La Columna de Matemática Computacional

Sección a cargo de

Tomás Recio

El objetivo de esta columna es presentar de manera sucinta, en cada uno de los números de La Gaceta, alguna cuestión matemática en la que los cálculos, en un sentido muy amplio, tengan un papel destacado. Para cumplir este objetivo el editor de la columna (sin otros méritos que su interés y sin otros recursos que su mejor voluntad) quisiera contar con la colaboración de los lectores, a los que anima a remitirle (a la dirección que se indica al pie de página[1]*) los trabajos y sugerencias que consideren oportunos.*

En este número...

En este número de *La Gaceta*, presentamos un artículo de algunos miembros del "taller de Alcalá" de Geometría Algebraica Computacional, dirigido por el profesor Rafael Sendra. Sus autoras forman parte de ese grupo de investigación estable de la Universidad de Alcalá de Henares y, en la mayoría de los casos, han realizado su memoria doctoral bajo la dirección del otro autor, el profesor Sendra, con una larga y fructífera carrera docente e investigadora, iniciada con la defensa de su tesis en 1990, bajo la dirección del profesor Juan Llovet.

El profesor Sendra, en la actualidad, es el *General Chair* del congreso internacional más antiguo y prestigioso de Álgebra Computacional, el *International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC)*, patrocinado por la Association for Computing Machinery (ACM), que se celebra este año en Linz (Austria), ver `http://www.risc.uni-linz.ac.at/about/conferences/issac2008/`.

Los autores de esta nueva contribución a *La Columna de Matemática Computacional* tienen una amplia experiencia en investigaciones sobre algoritmos en curvas algebraicas y, particularmente, en curvas paramétricas. Avalando esta afirmación, señalemos que recientemente (en el año 2007), dos de los autores (S. Pérez-Díaz y R. Sendra) han publicado, junto con el profesor Winkler de la Universidad de Linz, el libro *Rational Algebraic Curves: A Computer Algebra Approach*, en la serie *Algorithms and Computation in Mathematics*, de Springer-Verlag [39].

Como en los últimos números de esta Columna de *La Gaceta*, se presenta aquí un trabajo que describe, en un estilo divulgativo, una investigación en curso. Se trata de calcular, dada una curva o superficie real, otra que esté geométricamente próxima a

[1]Tomás Recio, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria, 39071-Santander; `tomas.recio@unican.es`

ésta y que admita una parametrización, por la versatilidad y comodidad de manejo de los objetos paramétricos en muchas aplicaciones de la Geometría Algebraica.

Por la novedad del planteamiento, el artículo introduce y discute con detalle, pero de manera coloquial, la motivación para este trabajo, la idea de "proximidad" que se quiere utilizar, los conceptos (inventados por los autores) de ϵ-punto de una curva, de ϵ-punto singular, etc., y su papel en la búsqueda de algoritmos de parametrización de curvas y superficies aproximadas a una dada (que no es exactamente lo mismo, aunque podría ser parecido, que la parametrización aproximada a otra dada de una curva o superficie...).

Creemos que resultará al lector gratificante percibir ese aire fresco que tienen los problemas nuevos y los métodos originales, permitiendo al lector abrir, al paso que los autores desgranan sus disquisiciones, las puertas de su propia imaginación.

El reto de parametrizar curvas y superficies algebraicas de forma aproximada

por

Sonia Pérez-Díaz, Sonia L. Rueda, Juana Sendra y J. Rafael Sendra

Comenzamos este artículo recordando, breve e informalmente, algunos conceptos mínimos. En primer lugar señalar que, aunque en el título no se indica, sólo trabajaremos con curvas algebraicas planas y superficies algebraicas; el caso de curvas algebraicas espaciales puede ser "planteado" de forma similar.

Seguidamente, recordamos la definición de curva y superficie algebraica. Para ello, fijamos un cuerpo algebraicamente cerrado, por ejemplo $\mathbb{C}$ (alternativamente, y tomando ciertas precauciones, se puede trabajar con cuerpos no algebraicamente cerrados). Una curva algebraica afín plana (resp. una superficie algebraica afín) es el conjunto de puntos del plano $\mathbb{C}^2$ (resp. del espacio $\mathbb{C}^3$) que satisfacen una ecuación polinomial no constante del tipo $g(x, y) = 0$, con $g \in \mathbb{C}[x, y]$ (resp. $g(x, y, z) = 0$, $g \in \mathbb{C}[x, y, z]$). Si f es la parte libre de cuadrados del polinomio g (es decir, f tiene los mismos factores irreducibles que g, pero con multiplicidad 1), entonces a $f = 0$ se le llama ecuación implícita de la curva/superficie y a f polinomio que define la curva/superficie. La curva/superficie se dice que es irreducible si f es irreducible sobre $\mathbb{C}$. En lo que sigue, trabajaremos con curvas y superficies irreducibles. También exigiremos que la curva o superficie sea real, es decir la intersección de la curva (resp. superficie) con $\mathbb{R}^2$ contenga infinitos puntos (resp. la intersección con $\mathbb{R}^3$ contenga un subconjunto 2-dimensional, en la topología euclídea). f es un polinomio real. Asimismo, en algún momento, nos interesará hablar de la curva o superficie proyectiva asociada a la curva o superficie afín, en cuyo caso se toman soluciones en $\mathbb{P}(\mathbb{C})^2$ o en $\mathbb{P}(\mathbb{C})^3$, según corresponda, del polinomio homogeneizado F obtenido a partir de f. Obsérvese que, en el caso de curvas afines, al considerar el cierre proyectivo se añade sólo una cantidad finita de puntos que corresponden a las soluciones proyectivas de $F(x, y, 0) = 0$. Así, por ejemplo, la circunferencia afín de ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$, al ser vista en el proyectivo, contiene los puntos cíclicos $(1 : \pm i : 0)$ que proceden de $x^2 + y^2 = 0$. En el caso de superficies, se añaden infinitas soluciones correspondientes a $F(x, y, z, 0) = 0$; de hecho, el espacio de soluciones tiene dimensión 1.

Este tipo de objetos geométricos son de gran aplicabilidad en muchas ramas científicas y tecnológicas como la física, la química, la biología, la arquitectura o la ingeniería. En la actualidad, gran parte del potencial aplicado de dichos objetos geométricos ha pasado a ser una realidad debido a la existencia de ordenadores cada vez más potentes. Asimismo, cabe indicar que el manejo de curvas y superficies se realiza, principalmente, a través de sistemas de CAD y CAM, y en especial de CAGD (véanse [4, 8, 22, 25]). No obstante, para potenciar la aplicabilidad de estos objetos es importante disponer de representaciones alternativas, de las curvas y superficies,

distintas de las ecuaciones implícitas (véase [8]). En particular, resulta interesante disponer de representaciones paramétricas y, más especialmente, parametrizaciones racionales. Esto ha forzado el desarrollo de un área de investigación dedicada a la obtención de algoritmos de conversión desde una representación paramétrica a una implícita (algoritmos de implicitación) y viceversa (algoritmos de parametrización).

Una parametrización racional es un par (terna en el caso de superficies) de funciones racionales de $\mathbb{C}(t)$ (en $\mathbb{C}(t_1, t_2)$ en el caso de superficies), no simultáneamente constantes, que satisfacen la ecuación implícita; véase [39] para más detalles. Por ejemplo, (t, t^2) es una parametrización de la parábola $y = x^2$. Si se piensa en rectas y planos se observa que siempre existe este tipo de representación; incluso es polinomial. Si pasamos a cónicas y cuádricas, y asumimos que el polinomio f es irreducible sobre $\mathbb{C}$, entonces también existen representaciones paramétricas. Sin embargo el panorama empeora rápidamente al pasar a grado 3. Ni tan siquiera exigiendo irreducibilidad (¡eso sí: lo contrario es cierto!), podemos garantizar la existencia de tal representación. Por ejemplo, $x^3 + y^3 = 1$ (cúbica de Fermat) es irreducible pero no admite una parametrización racional (véase el ejemplo 4.3 en [39]). Cuando existe una representación paramétrica racional se dice que la curva/superficie es paramétrica o parametrizable.

Por otra parte, las aplicaciones prácticas muestran que los algoritmos simbólicos, fruto de la interacción entre el álgebra computacional y los resultados teóricos clásicos, suelen ser insuficientes, ya que en la práctica los datos suelen ser aproximados o haber sufrido alguna perturbación previa.

