Introducción a la Metodología Singapur en las aulas de matemáticas españolas. Una propuesta didáctica para Geometría en primer curso de Educación Secundaria Obligatoria.

Trabajo Fin de Máster

Máster Universitario en Formación del Profesorado

Presentado por:

Dª CLARA CARRERO REDONDO

Dirigido por:

Dª EVANGELINA HERRANZ PRADA

Alcalá de Henares, a 9 de Julio de 2019

"La mente que se abre a una nueva idea jamás volverá a su tamaño original."

Albert Einstein.

AGRADECIMIENTOS

El agradecimiento de este trabajo va dirigido a la Universidad de Alcalá y especialmente a Evangelina Herranz Prada, por la implicación y compromiso brindado no sólo como tutora de este trabajo, sino como docente activa que busca en sus alumnos un aprendizaje significativo y que sin duda con su ayuda y aportación he fijado las bases primordiales para poder ejercer en un futuro próximo el magisterio de la enseñanza secundaria.

RESUMEN

El presente trabajo recoge un desarrollo de la metodología utilizada en Singapur para el aprendizaje de matemáticas, por ser en la actualidad el país con los mejores resultados educativos tanto en el ámbito de matemáticas como en el de ciencias.

Comienza exponiendo los resultados del informe TIMSS 2015, que muestra un Estudio internacional de tendencias en Matemáticas y Ciencias, donde se puede apreciar que los resultados en España están por debajo de la media de la OCDE y UE.

Posteriormente, se definen los antecedentes, el marco curricular y las bases teóricas en las que se sustenta dicha metodología. Al tiempo, se realiza una propuesta práctica de sesiones del bloque de geometría de 1º ESO teniendo en cuenta las tres ideas básicas en las que se fundamenta la metodología usada en Singapur y las competencias clave para el aprendizaje permanente.

La planificación de la enseñanza se basa en la capacidad del profesor para diseñar sesiones de trabajo participativo que incorpore todas las técnicas y estrategias precisas para desarrollar una buena comprensión de las matemáticas.

Por último, se muestra una pequeña evaluación de las actividades que se realizaron durante mi periodo de prácticas en el IES Newton Salas, Villanueva de la Torre.

PALABRAS CLAVE: Currículo, España, Singapur, Educación, Secundaria, Matemáticas, Contenidos, Metodología, Enseñanza, Aprendizaje, Competencias clave.

ABSTRACT

This work gathers the development of the methodology used in Singapore for learning mathematics, recognised as the country with the current best educational results both in the field of mathematics and science.

Results of the TIMSS 2015 report are presented, showing an international study of trends in mathematics and science, where it is possible to appreciate that the results in Spain are below the OECD and EU average.

Subsequently, the background, the curricular framework and the theoretical bases on which this methodology is based are defined. At the same time, a practical proposal of geometry sessions included in the first course of the obligatory secondary education is made, leaving behind the traditional methodologies and considering the three basic ideas in which the methodology used in Singapore is based and the Key Competences for Lifelong Learning.

Teaching planning is based on the ability of the teacher to design participatory work sessions that incorporate all the techniques and strategies required to develop a good understanding of mathematics.

Finally, a small evaluation of the activities carried out during my intership at the secondary school "IES Newton Salas", located in the municipality of Villanueva de la Torre is made.

KEYWORDS: Curriculum, Spain, Singapore, Education, Secondary, Mathematics, Contents, Methodology, Teaching, Learning, Key Competences.

Índice

1. Introducción *8*

2. Propósito del trabajo *10*

3. Fundamentación teórica. *11*

3.1 Informe TIMSS **11**

3.2 Antecedentes del Método Singapur. **14**

3.1 Bases teóricas del Método Singapur **15**

3.2 Marco curricular propuesto por Singapur. **18**

4. Propuesta didáctica basada en la metodología Singapur. 1ºESO y geometría. ... *23*

4.1 Cronograma. **25**

4.2 Desarrollo de las sesiones. **27**

- Sesión 1. 27
- Sesión 2 30
- Sesión 3 34
- Sesión 4 37
- Sesión 5 40
- Sesión 6 40
- Sesión 7 43
- Sesión 8 45

4.3 Propuesta de prueba de evaluación. **46**

4.4 Análisis de propuesta práctica. **47**

5. Conclusión *50*

6. Referencias bibliográficas *51*

ANEXO I. *53*

1. Introducción.

Este trabajo surgió por mi inquietud al intentar dar respuesta a las necesidades que nos presenta la sociedad de hoy en día y de la importancia del recurso más importante que tenemos para enfrentarnos a la vida, la educación.

La educación es el pilar más importante de la sociedad, por eso, creo que es necesario estudiarla y poner en práctica la forma más eficaz para poder mejorarla.

La educación en España está siendo objeto de crítica, como consecuencia de los malos resultados en las pruebas, de carácter internacional, desarrolladas por la OCDE[1] en el programa PISA[2]. Esta razón lleva a la reflexión y actualmente se están realizando diversos análisis comparativos con las metodologías de otros países para mejorar nuestro sistema educativo.

Tras investigaciones y estudios, muchos de los docentes tienen una visión instrumentalista de las matemáticas, es decir, la consideran un conjunto de resultados donde hay reglas, herramientas y procedimientos sin ninguna vinculación teórica ni práctica establecida.

Los profesores desarrollan su temario, muestran ejercicios y problemas y lo resuelven paso a paso para asegurar la compresión en el alumnado. Como resultado, los docentes son meros instructores, trasmitiendo reglas y procedimientos que sus alumnos, sin más, tienen que asimilar. Con esta metodología tradicional la preocupación de los docentes es lograr que los alumnos sigan los procedimientos que ellos han marcado para la resolución de problemas, actividades, etc. Por otra parte, la participación de los estudiantes se basa en estar atentos y responder preguntas puntuales del profesor, sin promover apenas la reflexión o la discusión. De esta manera no podrán desarrollar ciertas competencias, como el sentido crítico, el análisis, el razonamiento, la toma de decisiones, etc. por el contrario usarán la metodología aprendida con memorización de contenidos y fórmulas matemáticas para controlar los procedimientos (Moreano, Asmad, Cruz, & Cuglievan, 2008).

> Einstein dijo: *"Es un auténtico milagro que los métodos modernos de enseñanza no hayan experimentado por completo todavía la santa curiosidad por la investigación"*.

La falta de motivación e interés de los alumnos por el área de matemáticas preocupa tanto nacional como internacionalmente. Algunos de los objetivos de la enseñanza de matemáticas es conseguir que los estudiantes desarrollen conocimientos flexibles y aplicables, los cuales se puedan adaptar para poder utilizarlos en diferentes situaciones. Para conseguirlos es necesario implementar metodologías dinámicas y variadas en el aula que despierten el interés del alumnado.

[1] OCDE: Organización para la Cooperación y desarrollo Económicos.
[2] PISA: Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos.

Debido a los nuevos retos que nos presenta la globalización y el cambio continúo de las tecnologías y la ciencia, los organismos nacionales e internacionales marcaron las líneas prioritarias de actuación en materia educativa con las competencias clave para el aprendizaje permanente, muchas de ellas se relacionan unas con otras y tienen como principal objetivo el pleno desarrollo de sus ciudadanos tanto personal, social y profesional.

Se definen ocho competencias clave en el Marco de Referencia Europeo. (DG Educación y Cultura, 2007)

- Competencia lingüística (comunicación en lengua materna y comunicación en lenguas extranjeras). Atiende a la comunicación tanto oral y escrita en diferentes situaciones para la interacción con diferentes individuos y con el medio que nos rodea.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología. Hacen referencia a la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y de usar los recursos que disponemos para describir, representar y predecir situaciones cotidianas de la vida personal y profesional. Conlleva el desarrollo del pensamiento crítico y científico para la adquisición y aplicación de conocimientos.
- Competencia digital. Corresponde a un uso crítico, responsable y creativo de las TIC, los ciudadanos deben ser capaces de utilizar las herramientas adecuadas para cada situación, como aplicaciones informáticas, bases de datos, hojas de cálculo, sistema de tratamientos de textos, redes de colaboración, etc.
- Aprender a aprender. Es la habilidad para iniciar el aprendizaje, persistir en él, organizar el tiempo y gestionarlo de manera eficaz, tanto de forma individual como grupalmente. Esta competencia engloba todas las demás, ya que requiere capacidades básicas para el aprendizaje, como lectura, el cálculo, las TIC, etc.
- Competencias sociales y cívicas. Incluyen competencias personales, interpersonales e interculturales. Es necesario que las personas estén preparadas para convivir y participar activamente de manera constructiva en la vida social y profesional. La competencia social se basa en el bienestar personal y colectivo mientras que la competencia cívica trata del conocimiento de los derechos humanos y civiles, de justicia, democracia, igualdad, etc.
- Sentido de iniciativa y espíritu de empresa. Hace referencia a la capacidad de una persona para convertir las ideas en actos. Tiene que ver con la innovación, la creatividad, la gestión, el liderazgo, la independencia, la iniciativa, etc. con todas estas capacidades se pretende que cada persona logre los objetivos propuestos.

- Conciencia y expresión culturales. Es la capacidad de valorar la expresión creativa de ideas, experiencias y emociones a través de distintos medios (herencia cultural, música, arte, etc.) y de esta forma desarrollar la creatividad e iniciativa en diferentes situaciones.

Con estas competencias se pretende dar respuesta a nuevos retos, nuevos problemas y sobretodo, desarrollar una responsabilidad colectiva e individual y capacidad creativa. Este es uno de los principales objetivos de la Educación. (Delgado, 2011)

2. Propósito del trabajo.

El presente trabajo tiene como propósito conocer e indagar sobre la metodología usada en Singapur y valorar si puede favorecer al aprendizaje de los alumnos. Se realizará el estudio y el análisis de su implementación en la Educación Secundaria Obligatoria. El objetivo principal es analizar las ventajas que esta metodología puede aportar en el aprendizaje de las matemáticas, fomentando una participación activa y un trabajo cooperativo continuo frente a la metodología tradicional utilizada hasta ahora en las aulas.

La lección magistral se fundamenta en la pasividad del alumnado. Los estudiantes no saben, no tienen ninguna idea anterior, y el único papel que tiene el docente es "llenar" ese vacío de saber de conocimientos. Esto significa que el mismo profesor toma una actitud pasiva, la información es recibida sin que haya ningún tipo de actividad por parte del alumno, que, si cabe, se limita a tomar algunos apuntes o al subrayado del libro de texto. Todo esto conlleva un aprendizaje repetitivo y memorístico, los alumnos reproducen "lo aprendido" para superar la evaluación.

Se explicarán las tres ideas básicas en el que se fundamenta dicha metodología, el enfoque CPA (Concreto-Abstracto-Pictórico), el currículo en espiral y la variación sistemática de aprender un contenido matemático y el marco curricular basado en la resolución de problemas, el cual engloba cinco pilares fundamentales: los conceptos, las competencias, el proceso, las actitudes y la metacognición. De entre todos ellos, la actitud hacia la asignatura es la parte fundamental para el rendimiento académico, la cognición y el afecto se complementan, ya que sin actitud positiva ni interés o motivación para el aprendizaje no habría desarrollo cognitivo (Mato & Torre, 2009).

Se realizará una propuesta de intervención para el bloque de Geometría en 1º ESO[3], basada en la metodología Singapur, con intención de conseguir que los alumnos aprendan los conocimientos y relaciones geométricas de una manera intuitiva y sin memorizar, entendiendo el razonamiento del contenido.

[3] ESO: Educación Secundaria Obligatoria.

Con ello, se pretende descubrir y estudiar otra forma de enseñar matemáticas para una futura labor profesional y dar los primeros pasos para implantar la metodología usada en Singapur.

3. Fundamentación teórica.

3.1 Informe TIMSS

Para este análisis, se utiliza el informe del Instituto Nacional de Evaluación Educativa (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2016).

La evaluación internacional TIMSS (Estudio Internacional de Tendencias en matemáticas y Ciencias) es elaborada por la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo (IEA[4], en inglés). Esta prueba se realiza cada cuatro años y tiene una gran relevancia, ya que se asocia con el futuro social, económico y cultural de los países participantes dado que el desarrollo de un país está basado en su capital humano.

El estudio TIMSS evalúa los rendimientos en matemáticas y ciencias en una prueba diferenciada. Se divide en dos grandes bloques, contenidos y dominios matemáticos (números, formas y medidas geométricas y representación de datos) y en ciencias (ciencias de la vida, ciencias físicas y ciencias de la tierra). Dentro de estas pruebas hay dominios cognitivos comunes para los dos ámbitos: conocer, aplicar y razonar.

En la mayoría de los países la edad obligatoria de escolarización se fija en los seis años. Este estudio se realiza en cuarto y octavo grados, lo que corresponde en España a cuarto curso de primaria y 2º de ESO.

TIMSS presenta una tabla donde se establecen los cinco niveles de rendimiento del alumnado.

Niveles de rendimiento	Puntuación
Nivel bajo	De 400 a 475 puntos
Nivel intermedio	De 475 a 550 puntos
Nivel alto	De 550 a 625 puntos
Nivel avanzado	625 puntos o más

Figura 1. Niveles de rendimiento de matemáticas recogidos en el Marco teórico TIMSS.

Fuente: INEE[5] (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2016)

[4] IEA: International Association for the Evaluation of Educational Achievement.
[5] INEE: Instituto Nacional de Evaluación Educativa

Además, cada puntación presenta una descripción precisa de las habilidades de cada uno de los rendimientos.

	Conocimientos	Destrezas
NIVEL BAJO	Los alumnos tienen conocimientos matemáticos básicos.	• Sumar y restar números enteros. • Entender la multiplicación por números de una cifra. • Poder resolver problemas sencillos. • Cierta comprensión de las fracciones sencillas, formas geométricas y medidas. • Leer y completar diagramas de barras y tablas básicos.
NIVEL MEDIO	Los alumnos son capaces de aplicar conocimientos matemáticos básicos en situaciones sencillas.	• Comprender los números enteros • Cierta comprensión de las fracciones y los decimales. • Visualizar formas en tres dimensiones a partir de representaciones en dos dimensiones. • Identificar y dibujar formas con propiedades sencillas. • Leer e interpretar diagramas de barras y tablas.
NIVEL ALTO	Los alumnos son capaces de utilizar sus conocimientos y comprensión para resolver problemas.	• Resolver problemas que incluyan operaciones con números enteros, fracciones sencillas y números con dos cifras decimales. • Comprender las propiedades geométricas de las formas y de los ángulos (mayores o menores que un ángulo recto). • Interpretar y utilizar datos de una tabla o de una variedad de gráficos para resolver problemas.
NIVEL AVANZADO	Los alumnos son capaces de utilizar sus conocimientos y comprensión en una variedad de situaciones relativamente complejas y de explicar su razonamiento.	• Resolver una variedad de problemas de varios pasos con números enteros. • Comprensión creciente de fracciones y decimales. • Aplicar en variadas situaciones sus conocimientos geométricos sobre formas en dos y tres dimensiones. • Interpretar y representar datos para resolver problemas de varios pasos.

Figura 2. Conocimientos y destrezas adquiridos para determinar el nivel en matemáticas.

