Trabajo Fin de Máster
Grafos, la película.

Propuesta didáctica para trabajar la teoría de grafos en Educación Secundaria a través del cine

Presentado por:
D. Eduardo Redondo Ramiro
Dirigido por:
Dª Evangelina Herranz Prada

Alcalá de Henares, a 9 de Julio de 2019

Contenido

1. Resumen

El presente Trabajo Fin de Máster trata de presentar una manera de acercar las matemáticas a los alumnos de Secundaria Obligatoria y Bachillerato de forma motivadora. Esa forma tiene como hilo conductor el cine, tanto las películas en sí, como temas relacionados con esta actividad artística. Se ha propuesto la teoría de grafos para ejemplificar este método. Para ello en cada curso de ESO y de Bachillerato se han propuesto películas, sagas o temas relacionados. Para cada uno de ellos se ha presentado una propuesta didáctica para trabajar matemáticas a través del cine.

1.1. Abstract

This Master's Thesis aims to present a way to bring mathematics to the students of Secondary in a motivating way. That way has as a thread the cinema, both the films themselves, and topics related to this activity. Graph theory has been proposed to exemplify this method. To this end, films, sagas or related topics have been proposed in each ESO and Bachillerato course. For each one of them, a didactic proposal has been presented to work on mathematics through cinema.

2. Introducción

La elección del tema del trabajo “Grafos, la película. Propuesta didáctica para trabajar la teoría de grafos en Educación Secundaria a través del cine” surgió al ver que se podían unir dos de las actividades con las que me siento identificado, además se podían complementar entre sí. La primera película en la que pensé, “El indomable Will Hunting”, ya introducía los grafos y según investigaba más películas tenían relación con este tema. Se han quedado en el tintero varios títulos, que por el alcance del trabajo no se han podido añadir.

2.1. Objetivo

El objetivo del trabajo es exponer como se puede acercar al alumnado las matemáticas a través del cine, en particular a la teoría de grafos. Los grafos son una parte de las matemáticas que no aparece en la mayoría de las programaciones didácticas de los departamentos de matemáticas de los centros de Educación Secundaria, a pesar de poder incluirlo y de que está muy relacionado con el mundo actual en el que vivimos.

El aburrimiento y la poca relación de los estudiantes con las materias que se imparten es una de las grandes razones de los problemas que se dan en la Educación actual. La motivación es una de las razones que generan más implicación y el logro académico es superior. Por tanto, acercar las enseñanzas y generar motivación debe ser un objetivo fundamental en la preparación de las clases y de las programaciones didácticas. Según Dale Schunk,, en *Teorías del aprendizaje*, “cuando la motivación y las emociones se regulan de manera apropiada, influyen de manera positiva en la atención, el aprendizaje y la memoria” Schunk (2012).

En este sentido, debemos, como docentes buscar formas de motivar al alumnado en cada una de las materias . Para ello se debe buscar formas de ocio de los estudiantes y una vez conocidas, saber relacionarlas con la asignatura.

El cine en la actualidad es una de las formas de ocio más populares, más comunes a todo tipo de alumnado. Es una forma adecuada al propósito que se busca. Puede servir para cualquier materia, para cualquier tema, para cualquier curso y para cualquier tipo de alumnado, dada la gran cantidad de películas accesibles. Cualquier película es accesible a todos los discentes.

La comunidad educativa ha tenido, en muchas ocasiones, prejuicios a la hora
de utilizar el cine como recurso didáctico. En algunas ocasiones, sobre todo en docentes más conservadores no son utilizados en absoluto. En otras ocasiones, se sobrevaloran estas posibilidades, y se limitan a la proyección de una película, creyendo que los alumnos por osmosis van a asimilar los conceptos y aprenderlos (Arroio, 2012).

3. Fundamentación teórica

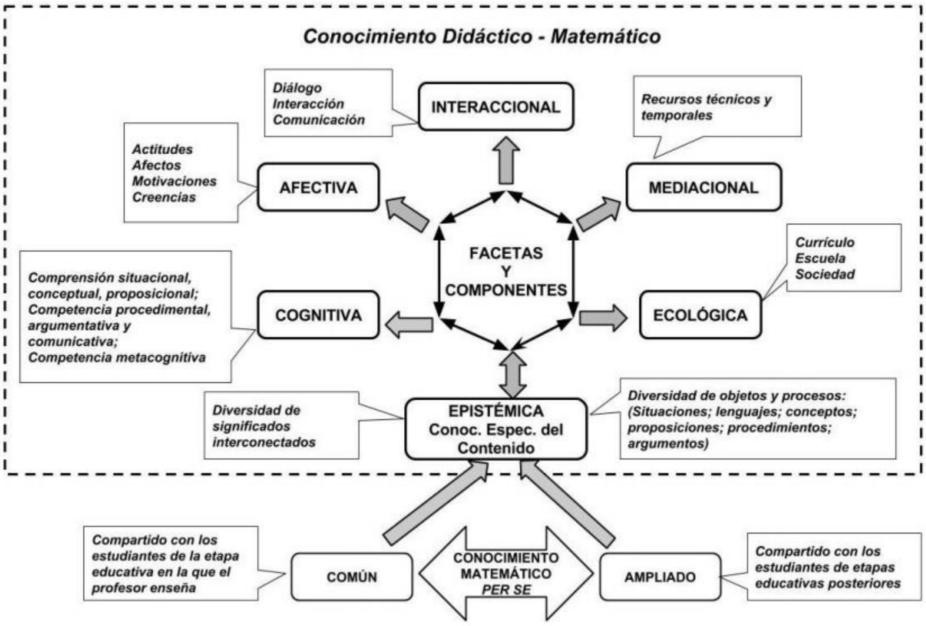
Arroio (2012), en su método para contextualizar contenidos científicos, propone y es un buen punto de partida:

- Hacer la ciencia, en particular las matemáticas, más interesante y cercana para el estudiante.
- Facilitar el aprendizaje, en este caso, de las matemáticas.
- Convencer al alumno a reflexionar sobre la utilidad de las matemáticas.

La teoría del Enfoque Ontosemiótico (EOS), con origen en la Universidad de Granada en los primeros 90 del siglo XX, "sistema teórico que trata de integrar diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática. Dicho enfoque se apoya en presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas, y adopta principios didácticos de tipo socio-constructivista interaccionista para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje" (Godino; Giacomone; Batanero; Font,2017).
Está basado en 5 nociones teóricas:

1. Sistema de prácticas (operativas y discursivas).
2. Configuración de objetos y procesos matemáticos, emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas
3. Configuración didáctica
4. La dimensión normativa
5. La noción de idoneidad didáctica

Así se puede representar el, visto en Facetas y componentes del conocimiento del profesor de Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016)



Fuente: Godino, J. D.; batanero, C.; Font, V.; Giacomone, B. (2016) Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo

El modelo profundiza en el significado de la idoneidad, en el contexto de procesos instruccionales en la materia de Matemáticas

Se ha intentado encontrar películas que tuvieran relación con el tema escogido, sin tener claro de antemano que existiesen películas que tuvieran esta relación. Por tanto, se puede intuir, que, en general, cualquier tema es tratado en alguna película. Y así, el cine puede convertirse en un enlace de cualquier disciplina con el ocio de los estudiantes.

Una vez seleccionada la película o tema cinematográfico, comienza la labor de diseño de la actividad propuesta. Los objetivos que se pretenden alcanzar intentan acercar nuevos conceptos y procedimientos matemáticos, trabajando en la Zona de Desarrollo Próximo (ZPD) del alumno. Vygotsky definió la ZDP como "la distancia entre el nivel de desarrollo real (determinado por la resolución independiente de problemas) y potencial (determinado por la resolución de problemas bajo la guía de un adulto o en colaboración con compañeros más expertos)" (Vygotsky, 1978)

Se recomendará cada película a los discentes, utilizándola para realizar comentarios y ejemplos que acerquen la materia a partir de ellas.

¿Por qué grafos? Patiño y Charry en su investigación *La enseñanza de la teoría de grafos como estrategia para desarrollar procesos de matematización* demuestran "… la importancia de la enseñanza de la teoría de grafos, no sólo por la oportunidad que brinda para desarrollar procesos de matematización, sino porque esta teoría puede ser aplicada en muchos campos del conocimiento como la lingüística, la investigación operativa, la electricidad, la genética, la sociología, etc. (Núñez y otros, 2004). También, la teoría de grafos facilita la didáctica en cursos básicos y al mismo tiempo permite una mayor rigurosidad matemática para un curso avanzado.” (Patiño y Charry, 2013)

También Núñez en *Jugueteando con grafos* escribe: “tanto la utilización de la Teoría de Grafos en las clases, que sugerimos totalmente convencidos, como la de cualesquiera otras técnicas y recursos que se consideren adecuados, siempre debe ser una aspiración a utilizar por los profesores de cualquier disciplina, tanto actuales como futuros.” (Núñez, 2016)

Miguel de Guzmán propuso la inserción de la teoría de Grafos en Secundaria, incluso en Primaria en diferentes ocasiones. Por ejemplo en el vídeo de “Matemáticas, clave de la vida” de Programa Milenium de TV3: https://youtu.be/21L1FKvVNkg?t=875 a partir del 15:15.

3.1. Grafos en Secundaria

En la actualidad hay pocos Centros de Educación Secundaria en los que la teoría de grafos se trabaja. Algunos de ellos están descritos en el listado “Institutos que imparten Teoría de Grafos” expuesto a continuación. La mayoría lo utilizan en la Unidad Didáctica sobre Matrices, relacionándolas con la Matriz de adyacencia.

Pero no es el único punto donde se podrían añadir. Para ello se exponen algunas conexiones con la realidad. Estos problemas se pueden modelizar mediante la teoría de grafos:

- Redes sociales.
- Inteligencia artificial.
- Logística.
- Genética.
- Robótica.
- Psicología.
- Traducción.
- Procesamiento de imágenes.
- Búsqueda de isómeros.

- Epidemias (virus reales o informáticos).
- Redes informáticas.

Un curso sencillo sobre teoría de Grafo en la vida real se puede encontrar en "Aplicaciones de la Teoría de Grafos a la vida real | | UPV" en el siguiente enlace

https://www.youtube.com/watch?v=YxrTSAedNY4&list=PL6kQim6ljTJu44dsVeZifHHiuDC1MEZ7q

Ejemplos interesantes de grafos que se pueden trabajar en Secundaria o Bachillerato y que modelizan los problemas expuestos anteriormente:

- Camino mínimo
- ¿Quién es el líder?
- Coste de transportes
- Puentes de Konigsberg
- Colores de un mapa
- Teorema de la amistad
- Apretón de manos o beso

3.1.1. Grafos en el currículo

En cada Película seleccionada se añade un punto para detallar con que contenido del currículo se relaciona.

3.1.2. Institutos que imparten Teoría de Grafos

Algunos Institutos que han añadido los grafos al currículo:

- I.E.S. Guadalpeña, Arcos de la Frontera (Cádiz):

Matemáticas Aplicadas de 2º Bachillerato

https://xn--iesguadalpea-khb.es/sites/default/files/Teoria%20para%20grafos%20y%20ejercicios.pdf

- I.E.S. El Escorial, El Escorial (Madrid)

Matemáticas II de 2º Bachillerato

http://www.ieselescorial.org/wp-content/uploads/2017/01/matrices-y-grafos.pdf

- I.E.S. Francisco Ayala Hoyo de Manzanares (Madrid)

Matemáticas de 2º Bachillerto de Ciencias Sociales

https://studylib.es/doc/6043903/matrices.-grafos---ies-francisco-ayala

- I.E.S. Zaframagón Olvera (Cádiz)

Matemáticas de 2º Bachillertao de Ciencias Sociales

http://ieszaframagon.com/matematicas/mat_sociales2/matrices/1_matrices_y_grafos.html

- I.E.S. Ezequiel González (Segovia)

http://www.iesezequielgonzalez.com/matematicas/grafos.htm

- I.E.S. Alba Longa, Armilla (Granada)

http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/18700232/helvia/sitio/index.cgi?wid_seccion=12&wid_item=27

- I.E.S. Aguas Vivas, Guadalajara (Guadalajara)

  Proyecto LOS PUENTES DE KONISBERG

http://mejoradeliesaguasvivas.blogspot.com/p/los-puentes-de-konisberg.html

3.1.3. Historia de la Teoría de Grafos

Se presenta en este apartado una breve fundamentación teórica de la teoría de grafos. Aunque en cada una de las películas se ahondará en cada elemento de la teoría necesaria para entender el porqué de la elección de cada una de ellas.

Es una rama de las matemáticas y de la computación originada en el siglo XVIII a partir de los puentes de Königsberg, la actual Kaliningrado. Un problema que consistía en encontrar una manera de cruzar los7 puentes que cruzaban el rio de la ciudad, el río Pregel, pasando por cada puente una sola vez. Leonard Euler trató este problema en 1736, primer trabajo sobre la teoría de grafos y topología, que no depende de ninguna medida.

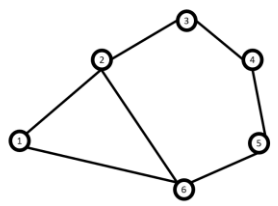
Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_los_puentes_de_K%C3%B6nigsberg

En 1847, Kirchhoff G. analizó las redes eléctricas utilizando la teoría de para calcular el voltaje y la corriente en los circuitos eléctricos, es la primera aplicación de esta teoría a la ingeniería.

Francis Guthrie en 1852 planteó el problema de los cuatro colores que afirmaba que utilizando cuatro colores, se puede colorear cualquier mapa de tal forma que dos vecinos nunca tengan el mismo color. Esta afirmación fue resuelta hasta 1976 por Kenneth Appel y Wolfgang Haken. Durante el transcurso de este periodo, al intentar resolverlo se han definido los términos y conceptos fundamentales de grafos.

3.1.4. Definiciones

Un **grafo** G se define como un par de conjuntos, G={V, E}, donde V es un conjunto de nodos y E es un conjunto de enlaces entre pares de V, el enlace e_{ij} que va entre los nodos v_i y v_j es decir E pertenece a VxV.



Fuente: Propia

En este ejemplo los vértices o nodos V son {1, 2, 3, 4, 5, 6} y sus aristas o enlaces A = {12, 16, 26, 23, 34, 45, 56}.

Matriz de adyacencia – Todo grafo se puede representar por una matriz cuadrad de tamaño el número de nodos. Cada elemento m_{ij} de la matriz valdrá 1 si hay enlace entre v_i y v_j y 0 si no existe ese enlace.