Parece, por tanto, que hemos llevado al lector al final de un callejón sin salida: por una parte decimos que las curvas y superficies son muy útiles en las aplicaciones; por otra decimos que para potenciar la aplicabilidad es importante disponer de una representación, que resulta no existir siempre; finalmente afirmamos que en muchas aplicaciones, debido a que el input ha podido sufrir algún error de aproximación o perturbación previa, es de esperar que los algoritmos de parametrización existentes sean de poca utilidad. Entonces, ¿qué? Pues eso, no hemos llegado al final del callejón sino al umbral del "reto" que aparece en el título del trabajo. De hecho, este fenómeno (que, por cierto, aparece en muchos otros contextos algebraico/geométricos-aplicados) ha despertado un interés creciente en el desarrollo de algoritmos híbridos simbólico-aproximados. El planteamiento de partida en este tipo de problemas es:

> *Por la entidad del problema aplicado, o del experimento que se está realizando, se sabe que cierto objeto matemático $\mathcal{O}$ (en nuestro caso, $\mathcal{O}$ es una curva plana o superficie algebraica) verifica cierta propiedad $\mathcal{P}$ (en nuestro caso, $\mathcal{P}$ es el carácter paramétrico). Sin embargo, debido a errores del proceso, el dato de entrada no es $\mathcal{O}$, sino una pequeña perturbación $\mathcal{O}^*$ de $\mathcal{O}$, que ya no verifica la propiedad $\mathcal{P}$. El problema consiste en, dada una tolerancia de trabajo $\epsilon > 0$ (error permitido), determinar un nuevo objeto $\mathcal{O}^{**}$ "próximo" a $\mathcal{O}^*$ que verifique la propiedad $\mathcal{P}$.*

Entre otros, existen algoritmos aproximados en álgebra para el cálculo del máximo común divisor de polinomios [9, 14, 27], para obtener ceros de sistemas de polinomios multivariados [9, 15, 17], sobre la factorización de polinomios [10, 20, 28, 34],

para el cálculo numérico de bases de Gröbner [26, 40], etc. Por ejemplo, el polinomio $f(x,y) = y^2 - x^4 + \epsilon x^2$ con $\epsilon = 0.01$, no es ϵ-irreducible (tomado de [10]). Un polinomio $f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ se dice que es ϵ-irreducible (sobre $\mathbb{C}$), si no puede expresarse como $f(x,y) = g(x,y)h(x,y) + \mathcal{E}(x,y)$ donde $h, g, \mathcal{E} \in \mathbb{C}[x,y]$ y $\|\mathcal{E}(x,y)\| < \epsilon\|f(x,y)\|$. En el caso particular que nos ocupa, se tiene que $f(x,y) = g(x,y)h(x,y) + \mathcal{E}(x,y)$, donde $g(x,y) = y + x^2 - 0.0050433$, $h(x,y) = y - x^2 - 0.0049999$ y $\|\mathcal{E}(x,y)\| < \epsilon\|f(x,y)\|$.

La necesidad de algoritmos híbridos simbólico-aproximados en geometría algebraica se pone de manifiesto, no sólo en el problema de la parametrización, sino también en muchos otros de los que incluimos algunas referencias a continuación: cálculo de singularidades [5, 7, 12, 21, 24], métodos de implicitación [11, 13], análisis de las condiciones numéricas para curvas algebraicas dadas de forma implícita [16], algoritmos de parametrización [6, 19, 23, 30, 31, 33], etc.

1. El problema de la parametrización aproximada

El planteamiento del problema que tratamos en este artículo es el siguiente. Supongamos que, tras trabajar con cierta tolerancia $\epsilon > 0$, se obtiene una curva algebraica real plana $\mathcal{C}$ (análogamente, una superficie algebraica real) ϵ-irreducible, de grado propio (véase la definición 5), y que la naturaleza del problema nos permite saber que dicha curva o superficie debería ser parametrizable. El dato $\mathcal{C}$ no lo es, pero sabemos que en las "proximidades" de $\mathcal{C}$ existe otra curva $\overline{\mathcal{C}}$ que sí es parametrizable. Nuestro objetivo es calcular una parametrización racional $\overline{\mathcal{P}}(t)$ de la curva $\overline{\mathcal{C}}$ "próxima" a $\mathcal{C}$ a la que llamaremos parametrización aproximada de $\mathcal{C}$.

Ejemplo 1 (Ejemplo 8 en [30]). Sea $\epsilon = 0.001$ y $\mathcal{C}$ la curva plana definida por

$$\begin{aligned}
&291.969x - 17.003y - 100.994y^2 + 20y^4x - 511.976x^2 + x^7 - 14x^6 + 82x^5 \\
&\quad - 259.999x^4 + 479.992x^3 + 29y^5 - 74.999y^4 - 40y^3x + 40y^2x - 160x^2y \\
&\quad + 140xy + 2x^5y - 20x^4y + 80x^3y + y^7 - 7y^6 + 114.996y^3 - 72.984 - 4y^5x = 0.
\end{aligned}$$

Utilizando algoritmos apropiados (véase [39]) se puede comprobar que $\mathcal{C}$ no es parametrizable. Sin embargo, aplicando el algoritmo que aparece en [30], y que de forma breve describiremos en este artículo, se obtiene una nueva curva plana $\overline{\mathcal{C}}$:

$$\begin{aligned}
&-73 + 292x - 17y - 101y^2 - 512x^2 + x^7 - 14x^6 - 260x^4 + 480x^3 \\
&+ 29y^5 - 75y^4 - 40y^3x - 160x^2y + 140xy + 2x^5y - 20x^4y + 80x^3y \\
&\qquad + y^7 - 7y^6 + 115y^3 - 4y^5x + 20y^4x + 82x^5 + 40y^2x = 0,
\end{aligned}$$

que resulta ser parametrizable. De hecho,

$$\left(\frac{2(t^7 + 1 + 2t^5 - t)}{t^7 + 1}, \frac{4t^6 - 2t^2 + t^7 + 1}{t^7 + 1}\right)$$

es una parametrización racional de $\overline{\mathcal{C}}$. En la figura 1 se puede observar que ambas curvas están "próximas".

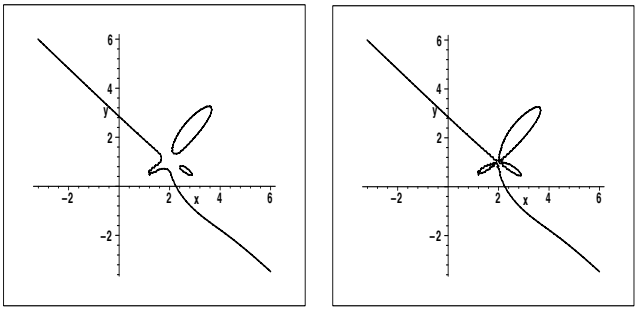

Figura 1: Izq.: curva $\mathcal{C}$. Der.: curva $\overline{\mathcal{C}}$.

2. ¿Qué significa "próximo"?

Hasta ahora, hemos eludido aclarar el significado de "proximidad". Pero ha llegado el momento de intentar aclarar la cuestión. En el caso del mcd, o de la factorización aproximada de polinomios, se suele exigir que el error relativo entre los polinomios sea inferior a la tolerancia. En lo que sigue, se fija una tolerancia $0 < \epsilon < 1$ y se utilizará la norma ∞-polinomial; es decir, si $p(x,y) = \sum_{i,j\in I} a_{ij}x^iy^j \in \mathbb{C}[x,y]$ entonces $\|p(x,y)\|$ se define como $\text{máx}\{|a_{ij}| : i,j \in I\}$. Por ejemplo, si f es el polinomio input y $\overline{f}$ el ouput, se pide que

$$\frac{\|f-\overline{f}\|}{\|f\|} < \epsilon.$$

No obstante, la noción de proximidad que buscamos para el problema de parametrización es geométrica y, en general, como muestra el ejemplo 2, puede resultar difícil decidir la proximidad midiendo errores relativos a partir de los coeficientes de las ecuaciones implícitas.

Ejemplo 2. Sean $\mathcal{C}$ y $\overline{\mathcal{C}}$ dos circunferencias definidas implícitamente por $f = 0$ y $\overline{f} = 0$, respectivamente, donde

$$f = 1 + y + 0.008x^2 + 0.007y^2 \quad \text{y} \quad \overline{f} = 1.004994 + y + 0.012994x^2 + 0.011994y^2,$$

y sea $\epsilon = 0.005$ una tolerancia fijada. Obsérvese que

$$\frac{\|f-\overline{f}\|}{\|\overline{f}\|} = \frac{0.004994}{1.004994} = 0.004969183896 < \epsilon.$$

Sin embargo, como se aprecia en la figura 2, las curvas $\mathcal{C}$ y $\overline{\mathcal{C}}$ no están cerca.

Para abordar el problema de la proximidad utilizaremos el concepto de curva/superficie offset. La curva offset de una curva plana $\mathcal{C}$ a distancia d se obtiene mediante la siguiente manipulación geométrica. Colocamos el centro de una circunferencia de radio d sobre la curva $\mathcal{C}$ y trasladamos dicha circunferencia de forma que su centro vaya recorriendo toda la curva. Los polos "norte y sur" de la circunferencia

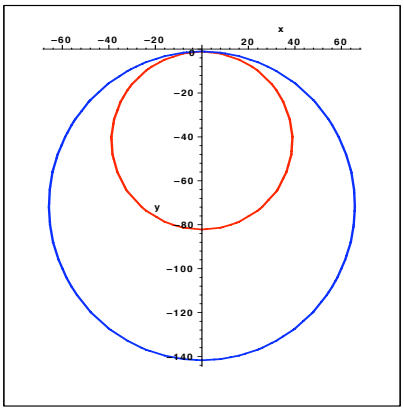

Figura 2: El problema de la proximidad: circunferencias $\mathcal{C}$ y $\overline{\mathcal{C}}$.

en la dirección normal a la curva en cada uno de sus puntos describen una nueva curva a distancia d de $\mathcal{C}$ que se denomina offset de $\mathcal{C}$. Es decir, la curva offset de una curva plana $\mathcal{C}$ es la envolvente del sistema de circunferencias con centro en $\mathcal{C}$ y radio fijo d. De forma análoga se define la noción de superficie offset a distancia d de una superficie; para ello basta tomar esferas en lugar de circunferencias (véanse [2, 38]). Ahora bien, si en lugar de tomar circunferencias (análogamente, esferas) se toman discos aparece la noción de región offset, que representamos como $\mathcal{O}_d^{\mathrm{Reg}}(\mathcal{C})$. El lector interesado en conocer más aspectos algebraicos/geométricos/algorítmicos sobre variedades offsets puede consultar también los trabajos [1, 3, 36, 37].