Fuente: (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2016)

En el estudio TIMSS 2015, participaron países pertenecientes a la Unión Europea, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) y aquellos que muestran interés en este estudio como la Federación Rusa por su importancia y por su gran tamaño, y Singapur, por ser el país con los mejores resultados tanto en el ámbito de matemáticas como en ciencias. España sólo participó en la evaluación internacional de cuarto curso de primaria.

A pesar de que este estudio TIMSS 2015 sólo contempla resultados en primaria, los resultados obtenidos se aplican en este trabajo a fin de evaluar la incidencia de la metodología aplicada en España en los siguientes cursos académicos y aplicar determinados ajustes y mejoras para que los resultados de rendimiento del alumno sean más positivos.

En la Figura 3, se exponen los promedios globales en matemáticas, donde las puntuaciones medias globales obtenidas por los distintos países participantes se

exponen por orden decreciente. España ha obtenido 505 puntos situándose por debajo de los 519 de la UE y de los 525 puntos de promedio de la OCDE.

Entre los países de la UE situados por debajo de España, nos encontramos a Croacia con 502, Eslovaquia con 498 y Francia con 488 puntos. A pesar de encontrarnos en un nivel de rendimiento intermedio hay diferencias significativas con el promedio de la UE y la OCDE.

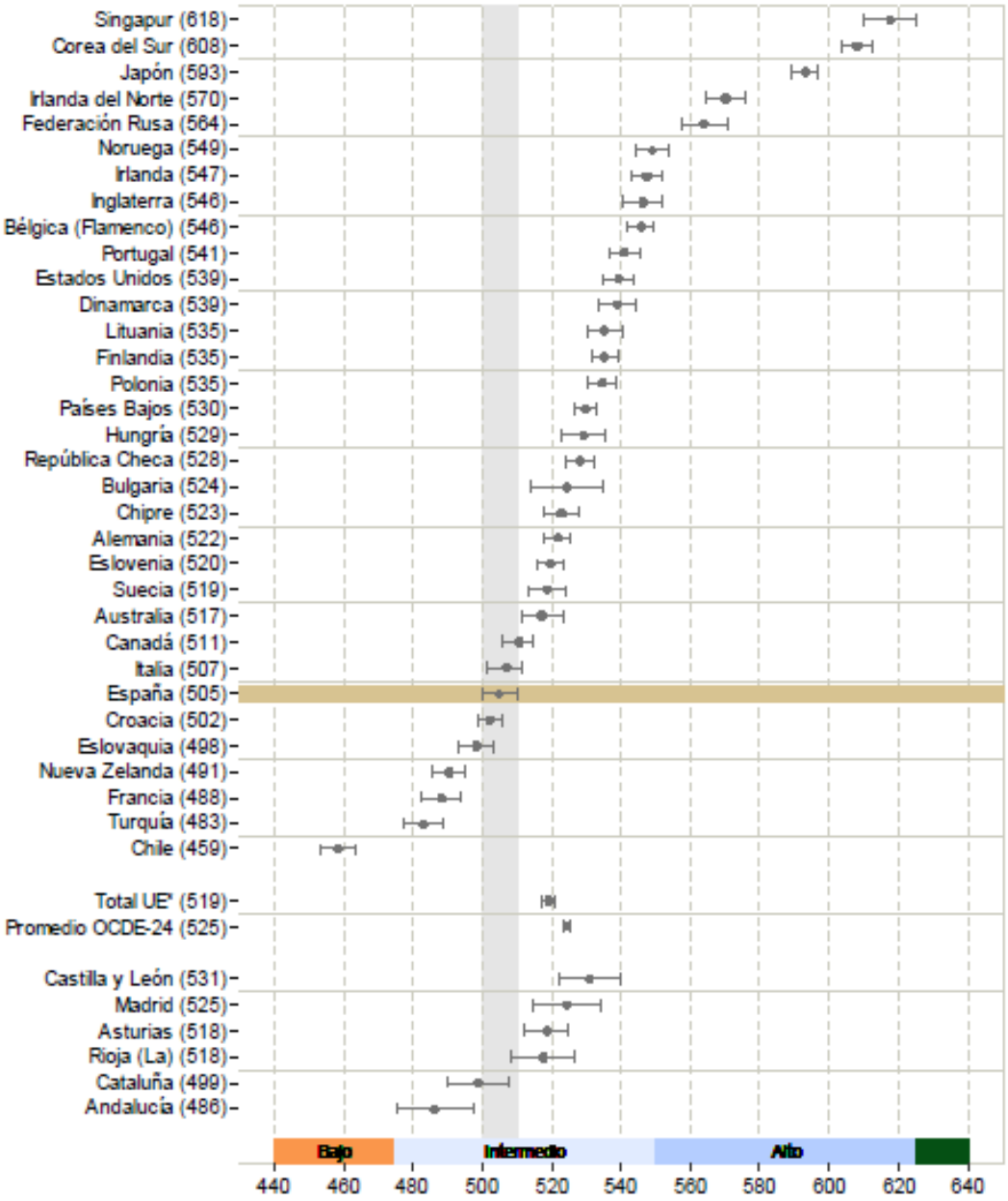


Figura 3. Promedios globales en matemáticas.

Fuente: INEE. (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2016)

Los mejores resultados los obtiene Singapur con 618 puntos, con diferencias significativas respecto a los demás países. Por esta razón, a menudo se habla de este método como forma de mejorar la enseñanza de matemáticas.

Por todo ello, se expondrán los antecedentes del "Método Singapur" y las principales bases teóricas en las que se sustenta, además de realizar una propuesta de intervención de esta metodología en el bloque de geometría de 1º ESO.

La metodología está basada en los principios pedagógicos. Se estructura sobre la base de la resolución de problemas como eje de enseñanza de matemáticas. Las bases pedagógicas de "Método Singapur" están fundamentadas por lo estudios principales de Jerome Bruner, Zoltan Dienes y Richard Skemp.

El objetivo principal de esta metodología es la formación de los alumnos en la resolución de problemas matemáticos en diferentes contextos, también los no rutinarios y los relacionados con la vida real. Todo ese aprendizaje va a depender de las habilidades de los alumnos y de cómo adquieran los diferentes conceptos matemáticos. A su vez, depende de la actitud hacia la materia y de la conciencia que toman sus habilidades metacognitivas (Método Singapur , 2011).

3.2 Antecedentes del Método Singapur.

En muchas ocasiones para buscar la calidad de la educación tenemos que comenzar por cuestionarnos la posición de desarrollo económico del país y poder analizar el desarrollo de una educación de calidad al alcance de todos. Por lo que tenemos que estudiar qué hizo Singapur para alcanzar el nivel educativo que tiene actualmente.

La isla de Singapur nace como país independiente en 1965. Es un país con pocos recursos naturales y en esa fecha con casi la mitad de su población analfabeta. Las autoridades políticas propiciaron la instalación de una industria manufacturera extrajera para poder beneficiarse de la mano de obra barata autóctona. Por otro lado, a pesar de la ausencia de recursos naturales, se dieron cuenta de que tenían el recurso más importante, la capacidad de potenciar la inteligencia y la capacidad creadora de sus habitantes.

"*Y como esta inteligencia y capacidad creadora debe ser cultivada a través de la educación, decidieron invertir de manera sostenida y creciente en ella, desde el primer día. Uno puede imaginar qué otras enormes necesidades tenía la sociedad y qué otras tantas prioridades y urgencias había que atender para el desarrollo económico. Sin embargo, priorizaron recursos importantes para educación, concibiéndola como una inversión permanente que crea, precisamente, la base del desarrollo buscado*." (Felmer, 2011)

Así Singapur invirtió en educación, construyendo escuelas y contratando profesores, algunos de ellos, aún estudiantes. Se dedicaron a educar y formar trabajadores focalizando en los ámbitos con mayor necesidad. Singapur fue elevando la

calidad del currículo, de sus profesores y del sistema educativo. De la misma manera, se igualaron los sueldos de los docentes al sueldo de los ingenieros del sector público.

Gracias a la práctica de Singapur hemos podido comprobar que no hace falta tener un gran desarrollo económico para tener una buena educación, sino al revés, donde se tiene que invertir es en educación para llegar a tener un buen desarrollo económico. (Felmer, 2011)

3.1 Bases teóricas del Método Singapur

- Proceso de educación de Jerome Bruner.

Jerome Bruner nace en Nueva York en 1915, fue psicólogo e investigador, muchas de sus investigaciones se fundamentaron en el desarrollo intelectual y la relación con el proceso de aprendizaje, teniendo en cuenta diferentes métodos de educación.

En su investigación se centra en cuatro temas centrales. (Felmer, 2011)

° La estructura en el aprendizaje. La clave está en "dar a los alumnos una comprensión de la estructura fundamental de cualesquiera materias que elijamos para enseñar" (Bruner, 1960). Para que de esta manera el aprendizaje influya en la forma de pensar del alumno y así lo puedan poner en práctica en la resolución de problemas que se presenten a lo largo de sus vidas.

El objetivo de la educación no consiste en difundir contenidos de los diferentes ámbitos, sino en formar conexiones para que estos contenidos sean más comprensibles y conozcan su verdadera utilidad. Para esto, es necesaria la elaboración de tareas específicas que nos ayuden a resolver problemas concretos y por otra parte, es importante que el aprendizaje permita un posterior desarrollo más eficiente. "En esencia consiste en aprender inicialmente, no una habilidad, sino una idea general, que puede ser usada luego como base para reconocer subsiguientes problemas como caos especiales de la idea originalmente dominada" (Bruner, 1960)

° La disposición del aprendizaje. Según Jerome Bruner la educación deja materias consideradas "más difíciles", para edades más avanzadas y de esta manera no perder el tiempo. Agrega que cualquier persona está capacitada para aprender cualquier cosa, atendiendo a la etapa en la que se encuentra la persona en cuestión, es decir, respetando la manera de pensar del niño y adaptando las materias a un lenguaje más lógico. (Calderón, 2014)

"El dominar esas ideas básicas, el usarlas eficazmente, requiere una continua profundización del entendimiento de ellas por uno mismo, que proviene de enseñar a usarlas en formas progresivamente más complejas". (Bruner, 1960)

° La naturaleza de la intuición. El alumno obtendrá un aprendizaje más significativo, si aprende a través de su intuición, de sus indagaciones o investigaciones y no a través únicamente del libro de la materia en cuestión.

El problema que tienen los docentes a la hora de desarrollar esta parte intuitiva en el alumno es que este aprendizaje no se rige por ninguna estructura preestablecida, depende totalmente del alumno con el que estemos trabajando.

"El pensamiento intuitivo y la ejercitación de corazonadas, es un rango esencial y muy descuidado del pensamiento productivo, no sólo en las disciplinas académicas formales, sino también en la vida cotidiana". (Bruner, 1960)

° Deseo de aprender y la manera de estimularlo. Es importante pararse a pensar cual es la mejor manera de enseñar, de tal forma que fomente el interés en los alumnos. En este caso, la formación de los profesores es fundamental o la calidad de los planes de estudio para incentivar el deseo por aprender transformándolo en una necesidad interior por el estudiante.

❖ Condiciones para aprender Matemática de Zoltan Dienes.

Zoltan Paul Dienes nace en 1916, en Hungría, fue un matemático que hizo hincapié en la educación y la enseñanza de las matemáticas en alumnos de primaria. Gracias a esto participó como consultor en la elaboración de los currículos para matemáticas de países como Italia, Alemania, Hungría y Estados Unidos.

Se basa en el trabajo en grupo apoyándose en materiales concretos para elaborar los conceptos matemáticos, continuando con un estado gráfico hasta finalmente llegar al estado analítico abstracto, este último proceso depende de la madurez de cada niño. (Hincapié & Riaño, 2008)

Se debe promover el interés por las matemáticas a través del juego y el uso de la lógica, para dar soluciones a las necesidades del propio alumno. Para ello, es necesaria una creación de un ambiente agradable, cambiar el estilo de enseñanza habitual, cambiar la estructura del aula, trabajar en grupo y que resuelvan los problemas de manera espontánea. Es importante que los niños aprendan discutiendo entre ellos. "...es infinitamente mejor inclinar a los niños a que busquen la verdad antes que la autoridad de la persona encargada de administrarla, el maestro, por ejemplo" (Dienes, 1969)

Por lo que esta idea de aprendizaje sugiere que la enseñanza de conceptos matemáticos se lleve de la siguiente manera: (Dienes, 1986)

° Usar la representación física del concepto matemático en cuestión, que el alumno la pueda manipular, de esta manera se desarrolla un aprendizaje más significativo, ya que se le ofrece a los alumnos aquello que expone el libro de texto.

° Utilizar gráficas o esquemas, dibujos trabajados en el aula que represente el concepto en cuestión o bien utilizar las del libro si están bien representadas. Construir paso a paso cada concepto.

- Formalizar o demostrar conceptos, el alumno debe ser capaz de exponerlo de manera convincente y de forma convencional.

❖ Richard Skemp

Nace en Bristol, Inglaterra en 1919. Estudió matemáticas en Hertford College de Oxford y trabajó enseñando a alumnos de secundaria, donde comenzó su preocupación por cómo aprenden matemáticas los estudiantes, de esta manera estudió psicología, enfocando su investigación en la relación de los niños con su estudio en matemáticas.

Se centró en superar la dicotomía, comprensión de conceptos o aprendizaje de procedimientos.

Según Skemp, hay que desarrollar la comprensión del concepto y aprendizaje de procedimientos en paralelo.

Él distingue entre: "*relational understanding and instrumental understanding*". Comprensión relacional o conceptual, hará referencia a la comprensión, saber qué hacer y por qué. Mientras que la segunda, la comprensión instrumental, procesal u operativa se relaciona con la capacidad de poner en práctica lo aprendido.

Nos podemos encontrar con dos tipos de alumnos: El que tiene por objetivo entender instrumentalmente y el que sólo le interesa entender el concepto.

La mayoría de los profesores enseñan de manera instrumental, esto tiene ciertas ventajas:

- Son más fáciles de memorizar, ya que son reglas fáciles de recordar.
- Las recompensas son inmediatas y evidentes, por lo que no llega a ser un factor motivador importante.
- La respuesta es más rápida y fiable que pensando en el entendimiento relacional, se requiere menos conocimiento.

En el aprendizaje relacional, según Richard Skemp, las ventajas que podemos encontrar son:

- Es más adaptable a nuevas ideas, permite relacionar el método con el problema y adaptarlos.
- Es más fácil de recordar, porque es más difícil de aprender.
- Trabajar el aprendizaje relacional ayuda a los alumnos a aumentar su interés y curiosidad por nuevos conceptos y nuevas áreas, como un árbol que extiende sus raíces.

Por esto, es necesario a la vez, de forma paralela desarrollar la comprensión relacional y conceptual (Skemp, 1976).

3.2 Marco curricular propuesto por Singapur.

La enseñanza y formación de las matemáticas ha tenido una inquietud permanente en los distintos sistemas educativos del mundo, además hay que tener en cuenta la globalización y sus exigencias en cuanto al carácter internacional de la educación.

En Singapur, "construyeron" su propio método ya que los resultados de la educación y el proceso de enseñanza de las matemáticas no era el esperado. El marco curricular del Método Singapur se fundamenta en tres ideas básicas.