Los grafos **conexos** son aquellos tales que si cada dos vértices cualesquiera, están conectados por un camino. Los grafos simples son los que sólo 1 arista une dos vértices cualesquiera.

Enlaces dirigidos y no dirigidos Si se asigna un sentido a las aristas, por ejemplo en el grafo que relaciona padres e hijos en una familia, la relación "ser padre de" genera enlaces dirigidos. Este tipo de grafos se les conoce por digrafos. Los enlaces no orientados son en realidad bidireccionales. Los grafos simples no dirigidos tienen matriz de adyacencia simétrica.

Ponderados o etiquetados. Se puede atribuir a cada arista un número específico. Ejemplos de grafos ponderados existen en muchos ámbitos de la vida, por ejemplo, la relación entre los actores de todo el mundo, si los relacionamos mediante el número de películas que han realizado juntos.

4. Propuesta didáctica

En cada una de las películas expondremos

- **Relación con el currículo**: El curso y el bloque dentro del que proponemos que se realice la actividad
- **Sinopsis**. De la película, así como los datos de la película (Director, año, actores, etc.)
- **Grafos en la película**. Escenas en la que aparecen reflejados los grafos y que parte de la teoría destacamos
- **Actividad**. Además de ver la película proponemos algunas actividades relacionadas con los grafos y la película en cuestión.

En el momento de evaluar los estándares descritos, estas propuestas didácticas podrán ser tenidas en cuenta por el docente, según se establezca en la Programación didáctica.

4.1. 28 días después- 1º ESO – Camino mínimo

4.1.1. Relación con el currículo

Matemáticas. 1º y 2º ESO

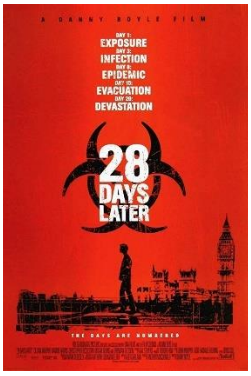
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc. Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a). la recogida ordenada y la organización de datos; b). la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos; c). facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico; d). el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas; e). la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos; f). comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones. 4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc. 5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. 8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. 9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. 10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras. 11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada. 2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. 2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. 3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. 3.2. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad. 4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución. 4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad. 5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas, utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico y estadístico-probabilístico. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. 7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados. 8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. 8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. 8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. 8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas. 9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad. 10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares. 11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos.

Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 diciembre

Bloque 3. Geometría		
Propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros. Cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico.	2. Utilizar estrategias, herramientas tecnológicas y técnicas simples de la geometría analítica plana para la resolución de problemas de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas, utilizando el lenguaje matemático adecuado expresar el procedimiento seguido en la resolución.	2.1. Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas.

Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 diciembre

4.1.2. Sinopsis



Fuente: Cartel de "28 días después" en www.imdb.con

"28 días después", en el original inglés "28 Days Later" es una película a cerca de la epidemia zombi que comienza en un laboratorio universitario en Cambridge. Un grupo de activistas por los derechos de los animales ocasiona un accidente, y ocasiona la epidemia, que se extiende ya que el periodo de incubación es, alrededor, de 30 segundos. Aunque realmente no son zombis, sino enfermos, se puede considerar como una película que pertenece a dicho género.

La película son las aventuras de Jim, que ha despertado de un coma 28 días después de que comenzase la epidemia y encuentra Londres totalmente devastado.

La película tiene una secuela, “28 semanas después”, que también fue un éxito de taquilla.

Más información en:

https://www.filmaffinity.com/es/film502524.html

https://www.imdb.com/title/tt0289043

https://es.wikipedia.org/wiki/28_Days_Later

4.1.3. Grafos en la película

El camino mínimo es uno de los problemas básicos en la teoría de grafos. Se trata de calcular cual es el camino mínimo para llegar de un nodo a otro. Es interesante en los grafos ponderados, que dan un peso a la arista o enlace.

Un ejemplo típico es calcular los días y el camino que recorrería un peregrino para ir de Pamplona a Santiago de Compostela, sabiendo los días que tardaría entre los distintos nodos del grafo, es decir las ciudades que hay entre Pamplona y Santiago.

Ejemplos de este problema hay muchos. En particular se utiliza para cálculo de tiempos de transmisión de epidemias. Saber si se convertirá en pandemia, etc.

Además del camino mínimo existen otros modelos, más complicados como son, por ejemplo:

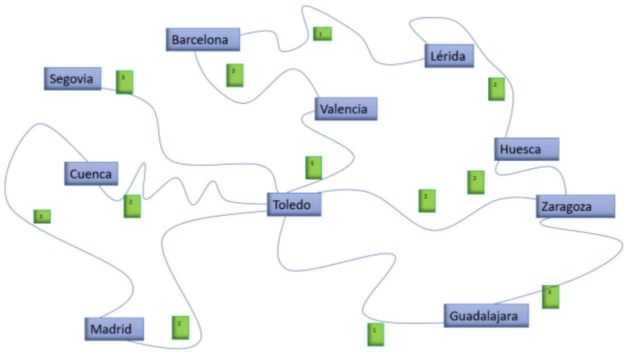
- SIR (susceptible-infectado-recuperado)
- SIS (susceptible-infectado- susceptible)
- SZM (modelo de propagación zombi)

Estos modelos suponen que cualquiera puede infectar a cualquiera, pero utilizando la teoría de grafos se puede obtener información más exacta. Suponiendo las personas con las que un infectado puede tener contacto, el tiempo de transmisión etc.

4.1.4. Actividades

4.1.4.1. Actividad 1: Camino mínimo

Diseño: en video de Juan Antonio Gómez. Algoritmo de Dijkstra (1) - Teoría de Grafos
Se propone la siguiente actividad:
Calcular el número de días que tardará la epidemia en propagarse hasta Barcelona, y el camino que seguirán los propagadores. Suponiendo, que debido a la epidemia no hay gasolineras abiertas y por tanto para viajar de una ciudad a otra se tardan los días que aparecen en el grafo:



Fuente: Propia

Suponemos que la epidemia ha comenzado en Madrid.

Solución.

Mediante el proceso utilizado en el video, el algoritmo de Dijkstra:

https://www.youtube.com/watch?v=fgdCNuGPJnw

Vértice	Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	Paso 6
Madrid	(0,A)	*	*	*	*	*
Guadalajara	-	(3,C)	(3,C)	*	*	*
Toledo	(2,A)	(2,A)	*	*	*	*
Cuenca	(3,A)	(3,A)	*	*	*	*
Segovia	-	(5,C)	*	*	*	*
Zaragoza	-	(4,C)	(4,C)	*	*	*
Valencia	-	(7,C)	(7,C)	*	*	*
Huesca	-	-	-	(6,F)	*	*
Lérida	-	-	-	-	(8,H)	*
Barcelona	-	-	-	(10,G)	(10,G)	(9,I)

Fuente: Propia

Fuente: Propia

4.1.4.2. Actividad 2: Camino mínimo con Excel

Diseño: Propio, basado en vídeo de Naju C, Resolver Ruta Más Corta con Solver de Excel bien explicado

Realizar un estudio de la distancia entre Madrid y Barcelona, suponiendo número de autobuses según el grafo de la actividad anterior.

Se implementará mediante un Excel de la siguiente manera:

https://www.youtube.com/watch?v=62-m5QFNEWU

Ciudad1	Ciudad2	Nº Autobuses	camino
Cuenca	Toledo	2	0
Guadalajara	Zaragoza	3	0
Huesca	Lerida	2	1
Lerida	Barcelona	1	1
Madrid	Cuenca	3	0
Madrid	Toledo	2	1
Toledo	Guadalajara	1	0
Toledo	Segovia	3	0
Toledo	Valencia	5	0
Toledo	Zaragoza	2	1
Valencia	Barcelona	3	0
Zaragoza	Huesca	2	1

Nodo	Flujo	Condicion	condicion2
Barcelona	-1	=	-1
Cuenca	0	=	0
Guadalajara	0	=	0
Huesca	0	=	0
Lerida	0	=	0
Madrid	1	=	1
Toledo	0	=	0
Valencia	0	=	0
Zaragoza	0	=	0
Distancia	9		

Fuente: Propia

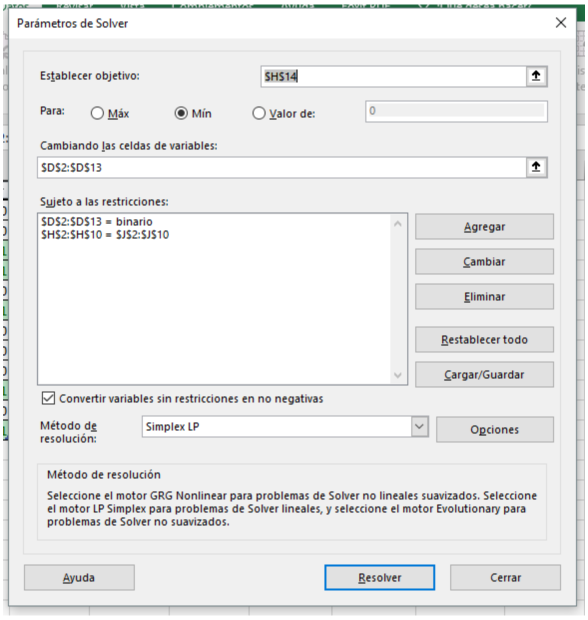
La actividad se propone utilizando Solve, un complemento de Excel. Para instalar este complemento se puede ver el Anexo. Instalar Solve

Utilizando las siguientes formulas=

H2=SUMAR.SI(A$2:A$13,G2,D$2:D$13)-SUMAR.SI(B$2:B$13,G2,D$2:D$13)

H14=SUMAPRODUCTO(C2:C13,D2:D13)

Y



Fuente: Propia

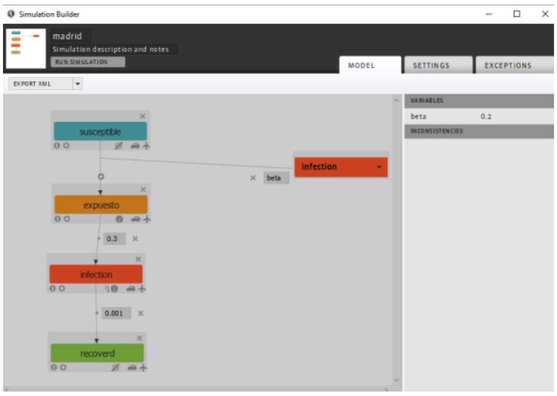
Se puede ver un ejemplo en:

https://www.youtube.com/watch?v=62-m5QFNEWU

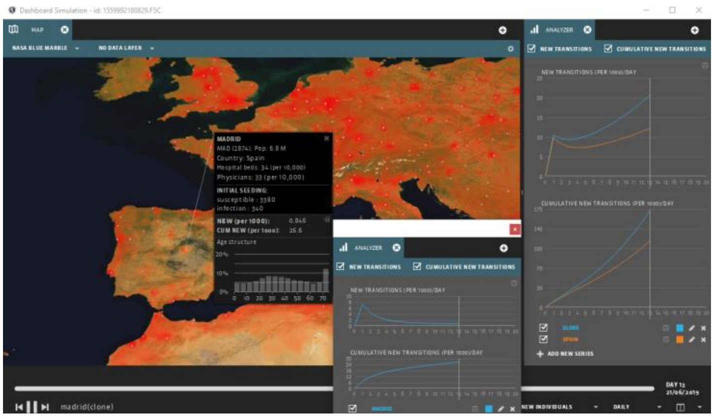
4.1.4.3. Actividad 3: Estudio real de epidemias

Diseño: Basado en ejemplo de https://sim.gleamviz.org/

Mediante la aplicación GLEAMviz, que se puede descargar sencillamente desde https://sim.gleamviz.org/ se pueden realizar sencillas simulaciones de cómo se transmitiría una enfermedad, sabiendo (o inventando para la simulación) los datos de cómo se contagia, tasas de recuperación etc.



Fuente: https://sim.gleamviz.org/



Fuente: https://sim.gleamviz.org/

4.2. Red Social - 2º ESO – Ranking ELO

4.2.1. Relación con el currículo

Matemáticas. 1º y 2º ESO

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc. Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a). la recogida ordenada y la organización de datos; b). la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos; c). facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico; d). el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas; e). la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos; f). comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones. 4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc. 5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. 8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. 9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. 10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras. 11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada. 2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. 2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. 3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. 3.2. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad. 4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución. 4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad. 5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas, utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico y estadístico-probabilístico. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. 7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados. 8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. 8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. 8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. 8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas. 9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad. 10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos.

Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 diciembre

Bloque 2. Números y Álgebra		
Divisibilidad de los números naturales. Criterios de divisibilidad. Números enteros. Representación, ordenación en la recta numérica y operaciones. Operaciones con calculadora. Fracciones en entornos cotidianos. Fracciones equivalentes. Comparación de fracciones. Representación, ordenación y operaciones. Números decimales. Representación, ordenación y operaciones. Relación entre fracciones y decimales. Conversión y operaciones. Potencias de números enteros y fraccionarios con exponente natural. Operaciones. Potencias de base 10. Utilización de la notación científica para representar números grandes. Jerarquía de las operaciones.	1. Utilizar números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria. 2. Conocer y utilizar propiedades y nuevos significados de los números en contextos de paridad, divisibilidad y operaciones elementales, mejorando así la comprensión del concepto y de los tipos de números.	1.2. Calcula el valor de expresiones numéricas de distintos tipos de números mediante las operaciones elementales y las potencias de exponente natural aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones. 1.3. Emplea adecuadamente los distintos tipos de números y sus operaciones, para resolver problemas cotidianos contextualizados, representando e interpretando mediante medios tecnológicos, cuando sea necesario, los resultados obtenidos. 2.4. Realiza cálculos en los que intervienen potencias de exponente natural y aplica las reglas básicas de las operaciones con potencias.

Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 diciembre

4.2.2. Sinopsis

Fuente: Cartel de "Red Social" en www.imdb.con

"La red social", en el original inglés "The Social Network" es un biopic de Mark Zuckerberg. Trascurre el 2003, en la época en la que comenzó a desarrollar su red social, Facebook. En ella se presentan los impulsos que tiene para crearla, los obstáculos y las grandes oportunidades.

La historia transcurre desde que la red es una mera idea en la cabeza de Mark, crea la aplicación, la promociona y termina haciéndose millonario, no sin antes traicionar amistades.