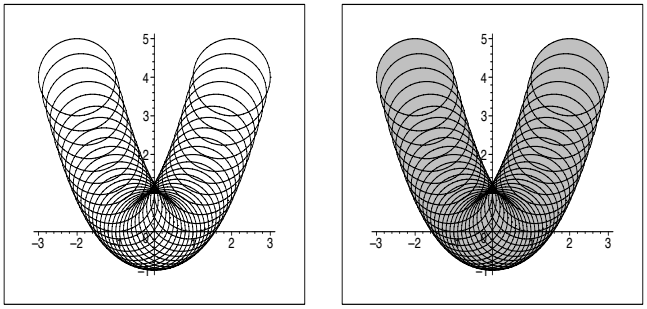

Figura 3: Izq.: generación de la offset de la parábola $y = x^2$ con $d = 1$. Der.: región offset a distancia 1.

Finalmente, utilizamos estos nuevos conceptos para introducir la noción de proximidad. Diremos que $\mathcal{C}$ y $\overline{\mathcal{C}}$ están próximas si para una distancia pequeña $d(\epsilon)$ se verifica que $\overline{\mathcal{C}} \subset \mathcal{O}_{d(\epsilon)}^{\mathrm{Reg}}(\mathcal{C})$ y $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}_{d(\epsilon)}^{\mathrm{Reg}}(\overline{\mathcal{C}})$. Este hecho obliga a que ambas curvas tengan la misma parte real en el infinito. De hecho, la curva input y la curva output, obtenida mediante los algoritmos de las secciones 4 y 5, tienen la misma forma homogénea de mayor grado. En algunas ocasiones resulta complicado conseguir un

resultado global como el anterior. En tales casos, se suele introducir la proximidad exigiendo que, para casi todo $P \in \mathcal{C}$, exista un arco de curva conteniendo a P en el que se da la doble condición sobre la región offset.

3. Épsilon-puntos

La idea básica para enfrentarnos al reto de la parametrización aproximada es intentar ejecutar "de forma aproximada" los pasos de los algoritmos exactos de parametrización y para ello necesitamos trabajar con puntos que "casi" son puntos exactos de la curva/superficie. Aparecen así los ϵ-puntos (recordamos que $\epsilon > 0$ es la tolerancia). Dichos puntos y sus propiedades métricas han sido estudiados con detalle en el artículo [32] para el caso más general de hipersuperficies. Resumimos, en esta sección, los aspectos más relevantes de dicho estudio que son la base teórica de nuestros algoritmos de parametrización aproximada de curvas y superficies; para simplificar, la sección se desarrolla para el caso de curvas planas, pero de forma similar se obtiene el caso de superficies e incluso hipersuperficies.

Sea $f = 0$ la ecuación que define la curva. Un punto P está en la curva (es decir es un punto exacto de la curva) si y sólo si $f(P) = 0$. Para introducir la noción de ϵ-punto utilizaremos esta caracterización. La primera opción es exigir que $f(P)$ sea pequeño en módulo; digamos $|f(P)| < \epsilon$. Sin embargo, $\lambda f = 0$, con λ un escalar no nulo, también define la curva y, por tanto, para todo P siempre podríamos encontrar un λ adecuado de forma que P sea ϵ-punto. Evidentemente, lo que hay que hacer es dividir por la norma del polinomio. De forma más precisa, aparece la siguiente definición.

Definición 3. Diremos que $P^\star \in \mathbb{C}^2$ es un ϵ-punto (afín) de una curva $\mathcal{C}$, definida sobre $\mathbb{C}$ por $f = 0$ donde $f \in \mathbb{C}[x, y]$, si verifica (tomamos la norma infinito)

$$\frac{|f(P^\star)|}{\|f\|} < \epsilon.$$

En el problema de parametrización, las singularidades juegan un papel fundamental. De hecho, las curvas racionales son aquellas curvas irreducibles que poseen el máximo número posible de singularidades (viendo la curva proyectivamente), cota que se obtiene a partir del grado de la curva. Por tanto, antes de continuar, introducimos la noción de singularidad (exacta) de una curva. Para ello, representamos las derivadas parciales de $f(x, y)$ como

$$f^{\overrightarrow{v}}(x, y) := \frac{\partial^{i+j} f}{\partial^i x \, \partial^j y}(x, y)$$

donde $\overrightarrow{v} = (i, j) \in \mathbb{N}^2$; asumimos que $f^{\overrightarrow{0}}(x, y) = f(x, y)$. Asimismo, si $\overrightarrow{v} = (i, j) \in \mathbb{N}^2$, utilizamos la notación $|\overrightarrow{v}| = i + j$. En esta situación, P es una singularidad (exacta) de multiplidad r de la curva $\mathcal{C}$ si se verifica que

1. para todo $\overrightarrow{v} \in \mathbb{N}^2$, tal que $0 \leq |\overrightarrow{v}| \leq r - 1$, se cumple $f^{\overrightarrow{v}}(P) = 0$,
2. existe $\overrightarrow{v} \in \mathbb{N}^2$, con $|\overrightarrow{v}| = r$, tal que $f^{\overrightarrow{v}}(P) \neq 0$.

Ahora, el lector seguramente ha intuido ya que la noción de ϵ-singularidad es como sigue:

Definición 4. $P^\star \in \mathbb{C}^2$ es un ϵ-punto singular (ϵ-singularidad) de multiplicidad r de $\mathcal{C}$, si se verifica que

1. para todo $\overrightarrow{v} \in \mathbb{N}^2$, tal que $0 \leq |\overrightarrow{v}| \leq r-1$, se cumple $\frac{|f^{\overrightarrow{v}}(P^\star)|}{\|f\|} < \epsilon$,
2. existe $\overrightarrow{v} \in \mathbb{N}^2$, con $|\overrightarrow{v}| = r$, tal que $\frac{|f^{\overrightarrow{v}}(P^\star)|}{\|f\|} \geq \epsilon$.

Cuando se trabaja de forma exacta, es evidente que la multiplicidad r de una singularidad está acotada superiormente por $n-1$, donde n es el grado de la curva; es decir el grado total del polinomio irreducible f que define $\mathcal{C}$. Sin embargo, en el caso aproximado (al trabajar con ϵ-singularidades) nos podemos llevar sorpresas. Por ejemplo, si $0 < \epsilon < 1$ y $\mathcal{C}$ es la recta de ecuación $f(x,y) = 0$ con $f(x,y) = \frac{\epsilon}{2}\,x + \frac{\epsilon}{2}\,y - 1$, entonces $P^\star = (0, 2/\epsilon)$ es un punto exacto (y por tanto ϵ-punto) de $\mathcal{C}$, y además para todo $\overrightarrow{v} \in \mathbb{N}^2$ se verifica que $|f^{\overrightarrow{v}}(P^\star)|/\|f\| < \epsilon$. Si volvemos al ejemplo y observamos la ecuación implícita vemos que lo que está sucediendo es que los coeficientes de los monomios no constantes son menores que la tolerancia y, por tanto, cabría pensar que en términos de ϵ el polinomio f es constante y no tenemos curva (¡al menos afínmente!). Para evitar esta "patología" introducimos la noción de grado propio que exigimos a todas las curvas con las que trabajamos (en particular, lo exigimos en la definición 4).

Definición 5. Diremos que un polinomio $f \in \mathbb{C}[x,y]$ tiene grado propio d si el grado total de f es d, y existe $\overrightarrow{v} \in \mathbb{N}^2$, con $|\overrightarrow{v}| = d$ tal que

$$\frac{|f^{\overrightarrow{v}}|}{\|f\|} > \epsilon.$$

Diremos que una curva tiene grado propio d si el polinomio que la define tiene grado propio d.

3.1. Cálculo de ϵ-singularidades

Para calcular las ϵ-singularidades de $\mathcal{C}$ se puede proceder como sigue (d es el grado propio de $\mathcal{C}$, es decir el grado del polinomio f que define $\mathcal{C}$): para cada multiplicidad $1 \leq r \leq d-1$ (obsérvese que como f es propio, $r < d$) se consideran $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in \mathbb{N}^2$, con $\overrightarrow{v_1} \neq \overrightarrow{v_2}$ y $|\overrightarrow{v_1}| = |\overrightarrow{v_2}| = r-1$, para posteriormente calcular las soluciones del sistema $\{f^{\overrightarrow{v_1}}(\overline{x}) = f^{\overrightarrow{v_2}}(\overline{x}) = 0\}$ con precisión $\epsilon\|f\|$. Para ello, se pueden utilizar, por ejemplo, las técnicas en [9]. Para cada una de estas soluciones, digamos $\overline{P}$, se comprueba si $|f^{\overrightarrow{v}}(\overline{P})| < \epsilon\|f\|$, para $0 \leq |\overrightarrow{v}| \leq r-1$, en cuyo caso $\overline{P}$ es una ϵ-singularidad de multiplicidad "al menos" r. Seguidamente, se analiza si la multiplicidad es exactamente r, para lo que basta substituir en las sucesivas derivadas parciales. Conviene indicar que, en general, debido al hecho de que estamos trabajando con polinomios que han sufrido una pertubación, se verifica que $\mathrm{mcd}(f^{\overrightarrow{v_1}}, f^{\overrightarrow{v_2}}) = 1$, de donde se deduce que $\mathcal{C}$ tiene en general una cantidad finita de ϵ-singularidades.