- Basaron la metodología en el enfoque CPA (Concreto-Abstracto-Pictórico), fue implementado en el año 1992, concentrando la atención en el pensamiento, en la comprensión de conceptos y en la resolución de problemas. Con esta metodología, alcanzaron los niveles más exitosos en las mediciones internacionales, por lo que muchos países pusieron su punto de mira en este método en cuanto a la forma de enseñar matemáticas. El objetivo principal de esta metodología es que los alumnos aprendan de manera espontánea y lúdica, aplicando lo aprendido a problemas cotidianos, visualizando y manipulándolo. Pasar de una fase manipulativa a una fase gráfica para llegar así a un nivel abstracto y a un aprendizaje significativo. Esta metodología se acerca más a la propuesta de enseñanza de Zoltan Dienes, que será explicada más adelante. (Fonseca, Hernández, & Mariño, 2017)

    - Concreto: se refiere a la fase de material manipulativo para entender conceptos matemáticos.
    - Pictórico: se trata de ilustrar los conceptos de forma gráfica o esquemática.
    - Abstracto: pasamos a la fase de utilizar signos y símbolos matemáticos, dejando atrás el material manipulativo y la forma pictórica.

- El currículo en espiral, es decir, los contenidos se expondrán gradualmente al alumno cuando esté preparado para adquirir dicho contenido.

- La tercera idea hace referencia a la variación sistemática de aprender un contenido matemático. No se trata de memorizar procesos sin entenderlos para la resolución de un problema, se trata de que el alumno tenga los suficientes recursos para buscar la manera más adecuada de resolverlo (Calderón, 2014).

Se expondrá el marco curricular utilizado en Singapur para la enseñanza de matemáticas.

El concepto de currículo viene del latín que significa "carrera". La UNESCO[6] lo definió como una descripción de qué, cómo y porqué deben aprender los estudiantes. (Wong, 2015)

[6] UNESCO: La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura.

Las preguntas para elaborar el currículo son las siguientes:

- ¿Por qué es importante enseñar matemáticas?
- ¿Qué parte de las matemáticas es importante enseñar?
- ¿Cómo hacer la enseñanza en matemáticas más efectiva?
- ¿Qué es importante evaluar y cómo será la mejor manera de evaluarlo?

Hay tres tipos de currículo:

El *intended curriculum*, es decir, el "qué y porqué" deben aprender los estudiantes, se refiere al plan de estudios previsto, es decir, lo que se espera que se aprendan de acuerdo a las especificaciones oficiales.

El *implemented curriculum*, el "cómo" hace referencia al currículo implementado, que describe la realidad, lo que hacen los estudiantes en el colegio y en las aulas en el proceso de aprendizaje.

Además, los profesores añaden otra parte de currículo que es lo que llaman *attained (or achieved) curriculum,* hace referencia a los resultados del proceso educativo, lo que los alumnos han aprendido realmente.

El marco curricular tiene como función vincular diferentes elementos del currículum para facilitar el aprendizaje de los alumnos. Sin embargo, hay muchos currículos matemáticos que no se rigen por este marco curricular. Por ejemplo, en el plan de estudios australiano hay una ausencia de un "marco curricular general" y eso hace que el desarrollo de los contenidos de la materia sea incompleto. En este caso el desarrollo del plan de estudios de Singapur puede ayudar a completar el proceso de diseño o sustento de este marco en concreto (Wong, 2015).

El marco curricular de Singapur tiene como objetivo central de la educación matemática la resolución de problemas, y se tienen en cuenta tanto aspectos metodológicos como transversales. Este enfoque de resolución de problemas no ha cambiado en los últimos 20 años y lo más probable es que no cambie en los siguientes.

Para fomentar y mejorar la manera de enseñar la resolución de problemas y que fuese más comprensible para los alumnos y para los padres de los estudiantes, tras mucha deliberación el marco curricular se dividió en cinco componentes interrelacionados, cinco llaves que ayudan a los alumnos a resolver mejor los problemas planteados.

- Los conceptos.
- Las competencias.
- El proceso.
- Las actitudes.
- La metacognición.

Figura 4. Marco Curricular propuesto por el Método Singapur, para la enseñanza matemática. (Wong, 2015)

El rendimiento en matemáticas es uno de los objetivos en la mayoría de los sistemas educativos. En esta área, se concentra un gran número de dificultades que conllevan al fracaso escolar, y este fracaso escolar no sólo afecta a los alumnos menos capacitados, sino también a alumnos capacitados, incluso con altos rendimientos en otras materias.

En los últimos años se han realizado múltiples investigaciones donde se ha podido comprobar una relación importante entre las creencias, actitudes y emociones y la enseñanza-aprendizaje en el área de matemáticas. Esto influye tanto que puede determinar el éxito o fracaso en la asignatura (Núñez, y otros, 2005). Por esta razón, se analizará detenidamente el apartado “actitudes”, ya que es uno de los componentes más importantes para el rendimiento de la asignatura.

Las actitudes conllevan potenciar el aprendizaje a través del poder emocional. Podemos encontrar tres razones curriculares para hacer hincapié en el ámbito afectivo:

- La motivación es un papel fundamental a la hora de resolver problemas, si no contamos con este componente los alumnos pueden darse por vencidos antes de empezar a entender el problema.
- Llegar a este objetivo “afectivo” contribuye al desarrollo integral del alumno, proporcionando un equilibrio emocional relacionado con los resultados académicos.

- La curiosidad fomenta el rendimiento del estudiante, por lo que es importante trabajarla, ya que da pie a fortalecer las actitudes positivas en el proceso de aprendizaje.

En Singapur, el currículo de matemáticas hace referencia a las actitudes en el área de matemáticas como:

- Las creencias en las matemáticas y en su utilidad.
- Trabajar el interés y que los estudiantes disfruten aprendiendo matemáticas.
- Apreciar el poder y la importancia que tienen las matemáticas.
- Conseguir una seguridad y confianza en los alumnos a la hora de usar las matemáticas aprendidas.
- Constancia en la resolución de problemas.

Es necesario que los docentes puedan ayudar a todos los alumnos a lograr su potencial en matemáticas. Por ello, los seis motivadores que se deben incluir en un marco educativo son: dar sentido, confianza, que sean relevantes, entretenidas, que favorezcan las relaciones sociales y que tengan un objetivo establecido. De los cuales, cuatro de ellos son mencionados en el currículo de matemáticas en Singapur: Dar sentido, confianza, relevantes y divertidas o entretenidas (Wong, 2015).

Se desarrollará cada uno de ellos:

- <u>Dar sentido</u>**:** Los alumnos, como cualquier otra persona tienen la necesidad de entender lo que están aprendiendo, incluidas las matemáticas, por lo que para poder motivar al alumno, es muy importante tener en cuenta este factor. Esto será difícil de conseguir, si las sesiones de clase se basan únicamente en métodos tradicionales y mecanizados, sin tener en cuenta la compresión y el razonamiento matemático. Cuando los docentes únicamente trasmiten palabras y símbolos, los alumnos no entienden la relación que se les pretende enseñar, hay que ir más allá.

- <u>Confianza:</u> Los alumnos necesitan ir ganando confianza en su proceso de aprendizaje a medida que se van desarrollando sus habilidades en matemáticas, cuando esta confianza se incrementa, estarán preparados a enfrentarse a diferentes retos más difíciles. Esta confianza puede aumentar cuando ellos mismos experimentan su éxito, la idea es que vayan construyendo sus propios logros, con esfuerzo y dedicación. No se trata de que busquen esa satisfacción en las tareas más simples, sino que el profesor impulse diferentes retos para que los alumnos salgan de su zona de confort y aprendan tras sus errores.

- <u>Relevantes</u>: En esta situación podemos contar con dos tipos de relevancia: la relevancia cognitiva y la emocional. La primera hace referencia a la parte que enseña que las matemáticas se pueden aplicar en muchos aspectos de la vida cotidiana, o en otros ámbitos, ¿para qué sirven las matemáticas? se preguntan los alumnos, bien pues hay que dar respuesta. Los docentes tienen que tratar de enseñar los valores que tienen intrínsecas las matemáticas, de esta manera se aumentarán los rendimientos académicos del alumnado. Por otro lado, la relevancia emocional engloba a la curiosidad, a la diversión, a la necesidad de satisfacción cuando

resuelven un problema. Esto lleva al siguiente factor motivador que hay que tener en cuenta para obtener el éxito en los alumnos.

- Disfrutar*:* Hace referencia a disfrutar, disfrutar haciendo una tarea como motivación intrínseca relacionada con aprender matemáticas. Esto forma una especie de círculo virtuoso del éxito. Buen rendimiento, estímulo externo y a su vez interno, disfrute de las matemáticas, lo que conllevará más matemáticas y finalmente, mejor compresión con buen rendimientos otra vez. La forma de llegar a esto:

    - Los docentes deberían incluir en sus sesiones distintos trucos, sorpresas, humor, pequeños juegos, objetos manipulables, para cambiar la estructura de la clase y así incrementar en los alumnos el interés y la curiosidad por las matemáticas.
    - Es necesario que se haga ver el entusiasmo y las ganas del profesorado a la hora de emprender una sesión con los alumnos, para que pueda trasmitir la energía y las ganas a los mismos.
    - Tener una buena relación con los estudiantes, ya que el disfrutar es subjetivo y puede estar influenciado por experiencias pasadas o con las expectativas de cada uno de ellos, por eso es vital conocer bien a tus alumnos.

- Relaciones sociales: La escuela/instituto, no deja de ser algo social entre los alumnos, y entre profesor - alumnos. Por ello, este factor motivación hace referencia al buen clima en el aula, los docentes deben procurar que las relaciones sociales dentro del aula fomenten el respeto y el apoyo unos con otros. Algunos de los "consejos" que promueve Singapur a los docentes es que fomenten el sentido de pertenencia en el mismo aula para que los alumnos se apoyen unos a otros, atender a las soluciones y respuestas que den cada uno de los alumnos, promover el trabajo grupal productivo, los profesores deben preocuparse por el estado emocional del alumno y no sólo por el educativo.

- Objetivos: Es necesario establecer una serie de objetivos claros y concisos, pueden ser objetivos tanto a corto plazo como a largo plazo. El corto plazo hará referencia a los objetivos de las actividades propuestas en cada sesión, por ejemplo, una forma es dándoles a los alumnos un plan amplio, un esquema o un plan de la unidad para que tengan en cuenta las expectativas que se pretenden alcanzar e ir marcándolos cuando el objetivo propuesto haya sido alcanzado. Los objetivos a largo plazo pueden hacer referencia a todo el plan de estudios de la asignatura de matemáticas, los objetivos a largo plazo en muchas ocasiones se difuminan por el empeño del docente en terminar el programa fijado. Llevar a cabo este factor motivador funcionará si los objetivos marcados son comprensibles para los estudiantes, si se comparten con ellos y si se proponen desde un lenguaje amigable.

Los seis agentes motivadores están enfocados a diferentes tipos de motivación. En ocasiones se pueden usar por separado, pero se vuelven realmente efectivos cuando se combinan todos teniendo en cuenta las necesidades que presenten los alumnos.

4. Propuesta didáctica basada en la metodología Singapur. 1ºESO y geometría.

En mi período de prácticas en el IES Newton Salas, ubicado en Villanueva de la Torre (Guadalajara), tutelado por Dña. Evangelina Herranz Prada y con ayuda de mis compañeros de prácticas, valoramos implementar el "Método Singapur" en las sesiones que íbamos a desarrollar para explicar algunos contenidos del bloque de geometría en 1º ESO, utilizando como recursos para diseñar las actividades el libro "New Syllabus Mathematics" (Yeo, y otros, 1982).

A continuación se presentan los contenidos, criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables con su respectiva categoría (Básico[7], Intermedio[8], Avanzado[9]) del bloque de geometría en 1º ESO, atendiendo al Decreto 40/2015, de 15/06/2015, por el que se establece el currículo de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Castilla-La Mancha, los estándares de aprendizaje evaluables han sido adaptados respecto al currículo para dotar de coherencia la evaluación del alumnado.

[7] Básico: Consta de los aprendizajes imprescindibles para garantizar un adecuado progreso del alumno y la suficiencia del mismo.
[8] Intermedio: Se consideran aquellos estándares que están entre las dos categorías.
[9] Avanzado: Marca el nivel más alto de consecución de la asignatura.

Matemáticas 1ºESO			
Contenidos	Criterios de Evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables	Categoría
Bloque 3. Geometría			
• Elementos básicos de la geometría del plano. Paralelismo y perpendicularidad. Relaciones y propiedades de figuras en el plano. • Ángulos y sus relaciones. • Construcciones geométricas sencillas: rectas y puntos notables del triángulo. Propiedades. • Polígonos. Elementos y propiedades. • Clasificación de triángulos y cuadriláteros. Propiedades y relaciones. • Medida y cálculo de ángulos de figuras planas. • Circunferencia, círculo, arcos y sectores circulares. • Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples. Fórmula de Herón. • Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones. • Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.	1. Reconocer y describir figuras planas, sus elementos y propiedades características para clasificarlas, identificar situaciones, describir el contexto físico, y abordar problemas de la vida cotidiana	1.1. Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema, simetrías.	B
		1.2. Clasifica los triángulos atendiendo tanto a sus ángulos como a sus lados.	B
		1.3. Define las rectas y puntos notables de un triángulo, conoce sus propiedades y los traza.	I
		1.4. Clasifica los cuadriláteros y paralelogramos atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos y conociendo sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales.	B
		1..5. Define círculo y circunferencia, e identifica las propiedades geométricas que caracterizan sus puntos	I
	2. Utilizar estrategias, herramientas tecnológicas y técnicas simples de la geometría plana para la resolución de problemas de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas, utilizando el lenguaje matemático adecuado y expresar el procedimiento seguido en la resolución.	2.1 Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas.	A
		2.2 Calcula longitudes y áreas en figuras planas simples.	B
		2.3 Calcula longitudes y áreas en figuras planas compuestas.	I
	3.Reconocer el significado aritmético del Teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el significado geométrico (áreas de cuadrados construidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos.	3.1. Comprende los significados aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema construyendo otros polígonos sobre los lados del triángulo rectángulo.	A
		3.2. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos.	B
		3.3 Aplica el teorema de Pitágoras cuando es necesario en el cálculo de áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contextos reales.	I

Figura 5: Tabla de contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables.

Fuente: Decreto 40/2015, de 15/06/2015, por el que se establece el currículo de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Castilla-La Mancha

4.1 Cronograma.

Se presenta una tabla en la que se concentran las sesiones que se van a utilizar para la explicación de los contenidos, los materiales que se utilizarán para cada sesión y los Estándares de Aprendizaje Evaluables (EAE).