Más información en:

https://www.filmaffinity.com/es/film577699.html

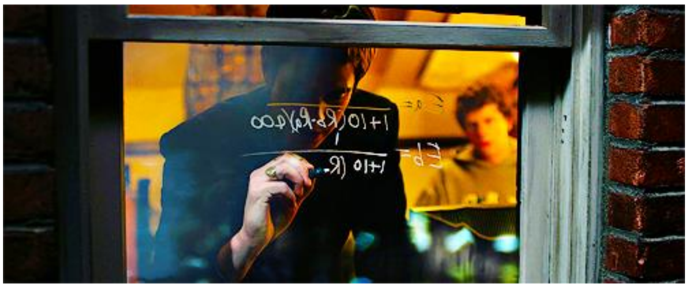
https://www.imdb.com/title/tt1285016

https://es.wikipedia.org/wiki/The_social_network

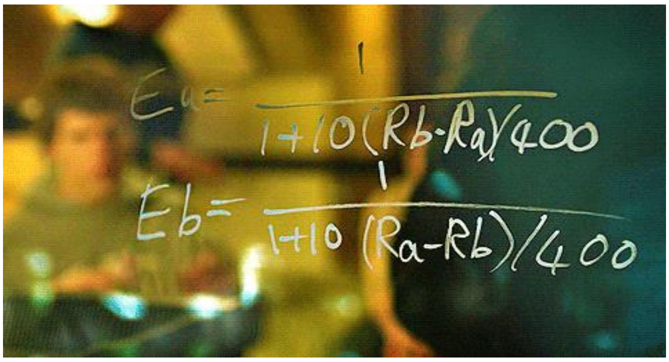
4.2.3. Grafos en la película

En la película aparece otro momento matemático, cuando el compañero de Mark, Eduardo, escribe la ecuación de ELO. A esta ecuación, a veces, es también llamada de Facemash, ya que se utilizó en esa primera versión de Facebook.

De lo que trata la ecuación es de ver entre una red social quien es la persona más popular. Utiliza esta fórmula que popularizo el matemático / físico búlgaro Arpad Elo. Fuen inventada para puntuar y ordenar a los jugadores de ajedrez.



Fuente: fotograma de la película "Red Social"



Fuente: detalle fotograma de la película "Red Social"

Los esperados:

$$E_A = \frac{1}{1 + 10^{(R_B - R_A)/400}}.$$

$$E_B = \frac{1}{1 + 10^{(R_A - R_B)/400}}.$$

Los resultados:

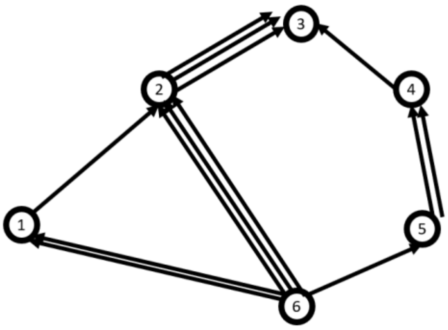
$$R'_A = R_A + K(S_A - E_A)$$

Siendo RA el ranking antes de la partida R'A el ranking después de la partida, K una constante y SA el resultado de la partida.

4.2.4. Actividad

Diseño: Basado en el calculo de Ranking ELO

Supongamos que se organiza un campeonato de ajedrez y al terminar se construye el siguiente grafo dirigido.



Fuente: Propia

Calcular el ranking ELO de los 6 jugadores.

En el que la dirección de la flecha indica quien ha ganado.

Es decir, esta relación:

Fuente: Propia

Significa que el jugador 1 ha ganado al jugador 2.

Tendríamos la siguiente matriz de adyacencia:

	Jugador 1	Jugador 2	Jugador 3	Jugador 4	Jugador 5	Jugador 6
Jugador 1	0	1	0	0	0	0
Jugador 2	0	0	3	0	0	0
Jugador 3	0	0	0	0	0	0
Jugador 4	0	0	1	0	0	0
Jugador 5	0	0	0	2	0	0
Jugador 6	2	0	0	0	1	0

Supongamos que todos los jugadores comienzan con Ranking ELO 400.

Y que este es el orden y resultados de las partidas:

		Resultado		
Jugador 1	Jugador 2	1	-	0
Jugador 3	Jugador 2	0	-	1
Jugador 2	Jugador 3	1	-	0
Jugador 4	Jugador 3	1	-	0
Jugador 6	Jugador 1	1	-	0
Jugador 1	Jugador 6	0	-	1
Jugador 2	Jugador 3	1	-	0
Jugador 5	Jugador 4	1	-	0
Jugador 6	Jugador 5	1	-	0
Jugador 5	Jugador 4	1	-	0

Al final de la primera partida.

$$E_1 = \frac{1}{1 + 10^{\frac{400-400}{400}}}$$

E1=0,5

Y

$$E_2 = \frac{1}{1 + 10^{\frac{400-400}{400}}}$$

E2=0,5

Ran = 400 + 30 (1 – 0,5) = 400 + 15 = 415

Rbn = 400 + 30 (0– 0,5) = 400 -15 = 385

Con este método se puede calcular el ranking de los 6 participantes al final del torneo.

4.3. El indomable Willy Hunting - 2º ESO – Propiedades de un grafo

4.3.1. Relación con el currículo

Matemáticas. 1º y 2º ESO

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc. Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a). la recogida ordenada y la organización de datos; b). la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos; c). facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de	1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones. 4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc. 5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada. 2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. 2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. 3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. 3.2. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad. 4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución. 4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad. 5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas, utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico y estadístico-probabilístico. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés.

Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 diciembre

cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico; d). el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas; e). la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos; f). comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	utilizados o construidos. 8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. 9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. 10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras. 11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. 7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados. 8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. 8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. 8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. 8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas. 9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad. 10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares. 11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido,…), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión. 12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 diciembre

4.3.2. Sinopsis

Fuente: Cartel de " El indomable Will Hunting " en www.imdb.con

"El indomable Will Hunting", en el original inglés "Good Will Hunting" es una película que cuenta la historia de un joven del sur de Boston, Will Hunting, durante su juventud. Will es una persona con muchos problemas en cuanto a relaciones humanas, ya que le cuesta mucho acercarse y arriesgarse en relaciones nuevas. Con los amigos de siempre tiene relación de amistad, amistad incondicional, pero sin comunicación real.

Will tiene sin embargo una gran inteligencia, y una gancapacidad para el estudio, la memoria y otros aspectos que le permitirían estuiar e incluso doctorarse con honores en cualquier carrera, ya fuese letras o ciencias. Es en el lenguaje actual una persona con Altas Capacidades.

La película trata de cómo descubren esas capacidades en la universidad, y como tratan de hacerle entrar en el circuito universitario, y de cómo él es reticente a esta vida.

Más información en:

https://www.filmaffinity.com/es/film503907.html

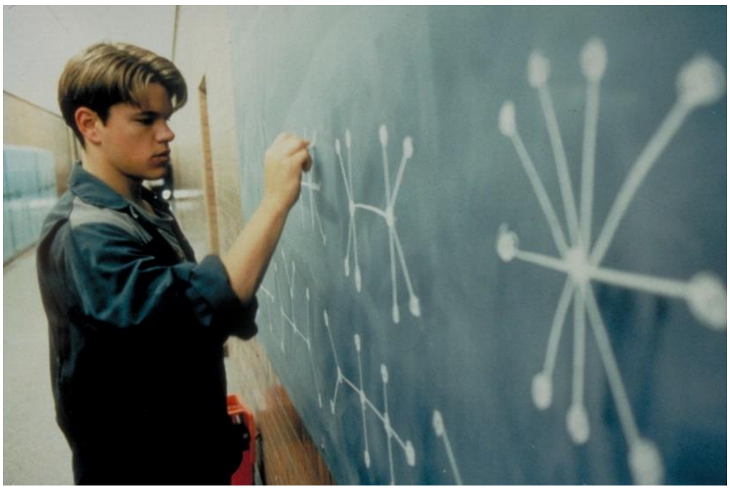
https://www.imdb.com/title/tt0119217

https://es.wikipedia.org/wiki/Good_Will_Hunting

4.3.3. Grafos en la película

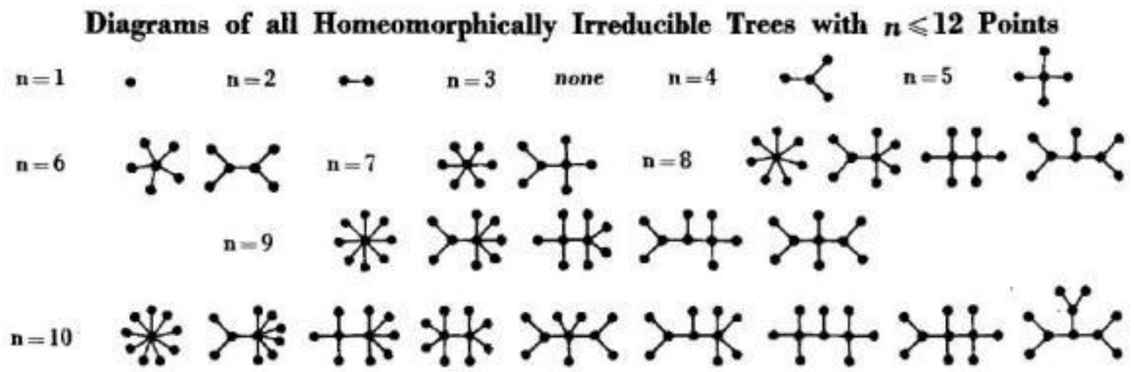
El segundo problema que plantea es el siguiente:

Encontrar las representaciones de los árboles irreductibles con 10 nodos.



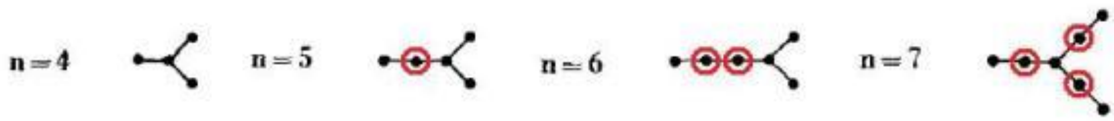
Fuente: Fotograma de la película

La solución aparece en la siguiente figura, extraída del artículo de Frank Harary, Geert Prins, “The number of homeomorphically irreducible trees, and other species,” Acta Mathematica :



Fuente: Frank Harary, Geert Prins, “The number of homeomorphically irreducible trees, and other species,”

Se define como árbol al grafo que para dos vértices cualesquiera están unidos solamente por un camino. Técnicamente es un grafo no dirigido con n vértices, n finito, y cumple que es conexo y tiene n-1 aristas o, lo que es lo mismo tiene n-1 aristas y no tiene ciclos, o lo que es lo mismo, es conexo y no tiene ciclos. Se dice que un árbol es irreductible si no tiene vértices de grado 2



Fuente: Frank Harary, Geert Prins, “The number of homeomorphically irreducible trees, and other species,”

En los grafos anteriores solamente el n4 es irreductible, el resto tiene vertices de grado 2, marcados en rojo.

La dificultad del problema que se plantea en la película radica en demostrar que los vértices que se dibujan son los únicos, ósea que no hay más.

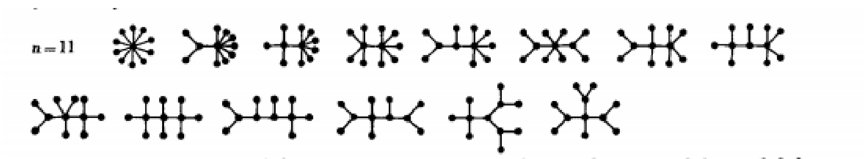
4.3.4. Actividad

Diseño: Basado en “The number of homeomorphically irreducible trees, and other species”, de Harary F. y Prins G

Dibujar todos los árboles irreducibles con n=11

No es necesaria en la actividad demostrar que son todos.

La solución:



Fuente: Frank Harary, Geert Prins, “The number of homeomorphically irreducible trees, and other species,”

4.4. Seis grados de Kevin Bacon - 3º ESO – Buscar grados de ¿?

4.4.1. Relación con el currículo

Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 3º ESO

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc. Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a). la recogida ordenada y la organización de datos. b). la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. c). facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. d). el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. e). la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. f). comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. 11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada. 2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. 2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. 3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. 3.2. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad. 11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 diciembre

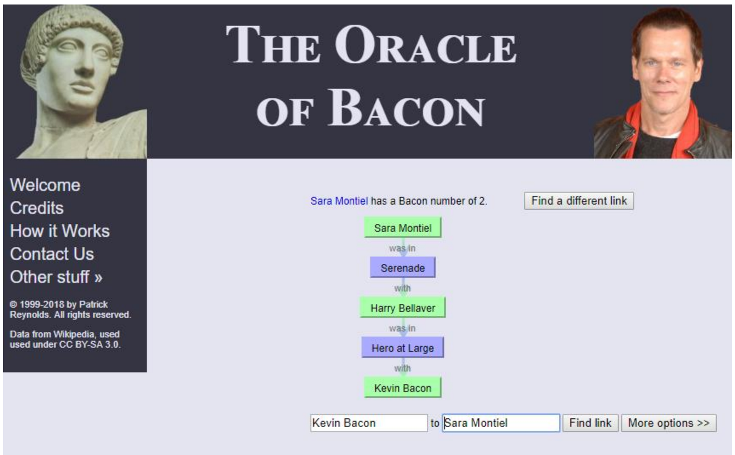
4.4.2. Sinopsis

Se conoce por número de Bacon al número de saltos que hay que dar para llegar desde un actor cualquiera para llegar a Kevin Bacon. Cada actor está relacionado con los actores con los que ha trabajado, con lo que se genera un grafo. La información se suele obtener de la IMDB.

El número de saltos se puede considerar como una medida y se puede extraer, la media, el máximo, etc. De todos los actores la IMDB hay menos de 20 que distan 8 hasta llegar a él.

En esta web se puede calcular el número de Bacon:

http://oracleofbacon.org/movielinks.php



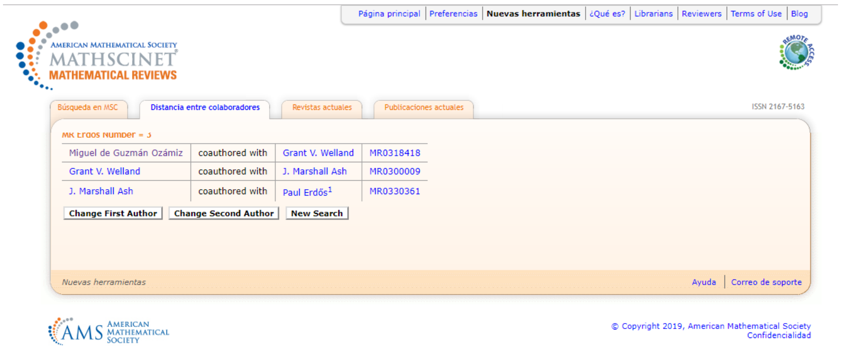
Fuente: http://oracleofbacon.org/movielinks.php

4.4.3. Grafos

El número de Bacon es en realidad una copia del Número de Erdös, que estudia redes de tipo colaborativas o de coautoría. El excéntrico matemático Paul Erdös tuvo multitud de colaboraciones, por lo que sus compañeros le honraron utilizando su nombre para este experimento folclórico, pero que permite ser un ejemplo para el estudio de grafos y sus cálculos estadísticos.