Ejemplo 6. Sea $\epsilon = 0.001$. Se considera la cuártica real ϵ-irreducible $\mathcal{C}$ definida por el polinomio

$$f(x,y) = x^4 + 2y^4 + 1.001x^3 + 3x^2y - y^2x - 3y^3 + 0.00001y^2 - 0.001x - 0.001y - 0.001.$$

Aplicando el proceso descrito anteriormente, en primer lugar se calculan las soluciones del sistema algebraico $\{f^{\overrightarrow{(2,0)}} = 0, f^{\overrightarrow{(0,2)}} = 0\}$ con precisión $\epsilon\|f\| = 2\epsilon$. Obsérvese que las dos ecuaciones son cuadráticas. Se obtienen cuatro soluciones

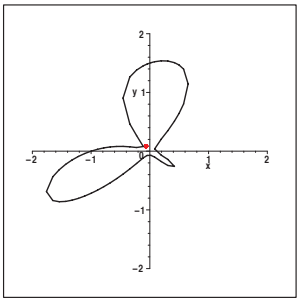

Figura 4: Parte real de la curva $\mathcal{C}$ y ϵ-singularidad triple.

$$\begin{aligned}
P_1 &= (-0.4407467442, 0.05267210590),\\
P_2 &= (-0.2801260036 - 0.5478130832i, 0.7236633221 - 0.06546586258i),\\
P_3 &= (-0.2801260036 + 0.5478130832i, 0.7236633221 + 0.06546586258i),\\
P_4 &= (-0.124860117510^{-5}, 0.124984665810^{-5}).
\end{aligned}$$

Una vez que se han aproximado las soluciones, se comprueba si alguna de las soluciones obtenidas anteriormente, llamémosla $\overline{P}$, es tal que $|f^{\overrightarrow{v}}(\overline{P})| < \epsilon\|f\|$, con $0 \leq |\overrightarrow{v}| \leq 2$, y si existe $\overrightarrow{w}$, con $|\overrightarrow{w}| = 3$, tal que $|f^{\overrightarrow{w}}(\overline{P})| \geq \epsilon\|f\|$. En este caso, P_4 es la única solución que satisface las condiciones anteriores. Por tanto, se deduce que P_4 es una ϵ-singularidad de multiplicidad 3 (véase la figura 4).

3.2. Propiedades métricas de los ϵ-puntos

En las siguientes secciones veremos cómo las ϵ-singularidades de la curva/superficie son nuestra herramienta básica en el problema de la parametrización aproximada. Pero no menos importante es la información que proporcionan los ϵ-puntos a la hora de estimar la proximidad de la curva input con la curva output; es decir entre $\mathcal{C}$ y $\overline{\mathcal{C}}$, véase la sección 1. No obstante, la descripción precisa de estos resultados está repleta de tecnicismos que, con toda seguridad, aburrirán a más de un lector. Así es que, sin que se entienda como una invitación a no leer las líneas que siguen, el lector que lo desee puede obviar esta subsección, con el compromiso por nuestra parte de intentar que el resto del trabajo se pueda seguir aún sin leerla. Sin embargo, antes de que nos abandone usted (si es el caso), déjenos señalar de manera informal la

información más relevante que dan las ϵ-singularidades (como ya se ha indicado, los resultados son válidos para hipersuperficies):

- Sea P^* una ϵ-singularidad de $\mathcal{C}$ de multiplicidad r. Bajo ciertas condiciones mínimas se conoce un radio δ y un vector $\overrightarrow{w}$ de forma que dentro del disco centrado en P^*, y radio δ y sobre la recta que pasa por P^* en la dirección del vector $\overrightarrow{w}$, hay r puntos exactos de $\mathcal{C}$ (véase el teorema 7 y la figura 4).
- Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^*$ dos curvas con grado propio y sea P un punto exacto de $\mathcal{C}$ que es ϵ-punto de $\mathcal{C}^*$, entonces se conoce una cota δ sobre la distancia que garantiza que existe un arco de curva de $\mathcal{C}$ que contiene a P y que está incluido en la región offset de $\mathcal{C}^*$ a distancia d menor que δ (véase el teorema 8).

Para poder ser más precisos, introducimos la siguiente batería de conceptos: sea $P^\star$ una ϵ-singularidad de multiplicidad r de una curva $\mathcal{C}$ de grado propio d y polinomio $f(x,y)$:

- Se dice que $P^\star$ es k-pura si $|f^{r\cdot\overrightarrow{e_k}}(P^\star)| \geq \epsilon\|f\|$, donde $\overrightarrow{e_k}$ es el k-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{C}^2$.
- Sea $\mathcal{D}_{P^\star}$ el conjunto de todas las derivadas parciales de f, de orden estrictamente menor que r, que no se anulan en $P^\star$. Se define la profundidad de $P^\star$ como

$$\mathrm{Profund}(P^\star) = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad \mathcal{D}_{P^\star} = \emptyset, \\ \text{mín}\left\{ \log_\epsilon \left(\dfrac{|g(P^\star)|}{\|f\|} \right) \;\middle|\; g \in \mathcal{D}_{P^\star} \right\} & \text{si} \quad \mathcal{D}_{P^\star} \neq \emptyset. \end{cases}$$

- Sea $\mathcal{D}_{P^\star,r}$ el conjunto de todas las parciales de f de orden r cuyo valor en $P^\star$ es mayor o igual que $\epsilon \cdot \|f\|$. Se define la altura de $P^\star$ como

$$\mathrm{Altura}(P^\star) = \text{máx}\left\{ \log_\epsilon \left(\frac{|g(P^\star)|}{\|f\|} \right) \;\middle|\; g \in \mathcal{D}_{P^\star,r} \right\}.$$

- Se define el peso global de $P^\star$ como

$$\mathrm{Peso}_G(P^\star) = \underset{i=0,\ldots,r-1}{\text{máx}} \left\{ \left| \frac{r! \cdot f^{i\cdot\overrightarrow{e_k}}(P^\star)}{i! \cdot f^{r\cdot\overrightarrow{e_k}}(P^\star)} \right|^{\frac{1}{r-i}} \right\}.$$

Asimismo, consideramos las funciones (introducidas por Sasaki en [35])

$$\mathcal{R}_{\mathrm{in}}(x) = 2x\left(\frac{1}{1+3x} + \frac{16x}{(1+3x)^3}\right), \quad \mathcal{R}_{\mathrm{out}}(x) = \frac{1}{2} - \frac{x(1-9x)}{2(1+3x)} - \frac{32x^2}{(1+3x)^3}.$$

Si asumimos que $\epsilon > 0$ es tal que

$$\epsilon^{\mathrm{Profund}(P^\star)-\mathrm{Altura}(P^\star)} < \frac{1}{9^d \cdot d!},$$

entonces se verifican los siguientes teoremas (véase [32]).

Teorema 7. *Sea $P^\star \in \mathbb{C}^2$ una ϵ-singularidad k-pura de $\mathcal{C}$ de multiplicidad r. Se verifica que*

1. *Existen al menos r puntos exactos, contados con multiplicidad, $P_1, \ldots, P_r \in \mathcal{C}$, sobre la recta que pasa por P^* en la dirección del vector $\overrightarrow{e_k}$, tal que, para $j = 1, \ldots, r$,*
$$\|P^\star - P_j\|_2 < \mathcal{R}_{\text{in}}(\text{Peso}_G(P^\star)).$$
2. *Existen al menos $d - r$ puntos exactos, contados con multiplicidad, $Q_1, \ldots, Q_{d-r} \in \mathcal{C}$, sobre la recta que pasa por P^* en la dirección del vector $\overrightarrow{e_k}$, tal que, para $j = 1, \ldots, d - r$,*
$$\|P^\star - Q_j\|_2 > \mathcal{R}_{\text{out}}(\text{Peso}_G(P^\star)).$$

Teorema 8. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^\star$ curvas algebraicas planas de grado propio y sea $Q \in \mathcal{C}$. Si Q es un ϵ-punto simple de $\mathcal{C}^\star$, entonces en un entorno euclídeo de Q, $\mathcal{C}$ está contenida en la región offset de $\mathcal{C}^\star$ a distancia d, donde*
$$d \leq n \cdot \mathcal{R}_{\text{in}}(\text{Peso}_G(Q)) \leq n \cdot \mathcal{R}_{\text{in}}(\epsilon^{\text{Profund}(Q)-\text{Altura}(Q)}).$$

El siguiente ejemplo procede de [32].

Ejemplo 9. Sea $\mathcal{C}$ la curva definida por
$$\begin{aligned} f(x,y) = &-1.414213562x_1^2x_2 - 3.535533905x_1^3x_2^2 - 1.767766953x_1x_2^4 - 0.00099 \\ &+ 0.375x_2^4 + 0.375x_1^4 + 0.5x_1^2 - 0.5x_2^2 - x_1^3x_2 + 1.25x_1^2x_2^2 - x_1x_2^3 \\ &- 0.3535533905x_1^5 + 0.00006363961029x_1 + 0.00007778174591x_2 \\ &+ 1.414213562x_1x_2^2 \in \mathbb{C}[x,y], \end{aligned}$$
y sea $\epsilon = 0.0001$. En estas condiciones, $P^\star = (0,0)$ es una ϵ-singularidad de multipli-

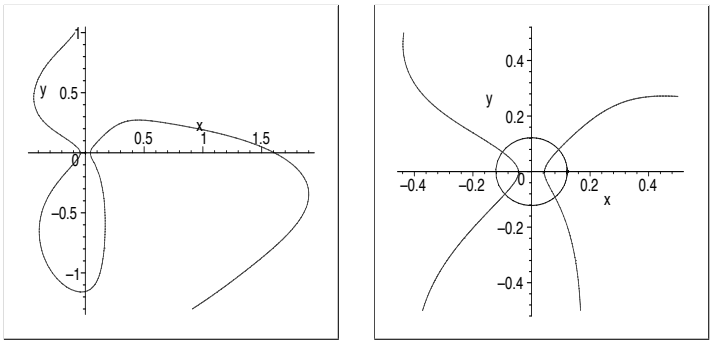

Figura 5: Izq.: $\mathcal{C}$ y el ϵ-punto $P^\star$. Der.: el ϵ-punto $P^\star$, los puntos exactos y el disco de radio $\mathcal{R}_{\text{in}}(\text{Peso}_G(P^\star))$.

cidad 2 de $\mathcal{C}$ (véase la figura 5, izquierda). De hecho $P^\star$ es 1-pura pues $|f^{2\cdot\overrightarrow{e_1}}(P^\star)| \geq \epsilon \cdot \|f\|$. El teorema 7 (1), indica que en el disco centrado en el origen y radio $\mathcal{R}_{\text{in}}(\text{Peso}_G(P^\star)) = 0.1220206068$, y sobre el eje $y = 0$, hay 2 puntos exactos $P_1 = (-0.04452634622, 0), P_2 = (0.04440219917, 0) \in \mathbb{C}^2$ de $\mathcal{C}$ (véase la figura 5, derecha).