Temporalización			
Sesiones	Contenidos	Materiales	EAE
Sesión 1	Elementos básicos de la geometría del plano	Conjunto de líneas poligonales para su clasificación	1.1. Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema, simetrías
	Clasificación de polígonos y simetrías	Juegos de polígonos de goma- Eva	
Sesión 2	Clasificación de triángulos y cálculo de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Medidas y cálculo de ángulos de figuras planas	Pajitas y Juego de polígonos de goma-Eva	1.2 Clasifica los triángulos atendiendo tanto a sus ángulos como a sus lados.
Sesión 3	Clasificación de cuadriláteros y paralelogramos.	Conjunto de cuadriláteros de Goma-Eva y GeoGebra	1.4 Clasifica los cuadriláteros y paralelogramos atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos y conociendo sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales.
Sesión 4	Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones.	GeoGebra	3.1 Comprende los significados aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema construyendo otros polígonos sobre los lados del triángulo rectángulo.
Sesión 5			3.2 Aplica el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos.
Sesión 6			Propuesta de ejercicios.
Sesión 7	Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples	Material manipulable de medida de longitudes, superficies y volúmenes	2.1 Resuelve problemas relacionados con distancias perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas. 2.2 Calcula longitudes y áreas en figuras planas simples
Sesión 8			2.3 Calcula longitudes y áreas en figuras planas compuestas 3.3 Aplica el teorema de Pitágoras cuando es necesario en el cálculo de áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos reales.

Figura 6. Temporalización

Cada sesión se desarrollará siguiendo el aprendizaje por descubrimiento guiado, en este tipo de enseñanza las funciones y el rol del profesor se modifica, en este caso es el alumno el que adquiere los conocimientos por sí mismo. La participación es mucho más activa y directa que en los métodos de enseñanza-aprendizaje tradicionales, en este caso el docente actúa como mediador o guía con el objetivo de que los estudiantes adquieran los conocimientos de manera más autónoma. Es una manera más natural y eficaz de trasmitir los contenidos (Martín, 1998).

De la misma manera las sesiones diseñadas pretenden seguir las pautas descritas en el marco curricular de la propuesta didáctica de la metodología usada en Singapur. Con enfoque CPA (Concreto-Pictórica-Abstracto), el aprendizaje de estos contenidos se sucede progresivamente desde lo más concreto, pasando por lo pictórico, ilustrando los conceptos de manera gráfica y esquemática, y finalizando con lo abstracto de las matemáticas.

Los contenidos se expondrán gradualmente al alumno (currículo en espiral), por esta razón se seleccionarán algunos contenidos correspondientes a 6º de primaria del bloque de geometría marcados en el Decreto 54/2014, de 10/07/2014, por el que se estable el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Castilla-la Mancha, para así poder comenzar repasando parte de dichos contenidos y construir los posteriores desde ese punto de partida. Con todo esto se hará un estudio de conocimientos previos para partir del nivel del alumno.

6º Primaria		
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Formas espaciales: elementos, relaciones y clasificación. - Cuerpos geométricos: elementos, relaciones y clasificación. - Poliedros: elementos y clasificación. - Cuerpos redondos: cono, cilindro y esfera. - Perímetro, área y volumen. Resolución de problemas en contextos reales. Uso del vocabulario geométrico básico en la descripción de hechos, procesos y resultados.	1. Identificar y utilizar las nociones geométricas espaciales, de paralelismo, perpendicularidad, simetría, geometría, perímetro y superficie para describir, comprender e interpretar situaciones de la vida cotidiana.	1.1 Identifica y representa posiciones relativas de rectas y circunferencias. 1.2 Identifica y representa ángulos en diferentes posiciones. 1.3 Describe posiciones y movimientos por medio de coordenadas, distancias, ángulos, giros.
	1. Conocer las figuras planas: cuadrado, triángulo, rectángulo, círculo, circunferencia, rombo, trapecio, romboide, sus elementos y propiedades.	2.1 Identifica y nombra polígonos atendiendo al número de lados.
	2. Utilizar las propiedades de las figuras planas para resolver problemas adecuados a su nivel.	3.1 Clasifica cuadriláteros atendiendo al paralelismo de sus lados.
	3. Identificar y resolver problemas de la vida cotidiana teniendo en cuenta	4.1. Aplica los conceptos de perímetro y superficie de figuras para la realización de cálculos

	su edad, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas, valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos y adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.	sobre planos y espacios reales y para interpretar situaciones de la vida diaria. 4.2. Comprende y describe situaciones de la vida cotidiana e interpreta y elabora representaciones espaciales (planos, croquis de itinerarios, maquetas…), utilizando las nociones geométricas básicas (situación, movimiento, paralelismo, perpendicularidad, escala, simetría, perímetro, superficie)
	6. Comprender el proceso para calcular el área de un paralelogramo y calcular el área de figuras planas.	6.1. Calcula el área y el perímetro de rectángulo, cuadrado, triángulo. 6.2. Calcula el perímetro y área de la circunferencia y el círculo.

Figura 7. Tabla de contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables.

Fuente: Decreto 54/2014, de 10/07/2014, por el que se estable el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Castilla-la Mancha

4.2 Desarrollo de las sesiones.

❖ Sesión 1.

Se repasarán los conceptos claves de la geometría: Cuerpos geométricos: elementos, relaciones y clasificación. En las primeras sesiones del bloque es importante estudiar los conocimientos previos de los alumnos para partir del nivel académico del alumno.

Se definirá el concepto de polígono con ayuda del siguiente ejercicio: Se les repartirá a los alumnos un conjunto de líneas, según la siguiente tabla, para su clasificación atendiendo a sus características.

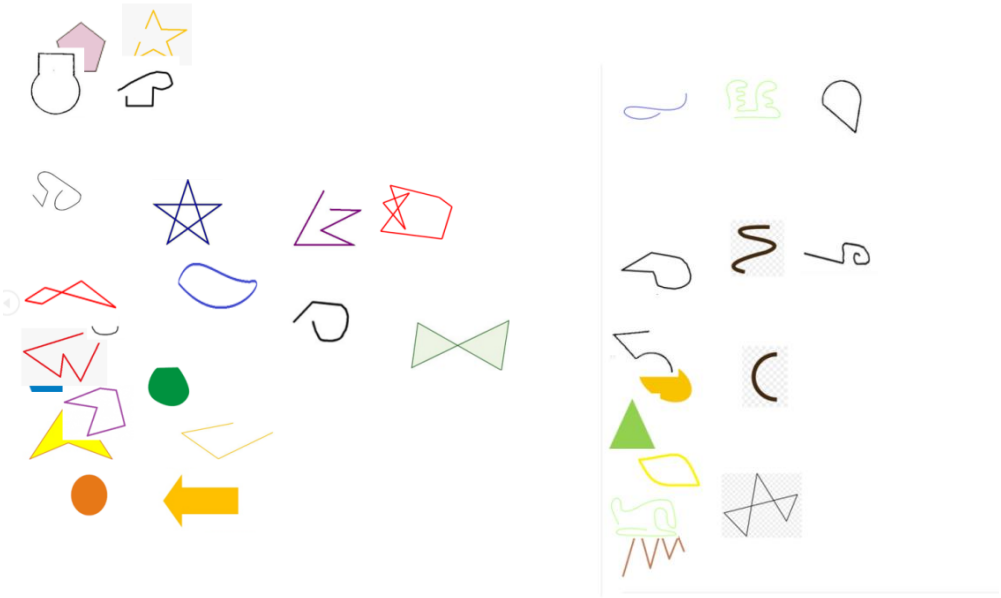


Figura 8. Conjunto de líneas para su clasificación.

LÍNEAS POLIGONALES			LÍNEAS CURVAS		LÍNEAS MIXTAS	
ABIERTAS	CERRADAS		ABIERTAS	CERRADAS	ABIERTAS	CERRADAS
	SIMPLES	COMPLEJAS				

Figura 9. Tabla para la clasificación de las distintas líneas.

Una vez clasificadas las líneas y entendiendo los diferentes conceptos, los alumnos podrán llegar a la definición de polígono, orientándoles el profesor por aprendizaje por descubrimiento guiado. Definición: Región del plano que queda dentro de una línea poligonal (segmentos unidos por sus extremos) cerrada (no deja extremos libres) y simple (los segmentos no se cortan).

A partir de la definición de polígono, podrán diferenciar entre polígonos regulares e irregulares. Se les propondrá a los alumnos que dibujen un polígono con n número de lados y que enumeren los lados y ángulos correspondientes.

Se les repartirá una ficha para que completen la clasificación según el número de ángulos, que coincide con el número de lados.

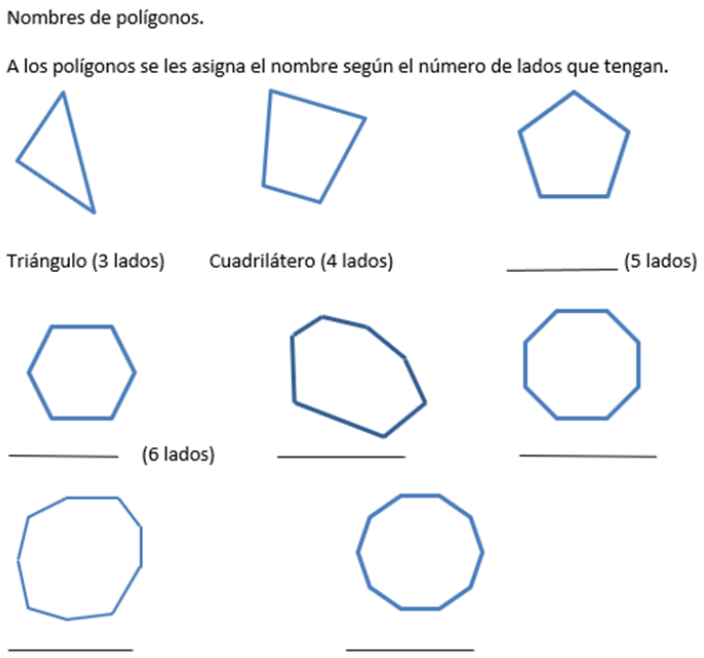


Figura 10. Ficha para clasificar los polígonos.

Fuente: Libro New Syllabus Mathematics (Yeo, y otros, 1982)

Posteriormente, se preguntará a los alumnos cuál de estos polígonos es un polígono regular y porqué. Cuando concluyan que un polígono regular tiene que tener el mismo número de lados y ángulos, se repasarán los siguientes conceptos: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema y simetrías.

Por ejemplo, en el caso de la simetría, el concepto de simetrías se trabajará de forma concreta primero, dando a cada uno de los grupos distintos polígonos de goma-EVA, para que puedan manipular y encontrar las simetrías por sí mismos. Con esta pequeña actividad se pretende que los estudiantes lleguen a la conclusión de que una figura plana es simétrica respecto a un eje, si al doblarlo por ese eje de simetría nos quedan dos mitades iguales, se llamará simetría axial.

Figura 11. Juego de polígonos suministrado a los alumnos.

De esta manera, el orden de simetría rotacional serán el número de veces que una figura puede girar sobre sí misma 360º.

Ahora bien, usando los recortes de goma-Eva y teniendo en cuenta los ejemplos de simetría rotacional creados por los alumnos, se pretende que identifiquen las líneas de simetría que encuentran en las figuras, las figuras con simetría rotacional y por último, si de todas las simetrías se puede llegar a alguna relacion geométrica, para que el alumno relacione que a partir de los ejes de simetrías que se establecen, los ángulos que se forman son iguales.

❖ Sesión 2

En el curso de 6º de Primaria, los alumnos estudian la clasificación de triángulos (polígonos) atendiendo a sus lados, por lo que no han estudiado la clasificación según sus ángulos.

Se repasarán algunas de la propiedadaes del triángulo estudiadas en el curso anterior, ejemplo:

- La suma de las longitudes de los lados menores de un triángulo tiene que ser mayor que la longitud del lado mayor de triángulo.

Ejercicio propuesto: Construir un triángulo con dos segmentos iguales.

Se suministrará a los alumnos dos pajitas a modo de lados para que formen un triángulo. El alumno comprobará que no puede formarlo únicamente con dos pajitas, a continuación el profesor propondrá a los alumnos soluciones para poder construir el triángulo. Si cortan al centro una de ellas se observa que uno de los vértices se queda "sin cerrar", de esta manera comprobarán que es necesario cortar el lado mayor para completarlo, según la aplicación de la propiedad mostrada.

Trascurrida esta primera fase de repasos e investigación por parte de los alumnos, se pueden trabajar otros supuestos o ejemplos.

Ejercicio propuesto: ¿se podría construir un triángulo de 16 cm, 9 cm y 6 cm de lados?

Se pretende que el alumno justifique la respuesta, resumiendo y sintetizando lo aprendido con un lenguaje adecuado, para así, llegar a construir una nueva red de conocimientos, ampliándolos o reemplazándolos por los equívocos.

Una vez completado el primer ejercicio, se les entrega a los alumnos un conjunto de triángulos de goma-Eva.

Se les propone que clasifiquen los triángulos, teniendo en cuenta características similares, organizándolos de diferentes maneras:

- Clasificaciones según el color. Esta clasificación se descarta, porque está claro que el color no es una característica relevante desde el punto de vista matemático.

- Clasificación por la forma, dependiendo de sus ángulos.
- Clasificaciones según sus lados.

Con ello, los alumnos aprenderán a clasificar diferentes triángulos atendiendo tanto a sus ángulos como a sus lados. Se les entregará a cada grupo una ficha para que completen y reflejen lo aprendido. Figura 11.

Figura 12: Triángulos de goma-Eva suministrados a los alumnos que conjuntamente componen polígonos de tres, cuatro, cinco y seis lados.

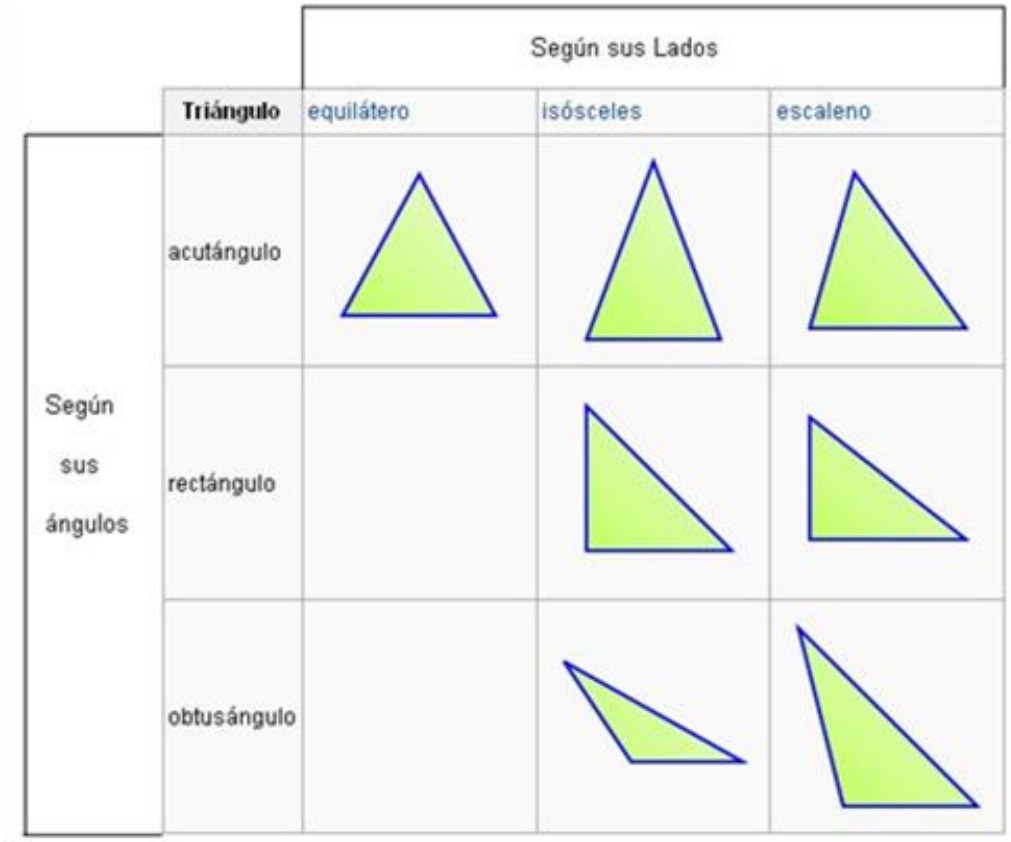


Figura 13. Tabla que clasifica a los triángulos atendiendo tanto a sus lados como sus ángulos.