En esta web se puede calcular el Número de Erdós:

https://mathscinet.ams.org/mathscinet/collaborationDistance.html



Fuente: https://mathscinet.ams.org/mathscinet/collaborationDistance.html

4.4.4. Actividad

Diseño: Propio, basado en vídeo de Naju C, Resolver Ruta Más Corta con Solver de Excel bien explicado

Realizar un estudio de la distancia entre todos los alumnos de 3º de todas las clases, considerando la relación: "He realizado algún trabajo con …".

Se implementará mediante un Excel de la siguiente manera:

https://www.youtube.com/watch?v=62-m5QFNEWU

Por ejemplo, para conectar Juan y María se necesitan en este ejemplo 4 pasos.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Alumno 1	Alumno2	Trabajaron juntos	camino			Nodo	Flujo	Condicion	condicion2
Blanca	Elena	1	0			Alberto	0	=	0
Eduardo	Juan	1	0			Ana	0	=	0
Eduardo	Elena	1	1			Blanca	0	=	0
Elena	Maria	1	1			Eduardo	0	=	0
Fran	Alberto	1	0			Elena	0	=	0
Jose	Ana	1	0			Fran	0	=	0
Jose	Blanca	1	0			Maria	-1	=	-1
Jose	Fran	1	0			Jose	0	=	0
Juan	Alberto	1	0			Juan	1	=	1
Juan	Ana	1	0			Pedro	0	=	0
Juan	Pedro	1	1						
Maria	Blanca	1	0						
Pedro	Alberto	1	0						
Pedro	Eduardo	1	1						
							Distancia	4	

En nuestro caso la distancia entre cada estuante será 1.

Para instalar Solve en Excel se puede seguir el Anexo I

4.5. Red Social - 4º ESO – Medidas de un grafo o red

4.5.1. Relación con el currículo

Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º ESO

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc. Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a). la recogida ordenada y la organización de datos. b). la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. c). facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. d). el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. e). la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. f). comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. 11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada. 2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. 2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. 3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. 3.2. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad. 11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 diciembre

Bloque 5. Estadística y probabilidad		
Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar y la estadística. Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico. Gráficas estadísticas: Distintos tipos de gráficas. Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias. Medidas de centralización y dispersión: interpretación, análisis y utilización. Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión. Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la correlación.	4. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales, en distribuciones unidimensionales y bidimensionales, utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora u ordenador), y valorando cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas.	4.1. Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos estadísticos. 4.2. Representa datos mediante tablas y gráficos estadísticos utilizando los medios tecnológicos más adecuados. 4.3. Calcula e interpreta los parámetros estadísticos de una distribución de datos utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora u ordenador). 4.4. Selecciona una muestra aleatoria y valora la representatividad de la misma en muestras muy pequeñas. 4.5. Representa diagramas de dispersión e interpreta la relación existente entre las variables.

Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 diciembre

4.5.2. Grafos

Para medir los grafos se pueden considerar tres niveles, con distintas medidas para cada nivel:

Global:

- **Coeficiente de agrupamiento**: mide la cohesión entre todos los nodos.
- **Camino característico**: Mide la separación entre los nodos, lo contrario que el agrupamiento.
- **Densidad**: el número de enlaces entre el número de nodos.
- **Diámetro**: de todos los caminos mínimos el mayor.
- **Grado medio**: la media de los enlaces por nodo
- **Centralidad**: Los nodos con mayor número de enlaces y por tanto los más influyentes. Hay vería maneras de medir esta centralidad.

Comunidad:

- **Comunidades**: agrupaciones en las que podemos agrupar a los nodos de una red o grafo.
- **Puentes** entre comunidades: La manera en la que se comunican las diferentes comunidades, incluyendo los nodos que las comunican.
- **Centros locales vs. periferia**: en cada comunidad cuales son los nodos más importantes y cuáles menos.

Nodo:

- **Centralidad**. Es el más sencillo, es el número de nodos enlazados al nodo que estamos estudiando.
- **Pagerank**: Mide el peso de las conexiones que recibe cada nodo. Es uno de los datos que utiliza Google para decidir que página presentar cuando se realiza una búsqueda.
- **Cercanía**. Se calcula mediante la media de todos los caminos mínimos a todos los nodos del grafo.
- **Intermediación**. Mide el poder de un nodo, se puede medir por ejemplo observando el % de caminos mínimos que pasan por cada nodo

Este video, de Eduardo Sáenz de Cabezón, explica alguno de estos conceptos:

https://www.youtube.com/watch?v=lp-1rvtRYQg

4.5.3. Actividades

4.5.3.1. Actividad 1 – Medidas de un grafo simple

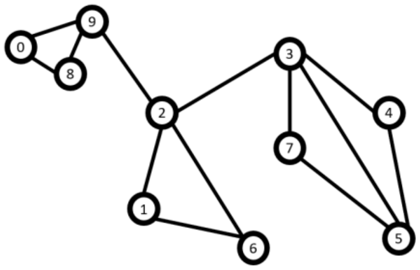
Diseño: Propio

Obtener los siguientes datos de la red presentada a continuación:

- Centralidad de cada nodo
- La longitud de todos los caminos mínimos
- La intermediación de cada nodo
- La cercanía de cada nodo
- Las comunidades

Y globalmente:

- Coeficiente de agrupamiento
- Camino característico
- Densidad
- Diámetro
- Grado medio
- Centralidad



Fuente: Propia

4.5.3.2. Actividad 2 – Medidas de una red social

Diseño: Basado en http://socioviz.net/

Existen varias herramientas vara estudiar las redes sociales:

- http://www.benitezrafa.es/jugando-con-el-grafo-social-de-facebook-en-gephi/
- https://www.youtube.com/watch?v=TIkRZySlsqM

- http://socioviz.net

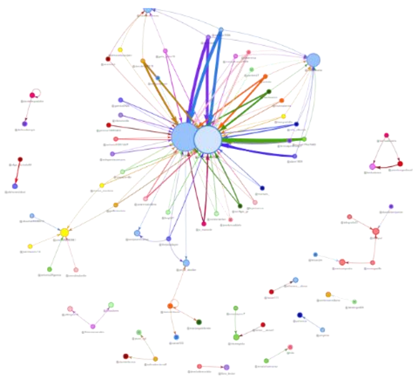
Mediante http://socioviz.net/ para encontrar algún hashtag interesante en el momento de realizar la actividad

Estudiando las comunidades, los nodos centrales, etc., generando una búsqueda de resultados, generando sus informes y haciendo una explicación de estos resultados e informes.

Explicando la configuración de los grafos y el porqué de su selección.

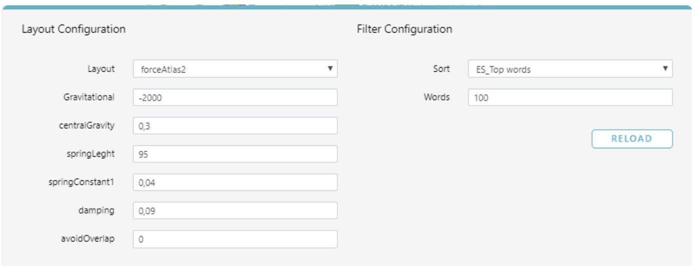
Por ejemplo:

Fuente: http://socioviz.net



Fuente: http://socioviz.net

Fuente: http://socioviz.net



Fuente: http://socioviz.net

4.6. Enigma - 4º ESO - Maquina de Turing

4.6.1. Relación con el currículo

Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º ESO

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc. Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a). la recogida ordenada y la organización de datos. b). la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. c). facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. d). el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. e). la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. f). comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. 11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada. 2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. 2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. 3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. 3.2. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad. 11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 diciembre

Bloque 5. Estadística y probabilidad		
Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones.	1. Resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana aplicando los conceptos del cálculo de probabilidades y técnicas de recuento adecuadas.	1.1. Aplica en problemas contextualizados los conceptos de variación, permutación y combinación.

Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 diciembre

4.6.2. Sinopsis

Fuente: Cartel de "Enigma" en www.imdb.con

La historia, no real, de un matemático experto descifrador de códigos, Tom Jericho, durante la segunda guerra mundial. Consigue descifrar el código mediante el cual los alemanes se comunican entre sí y ayuda a salvar un convoy que viaja por el Atlántico.
Aunque enigma es el nombre real de la máquina que utilizan los almenes, el nombre de la película no parece hacer referencia a ella, sino a la trama romántica que tiene lugar.
Aunque la historia es ficción no se puede obviar, que el personaje principal Tom Jericho, está basado en Alan Turing, inventor de la máquina de Turing, que en realidad es un tipo de grafo.
Más información en:

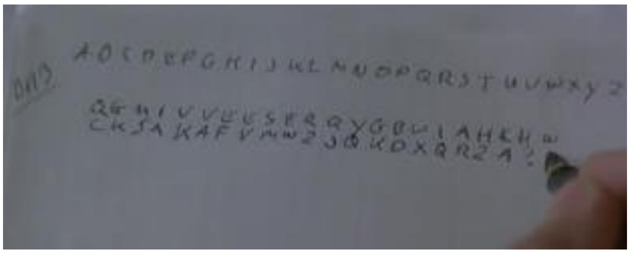
https://www.filmaffinity.com/es/film361882.html

https://www.imdb.com/title/tt0157583

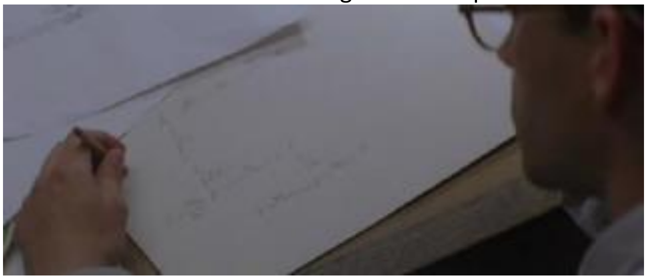
https://es.wikipedia.org/wiki/Enigma_(pel%C3%ADcula)

4.6.3. Grafos en la película

En la escena que transcurre entre 1:15:19 y 1:23:50 podemos observar como resuelve el problema, como pinta el grafo que termina por decodificar la máquina alemana:



Fuente: Detalle de fotograma de la película



Fuente: Detalle de fotograma de la película

La máquina de Turing se considera un modelo computacional que automáticamente lee y escribe sobre una cinta, generando la salida.

Una máquina de Turing está formada por dos alfabetos uno de entrada y otro de salida, el símbolo blanco se considera dentro de estos alfabetos (b, Δo 0), una lista finita de estados y otra de transiciones.

El funcionamiento consiste en la transición entre estados, desde el inicial hasta el final, teniendo en cuenta la cadena inicial, cuyos elementos pertenecen al alfabeto de entrada. Lee una celda de la cinta cada vez, borra el símbolo del cabezal y escribe el símbolo de salida que define el enlace y desplaza el cabezal a la izquierda o a la derecha. Esto se repite hasta que llega al estado final. La salida ha quedado definida.

Se defina con los siguientes elementos

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, s, b, F, \delta),$$

Q conjunto finito de los estados de la máquina.

Σ símbolos, con cantidad finita, distinto del espacio en blanco, denominado alfabeto de máquina o, de entrada.

Γ los símbolos de la cinta, denominado alfabeto de cinta $(\Sigma \subseteq \Gamma)$.

$s \in Q$ su estado inicial.

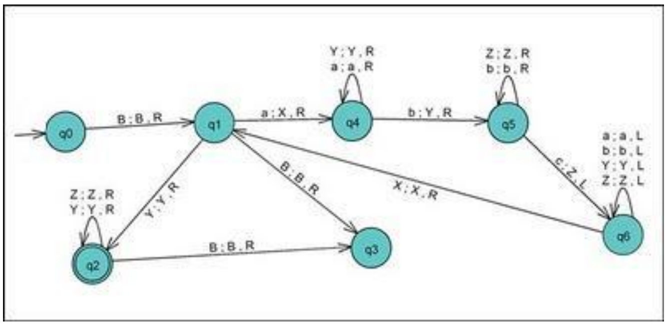
$b \in \Gamma$ blanco.

$F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales.

$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ se llama función de transición y define en que sentido se mueve el cabezal (si a la izaquiera L o a la derecha R).