4. Parametrización Aproximada de curvas ϵ-monomiales

En las primeras páginas de este trabajo hemos recordado la definición de parametrización racional y de curva paramétrica. Hemos observado también que no toda curva es paramétrica. De hecho las únicas curvas racionales son las irreducibles de género cero (véase [39]). Después de las rectas, el ejemplo de curva paramétrica más sencillo es el de las cónicas irreducibles. Para obtener una parametrización racional de una cónica, se considera un haz de rectas, con punto base sobre la curva. Seguidamente, se determina el punto adicional de intersección de la cónica con el haz de rectas y se obtiene un punto que se expresa racionalmente en función de la pendiente de la recta genérica. Este punto es, de hecho, una parametrización racional de la cónica. Si ahora la curva irreducible es de grado d y tiene una singularidad de multiplicidad $d-1$, se puede repetir el proceso anterior pero tomando la singularidad como punto base del haz de rectas. Las curvas del tipo anterior se llaman curvas monomiales. Así, si $L(x,y,t)=0$ es la ecuación del haz de rectas que pasa por la singularidad, entonces la solución no constante del sistema $\{f(x,y)=0, L(x,y,t)=0\}$ es una parametrización racional de $\mathcal{C}$.

Si la curva es ϵ-irreducible, si tiene grado propio d y una ϵ-singularidad de multiplicidad $d-1$, se dice que es ϵ-monomial (véase el ejemplo 6). En este caso, se procede como sigue. Sea $\mathcal{C}$ una curva real ϵ-monomial de grado propio d y $\overline{P}=(\overline{a},\overline{b})$ la ϵ-singularidad de multiplicidad $d-1$. Suponemos sin pérdida de generalidad (véase el lema 3 en [30]) que $\overline{P}$ es tal que

$$\sum_{|\overrightarrow{(j_1,j_2)}|=d-1}^{d} f^{\overrightarrow{(j_1,j_2)}}(\overline{P})(x-\overline{a})^{j_1}(y-\overline{b})^{j_2}\,\frac{1}{j_1!\,j_2!}$$

es irreducible sobre $\mathbb{C}$. Seguidamente, se considera un haz de rectas $\mathcal{H}_t$ que pasa por $\overline{P}$ con multiplicidad $d-1$. Esto es, $\mathcal{H}_t$ definida por $\mathcal{H}_t(x,y,t)=y-tx-\overline{b}+\overline{a}t$. La idea que se presenta en [30] consiste en calcular la raíz, respecto a x, del cociente de $f(x,tx+\overline{b}-\overline{a}t)$ y $(x-\overline{a})^{d-1}$ (obsérvese que el cociente es lineal en x). Sea esta raíz $\overline{p}_1(t)$. En estas condiciones, se considera la parametrización

$$\overline{\mathcal{P}}(t)=(\overline{p}_1(t), t\overline{p}_1(t)+\overline{b}-t\overline{a}),$$

que resulta ser una parametrización propia aproximada de $\mathcal{C}$.

Teorema 10. *El polinomio que define la curva $\overline{\mathcal{C}}$ generada por la parametrización propia $\overline{\mathcal{P}}(t)=(\overline{p}_1(t),\overline{p}_2(t))$ es $\overline{f}(x,y)=f(x,y)-T(x,y)$, donde $T(x,y)$ es el desarrollo de Taylor de orden $d-1$ de $f(x,y)$ en $\overline{P}$.*

Observamos además que $\overline{\mathcal{C}}$ es una curva de grado d, irreducible (por como ha sido elegida la ϵ-singularidad), y que tiene a $\overline{P}$ como singularidad exacta de multiplicidad $d-1$. Por tanto, o bien se actúa algorítmicamente como se indica arriba o se aplica el algoritmo exacto a $\overline{\mathcal{C}}$. Asimismo, observamos que $\mathcal{C}$ y $\overline{\mathcal{C}}$ tienen la misma estructura en el infinito y, por tanto, asintóticamente la curvas coinciden. Por otra parte, las curvas input $\mathcal{C}$ y output $\overline{\mathcal{C}}$ (curva generada por $\overline{\mathcal{P}}(t)$) son próximas, como se demuestra en el teorema 3 de [30]:

Teorema 11. *La curva input $\mathcal{C}$ está contenida en la región offset de la curva output $\overline{\mathcal{C}}$ a distancia $2\sqrt{2}\,\epsilon^{1/(2d)}\,e^2$ y viceversa.*

Ejemplo 12. Se considera $\epsilon = 0.001$ y la curva $\mathcal{C}$ definida por el polinomio

$$f(x,y) = y^6 + x^6 + 2yx^4 - 2y^4x + 10^{-3}x + 10^{-3}y + 2\cdot 10^{-3} + 10^{-3}x^4.$$

En primer lugar, aplicando el algoritmo presentado en [10] se deduce que el polinomio $f(x,y)$ es ϵ-irreducible. Seguidamente, se deduce que

$$\overline{P} = (0.1875000000\cdot 10^{-5}, -0.50000002\cdot 10^{-3})$$

es una ϵ-singularidad de multiplicidad 5, y aplicando las ideas arriba expuestas se obtiene la curva $\overline{\mathcal{C}}$ parametrizada por $\overline{\mathcal{P}}(t) = (\overline{p}_1(t), \overline{p}_2(t))$, donde

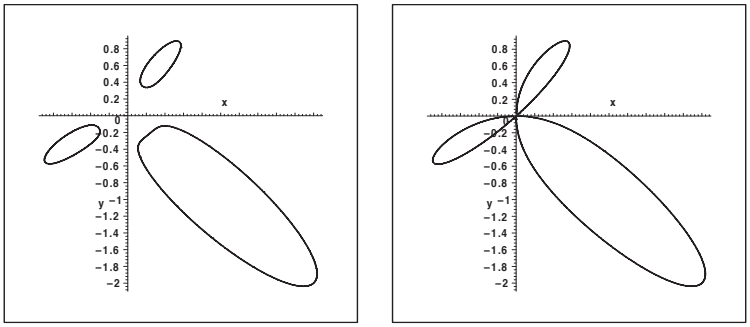

Figura 6: Izq.: curva input $\mathcal{C}$. Der.: curva output $\overline{\mathcal{C}}$.

$$\overline{p}_1 = \frac{0.75000003\big(0.004t^5+2.6666t^4+0.24999999\cdot 10^{-5}t^6-2.66666t-0.124999995\cdot 10^{-4}\big)}{1+t^6},$$
$$\overline{p}_2 = \frac{0.50000002\big(0.0005t^6+3.999t^5-3.999t^2-0.224999\cdot 10^{-4}t-10^{-3}\big)}{1+t^6}.$$

Véase la figura 6 para comparar la curva input con la curva racional obtenida.

5. Parametrización aproximada de superficies ϵ-monomiales

En este apartado presentamos la generalización, al caso de superficies ϵ-monomiales, de los resultados presentados en el apartado anterior sobre la parametrización aproximada de curvas (véase [31] para más detalles). El algoritmo de parametrización aproximada se basa, nuevamente, en el algoritmo simbólico de parametrización por rectas de superficies monomiales. Sea V una superficie irreducible de grado d y supongamos además que V tiene un punto P de multiplicidad $(d-1)$. Entonces V puede ser parametrizada mediante funciones racionales, i.e. V es una superficie paramétrica.

Siguiendo el modelo de curvas, el algoritmo de parametrización por rectas generaliza el procedimiento que se aplica en el caso de grado 2 (es decir, de cuádricas) y que recordamos a continuación. Sea $f(x, y, z)$ la ecuación implícita de la cuádrica irreducible V. Sea $P \in V$ un punto no singular y sea Π un plano que no contiene a P. Consideremos la proyección de V con centro en P sobre Π. Denotamos por $\mathcal{Q}(t, h)$ un punto genérico de Π y sea $\mathcal{H}_\lambda = P + \lambda(\mathcal{Q}(t, h) - P)$ un haz de rectas. Intersecando $\mathcal{H}_\lambda$ y V se obtiene una parametrización $\mathcal{P}(t, h)$ de V. Esto es, de la ecuación $f(\mathcal{H}_\lambda) = 0$ se puede expresar λ racionalmente en función de $\{t, h\}$, y substituyendo en $\mathcal{H}_\lambda$ se obtiene la parametrización de V (véase la figura 7).

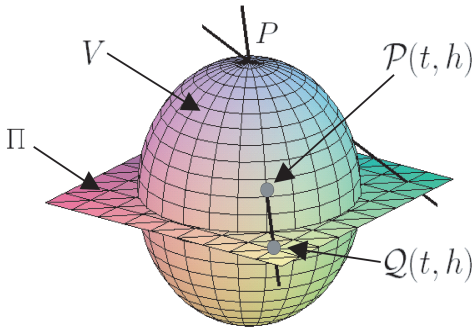

Figura 7: Idea geométrica de la parametrización de cuádricas.