Una vez clasificados los triángulos, se podrá seguir analizando las propiedades del triángulo.

- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.

En el contenido de primaria han podido estudiar las propiedades de un triángulo, al igual que saben cuánto mide un ángulo recto. Para comprobarlo y asegurar que entienden dicha propiedad se puede proponer la siguiente actividad:

- Con una hoja de papel y unas tijeras, se les pide que recorten un triángulo.
- Se coloreará cada ángulo de un color diferente.
- Cortar el triángulo en tres partes, de tal forma que en cada una de ellas quede un sólo ángulo interior.
- Colocar los ángulos uno a continuación del otro.
- De esta manera se obtendrá un ángulo total de 180º.

Figura 14: Comprobación de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.

Fuente: Más ideas, menos cuentas. Un blog sobre educación matemática. Pedro Ramos

Otra actividad propuesta podría ser plantear un triángulo donde se trace una recta paralela a uno de los lados que pase por el vértice opuesto, se comprueba que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.

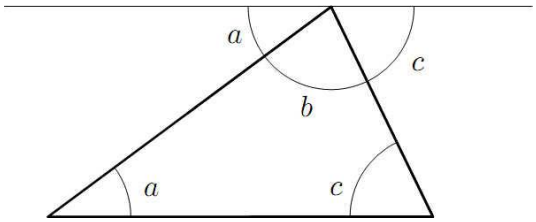


Figura 15: Comprobación de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.

Fuente: Más ideas, menos cuentas. Un blog sobre educación matemática. Pedro Ramos.

Para comprobar que en todos los triángulos se cumple esta propiedad, se puede utilizar como recurso auxiliar la aplicación de GeoGebra y plantear geometría dinámica con los alumnos.

Una vez completada la primera parte de la sesión, se trabajará la suma de los ángulos interiores de un poligono cualquiera.

Se pretende llegar a la expresión general de la suma de los ángulos interiores de un polígono con n-lados. Para ello, utilizaremos los triángulos de goma-Eva de la Figura 10, lo que sería la parte concreta del enfoque CPA.

Figura 16: Triángulos de goma-Eva suministrados a los alumnos que conjuntamente componen polígonos de tres, cuatro, cinco y seis lados.

Cuando construyan sus primeros polígonos, observarán que cada uno de ellos está formado por un determinado número de triángulos. Así, se pasará a la parte pictórica y abstracta.

Empezando por el cuadrilátero, formado por dos triángulos, tras una deliberación dentro de cada grupo, comprobaran que si está formado por dos triángulos y la suma de los ángulos interiores de cada uno de ellos es 180º, la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero será 180º x 2 =360º. Se irán tomando los datos adecuados para deducir la formula general de la siguiente manera.

Polígono.	Número de lados.	Número de triángulos formados.	Suma de ángulos interiores.
	3	1	1 x 180º = (3 - 2) x 180º
	4	2	2 x 180º = (4 – 2) x 180º
	5	3	3 x 180º = (5-2) x 180º
	6	4	4 x 180º = (6-2) x 180º
	7	5	5 x 180º = (7-2) x 180º
	8	6	6 x 180º = (8-2) x 180º
N – lados.	N	N-2	(N-2) x 180º

Figura 17. Tabla para deducir la fórmula general para la suma de los ángulos interiores de un polígono.

Fuente: *New Syllabus Mathematics*. (Yeo, y otros, 1982)

❖ Sesión 3

Partiendo de que los alumnos ya han estudiado la clasificación de cuadriláteros atendiendo al paralelismo de sus lados, se comenzará con una clasificación de cuadriláteros por parte de los alumnos. Se les dará el conjunto de cuadriláteros, aprovechando el juego de polígonos suministrados a los alumnos y se les pedirá que los clasifiquen los cuadriláteros de la forma que quieran, de esta forma comienza la

investigación por parte de los alumnos. Centrándonos en el enfoque CPA, se pretende que se clasifique conociendo sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales.

Se realizará la investigación de la siguiente manera: Se parte de un rectángulo, de lo más concreto, utilizando la aplicación de GeoGebra para guiar al alumnado, se plantearán determinadas preguntas.

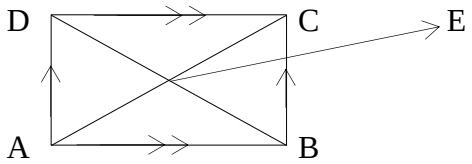


Figura 18. Rectángulo

- Midiendo cada uno de los lados del rectángulo, AB, BC, CD, AD ¿qué podemos observar?
- Midiendo cada uno de los ángulos ¿qué observamos? $B\hat{A}D$, $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$,$A\hat{D}C$
- Si mides la longitud de AE, BE, CE, DE ¿qué observas?
- Por último, suma las longitudes de AE, CE y de BE, DE.

Con el recurso auxiliar de GeoGebra podemos formar rectángulos de diferentes dimensiones y ver qué es lo que ocurre si nos hacemos similares preguntas a las anteriores.

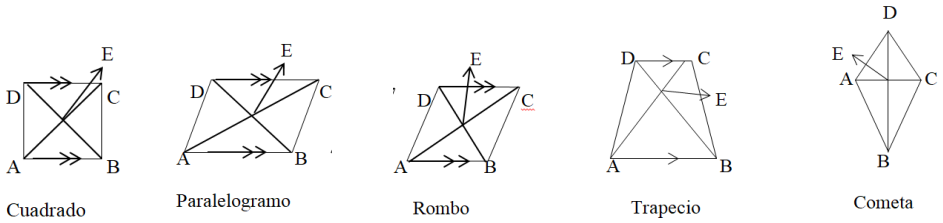


Figura 19. Cuadriláteros

Considerando cada uno de los cuadriláteros anteriores, se pueden plantear las siguientes preguntas para ayudar a su clasificación.

- ¿Qué podemos observar atendiendo a la longitud de sus lados?
- ¿Y teniendo en cuenta sus ángulos interiores?
- ¿Las diagonales tienen la misma longitud?
- ¿Las diagonales se cortan entre sí? Por ejemplo, ¿en el paralelogramo, AE = EC y BE = ED?
- ¿Las diagonales son perpendiculares entre sí?
- Por ejemplo, en el rombo ABCD, ¿es $B\hat{A}C = C\hat{A}D$ y $A\hat{B}D = C\hat{B}D$?

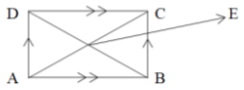
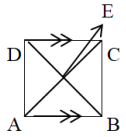
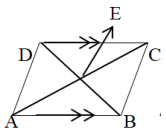
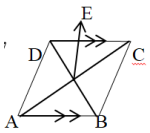
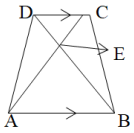
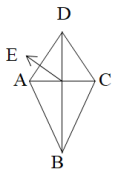
Cuadriláteros	Lados Paralelos	Lados iguales	Ángulos iguales	Diagonales
 Rectángulo	Lados opuestos paralelos	Lados opuestos iguales	Los cuatro ángulos son ángulos rectos	Dos diagonales con igual longitud, no son perpendiculares y se bisecan entre sí, p.e AE = EC y BE = ED
 Cuadrado	Lados opuestos paralelos	Los cuatro lados tienen la misma longitud	Los cuatro ángulos son ángulos rectos	Las dos diagonales tienen la misma longitud, las diagonales se bisecan entre sí, p.e AÊB = BÊC = AÊD =CÊD = 90º y BÂC =CÂD = 45º
 Paralelogramo	Lados opuestos paralelos	Lados opuestos misma longitud	Ángulos opuesto iguales, p.e BÂD = BĈD	Diagonales bisecan entre sí. AE = EC y BE = ED
 Rombo	Lados opuestos paralelos	Los cuatro lados misma longitud	Ángulos opuesto iguales	Diagonales bisecan entre sí formando un ángulo recto, AÊB = BÊC = AÊD = CÊD = 90º No son de la misma longitud y no se cortan en el punto medio
 Trapecio	Hay al menos un par de lados paralelos			
 Cometa	Ningún lado paralelo. Misma longitud las consecutivos	Dos lados adyacentes paralelos		El punto medio de las diagonales forman ángulos rectos, AÊB = BÊC =AÊD = CÊD = 90º Las diagonales no se cortan en su punto medio

Figura 20. Clasificación de cuadriláteros.

Fuente: New Syllabus. Mathematics (Yeo, y otros, 1982)

❖ Sesión 4

El Teorema de Pitágoras.

Como quiera que sea un contenido que desconocen, es importante una contextualización, de esta manera los alumnos tendrán un acceso más directo al conocimiento que se les quiera trasmitir, ya que se mostrará que lo que se está estudiando forma parte de la realidad en la que vivimos. “Al aprender con situaciones concretas y reales, el conocimiento es permanente y significativo” (Zamora, 2013)

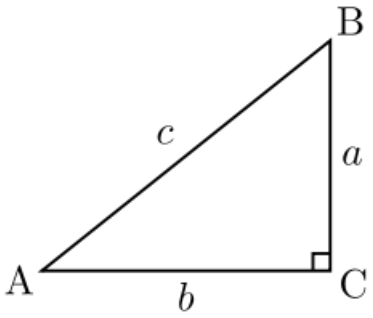
La palabra Geometría en Egipto hace referencia a “medir la tierra”. En la civilización egipcia se producían frecuentes inundaciones del Nilo, las cuales borraban los límites de separación de las propiedades, por lo que tenían que volver a marcar de nuevo los terrenos, construyendo triángulos rectángulos con cuerdas. Se hacían nudos a la misma distancia y vieron que uniéndolos con forma de triángulo, cuerdas con determinadas longitudes formaba un ángulo recto. Aplicaban sin saberlo, el que posteriormente sería Teorema de Pitágoras (López & Fernández).

Se plantean dos formas de llevar a cabo la sesión. La primera idea del libro “New Syllabus Mathematics” de 2º ESO utilizado en Singapur, mientras que la segunda idea se llevó a cabo en el período de prácticas. Se podría hacer una combinación entre ambas.

- ***Propuesta 1.***

Una vez introducido el tema, se propone a los alumnos que investiguen y hagan lo que los egipcios hacían con un cuerda para construir un triángulo rectángulo.

Pero antes de ello, hay que conocer conceptos básicos. Por ejemplo, a partir de un triángulo rectángulo se puede llegar a la conclusión de que el lado de mayor longitud, la hipotenusa, es el opuesto al ángulo recto, es decir, el ángulo de mayor amplitud.



El lado AB, el lado de mayor longitud se le llamará hipotenusa. A partir de aquí se les mostrará distintos tipos de triángulos rectángulos para que identifiquen la hipotenusa de cada uno de ellos.

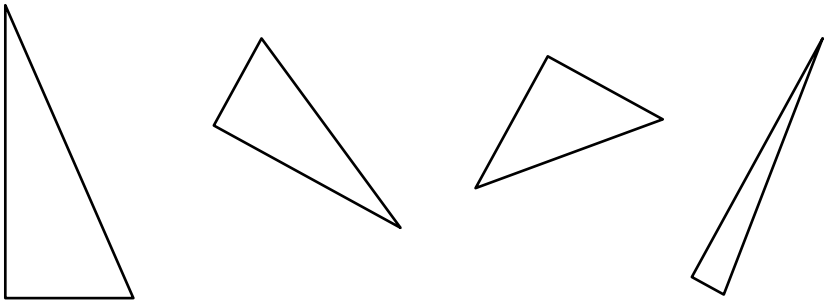
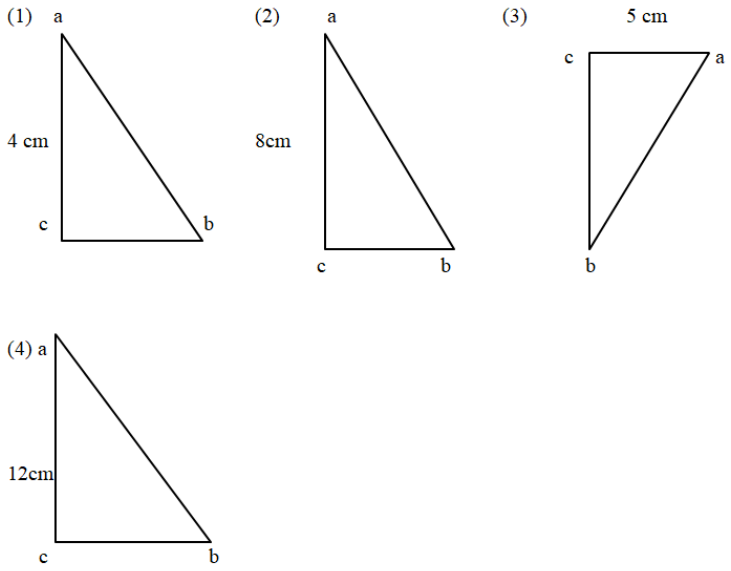


Figura 21: Conjunto de triángulos rectángulos.

Fuente: Elaboración propia.

Una vez analizados los conceptos básicos, se estudiará la relación que tienen las longitudes de los lados que forman un triángulo rectángulo, para ello se utilizará una cuerda similar a la que usaban los egipcios en sus construcciones. Daremos a los alumnos, cuerdas de diferentes longitudes, por ejemplo, 12 cm , 24 cm, 30 cm, 36 cm, para formar respectivamente triángulos rectángulos donde la longitud de uno de los lados será un número entero.



Con la cuerda y con lo datos proporcionados se pretende que completen una tabla como la siguiente para que descubran la relación entre los lados del triángulo.

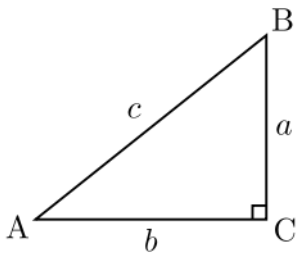
	ac	Bc	ab	ac^2	bc^2	ab^2	$ac^2 + bc^2$
(1)	4 cm	3 cm	5 cm	16 cm^2	9 cm^2	25 cm^2	25 cm^2
(2)	8 cm	6 cm	10 cm	64 cm^2	36 cm^2	100 cm^2	100 cm^2
(3)	5 cm	12 cm	13 cm	25 cm^2	144 cm^2	169 cm^2	169 cm^2
(4)	12cm	9 cm	15 cm	144 cm^2	81 cm^2	225 cm^2	225 cm^2

Tras esta pequeña investigación por parte del alumno podremos llegar a la definición del Teorema de Pitágoras para poder resolver problemas.