Las máquinas de Turing son un tipo particular de grafo, diagramas de estados finitos, de la siguiente manera:

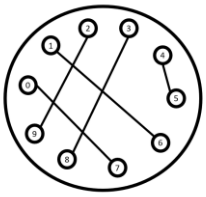
- Los estados son los nodos del grafo.
- Las transiciones entre estados son los enlaces dirigidos del grafo. Se etiquetan de la siguiente manera: símbolo inicial que se lee, símbolo final que se escribe y el movimiento que debe realizar el cabezal.
- El estado inicial se representa con una arista que no proviene de ningún otro estado.
- Para representar un estado final se dibuja un doble circulo alrededor del nodo:



Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A1quina_de_Turing

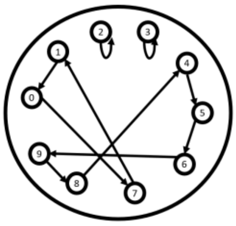
La máquina que descifró Enigma, era más complicada, una pequeña introducción:

Además de la teoría de grafos utiliza también las permutaciones. Una permutación la podemos ver de estas dos maneras, estos dos tipos de grafos:



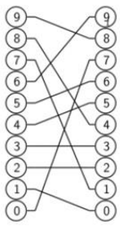
Fuente: Propia

En la que el 4 permuta por el 5 y el 5 permuta por el 4, la 1 permuta por el 6 y viceversa, etc. Realmente para poder presentar cualquier permutación necesitaríamos que el grafo fuese dirigido:



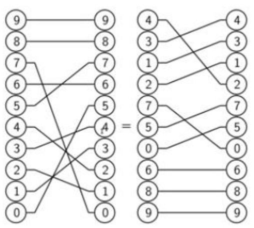
Fuente: Propia

Esta misma permutación se pude representar de esta manera, en la que observamos que es también una biyección:



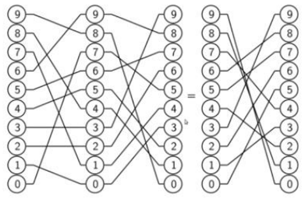
Fuente: Videos de Leandro Marin

Esta otra permutación, se observa cómo se puede representar de otra forma, ordenando los nodos para que quede más clara:



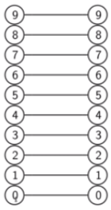
Fuente: Videos de Leandro Marin

La operación "composición de permutaciones":



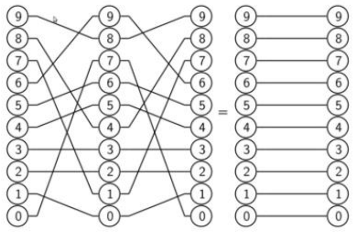
Fuente: Videos de Leandro Marin

Tiene un elemento neutro:



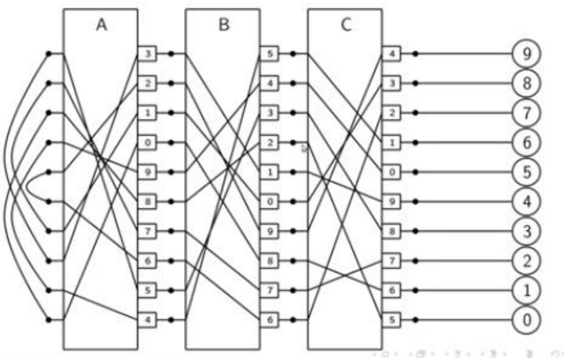
Fuente: Videos de Leandro Marin

Y cada permutación su inversa, que al componerlas se obtiene el elemento neutro de la composición de permutaciones:



Fuente: Videos de Leandro Marin

La máquina de que decodifica los mensajes codificados por enigma es en definitiva una máquina que (con un diccionario con todas las letras y números) realiza las permutaciones necesarias, pudiendo configurar cual es la primera permutación y sucesivas:



Fuente: Videos de Leandro Marin

Se puede ver con más detalle en el siguiente vídeo de Leandro Marin: https://www.youtube.com/channel/UCBaWWxFaA48ROH6o0TpZXCw

4.6.4. Actividad

4.6.4.1. Actividad 1

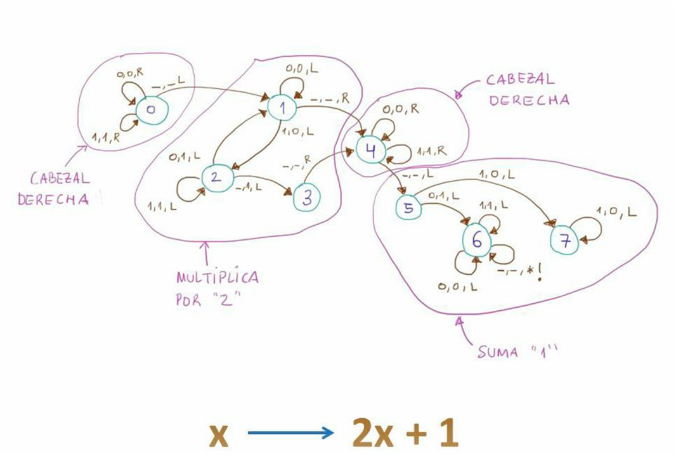
Diseño: Basado en https://www.youtube.com/watch?v=NS-NQ5mCSs8

Visualizar los siguientes vídeos:

https://www.youtube.com/watch?v=iaXLDz_UeYY

https://www.youtube.com/watch?v=NS-NQ5mCSs8

Que construye la máquina de Turing para x->2x+1



Fuente: Video de Javier García: La máquina de Turing explicada

https://www.youtube.com/watch?v=E3keLeMwfHY

Implementada con esta web que se puede utilizar para las actividades.

http://morphett.info/turing/turing.html

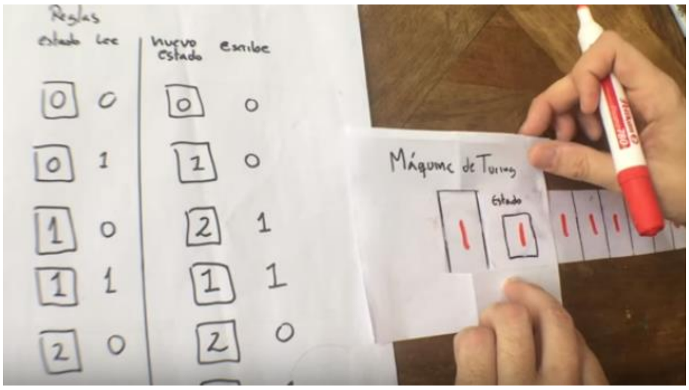
Realizar un trabajo resumen de todos ellos.

4.6.4.2. Actividad 2

Diseño: basado en https://www.youtube.com/watch?v=bWdvrlY8Rd8

Crear una máquina de Turing que sume dos números como en el vídeo.

https://www.youtube.com/watch?v=bWdvrlY8Rd8



Fuente: Video de Tomas de Camino: Una simple Maquina de Turing

4.6.4.3. Actividad 3

Diseño: Basado en https://www.matesfacil.com/automatas-lenguajes/Maquina-Turing.html

Se propone que los discentes diseñen una MT que calcule el siguiente número en binario:

Teniendo en cuenta que si un número escrito en binario termina en 0 (es par) para sumar 1 solamente hay que cambiar el 0 por un 1.

En el caso de que termine en 1, cambiará por 0 los 1 que haya hacia la izquierda, hasta llegar a un 0 o el final del número, que se cambia por un 1.

Consideramos tres estados:

q0, q1, q2

La máquina comienza en estado q_0 y apuntado a la cifra más a la izquierda del número

Para saber si es impar o para recorre toda la cinta hasta llegar al primer dígito:

δ(q0, 0) = (q0, 0, R)

δ(q0, 1) = (q0, 1 ,R)

Con esto la MT simplemente recorre el número y para cuando encuentra un blanco a la derecha del número.

Cuando llegue al final, es decir cuando encuentre un B debe volver y cambiar al estado 1. En el estado 1 si encuentra un 0 debe cambiarlo por un 0 y pasar a estado 2:

δ(q0, B)=(q1, B, L)

δ(q1, 0)=(q2, 1, R)

Si en el estado 1 encuentra un 1, debe cambiar todos los 1's seguidos que encuentre de derecha a izquierda.

δ(q1,1) = (q1, 0, L)

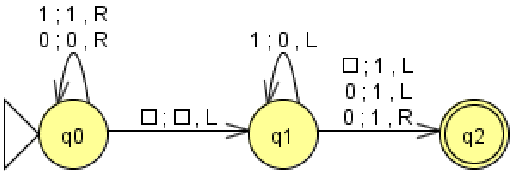
En el momento que llegue a un 0 ó en un blanco. Si es un 0, lo cambia por 1 y finaliza:

δ(q1,0) = (q2, 1, L)

Si es un B añade un 1 y también finaliza.

δ(q1, B)=(q2, 1, L)

El grafo sería:



Fuente: https://www.matesfacil.com/automatas-lenguajes/Maquina-Turing.html

4.7. Una mente maravillosa - 1º Bachillerato - Jugar al HEX

4.7.1. Relación con el currículo

Matemáticas I. 1º Bachillerato

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: relación con otros problemas conocidos, modificación de variables, suponer el problema resuelto. Soluciones y/o resultados obtenidos: coherencia de las soluciones con la situación, revisión sistemática del proceso, otras formas de resolución, problemas parecidos, generalizaciones y particularizaciones interesantes. Iniciación a la demostración en matemáticas: métodos, razonamientos, lenguajes, etc. Métodos de demostración: reducción al absurdo, método de inducción, contraejemplos, razonamientos encadenados, etc.	1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 3. Realizar demostraciones sencillas de propiedades o teoremas relativos a contenidos algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. 4. Elaborar un informe científico escrito que sirva para comunicar las ideas matemáticas surgidas en la resolución de un problema o en una demostración, con el rigor y la precisión adecuados. 5. Planificar adecuadamente el proceso de investigación, teniendo en cuenta el contexto en que se desarrolla y el problema de investigación planteado.	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados. 2.1. Analiza y comprende el enunciado a resolver o demostrar (datos, relaciones entre los datos, condiciones, hipótesis, conocimientos matemáticos necesarios, etc.). 2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. 2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas. 2.5. Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas. 3.1. Utiliza diferentes métodos de demostración en función del contexto matemático. 3.2. Reflexiona sobre el proceso de demostración (estructura, método, lenguaje y símbolos, pasos clave, etc.).

Razonamiento deductivo e inductivo. Lenguaje gráfico, algebraico, otras formas de representación de argumentos. Elaboración y presentación oral y/o escrita de informes científicos sobre el proceso seguido en la resolución de un problema o en la demostración de un resultado matemático. Realización de investigaciones matemáticas a partir de contextos de la realidad o contextos del mundo de las matemáticas. Elaboración y presentación de un informe científico sobre el proceso, resultados y conclusiones del proceso de investigación desarrollado. Práctica de los proceso de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) la recogida ordenada y la organización de datos; b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos; c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico; d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas; e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos; f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	6. Practicar estrategias para la generación de investigaciones matemáticas, a partir de: a) la resolución de un problema y la profundización posterior; b) la generalización de propiedades y leyes matemáticas; c) Profundización en algún momento de la historia de las matemáticas; concretando todo ello en contextos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos. 7. Elaborar un informe científico escrito que recoja el proceso de investigación realizado, con el rigor y la precisión adecuados. 8. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones de la realidad. 9. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. 10. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. 11. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	4.1. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación. 4.2. Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. 5.1. Conoce la estructura del proceso de elaboración de una investigación matemática: problema de investigación, estado de la cuestión, objetivos, hipótesis, metodología, resultados, conclusiones, etc. 5.2. Planifica adecuadamente el proceso de investigación, teniendo en cuenta el contexto en que se desarrolla y el problema de investigación planteado. 5.3. Profundiza en la resolución de algunos problemas, planteando nuevas preguntas, generalizando la situación o los resultados, etc. 6.1. Generaliza y demuestra propiedades de contextos matemáticos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos. 6.2. Busca conexiones entre contextos de la realidad y del mundo de las matemáticas (la historia de la humanidad y la historia de las matemáticas; arte y matemáticas; tecnologías y matemáticas, ciencias experimentales y matemáticas, economía y matemáticas, etc.) y entre contextos matemáticos (numéricos y geométricos, geométricos y funcionales, geométricos y probabilísticos, discretos y continuos, finitos e infinitos, etc.). 7.2. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto del problema de investigación. 7.3. Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. 7.5. Transmite certeza y seguridad en la comunicación de las ideas, así como dominio del tema de investigación. 7.6. Reflexiona sobre el proceso de investigación y elabora conclusiones sobre el nivel de: a) resolución del problema de investigación; b) consecución de objetivos. Así mismo, plantea posibles continuaciones de la investigación; analiza los puntos fuertes y débiles del proceso y hace explícitas sus impresiones personales sobre la experiencia. 8.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 8.2. Establece conexiones entre el problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él, así como los conocimientos matemáticos necesarios. 8.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos adecuados que permitan la resolución del problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 8.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 8.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. 9.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre los logros conseguidos, resultados mejorables, impresiones personales del proceso, etc. 10.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad para la aceptación de la crítica razonada, convivencia con la incertidumbre, tolerancia de la frustración, autoanálisis continuo, autocrítica constante, etc. 10.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. 10.3. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas; revisar de forma crítica los resultados encontrados; etc. 11.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia por su sencillez y utilidad.

Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 diciembre

Bloque 3. Análisis		
Continuidad de una función. Estudio de discontinuidades.	2. Utilizar los conceptos de límite y continuidad de una función aplicándolos en el cálculo de límites y el estudio de la continuidad de una función en un punto o un intervalo.	2.3. Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad

Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 diciembre

4.7.2. Sinopsis

Fuente: Cartel de "Una mente maravillosa" en www.imdb.con

"Una mente maravillosa", en el original inglés "A Beautiful Mind" es el bipic de John Nash, matemático estadounidense. Trata fundamentalmente de sus problemas psicológicos, incluso psiquiátricos, que transcurren desde toda su vida. La película comienza cuando entra en la Universidad de Princeton. En esta universidad descubre que el enfoque colaborativo en muchas ocasiones es más rentable que el enfoque individual.
Durante el comienzo de la Guerra Fría ayuda al pentágono en la tarea de encontrar código y descifrarlos. Pero rápido sus ataques de esquizofrenia comienzan a causarle problemas reales. Su vida en pareja transcurre con estos problemas y Nash aprende a evitarlos, consiguiendo de nuevo permiso para volver a dar clases.
Nash termina ganando el premio Nobel de Economía.
Más información en:
https://www.filmaffinity.com/es/film326587.html
https://www.imdb.com/title/tt0268978
https://es.wikipedia.org/wiki/A_Beautiful_Mind

4.7.3. Grafos en la película

John Nash, además de ser famoso por su teoría de juegos, con grandes resultados, también se acercó a otros conceptos matemáticos. Uno de ellos es la teoría de grafos, que utilizó para demostrar que en el juego Hex, en cualquier tablero, de cualquier dimensión, existe una estrategia ganadora para el primer jugador. Es una demostración teórica.

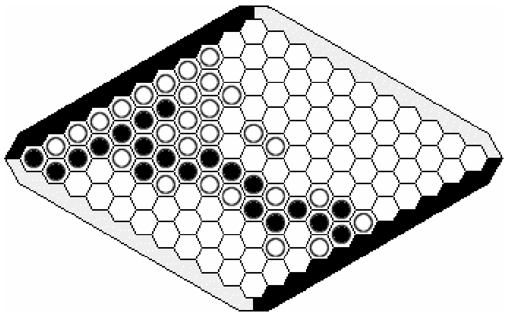


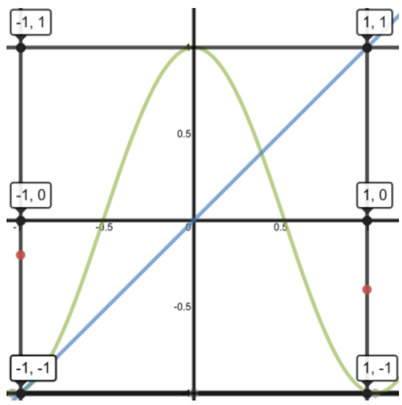
Imagen de un tablero de HEX de lado 11. Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Hex_(juego)

El juego tiene las siguientes reglas:

- El juego es para dos jugadores (pueden jugar cuatro)
- Cada turno el jugador coloca una pieza de su color.
- Gana quien consigue formar una línea entre dos laterales opuestos.