Ejemplo 13. Ilustrada en la figura 7 aparece la esfera V de ecuación $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Los cálculos correspondientes a este ejemplo serían los siguientes. Sea P el punto $P = (0, 0, 1)$ y el plano Π de ecuación $z = 0$; obsérvese que $P \notin \Pi$. Entonces, $\mathcal{Q}(t, h) = (t, h, 0)$, y $\mathcal{H}_\lambda(t, h) = (\lambda t, \lambda h, 1 - \lambda)$. Además, $f(\mathcal{H}_\lambda(t, h)) = \lambda(\lambda t^2 + \lambda h^2 - 2 + \lambda)$. Por lo tanto, si $\lambda = 0$ se obtiene el punto P, y para $\lambda = 2/(t^2 + h^2 + 1)$ se obtiene la parametrización racional de la esfera

$$\mathcal{H}_\lambda(t, h) = \left(\frac{2t}{t^2 + h^2 + 1}, \frac{2h}{t^2 + h^2 + 1}, 1 - \frac{2}{t^2 + h^2 + 1} \right).$$

Cuando la superficie V no es racional pero tiene una ϵ-singularidad de multiplicidad máxima, en [31] se presenta un algoritmo de parametrización basado en parametrizar por rectas una superficie $\overline{V}$ que es cercana a V y además es monomial. Sea V una superficie real, de grado propio d, ϵ-irreducible y sea $\overline{P} = (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ una ϵ-singularidad de multiplicidad $d - 1$ que, similarmente al caso de curvas, es elegida de forma que

$$\sum_{|\overrightarrow{(j_1, j_2, j_3)}| = d-1}^{d} f^{\overrightarrow{(j_1, j_2, j_3)}}(\overline{P})(x - \overline{a})^{j_1}(y - \overline{b})^{j_2}(z - \overline{c})^{j_3} \frac{1}{j_1!\, j_2!\, j_3!}$$

es irreducible sobre $\mathbb{C}$. En esta situación, sea $\mathcal{Q}(t,h) = (q_1(t,h), q_2(t,h), q_3(t,h))$ un punto genérico de un plano que no contiene a $\overline{P}$, y sea el haz de rectas definido por

$$\mathcal{H}_\lambda(t,h) = \overline{P} + \lambda(\mathcal{Q}(t,h) - \overline{P}) = (\overline{a} + \lambda(q_1 - \overline{a}), \overline{b} + \lambda(q_2 - \overline{b}), \overline{c} + \lambda(q_3 - \overline{c})).$$

Sea $\mu(t,h)$ la raíz en $\mathbb{R}(t,h)$ del cociente de $f(\mathcal{H}_\lambda(t,h))$ y λ^{d-1} respecto a λ. Finalmente, se considera la parametrización

$$\overline{\mathcal{P}}(t,h) = \overline{P} + \mu(t,h)(\mathcal{Q}(t,h) - \overline{P}).$$

Teorema 14. *La ecuación implícita de la superficie racional $\overline{V}$ definida por la parametrización $\overline{\mathcal{P}}(t,h)$ es $\overline{f}(x,y,z) = f(x,y,z) - T(x,y,z)$, donde $T(x,y,z)$ es el desarrollo de Taylor de orden $d-1$ de $f(x,y,z)$ en $\overline{P}$.*

Observamos también aquí que $\overline{V}$ es una superficie de grado d, irreducible (por como ha sido elegida la ϵ-singularidad), y que tiene a $\overline{P}$ como singularidad exacta de multiplicidad $d-1$. Por tanto, o bien se actúa algorítmicamente como se indica arriba o se aplica el algoritmo exacto a $\overline{V}$. Asimismo, observamos que V y $\overline{V}$ tienen la misma estructura en el infinito y, por tanto, asintóticamente coinciden. Por otra parte, las superficies input V y output $\overline{V}$ (superficie generada por $\overline{\mathcal{P}}(t,h)$) son próximas, como se demuestra en [31], teorema 6, que enunciamos a continuación.

Teorema 15. *La superficie $\overline{V}$ está contenida en la región offset de la superficie V a distancia $3\sqrt{3}\,\epsilon^{1/(2d)}\,e^3$ y viceversa.*

Ejemplo 16. Sea $\epsilon = 0.001$ y V la superficie definida por el polinomio ϵ-irreducible (véase [34])

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = {} & 34.0330888x + 10.113535y - 178.7688488z + x^4 + z^4 - 15.996z^3 \\ & - 18.985896x^2 + 85.944104z^2 + y^4 + 12.004y^3 + 2.002y^2x \\ & + 8.017004yx + 47.002996zy - 4.004x^3 + 37.042004y^2 - 6.002z^2y \\ & - 13.010996zx + 2.002z^2x + 180.7991556 + xyz - x^2z^2 - y^2z^2 \\ & - x^2y^2 - 6.002x^2y + 7.998y^2z + 7.998x^2z. \end{aligned}$$

Los cálculos muestran que $\overline{P} = (1.001,\ -3.011,\ 3.999)$ es una ϵ-singularidad de multiplicidad 3 y que

$$\sum_{|\overrightarrow{(j_1,j_2,j_3)}|=3}^{4} f^{\overrightarrow{(j_1,j_2,j_3)}}(\,\overline{P}\,)(x-1.001)^{j_1}(y+3.011)^{j_2}(z-3.999)^{j_3}\,\frac{1}{j_1!\,j_2!\,j_3!}$$

es irreducible sobre $\mathbb{C}$. La superficie racional $\overline{V}$ viene definida por el polinomio

$$\begin{aligned} \overline{f}(x,y,z) = {} & 33.9927988x + 10.1094258y - 178.7788588z + x^4 + z^4 - 15.996z^3 \\ & - 18.985896x^2 + 85.944104z^2 + y^4 + 12.004y^3 + 2.002y^2x \\ & + 8.017004yx + 47.002996zy - 4.004x^3 + 37.041404y^2 \\ & + 180.8334578 - 6.002z^2y - 13.000996zx + 2.002z^2x \\ & + xyz - x^2z^2 - y^2z^2 - x^2y^2 - 6.002x^2y + 7.998y^2z + 7.998x^2z. \end{aligned}$$

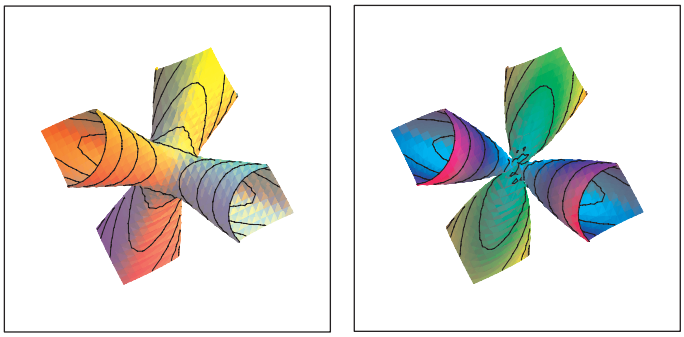

Figura 8: Izq.: Superficie input V. Der.: superficie output $\overline{V}$.

Finalmente, una parametrización racional de $\overline{V}$ es $\overline{\mathcal{P}}(t,h) = (\overline{p}_1(t,h), \overline{p}_2(t,h), \overline{p}_3(t,h))$, donde (véase la figura 8)

$$\begin{aligned}
\overline{p}_1(t,h) = \big(&0.3456018242ht - 0.05005h^2t^2 - 0.1484481ht^2 + 0.1182661h^2t \\
&+ 3.653785283 + 0.6008002h^3 + 0.05005h^4 + 2.558076611h \\
&+ 2.20417217h^2 + 0.7233870993t - 0.1424667228t^2 - 0.2034112t^3 \\
&+ 0.05005t^4 - 0.001ht^3 + 0.002h^3t\big)/\big(0.6028022ht - 0.05h^2t^2 - 0.3011ht^2 \\
&+ 0.1001h^2t + 3.222682417 + 0.6022h^3 + 0.05h^4 + 2.449821864h \\
&+ 2.2200362h^2 + 1.607217612t - 0.6024058t^2 - 0.2002t^3 + 0.05t^4\big), \\
\overline{p}_2(t,h) = \big(&-0.8999824802ht + .14955h^2t^2 + 0.9005901ht^2 - 0.1494491h^2t \\
&- 10.99055693 - 1.7891362h^3 - 0.14855h^4 - 8.122126733h \\
&- 6.735831498h^2 - 3.461717012t + 1.804777743t^2 + 0.6028022t^3 \\
&- 0.15055t^4\big)/\big(0.6028022ht - 0.05h^2t^2 - 0.3011ht^2 \\
&+ 0.1001h^2t + 3.222682417 + 0.6022h^3 + 0.05h^4 + 2.449821864h \\
&+ 2.2200362h^2 + 1.607217612t - 0.6024058t^2 - 0.2002t^3 + 0.05t^4\big), \\
\overline{p}_3(t,h) = \big(&1.95490195ht - 0.19995h^2t^2 - 1.2010999ht^2 + 0.4002999h^2t \\
&+ 14.16943772 + 2.4021998h^3 + 0.19995h^4 + 10.11382961h \\
&+ 8.82374483h^2 + 5.055138342t - 2.399990805t^2 - 0.8005998t^3 \\
&+ 0.19995t^4\big)/\big(0.6028022ht - 0.05h^2t^2 - 0.3011ht^2 \\
&+ 0.1001h^2t + 3.222682417 + 0.6022h^3 + 0.05h^4 + 2.449821864h \\
&+ 2.2200362h^2 + 1.607217612t - 0.6024058t^2 - 0.2002t^3 + 0.05t^4\big).
\end{aligned}$$

6. Caso general (afín ordinario) de curvas planas

Para poder abordar el problema en un contexto más general necesitamos introducir algo más de teoría; al menos de forma intuitiva. En la sección 4 hemos comentado que las curvas racionales (i.e. paramétricas) son exactamente las curvas irreducibles

con género cero. Pero ¿qué es el género de una curva? Para dar una idea intuitiva de este concepto asumiremos, no sólo por simplicidad sino también porque es el caso que analizamos en esta sección, que la curva $\mathcal{C}$ tiene grado d, es irreducible, y todas sus singularidades son ordinarias. Una singularidad es ordinaria si todas las rectas tangentes a la curva en el punto singular son distintas. Por ejemplo, la curva $y^3 = x^2$ tiene un punto doble no ordinario en el origen pues sus dos tangentes son iguales ($x = 0$), mientras que $y^3 = x^2 - y^2$ tiene el origen como punto doble ordinario pues las dos tangentes son distintas ($x = \pm y$).