Es decir, en un triángulo rectángulo, diremos que:

$$ab^2 = ac^2 + bc^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$



- ***Propuesta 2.***

Desde mi punto de vista, en el libro de Singapur la organización de la explicación del Teorema de Pitágoras puede parecer confusa para los alumnos. ¿Por qué sólo se cumple el Teorema de pitágoras con un triángulo rectángulo? ¿por qué la relación entre las longitudes de los tres lados que forman un triángulo rectángulo se determina elevando las longitudes al cuadrado? Estas preguntas me las planteo, ya que pude ver las preguntas que se pueden hacer los alumnos al explicar este Teorema.

Después de la breve introducción histórica, descrita anterioremente, se comenzará con la identificación básica de los conceptos, cómo hipotenusa y catetos. Se utiliza el recurso auxiliar de GeoGebra, para primero investigar (parte concreta) con el cambio de tamaño que se puede realizar sobre el triángulo rectángulo, verán que si por ejemplo, formo un triángulo obtuso, esta definición del Teorema de Pitágoras no se cumplirá.

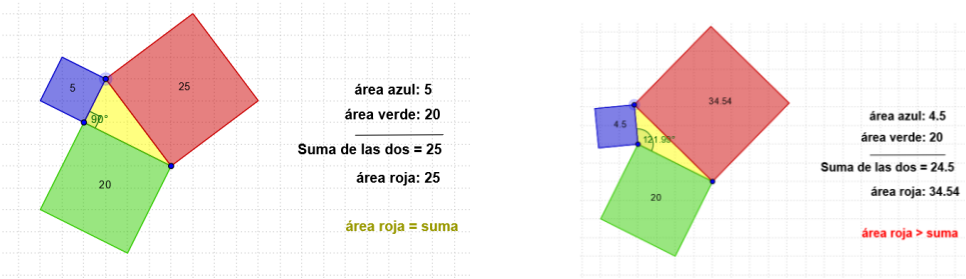


Figura 22: Teorema de Pitágoras.

Fuente: Manuel Sada. Teorema de Pitágoras. Enlace: https://www.geogebra.org/m/S65D4e3F

Más tarde, se muestra y modifica la figura con distintos tamaños para con geometría dinámica los alumnos puedan llegar a la definición del Teorema de Pitágoras (parte pictórica). La suma de las áreas de los cuadrados que se forman sobre los catetos es igual al área del cuadrado que se forma sobre la hipotenusa.

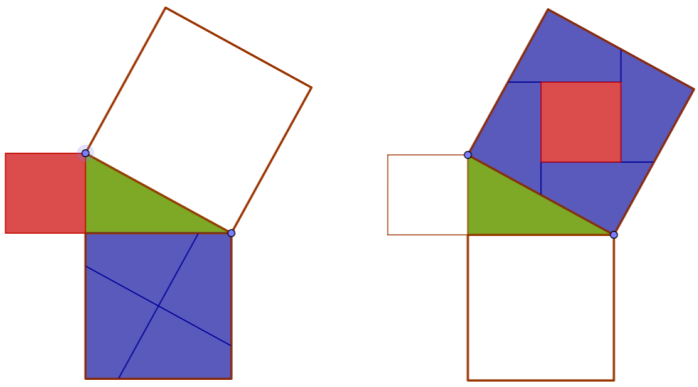


Figura 23*:* Teorema de Pitágoras: Demostración de Perigal.

Fuente: Manuel Sada. GeoGebra. Enlace: https://www.geogebra.org/m/gjNwybbx

Por lo que el teorema de pitágoras dice que, la suma de las áreas de los cuadrados que se forman sobre los catetos es igual al área del cuadrado que se forma sobre la hipotenusa (parte abstracta). La definición se representará matemáticamente:

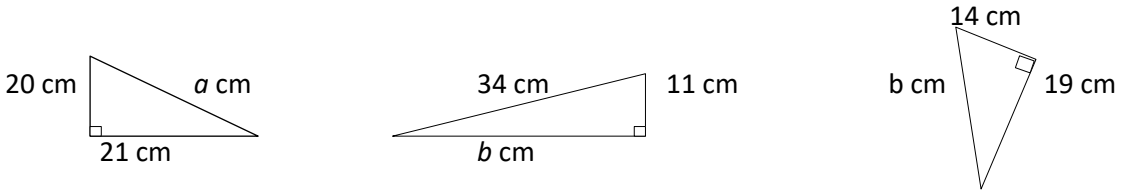
$$Hip^2 = cat^2 + cat^2$$

Una vez analizado el Teorema de Pitágoras, antes de pasar a la resolución de problemas, se puede comprobar como está descrito en la Propuesta 1.

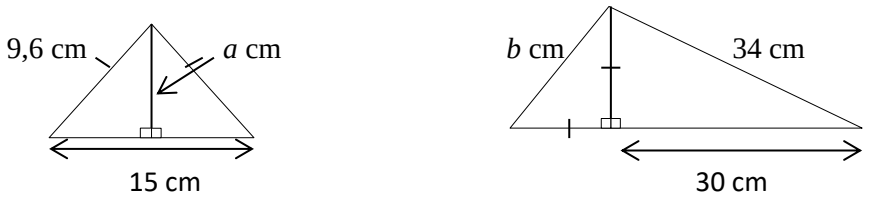
❖ Sesión 5

Esta sesión se dedicará a hacer ejercicios de diferentes grados de dificultad. Se expondrán algunos ejemplos:

- Actividad 1: Se exponen distintos tipos de triángulos, para que calculen alguno de sus lados:



- Actividad 2:



- Actividad 3: Juan está a 10 m un edificio y lanza un balón en línea recta ascendente, alcanzando los 5 m de altura hasta chocar con el edificio. ¿cuánto mide la distancia que recorre el balón hasta que choca con el edificio?

❖ Sesión 6

Como se puede comprobar, algunos conocimientos con respecto a perímetros, superficies y ángulos de figura planas ya han sido adquiridos en Primaria. A pesar de ello, esta sesión será dedicada a repasar conocimientos y conceptos.

Para repasar los diferentes conceptos se puede llevar al aula diferentes juegos de dm^2, cm^2, dm^3, cm^3 y un m^3. Así los alumnos pueden apreciar cuantos cm^2 caben por ejemplo, en un dm^2.

Figura 24: Material manipulable de medida de longitudes, superficies y volúmenes

Figura 25: Material manipulable de medida de longitudes, superficies y volúmenes. Representación básica del volumen aproximado de un m^3.

Partiendo del currículo de 6º curso Educación Primaria, comenzaremos repasando el área del rectángulo, cuadrado, romboide, triángulo y círculo.

El objetivo con este repaso es que los alumnos tengan los suficientes recursos para buscar la manera más adecuada de resolver los problemas, dejando de lado la parte memorística y puedan comprender el proceso.

- Área de cuadrado y rectángulo. Con ayuda de GeoGebra se pretende que los alumnos calculen el área de las siguientes figuras.

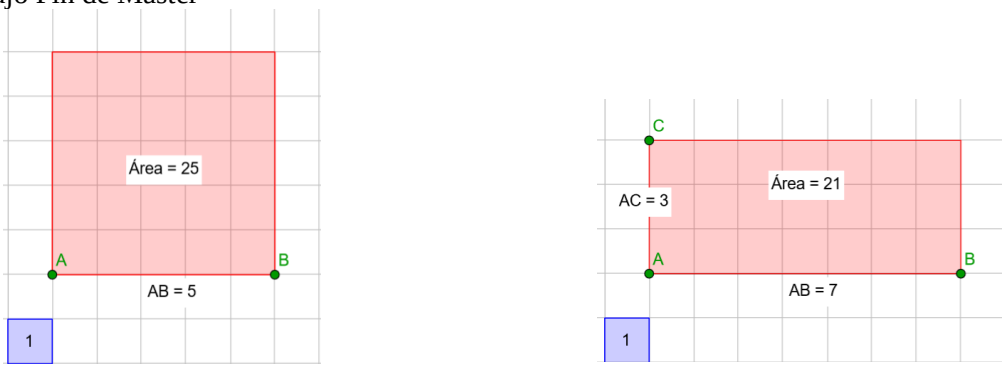


Figura 26: Perímetro y área de cuadrado y círculo.
*Fuente:*Manuel Sada. Perímetros y áreas polígonos. GeoGebra.

- Área de un romboide. Es una de las figuras geométricas más elementales. Un paralelogramo de lados y ángulos iguales dos a dos.

Área romboide = Base·altura

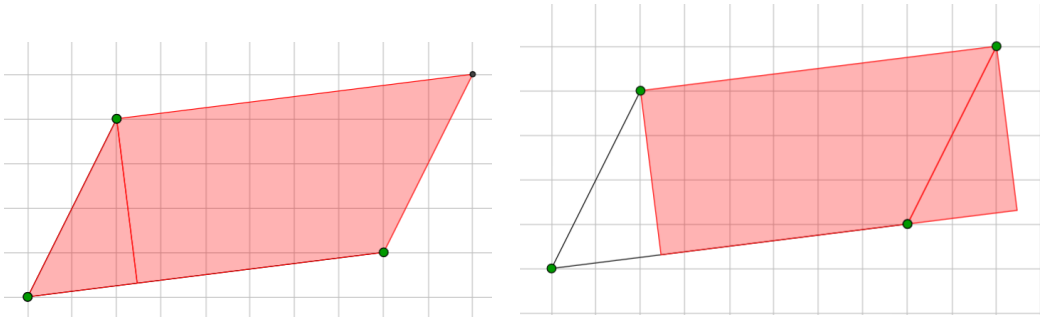
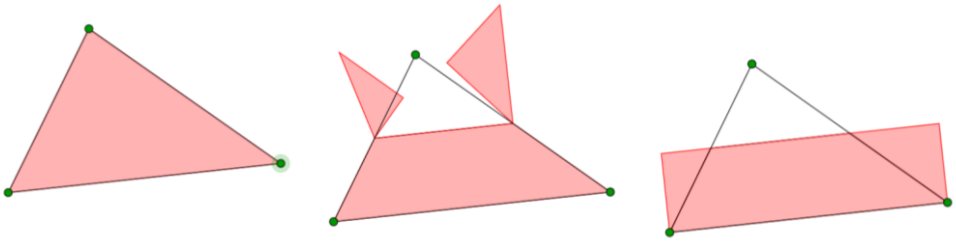


Figura 27: Área de un romboide

Fuente: Manuel Sada. Perímetros y áreas polígonos. GeoGebra.

- Área de un triángulo. Se presentan dos posibles formas para calcular el área de un triángulo.



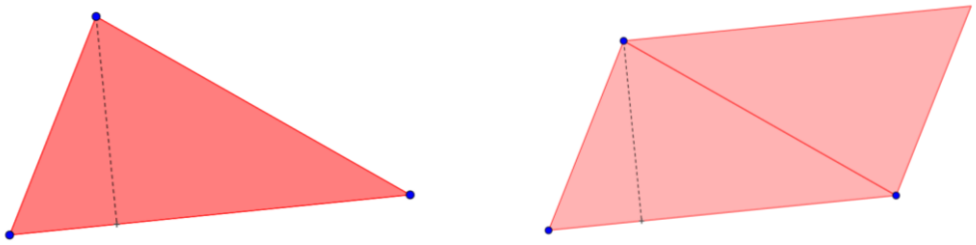


Figura 28: Área de triángulo
*Fuente:*Manuel Sada. Perímetros y áreas polígonos. GeoGebra.

❖ Sesión 7

- Área del trapecio. De la misma manera, podemos comprobar que conociendo únicamente cómo se calcula el área de un romboide, podremos obtener el área de un trapecio.

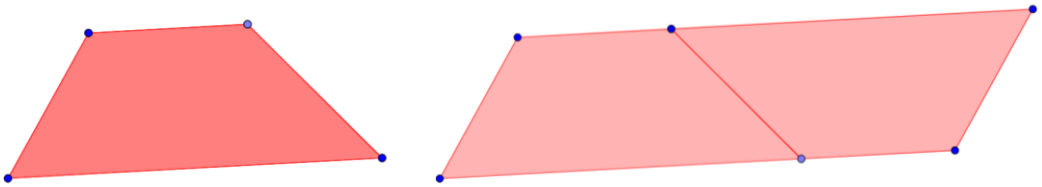


Figura 29: Área del trapecio.

Fuente: Manuel Sada. Perímetros y áreas polígonos. GeoGebra

- Área del rombo. Con este tipo de demostración se puede ver que hay una relación entre el área del rombo y el área del rectángulo circunscrito. Por lo que si calculamos el área del rectángulo circunscrito y lo dividimos entre dos, obtendríamos el área del rombo.

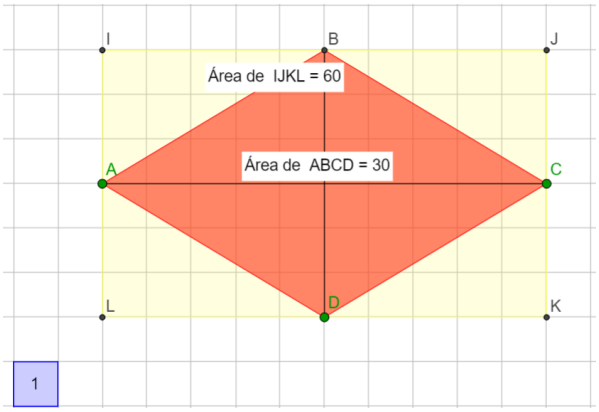


Figura 30: Área del rombo.

Fuente: Manuel Sada. Perímetros y áreas polígonos. GeoGebra

- Área de un polígono regular. Comprobaremos que no es necesario memorizar ninguna fórmula determinada, basta con calcular el área de un triángulo y multiplicarlo por el número de lados que tenga el polígono regular, dado que se forman triángulos iguales.

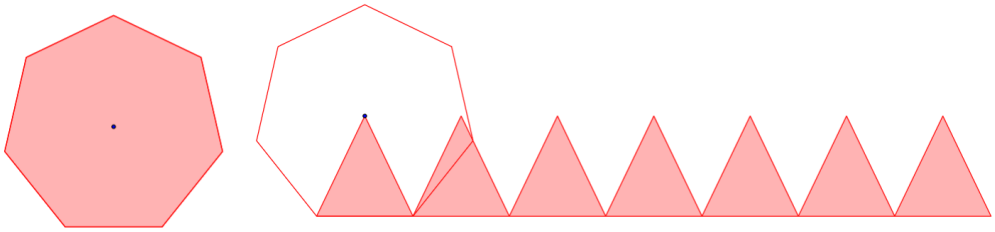


Figura 31: Área de un polígono regular.

Fuente: Manuel Sada. Perímetros y áreas polígonos. GeoGebra

- Área del círculo.
    - Longitud de una circunferencia = $\pi \cdot$ diámetro
    - Área de un círculo = $\pi \cdot$ radio^2

Recordaremos que π = longitud de la circunferencia / diámetro.

Una forma de no memorizar la fórmula y entenderla podría ser la siguiente.