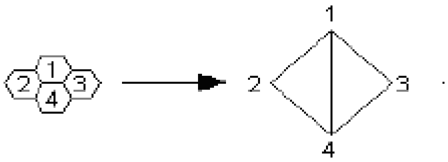
La demostración se basa en que, si llenas el tablero equitativamente de fichas negras y blancas, siembre existirá un camino entre un lado y otro. Esta, utiliza “El Teorema del punto fijo de Brouwer” para demostrarlo, que dice:

Toda aplicación continua f de un intervalo cerrado en sí mismo admite al menos un punto fijo, es decir cruza la diagonal:

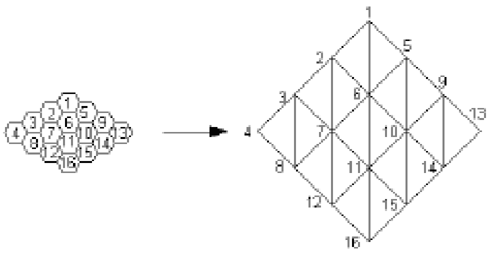


Existe también la demostración del teorema del punto fijo para funciones continuas de R en R.

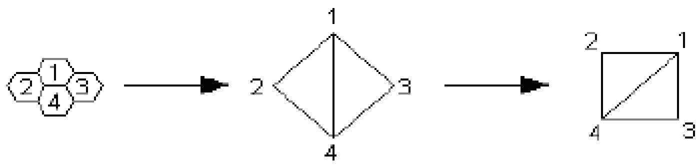
La demostración se basa en la modificación del tablero. Convirtiendo cada casilla en un vertice y cada lado de cada casilla en un vertice del grafo de la siguiente manera:



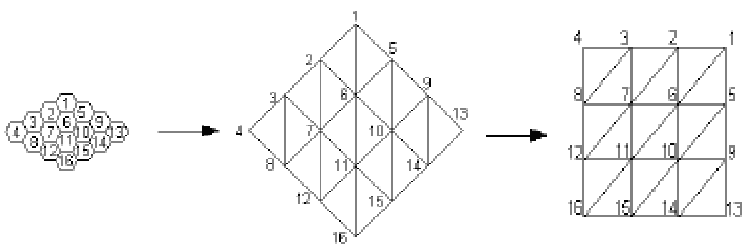
Así ampliando el número de casillas, quedaría:



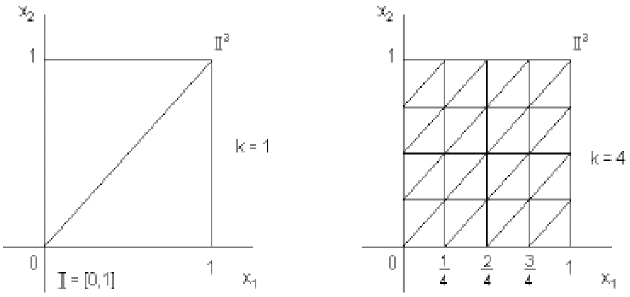
Si además realizamos la siguiente transformación:



El tablero se transformaría en:



Si lo colocamos en R2 dentro de I2:



Cada vértice corresponde a un hexágono y para jugar al Hex bastará con elegir vértices. Si dos vértices contiguos son del mismo color, podríamos pintar la línea que los une de ese color. Y, en definitiva, ganara el color que consiga una línea continua entre un lado y el otro del cuadrado I2

Y considerando para cada función f los conjuntos:

$$\mathbf{H^+ = \{x \in V \,/\, f_1(x) - x_1 \geq \varepsilon\};\ H^- = \{x \in V \,/\, x_1 - f_1(x) \geq \varepsilon\}}$$
$$\mathbf{V^+ = \{x \in V \,/\, f_2(x) - x_2 \geq \varepsilon\};\ V^- = \{x \in V \,/\, x_2 - f_2(x) \geq \varepsilon\}}$$

Se puede demostrar que para todo ε > 0 existe un x perteneciente a I2 tal que

f (x) − x <ε, que es semejante al teorema del punto fijo.

En la película aparece Nash jugando con sus compañeros de Princeton. Aunque, en este apartado, se debe tener en cuenta las escenas borradas, que se pueden encontrar en: https://www.youtube.com/watch?v=cDTWX9yP0ZA

Fuente: Fotograma de la película

4.7.4. Actividad

Diseño: PROPIO

Jugar al HEX online y observar las posibilidades http://www.lutanho.net/play/hex.html

Intentar dibujar una función continua f: [0,1]-> [0,1] que no cruce la diagonal que va desde el punto (0,0) al punto (1,1).

4.8. Star Wars - 2º Bachillerato – Buscar al protagonista

4.8.1. Relación con el currículo

Matemáticas II. 2º Bachillerato

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: relación con otros problemas conocidos, modificación de variables, suponer el problema resuelto. Soluciones y/o resultados obtenidos: coherencia de las soluciones con la situación, revisión sistemática del proceso, otras formas de resolución, problemas parecidos, generalizaciones y particularizaciones interesantes. Iniciación a la demostración en matemáticas: métodos, razonamientos, lenguajes, etc. Lenguaje gráfico, algebraico, otras formas de representación de argumentos. Elaboración y presentación oral y/o escrita de informes científicos sobre el proceso seguido en la resolución de un problema o en la demostración de un resultado matemático.	1. Expresar verbalmente de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 4. Elaborar un informe científico escrito que sirva para comunicar las ideas matemáticas surgidas en la resolución de un problema o en una demostración, con el rigor y la precisión adecuados. 6. Practicar estrategias para la generación de investigaciones matemáticas, a partir de: a) la resolución de un problema y la profundización posterior; b) la generalización de propiedades y leyes matemáticas; c) Profundización en algún momento de la historia de las matemáticas; concretando todo ello en contextos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos. 7. Elaborar un informe científico escrito que recoja el proceso de investigación realizado, con el rigor y la precisión adecuados. 8. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones de la realidad. 9. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.	1.1. Expresa verbalmente de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados. 2.1. Analiza y comprende el enunciado a resolver o demostrar (datos, relaciones entre los datos, condiciones, hipótesis, conocimientos matemáticos necesarios, etc.). 2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. 2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas. 2.5. Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas. 4.1. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación. 4.2. Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. 4.3. Emplea las herramientas tecnológicas adecuadas al tipo de problema, situación a resolver o propiedad o teorema a demostrar, tanto en la búsqueda de resultados como para la mejora de la eficacia en la comunicación de las ideas matemáticas. 6.1. Generaliza y demuestra propiedades de contextos matemáticos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos. 6.2. Busca conexiones entre contextos de la realidad y del mundo de las matemáticas (la historia de la humanidad y la historia de las matemáticas; arte y matemáticas; tecnologías y matemáticas, ciencias experimentales y matemáticas, economía y matemáticas, etc.) y entre contextos matemáticos (numéricos y geométricos, geométricos y funcionales, geométricos y probabilísticos, discretos y continuos, finitos e infinitos, etc.). 7.1. Consulta las fuentes de información adecuadas al problema de investigación. 7.2. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto del problema de investigación. 7.3. Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. 7.4. Emplea las herramientas tecnológicas adecuadas al tipo de problema de investigación. 7.5. Transmite certeza y seguridad en la comunicación de las ideas, así como dominio del tema de investigación. 7.6. Reflexiona sobre el proceso de investigación y elabora conclusiones sobre el nivel de: a) resolución del problema de investigación; b) consecución de objetivos. Así mismo, plantea posibles continuaciones de la investigación; analiza los puntos fuertes y débiles del proceso y hace explícitas sus impresiones personales sobre la experiencia. 8.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 8.2. Establece conexiones entre el problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él, así como los conocimientos matemáticos necesarios. 8.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos adecuados que permitan la resolución del problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 8.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 8.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. 9.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre los logros conseguidos, resultados mejorables, impresiones personales del proceso, etc.

Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 diciembre

Bloque 2. Números y álgebra		
Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos. Clasificación de matrices. Operaciones. Aplicación de las operaciones de las matrices y de sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales.	1. Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices para describir e interpretar datos y relaciones en la resolución de problemas diversos. 2. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas (matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones), interpretando críticamente el significado de las soluciones.	1.1. Utiliza el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante tablas o grafos y para representar sistemas de ecuaciones lineales, tanto de forma manual como con el apoyo de medios tecnológicos adecuados. 1.2. Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente, de forma manual o con el apoyo de medios tecnológicos. 2.3. Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos.

Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 diciembre

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II. 2º Bachillerato

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: relación con otros problemas conocidos, modificación de variables, suponer el problema resuelto, etc. Análisis de los resultados obtenidos: coherencia de las soluciones con la situación, revisión sistemática del proceso, otras formas de resolución, problemas parecidos. Elaboración y presentación oral y/o escrita de informes científicos escritos sobre el proceso seguido en la resolución de un problema Realización de investigaciones matemáticas a partir de contextos de la realidad Elaboración y presentación de un informe científico sobre el proceso, resultados y conclusiones del proceso de investigación desarrollado. Práctica de los proceso de matematización y modelización, en contextos de la realidad. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.	1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 3. Elaborar un informe científico escrito que sirva para comunicar las ideas matemáticas surgidas en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados. 5. Practicar estrategias para la generación de investigaciones matemáticas, a partir de: a) la resolución de un problema y la profundización posterior; b) la generalización de propiedades y leyes matemáticas; c) Profundización en algún momento de la historia de las matemáticas; concretando todo ello en contextos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos. 6. Elaborar un informe científico escrito que recoja el proceso de investigación realizado, con el rigor y la precisión adecuados. 7. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 8. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. 9. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. 10. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. 11. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, valorando su eficacia y aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados. 2.1. Analiza y comprende el enunciado a resolver (datos, relaciones entre los datos, condiciones, conocimientos matemáticos necesarios, etc.). 2.2. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, contrastando su validez y valorando su utilidad y eficacia. 2.3. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso seguido. 3.1. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación. 3.2. Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. 5.1. Profundiza en la resolución de algunos problemas planteando nuevas preguntas, generalizando la situación o los resultados, etc. 5.2. Busca conexiones entre contextos de la realidad y del mundo de las matemáticas (la historia de la humanidad y la historia de las matemáticas; arte y matemáticas; ciencias sociales y matemáticas, etc.). 6.1. Consulta las fuentes de información adecuadas al problema de investigación. 6.2. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto del problema de investigación. 6.3. Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. 6.5. Transmite certeza y seguridad en la comunicación de las ideas, así como dominio del tema de investigación. 7.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 7.2. Establece conexiones entre el problema del mundo real y el mundo matemático: identificando del problema o problemas matemáticos que subyacen en él, así como los conocimientos matemáticos necesarios. 7.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos adecuados que permitan la resolución del problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 7.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 7.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. 8.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre los logros conseguidos, resultados mejorables, impresiones personales del proceso, etc. 9.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada, convivencia con la incertidumbre, tolerancia de la frustración, autoanálisis continuo, etc. 9.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. 9.3. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas; revisar de forma crítica los resultados encontrados; etc. 10.1. Toma decisiones en los procesos (de resolución de problemas, de investigación, de matematización o de modelización) valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia por su sencillez y utilidad. 11.1. Reflexiona sobre los procesos desarrollados, tomando conciencia de sus estructuras; valorando la potencia, sencillez y belleza de los métodos e ideas utilizados; aprendiendo de ello para situaciones futuras; etc.

Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 diciembre

Bloque 2. Números y álgebra		
Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas. Clasificación de matrices. Operaciones con matrices. Aplicación de las operaciones de las matrices y de sus propiedades en la resolución de problemas en contextos reales. Resolución de problemas de las ciencias sociales y de la economía.	1. Organizar información procedente de situaciones del ámbito social utilizando el lenguaje matricial y aplicar las operaciones con matrices como instrumento para el tratamiento de dicha información. 2. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas: matrices, sistemas de ecuaciones, inecuaciones y programación lineal bidimensional, interpretando críticamente el significado de las soluciones obtenidas.	1.1. Dispone en forma de matriz información procedente del ámbito social para poder resolver problemas con mayor eficacia. 1.2. Utiliza el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante tablas y para representar sistemas de ecuaciones lineales. 1.3. Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente, de forma manual y con el apoyo de medios tecnológicos.

Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 diciembre

4.8.2. Sinopsis

Fuente: Cartel de "Star Wars" en www.imdb.con

"La guerra de las galaxias", en el original inglés "Star Wars", es una saga de películas ambientadas en una galaxia de ficción. Es una batalla entre seres que apoyan "la Fuerza" y otros que apoyan el lado oscuro de esa Fuerza, provocado por la ira, el odio o el miedo. La saga transcurre alrededor de una familia, los Skywalker. A esta familia pertenecen tres generaciones como son: Anakin Skywalker/Darth Vader, Padmé Amidala, Luke Skywalker, Leia Organa y Kylo Ren.

Actualmente la saga consta de 8 películas estrenadas y otra que está anunciada para finales de 2019.

Además de estas 9 películas, se han estrenado en los últimos tiempos otras dos películas que no son fundamentales para la trama, pero que tiene relación con esta. No las consideraremos en los estudios que vamos a realizar.