El género mide la diferencia entre el máximo número de singularidades que puede tener la curva y el que realmente tiene. Es decir, que las curvas paramétricas son aquellas que, siendo irreducibles, tienen el máximo número posible de singularidades. Detallemos un poco más estas afirmaciones. Acordemos que un punto singular (recordemos que son ordinarios) de multiplicidad r "se cuenta como" $r(r-1)/2$ puntos dobles; así un punto doble se cuenta como 1, un triple como 3 dobles, si $r = 4$ como 6 dobles, etc. Entonces, el género de $\mathcal{C}$ es (para detalles teóricos véanse [18, 41], y para cuestiones algorítmicas [39])

$$\text{Género}(\mathcal{C}) = (d-1)(d-2)/2 - \sum r(r-1)/2,$$

donde el sumatorio es sobre los puntos singulares de $\mathcal{C}$ (incluyendo los puntos del infinito) y r es la multiplicidad del punto. Por tanto, las rectas y cónicas irreducibles son racionales, las cúbicas irreducibles con un punto doble son racionales, las cuárticas con un punto triple o con 3 puntos dobles son racionales, las curvas monomiales (véase la sección 6) son racionales, etc.

Seguidamente vemos brevemente las ideas clave sobre la extensión de este proceso al caso aproximado (véase [29]). Es importante mencionar que esta parte del artículo se corresponde con investigación en desarrollo. Como siempre, $\epsilon > 0$ es la tolerancia, $\mathcal{C}$ es una curva ϵ-irreducible, de grado propio d, definida por el polinomio f. En primer lugar, regresamos al cálculo de las ϵ-singularidades (véase la subsección 3.1). En general, uno se encuentra con el siguiente problema (que hasta este momento hemos obviado): los métodos numéricos pueden generar ϵ-singularidades próximas que, de alguna forma, deberían ser identificadas. Para abordar esta dificultad introducimos la noción de cluster. Intuitivamente, dos ϵ-singularidades P y Q de $\mathcal{C}$ están en el mismo cluster si los discos centrados en P y Q con radios $\mathcal{R}_{\text{out}}(\text{Peso}(P))$ y $\mathcal{R}_{\text{out}}(\text{Peso}(Q))$, respectivamente, son una "pequeña perturbación" uno de otro. Más concretamente, decimos que Q está en el cluster de P si se verifica una de las siguientes condiciones:

- $\|P - Q\|_2 + |\mathcal{R}_{\text{out}}(\text{Peso}(P)) - \mathcal{R}_{\text{out}}(\text{Peso}(Q))| < \mathcal{R}_{\text{out}}(\epsilon)$,
- existe una ϵ-singularidad P' tal que

$$\|P' - P\|_2 + |\mathcal{R}_{\text{out}}(\text{Peso}(P')) - \mathcal{R}_{\text{out}}(\text{Peso}(P))| < \mathcal{R}_{\text{out}}(\epsilon),$$
$$\|P' - Q\|_2 + |\mathcal{R}_{\text{out}}(\text{Peso}(P')) - \mathcal{R}_{\text{out}}(\text{Peso}(Q))| < \mathcal{R}_{\text{out}}(\epsilon).$$

Aplicando este criterio, se descompone el conjunto de ϵ-singularidades como unión de un número finito de clusters. Como representante del cluster se toma una de

las ϵ-singularidades de multiplicidad máxima y se define la multiplicidad del cluster como el máximo de las multiplicidades de sus ϵ-singularidades. Representamos los clusters como $\mathfrak{Cl}_r(P)$, siendo P el representante y r la multiplicidad.

En esta situación, si $\{\mathfrak{Cl}_{r_i}(P_i)\}_{i=1,\dots,s}$ es la descomposición en clusters del conjunto de ϵ-singularidades de $\mathcal{C}$, decimos que $\mathcal{C}$ es ϵ-racional si

$$(d-1)(d-2) = \sum_{i=1}^{s} r_i(r_i-1).$$

Para el caso de curvas ϵ-racionales proponemos el siguiente algoritmo de parametrización aproximada:

(1) Calcular las ϵ-singularidades y su descomposición en clusters: $\{\mathfrak{Cl}_{r_i}(Q_i)\}_{i=1,\dots,s}$.

(2) Determinar el sistema lineal de curvas $\overline{\mathcal{H}}_{d-2}$, de grado $(d-2)$, generado por el divisor $\sum_{i=1}^{s} r_i Q_i$.

(3) Calcular $(d-3)$ ϵ-puntos simples $\{P_j\}_{1\le j\le d-3}$ de $\mathcal{C}$; si es posible, tomar ϵ-puntos simples de ramificación (véase [29]).

(4) Determinar el subsistema lineal $\overline{\mathcal{H}}^*_{d-2}$ de $\overline{\mathcal{H}}_{d-2}$ generado por el divisor $\sum_{i=1}^{d-3} P_i$.

(5) Calcular

$$\overline{S}_1(x,t) = \mathrm{Res}_y(\overline{\mathcal{H}}^*_{d-2}(x,y), f(x,y)), \quad \overline{S}_2(y,t) = \mathrm{Res}_x(\overline{\mathcal{H}}^*_{d-2}(x,y), f(x,y)).$$

(6) Calcular, para $j = 1, 2$, los cocientes

$$\overline{Q}_j(z,t) = \mathrm{Cociente}\left(\overline{S}_j(z,t), \prod_{i=1}^{s}(z-q_{i,j})^{r_i(r_i-1)} \prod_{i=1}^{d-3}(z-p_{i,j}), z\right)$$

donde $Q_i = (q_{i,1}, q_{i,2})$ y $P_i = (p_{i,1}, p_{i,2})$.

(7) Devolver $\overline{\mathcal{P}}(t) = (\overline{p}_1(t), \overline{p}_2(t))$; siendo $\overline{p_i}$ la raíz del polinomio, lineal en z, $\overline{Q_i}(z,t)$.

Ejemplo 17. Sea $\epsilon = 0.005$ y $\mathcal{C}$ la curva definida por el polinomio

$$\begin{aligned} f = &-2.199771784x^2 - 0.2197717843x^4y - 0.9016804979x^3y^2 + 1.858817427x^3 \\ &- 1.891680498y^4 + 0.9899999999xy^3 + 0.9899999999x^2y - 1.055726141x^2y^3 \\ &+ 0.3409543568y^2 + 0.9899999999x^4 + 0.9899999999xy^4 + 0.9899999999y^3 \\ &- 0.1869087137x^5 + 5.235497925xy^2 - 1.770497925x^2y^2 + 1.45213693x^3y \\ &- 0.1440456432xy - 0.52786307y^5 + 0.01. \end{aligned}$$

Las ϵ-singularidades son

- [Dobles]
  $P_1 = (-0.9956027274 + 0.0004067223817i, 0.001447687187 + 0.9982777543i)$,
  $P_2 = (1.011706789 - .1320874194i, -1.008532436 + .06832949372i)$,
  $P_3 = (1.007458642, -1.044045331)$, $P_4 = (0.9909273695, -0.9540334161)$,
  $P_5 = (1.011706789 + 0.1320874194i, -1.008532436 - 0.06832949372i)$,
  $P_6 = (-0.9956027274 - 0.0004067223817i, 0.001447687187 - 0.9982777543i)$,
  $P_7 = (0., 0.)$.

- [Triples] $P_8 = (1.000000001, -1)$.

La descomposición en cluster es (véase la figura 9)

$$\mathfrak{C}l_2(P_1) = \{P_1\},\ \mathfrak{C}l_2(P_2) = \{P_2\},\ \mathfrak{C}l_2(P_7) = \{P_7\},\ \mathfrak{C}l_3(P_8) = \{P_3, P_4, P_5, P_6, P_8\}.$$

Y la parametrización que se obtiene es $\overline{\mathcal{P}}(t) = \left(\frac{n_1(t)}{d_1(t)}, \frac{n_2(t)}{d_2(t)}\right)$ donde

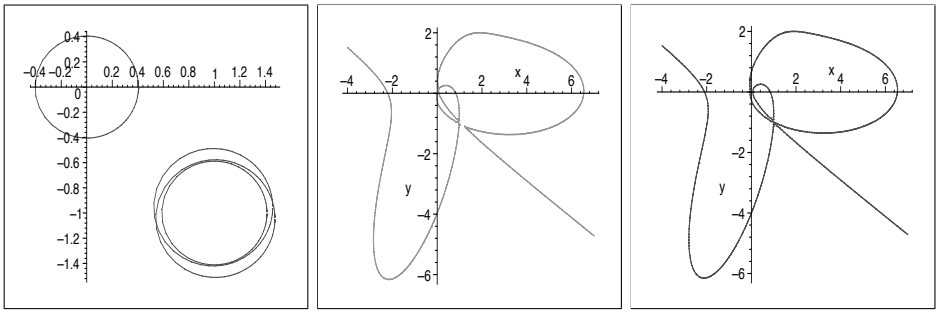

Figura 9: Izq.: clusters. Centro: curva input ϵ-racional. Der.: curva output rational.

$$\begin{aligned}
n_1(t) &= 1.154462791\big(0.5403641494 \cdot 10^{11}t^3 + 0.1384592729 \cdot 10^{11}t + 9206457180t^5 \\
&\quad + 0.3947854957 \cdot 10^{11}t^2 + 0.3575744763 \cdot 10^{11}t^4 + 1852801599\big), \\
d_1(t) &= 0.3322632292 \cdot 10^{11}t^3 + 0.370217989 \cdot 10^{11}t^2 + 0.210345997 \cdot 10^{11}t \\
&\quad + 0.1538809321 \cdot 10^{11}t^4 + 2977040753.t^5 + 4828055274, \\
n_2(t) &= -0.8143453194\big(4408451768 + 4975140963t^5 + 0.2439541243 \cdot 10^{11}t \\
&\quad + 0.520454492 \cdot 10^{11}t^2 + 0.2643475326 \cdot 10^{11}t^4 + 0.5351808835 \cdot 10^{11}t^3\big), \\
d_2(t) &= 0.3322632292 \cdot 10^{11}t^3 + 0.370217989 \cdot 10^{11}t^2 + 0.210345997 \cdot 10^{11}t \\
&\quad + 0.1538809321 \cdot 10^{11}t^4 + 2977040753t^5 + 4828055274.
\end{aligned}$$

Agradecimientos. Este trabajo ha sido desarrollado con el apoyo del proyecto MTM2005-08690-C02-01.

Referencias

[1] J.G. Alcázar y J.R. Sendra (2007). *Local Shape of Offsets to Algebraic Curves.* Journal of Symbolic Computation, vol. 42, pp. 338–351.

[2] E. Arrondo, J. Sendra y J.R. Sendra (1997). *Parametric Generalized Offsets to Hypersurfaces.* J. of Simbolic Computation, vol. 23, pp. 267–285.

[3] E. Arrondo, J. Sendra y J.R. Sendra (1999). *Genus Formula for Generalized Offset Curves*, Journal of Pure and Applied Algebra, vol. 136, no. 3, pp. 199–209.

[4] C. Bajaj (ed.) (1994). *Algebraic Geometry and Its Applications.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York.

[5] C. Bajaj, C.M. Hoffmann, J.E. Hopcroft y R.E. Lynch (1988) *Tracing surface intersections.* Computer Aided Geometric Design, 5, pp. 285–307.

[6] C. Bajaj y A. Royappa (2000). *Parameterization In Finite Precision.* Algorithmica, 27 (1), pp. 100–114.

[7] C. Bajaj y G. Xu (1997). *Piecewise Approximations of Real Algebraic Curves.* Journal of Computational Mathematics, vol. 15, no. 1, pp. 55–71.

[8] J. Caravantes y L. González-Vega (2008). *Diseño Geométrico Asistido por Ordenador: Álgebra, Geometría y Computación.* La Gaceta de la RSME, vol. 11, no. 1, pp. 109–150.

[9] R.M. Corless, P.M. Gianni, B.M. Trager y S.M. Watt (1995). *The Singular Value Decomposition for Polynomial Systems.* Proc. ISSAC1995, pp. 195–207.

[10] R.M. Corless, M.W. Giesbrecht, I.S. Kotsireas, M. van Hoeij y S.M. Watt (2001). *Towards Factoring Bivariate Approximate Polynomials.* Proc. ISSAC2001, pp. 85–92.

[11] R.M. Corless, M.W. Giesbrecht, I.S. Kotsireas y S.M. Watt (2000). *Numerical implicitization of parametric hypersurfaces with linear algebra.* Proc. AISC2000, pp. 174–183, Springer Verlag, LNAI 1930.

[12] J. Demmel y D. Manocha (1995). *Algorithms for Intersecting Parametric and Algebraic Curves II: Multiple Intersections.* Graphical models and image processing: GMIP, vol. 57, no. 2, pp. 81–100.

[13] T. Dokken (2001). *Approximate Implicitization.* Mathematical Methods in CAGD. T. Lyche and L. Schumakes (eds.). Vanderbilt University Press.

[14] I.Z. Emiris, A. Galligo y H. Lombardi (1997). *Certified Approximate Univariate GCDs.* J. Pure and Applied Algebra, vol. 117 and 118, pp. 229–251.

[15] I.Z. Emiris y V. Y. Pan (2002). *Symbolic and Numeric Methods for Exploiting Structure in Constructing Resultant Matrices.* Journal of Symbolic Computation, vol. 33, no. 4, pp. 393–413.

[16] R.T. Farouki y V.T. Rajan (1988). *On the Numerical Condition of Algebraic Curves and Surfaces.* 1. *Implicit Equations.* Computer Aided Geometric Design 5, pp. 215–252.

[17] S. Fortune (2001). *Polynomial root-finding using iterated eigenvalue computation.* Proc. ISSAC2001, pp. 121–128.

[18] W. Fulton (1989). *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry.* Addison Wesley.

[19] J. Gahleitner, B. Jüttler y J. Schicho (2003). *Approximate Parameterization of Planar Cubics.* Proc. Fifth Int. Conference on Curves and Surfaces (Saint-Malo, 2002), pp. 167–176. Mod. Methods Math., Nashboro Press, Brentwood, TN.

[20] A. Galligo y D. Rupprech (2002). *Irreducible Decomposition of Curves.* J. Symbolic Computation, 33, pp. 661–677.

[21] G.H. Golub y C.F. Van Loan (1989). *Matrix Computations.* The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London.

[22] L. González-Vega, I. Necula, S. Pérez-Díaz, J. Sendra y J.R. Sendra (2003). *Algebraic Methods in Computer Aided Geometric Design: Theoretical and Practical Applications.* Geometric Computation, F. Chen and D. Wang (eds.), pp. 1–33. World Scientific, Singapore and New Jersey.

[23] E. Hartmann (2000). *Numerical Parameterization of Curves and Surfaces.* Computer Aided Geometry Design 17, pp. 251–266.

[24] C.M. Hoffmann (1993). *Geometric and Solid Modeling.* Morgan Kaufmann Publ.

[25] J. Hoschek y D. Lasser (1993). *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design.* A. K. Peters, Wellesley, MA.

[26] H.M. Möller (1998). *Gröbner Bases and Numerical Analysis,* in: B. Buchberger and F. Winkler (eds.): Gröbner Bases and Applications. LNS 251, pp. 159–178.

[27] V.Y. Pan (1996). *Numerical Computation of a Polynomial GCD and Extensions.* Tech. report no. 2969. Sophia-Antipolis, France.

[28] V.Y. Pan (2001). *Univariate polynomials: nearly optimal algorithms for factorization and root finding.* ISSAC2001, London, Ontario, Canada. ACM Press, New York, USA, pp. 253–267.

[29] S. Pérez-Díaz, S.L. Rueda, J. Sendra y J.R. Sendra (2008). *Approximate Parametrization of Algebraic Affine Plane Curves.* Actas del Congreso EACA2008 (en prensa).

[30] S. Pérez-Díaz, J. Sendra y J.R. Sendra (2004). *Parametrization of Approximate Algebraic Curves by Lines.* Theoretical Comp. Science. vol. 315/2-3. pp. 627–650.

[31] S. Pérez-Díaz, J. Sendra y J.R. Sendra (2005). *Parametrization of Approximate Algebraic Surfaces by Lines.* Comp. Aided Geom. Design, vol. 22/2, pp. 147–181.

[32] S. Pérez-Díaz, J. Sendra y J.R. Sendra (2006). *Distance bounds of ϵ-points on hypersurfaces.* Theoretical Computer Science, vol. 359, pp. 344–368.

[33] S. Pérez-Díaz, J.R. Sendra y C. Villarino (2007). *Finite Piecewise Polynomial Parametrization of Plane Rational Algebraic Curves.* Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, vol. 18, no. 1-2, pp. 91–105.

[34] T. Sasaki (2001). *Approximate multivariate polynomial factorization based on zero-sum relations.* Proc. ISSAC2001, pp. 284–291.

[35] T. Sasaki y A. Terui (2002). *A Formula for Separating Small Roots of a Polynomial.* ACM, SIGSAM Bulletin, vol. 36, no. 3, pp. 19–23.

[36] F. San Segundo y J.R. Sendra (2005). *Degree Formulae for Offset Curves.* Journal of Pure and Applied Algebra, vol. 195, pp. 301–335.

[37] J. Sendra y J.R. Sendra (2000). *Rationality Analysis and Direct Parametrization of Generalized Offsets to Quadrics.* Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, vol. 11, no. 2, pp. 111–139.

[38] J. Sendra y J.R. Sendra (2000). *Algebraic Analysis of Offsets to Hypersurfaces.* Mathematische Zeitschrift, vol. 234, pp. 697–719.

[39] J.R. Sendra, F. Winkler y S. Pérez-Díaz (2007), *Rational Algebraic Curves: A Computer Algebra Approach.* Series: Algorithms and Computation in Mathematics, vol. 22. Springer Verlag.

[40] H. Stetter (1997). *Stabilization of polynomial systems solving with Groebner bases.* In Proceedings of ISSAC1997, pp. 117–124.

[41] R.J. Walker (1950). *Algebraic Curves.* Princeton University Press, Princeton.

Sonia Pérez-Díaz, Dpto. de Matemáticas, Universidad de Alcalá
Correo electrónico: sonia.perez@uah.es

Sonia L. Rueda, Dpto. de Matemática Aplicada, E.T.S. Arquitectura, Universidad Politécnica de Madrid
Correo electrónico: sonialuisa.rueda@upm.es

Juana Sendra, Dpto. de Matemática Aplicada, E.U.I.T. Telecomunicación, Universidad Politécnica de Madrid
Correo electrónico: jsendra@euitt.upm.es

J. Rafael Sendra, Dpto. de Matemáticas, Universidad de Alcalá
Correo electrónico: rafael.sendra@uah.es