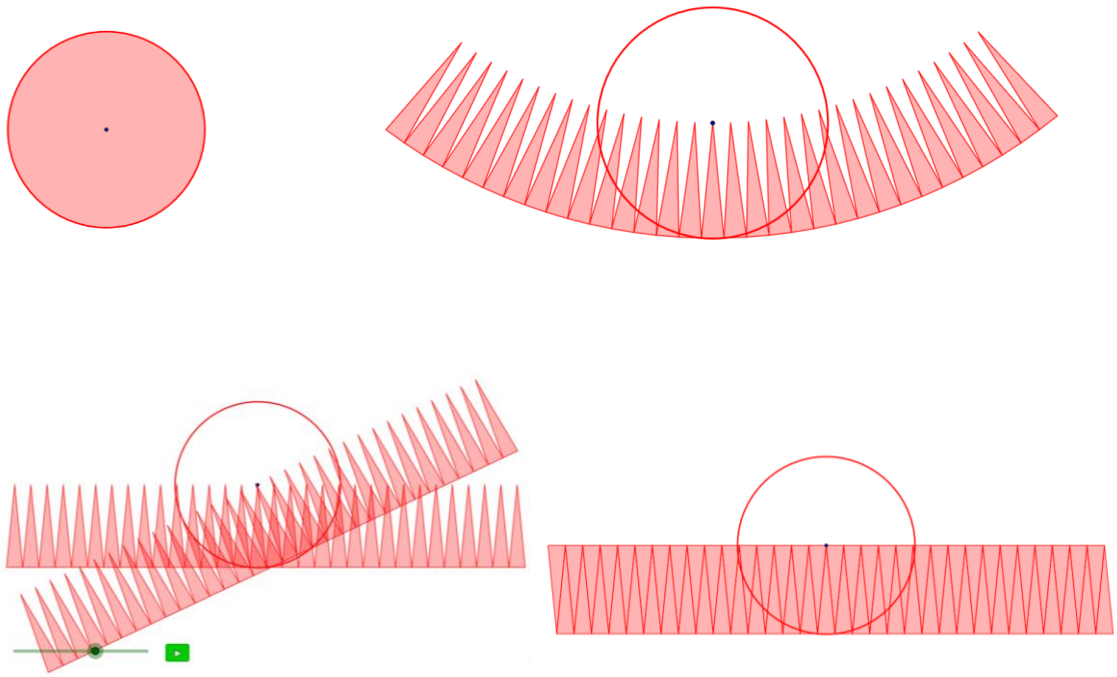


Figura 32: Área de un círculo.

Fuente: Manuel Sada. Perímetros y áreas figuras circulares. GeoGebra.

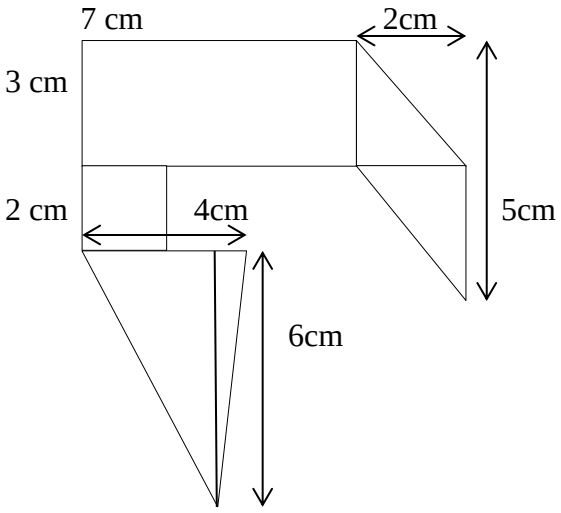
De esta manera con un aprendizaje guiado los alumnos podrían hallar la fórmula para calcular el área de un círculo.

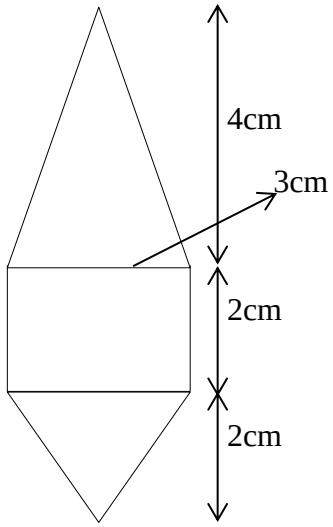
Área del círculo = $base \cdot altura = \frac{Perímetro}{2} \cdot radio = \frac{\pi \cdot \text{diámetro}}{2} \cdot radio = \pi \cdot \text{radio}^2$

❖ Sesión 8

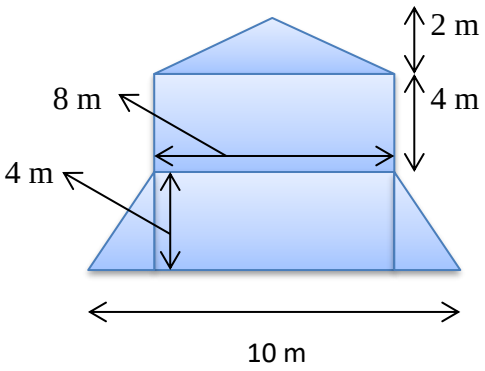
Se estudiará el cálculo de áreas de figuras compuestas en una sesión dedicada a ejercicios, ya que para ello, únicamente se necesitarán los conocimientos previamente descritos.

- Propuestas de ejercicios.





Debemos pintar la fachada del siguiente edificio. Calcula la cantidad de pintura que necesitaríamos, sabiendo que se gastan 0,5 kg por m^2.



4.3 Propuesta de prueba de evaluación.

Los criterios de evaluación deben servir de referencia para evaluar lo que un alumno sabe y sabe hacer en cada materia. Dichos criterios de evaluación se definen en estándares de aprendizaje evaluables.

El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato define estándares de aprendizajes evaluables como aquellos que permiten definir los resultados de aprendizaje, y que concretan lo que el estudiante debe saber, comprender y saber hacer en cada asignatura, deben ser observables, medibles y evaluables y permitir graduar el rendimientos o logro alcanzado.

Se realiza una propuesta de prueba de evaluación haciendo referencia a los contenidos explicados en las sesiones expuestas. Parte de las actividades propuestas para evaluar los EAE, fueron diseñadas en el proceso de prácticas bajo la supervisión de la tutora Dña. Evangelina Herranz Prada.

Los estándares de aprendizaje evaluables en dicha prueba de evaluación son los siguientes:

EAE 3.1.1. Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema, simetrías.

EAE 3.1.2. Clasifica los triángulos atendiendo tanto a sus ángulos como a sus lados.

EAE 3.1.4. Clasifica los cuadriláteros y paralelogramos atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos y conociendo sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales.

EAE 3.3.1. Comprende los significados aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema construyendo otros polígonos sobre los lados del triángulo rectángulo.

EAE 3.3.2. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos.

EAE 3.2.1. Resuelve problemas relacionados con distancias perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas.

EAE 3.2.2. Calcula longitudes y áreas en figuras planas simples.

EAE 3.2.3. Calcula longitudes y áreas en figuras planas compuestas.

EAE 3.3.3. Aplica el teorema de Pitágoras cuando es necesario en el cálculo de áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos reales.

Prueba de evaluación completa. ANEXO I.

4.4 Análisis de propuesta práctica.

Como se mencionó anteriormente, con la enseñanza bajo el enfoque tradicional no se obtienen los resultados esperados. La dedicación del profesor se centra en trasmitir información y contenido a sus alumnos, y la de estos es recoger y acumular dicha información, es una metodología expositiva donde los alumnos deben permanecer quietos y atentos para aprender y adaptar su pensamiento al procedimiento que se les enseña, con limitados razonamientos o críticas.

Correspondiendo con el constructivismo y las teorías cognitivas del aprendizaje, con este nuevo enfoque didáctico que aquí se expone, se pretende que los alumnos construyan, que ellos sean los protagonistas de su propio aprendizaje y el docente se centre en diseñar experiencias de aprendizaje significativo. (Moreano, Asmad, Cruz, & Cuglievan, 2008)

Después de poner en práctica las sesiones expuestas con algunas modificaciones, se puede hacer un análisis cualitativo, no así cuantitativo ya que no se ha podido hacer un estudio que cuantifique los conocimientos y el rendimiento entre alumnos que han recibido los mismos contenidos con una clase tradicional y alumnos con la metodología que se expone.

En la mayoría de las sesiones diseñadas para conseguir ese aprendizaje significativo, se intenta tener en cuenta todas las competencias claves de aprendizaje permanente para que los alumnos puedan trabajarlas. La clave está en “Saber”, “Saber hacer” y “Saber ser”.

Competencia lingüística.

- Saber: Manejar el lenguaje matemático con precisión en contexto relacionados en geometría.
- Saber hacer: Expresar de manera oral y escrita de forma adecuada.
- Saber ser: Diálogo crítico y constructivo con sus compañeros, respetar las normas de comunicación, el turno de palabra a la hora de participar, etc.

Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología

- Saber: Conceptos matemáticos básicos. Argumentar con esquemas lógico-matemáticos situaciones de geometría
- Saber hacer: Reconocer distintos contextos y aplicar principios y procesos matemáticos.
- Saber ser: Valorar y respetar los datos y su autenticidad y tomar criterios éticos relacionados con la ciencia.

Competencia digital.

- Saber: Usar diferentes fuentes para la búsqueda de información, en el caso de dudas y conocer diferentes aplicaciones informáticas, en este caso Geogebra.
- Saber hacer: Manejar herramientas digitales para la construcción de conocimiento.
- Saber ser: Aplicar criterios y fomentar la curiosidad en el aprendizaje.

Aprender a aprender.

- Saber: Tener recursos para poder enfrentarse a distintas actividades y saber planificar y gestionar los pasos a realizar en el proceso de aprendizaje. Y así desarrollar estrategias que favorezcan la compresión.
- Saber hacer: Estrategias para la resolución de actividades. Tener capacidad de autocrítica para poder aprender de los errores
- Saber ser: Engloba la curiosidad, la motivación, confianza en uno mismo, etc.

Competencias sociales y cívicas.

- Saber: Aplicar derechos y deberes en la convivencia, fomentando el trabajo cooperativo.
- Saber hacer: Haciendo referencia a la participación y al desarrollo de la capacidad de diálogo.
- Saber ser: Sintiendo que eres responsable de tu aprendizaje se fomenta la elaboración de valores propios.

Sentido de iniciativa y espíritu de empresa.

- Saber: Gestionar un trabajo de grupo y asumir responsabilidades.
- Saber hacer: Optimizar el uso de recursos para conseguir los objetivos propuestos.
- Saber ser: Ser constante en el trabajo y contagiar entusiasmo y motivación.

Por otra parte las sesiones se han diseñado teniendo en cuenta las tres ideas básicas que fundamentan la metodología usada en Singapur.

- El enfoque CPA. Los alumnos con quien desarrollamos las sesiones, en muchas ocasiones tenían memorizados conceptos pero en ningún momento habían reflexionado sobre ellos ni los entendían. Sabían identificar lo que era un triángulo en sí, pero no conocían sus propiedades porque no las habían trabajado. En la primera sesión dedicada al cálculo de áreas y perímetros de figuras planas y cálculo

de áreas por descomposición en figuras simples, los alumnos resolvían los ejercicios pero sin ningún tipo de razonamiento. Una buena forma para entenderlo fue añadir material manipulable de medida, longitudes, superficies y volúmenes a la sesión, la parte concreta y pictórica.

- Currículo en espiral. Exponiendo gradualmente al alumno los contenidos, teniendo en cuenta lo que estudiaron en 6º curso de primaria.
- Variación sistemática. En las sesiones donde se estudia el razonamiento de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, o el cálculo del área de figuras, se ofrece al alumno la oportunidad de buscar la forma más adecuada para resolver una determinada cuestión si tener que memorizar o retener complicadas fórmulas para resolverlas.

Los alumnos razonan y reflexionan sobre el proceso de aprendizaje ya que se le da la oportunidad de investigar. En el trabajo de clasificación de triángulos y cuadriláteros, y en el estudio del cálculo de la suma de los ángulos interiores de un polígono, con geometría dinámica (Teorema de Pitágoras y con el cálculo de áreas de distintas figuras), la metodología invita al diálogo, pero no sólo entre profesor y alumno, sino entre los propios alumnos, se practica la cooperación o trabajo en grupos. Los alumnos pueden verbalizar sus pensamientos, darse cuenta de sus propios errores y aprender del compañero. Gracias a este diálogo conseguimos que los alumnos pierdan el miedo a equivocarse, se consigue cierta seguridad y confianza a la hora de usar las matemáticas aprendidas.

Yeap Ban Har, uno de los referentes mundiales de la metodología usada en Singapur, en una entrevista decía, “Los niños deberían tener la oportunidad de explorar sus ideas cuando aprenden por primera vez una nueva idea, utilizando en clase materiales concretos, y trabajar en equipo con otros niños. Los profesores de matemáticas deberían aprovecharse de las ideas de los niños en lugar de sólo decirles lo que tienen que memorizar” (20 Minutos, 2017).

5. Conclusión

El Método Singapur es una metodología mediante la que se obtienen excelentes resultados en la enseñanza-aprendizaje de matemáticas, ya que hace hincapié en aspectos didácticos metodológicos, por otra parte, van más despacio en el desarrollo curricular, lo que les permite analizar y trabajar los conceptos con una mayor profundidad. Se basa en un avance de lo concreto a lo abstracto, teniendo en cuenta lo gráfico y pictórico y el aprendizaje progresivo de conceptos partiendo de los conceptos conocidos. Deja atrás la memorización, los excesos de cálculos tediosos y el aprendizaje rutinario de procedimientos sin su compresión.

Introducir e implantar en el aula una metodología diferente aviva el interés de los alumnos y despliega su atención buscando la innovación, investigación y lo novedoso, manteniendo la motivación en el aprendizaje.

La puesta en práctica de las actividades expuestas en mi período de prácticas ha sido totalmente satisfactoria, el interés por la clase de matemáticas y el entusiasmo por aprender se manifiesta gratamente. La participación fue muy activa por parte de todos los alumnos, al utilizar materiales manipulativos despertaba la curiosidad e interés en aquellos alumnos que apenan participaban en sesiones anteriores.

Con este tipo de metodología, se fomenta el desarrollo de distintas competencias clave, además de impulsar el trabajo colaborativo, donde los alumnos trabajan en grupo para resolver las actividades propuestas de manera colectiva, de tal forma que los alumnos se preocupan de conseguir sus propios objetivos, además de ayudar a sus compañeros a lograr los suyos propios.

Creo que hay que modificar la metodología de enseñanza, por esta razón propuse realizar este trabajo. He puesto en práctica nuevas y diferentes sesiones y estudiado la metodología usada en Singapur. Es necesario “transformar” un alumno pasivo, que necesita que otra persona le enseñe, en un alumno activo, capaz de elaborar su propio aprendizaje, siempre con la ayuda de la guía del profesor. Dejando atrás la memorización de procesos y reglas sin razonamientos, para de esta manera la forma de aprender matemáticas deje de ser monótona y sea motivante, atractiva, lúdica y construida desde los alumnos y adaptada a ellos.

El compromiso y la implicación de los profesores y comunidad educativa en general para la aplicación de esta metodología es fundamental, requiere un reciclaje, un cambio radical en la forma de trabajar con los alumnos y un esfuerzo extra.

6. Referencias bibliográficas.

Bruner, J. (1960). El proceso de la educación . Cuidad de Mexico : Hispanoamericana.

Calderón Lorca, P. E. (2014). Percepciones de los y las Docentes del Primer Ciclo Básico, sobre la implementación del Método Singapur en el Colegio Mario Bertero Cevasco de la Comuna de Isla de Maipo.

Delgado, M. L. (2011). Didactica para la educación, infantil, primaria y secundaria. . Universitas, S.A.

DG Educación y Cultura. (2007). Competencias clave para el aprendizaje permanente. Un Marco de Referencia Europeo.

Dienes, Z. P. (1969). Los Primeros pasos en matemática. Lógica y juegos lógicos. Barcelona : Teide S.A.

Dienes, Z. P. (1986). Las sesis etapas del aprendizaje . Barcelona : Teide S.A.

Felmer, P. (2011). Universidad de Chile . Obtenido de Patricio Felmer: Método Singapur. Columna de opinión del Premio Nacional de Ciencias Exactas 2011 e Investigador del CIAE y del CMM de la U. de Chile

Fonseca R. A., Hernández, R. V., y Mariño, L. F. (2017). Enfoque cpa en la resolución de problemas para el aprendizaje de fracciones mediante el uso de software matematico. Obtenido de II ENCUENTRO INTERNACIONAL EN EDUCACIÓN.

Hincapié, G. y Riaño, H. (2008). Zoltan Paul Dienes un matemático inconforme.

López, F., y Fernández, F. (s.f.). Matemáticas con mucho arte: antigüedad.

Núñez, J. C., González-Pienda, J. A., Alvarez, L., González-Castro, P., González-Pumariega, S., Roces, C., ... y Da Silva, E. H. (2005). Las actitudes hacia las matemáticas: perspectiva evolutiva. In *Actas do VIII Congreso Galaico-Portugués de Psicopedagoxía* (pp. 2389-2396).

Martín, J. D. (1998). Método de enseñanza. Aprendizaje para la enseñanza por descubrimiento. Obtenido de Aula Abierta.

Mato, M. D., y de la Torre, E. (2009). Evaluación de las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico.

Método Singapur. (2011). Obtenido de https://www.metodosingapur.com/problemas-metodo-singapur

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2016). *TIMSS 2015.* Estudio internacional de tendencias en Matemáticas y Ciencias. IEA. Obtenido de Informe Español: Resultado y contexto.

Moreano, G., Asmad, U., Cruz, G., y Cuglievan, G. (2008). Concepciones sobre la enseñanza de matemática en docentes de primaria de escuelas estatales. Revista de Psicología, 26(2), 299-334.

Ramos, P. (2013). Más ideas, menos cuentas. Un blog sobre educación matemática.

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding.

Wong, K. Y. (2015). Effective Mathematics Lessons through an Eclectic Singapore Approach. World Scientific.

Yeo, J., Seng, T. K., Yee, L. C., Chow, I., Meng, N. C., & Liew, J. (1982). New Syllabus Mathematics (7th Edition ed.). Singapur: Shinglee.

Zamora Cintas, P. J. (2013). La contextualización de las matemáticas.

España, Decreto 40/2015, de 15/06/2015, por el que se establece el currículo de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Castilla-La Mancha. *Boletín Oficial del Estado (BOE),* 15 de Junio de 2015, núm.120.

España, Decreto 54/2014, de 10/07/2014, por el que se estable el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Castilla-la Mancha. *Boletín Oficial del Estado, (BOE)* 10 de Julio de 2014, núm.132.

España, Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado, (BOE)* 3 de Enero de 2015. Núm.3.

ANEXO I.

FECHA:_____APELLIDOS_____NOMBRE_____CURSO_____

EAE evaluados	**3.1.1 (B)**	**3.1.2 (B)**	**3.1.4 (B)**	**3.3.1 (A)**	**3.3.2 (B)**	**3.2.1 (A)**	**3.2.2 (B)**	**3.2.3 (I)**	**3.3.3 (I)**
Peso dentro de su categoría	***3***	***3***	***5***	***3***	***8***	***10***	***10***	***10***	***8***
Nivel de logro									
Autoevaluación Pronóstico (una vez terminada la PE escribe el nivel de logro que creas obtendrás en cada EAE)									

EAE 3.1.1 Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema, simetrías.

EAE 3.1.2 Clasifica los triángulos atendiendo tanto a sus ángulos como a sus lados.

EAE 3.1.4 Clasifica los cuadriláteros y paralelogramos atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos y conociendo sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales.

EAE 3.3.1 Comprende los significados aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema construyendo otros polígonos sobre los lados del triángulo rectángulo.

EAE 3.3.2 Aplica el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos.

EAE 3.2.1 Resuelve problemas relacionados con distancias perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas.

EAE 3.2.2 Calcula longitudes y áreas en figuras planas simples.

EAE 3.2.3 Calcula longitudes y áreas en figuras planas compuestas.

EAE 3.3.3 Aplica el teorema de Pitágoras cuando es necesario en el cálculo de áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos reales.

1. Indica si las siguientes definiciones son correctas (y precisas). En caso negativo, explica por qué o realiza un dibujo que sirva de contraejemplo (muestre las carencias o imprecisiones de la definición).
   a) Un polígono regular es el polígono que tiene todos sus lados iguales.

   b) Un polígono regular es el polígono que tiene todos sus ángulos iguales.

   c) Diagonal de un polígono regular es el segmento que une dos vértices cualesquiera.

2. ¿Verdadero o falso? Razona tu respuesta.
   a) Un cuadrilátero regular tiene dos ejes de simetría y un pentágono regular tiene 5.

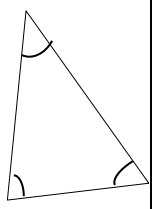
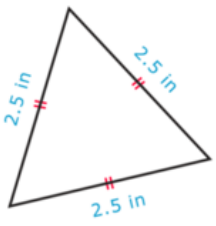
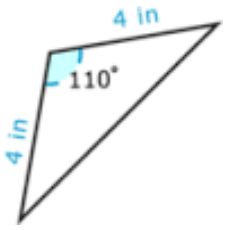
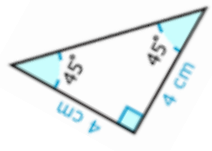
   b) La suma de los ángulos interiores de un pentágono regular es de 540º.

   c) Todos los polígonos regulares tienen siempre un vértice más que el número de lados.

   d) Un hexágono regular tiene 10 diagonales.

   e) Sólo los polígonos regulares tienen apotemas y diagonales.

3. Clasifica (nombra) los siguientes triángulos <u>según sus lados</u> y <u>según sus ángulos</u>.

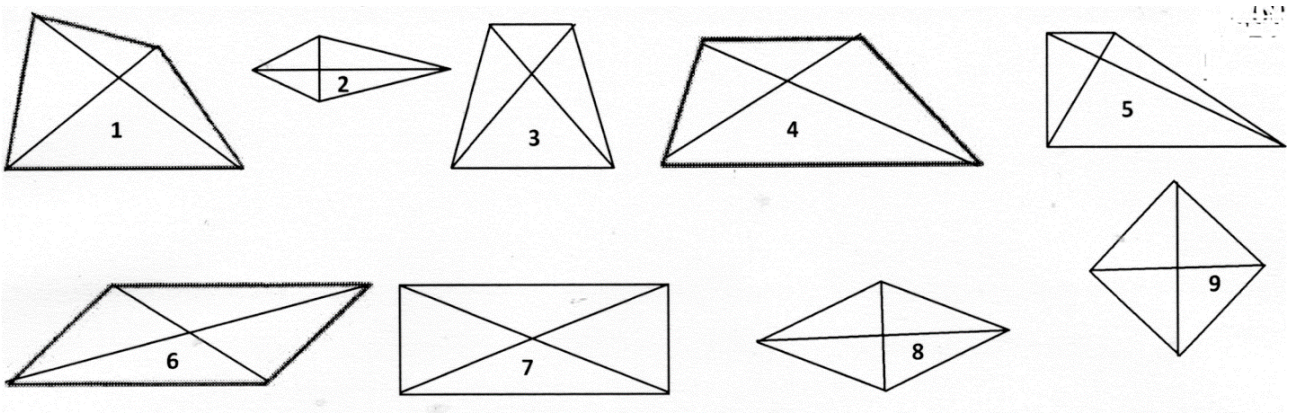
Clasificación				
Según lados				

Según ángulos				

4. Dibuja un triángulo que sea:

Acutángulo e isósceles.	**Obtusángulo y escaleno.**	**Rectángulo y escaleno.**	**Rectángulo y equilátero.**

5. Clasifica (nombra debajo de la forma más precisa posible) los siguientes cuadriláteros:

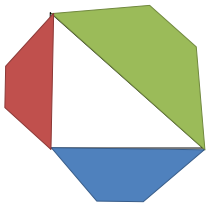
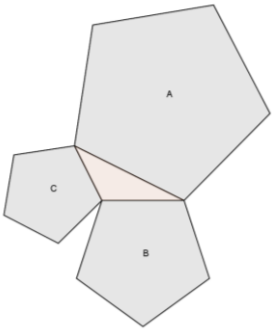
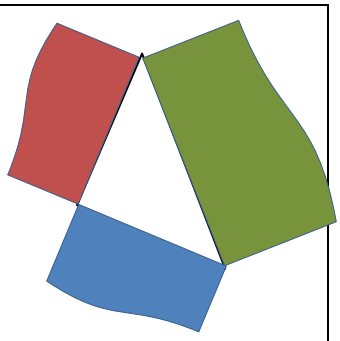


6. Nombra los siguientes polígonos (puede haber más de una respuesta).
   a) Cuadrilátero que tiene los cuatro ángulos de la misma medida.
   b) Cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos.
   c) Cuadrilátero cuyas diagonales no se cortan perpendicularmente.
   d) Cuadrilátero paralelogramo cuyos ángulos no son rectos.
7. ¿Verdadero o falso? Razona la respuesta.
   a) Las diagonales de todos los cuadriláteros se cortan siempre en su punto medio.
   b) Los cuadrados son los únicos cuadriláteros con los cuatro lados de la misma medida.
   c) Un trapecio rectángulo es un cuadrilátero paralelogramo.

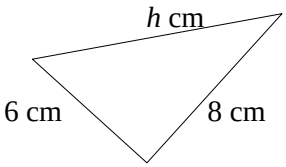
d) Una “cometa” es un rombo.

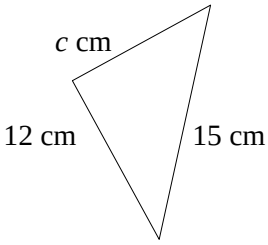
e) Un romboide es un rombo apoyado sobre uno de sus lados.

8. Observando los dibujos y los datos, justifica razonadamente si son verdaderas o falsas las igualdades que se proponen en negrita.

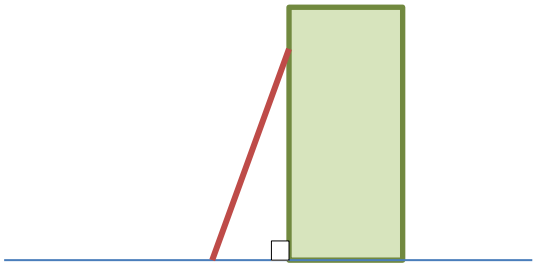
		
Dato: Las figuras granate, azul y verde son semejantes	Dato: los pentágonos son regulares	Dato: el triángulo de la figura es rectángulo
Área Verde=Área Roja + Área Azul	**A=B+C**	**Área Roja+ Área Azul > Área Verde**

9. Calcula la longitud de los lados desconocidos de las siguientes figuras.



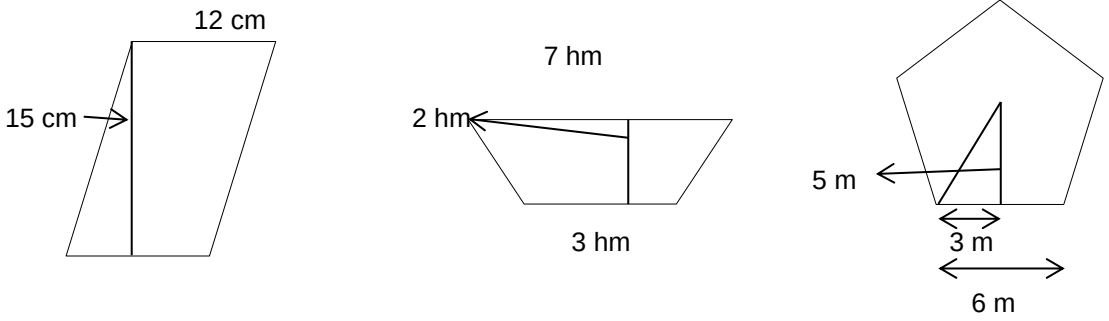


10. Un albañil, se encuentra en una escalera, que se apoya en una pared vertical, dado que la parte superior de la escalera se encuentra a 3,5 m sobre el suelo y el pie de la escalera se coloca a 0,5 m de la pared para su estabilidad. Calcula la longitud de la escalera.



11. Tenemos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 10 cm y uno de sus catetos mide 6 cm. Halla la medida del otro cateto. Haz aquí un dibujo (no a escala) para ayudarte a visualizar la situación.

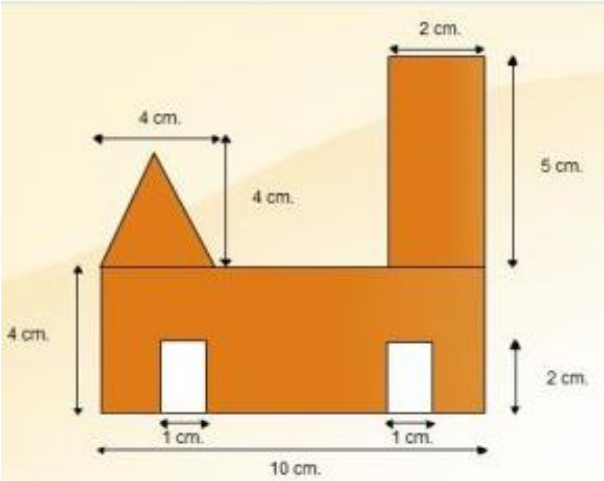
12. Calcula el área de las siguientes figuras.



13. En el centro de un jardín cuadrado de 160 m de lado hay una piscina también cuadrada, de 26 m de largo. Calcula el área del jardín.

14. Resuelve las siguientes situaciones:

a) Una vaca está atada con una cuerda de 50 metros de largo en una esquina exterior de un corral. El corral tiene forma de cuadrado 40 m de lado.
   I. Dibuja la zona donde la vaca podrá pastar y calcula su superficie.
   II. Si quisiéramos poner una valla en esa zona, ¿cuántos m de valla necesitaríamos?

III. ¿Tendría más superficie de pasto si estuviera dentro del corral sin atar?

b) Debemos pintar la fachada de la maqueta de un edificio que tiene la forma que muestra la figura. Si con cada bote de témpera se puede pintar 10 cm^2 cuesta 3 €, halla el dinero que debemos gastar.