La saga

Año	Título	Nota
1999	*Star Wars: Episodio I - La amenaza fantasma*	Trilogía de precuelas

Año	Título	Nota
2002	*Star Wars: Episodio II - El ataque de los clones*	
2005	*Star Wars: Episodio III - La venganza de los Sith*	
1977	*Star Wars: Episodio IV - Una nueva esperanza*	Trilogía original
1980	*Star Wars: Episodio V - El Imperio contraataca*	
1983	*Star Wars: Episode VI - Return of the Jedi*	
2015	*Star Wars: Episodio VII - El despertar de la Fuerza*	Trilogía de secuelas
2017	*Star Wars: Episodio VIII - Los últimos Jedi*	
2019	*Star Wars: Episodio IX - El ascenso de Skywalker*	

Más información en:

https://www.filmaffinity.com/es/search.php?stext=star+wars

https://www.imdb.com/list/ls070150896/

https://es.wikipedia.org/wiki/Star_Wars

4.8.3. Grafos en la saga

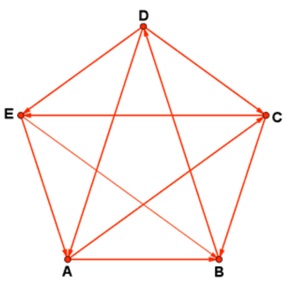
Este es el listado de personajes principales de la saga, y las películas en las que aparecen. Con esta información podríamos decir que los principales protagonistas son C-3PO o R2-D2, sabemos que no es así. La teoría de grafos nos permite ahondar más en el estudio.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VII
Darth Vader - Anakin Skywalker	*	*	*	*	*	*		
Obi-Wan Kenobi	*	*	*	*	*	*	*	
Padmé Amidala	*	*	*					
C-3PO	*	*	*	*	*	*	*	*
R2-D2	*	*	*	*	*	*	*	*
Yoda	*	*	*		*	*	*	*
Palpatine Darth Sidious	*	*	*		*	*		
Luke Skywalker			*	*	*	*	*	*
Leia Organa			*	*	*	*	*	*
Han Solo				*	*	*	*	*
Chewbacca			*	*	*	*	*	*

Boba Fett		*		*	*	*		
Rey							*	*
Finn							*	*
Poe Dameron							*	*
Snoke							*	*
Kylo Ren							*	*
BB-8							*	*

En Psicología se estudian los líderes en empresas de la siguiente manera:

- Realizan un estudio sobre con quien se relaciona cada empleado, quien ejerce dominio sobre quien, o algún tipo de relación que se desee estudiar.
- Con ese estudio realizan un grafo.
- De ese grafo obtienen la matriz de adyacencia.
- Suman por filas y así se obtiene una primera aproximación
- Normalmente varios de los empleados obtienen el mismo dato en esa primera aproximación. Por ejemplo, dominan al mismo número de personas.
- Se eleva al cuadrado la matriz de adyacencia, con lo que se obtienen los caminos de dos pasos, es decir los dominados de los dominados.
- Si a esta matriz la sumamos la de adyacencia se obtiene un resultado que ya es susceptible de utilizar por los psicólogos.

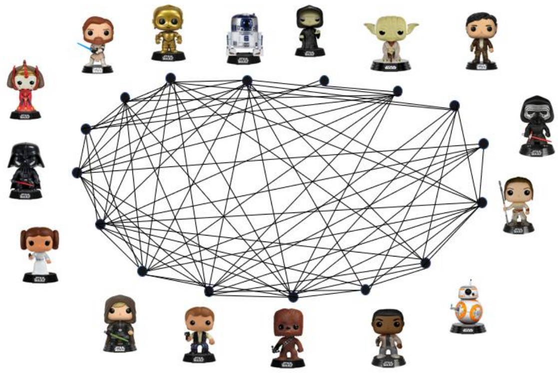


$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 5 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \\ 4 \end{array}$$

$$M + M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \color{blue}{8} \\ \color{blue}{4} \\ \color{blue}{5} \\ \color{red}{10} \\ \color{blue}{6} \end{matrix} \end{array}$$

Así y sin hacer el grafo dirigido:



Fuente: Propia

Si y la matriz de adyacencia:

																	SUMA
	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	12
	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	9
	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	11
	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	14
	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	15
	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	9
	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	9
	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	7
	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11
	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	9
	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	9
	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13
	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13
	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	12
	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	15

Vemos que los que aparecen en primeras posiciones son los dos antroides, además si elevamos al cuadrado esta matriz, obtenemos esta otra, en la que siguen C-3PO y R2-D2 arriba:

																	SUMA
	11	10	11	6	9	5	6	7	5	5	9	9	11	11	11	10	136
	9	8	9	6	9	3	3	4	3	3	6	6	8	8	9	8	103
	11	10	11	6	9	5	5	6	5	5	8	8	10	10	11	10	129
	10	14	14	5	8	9	6	10	9	9	12	12	11	14	10	14	161
	11	14	15	6	9	9	6	10	9	9	12	12	11	14	11	14	167
	6	5	6	6	6	1	1	1	1	1	3	3	5	5	6	5	62
	9	8	9	6	9	3	3	4	3	3	6	6	8	8	9	8	103
	5	9	9	1	3	9	4	9	9	9	9	9	6	9	5	9	108
	5	6	6	1	3	4	7	6	4	4	7	7	7	7	5	6	83
	6	10	10	1	4	9	6	11	9	9	11	11	8	11	6	10	127
	5	9	9	1	3	9	4	9	9	9	9	9	6	9	5	9	108
	5	9	9	1	3	9	4	9	9	9	9	9	6	9	5	9	108
	8	12	12	3	6	9	7	11	9	9	13	13	10	13	8	12	150
	8	12	12	3	6	9	7	11	9	9	13	13	10	13	8	12	150
	10	11	11	5	8	6	7	8	6	6	10	10	12	12	10	11	141
	10	14	14	5	8	9	7	11	9	9	13	13	12	15	10	14	168

Deberemos utilizar algún dato más, por ejemplo, el número de escenas que comparten y además son protagonistas de la escena. Por ejemplo, en la escena de la IV en la que luchan Obi-Wan y Dark Warder, son los protagonistas y comparten escena con Luke, Han y los demás. Por tanto, proponemos esta otra matriz de adyacencia:

																	SUMA
	21	31	22	11	16	17	7	0	1	0	0	0	2	3	9	4	144
	29	4	9	7	12	3	2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	68
	17	7	18	6	11	1	11	0	0	0	0	0	3	2	9	1	86
	4	4	1	1	15	0	0	0	0	0	2	0	6	5	5	3	46
	2	0	2	10	1	0	0	1	0	1	2	1	2	1	7	4	34
	14	5	2	0	1	7	4	0	0	0	0	0	0	0	2	0	35
	4	2	16	0	1	4	2	0	0	0	0	0	3	0	6	0	38
	0	0	0	4	1	0	0	6	2	1	6	6	0	0	0	8	34
	1	0	0	0	0	0	0	2	11	10	0	2	0	1	4	1	32
	0	0	0	0	0	0	0	2	10	12	7	8	8	4	10	3	64
	0	0	0	3	1	0	0	3	0	4	3	3	2	1	0	1	21
	0	0	0	1	0	0	0	9	2	7	11	11	8	7	0	4	60
	0	0	2	9	6	0	0	0	1	3	0	1	3	9	8	7	49
	3	0	5	16	9	1	0	0	0	6	7	8	31	1	18	28	133
	8	1	16	18	18	2	7	0	4	9	0	0	16	14	11	21	145

	4	1	5	15	11	0	1	6	1	3	2	3	12	21	14	6	105

Estos datos son más lógicos. Vemos un número similar para Luke y para Anakin. Por lo que si calculamos la matriz cuadrada y sumamos M+M2 nos dará:

																	SUMA
	2175	1116	1531	1050	1416	657	607	42	75	143	83	56	520	413	899	550	11333
	1021	1031	935	568	774	548	336	18	34	24	40	15	185	187	509	226	6451
	1069	749	1150	702	887	400	432	17	57	116	50	33	409	306	679	428	7484
	322	163	306	505	374	96	85	39	33	125	81	76	346	233	399	394	3577
	195	127	235	295	400	51	89	49	50	117	69	55	291	276	277	278	2854
	619	518	503	247	355	331	184	1	22	19	2	1	80	75	218	109	3284
	532	276	554	299	398	142	272	1	31	64	2	4	172	156	305	185	3393
	52	24	46	186	162	0	8	169	66	130	159	163	190	243	157	155	1910
	72	36	96	124	110	26	36	80	258	301	113	149	205	147	233	188	2174
	114	13	211	398	306	24	73	169	311	489	246	294	526	404	458	500	4536
	21	13	19	89	85	1	1	72	55	104	108	109	133	97	110	113	1130
	43	8	72	326	190	7	4	237	146	319	327	355	469	293	329	433	3558
	202	65	273	511	489	27	85	65	86	218	139	140	607	379	519	557	4362
	506	243	692	1253	1196	101	234	282	210	516	271	297	1040	1316	1151	977	10285
	859	493	1042	1288	1282	235	361	170	227	469	275	289	1227	971	1391	1088	11667
	488	246	628	1040	966	129	192	130	138	401	309	313	1185	616	1000	1191	8972

Que nos permite deducir que el orden de protagonismo en la saga es:

Luke Skywalker	
Darth Vader - Anakin Skywalker	
Han Solo	
Leia Organa	
Obi-Wan Kenobi	
Padmé Amidala	
Rey	
Chewbacca	

C-3PO	
Finn	
Yoda	
Palpatine Darth Sidious	
R2-D2	
Kylo Ren	
Poe Dameron	
BB-8	

4.8.4. Actividad

Diseño: PROPIO

Se propone como actividad actualizar los datos con la última película de la saga, Episodio IX - El ascenso de Skywalker, que está previsto que se estrene en diciembre de 2019.

Antes de realizar la actividad, se presentará el video:

https://www.youtube.com/watch?v=lp-1rvtRYQg

Y se explicará el punto "Grafos en la saga".

La actividad que se propone como un trabajo comentado entre un grupo de no más de 4 estudiantes.

4.9. El indomable Will Hunting - 2º Bachillerato – Matrices de adyacencia

4.9.1. Relación con el currículo

Matemáticas II. 2º Bachillerato

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: relación con otros problemas conocidos, modificación de variables, suponer el problema resuelto. Soluciones y/o resultados obtenidos: coherencia de las soluciones con la situación, revisión sistemática del proceso, otras formas de resolución, problemas parecidos, generalizaciones y particularizaciones interesantes. Iniciación a la demostración en matemáticas: métodos, razonamientos, lenguajes, etc. Lenguaje gráfico, algebraico, otras formas de representación de argumentos. Elaboración y presentación oral y/o escrita de informes científicos sobre el proceso seguido en la resolución de un problema o en la demostración de un resultado matemático.	1. Expresar verbalmente de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 4. Elaborar un informe científico escrito que sirva para comunicar las ideas matemáticas surgidas en la resolución de un problema o en una demostración, con el rigor y la precisión adecuados. 6. Practicar estrategias para la generación de investigaciones matemáticas, a partir de: a) la resolución de un problema y la profundización posterior; b) la generalización de propiedades y leyes matemáticas; c) Profundización en algún momento de la historia de las matemáticas; concretando todo ello en contextos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos. 7. Elaborar un informe científico escrito que recoja el proceso de investigación realizado, con el rigor y la precisión adecuados. 8. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones de la realidad. 9. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.	1.1. Expresa verbalmente de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados. 2.1. Analiza y comprende el enunciado a resolver o demostrar (datos, relaciones entre los datos, condiciones, hipótesis, conocimientos matemáticos necesarios, etc.). 2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. 2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas. 2.5. Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas. 4.1. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación. 4.2. Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. 4.3. Emplea las herramientas tecnológicas adecuadas al tipo de problema, situación a resolver o propiedad o teorema a demostrar, tanto en la búsqueda de resultados como para la mejora de la eficacia en la comunicación de las ideas matemáticas. 6.1. Generaliza y demuestra propiedades de contextos matemáticos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos. 6.2. Busca conexiones entre contextos de la realidad y del mundo de las matemáticas (la historia de la humanidad y la historia de las matemáticas; arte y matemáticas; tecnologías y matemáticas, ciencias experimentales y matemáticas, economía y matemáticas, etc.) y entre contextos matemáticos (numéricos y geométricos, geométricos y funcionales, geométricos y probabilísticos, discretos y continuos, finitos e infinitos, etc.). 7.1. Consulta las fuentes de información adecuadas al problema de investigación. 7.2. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto del problema de investigación. 7.3. Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. 7.4. Emplea las herramientas tecnológicas adecuadas al tipo de problema de investigación. 7.5. Transmite certeza y seguridad en la comunicación de las ideas, así como dominio del tema de investigación. 7.6. Reflexiona sobre el proceso de investigación y elabora conclusiones sobre el nivel de: a) resolución del problema de investigación; b) consecución de objetivos. Así mismo, plantea posibles continuaciones de la investigación; analiza los puntos fuertes y débiles del proceso y hace explícitas sus impresiones personales sobre la experiencia. 8.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 8.2. Establece conexiones entre el problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él, así como los conocimientos matemáticos necesarios. 8.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos adecuados que permitan la resolución del problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 8.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 8.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. 9.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre los logros conseguidos, resultados mejorables, impresiones personales del proceso, etc.

Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 diciembre

Bloque 2. Números y álgebra		
Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos. Clasificación de matrices. Operaciones. Aplicación de las operaciones de las matrices y de sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales.	1. Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices para describir e interpretar datos y relaciones en la resolución de problemas diversos. 2. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas (matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones), interpretando críticamente el significado de las soluciones.	1.1. Utiliza el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante tablas o grafos y para representar sistemas de ecuaciones lineales, tanto de forma manual como con el apoyo de medios tecnológicos adecuados. 1.2. Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente, de forma manual o con el apoyo de medios tecnológicos. 2.3. Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos.

Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 diciembre

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II. 2º Bachillerato

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: relación con otros problemas conocidos, modificación de variables, suponer el problema resuelto, etc. Análisis de los resultados obtenidos: coherencia de las soluciones con la situación, revisión sistemática del proceso, otras formas de resolución, problemas parecidos. Elaboración y presentación oral y/o escrita de informes científicos escritos sobre el proceso seguido en la resolución de un problema Realización de investigaciones matemáticas a partir de contextos de la realidad Elaboración y presentación de un informe científico sobre el proceso, resultados y conclusiones del proceso de investigación desarrollado. Práctica de los proceso de matematización y modelización, en contextos de la realidad. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.	1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 3. Elaborar un informe científico escrito que sirva para comunicar las ideas matemáticas surgidas en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados. 5. Practicar estrategias para la generación de investigaciones matemáticas, a partir de: a) la resolución de un problema y la profundización posterior; b) la generalización de propiedades y leyes matemáticas; c) Profundización en algún momento de la historia de las matemáticas; concretando todo ello en contextos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos. 6. Elaborar un informe científico escrito que recoja el proceso de investigación realizado, con el rigor y la precisión adecuados. 7. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 8. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. 9. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. 10. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. 11. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, valorando su eficacia y aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados. 2.1. Analiza y comprende el enunciado a resolver (datos, relaciones entre los datos, condiciones, conocimientos matemáticos necesarios, etc.). 2.2. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, contrastando su validez y valorando su utilidad y eficacia. 2.3. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso seguido. 3.1. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación. 3.2. Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. 5.1. Profundiza en la resolución de algunos problemas planteando nuevas preguntas, generalizando la situación o los resultados, etc. 5.2. Busca conexiones entre contextos de la realidad y del mundo de las matemáticas (la historia de la humanidad y la historia de las matemáticas; arte y matemáticas; ciencias sociales y matemáticas, etc.). 6.1. Consulta las fuentes de información adecuadas al problema de investigación. 6.2. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto del problema de investigación. 6.3. Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. 6.5. Transmite certeza y seguridad en la comunicación de las ideas, así como dominio del tema de investigación. 7.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 7.2. Establece conexiones entre el problema del mundo real y el mundo matemático: identificando del problema o problemas matemáticos que subyacen en él, así como los conocimientos matemáticos necesarios. 7.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos adecuados que permitan la resolución del problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 7.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 7.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. 8.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre los logros conseguidos, resultados mejorables, impresiones personales del proceso, etc. 9.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada, convivencia con la incertidumbre, tolerancia de la frustración, autoanálisis continuo, etc. 9.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. 9.3. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas; revisar de forma crítica los resultados encontrados; etc. 10.1. Toma decisiones en los procesos (de resolución de problemas, de investigación, de matematización o de modelización) valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia por su sencillez y utilidad. 11.1. Reflexiona sobre los procesos desarrollados, tomando conciencia de sus estructuras; valorando la potencia, sencillez y belleza de los métodos e ideas utilizados; aprendiendo de ello para situaciones futuras; etc.

Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 diciembre

Bloque 2. Números y álgebra		
Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas. Clasificación de matrices. Operaciones con matrices. Aplicación de las operaciones de las matrices y de sus propiedades en la resolución de problemas en contextos reales. Resolución de problemas de las ciencias sociales y de la economía.	1. Organizar información procedente de situaciones del ámbito social utilizando el lenguaje matricial y aplicar las operaciones con matrices como instrumento para el tratamiento de dicha información. 2. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas: matrices, sistemas de ecuaciones, inecuaciones y programación lineal bidimensional, interpretando críticamente el significado de las soluciones obtenidas.	1.1. Dispone en forma de matriz información procedente del ámbito social para poder resolver problemas con mayor eficacia. 1.2. Utiliza el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante tablas y para representar sistemas de ecuaciones lineales. 1.3. Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente, de forma manual y con el apoyo de medios tecnológicos.

Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 diciembre

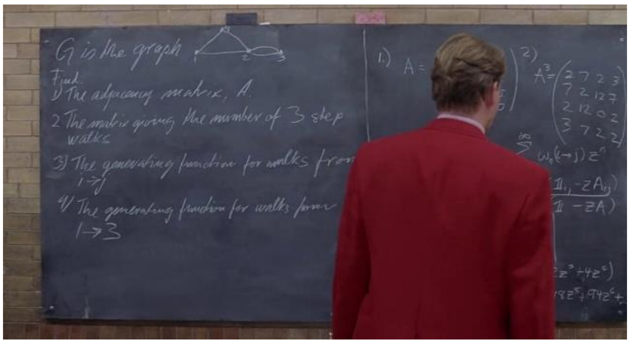
4.9.2. Sinopsis

Visto en Sinopsis de

4.9.3. Grafos en la película

En la película aparecen los grafos en varias ocasiones. Para 2º de Bachillerato es interesante el momento de resolver el primer problema en la pizarra del pasillo.

En esta escena el profesor observa la resolución encontrada en la pizarra:



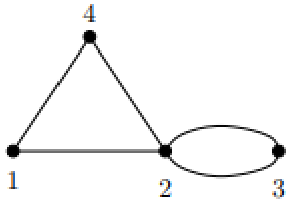
Fuente: Fotograma de la película

En esta escena resolviéndolo en su casa:

Fuente: Fotograma de la película

El problema:

Se presenta el siguiente grafo:



Se pide:

1) la matriz de adyacencia A.

2) la matriz que da el número de trayectorias de longitud tres

3) la función que genera las trayectorias de i → j

4) la función que genera las trayectorias de 1 → 3

Los $a_{ii} = 0$, ya que no existen bucles, es decir enlaces sobre si mismos. Es resto de valores es sencillo de calcular

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular los caminos de tres pasos es necesario calcular A^3

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 12 & 7 \\ 2 & 12 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Para interpretarlo, consideramos por ejemplo el elemento a_{21} de A^3 cuyo valor es 7 significa que hay dos caminos de 3 pasos que comienzan en el vértice 1 y concluyen en el 2.

Para deducir la matriz A^n, habría que diagonalizar que no está en el currículo de Secundaria o Bachiller. Se realizaría obteniendo el polinomio característico:

$$p(\lambda) = \lambda 4 - 7\lambda 2 - 2\lambda + 4$$

Mediante el teorema de Cayley-Hamilton:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & z & 0 & z \\ z & 0 & 2z & z \\ 0 & 2z & 0 & 0 \\ z & z & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$$

y

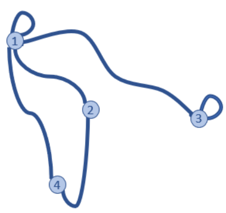
$$f_{13}(z) = \frac{2z^2}{4z^3 - 6z^2 - z + 1} = 2z^2 + 2z^3 + 14z^4 + 18z^5 + O(z^6)$$

Las a_{nij} de A^n son los caminos de longitud n que conectan el vértice i con el vértice j.

4.9.4. Actividad

Diseño: PROPIO

Dar un grafo sencillo y calcular la matriz de adyacencia y sus potencias hasta la 5.



Fuente: Propia

Solución:

A				A^2				A^3				A^4				A^5			
1	1	1	1	4	2	2	2	10	6	6	6	28	16	16	16	76	44	44	44
1	0	0	1	2	2	1	1	6	3	3	4	16	10	9	9	44	25	25	26
1	0	1	0	2	1	2	1	6	3	4	3	16	9	10	9	44	25	26	25
1	1	0	0	2	1	1	2	6	4	3	3	16	9	9	10	44	26	25	25

5. Conclusión

Las conclusiones que se obtienen tras la realización del Trabajo Fin de Máster son varias:

1. El cine como herramienta de motivación y de implicación, tiene mucho que aportar. Tanto para tratar escenas concretas en las que se puede detener el docente para ver algún elemento clave de alguna Unidad Didáctica; como una película, saga o tema relacionado con el cine, que permita discutir o relacionar las matemáticas con el mundo que nos rodea. Las nuevas necesidades formativas deben promover la autonomía, elaborar y construir las propias interpretaciones, reconstruyendo la cultura y el conocimiento. No sirve de mucho memorizar las fechas de acontecimientos históricos, a no ser que se sepan contextualizar y relacionar con otros acontecimientos. Además, estas contextualizaciones y relaciones serán mucho más duraderas en la memoria.
2. Como se ha podido demostrar en el presente trabajo que la teoría de grafos está relacionada con la estadística, matrices, funciones continuas, etc. Por tanto, aunque no se modifique el currículo se pueden crear Unidades Didácticas que acerquen el tema al alumnado en la etapa de Educación Secundaria.
3. La teoría de Grafos es una parte importante de las matemáticas que está presente en la vida diaria de nuestra sociedad y que debería entrar explícitamente en el currículo. Se puede acercar al estudiante a la teoría de grafos mediante las siguientes cuestiones: Redes sociales, Inteligencia artificial, Logística, Genética, Robótica, Psicología, Traducción, Procesamiento de imágenes, Búsqueda de isómero, Epidemias (virus reales o informáticos) o Redes informáticas.

6. Bibliografía

- Arroio, A. (2010). Context based learning: A role for cinema in science education. Science Education International.
- Beltrán Pellicer,P (2015). Tesis Doctoral, Series t largometrajes como recurso didáctico en Matemáticas en educación secundaria.
- Brake, M. & Thornton, R. (2003, enero). Science fiction in the classroom. Physics Education.
- calculo.cc (2012). Matrices y Grafos. http://calculo.cc/temas/temas_algebra/matriz/teoria/matriz_grafo.html
- Cárdenas P.P., Mese F., Cardona F.J. (2008) Scientia et Technica Año XIV>Modificación del juego del hex y su aplicación en la prueba del teorema del punto fijo de brouwer
- Coll C. (coordinador) (2010) Desarrollo, Aprendizaje y Enseñanza en la Educación Secundaria.
- de Guzmán, M (1998) Matemáticas, clave de la vida. Programa Milenium TV3.
- Galdeano J., Pastor J. M. (2018). De los puentes de Königsberg a las redes sociales. Teoría de grafos y redes complejas. Colección: Grandes ideas de las matemáticas.
- Godino J.D., Giacomone B, Batanero C., Font V. (2017) Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas.
- Godino, J. D.; batanero, C.; Font, V.; Giacomone, B. (2016) Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. In: FERNÁNDEZ, C. et al. (Ed.). Investigación en Educación Matemática XX. Málaga: Ed. SEIEM, 2016
- Harary F., Prins G. (1959) The number of homeomorphically irreducible trees, and other species.
- Llopis, J.(-) Matesfacil, ejercicios resueltos de matemáticas. Valencia, España. Máquina de Turing. https://www.matesfacil.com/automatas-lenguajes/Maquina-Turing.html
- Núñez Santiago, R., Núñez Valdés, J., Paluzo Hidalgo, E. y Salguero Quirós, E. (2016). Jugueteando con grafos. Revista Iberoamericana de Educación Matemática.

- Núñez, R., otros (1996). Procedimientos de construcción en álgebra. Universidad Sergio Arboleda.
- Patiño B. y Charry O. G. (2013). La enseñanza de la teoría de grafos como estrategia para desarrollar procesos de matematización.
- Población, A.J. (2008). Algunos momentos matemáticos- del cine. MATerials MATemátics.
- Real Decreto 1105/2014, (2015). BOE Núm. 3 sábado 3 de enero de 2015 Sec. I.
- Rivera G. (2013). La motivación del alumno y su relación con el rendimiento académico en los estudiantes de Bachillerato Técnico en Salud Comunitaria del Instituto República Federal de México de Comayagüela, M.D.C., durante el año lectivo 2013 - Tesis.
- Schunk, D. (2012) Teorías del aprendizaje. Una perspectiva educativa
- Sorando, J.M. (-). Matemáticas y Cine: Enigma. Matemáticas en tu mundo. Zaragoza, España. http://matematicasentumundo.es/CINE/cine_Enigma.htm
- Urtzi Buijs Martín (2018) John Nash y el juego del Hex. Archimede's tub. http://www.archimedestub.com/2018/05/23/john-nash-y-el-juego-del-hex/
- Villatoro, F. (2013) Teoría de grafos | Francis (th)E mule Science's News. "El indomable Will Hunting" y los "árboles irreducibles con 10 vértices" https://francisthemulenews.wordpress.com/tag/teoria-de-grafos/
- Vygotsky, L. S. (1978). Mind in Society.
- Wilensky, U. (1999). NetLogo. http://ccl.northwestern.edu/netlogo/. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL.

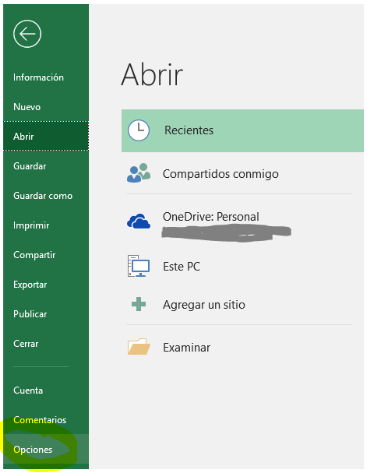
7. Anexos

7.1. Anexo I - Solve

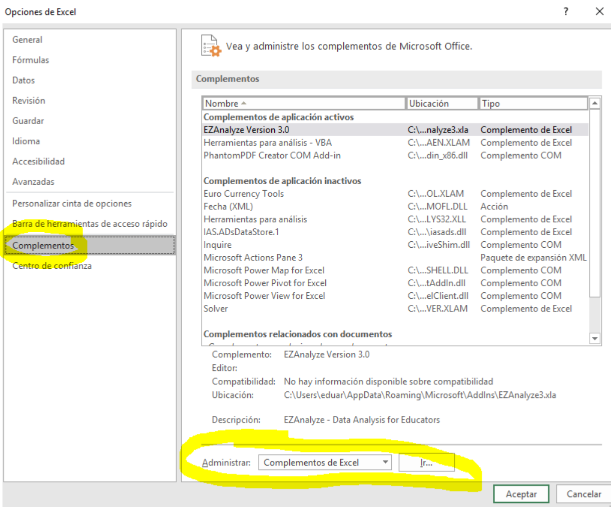
Para instalar Solve en Excel, se puede seguir la documentación de Microsoft:

https://support.office.com/es-es/article/carga-del-complemento-solver-en-excel-2016-612926fc-d53b-46b4-872c-e24772f078ca

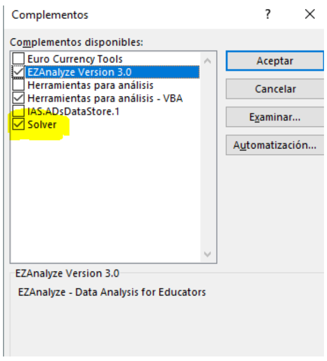
Se accederá mediante el menú de Excel, Archivo/Opciones:



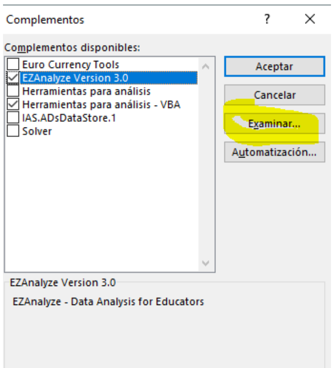
Al final del menú en Complementos se presentan los complementos disponibles y los inactivos. Se debe activar Solve. Para ello se pulsará el botón "Ir"



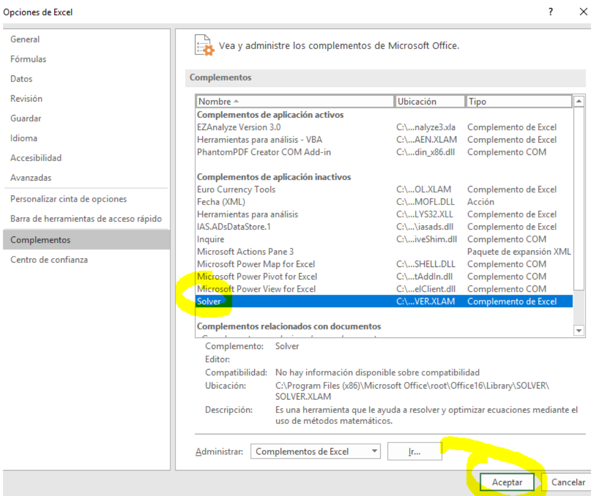
Se debe marcar el check de Solve y aceptar:



Si no apareciese, pulsando Examinar se puede encontrar el complemento:



Una vez activado se pulsará aceptar.



Si está correctamente activado, debe aparecer en el menú de Datos: