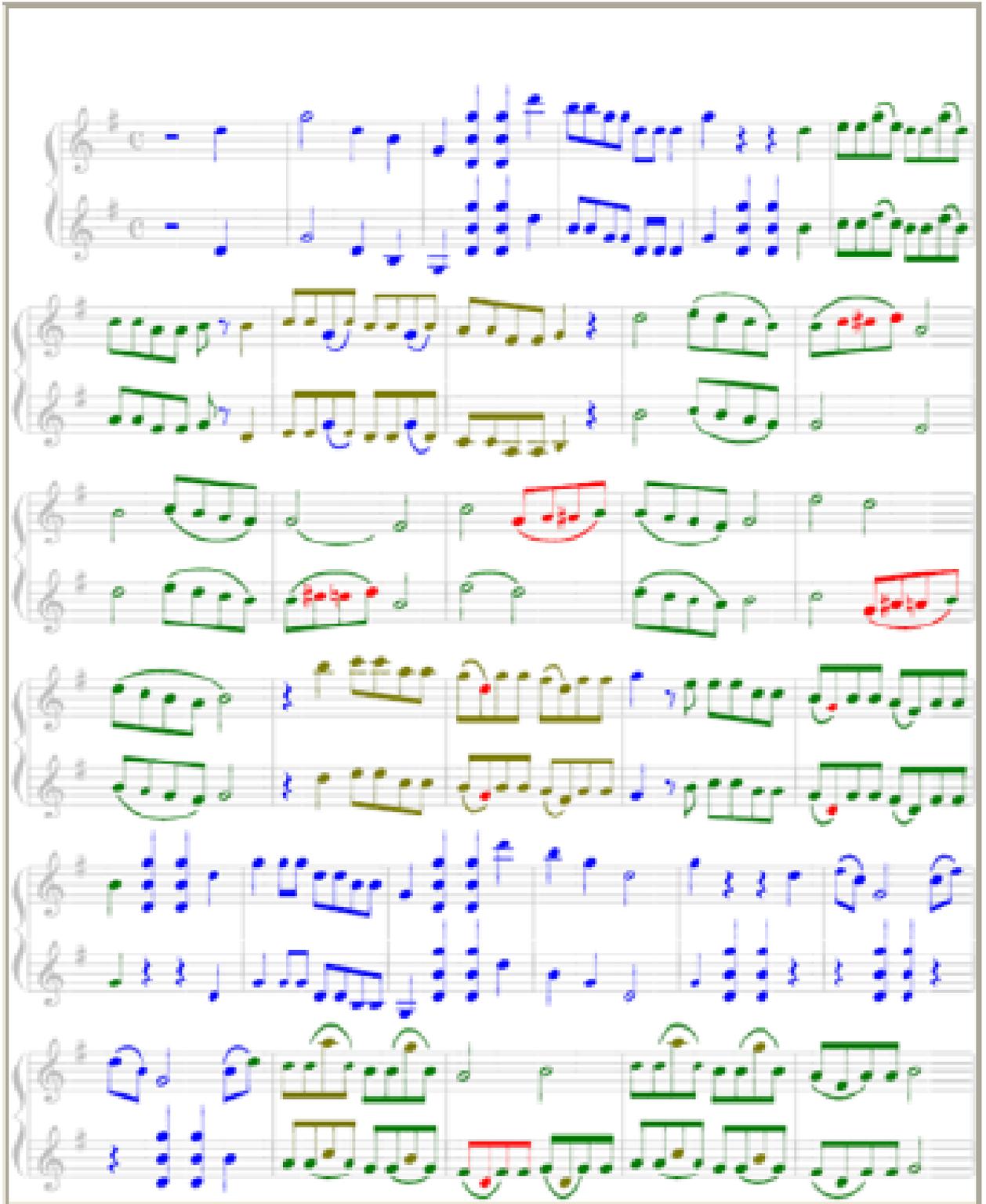
Allegro W.A. Mozart (1756-1791)



W.A. Mozart (1756-1791) Allegro

© 2000, Werner.Icking@ndd.de      Confused? Try playing this from opposite sides of a table      Non-commercial copying welcome.

Figura 25. Partitura del Duo de la Mesa. Fuente: (Ros, 2016)



The image displays a musical score for the 'Juego de Dados' (Dice Game) by Wolfgang Amadeus Mozart. The score is presented in a system of eight staves, with four staves for each hand (treble and bass clef). The music is in G major and 3/4 time. The score is annotated with various colors: blue for many notes and rests, green for slurs and some notes, and red for specific notes and slurs. The annotations highlight specific musical features and patterns throughout the piece.

Figura 26. Análisis de la partitura del Juego de Dados de Mozart. Fuente: (Vlashi & Cruz Araújo, 2018)

ANEXO 5. PARTITURA DEL JUEGO DE DADOS DE MOZART



The image displays a musical score for 'The Game of Dice' by Wolfgang Amadeus Mozart. The score is written for piano and consists of 48 measures, organized into eight systems. Each system contains a treble clef staff and a bass clef staff. The measures are numbered sequentially from 1 to 48. The music features a variety of rhythmic patterns, including eighth and sixteenth notes, and rests. There are several first and second endings marked with '1.' and '2.' at the end of measures 11, 19, 27, and 35. The score is presented in a clear, black-and-white format, typical of a printed musical manuscript.



49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56.



57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64.



65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72.



73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80.



81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88.



89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96.



97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104.



105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112.



113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120.



121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128.



The image displays a musical score for 'The Game of Dice' by Wolfgang Amadeus Mozart. The score is presented in two systems of staves, each with a treble and bass clef. The first system covers measures 131 to 136, the second system covers measures 137 to 144, the third system covers measures 145 to 152, the fourth system covers measures 153 to 160, the fifth system covers measures 161 to 168, and the sixth system covers measures 169 to 176. The music is written in a single key signature (one sharp) and a 3/4 time signature. The notation includes various rhythmic values, accidentals, and dynamic markings such as 'f' (forte) and 'h' (hairpins). The score concludes with a double bar line and repeat dots at the end of measure 176.

Figura 27. Partitura del Juego de Dados. Fuente: (Mozart, 1777)

## ANEXO 6. TABLAS DEL JUEGO DE DADOS

<b>Tabla 1</b>	<b>I</b>	<b>II</b>	<b>III</b>	<b>IV</b>	<b>V</b>	<b>VI</b>	<b>VII</b>	<b>VIII</b>
<b>2</b>	96	22	141	41	105	122	11	30
<b>3</b>	32	6	128	63	146	46	134	81
<b>4</b>	69	95	158	13	153	55	110	24
<b>5</b>	40	17	113	85	161	2	159	100
<b>6</b>	148	74	163	45	80	97	36	107
<b>7</b>	104	157	27	167	154	68	118	91
<b>8</b>	152	60	171	53	99	133	21	127
<b>9</b>	119	84	114	50	140	86	169	94
<b>10</b>	98	142	42	156	75	129	62	123
<b>11</b>	3	87	165	61	135	47	147	33
<b>12</b>	54	130	10	103	28	37	106	5

Tabla 18. Primera tabla del Juego de dados (Mozart). Fuente: (Rodríguez García, Rocha Salamanca, & Carolina Mora, 2013).

<b>Tabla 2</b>	<b>I</b>	<b>II</b>	<b>III</b>	<b>IV</b>	<b>V</b>	<b>VI</b>	<b>VII</b>	<b>VIII</b>
<b>2</b>	70	121	26	9	112	49	109	14
<b>3</b>	117	39	126	56	174	18	116	83
<b>4</b>	66	139	15	132	73	58	145	79
<b>5</b>	90	176	7	34	67	160	52	170
<b>6</b>	25	143	64	125	76	136	1	93
<b>7</b>	138	71	150	29	101	162	23	151
<b>8</b>	16	155	57	175	43	168	89	172
<b>9</b>	120	88	48	166	51	115	72	111
<b>10</b>	65	77	19	82	137	38	149	8
<b>11</b>	102	4	31	164	144	59	173	78
<b>12</b>	35	20	108	92	12	124	44	131

Tabla 19. Segunda tabla del Juego de dados (Mozart). Fuente: (Rodríguez García, Rocha Salamanca, & Carolina Mora, 2013).

ANEXO 7. EJERCICIOS DEL “JUEGO DE DADOS” DE MOZART

Nombre: \_\_\_\_\_ Apellidos: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_ Curso: \_\_\_\_\_

Ejercicio 1. Completa esta tabla:

<b>Espacio muestral (resultado de la suma de los dados)</b>	<b>Combinaciones</b>	<b>Porcentaje</b>
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Tabla 20. Combinaciones posibles por cada resultado de la suma de dos dados. Fuente: Elaboración propia

Ejercicio 2. Realiza un gráfico que represente el número de casos por cada resultado de la suma de los dados. ¿Qué combinación tiene más probabilidades de aparecer? ¿Y la que menos?

Ejercicio 3. Observa la tabla del “Juego de Dados” y contesta a las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuál es la composición más probable? ¿Cuál es la probabilidad teórica (sin tener en cuenta la repetición de compases)? ¿Cuál es la probabilidad teniendo en cuenta la repetición de compases?
- b) ¿Cuántos compases hay realmente en esta obra?
- c) ¿Cuántos minuetos se pueden componer en total teniendo en cuenta la repetición de compases? Si cada compás dura 30 segundos aproximadamente, ¿cuánto tiempo necesitaríamos para tocar todas las composiciones?
- d) Tira los dados y anota la puntuación en cada lanzamiento. ¿Cuál es la probabilidad de tu composición?

Ejercicio 4. ¿Cuál es el truco que utiliza Mozart para que independientemente del resultado de los dados suene armónicamente bien?

ANEXO 8. EJERCICIOS DEL RITMO EUCLIDIANO.

Nombre: \_\_\_\_\_ Apellidos: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_ Curso: \_\_\_\_\_

Ejercicio 1. Halla el máximo común divisor de dos números utilizando el algoritmo de Euclides:

- a) 20 y 12
- b) 135 y 120
- c) 1584 y 684

Ejercicio 2. Aplica el algoritmo de Bjorklund para hallar los siguientes ritmos. Escribe los estilos musicales que son característicos de estos ritmos:

- a) E(8,3)
- b) E(8,5)
- c) E (7,3)
- d) E (3,2)
- e) E(12,5)
- f) E(12,7)
- g) E (16,5)

ANEXO 9. ENCUESTA DE MEJORA

Actividad:

Fecha:

Curso:

	Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Neutral	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
El profesor habla de forma clara y concisa					
Considero que ha sido difícil esta actividad					
La clase ha sido dinámica					
El contenido que se ha impartido se ha ajustado al tiempo establecido					
El profesor ha demostrado entusiasmo cuando ha dado la clase					
Considero que he aprendido mucho					

Observaciones: