Universidad de Alcalá
COMISIÓN DE ESTUDIOS OFICIALES
DE POSGRADO Y DOCTORADO

**ACTA DE EVALUACIÓN DE LA TESIS DOCTORAL**

Año académico 2016/17

DOCTORANDO: **RAPOSO SÁNCHEZ, MIGUEL A.**
D.N.I./PASAPORTE: ******5992C**

PROGRAMA DE DOCTORADO: **D445 TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LAS COMUNICACIONES**
DEPARTAMENTO DE: **Teoría de la Señal y Comunicaciones**
TITULACIÓN DE DOCTOR EN: **DOCTOR/A POR LA UNIVERSIDAD DE ALCALÁ**

En el día de hoy 17/07/17, reunido el tribunal de evaluación nombrado por la Comisión de Estudios Oficiales de Posgrado y Doctorado de la Universidad y constituido por los miembros que suscriben la presente Acta, el aspirante defendió su Tesis Doctoral, elaborada bajo la dirección de FERNANCO CRUZ ROLDÁN // JOSÉ BIENVENIDO SÁEZ LANDETE.

Sobre el siguiente tema: *TÉCNICAS POLINÓMICAS AVANZADAS APLICADAS AL DISEÑO DE FILTROS DIGITALES*

Finalizada la defensa y discusión de la tesis, el tribunal acordó otorgar la CALIFICACIÓN GLOBAL[1] de (**no apto, aprobado, notable** y **sobresaliente**): SOBRESALIENTE

Alcalá de Henares, 17 de Julio de 2017

EL PRESIDENTE

Fdo.: I. Santamaría

EL SECRETARIO

Fdo.: M.A. HIDALGO

EL VOCAL

Fdo.: [illegible]

Con fecha 24 de julio de 2017 la Comisión Delegada de la Comisión de Estudios Oficiales de Posgrado, a la vista de los votos emitidos de manera anónima por el tribunal que ha juzgado la tesis, resuelve:

☐ Conceder la Mención de "Cum Laude"
☒ No conceder la Mención de "Cum Laude"

La Secretaria de la Comisión Delegada

FIRMA DEL ALUMNO,

Fdo.: Miguel A. Raposo Sánchez

[1] La calificación podrá ser "no apto" "aprobado" "notable" y "sobresaliente". El tribunal podrá otorgar la mención de "cum laude" si la calificación global es de sobresaliente y se emite en tal sentido el voto secreto positivo por unanimidad.

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ, PATRIMONIO DE LA HUMANIDAD

INCIDENCIAS / OBSERVACIONES:

Universidad de Alcalá

COMISIÓN DE ESTUDIOS OFICIALES
DE POSGRADO Y DOCTORADO

En aplicación del art. 14.7 del RD. 99/2011 y el art. 14 del Reglamento de Elaboración, Autorización y Defensa de la Tesis Doctoral, la Comisión Delegada de la Comisión de Estudios Oficiales de Posgrado y Doctorado, en sesión pública de fecha 24 de julio, procedió al escrutinio de los votos emitidos por los miembros del tribunal de la tesis defendida por *RAPOSO SÁNCHEZ, MIGUEL A.*, el día 17 de julio de 2017, titulada *TÉCNICAS POLINÓMICAS AVANZADAS APLICADAS AL DISEÑO DE FILTROS DIGITALES*, para determinar si a la misma se le concede la mención "cum laude", arrojando como resultado, 1 votos a favor y 2 en contra.

Por lo tanto, la Comisión de Estudios Oficiales de Posgrado **resuelve no otorgar la Mención de "cum laude"** a dicha Tesis.

Alcalá de Henares, 27 de julio de 2017
EL PRESIDENTE DE LA COMISIÓN DE ESTUDIOS
OFICIALES DE POSGRADO Y DOCTORADO

Firmado digitalmente por VELASCO PEREZ JUAN RAMON - DNI 03087239H
Fecha: 2017.07.30 19:11:30 +02'00'

Juan Ramón Velasco Pérez

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ. PATRIMONIO DE LA HUMANIDAD

**Copia por e-mail a:**
Doctorando: RAPOSO SÁNCHEZ, MIGUEL A.
Secretario del Tribunal: MIGUEL ÁNGEL HIDALGO MORENO.
Directores de Tesis: FERNANCO CRUZ ROLDÁN//JOSÉ BIENVENIDO SÁEZ LANDETE

Universidad de Alcalá

**ESCUELA DE DOCTORADO**
**Servicio de Estudios Oficiales de Posgrado**

DILIGENCIA DE DEPÓSITO DE TESIS.

Comprobado que el expediente académico de D./Dª MIGUEL A. RAPOSO SÁNCHEZ reúne los requisitos exigidos para la presentación de la Tesis, de acuerdo a la normativa vigente, y habiendo presentado la misma en formato: ☒ soporte electrónico ☐ impreso en papel, para el depósito de la misma, en el Servicio de Estudios Oficiales de Posgrado, con el nº de páginas: 216 se procede, con fecha de hoy a registrar el depósito de la tesis.

Alcalá de Henares a 26 de abril de 2017

Emilia Rivero Antúnez

Fdo. El Funcionario

Programa de Doctorado en Arquitectura de computadores y técnicas de tratamiento de la señal aplicadas a las telecomunicaciones

# Técnicas polinómicas avanzadas aplicadas al diseño de filtros digitales

Tesis Doctoral presentada por
MIGUEL ÁNGEL RAPOSO SÁNCHEZ

Directores:
Dr. Fernando Cruz Roldán
y
Dr. José B. Sáez Landete

Año 2017

Universidad de Alcalá

DPTO. DE TEORÍA DE LA SEÑAL Y COMUNICACIONES
Campus Universitario.
Crta. Madrid-Barcelona, Km. 33600
28805 Alcalá de Henares (Madrid)
Teléfonos: 91 885 6690 / 91 885 6699
Fax: 91 885 66 99
dpto.teoriadelasenal@uah.es

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ, PATRIMONIO DE LA HUMANIDAD

D. Miguel A. Raposo Sánchez ha realizado en el Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones y bajo la dirección de los Dres. D. Fernando Cruz Roldán y D. José B. Sáez Landete, la tesis doctoral titulada: **"Técnicas polinómicas avanzadas aplicadas al diseño de filtros digitales",** cumpliéndose todos los requisitos para la tramitación que conduce a su posterior lectura.

Alcalá de Henares, abril de 2017

EL DIRECTOR DEL DEPARTAMENTO

Fdo.: Dr. D. Francisco Javier Acevedo Rodríguez.

Universidad de Alcalá
DEPARTAMENTO DE TEORÍA DE LA SEÑAL Y COMUNICACIONES

DEPARTAMENTO DE TEORÍA DE LA SEÑAL Y COMUNICACIONES
Escuela Politécnica Superior.
Campus de la Universidad de Alcalá
Ctra. Madrid-Barcelona, km. 33
28871 Alcalá de Henares (Madrid)
Teléfono: 91 885 66 90 Fax: 91 885 66 99
Email: dpto.teoriadelasenal@uah.es

El Dr. Fernando Cruz Roldán, Catedrático de Universidad del área de Teoría de la Señal y Comunicaciones, y el Dr. D. José B. Sáez Landete, Profesor Titular de Universidad del área de Teoría de la Señal y Comunicaciones, de la Universidad de Alcalá,

**CERTIFICAN**

Que la tesis "***Técnicas polinómicas avanzadas aplicadas al diseño de filtros digitales***" presentada por D. Miguel A. Raposo Sánchez, realizada en el Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones bajo nuestra dirección, reúne méritos suficientes para optar al grado de Doctor, por lo que procede a su depósito y defensa.

Alcalá de Henares, abril de 2017

Fdo.: Dr. D. Fernando Cruz Roldán

Fdo.: Dr. D. José B. Sáez Landete

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ, PATRIMONIO DE LA HUMANIDAD

*A las personas que, por primera vez, te enseñan o aclaran*
*conceptos, procedimientos o formas de abordar problemas.*
*Dedico estas páginas a todos mis maestros.*
*En particular, a mi primer maestro y a mis padres, siempre maestros.*
*A María, Irene y Elena que, en la actualidad, son mis maestras.*

# Agradecimientos

La redacción de esta memoria, tantas veces pospuesta, por fin se ha hecho realidad. Quisiera dar las gracias a todas las personas que, de un modo u otro, han contribuido a que esta tarea concluya. Si me propusiese citar a todas ellas lo más probable es que me olvidase de más de una, por tanto, voy a omitir sus nombres ya que es seguro que todas se sentirán identificadas en los párrafos siguientes.

Expresar, como no podía ser de otro modo, mi inmensa gratitud a los directores de esta tesis por múltiples y variadas razones. Por sus consejos en el desarrollo del trabajo, así como por el aporte de información técnica en momentos difíciles. Por su paciencia en la lectura de la memoria y sus sabias indicaciones para modificar determinados aspectos del texto. Por su confianza en los momentos de desánimo y en los que parecía no haber salida. Agradecerles, también, la amistad que me han brindado durante todo este tiempo. En definitiva, además de su inestimable ayuda, sin la que esta memoria no habría visto la luz, me han proporcionado la posibilidad de conseguir unos amigos.

Si a pesar de todos sus esfuerzos, tanto técnicos como lingüísticos, la versión definitiva contiene errores, éstos se deben achacar exclusivamente a mi impericia.

Doy las gracias a aquellos compañeros y amigos que continuamente, cada vez que coincidíamos, me preguntaban por la marcha de la tesis y me pedían, o más bien me exigían, no soslayar el trabajo iniciado y concluir el mismo. Mi agradecimiento a aquellos otros que me enseñaron, guiaron y asesoraron en mis primeros y posteriores pasos en el entorno LaTeX.

A mi familia, a la que he privado de mi atención, malhumorado en algunas ocasiones y ausente en otras, durante diferentes etapas del proceso. Agradezco a los miembros de la misma que han tenido que asumir las tareas que eran de mi incumbencia.

Al Ministerio de Economía y Competitividad, ya que el presente trabajo ha sido financiado en parte a través del proyecto TEC2015-64835-C3-1-R. Algunos de los equipos utilizados en este trabajo provienen de fondos de dicho proyecto.

A la Universidad de Alcalá que me ha proporcionado medios y espacios en los que poder trabajar.

# Resumen

Los spline, dentro del campo de los polinomios, constituyen una herramienta poderosa que ha sido utilizada para la resolución de problemas en diversos campos científicos. La parte central de este trabajo hace uso de dichos polinomios para generar unas funciones que se aplicarán a la formulación de filtros, dentro del ámbito del procesado de señales.

En primer lugar, se hace una revisión general de la evolución de las funciones spline, así como sus aplicaciones, desde sus orígenes hasta nuestros días. Inicialmente concebidos para resolver problemas de interpolación funcional de manera más eficiente que la lograda con otras técnicas polinómicas, los spline básicos, cuyo orden es un número natural pronto se aplicaron a temas relacionados con el análisis numérico, el diseño asistido por ordenador para la conformación de estructuras utilizadas en diversos ámbitos de la arquitectura e ingeniería, o en áreas como la estadística y otras ramas de las matemáticas.

En el campo del procesado de señales irrumpe a partir de los trabajos pioneros de Unser que contempla el proceso de interpolación como un problema de filtrado digital cuya obtención es computacionalmente muy eficiente. A partir de ese momento, teniendo en cuenta que los spline pueden generarse mediante procesos de convolución de pulsos rectangulares, estas funciones han ido incrementando sus campos de actuación debido a que, en el transcurso del tiempo, se han definido nuevas funciones spline en términos del espacio, el tiempo o la frecuencia y a su vez se han desarrollado diversas variantes con propósitos específicos.

Una de estas líneas está relacionada con la utilización de los spline de orden natural, definidos en frecuencia, para modelar bandas de transición en la formulación de filtros. Estas funciones spline de orden natural se ampliaron, de modo arbitrario, a funciones spline de orden real (racional desde el punto de vista del cálculo numérico) las cuales presentaban ciertos problemas de definición tanto en el dominio de la frecuencia, donde dejaban de tener soporte compacto (característica relevante de las funciones spline básicas), como en su representación temporal, ya que las funciones dejaban de ser reales para determinados valores del tiempo.

Con el fin de solucionar el problema mencionado, en este proyecto se generan funciones spline en el dominio de la frecuencia que constituyen transiciones continuas entre dos funciones spline de orden natural, las cuales presentan soporte compacto en el dominio

de la frecuencia y sus representaciones temporales forman familias de funciones reales para cualquier valor del tiempo. A estas familias de funciones se las denomina $\alpha$-spline en el dominio de la frecuencia.

Construidas estas familias, se pasa a una fase de aplicación donde se formulan respuestas en frecuencia de filtros ideales donde las diferentes bandas de frecuencias se unen de manera suave por medio de bandas de transición generadas con las funciones $\alpha$-spline y se estudian sus propiedades. En todos los casos, las diferentes funciones generadas se definen en el dominio de la frecuencia asociada tanto al tiempo continuo como al tiempo discreto, y además se obtienen también las representaciones de las mismas en el dominio del tiempo.

La última parte, de carácter más práctico, está dedicada al diseño de filtros FIR generados por medio de truncamientos de las respuestas IIR de los filtros formulados en la fase previa. Estos truncamientos se hacen a partir de razonamientos teórico-prácticos con base en determinados criterios de optimización, y han conducido a la elaboración de fórmulas prácticas de diseño. También se ha aplicado una técnica alternativa de análisis y comprobación de resultados basada en algoritmos genéticos.

Finalmente, se han realizado simulaciones de filtros utilizando tanto las propuestas aquí desarrolladas como las contempladas en trabajos previos, que utilizan funciones spline de exponente real en el diseño, con el fin de comparar sus rendimientos. Para realizar la comparación se ha utilizado una combinación de métricas típicamente usadas en la caracterización de filtros.

Se puede concluir que, además de la consistencia matemática de la totalidad de las funciones construidas, en el sentido de que heredan las propiedades de las funciones spline originales y toman valor real para todo valor de los argumentos, las técnicas propuestas ofrecen mejores prestaciones que sus homólogas, basadas en funciones spline cuyo exponente es un valor real, en relación a las propiedades de los filtros obtenidos con una u otra técnica.

# Abstract

The splines, within the field of polynomials, are a powerful tool that has been used to solve problems in a variety of scientific fields. The main part of this work uses the mentioned polynomials to generate functions that are applied to the formulation of filters in the study of signal processing.

First, a general revision on the evolution of spline functions as well as their applications, from its origins to the present, is made. Initially designed to solve functional interpolation problems more efficiently than those achieved with other polynomial techniques, the basic or natural splines extended their field of application to subjects related to numerical analysis, computer-aided design for the conformation of structures used in the fields of architecture or engineering, statistics and other branches of mathematics.

Splines are first applied to the field of signal processing from the works by Unser where the interpolation process is described as a digital filtering problem. Since then, and taking into account that the splines can be formed by means of convolution operations of rectangular pulses, the splines have widened their fields of application because, over time, new spline functions have been defined in terms of space, time or frequency variables and several variants have been developed for specific purposes.

One of these fields is related to the use of natural splines, defined in the frequency domain, to model transition bands in the formulation of filters. The natural splines were arbitrarily expanded to rational splines, which had some definition problems. In the frequency domain, since they did not have compact support (as opposed to natural splines), and in the time domain, the functions were not real for some time values.

In order to solve the mentioned problems, the main contribution of this work is the generation of different spline families, in the frequency domain, which represent continuous transitions between two natural splines defined in the same domain, which have compact support in the frequency domain and their temporal representations are real for any value of time. These families are called $\alpha$-spline in the frequency domain.

Once these families of functions are generated, we formulate, in a subsequent step, frequency responses of ideal filters where the different frequency bands are smoothly joined by transition bands constructed with $\alpha$-spline functions and their properties are studied.

In all cases, the functions are defined in the domain of the frequencies associated to both continuous and discrete time domains. Temporal representations of the functions of the different families are also obtained.

The last part of this present work, basically more practical, is dedicated to the design of FIR filters generated by truncating of the IIR impulse responses corresponding to the obtained frequency responses. The points or the areas of truncation are calculated by means of designed equations, which are obtained from theoretical-practical reasonings based on several optimization criteria.

Finally, we have performed filter simulations using both the approach developed in this work and the approaches given in previous works (based on $\beta$-spline functions of rational exponent) in order to compare results. These, have been evaluated from the values measured for a set of quality parameters.

It can be concluded that in addition to the mathematical consistency of all the built functions, in the sense of inheriting the properties of the original splines and of being real for any value of their arguments, the proposed filtering techniques, based on functions $\alpha$-spline functions, offer better performance (as inferred from the measured values of the quality parameters) than their counterparts, based on rational exponent $\beta$-spline functions.

# Glosario de abreviaturas y acrónimos

- $\mathcal{P}_n$ : Conjunto de polinomios de grado $n$.
- $L_2(A)$ : Espacio de funciones de cuadrado integrable en $A$.
- $l_2(A)$ : Espacio de secuencias de cuadrado sumables en $A$.
- $L_1(A)$ : Espacio de funciones absolutamente integrables en $A$.
- $l_1(A)$ : Espacio de secuencias absolutamente sumables en $A$.
- TFTC : Transformada de Fourier de tiempo continuo.
- TFTD : Transformada de Fourier de tiempo discreto.
- FIR : Respuesta al Impulso Finita.
- IIR : Respuesta al Impulso Infinita.
- NURBS : Bases spline racionales no uniformes.
- $C^j$ : Conjunto de las funciones derivables hasta el orden $j$.
- dB : decibelio.
- PF : Principalmente plano (Filtro).
- PB : Banda de paso.
- SB : Banda eliminada.
- EIC : Error integral cuadrático.
- OFDM : Multiplexación por división en frecuencias ortogonales.
- FBMC : Multiportadora con bancos de filtros.
- MEICT : Minimización del error integral cuadrático total.
- MEICEP : Minimización del error integral cuadrático sobre PB y SB.

# Índice general

**Resumen** v

**Abstract** vii

**Glosario de abreviaturas y acrónimos** ix

**Índice general** xi

**Lista de figuras** xvii

**Lista de tablas** xxi

**1. Introducción** 1
- 1.1. Motivación de la investigación . . . 1
- 1.2. Objetivos de la investigación . . . 3
- 1.3. Metodología . . . 4
- 1.4. Organización de la memoria . . . 4

**2. Splines: Una retrospectiva** 7
- 2.1. Splines: Definiciones y propiedades . . . 7
  - 2.1.1. Funciones spline: Definición general 1 . . . 8
  - 2.1.2. Funciones spline: Definición general 2 . . . 10
- 2.2. Splines: Aplicaciones . . . 14
- 2.3. Splines e interpolación de funciones . . . 14
  - 2.3.1. Consideraciones generales . . . 15
  - 2.3.2. Interpolación spline frente a interpolación polinómica . . . 16
- 2.4. B-spline en el ámbito del procesado de señales . . . 18
  - 2.4.1. Funciones sinc frente a funciones spline . . . 19
  - 2.4.2. Representación de funciones basada en procesos de convolución 21
  - 2.4.3. Reconstrucción de señales mediante funciones spline . . . 22
- 2.5. Variaciones y generalizaciones de las funciones spline . . . 25
  - 2.5.1. Splines de exponente fraccionario . . . 25
  - 2.5.2. Splines de base fraccionaria . . . 26

2.6. Los spline como funciones ventana . . . . . 28
2.7. Modelado de curvas y superficies . . . . . 31
2.7.1. Diseño de curvas mediante B-spline . . . . . 33
2.7.2. Ampliación al caso de superficies . . . . . 37
2.7.3. NURBS: Bases spline racionales no uniformes . . . . . 38
2.8. Otros campos de aplicación de las funciones spline . . . . . 39
2.9. Funciones spline en el dominio de la frecuencia . . . . . 39

**3. Funciones $\alpha$-spline en el dominio de la frecuencia 45**
3.1. Funciones $\alpha$-spline de tipo I en un entorno de tiempo continuo . . . . . 47
3.1.1. Definición . . . . . 48
3.1.2. Funciones asociadas en el tiempo continuo . . . . . 49
3.1.3. Forma polinómica en el dominio de la frecuencia . . . . . 50
3.2. Funciones $\alpha$-spline de tipo I en un entorno de tiempo discreto . . . . . 53
3.2.1. Definición y desarrollo . . . . . 53
3.2.2. Forma polinómica en el dominio de la frecuencia . . . . . 56
3.3. Funciones $\alpha$-spline de tipo II . . . . . 59
3.3.1. Funciones $\alpha$-spline de tipo II en tiempo continuo: Definición . 60
3.3.2. Funciones asociadas en el tiempo continuo . . . . . 61
3.3.3. Forma polinómica . . . . . 62
3.4. Funciones $\alpha$-spline de tipo II en tiempo discreto . . . . . 63
3.4.1. Definición . . . . . 64
3.4.2. Forma polinómica de las funciones $\alpha$-spline de tipo II . . . . . 65
3.5. Funciones $\alpha$-spline de tipo III . . . . . 67
3.5.1. Funciones $\alpha$-spline de tipo III en tiempo continuo . . . . . 68
3.5.2. Funciones $\alpha$-spline de tipo III en tiempo discreto . . . . . 69
3.6. Tiempo continuo - Tiempo discreto. Consideraciones y comentarios . . 70
3.7. Familias de funciones $\alpha$-spline: Recopilación . . . . . 71

**4. Formulación de filtros mediante funciones $\alpha$-spline 75**
4.1. Consideraciones generales . . . . . 75
4.2. Modelado de bandas de transición . . . . . 81
4.2.1. Filtro modificado con funciones $\alpha$-spline de tipo II . . . . . 81
4.2.2. Respuesta al impulso del filtro digital . . . . . 84
4.2.3. Modelado mediante funciones $\alpha$-spline de tipo I . . . . . 85
4.2.4. Modelado mediante funciones $\alpha$-spline de tipo III . . . . . 88
4.3. Modelado de bandas de transición para filtros analógicos paso-bajo . . 89
4.3.1. Filtro modificado con funciones $\alpha$-spline de tipo II . . . . . 89
4.3.2. Respuesta al impulso del filtro analógico . . . . . 93
4.3.3. Filtro modificado con funciones $\alpha$-spline de tipo I . . . . . 94
4.3.4. Filtro modificado con funciones $\alpha$-spline de tipo III . . . . . 94

4.4. Consideraciones finales sobre la formulación analógica . . . . . 95
4.5. Resumen de las respuestas de los filtros digitales . . . . . 95
4.6. Filtros FIR máximamente planos . . . . . 96

**5. Técnicas de diseño de filtros FIR 99**
5.1. Terminología . . . . . 99
5.1.1. Parámetros de diseño . . . . . 99
5.1.2. Métodos de diseño de filtros . . . . . 100
5.2. Generalidades del diseño de filtros mediante ventanas . . . . . 103
5.3. Funciones ventana . . . . . 107
5.3.1. Funciones ventana de parámetros fijos . . . . . 109
5.3.2. Funciones ventana de parámetros ajustables . . . . . 110
5.4. Funciones $\alpha$-spline en el diseño de filtros FIR . . . . . 115
5.5. Aproximaciones del mínimo error integral cuadrático . . . . . 119
5.5.1. Minimización del error integral cuadrático total (MEICT) . . . 120
5.5.2. Minimización del error integral cuadrático sobre PB y SB . . . 127
5.6. La frecuencia de corte en el error de aproximación . . . . . 133
5.7. Filtros principalmente planos (PF) . . . . . 135
5.8. Diseño de filtros principalmente planos . . . . . 139
5.9. Diseño de filtros con funciones $\alpha$-spline mediante algoritmo genético. . 141
5.10. Parámetros de calidad . . . . . 143
5.11. Ejemplos de diseño de filtros . . . . . 143
5.11.1. Diseño de filtros basado en el procedimiento MEICT . . . . . 144
5.11.2. Diseño de filtros basado en el procedimiento MEICEP . . . . . 145
5.11.3. Diseño de filtros basado en el procedimiento PF. . . . . 147
5.12. Resumen . . . . . 153

**6. Conclusiones y líneas de estudio futuras 155**
6.1. Conclusiones y aportaciones . . . . . 155
6.2. Líneas de estudio futuras . . . . . 159

**A. Familias de funciones $\alpha$-spline y filtros paso-bajo asociados 163**

**B. Derivabilidad y continuidad de la respuesta en frecuencia 167**

**C. Procedimiento de regresión polinómica por mínimos cuadrados 179**
C.1. Problema general de mínimos cuadrados . . . . . 179
C.2. Regresión polinómica . . . . . 180
C.3. Caso particular: Regresión cuadrática . . . . . 180

**Bibliografía 183**

# Lista de figuras


2.1. Bases spline de tercer orden. $\Delta x_k$ arbitraria. . . . . 12
2.2. Bases spline de tercer orden. $\Delta x_k = 1$. . . . . 12
2.3. Interpolación de Lagrange . . . . . 17
2.4. Interpolación spline cúbica . . . . . 18
2.5. Contribuciones de bases spline de tercer orden . . . . . 34

3.1. Pulsos rectangulares para la generación de funciones $\alpha$-spline tipo I. . . . 48
3.2. Función $\alpha$-spline en el dominio de la frecuencia ($\Psi_1^{[p,q]}(\Omega)$). . . . . 52
3.3. Funciones $\alpha$-spline de tipo I ($\Psi_1^{[p,q]}(\omega)$). . . . . 58
3.4. Detalle de la anchura de las funciones $\alpha$-spline de tipo I ($\Psi_1^{[p,q]}(\omega)$). . . . 59
3.5. Funciones rectangulares para la generación de funciones $\alpha$-spline tipo II. 60
3.6. Función $\alpha$-spline en el dominio de la frecuencia ($\Psi_2^{[p,q]}(\Omega)$). . . . . 64
3.7. Funciones $\alpha$-spline de tipo II ($\Psi_2^{[p,q]}(\omega)$). . . . . 67
3.8. Detalle de las funciones $\alpha$-spline de tipo II ($\Psi_2^{[p,q]}(\omega)$). . . . . 68
3.9. Funciones $\alpha$-spline de tipo III ($\Psi_3^{[p,q]}(\omega)$). . . . . 69
3.10. Detalle de funciones $\alpha$-spline de tipo III ($\Psi_3^{[p,q]}(\omega)$). . . . . 70

4.1. Fenómeno de Gibbs . . . . . 78
4.2. Respuesta en frecuencia modificada $H_{md}(\omega)$. . . . . 79
4.3. Derivada de la respuesta en frecuencia modificada $d(H_{md}(\omega))/d\omega$. . . . 80
4.4. Proceso de convolución . . . . . 82
4.5. Respuesta en frecuencia del filtro $H_{md2}(\omega)$ . . . . . 85
4.6. Bandas de transición del filtro ideal modificado . . . . . 86
4.7. Respuesta en frecuencia del filtro $H_{md1}(\omega)$ . . . . . 87
4.8. Bandas de transición del filtro $H_{md1}(\omega)$ . . . . . 88
4.9. Respuesta en frecuencia del filtro $H_{md3}(\omega)$ . . . . . 90
4.10. Bandas de transición del filtro $H_{md3}(\omega)$ . . . . . 90
4.11. Proceso de convolución continuo . . . . . 92

5.1. Especificaciones de diseño de un filtro paso-bajo . . . . . 100
5.2. Detalle especificaciones en la banda de paso . . . . . 101
5.3. Detalle especificaciones en la banda eliminada . . . . . 101

5.4. Convolución y respuesta en frecuencia del filtro (ventana rectangular). . . 105
5.5. Respuesta al impulso filtro ideal y funciones ventana (multiplicación). . . 108
5.6. Convolución y respuesta en frecuencia del filtro (ventana de Hamming). . 109
5.7. Lóbulos principal y secundario de una función $\alpha$-spline. . . . . 116
5.8. Espectros de una función $\alpha$-spline truncada y de la ventana rectangular. . 118
5.9. Espectros de los filtros ideal y basado en función $\alpha$-spline truncados. . . . 118
5.10. Logaritmo del error de aproximación - $M$. Parámetro $\{p + \alpha q\}$. . . . . 122
5.11. Función $F_{m,cot}(x)$ - $x$ . . . . . 124
5.12. Derivada de $F_\alpha(x)$ - $x$. . . . . 126
5.13. Logaritmo del error de aproximación - $\{p + \alpha q\}$. Parámetro $M$. . . . . 129
5.14. Logaritmo error de aproximación - $\{p + \alpha q\}$. $M = 64$ y parámetro $\Delta_d$. . 130
5.15. Logaritmo error de aproximación - $\{p + \alpha q\}$. Parámetro $\Delta_d \cdot M = 8.84$. . 130
5.16. Logaritmo error de aproximación - $\{p + \alpha q\}$. Parámetro $\Delta_d \cdot M = 6\pi$. . . 131
5.17. Logaritmo error de aproximación - $\{p + \alpha q\}$. Parámetro $\Delta_d \cdot M = 10\pi$. . 131
5.18. Curva de regresión polinómica $\rho = p + \alpha q\,(q = 1)$ - $x = \Delta_d \cdot M$. . . . . 133
5.19. Logaritmo del error de aproximación - $\omega_c$. Parámetro $\Delta_d$). . . . . 134
5.20. Logaritmo del error de aproximación - $\omega_c$. Parámetro $\{p, \alpha, q\}$) . . . . . 135
5.21. Respuestas en frecuencia de filtros mediante funciones $\alpha$ y $\beta$-spline . . . . 140
5.22. Respuestas en frecuencia del *Ejemplo de diseño* 1. . . . . 144
5.23. Respuesta en frecuencia de un filtro con minimización en PB y SB . . . . 146
5.24. Respuestas en frecuencia de filtros $\alpha$-spline y $\beta$-spline PF . . . . . 148
5.25. Respuestas en frecuencia del *Ejemplo de diseño* 4 . . . . . 150
5.26. Respuestas en frecuencia del *Ejemplo de diseño* 5 . . . . . 152
5.27. Detalle de respuestas en frecuencia del *Ejemplo de diseño* 5 . . . . . 152

B.1. Funciones paso-alto ($P(x)$). . . . . 176
B.2. Derivada de funciones paso-alto ($dP(x)/dx$). . . . . 177

# Lista de tablas

5.1. Coeficientes de las funciones ventana de parámetros fijos . . . . . 110
5.2. Propiedades de algunas funciones ventana de parámetros fijos . . . . . 111
5.3. Coeficientes para la obtención de $\rho$ por medio de (5.22) . . . . . 132
5.4. Fórmulas de diseño para la longitud $N = 2M + 1$ del filtro . . . . . 140
5.5. Fórmulas de diseño para determinar el orden $\alpha$-spline . . . . . 141
5.6. Parámetros de calidad del *Ejemplo de diseño*1 . . . . . 145
5.7. Parámetros de calidad del *Ejemplo de diseño* 2 . . . . . 146
5.8. Parámetros de calidad del *Ejemplo de diseño* 3 . . . . . 148
5.9. Parámetros de calidad del *Ejemplo de diseño* 4 . . . . . 150
5.10. Parámetros de calidad del *Ejemplo de diseño* 5 . . . . . 153

A.1. Diferentes familias de funciones $\alpha$-spline en frecuencia . . . . . 163

# Capítulo 1

# Introducción

## 1.1. Motivación de la investigación

Este trabajo de investigación se apoya en una herramiente matemática que estudia un tipo particular de funciones polinómicas, las llamadas funciones polinómicas *spline* o funciones polinómicas definidas a tramos sobre diferentes intervalos de la variable de la que dependen. Cualquier función spline se puede generar a partir de combinaciones lineales de un sistema de funciones spline básicas. Estas funciones elementales constituyen las bases de ciertos espacios spline y, por lo tanto, se las suele llamar funciones base B-spline o $\beta$-spline. Son polinomios que se construyen sobre un conjunto de puntos de partida, llamados nodos, de manera que la forma de dichas bases dependen de la distribución de nodos y del orden spline requerido. Las bases spline juegan un papel central en teorías de aproximación y análisis numérico y tuvieron un impacto importante en el desarrollo de la teoría de la transformada *wavelet*. Se utilizan ampliamente en diversas aplicaciones relacionadas con la interpolación y aproximación de funciones. Así, por ejemplo, si las bases están definidas sobre variables espaciales, se usan en el diseño de curvas y superficies para el trazado de diferentes perfiles en diversos campos de la ingeniería. Por otro lado, cuando las bases spline se definen sobre nodos equidistantes, de paso unidad, de una variable temporal, entonces se usan para reconstruir señales temporales a partir de un conjunto de muestras tomadas en los nodos de partida.

Un modo alternativo de construir las diferentes bases spline es por medio de procesos de convolución repetidos de la base spline de orden 1, es decir, una función constante y no nula en el intervalo comprendido entre dos nodos consecutivos, siendo nula fuera de dicho intervalo. La constante es elegida de modo que el área encerrada sea la unidad, y si el conjunto de nodos son los números enteros, que es un caso habitual, entonces la constante debe ser exactamente la unidad. Desde esta perspectiva, se han ido construyendo diversas variantes de las bases spline en el dominio del tiempo proporcionando nuevas herramientas que presentan, en aplicaciones concretas, ciertas ventajas sobre las bases B-spline originales. Ejemplos de ello son las bases spline, que podríamos denominar de

base fraccionaria, propuestas en [1] y [2] que se definen mediante la convolución de dos tipos de pulsos rectangulares, uno de anchura fija y otro de anchura dependiente de un parámetro ajustable, de modo que se puede lograr una transición continua entre dos órdenes spline básicos o naturales.

M. Unser y T. Blu proponen en [3] otra variante de las bases B-spline sobre una distribución uniforme de nodos, a la que se puede nombrar como bases spline de exponente fraccionario, ya que para su construcción parten de la transformada de Fourier de funciones B-spline convencionales, que son potencias naturales de funciones tipo "sinc", cambiando el exponente natural por un exponente fraccionario. Por medio de estas funciones modificadas construyen nuevas familias de bases wavelet.

Una tercera variante de las bases spline se produce cuando se definen en el dominio de la variable frecuencia, dando lugar a las bases B-spline en el dominio de la frecuencia. Las bases de diferentes órdenes se construyen mediante un proceso de convolución repetitivo de la base spline en frecuencia de orden 1, que se define como un pulso rectangular de una anchura dada y área $2\pi$. Estas bases se utilizan para modelar bandas de transición en filtros. Diferentes autores [4], [5], han utilizado las funciones B-spline en frecuencia, para el modelado de bandas de transición sobre filtros FIR. En estos procesos de diseño se trata de determinar el orden spline y el número de términos necesarios del filtro, teniendo en cuenta aspectos restrictivos impuestos por determinados criterios de optimización, con el fin de lograr determinados objetivos preestablecidos.

En muchas ocasiones, el óptimo se obtiene con órdenes spline que son valores reales, en lugar de ser naturales como corresponde a un número determinado de pulsos. Esto les lleva a expandir las bases B-spline en el dominio de la frecuencia a órdenes fraccionales, dando lugar a una nueva familia de bases B-spline en frecuencia. Esta ampliación, en el caso general, presenta dos problemas, el primero es que estas funciones ampliadas dejan de tener un soporte compacto (las funciones son no nulas solo sobre un determinado intervalo cerrado) característico de todas las bases spline originales, el segundo está relacionado con su representación temporal a través de la transformada inversa de Fourier, ya que en la misma aparece un factor de la forma $\mathrm{sinc}^b[f(nT)]$ donde $f(nT)$ representa una función que depende del parámetro que define la anchura de los pulsos en frecuencia y del número de ellos que se van a convolucionar, y $b$ es, exactamente, el número de pulsos que convolucionan. Este factor $\mathrm{sinc}^b[f(nT)]$ no está definido para valores negativos de $[f(nT)]$ cuando el exponente es un número racional.

Los problemas descritos en el anterior párrafo, relativo a las bases spline en el dominio de la frecuencia de orden fraccionario, junto con el desarrollo propuesto en [2] que permite hacer una transición continua entre dos órdenes spline básicos o naturales, constituyen los elementos clave a partir de los cuales se desarrolla el presente trabajo de investigación.

## 1.2. Objetivos de la investigación

Las diferentes variaciones de las bases spline originales o B-spline, definidas tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia, daban lugar a un continuo de bases spline modificadas que presentaban unas caracerísticas intermedias entre dos órdenes spline básicos, pero que en ocasiones no heredaban todas las propiedades de las bases spline naturales. La utilización de las nuevas variantes spline en la resolución de problemas, tiene como fin la mejora de las soluciones, medida por medio de un conjunto de parámetros, respecto a la obtenida usando las bases spline naturales. Con un propósito similar, en este trabajo se pretende desarrollar variantes de bases spline que adquieran, a ser posible, todas las propiedades atribuidas a las bases spline naturales y que su aplicación a determinados sistemas, dote a los mismos de unas mejores prestaciones que las logradas mediante el uso de otras herramientas anteriores aplicadas con el mismo fin. Las nuevas familias de funciones que se presentan, están definidas en el dominio de la frecuencia, y emulan a la familia de bases spline, definidas en el dominio del tiempo, desarrollada por Ibáñez, Santamaría, Pantaleón y Vielva en [2]. Los autores hacen referencia a la familia que proponen como funciones $\alpha$-spline en el dominio del tiempo. Aquí, al igual que ellos, se nombran a las nuevas familias con el atributo de funciones $\alpha$-spline en el dominio de la frecuencia. Estas nuevas bases spline forman un conjunto de funciones que permiten transicionar, de manera continua, entre dos bases spline de órdenes naturales definidas en el dominio de la frecuencia, y presentan las mismas propiedades que las bases B-spline originales. La introducción de las mismas pretende mejorar la formulación de las bases spline citadas en [4] y [5], a las que se ha llamado en esta memoria como bases spline, definidas en el dominio de la frecuencia, de exponente fraccionario. En particular, se hace referencia a las propiedades del soporte no compacto de estas últimas y a su indefinición, en la representación temporal, para valores negativos de la base, cuando el exponente no es un número natural.

Se utilizarán las nuevas familias spline para la formulación, en el dominio de la frecuencia, de bandas de transición sobre filtros ideales, con el propósito de diseñar filtros analógicos y digitales de longitud finita. Se desarrollan técnicas y procedimientos que nos indican cómo truncar las respuestas al impulso de tiempo discreto de longitud infinita, basados en restricciones impuestas por diversos criterios de optimización, para la obtención de filtros.

Mediante la medida de diversos parámetros de calidad, se comprobarán las características de los filtros diseñados respecto a los filtros ideales. Por último, para determinar la bondad de los procedimientos descritos, se compararán las propiedades de los filtros generados, con las de otros filtros diseñados siguiendo la propuesta de diversos autores y que están basados en funciones spline, en el dominio de la frecuencia, ya sean básicas (de exponente natural) o de exponente fraccionario [4] y [5].

## 1.3. Metodología

En primer lugar se ha realizado una amplia recopilación bibliográfica relativa a las diversas bases y funciones spline. Esta búsqueda se ha focalizado en extractar información relativa a definiciones, propiedades y características más relevantes de las diversas variantes definidas, así como a indagar en los diversos ámbitos y campos de estudio donde han sido usadas con éxito.

Teniendo en mente las ideas presentadas en los artículos que motivaron el inicio de este trabajo [2], [4] y [5], y con la perspectiva general adquirida tras la revisión bibliográfica, se procede a la definición de distintos tipos de pulsos rectangulares, dependientes de la frecuencia, que serán los elementos constructivos para la elaboración de las distintas familias de bases $\alpha$-spline que conforman un continuo de funciones que enlazan dos bases spline de órdenes naturales. Se elaboran tres tipos de familias, tanto en el dominio del tiempo continuo como en el discreto, y se estudian las propiedades relativas tanto a continuidad y derivabilidad como al soporte compacto de definición que presentan todas ellas. Se dan representaciones de las mismas en forma cerrada, tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia.

Posteriormente, las distintas familias de funciones $\alpha$-spline definidas se utilizan para modelar bandas de transición sobre filtros. En esta etapa se desarrollan las respuestas en frecuencia y al impulso de los filtros analógicos y digitales paso-bajo formulados mediante el citado procedimiento. De igual modo que en la etapa previa, se dan representaciones en forma cerrada de los filtros modificados tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. Aquí, también, se pone de manifiesto que la formulación analógica muestreada, bajo las condiciones impuestas por el teorema del muestreo, conduce a las mismas respuestas que la formulación totalmente desarrollada en el tiempo discreto.

En último lugar se estudian, tanto de forma teórica como mediante simulaciones numéricas, las consecuencias del truncamiento necesario para la implementación de los sistemas de filtrado de longitud finita, que conllevan deterioros de las prestaciones respecto a la formulación de los filtros ideales modificados, caracterizados por respuestas al impulso infinitas. Se estudian y analizan diferentes supuestos de diseño, bajo ciertos premisas restrictivas, y se presentan varios ejemplos donde se ponen de manifiesto las propiedades alcanzadas por los filtros obtenidos.

## 1.4. Organización de la memoria

El documento se inicia con unas páginas, que forman un bloque al que hemos etiquetado como capítulo 1, donde se describen las líneas generales que han servido de guía para la concepción y el desarrollo de los diferentes componentes que forman este proyecto de investigación.

El resto de la memoria está dividida en capítulos; en cada uno de ellos se abordan aspectos concretos que concatenados conducen a contemplar el trabajo como un todo homógeneo. En el numerado como capítulo 2 se presenta una recopilación histórica de las funciones spline desde sus orígenes eminentemente prácticos, como herramienta de trazado de diferentes tipos de curvas por medio de cintas elásticas, pasando por sus distintas formulaciones matemáticas y siguiendo con distintas variaciones sobre las mismas que se han utilizado con determinados objetivos. En todos los casos, se citan diversos artículos científicos donde son aplicadas diferentes familias spline para la resolución de una amplia variedad de problemas inherentes a distintos campos tanto teóricos como prácticos. Algunas aplicaciones se refieren a problemas de interpolación tanto generales como particulares, asociados al campo del procesamiento de señales, como por ejemplo el tratamiento de imágenes. Otras hacen referencia al diseño de sistemas de filtrado, algunas más tratan de la simulación y modelado de distintos perfiles de curvas y superficies, y finalmente podemos encontrarnos con un gran número de referencias que inciden en la presentación de algoritmos para la resolución numérica de diferentes ecuaciones que son de utilidad en distintos campos de la física y la ingeniería.

En el capítulo siguiente se introducen las diferentes familias de funciones spline, definidas en el dominio de la frecuencia, que denominamos $\alpha$-spline. En concreto se definen 3 tipos de familias. Fundamentalmente las diferencias entre ellas estriban en el tamaño del soporte compacto de las mismas. Se formulan en el dominio de la frecuencia, y como las funciones $\alpha$-spline no son más que funciones polinómicas a tramos, muestran sus buenas propiedades de continuidad y derivabilidad en el intervalo de definición. Se da, también, su representación temporal a través de las transformadas inversas de Fourier, y se describen tanto en el ámbito del tiempo continuo como en el discreto.

El capítulo cuarto se dedica a la formulación de filtros paso-bajo que presentan bandas de transición entre la banda de paso y la banda eliminada. Dichas bandas se generan mediante la convolución en frecuencia de la respuesta en frecuencia ideal y abrupta de un filtro paso-bajo y las funciones $\alpha$-spline introducidas en el capítulo anterior. Se presentan las formulaciones de los filtros utilizando cualquiera de las familias $\alpha$-spline. Se definen tanto filtros analógicos como filtros digitales, dando para cada uno de ellos su respuesta en frecuencia y su respuesta al impulso.

Finalmente, en el último capítulo se presentan procedimientos y técnicas para el diseño de filtros FIR que deben cumplir diversas restricciones. El consiguiente truncamiento de las respuestas al impulso de longitud infinita limita las propiedades teóricas. Para medir el deterioro de las mismas, se hacen diferentes simulaciones con el fin de evaluar los rendimientos de los filtros obtenidos empleando una serie de parámetros que caracterizan el comportamiento de los filtros diseñados. Simultáneamente, se han medido los mismos parámetros sobre filtros diseñados con técnicas similares, basadas en bases spline en el dominio de la frecuencia, de exponente natural o fraccionario, descritos

en los trabajos anteriormente citados, [4] y [5], y que fomentaron la iniciación de esta investigación, con el objetivo de comparar los diferentes comportamientos.

La memoria concluye con una serie de diferentes apartados donde se detallan aspectos tales como el conjunto de conclusiones que se desprenden del trabajo, las aportaciones originales del mismo, y un conjunto de posibles líneas de investigación futuras que pueden continuar o ampliar este trabajo de investigación.

# Capítulo 2

# Splines: Una retrospectiva

El término *spline* proviene de una herramienta del antiguo dibujo técnico la cual consistía en una banda flexible, que podía ser de diferentes materiales, a la que se le adosaban diferentes pesos en zonas concretas de la misma con el objetivo de hacerla pasar por un conjunto de puntos dados (nodos); esto hacía que la banda adquiriese una forma determinada representativa de la curva deseada.

En 1946, Schonberg [6] desarrolló una serie de funciones (funciones base), a partir de las cuales y mediante combinaciones lineales de las mismas, podía simular las curvas obtenidas mediante las bandas flexibles por medio de funciones polinómicas de bajo grado y diferentes entre cada uno de los intervalos impuestos por el conjunto de los puntos dados (nodos). Para representar la suavidad de la banda flexible se requiere que en los puntos de unión, de los diferentes tramos, las funciones polinómicas cumplan determinados requisitos de continuidad y derivabilidad. El grado de los polinomios define el orden del spline, de modo que se habla de splines de orden $q$ cuando los polinomios utilizados en su construcción son, a lo sumo, de grado menor o igual que $(q-1)$. Los más utilizados, dependiendo de las restricciones impuestas en cada caso particular, son los spline lineales (utilizan polinomios de grado 1), y los spline cúbicos (polinomios de grado 3). Este tipo de funciones ha sido tradicionalmente usado para el modelado de funciones arbitrarias existiendo un amplio abanico de publicaciones [6], [7] y [8] que tratan el tema.

## 2.1. Splines: Definiciones y propiedades

Existen varias formas de abordar el problema, pero en esencia las diferencias fundamentales entre ellas se deben a la distinta normalización de las funciones base. Nos centraremos en dos de ellas. La primera, introducida tempranamente por Curry y Schoenberg en [9] y [10], puede describirse en los términos que aparecen a continuación.

### 2.1.1. Funciones spline: Definición general 1

Dado un conjunto de números reales no decrecientes $\{\cdots \leq x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots\}$ llamados nodos, una función spline de orden $n$, sobre el conjunto especificado, es una función $S_n(x)$ que en cada intervalo $(x_l\,,\, x_{l+1})$ es un polinomio de grado menor o igual que $(n-1)$, y que en las proximidades del nodo $x_i$, pertenece a la clase $C^{n-1-\nu_i}$ para todo $i$, donde $\nu_i$ es la multiplicidad del $i$-ésimo nodo, es decir, el número de veces que se repite un nodo en el conjunto de datos de partida. Con el término $C^p$ indicamos el conjunto formado por todas las funciones derivables hasta el orden $p$; es decir

$$C^p = \left\{ h(x) \ / \exists \ h^{(p}(x) = \frac{d^p h}{dx^p} \ \text{ y } \ h^{(p}(x) \in C^0 \right\}$$

siendo $C^0$ el conjunto de las funciones continuas.

La construcción de las diferentes funciones spline se realiza mediante una superposición de unas funciones elementales o básicas, denotadas B-spline, y que se describen como sigue.

#### Funciones base: Definición 1

Dado un conjunto de $(n+1)$ valores reales no decrecientes $\{x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$, el B-spline de orden $n$ sobre el conjunto de nodos especificado se define como

$$M_n(x; \{x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}) = M_n(x) = [x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n]\, M(x, x_i)\,. \qquad (2.1)$$

En la expresión (2.1) aparecen los siguientes elementos; en primer lugar la función $M(x, x_i)$, definida como $M(x, x_i) = n\,(x_i - x)_+^{n-1}$, siendo

$$x_+^j = \begin{cases} x^j, & \text{si} \quad x \geq 0, \\ 0, & \text{si} \quad x < 0, \end{cases}$$

conocida en la literatura anglosajona como *one-sided power function*.

En segundo lugar aparece la expresión $[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n]\, M(x, x_i)$ denominada la $n$-ésima diferencia dividida de la función $M(x, x_i)$, donde la $n$-ésima diferencia dividida de una función genérica $g(t)$, sobre los nodos especificados $\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, expresada como

$$[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n]\, g(t)\,,$$

se calcula mediante las relaciones de recurrencia que siguen; así, la diferencia dividida de orden cero, para cualquier elemento, coincide con el valor de la función en dicho punto, por tanto podemos escribir

$$[x_k]\, g = g(x_k) \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n,$$

y las sucesivas diferencias divididas se construyen sobre las anteriores. Las de primer orden, que involucran a dos elementos consecutivos cualquiera, son

$$[x_k, x_{k+1}]\, g = \tfrac{g(x_k)-g(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, (n-1),$$

y las de segundo orden, que actúan sobre tres elementos, se forman

$$[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]\, g = \tfrac{[x_k, x_{k+1}]g - [x_{k+1}, x_{k+2}]g}{x_k - x_{k+2}} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, (n-2),$$

y así sucesivamente. En forma general, podemos poner

$$[x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{k+l}]\, g = \frac{[x_k, \cdots, x_{k+l-1}]\, g - [x_{k+1}, \cdots, x_{k+l}]\, g}{x_k - x_{k+l}}, \tag{2.2}$$

donde $l = 0, 1, 2, \cdots, n$ indica el orden de la diferencia dividida y $k = 0, 1, 2, \cdots, (n-l)$ indica el elemento inicial de la diferencia dividida, para cada valor de $l$.

Teniendo en cuenta (2.2), la función base spline de orden $n$, dada por (2.1), puede expresarse de forma explícita [11] como

$$M_n(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{n\,(x - x_k)_+^{n-1}}{\lambda(x_k)}, \tag{2.3}$$

donde

$$\lambda(x_k) = (x_k - x_0) \cdot \cdots \cdot (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \cdot \cdots \cdot (x_k - x_n).$$

Como se indica en [7], las nociones de diferencia dividida y de base spline pueden ampliarse al caso en el que algunos de los nodos sean coincidentes.

Las bases spline, definidas de esta forma, presentan un conjunto de propiedades de interés, como se recogen en [11], entre las cuales podemos citar las siguientes:

1.- Son funciones continuas, definidas positivas y tienen un soporte finito o compacto, es decir,

$$M_n(x; \{x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}) \begin{cases} > 0 & \text{si} \quad x \in (x_0, x_n), \\ = 0 & \text{si} \quad x \notin (x_0, x_n). \end{cases} \tag{2.4}$$

2.- El área encerrada bajo las funciones base es la unidad,

$$\int_{x_0}^{x_n} M_n(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} M_n(x)\, dx = 1. \tag{2.5}$$

Estas dos propiedades las hacen candidatas idóneas para poder ser utilizadas como funciones densidad de probabilidad, donde su esperanza y su varianza, que dependen de la distribución de nodos que intervienen en su definición, se calculan mediante las

expresiones

$$E[x] = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k, \tag{2.6}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}\sum_{k>j}(x_k - x_j)^2. \tag{2.7}$$

3.- Son el núcleo entre la $n$-ésima diferencia dividida y la $n$-ésima derivada de una función real, resultado conocido como teorema de Peano y que se expresa en la forma

$$[x_0, \cdots\cdots, x_n] f(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x_n} M_n(x) f^{(n}(x)\, dx. \tag{2.8}$$

### 2.1.2. Funciones spline: Definición general 2

Una segunda definición, más intuitiva, puede enunciarse, de acuerdo con [12], del modo que aparece a continuación.

Dada una función cualquiera $g(x)$ definida en un intervalo [a, b] y una secuencia de $(n+1)$ puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, entonces $S(x)$ es una función spline de orden $m > 1$ si cumple las siguientes condiciones:

a) En cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, para $k = 1, 2, \cdots, (n-1), n$, $S(x)$ es un polinomio de grado $(m-1)$, y se escribe como $S_k(x)$.

b) $S(x_k) = g(x_k) \quad \forall k = 0, 1, \cdots, n-1, n.$

c) Las primeras $(m-1)$ derivadas deben ser continuas en los puntos de unión de los diferentes intervalos, es decir,

$$S_{k+1}^{(l}(x_k) = S_k^{(l}(x_k) \quad \forall k = 1,\, 2,\, \cdots,\, (n-1) \quad \text{y} \quad l = 1,\, 2,\, \cdots,\, (m-1). \tag{2.9}$$

En [6], I.J. Schoenberg puso de manifiesto que todo spline de orden $m$, definido por el conjunto de $(n+1)$ nodos $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, especificados en el intervalo $[a, b]$, y tal que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, puede ser expresado como una combinación lineal de un conjunto de funciones base en la forma

$$S(x) = \sum_{i=-m+1}^{n-1} c_i N_{i,m}(x), \tag{2.10}$$

donde $N_{i,m}(x)$ es la denominada función spline básica, o simplemente función B-spline, de orden $m$ asociada al conjunto de $(m+1)$ nodos dados por $x_i$, $x_{i+1}$, $\cdots$, $x_{i+m}$.

**Funciones base: Definición 2**

La función spline básica que aparece en (2.10) viene definida como

$$N_{i,m}(x) = (x_{i+m} - x_i)\,[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+m}]\,(\cdot - x)_+^{m-1}, \tag{2.11}$$

donde $[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+m}]\,(\cdot - x)_+^{m-1}$, indica que la diferencia dividida debe calcularse, para un $x$ cualquiera, sustituyendo el punto por los diferentes nodos involucrados en la definición. La base spline anterior, de una forma más compacta, puede escribirse

$$N_{i,m}(x) = (x_{i+m} - x_i) \sum_{j=0}^{m} \frac{(x - x_{i+j})_+^{m-1}}{\lambda_i(x_{i+j})}, \tag{2.12}$$

siendo el denominador de la misma

$$\lambda_i(x_{i+j}) = (x_i - x_{i+j}) \cdot (x_{i+1} - x_{i+j}) \cdots (x_{i+j-1} - x_{i+j}) \cdot (x_{i+j+1} - x_{i+j}) \cdots (x_{i+m} - x_{i+j}).$$

La base spline dada por (2.11) o (2.12) no es más que una renormalización de la base dada por (2.1) y tiene como objetivo obtener relaciones de recurrencia entre bases de distintos órdenes. En efecto, para la secuencia de $(n+1)$ puntos $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n$, la base de orden $n$, $N_n(x)$, donde se ha suprimido el subíndice $i$ en $N_{i,m}$ ya que se ha escogido todo el conjunto de nodos, empezando en $i = 0$ y particularizando en $m = n$ para tomar el orden spline máximo, se relaciona con el máximo orden spline de la definición previa $M_n(x)$, mediante la expresión

$$M_n(x) = \frac{n}{x_n - x_0} N_n(x),$$

y si los nodos son la secuencia de los números enteros o están distribuidos de manera que la diferencia entre dos consecutivos cualesquiera sea la unidad, entonces las funciones base coinciden, es decir, se cumple que $M_n(x) = N_n(x)$. La notación $\beta_{i,m}(x)$ ó $\beta^{i,m}(x)$ en lugar de $N_{i,m}(x)$ es bastante común.

En la figura 2.1 se muestran las diferencias entre las dos formas de bases *spline* en el caso particular de bases de tercer orden, $M_3(x)$ y $N_3(x)$, para la distribución concreta de nodos $\{x_0 = -1, x_1 = 0.5, x_2 = 0.75, x_3 = 1\}$. Por otro lado, si la distribución de nodos es tal que sus elementos están equiespaciados, con separación unitaria entre ellos, entonces ambas representaciones coinciden y son simétricas. En la figura se muestran las mismas bases anteriores para la distribución de nodos $\{x_0 = -1.2, x_1 = -0.2, x_2 = 0.8, x_3 = 1.8\}$, que son coincidentes, como resulta evidente.

Si queremos que la representación de $S(x)$ dada por (2.10) sea única hay que introducir nodos extra tanto a la izquierda de $x_0$ como a la derecha de $x_n$ siempre que el orden sea mayor que 1. Esto se debe a que al valor de la función, en el intervalo de partida, contribuyen funciones base que se extienden más allá de dicho intervalo y que

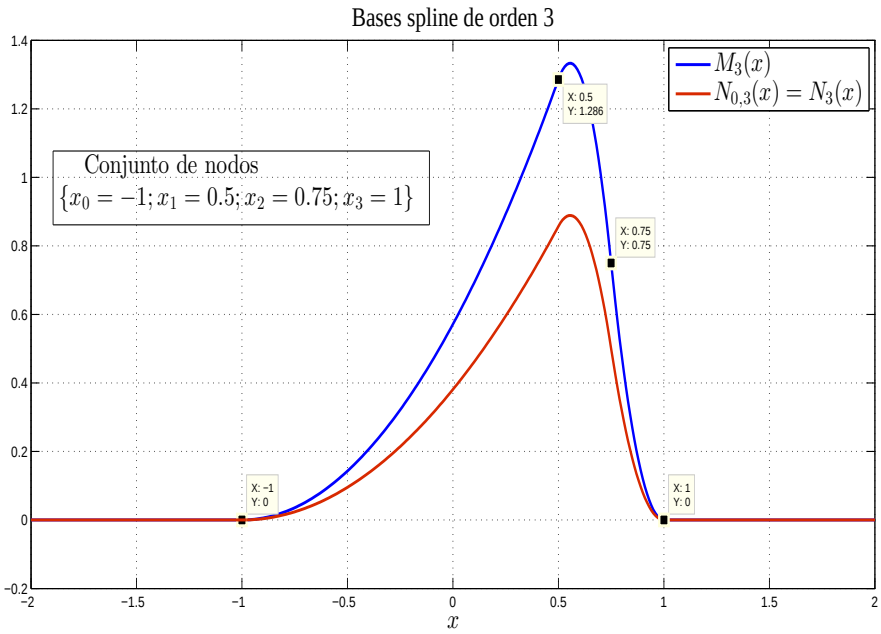


**Figura 2.1** – Bases spline de tercer orden. $\Delta x_k$ arbitraria.

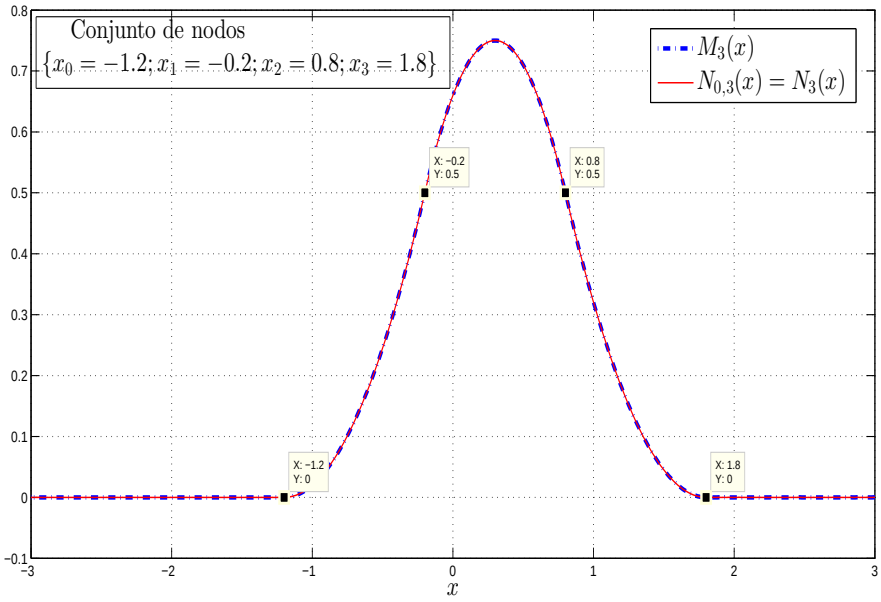


**Figura 2.2** – Bases spline de tercer orden. $\Delta x_k = 1$.

necesitan nodos adicionales para su definición. En concreto, el número de nodos extra depende del orden spline que se esté utilizando y viene dado por $2(m-1)$ de los cuales la mitad son menores que $a$ y la otra mitad son mayores que $b$. Los nodos situados a la izquierda del intervalo se nombran $x_{-m+1}$, $x_{-m+2}$, $\cdots$, $x_{-1} < a$, y los situados a la derecha se nombran $x_{n+1}$, $x_{n+2}$, $\cdots$, $x_{n+m-1} > b$.

Algunas propiedades relevantes de las funciones base descritas por (2.11) o (2.12) son:

1.- Son definidas positivas, es decir, $N_{i,m}(x) \geq 0 \ \forall x$.

2.- Presentan un soporte compacto, entendido como que la función es no nula, solo en un intervalo cerrado, es decir,

$$N_{i,m}(x) = 0, \text{ si } \quad x \notin [x_i, x_{i+m}].$$

3.- Igualdad de la función y sus derivadas en los extremos de su soporte, que representamos por

$$N_{i,m}^{(l}(x_i) = N_{i,m}^{(l}(x_{i+m}) = 0, \ \ l = 0, 1, \cdots, (m-2).$$

Implícitamente la expresión anterior nos dice, por ejemplo, que si $m = 1$ las funciones base toman el mismo valor en los extremos de su soporte, pero no son continuas en los mismos, y si $m = 2$ las funciones base toman el mismo valor en los extremos de su soporte, siendo continuas pero no derivables en aquéllos.

4.- De la definición (2.11) se puede establecer una relación recursiva que obtiene una base spline de orden $m$ a partir de dos bases de un orden inferior $(m-1)$. De acuerdo con [7], dicha relación se puede escribir en la forma

$$N_{i,m}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+m-1} - x_i} N_{i,m-1}(x) + \frac{x_{i+m} - x}{x_{i+m} - x_{i+1}} N_{i+1,m-1}(x), \tag{2.13}$$

$$N_{i,1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{si} \quad x \notin [x_i, x_{i+1}]. \end{cases} \tag{2.14}$$

5.- La secuencia de las funciones base spline $\{N_{i,m}\}_{i=-m+1}^{n-1}$ suman 1 en el intervalo $[a, b]$, o en términos matemáticos, dicha secuencia proporciona una partición de la unidad en dicho intervalo

$$\sum_{i=-m+1}^{n-1} N_{i,m}(x) = 1, \ \ x \in [a, b]. \tag{2.15}$$

En general dada una distribución de nodos, siempre podemos encontrar una secuencia de bases spline de orden $m$ que formen una partición de la unidad entre dos puntos cualquiera de la citada distribución. Así, dada una distribución de nodos cualquiera,

$$\{\cdots x_{-1}, x_1, x_2, \cdots, x_{r-1}, x_r, x_{r+1}, \cdots, x_{s-1}, x_s, x_{s+1}, \cdots,\},$$

se verifica que

$$\sum_{i=r+1-m}^{s-1} N_{i,m}(x) = 1, \quad \forall x \in (x_r, x_s)\,. \tag{2.16}$$

En las secciones próximas, dados los principios constructivos de las funciones *spline* iniciales, se van a describir distintos usos de las mismas y diferentes variantes de las funciones *spline* básicas, que se han ido desarrollando a lo largo de la historia así como sus aplicaciones.

## 2.2. Splines: Aplicaciones

Sucesivas variaciones, ampliaciones e interpretaciones de los spline originales, han hecho de ellos una herramienta poderosa que ha sido y es utilizada en amplios campos de la ciencia y la tecnología. Algunos campos de aplicación son el estudio de curvas y superficies generadas por ordenador para su aplicación en diferentes sectores del diseño [13] y [14], la interpolación a partir de un conjunto de datos para predecir la evolución de una determinada variable de interés o para la reconstrucción de diversas señales en ámbitos diversos [15] y el diseño de caracteres en las imprentas actuales, así, por ejemplo, las fuentes que usa TEX se generan mediante splines [16]. También se usan los spline en el tratamiento o manipulación de señales en el campo de las telecomunicaciones [17], [18], en los problemas de resolución numérica de ecuaciones diferenciales [19] con determinadas condiciones en las fronteras y en otros diversos ámbitos que se extienden desde la simulación de acelerómetros MEMS (Sistemas Microelectromecánicos) [20], hasta la compensación de la característica no lineal (debido a la temperatura o a fenómenos de histéresis) de sensores basados en la propiedad de magnetoresistencia gigante que limitan su uso en numerosas aplicaciones industriales [21].

De las funciones *spline* y de sus variaciones, así como de alguna de las aplicaciones citadas, se hace una recopilación en las siguientes secciones.

## 2.3. Splines e interpolación de funciones

El proceso de hacer pasar una curva por un conjunto de puntos dados se denomina interpolación. Debido a su estructura constructiva, los spline presentan un conjunto de características que los hacen más apropiados para el desarrollo de técnicas de interpolación que la herramienta polinómica general. En primer lugar se va a describir el planteamiento general del problema de interpolación, para luego hacer uso de los spline naturales como herramienta que resuelve el problema de manera eficaz.

### 2.3.1. Consideraciones generales

Lo más probable es que el conjunto inicial de puntos provenga de la toma de datos de un fenómeno real determinado, en cuyo caso debemos tener un conocimiento previo sobre el proceso y, en consecuencia, sabremos algo de la función que relaciona las variables que describen el fenómeno. Esto nos permite optar por el método de interpolación que mejor nos detalle la realidad; en cambio, si no tenemos información previa sobre el fenómeno que subyace a nuestros datos, entonces un método concreto de interpolación no es mejor ni peor que cualquier otro. En esencia el proceso se inicia con la disposición de un conjunto de $N$ pares de valores $(x_j, y_j)$ y busca una función $F(x)$ que puede escribirse en la forma

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \Psi_k(x),$$

donde las funciones $\Psi_k(x)$ pertenecen a un conjunto cualquiera de funciones base, de los diferentes que se pueden utilizar, y de las que dependerá, en gran medida, la forma de la función entre los distintos puntos. Los términos $c_k$ representan el conjunto de coeficientes de ponderación necesario para determinar la combinación lineal que nos proporciona la función buscada $F(x)$. Ésta debe verificar

$$F(x_j) = y_j, \;\; \forall\, j = 1, 2, \cdots, N.$$

Lo que diferencia a los distintos métodos de interpolación es la elección del conjunto de funciones que forman la base de la representación. Remontándonos atrás en el tiempo, el periodo final del siglo XVII fue clave para el desarrollo de diferentes técnicas de interpolación. Isaac Newton puede ser considerado el pionero de la interpolación moderna al tratar, en 1675, sobre el problema de una curva geométrica que debe pasar a través de un conjunto de puntos dado, que representa la piedra angular del desarrollo de las técnicas de interpolación. Posteriormente, durante el siglo XVIII y principios del XIX grandes científicos, entre los que podemos destacar cronológicamente a Joseph Louis de Lagrange, Karl Friedrich Gauss y Charles Hermite entre otros, fueron perfeccionando y ampliando dichas técnicas. J. F. Encke, discípulo de Gauss, unas dos décadas más tarde de asistir a una conferencia sobre interpolación impartida por su maestro, publicó un trabajo donde se muestran diversas fórmulas, una de las cuales es conocida, hoy en día, como la fórmula de Newton - Gauss, que representa la base de las posteriores teorías sobre el muestreo y la reconstrucción de señales.

Es en esta misma época cuando se perfeccionan diferentes técnicas de interpolación basadas en el uso de polinomios. La utilización de polinomios tiene ventajas evidentes, su fácil manipulación y su suave variación, entre los diferentes puntos, debido a sus propiedades de continuidad y derivabilidad son algunas de ellas, pero pronto se descubrió que su aplicación a los problemas de interpolación era limitada, ya que también tienen in-

convenientes, sobre todo si el grado del polinomio es elevado. El principal inconveniente es que presenta una lenta convergencia, entendida esta propiedad como que se necesitan muchos pares de puntos para conseguir una buena aproximación a una función. El aumento de los pares de puntos hace que se incremente el grado del polinomio interpolador, lo que provoca unas características oscilatorias indeseables que conllevan desviaciones excesivas en entornos cercanos a algunos de los puntos que forman el conjunto de partida [22]. Este comportamiento oscilatorio se denomina fenómeno de Runge.

Todo lo expuesto, desde una perspectiva histórica, viene recogido por F. Meijering en [23]. En el artículo se describe, detalladamente, la evolución y utilización de diferentes técnicas interpolatorias.

### 2.3.2. Interpolación spline frente a interpolación polinómica

En esta sección vamos a poner de manifiesto las ventajas, respecto al comportamiento oscilatorio de los polinomios, de la interpolación spline frente a la interpolación polinómica. Para ello vamos a presentar un ejemplo de aproximación a una función mediante el procedimiento de interpolación basado en el método clásico conocido como método de Lagrange (parece ser que el método de aproximación fue descrito por E. Waring, 16 años antes de que lo hiciese Lagrange), el cual se puede formular en los siguientes términos. Dada una función real $g(x)$ definida en un cierto intervalo de la recta real $[a, b]$ y un conjunto de $(n+1)$ puntos $x_0, x_1, \cdots, x_n$, pertenecientes a dicho intervalo, podemos determinar un polinomio $P_n$ de grado $n$, es decir, $P_n \in \mathcal{P}_n$, donde $\mathcal{P}_n$ es el conjunto de los polinomios de grado $n$, que interpole el conjunto de datos y se aproxime a la función dada. Dicho polinomio debe cumplir,

$$P_n(x_j) = g(x_j), \ \forall\ j = 0, 1, 2, \cdots n,$$

y se puede escribir como

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} g(x_j)\, L_{n,j}(x), \tag{2.17}$$

donde el $j$-ésimo polinomio de Lagrange de grado $n$ es

$$L_{n,j}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \ \forall\ j = 0, 1, 2, \cdots, n, \tag{2.18}$$

que verifica

$$L_{n,j}(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad i = j, \\ 0, & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Como se deduce de las expresiones anteriores, la aproximación es mejor a medida que el número de puntos elegido crece, pero a su vez, al aumentar el número de puntos

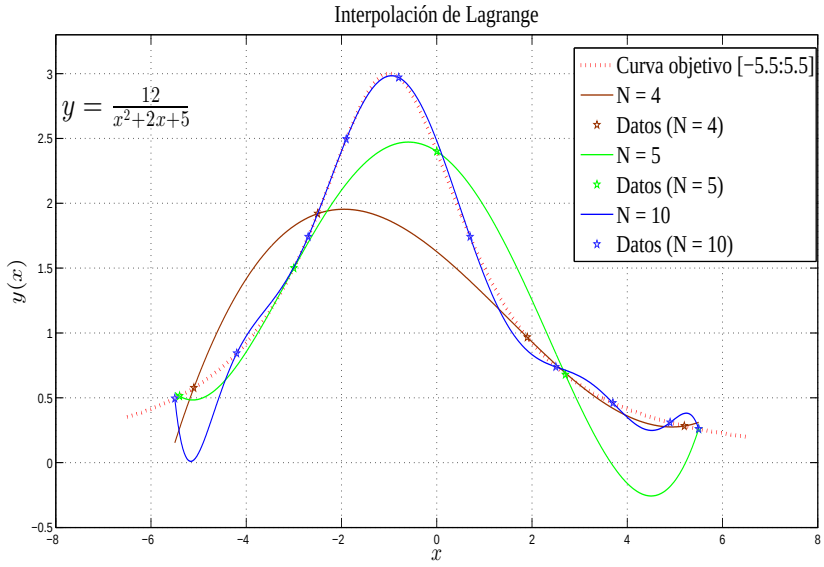


**Figura 2.3** – Interpolación de Lagrange

el grado del polinomio crece del mismo modo, acentuándose así el comportamiento oscilatorio [24].

Como ejemplo ilustrativo, vamos a buscar el polinomio que nos aproxime la función

$$g(x) = \frac{12}{x^2 + 2x + 5}$$

mediante el método de interpolación de Lagrange utilizando 4, 5 y 10 puntos, respectivamente, pertenecientes al intervalo $[-5.5, 5.5]$. Los resultados se muestran en la figura 2.3.

De la observación de la figura 2.3 se pueden extraer las siguientes conclusiones:

a) Con cuatro puntos el ajuste es malo y el polinomio de tercer grado se limita a pasar por los puntos dados.

b) Con cinco puntos se tiene un cierto parecido y el polinomio de cuarto grado se parece a la función solo entre los dos primeros puntos.

c) Con diez puntos, aunque el ajuste es aceptable, el polinomio de noveno grado presenta el fenómeno oscilatorio, comentado anteriormente.

Podemos eliminar el comportamiento oscilatorio si realizamos la aproximación a la función anterior mediante la técnica de interpolación spline [25], es decir, utilizando polinomios distintos de bajo grado, entre cada dos puntos consecutivos del conjunto de puntos de partida de la función de referencia. Utilizando los spline cúbicos (polinomios de grado 3 entre nodos consecutivos), en idénticas condiciones, obtenemos los resultados que se muestran en la figura 2.4. Como puede observarse en dicha gráfica el ajuste es casi perfecto cuando tomamos 10 nodos, habiendo desaparecido el fenómeno oscilatorio.

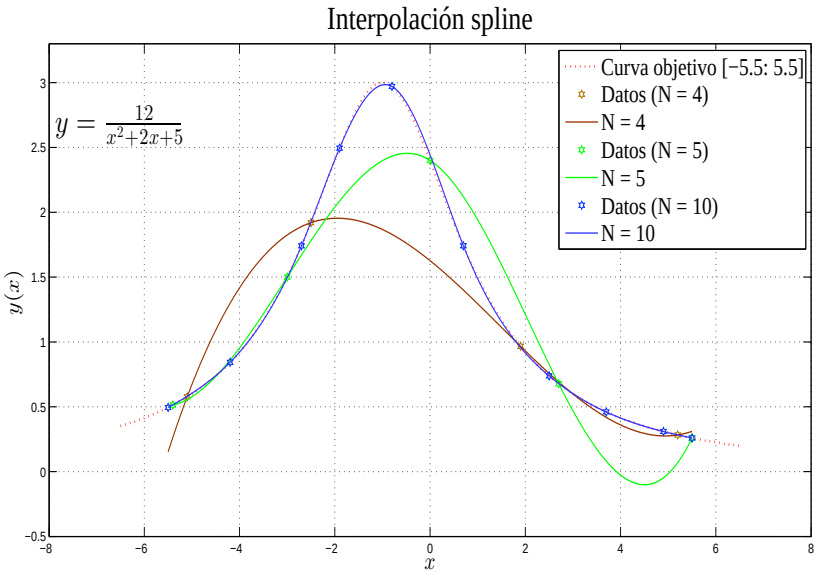


**Figura 2.4** – Interpolación spline cúbica

## 2.4. B-spline en el ámbito del procesado de señales

En el artículo [26] publicado en 1915, Whittaker puso de manifiesto que dados los valores de una función genérica $f(x)$, correspondientes a un conjunto infinito de valores equidistantes de su argumento $x_0, x_0 \pm \lambda, x_0 \pm 2\lambda, \cdots$, donde $\lambda$ representa la distancia entre dos valores consecutivos cualesquiera, entonces, si a partir de los pares de valores $(x_k, f(x_k))$ formamos una tabla con el propósito de realizar una interpolación, existen, además de $f(x)$, muchas otras funciones que conducen exactamente a la misma tabla de valores. Whittaker, tomando como referencia la fórmula de Newton - Gauss para interpolación, que aparece en el artículo de Encke [27] y que, actualmente podemos decir, representa la base de las teorías posteriores sobre muestreo y reconstrucción de señales, se dispuso a contestar a la pregunta de qué función, de aquellas que daban lugar a la misma tabla de valores, se escondía bajo el conjunto de datos. Demostró que, si se cumplen ciertas condiciones, la función que subyacía bajo la tabla está representada por la que él llamo la función cardinal

$$C(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(x_0 + j\lambda) \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{\lambda}(x - x_0 - j\lambda)\right]}{\frac{\pi}{\lambda}(x - x_0 - j\lambda)}, \tag{2.19}$$

la cual verifica que $C(x_0 + j\lambda) = f(x_0 + j\lambda)$ para cualquier $j \in \mathbb{Z}$. Algunas de las conclusiones que se citan en el artículo se refieren a las propiedades destacables de dicha función; en concreto, la función no presenta singularidades y no tiene componentes de periodos menores que $2\lambda$. Además, en contraste con el polinomio interpolador de

Lagrange (2.17) que puede diverger en determinados supuestos, la función de interpolación resultante converge a la función original en cualquier punto del intervalo donde la función sea continua y acotada. Shannon, poco tiempo después de la publicaciones de Whittaker, [28] y [29] sobre las propiedades de las series cardinales, reconoció su enorme importancia en el campo de las comunicaciones y formuló el conocido teorema del muestreo, que publicó pasados varios años [30], y enunció de la forma siguiente:
"*Si una función $f(t)$ no contiene frecuencias superiores a $\nu$ hercios, está completamente determinada dando sus valores en una serie de puntos separados por $1/(2\nu)$ segundos*".

Al intervalo de muestreo crítico $T = 1/(2\nu)$ le denominó intervalo de Nyquist correspondiente a la banda $\nu$, en honor a Nyquist, debido a que éste había reconocido la importancia fundamental de dicho intervalo en los procesos relacionados con la telegrafía. Describiendo el proceso de reconstrucción de una señal observó que:
" Hay una y solo una función cuyo espectro se limite a una banda de anchura $\nu$ y que pase por un conjunto de valores dados en puntos muestrales separados $T = 1/(2\nu)$ segundos".

La función puede reconstruirse a partir de las muestras usando un pulso del tipo $\text{sen}(2\pi\nu t)/(2\pi\nu t)$. Matemáticamente, si $a_k = f(kT)$ es la $k-$ésima muestra, entonces la función $f(t)$ se representa por

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{\text{sen}\,\pi(2\nu t - k)}{\pi(2\nu t - k)}. \tag{2.20}$$

Como se desprende de lo mencionado en los párrafos previos, el teorema del muestreo consta de dos partes bien diferenciadas; la primera establece que la función limitada en banda está totalmente determinada por sus muestras, y la segunda nos dice cómo reconstruir la función utilizando dichas muestras.

### 2.4.1. Funciones sinc frente a funciones spline

Conocidos los valores de una función en un gran número de puntos (o dado un conjunto equivalente de muestras), puede resultar prohibitivo considerar todos o un gran número de dichos valores si queremos calcular el valor de la función en otro punto desconocido, utilizando los métodos clásicos de interpolación polinómica. Fijar el número de valores a tener en cuenta en el proceso, conlleva fijar el grado del polinomio utilizado en cada uno de los intervalos interpolados; además e independientemente del grado, la función interpolante resultante no será, en general, continuamente diferenciable en los puntos de transición. Para resolver este problema se propusieron diferentes fórmulas prácticas con el fin de disponer de funciones interpolantes que facilitasen la resolución de distintos y variados tipos de problemas; fue esta misma necesidad, de encontrar métodos prácticos de interpolación, la motivación que guió a Schoenberg para abordar el mismo asunto. Observó, [6] y [31], que para cada una de las expresiones prácticas propuestas,

aplicadas a datos equidistantes, que sin pérdida de generalidad él supuso la unidad, existía una función real y par, $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, en términos de la cual la fórmula podía ser escrita como

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \Phi(t - k), \tag{2.21}$$

donde $\Phi$, llamada función base, determina las propiedades de la interpolación resultante, y cuyas propiedades se ponen de manifiesto cuando aplicamos la expresión a la secuencia impulso, es decir $a_0 = 1$, $a_k = 0 \ \forall k \neq 0$. Por analogía con la serie cardinal de Whittaker, Schoenberg se refirió a la expresión general como una fórmula de tipo cardinal, pero observó que la función base del tipo $\Phi(t) = \text{sen}(\pi t)/(\pi t)$ no era la adecuada para propósitos de cálculo debido a su ritmo de decaimiento excesivamente lento. Buscando una función sustitutiva, que fuese continuamente diferenciable hasta un orden determinado, indagó sobre el suavizado de las curvas obtenidas mediante el uso de funciones *spline* en los campos de la ingeniería mecánica y de la arquitectura (en aquella época esencialmente se utilizaban los spline cúbicos); a partir de esa idea introdujo la noción de spline matemático de cualquier orden, en un sentido similar al descrito en los diferentes apartados de la sección 2.1 que trata sobre la definición genérica de funciones spline. A continuación demostró, teniendo en cuenta la necesidad de paridad de la función base, que cualquier curva (función) spline de orden $n \geq 1$, puede ser representada de modo único en la forma

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k M_n^*(t - k) \tag{2.22}$$

para valores apropiados de los coeficientes $a_k$, y siendo $M_n^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función par de grado $(n-1)$ llamada base spline (B-spline)[1] y que puede escribirse como

$$M_n^*(t) = \frac{1}{(n-1)!} \delta^n (t_+^{n-1}) \tag{2.23}$$

donde $\delta^n$ es el $n-$ésimo operador diferencia central definido por recurrencia, como se describe a continuación. Sea una función $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida $\forall t$ real, entonces se define el operador $\delta$ de orden 1 como sigue:

$$\delta[\Phi(t)] = \Phi(t + 1/2) - \Phi(t - 1/2), \tag{2.24}$$

mientras que el de orden $n > 1$ verifica la siguiente ley:

$$\delta^n[\Phi(t)] = \delta^{n-1}[\Phi(t + 1/2)] - \delta^{n-1}[\Phi(t - 1/2)]. \tag{2.25}$$

[1] En diversos textos la base spline $M_1^*$, que es un pulso rectangular de altura unidad y base unidad localizada en el intervalo $(-1/2, 1/2)$, se nombra como $\beta_0$ o $\beta^0$.

Conviene recordar aquí que la función B-spline, originalmente, se definió en forma de integral de Fourier inversa en la forma

$$M_n^*(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\text{sen}(\frac{\omega}{2})}{\frac{\omega}{2}}\right)^n e^{j\omega t}d\omega, \tag{2.26}$$

que es nula para $|t| > n/2$.

Citar, por último, que la base spline, de orden $n$, dada mediante la expresión (2.23), coincide con la base spline dada por (2.3) en el epígrafe 2.1.1 y por (2.12) en el epígrafe 2.1.2 si el conjunto de nodos sobre los que se construye viene dado por la secuencia $\{-n/2, -n/2+1, \cdots, n/2-1, n/2\}$, que como puede observarse es un conjunto de números reales donde la diferencia entre dos consecutivos cualesquiera es la unidad, condición bajo la cual se cumplía que $M_n(x) = N_n(x)$.

### 2.4.2. Representación de funciones basada en procesos de convolución

Aunque existen diferencias significativas entre los teoremas de Shannon y Schoenberg, también presentan similitudes que conviene poner de manifiesto. Ambos teoremas tratan con funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen una serie de propiedades y para su representación utilizan una mezcla de convolución entre un conjunto de coeficientes $a_k$ y algún tipo de función base o núcleo $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en la forma

$$f_T(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\ \varphi(t/T - k), \tag{2.27}$$

en la que el subíndice $T$ (intervalo de muestreo) indica que estamos tratando con las muestras $T-$equidistantes, $s_k$ de una función inicial $f(t)$. En el caso de Shannon, las funciones $f(t)$ presentan un ancho espectral limitado, los coeficientes son las mismas muestras, $s_k = a_k = f(kT)$ y el núcleo es la función $\text{sinc}(t) = \text{sen}(\pi t)/(\pi t)$, mientras que en el teorema de Schoenberg, las funciones $f(t)$ se representan mediante polinomios a tramos de grado $n$ que se unen suavemente en los diferentes intervalos, marcados por los nodos de partida, y los coeficientes $a_k$ se determinan a partir de las muestras $s_k$ y el núcleo es la función B-spline de grado $n$.

La publicación de ambos artículos tuvo mucho impacto en las decadas posteriores, pero desafortunadamente en campos diferentes de aplicación. El teorema de Shannon tuvo amplio eco en ingeniería de comunicaciones, [32], [33], en aplicaciones de análisis y procesamiento de señales, [34], [35], [36], y también, en menor grado, en análisis numérico, [37], [38], [19], mientras que el trabajo de Schoenberg, transcurrido un buen lapso de tiempo desde su publicación, encontró acomodo en teorías de aproximación, [39], [40], interpolación en una o varias variables, [41], [42], análisis numérico, [43], estadística [44], [45], y otras ramas de las matemáticas, [46].

### 2.4.3. Reconstrucción de señales mediante funciones spline

Es un hecho bien conocido de la teoría clásica de interpolación que en determinados supuestos es preferible o incluso necesario aplicar, en primer lugar, alguna transformación sobre el conjunto de datos originales antes de hacer uso de alguna herramienta determinada de interpolación. Tal transformación debe proporcionar unos valores intermedios tales que el proceso de interpolación subsiguiente sea lo más simple posible. Respecto a la interpolación basada en la convolución utilizando B-spline, la dificultad no radica en la operación de convolución, sino que está en la determinación previa de los coeficientes $a_k$.

Para interpolar mediante una función spline una serie de datos se necesitan dos procedimientos. El primero, llamado directo, tiene como objetivo determinar los coeficientes de la combinación lineal dada por (2.10), mientras que el segundo, o indirecto, tiene como fin calcular la función spline en los diferentes puntos. La evaluación de la función spline en un punto $x \in [x_k, x_{k+1})$, debido al soporte finito de las bases spline se determina mediante

$$S(x) = \sum_{i=k-m+1}^{k} c_i N_{i,m}(x), \tag{2.28}$$

que depende de $m+1$ coeficientes y de $m+1$ bases spline, que pueden ser calculados de modo muy eficiente mediante el proceso recursivo de las distintas bases spline (2.13). Para la obtención de los coeficientes spline, aunque la aproximación general no es necesariamente compleja ni costosa computacionalmente hablando, se utilizaban algoritmos eficientes para las operaciones matriciales requeridas, como por ejemplo las técnicas tipo Toeplitz para la inversión matricial [47]. Este enfoque matemático fue una traba para el uso de los spline en el campo del procesado de señales. En la década de los 90, los trabajos de M. Unser [48], [49], [50], en los que se proponía aplicar la teoría spline sobre un conjunto de nodos equiespaciados y el uso de filtrado digital para calcular los coeficientes spline, promovieron la utilización de los mismos en el campo del procesamiento de señales.

Así, si se consideran nodos equiespaciados $x_l = l, \forall l \in \mathbb{Z}$, y los valores de la función a interpolar $f[l] = f(x)|_{x=l}$, entonces, utilizando la notación $\beta_n$, para un B-spline de grado $n$, la representación spline (2.10) se escribe

$$S(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l \beta_n(x - l), \tag{2.29}$$

donde $\beta_n(x)$ es la misma en cualquier intervalo. La expresión (2.29) puede interpretarse como la convolución entre los coeficientes spline $c_l = c[l]$ y la función base spline $\beta_n(x)$ discretizada. En este contexto, conviene recordar que la función base spline de orden $n$, $\beta_n(x)$, se puede construir mediante la convolución de $n+1$ pulsos rectangulares $\beta_0(x)$.

De este modo, para los distintos datos de la función a interpolar, podemos escribir

$$s[k] = s_k = f(x_k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l \beta_n(k-l), \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{2.30}$$

Recordando que la transformada $Z$ de una convolución de dos secuencias discretas es igual al producto de las transformadas individuales, la transformada $Z$ de (2.30) resulta

$$C(z)B_n(z) = S(z), \tag{2.31}$$

y, consecuentemente, los coeficientes B-spline se obtienen de

$$C(z) = S(z)[B_n(z)]^{-1}. \tag{2.32}$$

Teniendo en cuenta que

$$B_n(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_n(k) z^{-k}, \tag{2.33}$$

de la forma explícita de $\beta_n$ se desprende que $[B_n(z)]^{-1} = 1$, si $n = 0$ y $n = 1$, lo que conlleva que $C(z) = S(z)$, y por tanto $c_k = s_k$. Pero $\forall n \geq 2$, sin embargo, $[B_n(z)]^{-1}$ representa un filtro digital de respuesta al impulso infinita. Aunque esto era bien conocido por Hou y Andrews [17], y posteriormente por varios autores [51], [52], ninguno de ellos se dio cuenta que el filtro podía ser implementado de forma recursiva.

Este esquema es el punto de partida para la definición de las funciones llamadas B-spline cardinales $\eta_n(x)$ que se parecen a las funciones "sinc" asociados al teorema del muestreo y cuyo parecido aumenta a medida que crece el orden de las funciones B-spline. De (2.32), llamando $e[k]$ a la transformada $Z$ inversa de $[B_n(z)]^{-1}$, podemos poner $c_l = c[l] = (s * e)[l]$, que sustituyendo en (2.29) nos da

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} s[k] e[l-k] \beta_n(x-l) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} s[k] \sum_{l \in \mathbb{Z}} e[l-k] \beta_n(x-l) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s[k] \eta_n(x-k), \end{aligned} \tag{2.34}$$

donde

$$\eta_n(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} e[l] \beta_n(x-l), \tag{2.35}$$

es la función llamada B-spline cardinal.

Con esta nueva interpretación, debida a M. Unser que la aplicó en el tratamiento de imágenes, la utilización de las funciones B-spline dentro del campo del procesamiento de señal se incrementó notablemente. En particular, el autor cita en [53] que los spline se utilizan en aplicaciones de transformaciones geométricas, ampliación y compresión

de imágenes, detección de contornos, etc. En otras áreas del procesado de señal, la utilización de los spline no ha sido tan fructífera; no obstante, se han hecho incursiones importantes en campos tales como el muestreo spline en sistemas de adquisición no ideales [54] y sistemas multicanal [55], diseño de filtros y/o sistemas de filtrado con diferentes características [56], [57], [58] y generación de señales spline cuadráticas aplicadas a la reproducción de sonido de alta fidelidad [59].

En los años posteriores, el enfoque del filtrado digital, basado en la interpolación spline, sería utilizado en el diseño de algoritmos muy eficientes con fines diversos, tales como la rotación de imágenes [60], la ampliación o reducción de imágenes [61], [62], [63], registro de imágenes [64], [65], mapeado de texturas [66], interpolación de señales en tiempo real [67] y transformación spline rápida [68]. Para mayor detalle, se pueden consultar [53] y [69], donde se hace referencia a algunas de estas aplicaciones.

A continuación se enumeran algunas de las ventajas [53] que presentan las combinaciones lineales de los B-spline para la representación de funciones. La representación spline es computacionalmente más eficiente que la representación basada en la función "sinc", siendo ésta un caso particular de la representación spline de orden infinito [70]; el soporte finito de los B-spline permite una evaluación exacta de la señal, a partir de los coeficientes de la expansión en serie, en contraste con el soporte infinito de la función "sinc". La principal desventaja es la no invarianza de la representación spline ante desplazamientos no enteros de las señales; los errores asociados a este tipo de desplazamientos han sido tratados por diversos autores, [71], [72].

Desarrollos matemáticos sucesivos han ido ampliando el alcance de las funciones spline básicas. Teniendo en cuenta su construcción, las funciones B-spline representan funciones de escala, con factores enteros de dilatación cualesquiera, lo que las convierte en candidatos ideales (se conoce su expresión explícita) para crear una estructura matemática de las *wavelet* por medio del análisis/aproximación multiresolución. La información teórica puede encontrarse en [73] y en [74]. Las funciones spline-wavelet se han aplicado en diferentes contextos, citar entre estos, la propuesta de un método general para el cálculo eficiente de la transformada wavelet continua usando un banco de filtros basado en las funciones spline-wavelet [75], o el procesamiento multiescala de imágenes [76], [77]. Entre otras aplicaciones enumerar la de un método basado en dichas spline-wavelet para determinar numéricamente las transformadas inversas de Laplace y de Fourier de funciones pertenecientes al espacio $L_2(\mathbb{R})$ [78], la determinación de filtros diferenciadores aplicados a señales cardiacas, para la detección de enfermedades cardiovasculares [79], la aplicacion de la trasformada wavelet biortogonal basada en splines a la compresión de imágenes [80], o la determinación de filtros spline-wavelet de reducida longitud para MRA (análisis multiresolución) [81].

## 2.5. Variaciones y generalizaciones de las funciones spline

Con el fin de lograr una mayor versatilidad y flexibilidad en la utilización de las funciones spline, tanto para mejorar aspectos concretos de las diferentes aplicaciones relacionadas con la utilización de dicha herramienta como para su uso en nuevos campos, se han realizado modificaciones sobre los splines tradicionales. En esta orientación se mueven diferentes trabajos como los presentados en [1] cuyos núcleos convolucionales se obtienen mediante dos bases spline de órdenes $q_1$ y $q_2$ y anchuras diferentes $a_1$ y $a_2$, o los descritos tanto en [82] donde se describe una familia spline de exponente fraccionario, como en [2] donde se define una nueva familia de splines de base fraccionaria, cuyo proceso constructivo se basa en la convolución de dos tipos de pulsos rectangulares de áreas unidad, el primero de ellos es el pulso básico $\beta_0$ que está definido en el intervalo $[-1/2, 1/2]$, mientras que el segundo está definido en el intervalo $[-\alpha/2, \alpha/2]$, donde $\alpha$ es cualquier número real positivo menor o igual que la unidad. Posteriormente, se introduce una nueva familia spline denominada exponencial-spline y se describen sus propiedades, presentando además algoritmos eficientes [83] para su aplicación en operaciones de procesamiento de señales [84]. A continuación se presentan algunas de ellas.

### 2.5.1. Splines de exponente fraccionario

Como se comentó en la última parte de la sección 2.4.3, los spline tuvieron su importancia en los desarrollos tempranos de la transformada wavelet [85], ya que a partir de cualquier base spline de orden $m$ se pueden generar funciones que tienen todas las propiedades necesarias para realizar análisis multiresolución [73]. Con el propósito de desarrollar variantes de la transformada wavelet, Unser y Blu [3] amplian el concepto de las funciones spline clasicas, permitiendo que el exponente de las funciones "sinc", correspondiente a la representación en frecuencia (la representación en el dominio de la frecuencia de los B-spline clásicos tienen la forma de una potencia natural de una función "sinc"), pueda ampliarse a números fraccionarios con la condición de que éstos sean mayores que $-1$. En el artículo citado se demuestran las propiedades más relevantes de esta nueva familia de funciones spline de orden no entero. En particular se da una forma explicita de dichas funciones, tanto simétricas como no simétricas. Las nuevas funciones heredan, en ambos dominios, las propiedades de los B-spline de orden entero con las excepciones de la positividad y el soporte compacto.

Posteriormente, con un objetivo ampliado, los mismos autores en [82] describen una familia de funciones de escala, llamada $(\alpha, \tau)-$ *fractional splines* que se pueden usar para hacer análisis multiresolución. Dichas funciones se caracterizan por dos parámetros reales, el primero $\alpha$ controla la anchura de las funciones de escala, y el segundo $\tau$,

denominado parámetro de desplazamiento, la posición de la función de escala sobre el soporte de definición. Las funciones de esta familia se definen en el dominio de Fourier, mediante la expresión:

$$\widehat{\beta}_{\tau}^{\alpha}(\omega) = \left(\frac{e^{j\omega}-1}{j\omega}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}-\tau} \left(\frac{1-e^{-j\omega}}{j\omega}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}+\tau}, \tag{2.36}$$

donde $\alpha > -1$ y $\tau$ son parámetros reales. Esta definición generaliza todo el conjunto de bases spline previas; por ejemplo, cuando $\alpha$ es un entero positivo y $\tau = (\alpha+1)/2$, la expresión (2.36) es la transformada de Fourier de la base B-spline no centrada, mientras que si $\alpha$ es un entero positivo y $\tau = (\alpha-1)/2$ se obtiene la transformada de Fourier de la base B-spline centrada y cuando $\alpha > -1$ es un número real y $\tau = (\alpha+1)/2$, entonces (2.36) resulta ser la base spline descrita en [3]. Los autores demuestran que una función spline fraccional generalizada puede expresarse como una combinación lineal de versiones desplazadas de una base spline fracional generalizada, y también proporcionan un algoritmo basado en la transformada rápida de Fourier para la implementación de la transformada spline-wavelet fraccional. Con esto concluyen que ajustando los parámetros libres de la función base spline fraccional, se puede obtener un procedimiento eficiente para aplicar a situaciones que puedan resolverse por medio de *wavelets*, tales como supresión ruido, compresión de datos y deconvolución.

### 2.5.2. Splines de base fraccionaria

La base spline de orden $q$, $\beta_q(t)$, en el ámbito del procesado de señales, se entiende como una función temporal obtenida como resultado de la convolución de $q+1$ pulsos idénticos de área y duración unidad $\beta_0(t)$, siendo los más utilizados los de orden 1 (spline lineal) y los de orden 3 (spline cúbico). Los spline se han utilizado con éxito en problemas de reconstrucción de señales, principalmente en el tratamiento de imágenes [53]. El orden del spline utilizado se elige dependiendo de la solución requerida, así los splines lineales se usan en aplicaciones sencillas que no requieran continuidad en sus derivadas, mientras que los splines cúbicos se usan en situaciones donde las soluciones precisen máxima suavidad [86]. En este contexto, las elecciones posibles de los órdenes spline se reducen a números enteros y, debido al coste computacional requerido, este orden debe ser bajo. Para dotar de mayor flexibilidad a la interpolación spline, Ibáñez et al. en [2] plantean una nueva familia spline, que denominan $\alpha$-spline, dependiente de un parámetro $\alpha$ y que garantiza una transición suave entre dos órdenes enteros cualesquiera de bases spline; de este modo, si dos órdenes spline proporcionan propiedades diferentes a un problema concreto, un determinado orden intermedio (fraccionario) puede ajustarse para lograr un objetivo fijado de antemano. J. Ibáñez, en su tesis [87], afirma que la interpolación mediante splines cúbicos tiene características diferenciadas y en ciertos aspectos opuestas a la interpolación mediante splines lineales. Así, mientras la primera

presenta las ventajas de la derivabilidad y la suavidad, la segunda otorga una solución muy simple y presenta un comportamiento robusto frente al ruido en los datos.

En el resto de la sección, seguiremos la tesis citada [87]. La nueva familia es denotada por $\beta_\alpha^{[p\to p+q]}(t)$ y supone una transición suave entre la base spline de orden entero $p$ y la base spline de orden $p+q$ y se define mediante la convolución de $p+1$ pulsos rectangulares de área unidad y simétricos, $\beta_0(t)$, de altura unidad y base comprendida en el intervalo $[-1/2, 1/2]$, es decir, tienen la forma

$$\beta_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad |t| < 1/2, \\ 0, & \text{si} \quad |t| > 1/2, \end{cases}$$

y $q$ pulsos rectangulares, también de área unidad y simétricos, $p_\alpha(t)$, de altura $1/\alpha$ y base extendida al intervalo $[-\alpha/2, \alpha/2]$. A partir de la definición obtiene la expresión general en el dominio del tiempo; a continuación utiliza la función $\alpha$-spline obtenida como función base que puede ser utilizada en procesos de interpolación, aproximación o modelado. Siguiendo cierto paralelismo con la teoría clásica del muestreo, que utiliza como función base la función "sinc", define un espacio de señal $\alpha$-spline

$$V(\beta_\alpha^{[p\to p+q]}(t)) = \left\{ s_\alpha(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c[n]\beta_\alpha^{[p\to p+q]}(t-n) \;\; \forall c[n] \in l_2 \right\},$$

demostrando que esta nueva familia verifica todas las propiedades de los spline clásicos (incluídas las propiedades de positividad y soporte compacto, que no eran verificadas por las funciones spline de orden o exponente fraccionario descritas en [82]). A estas funciones base spline, definidas en el dominio temporal, que se generan mediante la convolución de dos tipos de pulsos, donde el primero de ellos es de anchura fija, mientras que el segundo presenta una anchura variable pero inferior a la del primero, son a las que aquí se referencian como splines de base fraccionaria. Definidas con carácter general, el autor se centra en las funciones de transición entre los spline lineal ($p = 1$) y cúbico ($p + q = 3$), con las cuales realiza procesos de interpolación, dando las soluciones desarrolladas mediante un método matricial o bien mediante filtrado digital (donde se describe qué propiedades debe tener el llamado filtro directo $\alpha$-spline respecto a la función $\alpha$-spline discretizada utilizada en el proceso), del mismo modo que Unser y otros autores describen en [50]. Seguidamente introduce el concepto de $\alpha$-spline cardinal para desarrollar un método de interpolación equivalente al esquema clásico. Así, el objetivo perseguido es encontrar una formulación similar al teorema del muestreo para el caso de la interpolación basada en la familia $\alpha$-spline, es decir, poder expresar una señal como

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]\eta_\alpha(t-n),$$

donde $\eta_\alpha(t)$ es el $\alpha$-spline cardinal, que resulta ser

$$\eta_\alpha(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_\alpha[n]\beta_\alpha(t-n),$$

donde $d_\alpha[n]$ representa la secuencia de coeficientes del filtro directo mencionado anteriormente. La función $\alpha$-spline cardinal cumple las mismas condiciones que la función clásica "sinc" utilizada en la reconstrucción de señales, esto es, toma el valor unidad en el origen y el valor nulo en los múltiplos enteros del intervalo temporal entre las muestras. Finalmente, proporciona la respuesta en frecuencia, tanto del filtro directo $\alpha$-spline como del $\alpha$-spline cardinal.

A partir de este bagaje teórico, se dispone a utilizar las bases $\alpha$-spline como fundamento para desarrollar técnicas de modelado para dispositivos de microondas y similares, que mejoren algunos aspectos de los obtenidos con técnicas tradicionales. En este sentido cabe citar la utilización de la base $\alpha$-spline como núcleo del modelo canónico lineal a tramos para obtener el llamado modelo $\alpha$PWL, en el cual la propiedad de suavidad depende del parámetro $\alpha$. Las características de dicho modelo son similares a las que proporcionan diversas técnicas tradicionales como son la utilización de redes neuronales [88] para modelar el comportamiento no lineal de circuitos y otros dispositivos activos, o las del modelo CPWL (*Canonical Piecewise-Linear*) [89], que proporciona gran exactitud, con un número bajo de parámetros y con requerimientos de cómputo aceptables. Dicho modelo se aplica al modelado de amplificadores de potencia de radiofrecuencia, comparando los resultados obtenidos con los de otros modelos no lineales como el modelo de Volterra. También se estudia el comportamiento en gran señal de un transistor HEMT (transistor con gran movilidad electrónica) bajo iluminación óptica. Por último se abordan aspectos de diseño de sistemas de comunicaciones digitales aprovechando las ideas y conceptos de la teoría de la interpolación, en particular se propone la utilización de las bases $\alpha$-spline para la realización de sistemas adaptados y libres de ISI (Interferencia Intersimbólica).

## 2.6. Los spline como funciones ventana

En las secciones previas se ha incidido en el uso de los spline como funciones interpolantes en el ámbito del procesado de señales. Una segunda aplicación, con un desarrollo bastante menor, está relacionado con la utilización de los spline como funciones ventana para el diseño de filtros digitales. El problema aparece formulado en [11] y se describe a partir de la transformada de Fourier de la base spline de orden $n$, dada por la expresión (2.3), y definida en un entorno de nodos simétricamente distribuidos alrededor de cero. Se plantean funciones ventana desarrolladas sobre bases spline construidas sobre un conjunto de nodos localizados en el intervalo $[-1, 1]$, es decir, se eligen $(n+1)$ nodos $[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n]$ de modo que $x_0 = -1$ y $x_n = 1$. Como ejemplos, si $n = 1$,

entonces $[x_0, x_1] = [-1, 1]$, si $n = 2$, entonces $[x_0, x_1, x_2] = [-1, 0, 1]$, si $n = 3$, entonces $[x_0, x_1, x_2, x_3] = [-1, -1/3, 1/3, 1]$ y así sucesivamente. Es fácil ver que la base spline de orden $n = 1$ se corresponde con la función rectángulo cuya base se extiende entre $x = -1$ y $x = 1$ y altura $1/2$, mientras que la base spline de orden $n = 2$ representa la función triángulo isósceles con la misma base y altura unidad. Las transformadas de Fourier de estas funciones base vienen dadas por la relación de recurrencia

$$W_n(\omega) = k_n \left( \frac{\text{sen}(\omega/n)}{\omega/n} \right)^n , \tag{2.37}$$

donde los $k_n$ representan unas constantes que dependen del orden $n$ de la base spline considerada. De acuerdo con la ecuación anterior, y para un número fijo de puntos, por ejemplo $2M+1$ tal que $-M \leq j \leq M$, de la función base spline utilizada para definir la función ventana, se desprende que a medida que se incrementa el orden de la base spline, las amplitudes de los lóbulos laterales, relativa a la amplitud del lóbulo principal, van disminuyendo, pero esta disminución se hace a costa de aumentar la anchura del lóbulo principal. Algunas de las funciones ventana que aparecen en la literatura se pueden expresar por medio de algunas de las bases spline descritas; por ejemplo la ventana rectangular puede ser construida sobre la base spline de orden $n = 1$ , mientras que la ventana de Bartlett puede hacerse sobre la base spline de orden $n = 2$.

Cambiando la distribución de nodos, dentro del soporte $[-1, 1]$, se pueden definir una gran variedad de funciones spline susceptibles de ser utilizadas como funciones ventana. En particular si todos los nodos de la distribución son diferentes, todas las funciones obtenidas (funciones polinómicas a trozos) pertenecen a la clase $C^{n-2}$ y sus transformadas de Fourier presentan envolventes que varian de la forma $1/\omega^n$ para valores grandes de $\omega$, lo que da como resultado tasas de decaimiento de los lóbulos laterales crecientes a medida que incrementamos el orden spline. De todas las posibilidades de elección de nodos para la generación de funciones ventanas, una de especial relevancia es la que se corresponde con distribuciones nodales que aumenten su dispersión, ya que, teniendo en cuenta el principio de incertidumbre, podemos obtener menores dispersiones en el dominio de la frecuencia, incrementando la dispersión en el dominio del tiempo. Este incremento se consigue desplazando los nodos hacia los extremos del intervalo $[-1, 1]$, lográndose la máxima varianza cuando todos los nodos están tan próximos a $\pm 1$ como se desee, manteniendo las distribuciones simétricas respecto del origen. Con estas distribuciones de nodos se consigue, para un mismo orden, una menor anchura del lóbulo principal pero el precio a pagar es que el ritmo de decaimiento de los lóbulos laterales es menor que en los supuestos anteriores. En particular se tiene que si $n$ es impar, entonces la función ventana $w_n(t) \in C^{(n-3)/2}$ y su transformada de Fourier presenta una envolvente que varía según $1/\omega^{(n+1)/2}$ lo que conduce a una tasa de decaimiento de aproximadamente $3(n+1)$ dB/octava; mientras que para $n$ par se cumple que $w_n(t) \in C^{\frac{n}{2}-1}$ y sus transformadas de Fourier tienen una envolvente que cambia de acuerdo a

$1/\omega^{\frac{n}{2}+1}$ que conlleva un decaimiento de aproximadamente de $3(n+2)$ dB/octava. En particular el caso $n=3$ corresponde a la ventana de Riesz [90].

En determinadas aplicaciones con propósitos específicos, como pueden ser el diseño de filtros con rizado constante, o la estimación espectral de señales con componentes sinusoidales próximas, se requieren funciones ventana con características especiales tales como que su respuesta en frecuencia presente un un lóbulo principal angosto pero diferentes ritmos de decaimiento de los lóbulos laterales. Las funciones spline que dan lugar a este tipo de ventanas se construyen mediante distribuciones de nodos con determinado grado de multiplicidad, dependiendo del ritmo deseado de decaimiento de los lóbulos laterales, y situados todos ellos en los extremos del intervalo soporte $[-1,1]$. Esto se basa en que si un spline de orden $n$ tiene un nodo de multiplicidad $\alpha \leq n$ en $x_j$, entonces el spline generado pertenece a la clase $C^{n-\alpha-1}$ en la vecindad de dicho punto y su transformada de Fourier presentará una envolvente que varía en la forma $1/\omega^{n-\alpha+1}$. Combinaciones lineales de estas bases spline, construidas a partir de distribuciones nodales con diferentes órdenes de multiplicidad [86], generan una amplia gama de funciones ventana con formas de lo más diversas y capaces de presentar respuestas en frecuencia que pueden ajustarse a una gran variedad de características.

Más aún, siguiendo a [91], una de las más famosas familias de funciones ventana puede escribirse en la forma

$$w_\nu(t) = \left(\frac{\sqrt{1-t^2}}{B}\right)^\nu I_\nu\left(B\sqrt{1-t^2}\right) \quad -1 < t < 1, \tag{2.38}$$

siendo $I_\nu$ la función de Bessel modificada de primera clase de orden $\nu$, y donde $B$ y $\nu$ son parámetros reales tales que $B > 0$ y $\nu > -1$. Se obtiene la ventana de Kaiser si el orden de la función modificada de Bessel es cero, es decir, si $\nu = 0$. Si la función de Bessel se representa en forma de serie infinita, entonces (2.38) se puede escribir

$$w_\nu(t) = \left(\frac{\sqrt{1-t^2}}{B}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(B\sqrt{1-t^2}/2\right)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}, \tag{2.39}$$

donde los valores de dichas funciones se calculan mediante un truncamiento de la serie anterior; además, si $\nu$ es un número natural, entonces la función $w_\nu(t)$ es una función polinómica y en consecuencia podemos aproximarnos a la función ventana, tanto como queramos, construyendo una función polinómica mediante bases spline en el intervalo $[-1,1]$.

Resumiendo, debido a la facilidad y la exactitud de cálculo de las bases spline, disponemos de una herramienta útil para el diseño de funciones ventana. Dichas funciones ventana presentan un rápido decaimiento de los lóbulos laterales y, para una determinada distribución de nodos, presentan una máxima varianza en el dominio temporal. Si los nodos solo están en los extremos del intervalo y presentan diferentes multiplicidades,

entonces las diferentes combinaciones lineales de las bases spline generadas dan lugar a una amplia variedad de formas de las funciones ventana (funciones polinomiales a trozos), cuyas transformadas de Fourier presentan diferentes características en frecuencia que pueden ser de interés. En particular, este conjunto de funciones ventana, generadas mediante bases spline, incluye a algunos de los patrones basados en las funciones de Bessel ponderadas, como puede ser la bien conocida ventana de Kaiser.

## 2.7. Modelado de curvas y superficies

En esta sección se van a esbozar los principios generales en los que se fundamentan los modelados de curvas y superficies mediante funciones spline.

Las trayectorias seguidas por partículas, elementos móviles o cualquier otro ente, así como las formas de los objetos que nos rodean tienen formas complejas. Con el propósito de emular a la naturaleza con el mayor grado de aproximación posible, o con el objetivo de crear formas nuevas, es adecuado hacer representaciones que nos ayuden a entender las diversas propiedades de los sistemas tratados.

Esta tarea era harto laboriosa antes de la llegada del potente cálculo automático actual. La disponibilidad de máquinas de cálculo, cada vez más potentes, ha hecho que el diseño asistido por ordenador, empleando técnicas de interpolación, se haya convertido en la herramienta por excelencia para simular las formas de elementos o procesos de fenómenos naturales.

Desde programas de dibujo vectorial hasta diseños industriales, tales como prototipos de cascos de embarcaciones, carrocerías de automóviles o zapatillas deportivas, pasando por el modelado de objetos en tres dimensiones o el cálculo de trayectorias óptimas de movimientos en robótica, utilizan curvas de interpolación/aproximación spline, B-spline, NURBS (B-spline racionales no uniformes), u otras similares, para conseguir representaciones adecuadas de los elementos diseñados. Diferentes algoritmos de generación de distintos tipos de curvas pueden encontrarse en [92].

La diferencia entre interpolación y aproximación es que en la primera, la curva resultante pasa por cada uno de los puntos de control (datos o nodos), mientras que estamos ante una aproximación cuando la curva resultante se ciñe al conjunto de puntos de control sin pasar necesariamente por ninguno de ellos. A continuación se describen brevemente los métodos spline más usuales para abordar el problema de la generación de curvas.

La representación paramétrica es preferible a la representación implícita para la generación de curvas y superficies mediante ordenador, debido a que la primera es más eficiente en términos de tiempos de cálculo de procesamiento y de interpretación de soluciones (la representación implícita puede tener varias soluciones). La representación paramétrica de una curva en el espacio se expresa como

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

donde $t$ es el parámetro de definición que, elegido convenientemente, en la mayoría de los casos su rango de variación puede limitarse al intervalo $[0, 1]$. Los polinomios de grado 3 ofrecen unas buenas prestaciones entre flexibilidad y velocidad de cálculo, por lo que son los más utilizados para la interpolación entre dos puntos cualquiera, del conjunto de nodos o puntos de control de la curva objetivo. El proceso se describe en los siguientes términos.

Si tenemos un conjunto de $(n+1)$ puntos de control, definidos por sus coordenadas

$$P_j = (x_j, y_j, z_j) \ / \ j = 0, 1, 2, \cdots, n \ ;$$

el polinomio de tercer grado que debe ajustarse entre cada uno de los $n$ intervalos $(x_j, x_{j+1})$, del conjunto inicial de puntos, viene dado por las tres ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} x(t) &= a_{1j}t^3 + b_{1j}t^2 + c_{1j}t + d_1, \\ y(t) &= a_{2j}t^3 + b_{2j}t^2 + c_{2j}t + d_2, \\ z(t) &= a_{3j}t^3 + b_{3j}t^2 + c_{3j}t + d_3, \end{aligned}$$

en las que hay que determinar los valores $a$, $b$, $c$ y $d$ en cada uno de los ejes coordenados. Esto se logra estableciendo condiciones frontera en las uniones de cada uno de los intervalos de partida donde está definida la función spline buscada.

Dependiendo de las condiciones frontera utilizadas, tendremos diferentes funciones spline interpolatorias. En este contexto, se dice que estamos ante splines cúbicos naturales, si para cada dos secciones curvas consecutivas tanto la primera como la segunda derivada son iguales en la frontera común. Hay que determinar $4n$ coeficientes por coordenada, para ello disponemos de $4(n-1)$ ecuaciones correspondientes a las condiciones sobre los puntos interiores, y dos más que corresponden a los puntos inicial y final (puntos extremos de la curva). Las dos condiciones que faltan se consiguen considerando que en los puntos extremos el spline cumpla que la segunda derivada sea nula. Un mejor control sobre la curva buscada se logra mediante los spline de Hermite, los cuales definen una primera derivada específica en cada punto de control. Dentro de este contexto se enmarca el artículo reciente [93] en el que los spline de Hermite se usan para la delimitación clara de contornos específicos, representativos de elementos relevantes, que ayudan a la interpretación de imágenes biomédicas. Por último, se puede hacer referencia a los llamados spline modificados, que para especificar una sección de la curva utilizan cuatro puntos de control consecutivos (el anterior y el posterior a los que definen la sección en estudio) y un parámetro de tensión para modelar la mayor o menor curvatura de la sección.

### 2.7.1. Diseño de curvas mediante B-spline

En ocasiones resulta de mayor interés realizar una aproximación, en vez de una interpolación, a un conjunto de puntos dados. Con este propósito se suelen emplear las funciones base spline, definidas en (2.11) o (2.12), para buscar una curva que se asemeje a un polígono de control, determinado por medio de un conjunto de puntos como se especifica en [7]. El uso de estas funciones permite un mayor control local de la curva. En el campo del diseño gráfico, Reisenfeld en su tesis doctoral [94] fue el pionero en proponer el uso de las curvas y superficies B-spline como herramienta de trabajo.

Definimos una curva spline de orden $m$ asociada al conjunto de puntos del plano o del espacio $\{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$, y al conjunto de nodos $\{t_i \ / \ i \in I\}$ , donde $I$ es un conjunto de índices que puede ser o no el conjunto de los números enteros positivos, como una combinación lineal de las funciones B-spline de orden $m$ cuyos coeficientes son el conjunto de puntos, es decir,

$$C_m(t) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,m}(t) P_i,$$

donde $t \in (t_{i\,\text{mín}}, t_{i\,\text{máx}})$.

Teniendo en cuenta las propiedades de las bases spline, enumeradas en las secciones iniciales de definiciones, concluimos que debido a que cada intervalo comprendido entre dos nodos consecutivos $[t_r, t_{r+1}]$ es parte del soporte de $m$ funciones B-spline de orden $m$, $(N_{i,m}(t) \ / \ r+1-m < i < r)$, la curva estará constituida por una sucesión de secciones unidas en los nodos, de modo que en cada sección intervienen $m$ puntos de control y $m$ funciones base. Recíprocamente, como el soporte de cada función B-spline de orden $m$ se limita solamente a $m$ intervalos, entonces cada punto de control interviene, como máximo en $m$ intervalos.

Para poner de manifiesto esta idea vamos a considerar la sucesión de nodos $\{\cdots, x_0 = -2, x_1 = -3/2, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 1/2, x_5 = 1, x_6 = 3/2, x_7 = 2, \cdots\}$ y las sucesivas bases spline de tercer orden $\{\cdots, N_{0,3}(x), N_{1,3}(x), N_{2,3}(x), N_{3,3}(x), N_{4,3}(x), \cdots\}$. En el supuesto contemplado, solo hay tres bases de tercer orden que son no nulas en cada intervalo comprendido entre dos nodos consecutivos. Por ejemplo, sobre el intervalo $[x_2, x_3] = [-1, 0]$ son no nulas solamente las bases spline $N_{0,3}(x)$, $N_{1,3}(x)$ y $N_{2,3}(x)$. En la figura 2.5 se encuentra representado el proceso descrito.

Más concretamente, el proceso de construcción es como sigue. Lo habitual es conocer el rango de variación del parámetro que define la curva buscada; si este es $[a, b]$ se subdivide el mismo en $(n - m + 2)$ subintervalos, donde los puntos en los cuales se producen las divisiones forman parte del conjunto de nodos necesarios para la construcción de la curva, a los que se añaden $m$ nodos coincidentes con los extremos del intervalo $[a, b]$, es decir, $\{t_i \ / \ i \in I\} \equiv \{t_0, t_1, t_2, \cdots\cdots, t_{n+m}\}$ , con $t_0 = \cdots = t_{m-1} = a$ y $t_{n+1} = \cdots = t_{n+m} = b$. La generación de nodos múltiples en los extremos tiene co-

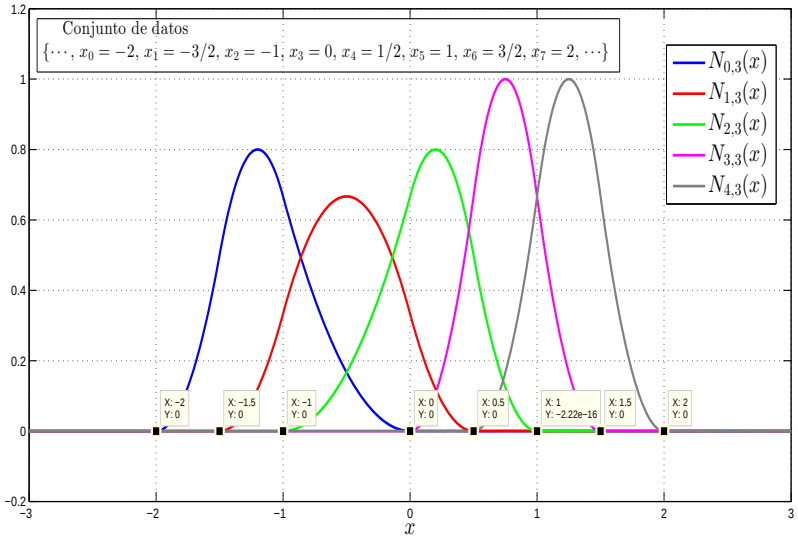


**Figura 2.5** – Contribuciones de bases spline de tercer orden

mo objetivo controlar el comportamiento de la curva en los límites del parámetro de definición, dado en el conjunto de nodos.

Con esta elección la curva spline de orden $m$ viene expresada por

$$S_m(t) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,m}(t) P_i \ / \ t \in [a, b]$$

y satisface que $S_m(a) = P_0$ y $S_m(b) = P_n$.

Si se desea que una curva spline de orden $m$ pase por un punto de control interior, distinto de los puntos de control inicial y final, bastará con repetirlo $m$ veces. Si los valores de los nodos son equidistantes se habla de B-spline y curvas uniformes.

Para ilustrar, de manera sencilla, el modo de proceder se eligen como valores nodales el conjunto de números enteros positivos. Al ser estos puntos equidistantes, el supuesto contemplado es el de curvas uniformes. Con las restricciones impuestas, el problema se enuncia como sigue. Dado un conjunto de puntos del plano o del espacio $\{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$, una curva spline de orden $m$, asociado al conjunto de $(n + m + 1)$ nodos $\{t_0, t_1, \cdots, t_{n+m}\}$ dados por

$$t_i = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad i < m; \\ i - m + 1, & \text{si} \quad m \leqslant i \leqslant n; \\ n - m + 2, & \text{si} \quad i > n, \end{cases} \tag{2.40}$$

es una función polinómica a trozos, compuesta por $(n-m+2)$ secciones, generada mediante la combinación lineal

$$S_m(t) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,m}(t) P_i \ / \ t \in [0, n-m+2] \tag{2.41}$$

que satisface que $S_m(0) = P_0$ y $S_m(n+m-2) = P_n$, y donde todas las funciones B-spline, de orden $m$, que se utilizan en (2.41) son meras traslaciones de la primera de ellas, lo que se expresa como

$$N_{i,m}(t) = N_{0,m}(t-i)\,, \ \forall i = 0, 1, 2, \cdots \text{ y } \forall m = 1, 2, \cdots$$

En particular, para ejemplificar el modo de trabajo, se va a suponer que se desea construir una curva spline de orden $m = 2$ sobre el conjunto $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ formado por cuatro puntos de control. En realidad, desde la perspectiva del diseño, la curva buscada no tiene ninguna utilidad ya que como se verá una vez resuelto, la curva obtenida no es más que el polígono que une los puntos de partida. El conjunto de nodos asociados tiene 6 elementos que de acuerdo con (2.40) son

$$\{t_0 = t_1 = 0, \ t_2 = 1, \ t_3 = 2, \ t_4 = 3, \ t_5 = 3\}\,,$$

y, por tanto, la curva resultante viene dada por

$$S_2(t) = \sum_{i=0}^{3} N_{i,2}(t) P_i \ / \ t \in [0, 3]\,,$$

donde necesitamos determinar las funciones B-spline necesarias para especificar totalmente la combinación lineal, siendo en este caso

$$\begin{array}{lll} N_{0,2}(t) & \text{con soporte} & [t_0, t_2] = [0, 1]; \\ N_{1,2}(t) & \text{con soporte} & [t_1, t_3] = [0, 2]; \\ N_{2,2}(t) & \text{con soporte} & [t_2, t_4] = [1, 3]; \\ N_{3,2}(t) & \text{con soporte} & [t_3, t_5] = [2, 3]. \end{array}$$

Como puede observarse, de la relación anterior se desprende que a cada intervalo $[t_r, t_{r+1}]$, contribuyen un máximo de dos funciones B-spline; por lo que se tiene

$$S_2(t) = \begin{cases} P_0 N_{0,2}(t) + P_1 N_{1,2}(t)\,, & \text{si} \quad 0 \le t \le 1; \\ P_1 N_{1,2}(t) + P_2 N_{2,2}(t)\,, & \text{si} \quad 1 \le t \le 2; \\ P_2 N_{2,2}(t) + P_3 N_{3,2}(t)\,, & \text{si} \quad 2 \le t \le 3. \end{cases}$$

De acuerdo con la relación de recurrencia (2.13) y teniendo en cuenta que en el caso de existencia de nodos múltiples, como es el caso, se adopta el convenio de anular el

término correspondiente cuando el denominador es cero, las funciones B-spline vienen dadas por

$$\begin{aligned} N_{0,2}(t) &= (1-t) N_{1,1}(t), \\ N_{1,2}(t) &= tN_{1,1}(t) + (2-t) N_{2,1}(t), \\ N_{2,2}(t) &= (t-1) N_{2,1}(t) + (3-t) N_{3,1}(t), \\ N_{3,2}(t) &= (t-2) N_{3,1}(t), \end{aligned}$$

y sustituyendo los valores de los B-spline de primer orden, resulta

$$S_2(t) = \begin{cases} P_0(1-t) + tP_1, & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1; \\ P_1(2-t) + P_2(t-1), & \text{si} \quad 1 \leq t \leq 2; \\ P_2(3-t) + P_3(t-2), & \text{si} \quad 2 \leq t \leq 3, \end{cases}$$

que representa un conjunto de tres segmentos rectilíneos; el primero de los cuales va desde $P_0$ a $P_1$, el segundo conecta $P_1$ con $P_2$ y el tercero empieza en $P_2$ y acaba en $P_3$. Si $P_0 \equiv P_3$ entonces, la curva (en este caso la línea poligonal) es cerrada.

Para determinar los puntos de una curva B-spline, de orden arbitrario, de un modo eficiente se han desarrollado diferentes algoritmos, siendo el más utilizado el algoritmo de De Boor - Cox que puede encontrarse en [95] o en el capitulo X de [7]. Puesto que la derivada de una curva B-spline es, a su vez, otra curva B-spline, la reiterada aplicación del algoritmo nos permitirá obtener cualquier punto de la curva derivada. Más recientemente, diversos autores presentan en [96] un algoritmo geométrico para la generación de curvas uniformes B-spline, donde se interpola una secuencia de puntos dada, bajo un conjunto de restricciones representadas por valores preestablecidos de las tangentes y las curvaturas asociadas a los puntos de partida. Para valorar su eficiencia, en el referido artículo se comparan sus resultados con los obtenidos con métodos anteriores.

Generalizando, la determinación de los parámetros fundamentales que caracterizan cualquier curva en el espacio como son la curvatura (que mide la tasa de cambio del ángulo formado por las tangentes a la curva entre dos puntos próximos, así, la curvatura de una recta es cero) y la torsión (que nos indica como rota o se retuerce una curva en los alrededores de un punto de la misma, así, la torsión de una curva que descansa en un plano es nula), puede resultar de interés en determinadas aplicaciones. En este sentido, se puede citar el trabajo [97] en el que se presenta un método, basado en los spline, para estimar el valor de los parámetros citados y se ilustra la utilidad de dichas estimaciones en problemas biomecánicos.

Para finalizar esta sección se van a enumerar algunas situaciones donde se han utilizado las curvas B-spline para resolver diversos problemas. Así, en [98] se usan para la determinación del grado de curvamiento del eje de una guía-ondas que preserva determinada potencia del modo fundamental en la trasmisión y en [99] se presenta la modelización de pulsos ópticos, obtenidos mediante bases B-spline generadas sobre distribucciones no uniformes de nodos, para simular cómo se comportan al propagarse sobre

fibras no lineales. Otros ejemplos de aplicación de las curvas B-spline se pueden encontrar en [100], donde se emplean para el modelado, sobre tarjeta impresa, del contorno de una antena para aplicaciones de comunicaciones inalámbricas, o en [101], que hace uso de las curvas spline para la delimitación en imágenes de RADAR (*radio detection and ranging*) aéreas, de diferentes regiones de interés.

### 2.7.2. Ampliación al caso de superficies

El modelado geométrico de superficies comparte las mismas técnicas y los mismos principios matemáticos que el modelado de curvas, tratado en el apartado anterior. Una superficie se describe matemáticamente, en coordenadas paramétricas, mediante dos parámetros que establecen un sistema de coordenadas sobre ella; si denominamos $u$ y $v$ a los parámetros, entonces los puntos de la superficie vendrán expresados de la forma $S(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. La modelización, en este caso, se lleva a cabo a partir de una malla de puntos de control, $P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$, que forman una distribución bidimensional y unas funciones de forma, $F_{ij}(u,v)$, que en cada zona dependerán de los dos parámetros de definición. Las funciones de forma se pueden elegir de diferentes modos, siendo el más usual la generación de las mismas mediante el producto de funciones de forma usadas para generar curvas, es decir, $F_{ij}(u,v) = F1_i(u) \cdot F2_j(v)$, donde las funciones de forma en cada parámetro pueden ser iguales o diferentes. Este proceso puede interpretarse como la generación de una superficie por medio de curvas, parametrizadas por $u$ y con factor de forma $F1(u)$, que se unen mediante el factor de forma dado por $F2(v)$. Si las funciones de forma, en cada uno de los parámetros, son funciones B-spline de órdenes $p$ y $q$ estamos ante superficies B-spline. Así, si la malla inicial está formada por $(n+1) \times (m+1)$ puntos de control $P_{ij}$ de modo que $\{i = 0, 1, 2, \cdots, n\}$ y $\{j = 0, 1, 2, \cdots, m\}$, los conjuntos de nodos, correspondientes a cada parámetro, deben tener $(n+p+1)$ y $(m+q+1)$ elementos respectivamente. Sean $U = \{u_0, u_1, \cdots u_{n+p}\}$ y $V = \{v_0, v_1, \cdots v_{m+q}\}$ dichos conjuntos de elementos; si al igual que se mostró en el caso de las curvas, los nodos inicial y final deben estar repetidos con grados de multiplicidad respectivos $p$ y $q$, entonces los elementos de ambos conjuntos se enumeran como

$$U = \{u_0 = u_1 \cdots = u_{p-1}, u_p, u_{p+1}, \cdots, u_n, u_{n+1} = u_{n+2} = \cdots = u_{n+p}\};$$
$$V = \{v_0 = v_1 \cdots = v_{q-1}, v_q, v_{q+1}, \cdots, v_m, v_{m+1} = v_{m+2} = \cdots = v_{m+q}\},$$

y las superficies parametrizadas se determinan mediante la expresión

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{ij} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v).$$

La modelización de superficies mediante bases spline se ha utilizado para aplicaciones tan dispares como el diseño del perfil de una antena de bocina para comunicaciones vía satélite [102], o el modelado de la superficie visible de una carretera, que está delante

de un vehículo, mediante una parametrización de curvas B-spline, donde los parámetros de la superficie son evaluados en el tiempo empleando un filtro de Kalman [103].

Esta herramienta, también ha sido usada para representar la superficie de separación entre dos medios, con el fin de resolver problemas de magnetostática (modelizando el sistema mediante la técnica de elementos finitos para representar la región a estudiar), sujetos a determinadas condiciones de contorno [104], o para para modelar los movimientos de distintas partes del corazón a partir de imágenes ultrasónicas obtenidas del mismo [105].

### 2.7.3. NURBS: Bases spline racionales no uniformes

El acrónimo NURBS aparece citado por primera vez en la tesis doctoral elaborada por Versprille [106], y representa una ampliación de la desarrollada dos años antes, y en la misma universidad, por Riesenfeld [94]. A partir de dicho trabajo, varias industrias desarrollaron sistemas modeladores con los cuales se podían crear y representar tanto formas analíticas clásicas (cónicas, superficies de revolución o cuádricas) como curvas y superficies de formas arbitrarias. Posteriormente se han desarrollado diferentes versiones comerciales que permiten modelar trabajando por completo en un entorno de NURBS [107]. La diferencia con las curvas y superficies parametrizadas mediante B-spline reside en el uso de las funciones B-spline racionales y en la incorporación de unos términos de ponderación, asociados a los puntos de control. Desde su creación, las NURBS han proliferado rápidamente debido a sus excelentes propiedades y sobre todo a la incorporación de normas internacionales [108]. Entre las características de interés se pueden citar la flexibilidad en el diseño, debido a la incorporación de los términos de ponderación que dan distinta relevancia a los puntos de control y la evaluación de las formas se hace de una manera razonablemente rápida, siendo estable desde la perspectiva computacional y teniendo una clara interpretación geométrica. El inconveniente principal se centra en la utilización de una gran cantidad de memoria para almacenar los datos necesarios para la representación [109].

Las definiciones matemáticas de curvas y superficies NURBS son relativamente simples. En el caso de superficies, y con una terminología idéntica a la de epígrafes previos, podemos decir que una superficie NURBS es la generalización racional y ponderada de una superficie B-spline, y se define, de acuerdo con [110], como sigue

$$S(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{ij} P_{ij} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{ij} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)} \tag{2.42}$$

donde $w_{ij}$ son los términos de ponderación asociados a los puntos de control.

Habitualmente la expresión (2.42) se reescribe en la forma

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{ij} R_{i,p;j,q}(u,v), \tag{2.43}$$

donde el término

$$R_{i,p;j,q}(u,v) = \frac{w_{ij} P_{ij} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}{\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} w_{ij} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)} \tag{2.44}$$

representa las funciones B-spline racionales.

La aplicación más importante de la representación NURBS está relacionada con el diseño de geometrías 3D arbitrarias. Algunos ejemplos repesentativos, en el caso de superficies, son el diseño de geometrías de cavidades metálicas, para simular determinados comportamientos electromagnéticos [111] o la representación de superficies de separación entre diferentes materiales, para resolver diferentes problemas magnéticos [112]. Su utilización en el caso de las curvas puede encontrarse en la modelización de bordes de difracción mediante NURBS en el entorno de la teoría geométrica de la difracción [113] o en la simulación del control de los contornos en sistemas móviles en varios ejes [114].

## 2.8. Otros campos de aplicación de las funciones spline

En esta sección, sin pretender ser exhaustivos, se van a enumerar otras aplicaciones que hacen uso de las funciones spline. Se destaca, en primer lugar, la utilización de las funciones B-spline como funciones base para el diseño de redes neuronales con objetivos de control de determinados sistemas; así, en [115] se propone este tipo de red neuronal para el desarrollo de un algoritmo de control adaptativo en un sistema de generación eólica, o en [116] donde se utiliza una red neuronal para compensar la distorsión no lineal introducida por el amplificador de alta potencia utilizado para la trasmisión en un sistema OFDM (Multiplexación por División Ortogonal en Frecuencia) inalámbrico. También se hace uso de las funciones spline en el ámbito de la cristalografía, donde se implementan nuevas metodologías de interpolación para representar y procesar imágenes, que se basan en la división del espacio mediante las celdas unidad correspondientes a las simetrías básicas; en esta línea se puede citar el artículo [117] que se centra en la red exagonal regular, o el artículo [118] basado en la celda cúbica centrada en cuerpo para la división del espacio de trabajo.

## 2.9. Funciones spline en el dominio de la frecuencia

Las funciones spline también han sido utilizadas en el diseño de filtros digitales, más concretamente, se utilizan las funciones spline como elementos generadores de funciones

que modelan las bandas de transición de la respuesta en frecuencia de diferentes filtros. Con este propósito se han definido, sobre un conjunto de nodos equiespaciados, las funciones spline clásicas en el dominio de la frecuencia.

Para ilustrar las ideas básicas del proceso de modelización utilizaremos el caso de un filtro FIR ideal paso-bajo, cuya respuesta en frecuencia $H_d(\omega)$, debe ser la unidad para frecuencias por debajo de la frecuencia de corte, $\omega_c$, y cero para frecuencias por encima de la misma. Esto genera una respuesta al impulso de longitud infinita y simétrica, que se obtiene mediante la inversa de la transformada de Fourier de tiempo discreto, y que viene dada por

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega)e^{j\omega n}d\omega = \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{\pi n}. \tag{2.45}$$

El truncamiento de la respuesta al impulso, para un filtro de longitud $N = 2M + 1$, proporciona la respuesta

$$h_d[n] = \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{\pi n} \quad \text{para} \quad -M \leq n \leq M. \tag{2.46}$$

Este truncamiento provoca la conocida oscilación de Gibbs o rizado en la respuesta en frecuencia, que es máximo cerca de la discontinuidad y que no se reduce al aumentar la longitud del filtro. Para atenuar dicha oscilación se introduce una banda de transición en la respuesta en frecuencia ideal. Las funciones que modelan dichas bandas tienen que conectar de manera continua el valor unidad de la banda de paso con el valor cero de la banda eliminada. Este planteamiento no solo reduce el fenómeno de Gibbs sino que hace que la respuesta al impulso decrezca rápidamente a medida que el número de términos se incrementa; más aún, si las funciones que generan las bandas de transición se eligen de manera que exista la $l$-ésima derivada de la función representativa de la respuesta en frecuencia para cualquier valor en el intervalo $0 \leq \omega \leq \pi$, entonces la respuesta al impulso decrecerá asintóticamente al menos tan rápido como $1/n^{l+1}$. Una buena elección para este cometido son las funciones spline [86], [119] definidas en el dominio de la frecuencia [120].

Las funciones B-spline clásicas de órdenes sucesivos se pueden generar mediante operaciones de convolución entre pulsos rectangulares básicos $\beta_0(t)$ (spline de orden cero), que son pulsos de área unidad y simétricos tal como se describe en la sección 2.5.2. Así, se tiene que $\beta_1(t) = \beta_0(t) * \beta_0(t)$, $\beta_2(t) = \beta_1(t) * \beta_0(t) \cdots$, $\beta_n(t) = \beta_{n-1}(t) * \beta_0(t)$. De manera totalmente similar se pueden generar funciones spline en el dominio de la frecuencia y de diferentes órdenes, mediante la convolución de pulsos rectangulares básicos, dependientes de la frecuencia, de áreas $2\pi$ y anchuras que deben depender del número de pulsos que han de ser convolucionados (obtención de diferentes órdenes spline), con el fin de mantener el soporte de la función resultante en un valor igual a la anchura $\Delta_d$ de la banda de transición a la que va a representar. Esto da lugar a funciones definidas positivas y con soporte compacto. Por ejemplo, si $l$ es el orden spline deseado,

entonces la función rectangular básica deber tener la forma

$$\varphi_l(\omega) = \begin{cases} \frac{2\pi l}{\Delta_d}, & \text{si} \quad |\omega| < \frac{\Delta_d}{2l}, \\ 0, & \text{si} \quad |\omega| > \frac{\Delta_d}{2l}, \end{cases}$$

y hemos de hacer con ella $l-1$ operaciones de convolución en el dominio de la frecuencia. Si se realiza una nueva operación de convolución entre la función spline de orden $l$ obtenida y la respuesta en frecuencia del filtro ideal paso-bajo, se genera la respuesta en frecuencia del filtro que presenta una banda de transición que une las bandas de paso y eliminada. Si $l = 1$ (spline de primer orden) se obtiene una respuesta en frecuencia de forma trapezoidal [121].

El proceso anterior, en el dominio del tiempo, se describe como una mera multiplicación entre la representación temporal de dichas funciones spline, definidas en frecuencia, que tienen la forma

$$\left[\frac{\text{sen}(\Delta_d n/(2l))}{(\Delta_d n/(2l))}\right]^l,$$

y la respuesta al impulso del filtro ideal (2.45), lo que proporciona la respuesta al impulso del filtro que contiene una banda de transición. Ésta viene dada por

$$\hat{h}_d[n] = \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{\pi n}\left(\frac{\text{sen}(\Delta_d n/(2l))}{(\Delta_d n/(2l))}\right)^l. \tag{2.47}$$

Aunque en principio el orden spline $l$ debe ser un número natural, la función anterior puede tener significado y ser evaluada para valores reales en determinados supuestos. Para valores no naturales de $l$, los problemas surgen cuando la función "sinc", que está elevada a la potencia $l$, toma valores negativos. Varios autores, [4] y [5], han hecho uso de estos valores reales en determinados planteamientos de diseño de filtros debido a que el truncamiento de la serie infinita, representativa de la respuesta al impulso, se hacía de modo tal que la función "sinc" era positiva para todos los valores del recorrido de definición.

En los procedimientos de truncamiento, el problema se reduce a cómo elegir los $N$ coeficientes del filtro truncado $h[n]$ que hagan que su respuesta en frecuencia se aproxime a la respuesta en frecuencia ideal. La solución de este problema depende del criterio utilizado para medir el grado relativo de la aproximación.

De los criterios posibles, uno de los que más se ha utilizado para el diseño de filtros FIR es el de minimizar el valor medio de la integral del error cuadrático ponderado entre la respuesta en frecuencia deseada y la respuesta en frecuencia obtenida como consecuencia del truncamiento de la serie infinita de coeficientes del filtro ideal [122]. La evaluación de esa integral puede hacerse sobre la totalidad de la respuesta en frecuencia del filtro o simplemente sobre algunas bandas concretas de la misma. Si llamamos $\hat{H}_d(\omega)$ y $\hat{H}(\omega)$ a la respuesta en frecuencia ideal y a la respuesta en frecuencia resultan-

te del truncamiento de la respuesta al impulso respectivamente, entonces la función a minimizar se expresa

$$\epsilon = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_R} W^2(\omega) |\hat{H}_d(\omega) - \hat{H}(\omega)|^2 d\omega, \tag{2.48}$$

siendo $W(\omega)$ una función de ponderación y $\Omega_R$ cualquier subintervalo de interés incluido en el intervalo total $0 \leq \omega \leq \pi$.

La solución del problema consiste en determinar el valor del orden spline $l \in \mathbb{R}$ que minimice la expresión del error de aproximación dado en (2.48) y que sea compatible con la positividad de la función "sinc".

Burrus y otros autores, en [5], se plantean el problema del diseño de filtros FIR, utilizando como función de ponderación una constante de valor la unidad, y encuentran que el valor del orden spline $l$ depende de la longitud deseada del filtro y de la anchura de la banda de transición, pero afirman que es difícil de encontrar analíticamente el valor preciso. De acuerdo con esto, se embarcan en la realización de una notable cantidad de simulaciones numéricas con el objetivo de dar con una relación que ligue los parámetros anteriores. Concluyen que los órdenes spline buscados son distintos dependiendo del subintervalo $\Omega_R$ contemplado en (2.48). En el primer supuesto estudiado, $\Omega_R$ se extiende al intervalo completo de frecuencias y encuentran que el orden spline óptimo $l_{opt}$ es proporcional al producto de la anchura de la banda de transición y el número de coeficientes del filtro. En el segundo caso, $\Omega_R$ es el intervalo que solo engloba las bandas de paso y eliminada, desechando la zona de frecuencias correspondiente a la banda de transición. Los autores encuentran una relación no tan sencilla entre el orden spline óptimo y el producto de la anchura de la banda de transición y el número de coeficientes del filtro. Las diferentes relaciones vienen expresadas por la ecuación (66) en el primer caso, y por las ecuaciones (67) y (68) en el segundo supuesto del referido artículo [5]. Los ejemplos que se describen en el mismo, cumplen muy bien las especificaciones sobre la anchura de la banda de transición, pero no predicen, ni tienen control, sobre la atenuación alcanzada por los filtros generados.

Posteriormente Roark y otros autores [4], vuelven a tratar una variante del mismo problema. En esta aproximación, los autores fijan su atención en una notable característica que pueden presentar los fitros paso-bajo prototipo, formulados con bandas de transición basadas en funciones spline. La propiedad citada se refiere al hecho de que sus respuestas en frecuencia son maximalmente planas [123] para todas las funciones derivadas de $\hat{H}_d(\omega)$, con respecto a $\omega$, es decir, en el intervalo $0 \leq \omega < \omega_c - \Delta_d/2$, las respuestas en frecuencia valen la unidad, mientras que en el intervalo $\omega_c + \Delta_d/2 \leq \omega < \pi$, la respuestas en frecuencia son nulas. Además, las $l-1$ primeras derivadas son nulas en los límites de las bandas. Como el orden spline $l$ puede interpretarse como el número de operaciones de suavizado, parece lógico pensar que tenga cierto control sobre el error en la amplitud de la respuesta en frecuencia. Para conseguir el objetivo propone, mediante

argumentos heurísticos, truncar la serie infinita justo en el primer cero de la función "sinc" correspondiente a la respuesta temporal de las funciones spline, definidas en frecuencia, utilizadas para la formación de las bandas de transición. Esta propiedad (forma plana de la respuesta en frecuencia), es muy interesante ya que en muchas aplicaciones de filtrado es prioritaria sobre la atenuación o la anchura de la banda de transición; en particular en las ciencias médicas, donde las amplitudes de determinadas frecuencias presentes en las señales fisiológicas pueden dar información relevante sobre diferentes patologías [124].

Para medir el grado de aproximación de la versión truncada se centran en la banda de paso, valorando el error acumulado a medida que se desplazan desde la frecuencia nula al límite de la banda de paso $\omega_c - \Delta_d/2$, es decir, miden los valores otorgados por la expresión

$$e_p(\omega) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} [1 - \hat{H}(\omega)]^2 d\omega \quad \text{para} \;\; 0 < \omega \leq (\omega_c - \Delta_d/2).$$

Asumiendo, al igual que Burrus, la posibilidad de que el grado spline $l$, pueda cambiarse por un número real positivo, y a partir de un amplio conjunto de simulaciones, encuentran los valores de los órdenes spline óptimo $l_{opt}$ y el semiorden del filtro $M$ que cumplen unas especificaciones concretas de anchura de la banda de transición y atenuación, generando unos filtros con grandes prestaciones respecto a la forma plana de su respuesta en frecuencia. En la tabla I del citado artículo se muestran las expresiones que proporcionan el orden spline en función de la atenuación, y el semiorden de los filtros en función de la anchura de la banda de transición y la atenuación. Se muestran diferentes ejemplos donde se valora el cumplimiento de las tablas y, además, se comparan los resultados obtenidos con otros procedimientos de diseño, fundamentalmente el basado en la ventana de Kaiser.

Esta sección 2.9 entronca directamente con las nuevas bases $\alpha$-spline en el dominio de la frecuencia, que se definen en el próximo capítulo y que desempeñan un papel crucial en la formulación y el diseño de filtros que se proponen en esta memoria.

# Capítulo 3

# Funciones $\alpha$-spline en el dominio de la frecuencia

La familia de funciones $\alpha$-spline, introducidas por J. Ibáñez en su tesis doctoral [87], se compone de un conjunto de funciones, definidas en el dominio del tiempo, las cuales se construyen por medio de funciones base $\alpha$-spline. Las funciones base dependen de un parámetro real $\alpha$ que puede tomar cualquier valor en el intervalo $(0, 1)$, y que ya fueron citadas en la sección 2.5.2. Se denotan por $\beta_{\alpha}^{[p \to p+q]}(t)$, y se definen como un proceso de $p + q$ operaciones de convolución entre $p + 1$ pulsos $\beta_0(t)$ y $q$ pulsos rectangulares de duración $0 < \alpha < 1$ y altura $1/\alpha$ y, por tanto, al igual que los pulsos $\beta_0(t)$, de área unidad. Representan un cambio suave desde la base spline de orden $p$ hasta la base spline de orden $p + q$ y, en consecuencia, son no nulas sobre un intervalo temporal, $p + 1 + \alpha q$, que aumenta al incrementarse el número de pulsos que intervienen en su construcción. En [2] se describe el proceso de construcción de las mismas y sus propiedades.

Los procesos de interpolación son una de las aplicaciones más usuales de los spline y la elección del orden spline utilizado depende del uso al que se destinen. En general los diferentes órdenes spline confieren propiedades diferentes a los resultados obtenidos. Los spline más utilizados son el spline lineal y el spline cúbico que presentan características muy distintas, por tanto, de todas las posibilidades de transición entre dos bases B-spline, el autor se centra en las bases $\alpha$-spline que cambian paulatinamente entre la base spline lineal y base spline cúbica, con el objetivo de realizar con ellas tareas de interpolación. La elección de la base $\alpha$-spline, aproximándose a uno u otro orden entero, dependerá del problema concreto y tendrá como objetivo mejorar los resultados que se obtendrían si se utilizasen el spline lineal o el spline cúbico. En la sección 2.5.2 se enumeran los buenos resultados obtenidos al aplicar esta técnica a diferentes problemas.

En la sección 2.9 se ha hablado de las funciones spline definidas en frecuencia. A partir de ellas y con la misma idea de transición entre órdenes spline enteros, contemplada en el dominio temporal y descrita en [2], en este trabajo se van a construir diferentes familias de funciones mediante la convolución en frecuencia de unos pulsos definidos en el mismo

dominio. De igual manera se las llamará familia de funciones $\alpha$-spline, definidas en el dominio de la frecuencia, y representarán un cambio suave entre dos funciones spline en frecuencia de órdenes enteros. Las funciones desarrolladas se aplicarán, posteriormente, a la formulación de filtros.

A lo largo de la memoria, se considerará que cuando se trabaje en el dominio del tiempo continuo, las funciones $f(t)$ manejadas, reales o complejas, dependientes de la variable real $t$, que representa el tiempo, pueden definir señales que pertenecen al espacio de Hilbert de las funciones de energía finita $L_2(R)$. En dicho espacio el producto interno viene dado por

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g^*(t) dt, \tag{3.1}$$

donde $g^*(t)$ es el complejo conjugado de $g(t)$, mientras que la norma de la función $f(t)$ es

$$\|f(t)\|_{L_2} = \sqrt{\langle f(t), f(t) \rangle} \, . \tag{3.2}$$

Si $f(t) \in L_2(R) \cap L_1(R)$, podemos determinar una representación equivalente en el dominio de la frecuencia, que se denota por $F(\Omega)$, siendo $\Omega$ la pulsación en rad/s asociada al tiempo continuo, por medio de la transformada de Fourier de tiempo continuo, (TFTC). Se dice que estas dos representaciones equivalentes componen una pareja de funciones en dominios transformados que escribimos como $f(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} F(\Omega)$ y que dada una de las dos formas, podemos determinar la otra por medio de una de las dos expresiones siguientes:

$$F(\Omega) = \mathfrak{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, e^{-j\,\Omega\, t} \, dt, \tag{3.3}$$

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{F(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) \, e^{j\,\Omega\, t} \, d\Omega. \tag{3.4}$$

En estas expresiones los símbolos $\mathfrak{F}^{-1}\{F(\Omega)\}$ y $\mathfrak{F}\{f(t)\}$ representan, respectivamente *la transformada inversa de Fourier de la función en el dominio de la frecuencia* $F(\Omega)$ y *la transformada de Fourier de la función en el dominio del tiempo* $f(t)$.

Una de las operaciones con funciones que más se utilizará a lo largo de la memoria será la operación de convolución, que puede definirse en el dominio del tiempo o en el de la frecuencia. En el dominio temporal, el problema se enuncia como sigue.

Dadas las funciones en el dominio del tiempo continuo $f(t)$ y $g(t)$ que llevan asociadas las representaciones equivalentes en el dominio de la frecuencia, por medio de la TFTC, $F(\Omega)$ y $G(\Omega)$, entonces la convolución en el tiempo continuo entre $f(t)$ y $g(t)$, que

representamos como $f(t) * g(t)$ se expresa como

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau = \mathfrak{F}^{-1}\left\{F(\Omega)G(\Omega)\right\}, \tag{3.5}$$

mientras que la convolución en frecuencia entre $F(\Omega)$ y $G(\Omega)$, que representamos como $F(\Omega) * G(\Omega)$, viene dada por

$$F(\Omega) * G(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\, G(\Omega - \xi)\, d\xi = \mathfrak{F}\left\{f(t)g(t)\right\}. \tag{3.6}$$

En este capítulo se construirán diferentes familias de funciones $\alpha$-spline en el dominio de la frecuencia.

## 3.1. Funciones $\alpha$-spline de tipo I en un entorno de tiempo continuo

Así como a las funciones $\alpha$-spline en el tiempo se les asocia, por medio de la TFTC (transformada de Fourier de tiempo continuo), unas funciones en frecuencia formadas por productos de factores de la forma de funciones "sinc" normalizadas; entonces a las funciones $\alpha$-spline en frecuencia de tipo I se les podrá asociar, a través de la TFTC inversa, unas funciones en el dominio del tiempo que consistirán en productos de factores de la forma de funciones "sinc" normalizadas cada uno de ellos. Esto se pondrá de manifiesto en las secciones siguientes. La función "sinc" normalizada se define como $\mathrm{sinc}(x) = \mathrm{sen}(\pi x)/(\pi x)$.

El proceso constructivo se hace por medio de dos tipos de pulsos rectangulares de áreas $2\pi$, teniendo los primeros, pulsos $A_{1\mathrm{I}}$, una anchura espectral en el intervalo $(-\Delta_a/2, \Delta_a/2)$, siendo $\Delta_a$ un parámetro fijado a voluntad con dimensiones de rad/s, mientras que los segundos, pulsos $A_{2\mathrm{I}}$, tienen una anchura espectral $(-\alpha\Delta_a/2, \alpha\Delta_a/2)$, siendo $\alpha$ un parámetro real que varía en $0 < \alpha < 1$. Se va a generar una familia de funciones a partir de un número determinado de operaciones de convolución con los dos tipos de pulsos descritos, de modo que las funciones resultantes son no nulas en unos intervalos de frecuencia que aumentan con el número de pulsos de uno y otro tipo que tiene que convolucionarse para su generación. La familia construida tendrá, en la variable frecuencia, idénticas propiedades que sus homólogas en el tiempo. A esta familia de funciones la denominaremos $\alpha$-spline en el dominio de la frecuencia de tipo I.

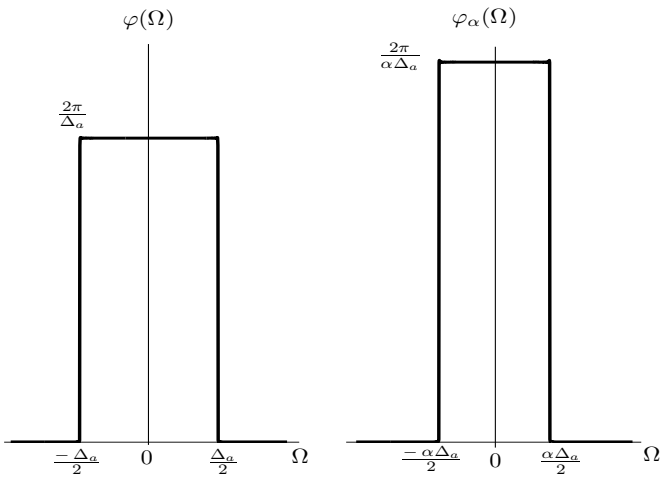


**Figura 3.1** – Pulsos rectangulares para la generación de funciones $\alpha$-spline tipo I.

### 3.1.1. Definición

Las diferentes funciones de la familia se van a caracterizar por el número de pulsos, de cada tipo, que van a intervenir en su proceso de construcción. Si $p$ y $q$ representan, respectivamente, el número de pulsos del tipo $A_{1\mathrm{I}}$ y del tipo $A_{2\mathrm{I}}$ que intervienen en el proceso, entonces la función $\alpha$-spline, que se denota con el símbolo $\Psi_1^{[p,q]}(\Omega)$, es el resultado del proceso de convolución descrito

$$\Psi_1^{[p,q]}(\Omega) = \overbrace{\varphi(\Omega) * ..... * \varphi(\Omega)}^{(p-1)\text{convoluciones}} * \overbrace{\varphi_\alpha(\Omega) * ..... * \varphi_\alpha(\Omega)}^{(q-1)\text{ convoluciones}},$$

donde los dos tipos de pulsos están representados por $\varphi(\Omega)$ y $\varphi_\alpha(\Omega)$ y vienen definidos, como se expuso en la introducción de esta sección, mediante las expresiones

$$\varphi(\Omega) = \begin{cases} \frac{2\pi}{\Delta_a}, & |\Omega| < \frac{\Delta_a}{2}, \\ 0, & \text{en otras frecuencias}, \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\varphi_\alpha(\Omega) = \begin{cases} \frac{2\pi}{\alpha\Delta_a}, & |\Omega| < \frac{\alpha\Delta_a}{2}, \\ 0, & \text{en otras frecuencias}. \end{cases} \tag{3.8}$$

De (3.6), la integral de convolución entre ambos pulsos es

$$\varphi(\Omega) * \varphi_\alpha(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, \varphi_\alpha(\Omega - \xi)\, d\xi. \tag{3.9}$$

En la figura 3.1 se representan ambos tipos de pulsos. Las funciones $\alpha$-spline obte-

nidas, $\Psi_1^{[p,q]}(\Omega)$, derivadas de la operación de convolución, son no nulas en el intervalo frecuencial $(-[p+\alpha q]\Delta_a/2, [p+\alpha q]\Delta_a/2)$, el cual es creciente con el número de operaciones de convolución que se realicen con los dos tipos de pulsos.

### 3.1.2. Funciones asociadas en el tiempo continuo

Se quiere expresar $\Psi_1^{[p,q]}(\Omega)$ como una función polinómica, para lo cual conviene determinar la función en el tiempo asociada mediante la TFTC inversa. Sean $f_1(t)$, $f_{1\alpha}(t)$ y $F_1^{[p,q]}(t)$, las TFTC inversas de los pulsos $\varphi(\Omega)$ y $\varphi_\alpha(\Omega)$ y de la función $\alpha$-spline de tipo I $\Psi_1^{[p,q]}(\Omega)$ respectivamente. Esta asociación se representa como sigue:

$$\begin{aligned} f_1(t) &\overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \varphi(\Omega), \\ f_{1\alpha}(t) &\overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \varphi_\alpha(\Omega), \\ F_1^{[p,q]}(t) &\overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \Psi_1^{[p,q]}(\Omega), \end{aligned}$$

de manera que dada una u otra representación podemos determinar su pareja asociada mediante las expresiones (3.3) o (3.4). Así, para la primera de ellas (igual sería para la segunda) tenemos

$$f_1(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{\varphi(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\Omega)\, e^{j\,\Omega\, t}\, d\Omega,$$

$$\varphi(\Omega) = \mathfrak{F}\{f_1(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\, e^{-j\,\Omega\, t}\, dt.$$

Aplicando la TFTC inversa a la expresión (3.7), podemos escribir

$$f_1(t) = \frac{1}{\Delta_a}\int_{\frac{-\Delta_a}{2}}^{\frac{\Delta_a}{2}} e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{\Delta_a(-jt)}\left[e^{-j\frac{\Delta_a t}{2}} - e^{j\frac{\Delta_a t}{2}}\right]. \tag{3.10}$$

Desarrollando las exponenciales complejas en (3.10), ésta adquiere la forma

$$f_1(t) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta_a t}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta_a t}{2}\right)} = \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta_a t}{2\pi}\right). \tag{3.11}$$

Procediendo de igual manera desde (3.8), se tiene

$$f_{1\alpha}(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{\varphi_\alpha(\Omega)\} = \frac{1}{\alpha\Delta_a}\int_{\frac{-\alpha\Delta_a}{2}}^{\frac{\alpha\Delta_a}{2}} e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{\alpha\Delta_a(-jt)}\left[e^{-j\frac{\alpha\Delta_a t}{2}} - e^{j\frac{\alpha\Delta_a t}{2}}\right], \tag{3.12}$$

que, de modo equivalente a (3.11), se transforma en

$$f_{1\alpha}(t) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\alpha\Delta_a t}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha\Delta_a t}{2}\right)} = \text{sinc}\left(\frac{\alpha\Delta_a t}{2\pi}\right). \tag{3.13}$$

De las propiedades de la convolución (la convolución de dos funciones en un dominio se transforma en un producto en el dual), es decir $f_1(t)\cdot f_{1\alpha}(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \varphi(\Omega) * \varphi_\alpha(\Omega)$, se infiere que la TFTC inversa $F_1^{[p,q]}(t)$ de la función $\alpha$-spline de tipo I, $\Psi_1^{[p,q]}(\Omega)$, se expresa como

$$\begin{aligned} F_1^{[p,q]}(t) &= \mathfrak{F}^{-1}\left\{\Psi_1^{[p,q]}(\Omega)\right\} = [f_1(t)]^p[f_{1\alpha}(t)]^q \\ &= \frac{1}{\alpha^q\Delta_a^{p+q}(-jt)^{p+q}}\frac{\left[e^{-j\frac{\Delta_a t}{2}} - e^{j\frac{\Delta_a t}{2}}\right]^p}{\left[e^{-j\frac{\alpha\Delta_a t}{2}} - e^{j\frac{\alpha\Delta_a t}{2}}\right]^{-q}}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

En términos de funciones sinusoidales y/o funciones "sinc", la expresión (3.14) se reescribe como

$$F_1^{[p,q]}(t) = \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\Delta_a t}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta_a t}{2}\right)}\right]^p\left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\alpha\Delta_a t}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha\Delta_a t}{2}\right)}\right]^q = \left[\text{sinc}\left(\frac{\Delta_a t}{2\pi}\right)\right]^p\left[\text{sinc}\left(\frac{\alpha\Delta_a t}{2\pi}\right)\right]^q, \tag{3.15}$$

que consiste, como puede verse, en un producto de funciones "sinc" normalizadas.

### 3.1.3. Forma polinómica en el dominio de la frecuencia

A continuación vamos a expresar las funciones $\alpha$ - spline de tipo I en el dominio de la frecuencia en forma de funciones polinómicas; para este objetivo conviene hacer uso de la función gamma de Euler $\Gamma(x)$ y algunas de sus propiedades. Así pues, consideremos las funciones $W_\ell(\Omega)$ y $w_\ell(t)$, de orden $\ell$, relacionadas por medio de la transformada de Fourier, $w_\ell(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} W_\ell(\Omega)$, estando definida la función dependiente de la frecuencia $W_\ell(\Omega)$ por medio de la expresión

$$W_+^\ell(\Omega) \equiv \Omega_+^\ell = \begin{cases} \Omega^\ell, & \text{si} \quad \Omega > 0, \\ 0, & \text{si} \quad \Omega \leq 0. \end{cases}$$

Recordando la definición de la función gamma de Euler en su forma integral

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt,$$

y teniendo en cuenta que si $x = \ell$, donde $\ell \in \mathbb{N}$, se verifica

$$\Gamma(\ell) = \int_0^\infty t^{\ell-1} e^{-t} dt = (\ell - 1)!,$$

podemos introducir un parámetro $a$ y generalizar la función en la forma

$$\Gamma_a(\ell) = \int_0^\infty t^{\ell-1} e^{-at} dt = (\ell - 1)!/a^\ell.$$

Con este resultado podemos evaluar la función temporal $w_\ell(t)$:

$$\begin{aligned} w_\ell(t) &= \mathfrak{F}^{-1}\{W_\ell(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_\ell(\Omega)\, e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \Omega^\ell e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \Gamma_{(-jt)}(\ell + 1) = \frac{1}{2\pi} \frac{\ell!}{(-jt)^{\ell+1}}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

A veces a la función gamma de Euler $\Gamma(x)$, donde $x \in \mathbb{R}$, se la llama función factorial generalizada.

Desarrollando las potencias de los binomios que aparecen en (3.14) y teniendo en cuenta (3.16) sin más que cambiar $(\ell + 1)$ por $(p + q)$, podemos sucesivamente escribir

$$F_1^{[p,q]}(t) = \frac{1}{\alpha^q \Delta_a^{p+q} (-jt)^{(p+q)}} \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} C_{kl} e^{j\eta_{\alpha,kl}\Delta_a t},$$

$$F_1^{[p,q]}(t) = \frac{2\pi}{\alpha^q \Delta_a^{p+q} (p + q - 1)!} \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} C_{kl} e^{j\eta_{\alpha,kl}\Delta_a t} w_{p+q-1}(t), \tag{3.17}$$

donde los parámetros $C_{kl}$ y $\eta_{\alpha,kl}$ que aparecen en (3.17) vienen dados por

$$C_{kl} = (-1)^{(k+l)} \binom{p}{k} \binom{q}{l}, \tag{3.18}$$

y

$$\eta_{\alpha,kl} = \left[ (k + \alpha l) - \frac{1}{2}(p + \alpha q) \right]. \tag{3.19}$$

Calculando la TFTC de (3.17), y haciendo uso de las propiedades de linealidad y de desplazamiento en frecuencia, obtenemos

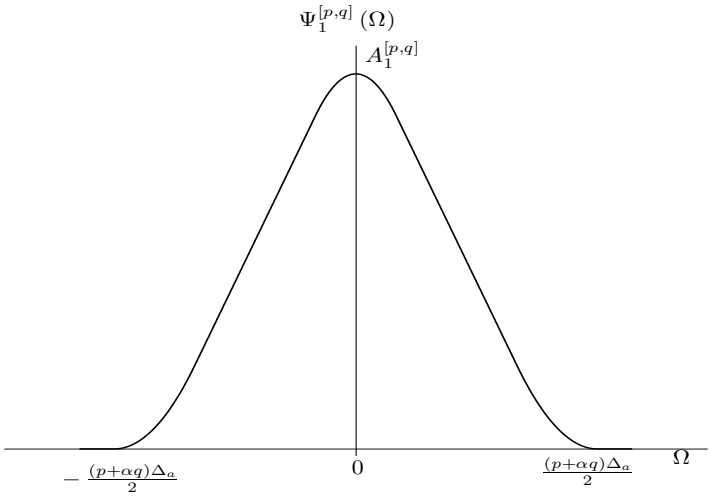


**Figura 3.2** – Función $\alpha$-spline en el dominio de la frecuencia ($\Psi_1^{[p,q]}(\Omega)$).

$$\begin{aligned}
\Psi_1^{[p,q]}(\Omega) &= \mathfrak{F}\{F_1^{[p,q]}(t)\} = \frac{2\pi}{\alpha^q \Delta_a^{p+q}(p+q-1)!} \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} C_{kl} W_{p+q-1}(\Omega - \eta_{\alpha,kl}\Delta_a) \\
&= \frac{2\pi}{\alpha^q \Delta_a^{p+q}(p+q-1)!} \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{\Omega - \eta_{\alpha,kl}\Delta_a\right\}_+^{p+q-1} \\
&= \frac{2\pi}{\alpha^q \Delta_a(p+q-1)!} \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{\frac{\Omega}{\Delta_a} - \eta_{\alpha,kl}\right\}_+^{p+q-1}. \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

En la figura 3.2 se muestra una función genérica de la familia $\alpha$-spline donde se ponen de manifiesto su forma, sus características espectrales y su valor máximo que dependen de los valores concretos de $\Delta_a$, $p$ y $q$. El valor máximo de la convolución se obtiene cuando las funciones a convolucionar están alineadas, y esto sucede en $\Omega = 0$. Dicho máximo se escribe

$$\begin{aligned}
A_1^{[p,q]}(\Omega = 0) &= A_{1,\max}^{[p,q]} = \frac{2\pi}{\alpha^q \Delta_a(p+q-1)!} \\
&\times \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{\frac{1}{2}(p+\alpha q) - (k+\alpha l)\right\}_+^{p+q-1}. \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

## 3.2. Funciones $\alpha$-spline de tipo I en un entorno de tiempo discreto

Muchas señales de naturaleza analógica así como todas las señales que proceden directamente de un entorno discreto son tratadas mediante un procesado digital, por lo que resulta conveniente definir herramientas dentro del propio contexto digital. Dentro de éste, los conceptos de tiempo discreto y su frecuencia asociada (en contraposición al tiempo continuo y la frecuencia asociada) son claves para el desarrollo del procesado digital. Recordando la idea de señales sinusoidales o exponenciales complejas en tiempo discreto, $x[n] = A\cos(\omega n + \theta) = \frac{A}{2}e^{j(\omega n+\theta)} + \frac{A}{2}e^{-j(\omega n+\theta)}$, $-\infty < n < \infty$, donde $n$ es una variable entera que representa el número de muestra, $A$ es la amplitud, $\omega$ es la pulsación medida en radianes por muestra y $\theta$ es la fase expresada en radianes, y a partir de sus propiedades de periodicidad, podemos deducir que todas las señales cuyas frecuencias difieran en múltiplos de $2\pi$ son idénticas. El espectro de todas las señales está dentro de cualquier intervalo $\omega^* \leq \omega \leq 2\pi + \omega^*$, o de modo equivalente, el rango de frecuencias en tiempo discreto es de $2\pi$. Convencionalmente se suele elegir el rango $0 \leq \omega \leq 2\pi$ o el rango $-\pi \leq \omega \leq \pi$, a los que se les denomina fundamentales. También es usual hablar de la variable $f$ expresada en ciclos por muestra y definida como $\omega = 2\pi f$; para ésta, su rango fundamental es $0 \leq f \leq 1$ o bien $-1/2 \leq f \leq 1/2$. En estos rangos está la principal diferencia del dominio discreto respecto al dominio continuo donde sus variables homólogas tienen rangos $-\infty < \Omega < \infty$ y $-\infty < F = \Omega/(2\pi) < \infty$ si entendemos, desde una óptica meramente matemática, que las frecuencias negativas se asocian a giros en sentido horario realizados por el fasor que representa la exponencial compleja.

Teniendo en cuenta la idea del párrafo previo, se van a definir las funciones $\alpha$-spline en la frecuencia $\omega$ asociada al tiempo discreto.

### 3.2.1. Definición y desarrollo

El equivalente discreto del espacio $L_2(R)$ se denota por $l_2$ y es el espacio de Hilbert de las secuencias, reales o complejas, de cuadrado sumable. La transformada de Fourier en tiempo discreto (TFTD) de una de estas secuencias es, en general, una función compleja de la variable real $\omega$ que se ha descrito en la introducción de la presente sección. Además, es una función periódica de periodo $2\pi$, y se tomará como rango fundamental, por simplicidad y por consistencia con la simetría en el caso del tiempo continuo, el intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$. Se analizarán, por tanto, las funciones resultantes en dicho periodo fundamental. Es conveniente, al igual que se hizo en el dominio del tiempo continuo, explicitar las definiciones y representaciones que se usarán a lo largo del trabajo siempre que nos movamos en un entorno de tiempo discreto. Dada una secuencia

$x[k]$, podemos definir la transformada $Z$ asociada, $X(z)$, por medio de la relación

$$X(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]z^{-k}.$$

La transformada de Fourier en tiempo discreto (TFTD), asociada a la secuencia, se obtiene sin mas que hacer el cambio de variable $z = e^{j\omega}$ en la expresión anterior; se representa por $X(e^{j\omega})$ y es

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]e^{-j\omega k}. \tag{3.22}$$

El par formado por la secuencia y su TFTD se va a representar del mismo modo que en el caso continuo, esto es, $x[k] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$.

La inversa de la transformada de Fourier en tiempo discreto, viene dada por

$$x[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega k}d\omega. \tag{3.23}$$

Si una segunda secuencia $h[k]$ tiene asociada la TFTD $H(e^{j\omega})$, entonces la operación de convolución entre dos secuencias $x[k]$ y $h[k]$, que se expresa como $x[k] * h[k]$, es otra secuencia $y[k]$ que se determina mediante la expresión

$$y[k] = x[k] * h[k] = \sum_{l\in\mathbf{Z}} x[l]h[k-l] = \sum_{l\in\mathbf{Z}} h[l]x[k-l]. \tag{3.24}$$

La TFTD asociada a la convolución de las secuencias es, simplemente, el producto de las TFTD de cada una de las secuencias de partida, lo que se representa mediante el esquema

$$x[k] * h[k] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}). \tag{3.25}$$

Por otra parte, la convolución en frecuencia entre las funciones $X(e^{j\omega})$ y $H(e^{j\omega})$, que se expresa como $X(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega})$ es otra función $G(e^{j\omega})$ que se define mediante la relación

$$G(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})H(e^{j(\omega-\theta)})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j(\omega-\theta)})H(e^{j\theta})d\theta,$$

de modo que la transformada de Fourier inversa en tiempo discreto resulta ser el producto de las dos secuencias, lo que se representa como

$$x[n]h[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega}). \tag{3.26}$$

Por comodidad, es usual escribir la relación $X(e^{j\omega}) \equiv X(\omega)$. Cuando se encuentre esta asociación, hay que tener en mente que se está analizando un periodo fundamental de anchura $2\pi$.

Así pues, y como en el caso analógico, se van a considerar los siguientes dos tipos de pulsos rectangulares, donde los subíndices $d$ nos van a indicar el ámbito discreto de trabajo

$$\varphi_d(\omega) = \begin{cases} \frac{2\pi}{\Delta_d}, & |\omega| < \frac{\Delta_d}{2}, \\ 0, & \frac{\Delta_d}{2} < |\omega| < \pi, \end{cases} \tag{3.27}$$

$$\varphi_{\alpha,d}(\omega) = \begin{cases} \frac{2\pi}{\alpha\Delta_d}, & |\omega| < \frac{\alpha\Delta_d}{2}, \\ 0, & \frac{\alpha\Delta_d}{2} < |\omega| < \pi, \end{cases} \tag{3.28}$$

donde $\alpha$, $p$ y $q$ representan los mismos parámetros que se han usado en el caso analógico, siendo $\Delta_d$ un parámetro con dimensiones de radianes por muestra; es decir, una pulsación $\omega$ que nos indica la anchura espectral de las funciones $\alpha$-spline en tiempo discreto, resultante del proceso de $(p+q-1)$ convoluciones en frecuencia que involucra $p$ funciones pulso $\varphi_d(\omega)$ y $q$ funciones pulso $\varphi_{\alpha,d}(\omega)$ y que denotamos por $\Psi_{1d}^{[p,q]}(\omega)$, es decir,

$$\Psi_{1d}^{[p,q]}(\omega) = \overbrace{\varphi_d(\omega) * \ldots * \varphi_d(\omega)}^{(p-1)\ veces} * \overbrace{\varphi_{\alpha,d}(\omega) * \ldots * \varphi_{\alpha,d}(\omega)}^{(q-1)\ veces}. \tag{3.29}$$

El cálculo de la DTFT inversa de (3.27), (3.28) y (3.29) puede hacerse de la misma manera que en el caso analógico, resultando las siguientes secuencias de tiempo discreto; para la primera

$$f_d[n] = \mathfrak{F}^{-1}\{\varphi_d(\omega)\} = \frac{1}{\Delta_d(-jn)}\left[e^{-j\frac{\Delta_d n}{2}} - e^{j\frac{\Delta_d n}{2}}\right], \tag{3.30}$$

o, en términos de funciones sinusoidales y/o funciones "sinc"

$$f_d[n] = \frac{\operatorname{sen}(\Delta_d\, n)/2}{\Delta_d\, n/2} = \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta_d\, n}{2\pi}\right), \tag{3.31}$$

y de modo similar para la segunda

$$\begin{aligned} f_{\alpha,d}[n] &= \mathfrak{F}^{-1}\{\varphi_{\alpha,d}(\omega)\} = \frac{1}{\alpha\Delta_d(-jn)}\left[e^{-j\frac{\alpha\Delta_d n}{2}} - e^{j\frac{\alpha\Delta_d n}{2}}\right] \\ &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha\Delta_d n)/2}{\alpha\Delta_d n/2} = \operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha\Delta_d n}{2\pi}\right). \end{aligned} \tag{3.32}$$

De las propiedades de la convolución y teniendo en cuenta las expresiones (3.30) y (3.32) obtenemos la TFTD inversa de $\Psi_{1d}^{[p,q]}(\omega)$,

$$F_{1d}^{[p,q]}[n] = \mathfrak{F}^{-1}\left\{\Psi_{1d}^{[p,q]}(\omega)\right\} = (f_d[n])^p\,(f_{\alpha,d}[n])^q$$

$$F_{1d}^{[p,q]}[n] = \frac{1}{\alpha^q \Delta_d^{p+q}(-jn)^{p+q}} \frac{\left[e^{-j\frac{\Delta_d n}{2}} - e^{j\frac{\Delta_d n}{2}}\right]^p}{\left[e^{-j\frac{\alpha\Delta_d n}{2}} - e^{j\frac{\alpha\Delta_d n}{2}}\right]^{-q}} = \left[\frac{\text{sen}\{(\Delta_d n)/2\}}{\Delta_d n/2}\right]^p \left[\frac{\text{sen}\{(\alpha\Delta_d n)/2\}}{\alpha\Delta_d n/2}\right]^q. \tag{3.33}$$

Desarrollando las potencias de los binomios que aparecen en (3.33) podemos reescribir la función en la forma

$$F_{1d}^{[p,q]}[n] = \frac{1}{\alpha^q \Delta_d^{p+q}(-jn)^{(p+q)}} \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} C_{kl} e^{j\eta_{\alpha,kl}\Delta_d n}, \tag{3.34}$$

donde $C_{kl}$ y $\eta_{\alpha,kl}$ son los mismos que en (3.17).

### 3.2.2. Funciones $\alpha$-spline de tipo I: Forma polinómica en el dominio de la frecuencia

Con el fin de obtener una expresión en forma polinómica de las funciones $\alpha$-spline de tipo I, en primer lugar se va a determinar la DTFT de (3.34) y para ello se ha de considerar la función de apoyo $Y_{+,\ell}(\omega)$, dada por

$$Y_{+,\ell}(\omega) = \omega_+^\ell = \begin{cases} \omega^\ell, & 0 \le \omega \le \pi, \\ 0, & -\pi \le \omega < 0, \end{cases}$$

donde $\ell \in \mathbb{N}$, $(\ell = p + q - 1)$.

De las propiedades de diferenciación en frecuencia sabemos que dada una secuencia discreta $y[n]$ cualquiera, a la que le corresponde una función $Y(\omega)$ obtenida mediante la TFTD, es decir $y[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} Y(\omega)$, entonces se cumple

$$j\frac{dY}{d\omega} = \mathfrak{F}\{ny[n]\}.$$

Aplicando recursivamente esta propiedad a nuestra función $Y_{+,\ell}(\omega)$ hasta los órdenes $\ell$ y $\ell + 1$, se tienen los siguientes resultados

$$\frac{d^{(\ell}Y_{+,\ell}(\omega)}{d\omega^{(\ell}} = \ell! = \mathfrak{F}\left\{(-jn)^\ell y_\ell[n]\right\},$$

$$\frac{d^{(\ell+1}Y_{+,\ell}(\omega)}{d\omega^{(\ell+1}} = \ell!\delta(\omega) = \mathfrak{F}\left\{(-jn)^{\ell+1} y_\ell[n]\right\},$$

donde $\delta(\omega)$ es la función delta de Dirac e $y_\ell[n]$ es la DTFT inversa de $Y_{+,\ell}(\omega)$.

Tomando la DTFT inversa en la última expresión se obtiene

$$\mathfrak{F}^{-1}\{\ell!\delta(\omega)\} = \mathfrak{F}^{-1}\left\{\mathfrak{F}\left\{(-jn)^{\ell+1}y_\ell[n]\right\}\right\}.$$

y como $\mathfrak{F}^{-1}\{\delta(\omega)\} = 1/(2\pi)$

$$\frac{\ell!}{2\pi} = (-jn)^{\ell+1}y_\ell[n], \tag{3.35}$$

$$y_\ell[n] = \frac{\ell!}{2\pi(-jn)^{\ell+1}}. \tag{3.36}$$

Si en la expresión anterior se hace $\ell + 1 = p + q$, entonces el factor $(-jn)^{p+q}$ que aparece en (3.34) se puede substituir por

$$\frac{1}{(-jn)^{p+q}} = \frac{2\pi y_{p+q-1}[n]}{(p+q-1)!}, \tag{3.37}$$

y la secuencia temporal $F_{1d}^{[p,q]}[n]$ dada por (3.34), se transforma en

$$F_{1d}^{[p,q]}[n] = \frac{2\pi}{\alpha^q\Delta_d^{p+q}(p+q-1)!}\cdot\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q}C_{kl}e^{j\eta_{\alpha,kl}\Delta_d n}y_{p+q-1}[n]. \tag{3.38}$$

Calculando la DTFT de (3.38) y utilizando las propiedades de linealidad y desplazamiento en frecuencia, las funciones $\alpha$-spline en tiempo discreto de tipo I, $\Psi_{1d}^{[p,q]}(\omega) = \mathfrak{F}\left\{F_{1d}^{[p,q]}[n]\right\}$, se pueden expresar como

$$\begin{aligned}
\Psi_{1d}^{[p,q]}(\omega) &= \frac{2\pi}{\alpha^q\Delta_d^{p+q}(p+q-1)!}\cdot\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q}C_{kl}Y_{+,p+q-1}(\omega-\eta_{\alpha,kl}\Delta_d)\\
&= \frac{2\pi}{\alpha^q\Delta_d^{p+q}(p+q-1)!}\cdot\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q}C_{kl}\left\{\omega-\eta_{\alpha,kl}\Delta_d\right\}_+^{p+q-1}\\
&= \frac{2\pi}{\alpha^q\Delta_d(p+q-1)!}\cdot\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q}C_{kl}\left\{\frac{\omega}{\Delta_d}-\eta_{\alpha,kl}\right\}_+^{p+q-1},
\end{aligned} \tag{3.39}$$

para $-\pi < \omega \leq \pi$. Estas funciones $\Psi_{1d}^{[p,q]}(\omega)$ son periódicas de periodo $2\pi$ y, como se ha comentado con anterioridad, son distintas de cero en un intervalo espectral creciente con el número de pulsos convolucionados y que viene dado por $-[p+\alpha q]\Delta_d/2 < \omega < [p+\alpha q]\Delta_d/2$.

La figura 3.2 también es representativa de las funciones dadas en (3.39) sin mas que cambiar $\Omega$ por $\omega$ y $\Delta_a$ por $\Delta_d$. El valor máximo de estas funciones, dependiente de los valores de los parámetros $p$, $q$, y $\alpha$, se alcanza en $\omega = 0$ y se escribe, de modo equivalente

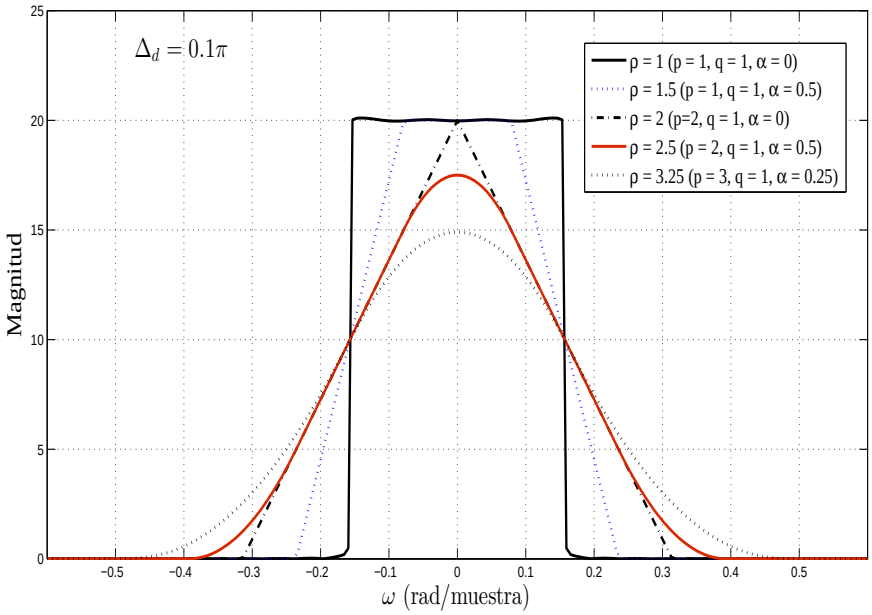


**Figura 3.3** – Funciones $\alpha$-spline de tipo I ($\Psi_1^{[p,q]}(\omega)$).

a (3.21), como

$$A_{1d}^{[p,q]}(\omega = 0) = A_{1d,\max}^{[p,q]} = \frac{2\pi}{\alpha^q \Delta_a (p+q-1)!} \times \\ \times \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{ \frac{1}{2}(p+\alpha q) - (k+\alpha l) \right\}_+^{p+q-1}. \tag{3.40}$$

Por último, en la figura 3.3 se muestran diferentes simulaciones de la respuesta en frecuencia obtenida a partir de la ecuación (3.33). Los diferentes perfiles de las funciones $\alpha$-spline de tipo I, en función de la frecuencia $\omega$, se han determinado para el valor concreto $\Delta_d = 0.1\pi$ del ancho espectral, parámetro que define la anchura de los pulsos $\varphi_d(\omega)$, diferentes valores del número de pulsos, $p$ y $q$, de cada uno de los tipos que intervienen en su construcción y distintos valores del parámetro $\alpha$ que controla el ancho del segundo tipo de pulsos $\varphi_{\alpha,d}(\omega)$. En la gráfica aludida pueden observarse los cambios de forma de las diferentes funciones a medida que pasamos de un orden entero $p$, con el parámetro $\alpha = 0$, al siguiente $(p+1)$, tomando $q = 1$ y variando $\alpha$ en el intervalo $(0, 1)$, así como el incremento del ancho espectral de las funciones $\alpha$-spline de tipo I a medida que crecen los valores de los parámetros $p$, $q$ y $\alpha$. Este último aspecto se muestra con mayor detalle en la figura 3.4.

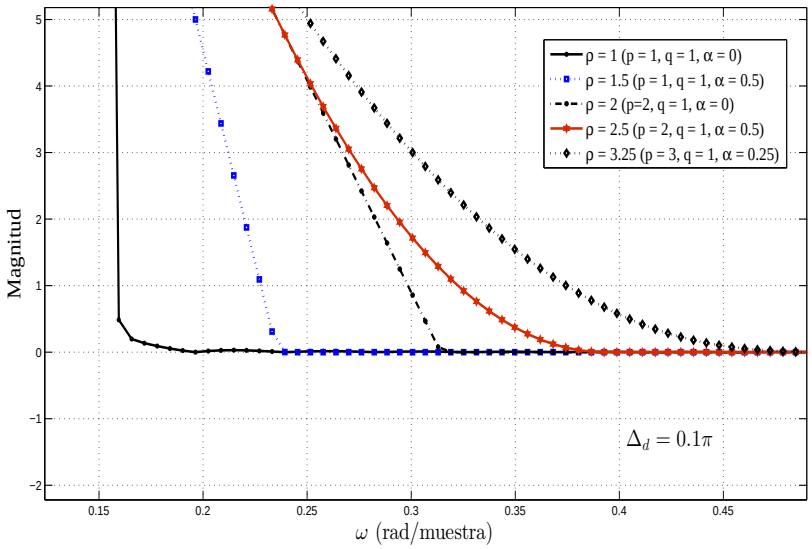


**Figura 3.4** – Detalle de la anchura de las funciones $\alpha$-spline de tipo I ($\Psi_1^{[p,q]}(\omega)$).

## 3.3. Funciones $\alpha$-spline modificadas: Funciones $\alpha$-spline de tipo II

La familia de funciones $\alpha$-spline de tipo I se caracteriza porque el soporte compacto donde estaban definidas dependía, además de los parámetros constructivos de los pulsos de partida ($\Delta_a$ o $\Delta_d$ y $\alpha$), del número de pulsos $p$ y $q$ utilizados para su construcción.

La generación de las funciones $\alpha$-spline en el dominio de la frecuencia tenía como principal finalidad la posibilidad de modelar bandas de transición en la formulación y desarrollo de filtros. Pequeñas diferencias en las formas de estas bandas de transición van a tener su influencia en las propiedades de los filtros resultantes. Con el propósito de generar formas variadas de las bandas de transición, se va a definir, con la misma filosofía que para la familia de tipo I, una nueva familia de funciones, en el dominio de la frecuencia, distinta a la de tipo I, a la que denominaremos $\alpha$-spline modificada o $\alpha$-spline de tipo II, cuyos elementos van a estar caracterizados de modo que el rango de valores donde las nuevas funciones $\alpha$-spline son no nulas va a ser fijo y dependiente, exclusivamente, del parámetro $\Delta_a$ o $\Delta_d$ utilizado en la definición de los pulsos de partida, con independencia del número de pulsos, de cada tipo, involucrados en su construcción. El número de pulsos rectangulares utilizados tan solo afectarán a la forma de las componentes de la familia que vamos a explicitar a continuación. Todo el proceso se desarrolla de un modo similar al caso previamente desarrollado de las funciones $\alpha$-spline de tipo I.

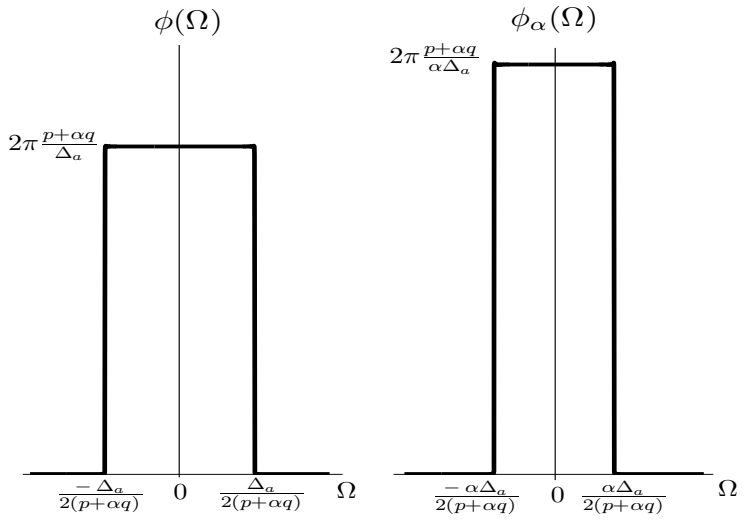


**Figura 3.5** – Funciones rectangulares para la generación de funciones $\alpha$-spline tipo II.

### 3.3.1. Funciones $\alpha$-spline de tipo II en tiempo continuo: Definición

Estas funciones se generan mediante la convolución en el dominio de la frecuencia de dos tipos de pulsos rectangulares, definidos en la variable frecuencia angular, todos ellos de área $2\pi$ , cuyas alturas y anchuras dependen de los mismos parámetros definidos para la familia de funciones previas, como son el número de elementos a convolucionar y la anchura espectral total donde la función resultante es distinta de cero. Si $\Omega$ es la variable frecuencia angular en el tiempo continuo, el primer tipo de pulsos, pulsos tipo $A_{1\mathrm{II}}$, se escribe

$$\phi\left(\Omega\right) = \begin{cases} \frac{2\pi(p+\alpha q)}{\Delta_a}, & |\Omega| < \frac{\Delta_a}{2(p+\alpha q)}, \\ 0, & \text{en otras frecuencias}, \end{cases} \tag{3.41}$$

y el segundo tipo de pulso, pulsos tipo $A_{2\mathrm{II}}$, se escribe

$$\phi_\alpha\left(\Omega\right) = \begin{cases} \frac{2\pi(p+\alpha q)}{\alpha\Delta_a}, & |\Omega| < \frac{\alpha\Delta_a}{2(p+\alpha q)}, \\ 0, & \text{en otras frecuencias}, \end{cases} \tag{3.42}$$

donde $p$ y $q$ representan el número de pulsos de tipo $A_{1\mathrm{II}}$ y de tipo $A_{2\mathrm{II}}$ respectivamente, mientras que los parámetros $\alpha$ , $0 < \alpha < 1$ , y $\Delta_a$ desempeñan el mismo papel que sus homólogos definidos en la parte introductoria del presente capítulo. En la figura 3.5 están representados los dos tipos de pulsos descritos.

Las funciones $\alpha$-spline de tipo II en el dominio de la frecuencia, denotadas por $\Psi_2^{[p,q]}(\Omega)$, se definen como la convolución en frecuencia de $p > 0$ pulsos de tipo $A_{1\mathrm{II}}$

y $q \geq 1$ pulsos de tipo $A_{2\text{II}}$. La función resultante en el dominio de la frecuencia se expresa como

$$\Psi_2^{[p,q]}(\Omega) = \overbrace{\phi(\Omega) * ..... * \phi(\Omega)}^{(p-1)\text{convoluciones}} * \overbrace{\phi_\alpha(\Omega) * ..... * \phi_\alpha(\Omega)}^{(q-1)\text{ convoluciones}}.$$

En oposición a las funciones de la familia de tipo I, las funciones de esta segunda familia, $\Psi_2^{[p,q]}(\Omega)$, derivadas de las operaciones de convolución, son no nulas en el intervalo frecuencial $(-\Delta_a/2, \Delta_a/2)$ que no depende del número de operaciones de convolución que se realicen con los dos tipos de pulsos.

### 3.3.2. Funciones asociadas en el tiempo continuo

Como paso previo para determinar la forma polinómica de las funciones $\alpha$-spline de tipo II, evaluamos las funciones en el tiempo mediante la TFTC inversa de un modo totalmente idéntico al descrito en la subsección 3.1.2. A las funciones que describen los pulsos de tipo $A_{1\text{II}}$, $\phi(\Omega)$, se les asocia, obtenidas mediante la transformada de Fourier inversa, las funciones temporales $f_2(t)$, es decir, se forman las parejas $f_2(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \phi(\Omega)$ de funciones transformadas.

De (3.4), aplicado a (3.41), podemos escribir

$$f_2(t) = \frac{p+\alpha q}{\Delta_a} \int_{\frac{-\Delta_a}{2(p+\alpha q)}}^{\frac{\Delta_a}{2(p+\alpha q)}} e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{p+\alpha q}{\Delta_a(-jt)} \left[ e^{-\frac{j\Delta_a t}{2(p+\alpha q))}} - e^{\frac{j\Delta_a t}{2(p+\alpha q)}} \right], \tag{3.43}$$

que desarrollando las exponenciales complejas en (3.43), adquiere la forma

$$f_2(t) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\Delta_a t}{2(p+\alpha q)}\right)}{\left(\frac{\Delta_a t}{2(p+\alpha q)}\right)} = \text{sinc}\left(\frac{\Delta_a t}{2\pi(p+\alpha q)}\right). \tag{3.44}$$

De igual forma, las funciones que describen los pulsos de tipo $A_{2\text{II}}$, $\phi_\alpha(\Omega)$, llevan asociadas las funciones temporales $f_{2\alpha}(t)$, formando la pareja $f_{2\alpha}(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \phi_\alpha(\Omega)$, y cumpliéndose

$$\begin{aligned} f_{2\alpha}(t) &= \mathfrak{F}^{-1}\{\phi_\alpha(\Omega)\} = \frac{p+\alpha q}{\alpha\Delta_a} \int_{\frac{-\alpha\Delta_a}{2(p+\alpha q)}}^{\frac{\alpha\Delta_a}{2(p+\alpha q)}} e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \frac{p+\alpha q}{\alpha\Delta_a(-jt)} \left[ e^{-\frac{j\alpha\Delta_a t}{2(p+\alpha q))}} - e^{\frac{j\alpha\Delta_a t}{2(p+\alpha q)}} \right], \end{aligned} \tag{3.45}$$

que, de modo equivalente a (3.43), se transforma en

$$f_{2\alpha}(t) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\Delta_a t}{2(p+\alpha q)}\right)}{\left(\frac{\alpha\Delta_a t}{2(p+\alpha q)}\right)} = \operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha\Delta_a t}{2\pi\,(p+\alpha q)}\right). \tag{3.46}$$

La construcción de las funciones $\alpha$-spline de tipo II se lleva a cabo realizando $(p-1)$ operaciones de convolución con $p$ funciones $\phi(\Omega)$, $(q-1)$ operaciones de convolución con $q$ funciones $\phi_\alpha(\Omega)$, y, posteriormente, las funciones obtenidas se vuelven a convolucionar. Se hacen un total de $(p+q-1)$ operaciones de convolución, siendo el resultado independiente del orden en que se realizan las operaciones. Si llamamos $F_2^{[p,q]}(t)$ a la TFTC inversa de $\Psi_2^{[p,q]}(\Omega)$, simbólicamente $F_2^{[p,q]}(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \Psi_2^{[p,q]}(\Omega)$, de las propiedades de la convolución se infiere que

$$\begin{aligned} F_2^{[p,q]}(t) &= \mathfrak{F}^{-1}\left\{\Psi_2^{[p,q]}(\Omega)\right\} = [f_2(t)]^p [f_{2\alpha}(t)]^q \\ &= \frac{(p+\alpha q)^{p+q}}{\alpha^q \Delta_a^{p+q}(-jt)^{p+q}} \frac{\left[e^{-\frac{j\Delta_a t}{2(p+\alpha q)}} - e^{\frac{j\Delta_a t}{2(p+\alpha q)}}\right]^p}{\left[e^{-\frac{j\alpha\Delta_a t}{2(p+\alpha q)}} - e^{\frac{j\alpha\Delta_a t}{2(p+\alpha q)}}\right]^{-q}}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

En términos de funciones sinusoidales y/o funciones "sinc" la expresión (3.47) se reescribe, finalmente, como

$$\begin{aligned} F_2^{[p,q]}(t) &= \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta_a t}{2(p+\alpha q)}\right)}{\left(\frac{\Delta_a t}{2(p+\alpha q)}\right)}\right]^p \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\Delta_a t}{2(p+\alpha q)}\right)}{\left(\frac{\alpha\Delta_a t}{2(p+\alpha q)}\right)}\right]^q \\ &= \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta_a t}{2\pi\,(p+\alpha q)}\right)\right]^p \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha\Delta_a t}{2\pi\,(p+\alpha q)}\right)\right]^q. \end{aligned} \tag{3.48}$$

### 3.3.3. Forma polinómica de las funciones $\alpha$-spline de tipo II en frecuencia

Con la misma filosofía utilizada con las funciones de la familia de tipo I, anteriormente definidas, conviene expresar las funciones $\alpha$-spline de tipo II en el dominio de la frecuencia en forma de funciones polinómicas; para lograrlo vamos a proceder de modo totalmente equivalente a como se hizo en la subsección 3.1.3 utilizando la definición y las propiedades de la función gamma de Euler $\Gamma(x)$. Con idéntica notación, teniendo en cuenta el resultado dado en (3.16) y desarrollando las potencias de los binomios que aparecen en (3.47), podemos sucesivamente escribir

$$F_2^{[p,q]}(t) = \frac{(p+\alpha q)^{p+q}}{\alpha^q \Delta_a^{p+q}(-jt)^{(p+q)}} \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} C_{kl} e^{j\gamma_{\alpha,kl}\Delta_a t},$$

$$F_2^{[p,q]}(t) = \frac{2\pi(p+\alpha q)^{p+q}}{\alpha^q \Delta_a^{p+q}(p+q-1)!} \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} C_{kl} e^{j\gamma_{\alpha,kl}\Delta_a t} w_{p+q-1}(t), \tag{3.49}$$

donde los parámetros $C_{kl}$ y $\gamma_{\alpha,kl}$ que aparecen en (3.49) vienen dados por

$$C_{kl} = (-1)^{(k+l)} \left( \begin{array}{c} p \\ k \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} q \\ l \end{array} \right) \tag{3.50}$$

y

$$\gamma_{\alpha,kl} = \left( \frac{k+\alpha l}{p+\alpha q} - \frac{1}{2} \right). \tag{3.51}$$

Calculando la transformada de Fourier de (3.49), y haciendo uso de las propiedades de linealidad y de desplazamiento en frecuencia, se obtiene

$$\begin{aligned} \Psi_2^{[p,q]}(\Omega) &= \mathfrak{F}\{F_2^{[p,q]}(t)\} = \frac{2\pi(p+\alpha q)^{p+q}}{\alpha^q \Delta_a^{p+q}(p+q-1)!} \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} C_{kl} W_{p+q-1}(\Omega - \gamma_{\alpha,kl}\Delta_a) \\ &= \frac{2\pi(p+\alpha q)^{p+q}}{\alpha^q \Delta_a^{p+q}(p+q-1)!} \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{\Omega - \gamma_{\alpha,kl}\Delta_a\right\}_+^{p+q-1} \\ &= \frac{2\pi(p+\alpha q)^{p+q}}{\alpha^q \Delta_a (p+q-1)!} \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{ \frac{\Omega}{\Delta_a} - \gamma_{\alpha,kl} \right\}_+^{p+q-1}. \end{aligned} \tag{3.52}$$

En la figura 3.6 se muestra una función de la familia $\alpha$-spline de tipo II donde se ponen de manifiesto tanto su limitación espectral, como su forma y valor máximo que son dependientes de los valores $p$, $q$ y $\alpha$. El valor máximo se alcanza en $\Omega = 0$ y toma el valor

$$A_{2,\max}^{[p,q]} = \frac{2\pi(p+\alpha q)^{p+q}}{\alpha^q \Delta_a (p+q-1)!} \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{k+\alpha l}{p+\alpha q} \right\}_+^{p+q-1}. \tag{3.53}$$

## 3.4. Funciones $\alpha$-spline de tipo II en tiempo discreto

De idéntica manera a la expuesta en la sección 3.2, pasamos a definir las funciones $\alpha$-spline de tipo II en la frecuencia $\omega$ asociada al tiempo discreto.

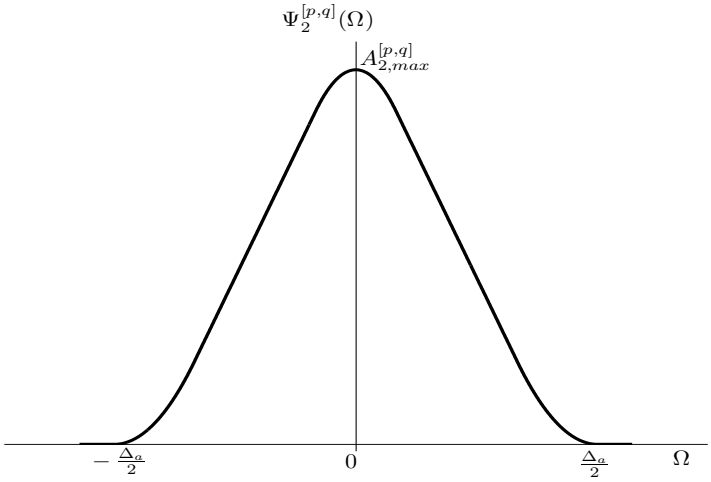


**Figura 3.6** – Función $\alpha$-spline en el dominio de la frecuencia ($\Psi_2^{[p,q]}(\Omega)$).

### 3.4.1. Definición

Como en el caso analógico, vamos a considerar aquí dos tipos de pulsos rectangulares, donde los subíndices $d$ nos van a indicar el ámbito discreto de trabajo, definidos como

$$\phi_d(\omega) = \begin{cases} \frac{2\pi(p+\alpha q)}{\Delta_d}, & |\omega| < \frac{\Delta_d}{2(p+\alpha q)}, \\ 0, & \frac{\Delta_d}{2(p+\alpha q)} < |\omega| < \pi, \end{cases} \tag{3.54}$$

$$\phi_{\alpha,d}(\omega) = \begin{cases} \frac{2\pi(p+\alpha q)}{\alpha\Delta_d}, & |\omega| < \frac{\alpha\Delta_d}{2(p+\alpha q)}, \\ 0, & \frac{\alpha\Delta_d}{2(p+\alpha q)} < |\omega| < \pi, \end{cases} \tag{3.55}$$

donde $\alpha$, $p$ y $q$ son los mismos parámetros que se han usado en el caso analógico, siendo $\Delta_d$ un parámetro con dimensiones de radianes por muestra, es decir, una pulsación $\omega$ que nos indica la anchura espectral de las funciones $\alpha$-spline en tiempo discreto, resultante del proceso de $(p+q-1)$ convoluciones en frecuencia que involucra $p$ funciones pulso $\phi_d(\omega)$ y $q$ funciones pulso $\phi_{\alpha,d}(\omega)$ y que se denota por $\Psi_{2d}^{[p,q]}(\omega)$; es decir,

$$\Psi_{2d}^{[p,q]}(\omega) = \overbrace{\phi_d(\omega) * \ldots * \phi_d(\omega)}^{(p-1)\ veces} * \overbrace{\phi_{\alpha,d}(\omega) * \ldots * \phi_{\alpha,d}(\omega)}^{(q-1)\ veces}. \tag{3.56}$$

Con la notación empleada en la subsección 3.2.1, el cálculo de la DTFT inversa de (3.54), (3.55) y (3.56) puede hacerse de la misma manera que en el caso analógico, resultando las siguientes secuencias de tiempo discreto; para la primera

$$f_{2d}[n] = \mathfrak{F}^{-1}\{\phi_d(\omega)\} = \frac{p+\alpha q}{\Delta_d(-jn)}\left[e^{-\frac{j\Delta_d n}{2(p+\alpha q)}} - e^{\frac{j\Delta_d n}{2(p+\alpha q)}}\right], \tag{3.57}$$

o, en términos de funciones sinusoidales y/o funciones "sinc"

$$f_{2d}[n] = \frac{\text{sen}\{(\Delta_d n)/(2(p+\alpha q))\}}{\Delta_d n/(2(p+\alpha q))} = \text{sinc}\left[\frac{\Delta_d n}{2\pi(p+\alpha q)}\right]. \tag{3.58}$$

De modo similar, para la segunda

$$\begin{aligned} f_{\alpha,2d}[n] &= \mathfrak{F}^{-1}\{\phi_{\alpha,d}(\omega)\} = \frac{p+\alpha q}{\alpha\Delta_d(-jn)}\left[e^{-\frac{j\alpha\Delta_d n}{2(p+\alpha q)}} - e^{\frac{j\alpha\Delta_d n}{2(p+\alpha q)}}\right] \\ &= \frac{\text{sen}\{(\alpha\Delta_d n)/(2(p+\alpha q))\}}{\alpha\Delta_d n/(2(p+\alpha q))} = \text{sinc}\left[\frac{\alpha\Delta_d n}{2\pi(p+\alpha q)}\right]. \end{aligned} \tag{3.59}$$

De las propiedades de la convolución y teniendo en cuenta las expresiones (3.57) y (3.59) obtenemos la DTFT inversa de $\Psi_{2d}^{[p,q]}(\omega)$, que resulta ser

$$\begin{aligned} F_{2d}^{[p,q]}[n] &= \mathfrak{F}^{-1}\left\{\Psi_{2d}^{[p,q]}(\omega)\right\} = (f_{2d}[n])^p\,(f_{\alpha,2d}[n])^q \\ &= \frac{(p+\alpha q)^{p+q}}{\alpha^q\Delta_d^{p+q}(-jn)^{p+q}}\frac{\left[e^{-\frac{j\Delta_d n}{2(p+\alpha q)}} - e^{\frac{j\Delta_d n}{2(p+\alpha q)}}\right]^p}{\left[e^{-\frac{j\alpha\Delta_d n}{2(p+\alpha q)}} - e^{\frac{j\alpha\Delta_d n}{2(p+\alpha q)}}\right]^{-q}} \\ &= \left[\frac{\text{sen}\{(\Delta_d n)/(2(p+\alpha q))\}}{\Delta_d n/(2(p+\alpha q))}\right]^p\left[\frac{\text{sen}\{(\alpha\Delta_d n)/(2(p+\alpha q))\}}{\alpha\Delta_d n/(2(p+\alpha q))}\right]^q. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Desarrollando las potencias de los binomios que aparecen en (3.60) podemos reescribir la función en la forma

$$F_{2d}^{[p,q]}[n] = \frac{(p+\alpha q)^{p+q}}{\alpha^q\Delta_d^{p+q}(-jn)^{(p+q)}}\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} C_{kl}e^{j\gamma_{\alpha,kl}\Delta_d n}, \tag{3.61}$$

donde $C_{kl}$ y $\gamma_{\alpha,kl}$ son los mismos que en (3.49).

### 3.4.2. Forma polinómica de las funciones $\alpha$-spline de tipo II

Con el fin de obtener una expresión en forma polinómica de las funciones $\alpha$-spline de tipo II, en primer lugar se va a determinar la TFTD de (3.61) y para ello se utiliza la misma función de apoyo $Y_{+,\ell}(\omega)$ que se tuvo en cuenta en la subsección 3.2.2. Teniendo en cuenta las propiedades y los resultados que en la misma se citan, entonces el factor $(-jn)^{p+q}$ que aparece en (3.61) se puede substituir por

$$\frac{1}{(-jn)^{p+q}} = \frac{2\pi y_{p+q-1}[n]}{(p+q-1)!}, \tag{3.62}$$

y la secuencia temporal $F_{2d}^{[p,q]}[n]$ dada por (3.61), se transforma en

$$F_{2d}^{[p,q]}[n] = \frac{2\pi(p+\alpha q)^{p+q}}{\alpha^q \Delta_d^{p+q}(p+q-1)!} \cdot \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} C_{kl} e^{j\gamma_{\alpha,kl}\Delta_d n} y_{p+q-1}[n]. \tag{3.63}$$

Calculando la TFTD de (3.63) y utilizando las propiedades de linealidad y desplazamiento en frecuencia, podemos expresar las funciones $\alpha$-spline de tipo II en tiempo discreto $\Psi_{2d}^{[p,q]}(\omega) = \mathfrak{F}\left\{F_{1d}^{[p,q]}[n]\right\}$ como

$$\begin{aligned}
\Psi_{2d}^{[p,q]}(\omega) &= \frac{2\pi(p+\alpha q)^{p+q}}{\alpha^q \Delta_d^{p+q}(p+q-1)!} \cdot \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} C_{kl} Y_{+,p+q+1}(\omega - \gamma_{\alpha,kl}\Delta_d) \\
&= \frac{2\pi(p+\alpha q)^{p+q}}{\alpha^q \Delta_d^{p+q}(p+q-1)!} \cdot \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{\omega - \gamma_{\alpha,kl}\Delta_d\right\}_+^{p+q-1} \\
&= \frac{2\pi(p+\alpha q)^{p+q}}{\alpha^q \Delta_d (p+q-1)!} \cdot \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{\frac{\omega}{\Delta_d} - \gamma_{\alpha,kl}\right\}_+^{p+q-1},
\end{aligned} \tag{3.64}$$

que es una función periódica de periodo $2\pi$ y que por tanto restringiremos el estudio al intervalo $-\pi < \omega \leq \pi$. Estas funciones $\Psi_{2d}^{[p,q]}(\omega)$ son distintas de cero en el intervalo espectral $-\Delta_d/2 < \omega < \Delta_d/2$, y donde se debe exigir que $|\omega| < \pi$ y $|\Delta_d| < \pi$.

La figura 3.6 también es representativa de las funciones dadas en (3.64) sin mas que cambiar $\Omega$ por $\omega$ y $\Delta_a$ por $\Delta_d$. El valor máximo de estas funciones, dependiente de los valores de los parámetros $p$, $q$, y $\alpha$, se alcanza en $\omega = 0$ y, de modo equivalente a (3.53), se escribe

$$A_{2d,max}^{[p,q]}(\omega = 0) = \frac{2\pi(p+\alpha q)^{p+q}}{\alpha^q \Delta_d (p+q-1)!} \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{\frac{1}{2} - \frac{k+\alpha l}{p+\alpha q}\right\}_+^{p+q-1}. \tag{3.65}$$

En la figura 3.7 se muestran los diferentes perfiles de las funciones $\alpha$-spline de tipo II en función de la pulsación $\omega$ para un valor concreto del ancho espectral, $\Delta_d = 0.1\pi$, y diferentes valores de los parámetros que definen las distintas funciones como son el número de pulsos de cada uno de los tipos que intervienen en su construcción $p$ y $q$, y diferentes valores de $\alpha$, elemento que controla el ancho del segundo tipo de pulsos. Estas representaciones se han obtenido mediante simulaciones que calculan la respuesta en frecuencia de $F_{2d}^{[p,q]}[n]$ dada por la ecuación (3.60). Se han usado los mismos valores de los parámetros que en la simulación de las funciones $\alpha$-spline de tipo I que aparecen en la figura 3.3. En la misma se observa que las funciones van cambiando su forma con los valores de los parámetros de definición $p$, $q$ y $\alpha$; pero, con independencia de los valores de los parámetros anteriores, el ancho espectral de todas las funciones $\alpha$-spline de tipo II se mantiene constante, e igual a $\Delta_d$. Esta propiedad puede apreciarse mejor en las ampliaciones de las respuestas en frecuencia de las mismas, en las proximidades de los

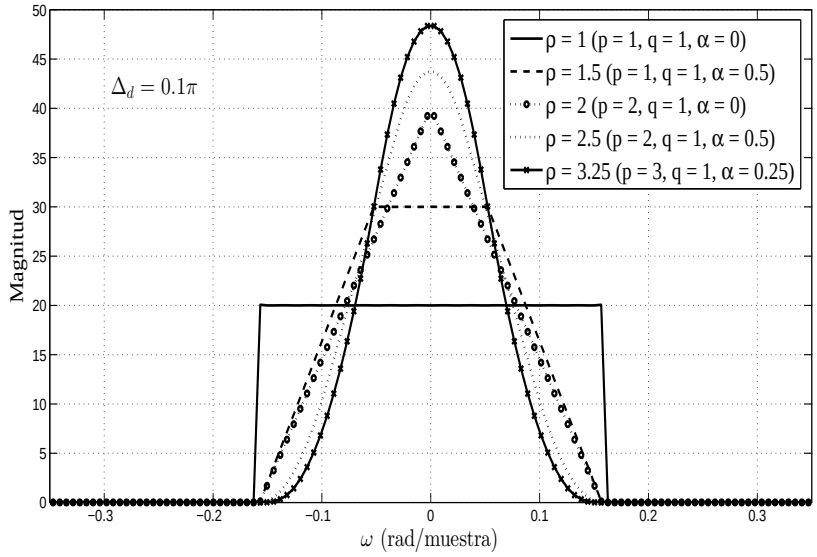


**Figura 3.7** – Funciones $\alpha$-spline de tipo II ($\Psi_2^{[p,q]}(\omega)$).

puntos donde se anulan las funciones, que se muestran en la figura 3.8. Esta última propiedad puede ser de utilidad en el control de la atenuación de la banda eliminada en el diseño de filtros.

## 3.5. Funciones $\alpha$-spline modificadas: Funciones $\alpha$-spline de tipo III

En esta sección se va a proponer una nueva familia de funciones $\alpha$-spline, que pretende ser un compromiso intermedio entre las familias de funciones $\alpha$-spline antes definidas. Al igual que hicimos con las familias previas, definiremos esta tercera familia de funciones $\alpha$-spline, a la que denotaremos como $\alpha$-spline de tipo III, tanto en el tiempo continuo como en el tiempo discreto. Estas funciones se van a caracterizar porque su anchura espectral dependerá tanto del parámetro $\Delta_a$ o $\Delta_d$, como del parámetro $\alpha$, pero será independiente del número de pulsos que se convolucionen para su formación.

Los desarrollos son totalmente análogos a los de las secciones previas, por lo que no entraremos en detalles de demostraciones, presentando solo las formas funcionales finales de dichas funciones, tanto en el dominio del tiempo continuo como en el dominio del tiempo discreto.

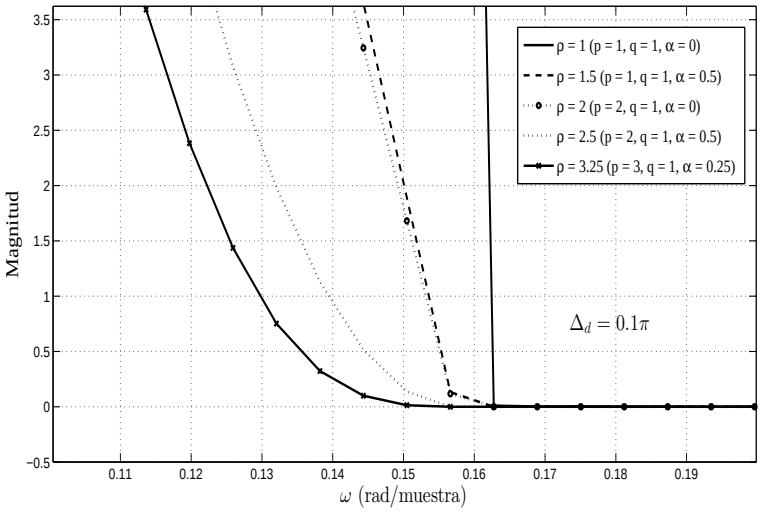


**Figura 3.8** – Detalle de las funciones $\alpha$-spline de tipo II ($\Psi_2^{[p,q]}(\omega)$).

### 3.5.1. Funciones $\alpha$-spline de tipo III en tiempo continuo

Los dos tipos de pulsos, con idéntica notación que en las subsecciones 3.1.1 o 3.3.1, tienen la forma funcional

$$\varrho\left(\Omega\right) = \begin{cases} \frac{2\pi p}{\Delta_a}, & |\Omega| < \frac{\Delta_a}{2p}, \\ 0, & \text{en otras frecuencias}, \end{cases} \tag{3.66}$$

$$\varrho_\alpha\left(\Omega\right) = \begin{cases} \frac{2\pi q}{\alpha\Delta_a}, & |\Omega| < \frac{\alpha\Delta_a}{2q}, \\ 0, & \text{en otras frecuencias}. \end{cases} \tag{3.67}$$

El soporte compacto asociado a las funciones $\alpha$-spline de tipo III se extiente al intervalo $[-(1+\alpha)\Delta_a/2, (1+\alpha)\Delta_a/2]$.

Por medio de la convolución de $p$ pulsos de la forma dada por (3.66) y $q$ pulsos de la forma dada por (3.67) y siguiendo la metodología desarrollada en las secciones 3.1 o 3.3, se obienen las funciones de la familia $\alpha$-spline de tipo III en el dominio de la frecuencia, $\Psi_3^{[p,q]}(\Omega)$. Su forma general es

$$\Psi_3^{[p,q]}(\Omega) = \frac{2\pi p^p q^q}{\alpha^q \Delta_a (p+q-1)!} \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{ \frac{\Omega}{\Delta_a} - \vartheta_{\alpha,kl} \right\}_+^{p+q-1}, \tag{3.68}$$

donde el parámetro $\vartheta_{\alpha,kl}$ viene dado por la expresión

$$\vartheta_{\alpha,kl} = \left(\frac{k}{p} + \alpha\frac{l}{q}\right) - \left(\frac{1+\alpha}{2}\right). \tag{3.69}$$

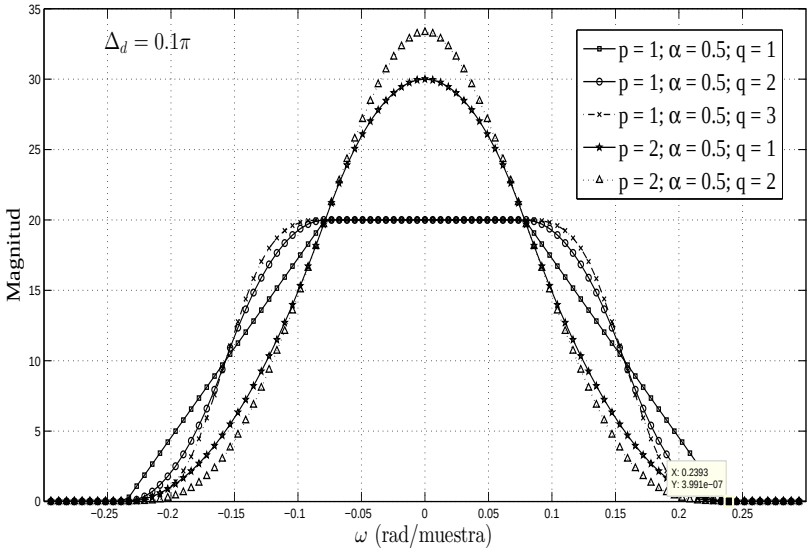


**Figura 3.9** – Funciones $\alpha$-spline de tipo III ($\Psi_3^{[p,q]}(\omega)$).

Mediante la transformada de Fourier inversa de tiempo continuo se determinan sus funciones asociadas en el dominio temporal $F_3^{[p,q]}(t)$. Su forma general es

$$F_3^{[p,q]}(t) = \mathfrak{F}^{-1}[\Psi_3^{[p,q]}(\Omega)] = \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta_a t}{2\pi p}\right)^p \operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha\Delta_a t}{2\pi q}\right)^q. \tag{3.70}$$

## 3.5.2. Funciones $\alpha$-spline de tipo III en tiempo discreto

Todo el proceso se repite como en las secciones 3.2 o 3.4, dando como resultado las funciones $\alpha$-spline de tipo III que adoptan la misma forma funcional que las obtenidas en el dominio del tiempo continuo sin más que cambiar $\Omega$ por $\omega$ y $t$ por $n$. Sus formas generales, en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo, respectivamente, son

$$\Psi_{3d}^{[p,q]}(\omega) = \frac{2\pi p^p q^q}{\alpha^q \Delta_d (p+q-1)!} \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{ \frac{\omega}{\Delta_d} - \vartheta_{\alpha,kl} \right\}_+^{p+q-1}, \tag{3.71}$$

y

$$F_{3d}^{[p,q]}[n] = \mathfrak{F}^{-1}[\Psi_{3d}^{[p,q]}(\omega)] = \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta_d n}{2\pi p}\right)^p \operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha\Delta_d n}{2\pi q}\right)^q. \tag{3.72}$$

En la figura 3.9 se muestran los diferentes perfiles de las funciones $\alpha$-spline de tipo III en función de la frecuencia $\omega$ para unos valores concretos de los parámetros que aparecen en la definición de los pulsos de partida, $\Delta_d = 0.1\pi$ y $\alpha = 0.5$, y diferentes valores del número de pulsos de cada uno de los tipos que intervienen en su construcción $p$ y $q$. Estas representaciones se han obtenido mediante simulaciones que calculan la respuesta en frecuencia de $F_{3d}^{[p,q]}[n]$ dada por la ecuación (3.72). En la figura mencionada

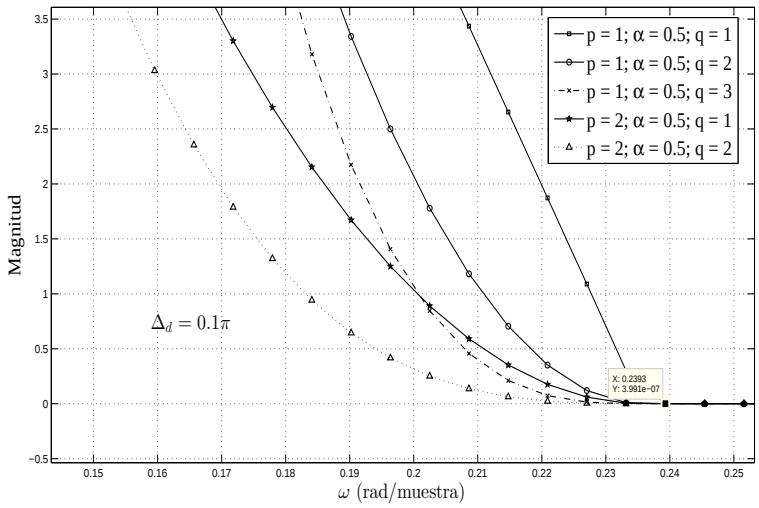


**Figura 3.10** – Detalle de funciones $\alpha$-spline de tipo III ($\Psi_3^{[p,q]}(\omega)$).

se puede observar, al haber utilizado para todos los perfiles el mismo valor del parámetro $\alpha$, que el ancho espectral de todas las funciones $\alpha$-spline se mantiene constante, e igual a $(1+\alpha)\Delta_d$, con independencia del número de pulsos $p$ y $q$ utilizados, variando tan solo su forma. Esta propiedad se visualiza con mayor detalle en la figura 3.10. Esta familia de funciones puede ser de utilidad para conseguir una mayor flexibilidad en el ajuste de la elección de la anchura teórica de la banda de transición, debido a la manera de cómo se define la anchura de la banda de transición en la práctica.

## 3.6. Tiempo continuo - Tiempo discreto. Consideraciones y comentarios

La apariencia formal entre las formas funcionales de las ecuaciones (3.20) y (3.39), entre (3.52) y (3.64), o entre (3.68) y (3.71) no debe hacernos perder la perspectiva de las diferencias fundamentales que están implícitas en ellas y que están relacionadas con el muestreo periódico de señales analógicas y la velocidad de dicho muestreo. En este sentido si llamamos $T$ al tiempo transcurrido entre dos muestras de la señal analógica tomadas sucesivamente, y a su inversa $F^* = 1/T$ frecuencia (o velocidad) de muestreo, entonces debe existir una relación entre las variables $t$ en tiempo continuo y $n$ en tiempo discreto de la forma $t = nT = n/F^*$, y por tanto existirá una correspondencia entre las variables frecuencia $\Omega$ $(F)$ de las señales analógicas y sus equivalentes $\omega$ $(f)$ en tiempo discreto que pueden escribirse como $\omega = \Omega T$ $(f = F/F^*)$. Este proceso de muestreo nos conduce a una relación entre dos rangos frecuenciales notablemente diferentes; así al rango finito en el dominio discreto, $-\pi < \omega < \pi$ $(-1/2 < f < 1/2)$, se le debe asociar

un rango infinito en el dominio continuo, $-\infty < \Omega < \infty$ ($-\infty < F = \Omega/(2\pi) < \infty$), y por tanto al valor máximo frecuencial en tiempo discreto $\omega_{\max} = \pi$ ($f_{\max} = 1/2$) se le debe asociar un valor máximo de frecuencia de la señal analógica dado por $\Omega_{\max} = \pi/T = \pi F^*(F_{\max} = F^*/2)$. Esto conduce a ambigüedades en las frecuencias y nos fija un límite en la frecuencia máxima, ($F_{\max} = F^*/2$), que puede determinarse univocamente a partir de un muestreo realizado a una velocidad fijada de antemano. Todo esto está intimamente ligado con el concepto de señales de banda limitada y con el teorema del muestreo [125], [30], [126]. En lo que sigue se supondrá que siempre que aparezcan señales analógicas, éstas verifican todas las limitaciones que impone el teorema del muestreo.

## 3.7. Familias de funciones $\alpha$-spline: Recopilación

Se muestran en esta sección, con el fin de hacerlas más visibles, las formas funcionales, en tiempo y frecuencia, de las distintas familias definidas, tanto en el ámbito del tiempo continuo como en el del tiempo discreto.

La familia $\alpha$-spline de tipo I en tiempo continuo viene dada por funciones que se pueden expresar en los dominios del tiempo o de la frecuencia a través de la transformada de Fourier de tiempo continuo, esto es $F_1^{[p,q]}(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \Psi_1^{[p,q]}(\Omega)$. Su forma general en el dominio de la frecuencia adopta la forma

$$\Psi_1^{[p,q]}(\Omega) = \frac{2\pi}{\alpha^q \Delta_a (p+q-1)!} \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{ \frac{\Omega}{\Delta_a} - \eta_{\alpha,kl} \right\}_+^{p+q-1}, \tag{3.73}$$

mientras que en el dominio temporal se escribe

$$\begin{aligned} F_1^{[p,q]}(t) &= \left[ \operatorname{sinc}\left( \frac{\Delta_a t}{2\pi} \right) \right]^p \left[ \operatorname{sinc}\left( \frac{\alpha \Delta_a t}{2\pi} \right) \right]^q \\ &= \left[ \frac{\operatorname{sen}(\Delta_a t/2)}{(\Delta_a t/2)} \right]^p \left[ \frac{\operatorname{sen}(\alpha \Delta_a t/2)}{(\alpha \Delta_a t/2)} \right]^q . \end{aligned} \tag{3.74}$$

Con similares consideraciones en el dominio discreto, por medio de la transformada de Fourier de tiempo discreto, $F_{1d}^{[p,q]}[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \Psi_{1d}^{[p,q]}(\omega)$, la forma general de la representación en frecuencia de las funciones $\alpha$-spline de tipo I resulta ser

$$\Psi_{1d}^{[p,q]}(\omega) = \frac{2\pi}{\alpha^q \Delta_d (p+q-1)!} \cdot \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{ \frac{\omega}{\Delta_d} - \eta_{\alpha,kl} \right\}_+^{p+q-1}, \tag{3.75}$$

mientras que la representación temporal es

$$\begin{aligned} F_{1d}^{[p,q]}[n] &= \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta_d n}{2\pi}\right)\right]^p \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha\Delta_d n}{2\pi}\right)\right]^q \\ &= \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\Delta_d n/2\right)}{(\Delta_d n/2)}\right]^p \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\alpha\Delta_d n/2\right)}{(\alpha\Delta_d n/2)}\right]^q, \end{aligned} \tag{3.76}$$

donde los parámetros $C_{kl}$ y $\eta_{\alpha,kl}$ vienen dados por

$$C_{kl} = (-1)^{(k+l)} \left( \begin{array}{c} p \\ k \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} q \\ l \end{array} \right),$$

y

$$\eta_{\alpha,kl} = \left[(k+\alpha l) - \frac{1}{2}(p+\alpha q)\right].$$

La familia $\alpha$-spline de tipo II en tiempo continuo viene dada por funciones que se pueden expresar en los dominios del tiempo o de la frecuencia a través de la transformada de Fourier de tiempo continuo, es decir $F_2^{[p,q]}(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \Psi_2^{[p,q]}(\Omega)$. Su forma general en el dominio de la frecuencia adopta la forma

$$\Psi_2^{[p,q]}(\Omega) = \frac{2\pi(p+\alpha q)^{p+q}}{\alpha^q \Delta_a (p+q-1)!} \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{ \frac{\Omega}{\Delta_a} - \gamma_{\alpha,kl} \right\}_+^{p+q-1}, \tag{3.77}$$

y su forma temporal es

$$\begin{aligned} F_2^{[p,q]}(t) &= \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta_a t}{2\pi\,(p+\alpha q)}\right)\right]^p \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha\Delta_a t}{2\pi\,(p+\alpha q)}\right)\right]^q \\ &= \left[\frac{\operatorname{sen}\left\{(\Delta_a t)/(2(p+\alpha q))\right\}}{(\Delta_a t)/(2(p+\alpha q))}\right]^p \left[\frac{\operatorname{sen}\left\{(\Delta_a t)/(2(p+\alpha q))\right\}}{(\Delta_a t)/(2(p+\alpha q))}\right]^q. \end{aligned} \tag{3.78}$$

En el dominio discreto, $F_{2d}^{[p,q]}[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \Psi_{2d}^{[p,q]}(\omega)$, la forma general de la representación en frecuencia de las funciones $\alpha$-spline de tipo II resulta ser

$$\Psi_{2d}^{[p,q]}(\omega) = \frac{2\pi(p+\alpha q)^{p+q}}{\alpha^q \Delta_d (p+q-1)!} \times \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{ \frac{\omega}{\Delta_d} - \gamma_{\alpha,kl} \right\}_+^{p+q-1}, \tag{3.79}$$

y la forma temporal es

$$\begin{aligned} F_{2d}^{[p,q]}[n] &= \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta_d n}{2\pi(p+\alpha q)}\right)\right]^p \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha\Delta_d n}{2\pi(p+\alpha q)}\right)\right]^q \\ &= \left[\frac{\operatorname{sen}\left\{\Delta_d n/(2(p+\alpha q))\right\}}{\Delta_d n/(2(p+\alpha q))}\right]^p \left[\frac{\operatorname{sen}\left\{\alpha\Delta_d n/(2(p+\alpha q))\right\}}{\alpha\Delta_d n/(2(p+\alpha q))}\right]^q, \end{aligned} \tag{3.80}$$

donde el parámetro $\gamma_{\alpha,kl}$ viene dado por la expresión

$$\gamma_{\alpha,kl} = \left( \frac{k+\alpha l}{p+\alpha q} - \frac{1}{2} \right).$$

La familia $\alpha$-spline de tipo III en tiempo continuo viene dada por funciones que se pueden expresar en los dominios del tiempo o de la frecuencia a través de la transformada de Fourier de tiempo continuo, esto es $F_3^{[p,q]}(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \Psi_3^{[p,q]}(\Omega)$. Su forma general en el dominio de la frecuencia adopta la forma

$$\Psi_3^{[p,q]}(\Omega) = \frac{2\pi p^p q^q}{\alpha^q \Delta_a (p+q-1)!} \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{ \frac{\Omega}{\Delta_a} - \vartheta_{\alpha,kl} \right\}_+^{p+q-1}, \tag{3.81}$$

y su forma temporal es

$$\begin{aligned} F_3^{[p,q]}(t) &= \operatorname{sinc}\left( \frac{\Delta_a t}{2\pi p} \right)^p \operatorname{sinc}\left( \frac{\alpha \Delta_a t}{2\pi q} \right)^q \\ &= \left[ \frac{\operatorname{sen}\{\Delta_a t/(2p)\}}{\Delta_a t/(2p)} \right]^p \left[ \frac{\operatorname{sen}\{\alpha \Delta_a t/(2q)\}}{\alpha \Delta_a t/(2q)} \right]^q, \end{aligned} \tag{3.82}$$

En el dominio discreto, $F_{3d}^{[p,q]}[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \Psi_{3d}^{[p,q]}(\omega)$, la forma general de la representación en frecuencia de las funciones $\alpha$-spline de tipo III resulta ser

$$\Psi_{3d}^{[p,q]}(\omega) = \frac{2\pi p^p q^q}{\alpha^q \Delta_d (p+q-1)!} \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{ \frac{\omega}{\Delta_d} - \vartheta_{\alpha,kl} \right\}_+^{p+q-1}, \tag{3.83}$$

y su forma temporal es

$$\begin{aligned} F_{3d}^{[p,q]}[n] &= \operatorname{sinc}\left( \frac{\Delta_d n}{2\pi p} \right)^p \operatorname{sinc}\left( \frac{\alpha \Delta_d n}{2\pi q} \right)^q \\ &= \left[ \frac{\operatorname{sen}\{\Delta_d n/(2p)\}}{\Delta_d n/(2p)} \right]^p \left[ \frac{\operatorname{sen}\{\alpha \Delta_d n/(2q)\}}{\alpha \Delta_d n/(2q)} \right]^q, \end{aligned} \tag{3.84}$$

donde el parámetro $\vartheta_{\alpha,kl}$ viene dado por la expresión

$$\vartheta_{\alpha,kl} = \left( \frac{k}{p} + \alpha \frac{l}{q} \right) - \left( \frac{1+\alpha}{2} \right).$$

# Capítulo 4

# Formulación de filtros mediante funciones $\alpha$-spline

En el capítulo 3 se han presentado varias familias de funciones $\alpha$-spline, a las que hemos denominado de tipo I, II y III, y se han caracterizado en el dominio del tiempo continuo o discreto y en el dominio de la frecuencia. Ambas pueden ser utilizadas para el modelado de la banda de transición de filtros analógicos y digitales, como se verá en este capítulo.

## 4.1. Consideraciones generales

Con carácter general, el planteamiento de diseño se inicia dando la respuesta en frecuencia del filtro que queremos obtener. Ciñéndonos al entorno de tiempo discreto, sea $H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega)$ la función representativa de la respuesta en frecuencia deseada. Teniendo en cuenta que dichas funciones son periódicas, de periodo $2\pi$, entonces se puede escribir como una serie de Fourier en la forma

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} h_d[n]e^{-j\omega n}, \tag{4.1}$$

donde los valores $h_d[n]$ son los coeficientes de la respuesta al impulso del sistema, que vienen dados por

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega, \quad -\infty < n < \infty. \tag{4.2}$$

En gran parte de las aplicaciones prácticas, la respuesta en frecuencia que se pretende obtener es constante en distintos intervalos de frecuencia con transiciones bruscas entre cada intervalo, lo que provoca que la respuesta al impulso sea de longitud infinita y no causal.

Así, si por ejemplo se desea obtener un filtro ideal paso-bajo con frecuencia de corte $\omega_c$, su respuesta al impulso es $h_d[n] = \text{sen}(\omega_c n)/(\pi n)$. Los valores de esta secuencia tienden a cero a medida que $n \to \infty$, pero este decaimiento lo hace como $1/n$, por lo que dicha secuencia, $h_d[n]$, no es absolutamente sumable. En consecuencia, la suma infinita (4.1) no converge uniformemente para todo valor de $\omega$ y el sistema es inestable. Para obtener una respuesta al impulso de longitud finita (la secuencia es ahora de longitud finita y por tanto absolutamente sumable), y poder implementar el sistema, hay que truncar la respuesta al impulso de longitud infinita en algún valor concreto.

El truncamiento de la respuesta al impulso de longitud infinita, derivada de las especificaciones de una respuesta en frecuencia con discontinuidades, presenta la característica indeseable de un comportamiento oscilatorio de la respuesta en frecuencia en las proximidades de los puntos de discontinuidad, conocido como fenómeno de Gibbs. La razón de esta oscilación hay que encontrarla en que la serie que se utiliza para representar la función está compuesta por funciones continuas y parece obvio que no se puede aproximar bien una discontinuidad sumando funciones continuas.

Matemáticamente esto quiere decir que la secuencia infinita no pertenece al espacio $l_1$, es decir, por mucho que aumentemos el número de términos de la serie (suma parcial de Fourier) que representa la función

$$S_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^{M} h_d[n] e^{-j\omega n},$$

el error $|H_d(e^{j\omega}) - S_M(e^{j\omega})|$ no se aproxima a cero cuando $M \to \infty$ para la frecuencia $\omega = \omega_c$, a pesar de que las oscilaciones convergen en posición hacia dicho punto. En ocasiones es de utilidad disponer de representaciones basadas en la transformada de Fourier de secuencias que no son absolutamente sumables ni de cuadrado sumable, para lo cual hay que recurrir a la teoría de funciones generalizada [127]. Usando esta teoría, se puede extender de forma rigurosa el concepto de representación mediante la transformada de Fourier a la clase de secuencias que se pueden expresar como suma de componentes discretas de frecuencia [128].

Para ilustrar este comportamiento oscilatorio se va a intentar reproducir, mediante un número finito de términos de la serie de Fourier, la función $f(t)$ periódica dada por

$$f(t) = \begin{cases} 2t/6, & 0 \leq t < 0.6, \\ 2(1-t), & 0.6 \leq t < 1, \end{cases} \tag{4.3}$$

la cual es discontinua en $t = 0.6$. La representación de la aproximación se muestra en la figura 4.1, y como se desprende de la contemplación de la misma el problema en la discontinuidad permanece a pesar de aumentar el número de términos de la aproximación. La partes cercanas a la discontinuidad se aproximan mejor a medida que $N$

aumenta, pero la fuerte oscilación en torno a la discontinuidad se hace más angosta pero se mantiene invariable.

Para ser más precisos, basándose en un teorema debido a Bôcher [129] que dice: *Sea $f(x)$ una función real de variable real, con período $2\pi$ de modo que tanto ella, $f(x)$, como su derivada, $f'(x)$, son continuas excepto para un número finito de discontinuidades de tipo salto. Sea $S_N(x)$ la suma parcial de Fourier de orden $N$. Entonces, se verifica que en un punto de discontinuidad $x = a$, las gráficas de las funciones $S_N(x)$ convergen al segmento vertical de longitud*

$$L = \frac{2}{\pi}\text{Intsinc}(\pi)|f(a_+) - f(a_-)|,$$

*centrado en el punto*

$$(a, 0.5(f(a_+) - f(a_-))),$$

*donde*

$$\text{Intsinc}(x) = \int_0^x \frac{\text{sen}(t)}{t} dt.$$

La misma demostración de este teorema puede encontrarse en [130] y [131].

La razón entre la longitud del segmento $L$ (al que tienden las gráficas de las sumas parciales) y la longitud del salto de la discontinuidad, es decir, $|f(a_+) - f(a_-)|$, es a lo que se denomina constante de Gibbs y su valor viene dado por

$$CG = \frac{2}{\pi}\text{Intsinc}(\pi).$$

La función $\text{Intsinc}(x)$ no tiene solución analítica, por lo que para su evaluación hacemos uso de la función "sinint" implementada en MATLAB. Su valor es $\text{sinint}(\pi) = 1.8519$, por lo que

$$CG = \frac{2}{\pi}\text{Intsinc}(\pi) = 0.1790;$$

esto quiere decir que hay una oscilación de aproximadamente el 9 % a uno y otro lado de la discontinuidad, del valor del salto, que en nuestro caso es la unidad.

Existen varias maneras de atenuar los valores de las oscilaciones, una de ellos es ponderar la respuesta impulsiva de longitud infinita con una ventana apropiada cuya respuesta impulsiva tienda suavemente a cero.

Una manera alternativa de reducir las oscilaciones debidas al fenómeno de Gibbs fue abordada de manera temprana en [132]. En este caso el procedimiento consiste en cambiar ligeramente las especificaciones de partida, consistentes en cambios abruptos entre las distintas bandas de la respuesta en frecuencia, por medio de una pequeña banda de transición que una las diferentes bandas contempladas en la respuesta en frecuencia de una manera continua. Los B-spline (o splines de órdenes naturales), consistentes en funciones polinómicas a trozos, son buenos candidatos para realizar dicha transición y

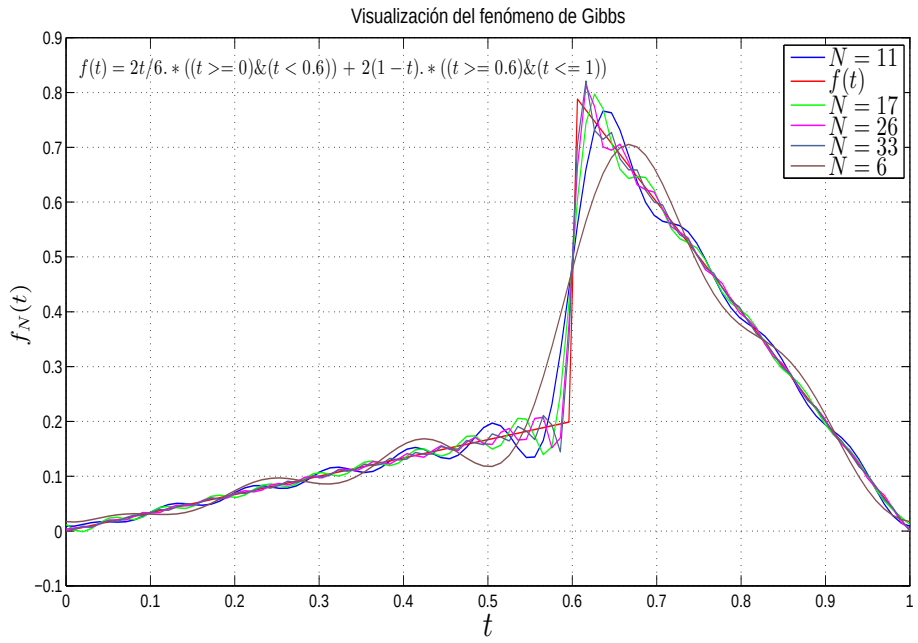


**Figura 4.1** – Aproximación mediante serie de Fourier de una función con discontinuidad.

han sido propuestos en [5] y [120] para lograr el objetivo anteriormente descrito. Para ilustrar el planteamiento del proceso nos centramos en un filtro paso-bajo, en el que unimos la banda de paso y la banda de rechazo del modo más sencillo, que consiste en la utilización de una línea recta. En nuestro entorno, dicha línea recta puede verse como un función B-spline de orden 1, y puede interpretrarse como la convolución de la respuesta en frecuencia ideal del filtro paso-bajo de frecuencia de corte $\omega_c$ con un rectángulo de anchura espectral $\Delta\omega << \omega_c$. En la figura 4.2 se representa la respuesta en frecuencia modificada de un filtro paso-bajo $H_{md}(e^{j\omega})$, donde se ha definido una anchura de la banda de transición $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$ en torno a la frecuencia de corte abrupto $\omega_c = (\omega_s + \omega_p)/2$.

Un modo sencillo y elegante de obtener la respuesta al impulso es, siguiendo a [133], por medio de la transformada de Fourier inversa de la derivada de $H_{md}(\omega)$ respecto de la frecuencia $\omega$. Efectivamente, la relación entre la respuesta en frecuencia y la respuesta al impulso viene dada por

$$H_{md}(\omega) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} h_{md}[n]e^{-j\omega n} \tag{4.4}$$

y, por tanto, su derivada se escribe como

$$G(\omega) = \frac{dH_{md}(\omega)}{d\omega} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} h_{md}[n]\frac{de^{-j\omega n}}{d\omega} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} -jnh_{md}[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} g[n]e^{-j\omega n}, \tag{4.5}$$

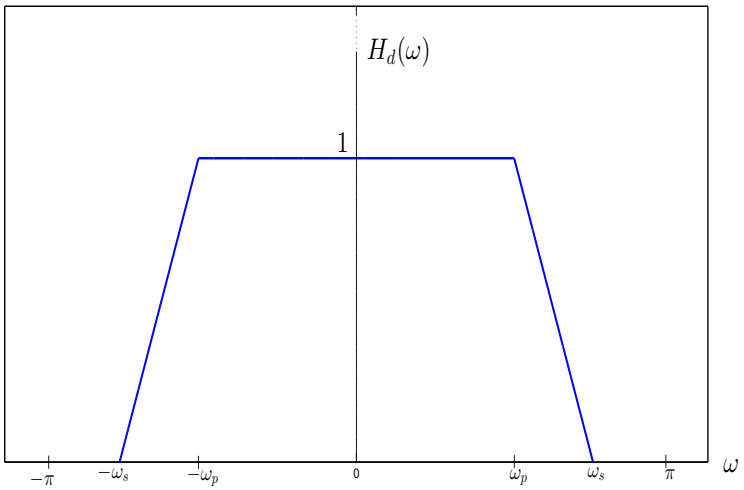


**Figura 4.2** – Respuesta en frecuencia modificada $H_{md}(\omega)$.

donde $g[n]$ es la respuesta al impulso de la función derivada $G(e^{j\omega}) = G(\omega)$, y de acuerdo con la relación (4.5) se relaciona con los coeficientes de la respuesta al impulso mediante la relación $h_{md}[n] = jg[n]/n$ . El cálculo de los coeficientes $g[n]$ se hace fácilmente, para cualquier valor de $n \neq 0$, por medio de la transformada de Fourier inversa de tiempo discreto

$$g[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(\omega)e^{j\omega n}d\omega. \tag{4.6}$$

A la vista de la figura 4.3 podemos poner

$$\begin{aligned} g[n] &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\omega_s}^{-\omega_p}\frac{1}{\Delta\omega}e^{j\omega n}d\omega + \int_{\omega_p}^{\omega_s}\frac{-1}{\Delta\omega}e^{j\omega n}d\omega\right] \\ &= \frac{1}{2\pi jn\Delta\omega}\left(e^{j\omega n}|_{-\omega_s}^{-\omega_p} - e^{j\omega n}|_{\omega_p}^{\omega_s}\right) \\ &= \frac{1}{j\pi\Delta\omega n}[\cos(\omega_p n) - \cos(\omega_s n)], \end{aligned} \tag{4.7}$$

y tomando en consideración la relación trigonométrica $\cos a - \cos b = -2\,\mathrm{sen}[(a+b)/2]\cdot \mathrm{sen}[(a-b)/2]$ la expresión anterior se transforma en

$$\begin{aligned} g[n] &= \frac{1}{j\pi\Delta\omega n}[\cos(\omega_p n) - \cos(\omega_s n)] \\ &= \frac{2}{j\pi\Delta\omega n}\mathrm{sen}\left(\frac{\omega_p+\omega_s}{2}n\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\omega_s-\omega_p}{2}n\right) \\ &= \frac{2}{j\pi\Delta\omega n}\mathrm{sen}(\omega_c n)\mathrm{sen}(\Delta\omega n/2), \end{aligned} \tag{4.8}$$

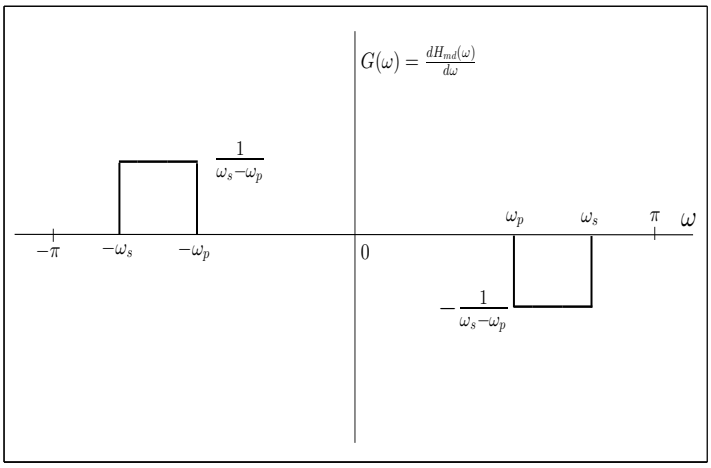


**Figura 4.3** – Derivada de la respuesta en frecuencia modificada $d(H_{md}(\omega))/d\omega$.

y, por tanto,

$$\begin{aligned} h_{md}[n] &= j\frac{g[n]}{n} = \frac{2}{\pi\Delta\omega n^2}\text{sen}(\omega_c n)\text{sen}(\Delta\omega n/2) \\ &= \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{\pi n}\frac{\text{sen}(\Delta\omega n/2)}{\Delta\omega n/2} = \frac{\omega_c}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right)\text{sinc}\left(\frac{\Delta\omega n}{2\pi}\right). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Si $n = 0$, entonces es más fácil utilizar la respuesta en frecuencia modificada, así

$$h_{md}[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{md}(\omega)d\omega, \tag{4.10}$$

representa el área bajo la curva dividido por el factor $2\pi$. De la contemplación de la forma de la figura 4.2, y teniendo en cuenta la expresión de la superficie de un trapecio, se deduce que

$$h_{md}[0] = \frac{1}{2\pi}\frac{2\omega_s + 2\omega_p}{2} = \frac{\omega_c}{\pi}. \tag{4.11}$$

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, la respuesta al impulso del filtro modificado es

$$h_{md}[n] = \frac{\omega_c}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right)\text{sinc}\left(\frac{\Delta\omega n}{2\pi}\right), \tag{4.12}$$

que puede interpretarse también como la respuesta impulsiva de un filtro paso-bajo ideal con frecuencia de corte $\omega_c$ ponderada por una función en el tiempo dada por $\text{sinc}(\Delta\omega n)/(2\pi)$.

## 4.2. Modelado de bandas de transición

Con la misma metodología de la sección previa, en este apartado se van a utilizar las funciones $\alpha$-spline, definidas en el capítulo 3, para el diseño de filtros digitales que contengan una banda de transición entre la banda de paso y la banda eliminada. La forma y la anchura de dicha banda de transición dependerá de la función concreta, perteneciente a alguna de las tres familias $\alpha$-spline propuestas, usada para tal fin.

La formulación se inicia especificando la respuesta en frecuencia ideal deseada que, para el caso de un filtro paso-bajo, es periódica con un periodo $2\pi$, y viene dada por

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi, \end{cases} \tag{4.13}$$

donde $\omega_c$ es la frecuencia de corte. Su respuesta al impulso $h_d[n]$ resulta

$$h_d[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} = \frac{\omega_c}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right). \tag{4.14}$$

### 4.2.1. Modelado mediante funciones $\alpha$-spline de tipo II

Para modificar la respuesta en frecuencia dada en (4.13), con el fin de lograr una transición suave entre las bandas, se van a convolucionar en el dominio de la frecuencia las funciones $\alpha$-spline, con la respuesta deseada o ideal del filtro objetivo $H_d(\omega)$. El desarrollo es idéntico para cualquiera de los tres tipos de funciones $\alpha$-spline definidos.

Para ilustrar el procedimiento se hace uso de las funciones $\alpha$-spline de tipo II, $\Psi_{2d}^{[p,q]}(\omega)$ dadas por (3.64), las cuales se caracterizaban por tener una anchura espectral fija $\Delta_d$, que era uno de los parámetros de definición de los pulsos de partida. Para los otros dos tipos, con un desarrollo similar, solo se dará el resultado final. El motivo de hacer el desarrollo para las funciones $\alpha$-spline de tipo II se debe a que las formulaciones de los filtros obtenidos serán las utilizadas para el diseño de los filtros FIR en el capítulo siguiente.

La operación de convolución, mostrada esquemáticamente en la figura 4.4, se expresa como

$$\begin{aligned} H_{md2}(\omega) = H_d(\omega) * \Psi_{2d}^{[p,q]}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\xi)\Psi_{2d}^{[p,q]}(\omega-\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega-\xi)\Psi_{2d}^{[p,q]}(\xi)d\xi, \end{aligned} \tag{4.15}$$

donde

$$H_d(\omega-\xi) = \begin{cases} 1, & |\omega-\xi| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega-\xi| < \pi. \end{cases}$$

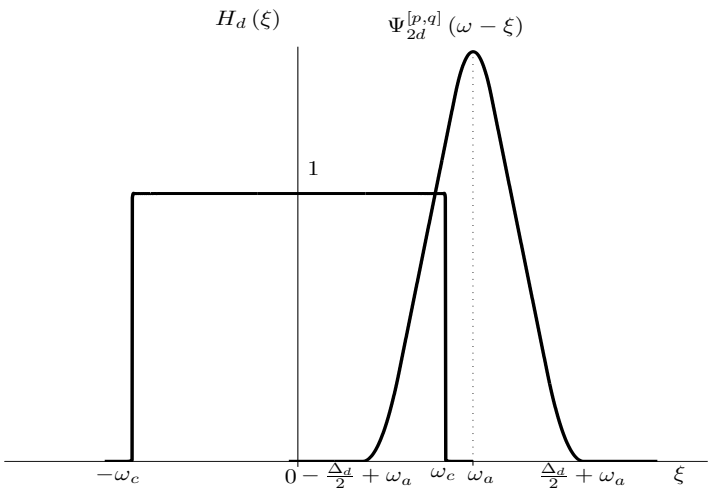


**Figura 4.4** – Proceso de convolución. Respuestas en frecuencia de un filtro paso-bajo ideal y de una función $\alpha$-spline.

Debido a que el integrando de (4.15) está compuesto por funciones polinómicas cuyos términos son de la forma $(\xi/\Delta_d - \gamma_{\alpha,kl})^{p+q-1}$, el proceso de convolución se realiza de forma inmediata si se divide el rango frecuencial $\omega$ en diferentes subintervalos que conducen a intersecciones no nulas entre las funciones a convolucionar, y que serán diferentes en cada zona contemplada.

Teniendo en cuenta que

$$\int \left(\frac{\xi}{\Delta_d} - \gamma_{\alpha,kl}\right)^{p+q-1} d\xi = \frac{\Delta_d}{p+q}\left(\frac{\xi}{\Delta_d} - \gamma_{\alpha,kl}\right)^{p+q}, \tag{4.16}$$

los resultados que se obtienen, en cada uno de los diferentes subintervalos que se especifican a continuación, son

1. Para $-\pi \leq \omega < -(\omega_c + \Delta_d/2)$, no hay intersección y la solución es

$$H_{md2}(\omega) = H_d(\omega-\xi)\Psi_{2d}^{[p,q]}(\xi) = 0.$$

2. Para $-(\omega_c+\Delta_d/2) \leq \omega < (-\omega_c+\Delta_d/2)$, la intersección no nula se produce para el rango de valores $-\Delta_d/2 < \xi < (\omega+\omega_c)$ de la variable de integración, y la solución es

$$H_{md2}(\omega) = B\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} C_{kl}\left\{\frac{\omega+\omega_c}{\Delta_d} - \gamma_{\alpha,kl}\right\}_{+}^{p+q},$$

donde

$$B = \frac{(p+\alpha q)^{p+q}}{(p+q)!\alpha^q}.$$

3. Para $(-\omega_c + \Delta_d/2) \leq \omega \leq (\omega_c - \Delta_d/2)$, la intersección no nula se produce para el rango de valores $-\Delta_d/2 < \xi < \Delta_d/2$ de la variable de integración, y la solución es

$$H_{md2}(\omega) = B \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{ 1 - \frac{k + \alpha l}{p + \alpha q} \right\}_{+}^{p+q} = 1.$$

4. Para $(\omega_c - \Delta_a/2) < \omega \leq (\omega_c + \Delta_d/2)$, la intersección no nula se produce para el rango de valores $(\omega - \omega_c) < \xi < \Delta_d/2$ de la variable de integración, y la solución es

$$H_{md2}(\omega) = 1 - B \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{ \frac{\omega - \omega_c}{\Delta_d} - \gamma_{\alpha,kl} \right\}_{+}^{p+q}.$$

5. Para $(\omega_c + \Delta_d/2) < \omega \leq \pi$, nuevamente se tiene intersección nula y la solución es

$$H_{md2}(\omega) = H_d(\omega - \xi)\Psi_{2d}^{[p,q]}(\xi) = 0.$$

La solución (respuesta en frecuencia del filtro) se puede expresar en la forma de una única función polinómica que engloba las cinco zonas contempladas y que escribimos como

$$H_{md2}(\omega) = 1 - B \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{ \frac{|\omega| - \omega_c}{\Delta_d} - \gamma_{\alpha,kl} \right\}_{+}^{p+q}.$$

Sustituyendo los parámetros que aparecen en la expresión anterior por sus valores, resulta

$$H_{md2}(\omega) = 1 - \frac{(p + \alpha q)^{p+q}}{(p+q)!\alpha^q} \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{ \frac{|\omega| - \omega_c}{\Delta_d} - \left( \frac{k + \alpha l}{p + \alpha q} - \frac{1}{2} \right) \right\}_{+}^{p+q}, \qquad (4.17)$$

que representa la respuesta en frecuencia del filtro digital modificado mediante las funciones $\alpha$-spline de tipo II (FDII) y que es válida $\forall -\pi \leq \omega < \pi$ , $0 < \alpha < 1$ , $p > 0$ y $q \geq 1$.

La respuesta en frecuencia del filtro, de acuerdo con (4.17), cumple que:

1. Si $0 < |\omega| < \left(\omega_c - \frac{\Delta_d}{2}\right)$ : $\quad H_{md2}(\omega) = 1.$

2. Si $(\omega_c + \Delta_d/2) < |\omega| < \pi$ : $\quad H_{md2}(\omega) = 0.$

3. Si $(\omega_c - \Delta_d/2) < |\omega| < (\omega_c + \Delta_d/2)$ : $\quad H_{md2}(\omega) \in (0, 1).$

Resumiendo, la forma de la respuesta en frecuencia del filtro modificado por las funciones $\alpha$-spline de tipo II y dada por (4.17) se debe al carácter simétrico y de soporte compacto en frecuencia que presentan dichas funciones $\Psi_2^{[p,q]}(\omega)$. La respuesta en frecuencia, definida mediante el proceso de convolución dado por (4.15), para cada frecuencia $\omega$, viene dada por el área bajo la intersección de las funciones que convolucionan. De este

modo, mientras la frecuencia $\omega$ pertenezca al intervalo $-\omega_c + \Delta_d/2 \leq \omega \leq \omega_c - \Delta_d/2$, el proceso de convolución nos da el mismo resultado y de valor unidad, en cambio, para los valores de $\omega$ en el intervalo $-\omega_c - \Delta_d/2 \leq \omega \leq -\omega_c + \Delta_d/2$, el área va aumentando de manera continua desde cero en el extremo inferior de dicho intervalo hasta la unidad en el extremo superior, pasando por el valor 0.5 para la frecuencia $\omega = -\omega_c$ definiendo, por tanto, una función monótona creciente en dicha región, mientras que en el intervalo $\omega_c - \Delta_d/2 \leq \omega \leq \omega_c + \Delta_d/2$, el área va disminuyendo paulatinamente y de manera continua, desde un valor unitario en $\omega = \omega_c - \Delta/2$ hasta un valor nulo en $\omega = \omega_c + \Delta/2$, pasando por el valor 0.5 en la frecuencia de corte $\omega = \omega_c$, resultando una función monótona decreciente en dicho intervalo. Para el conjunto de frecuencias dentro del intervalo $-\pi < \omega \leq \pi$ y no contempladas en los intervalos anteriores no hay intersección, y en consecuencia, el área y el valor del proceso de convolución es nulo.

### 4.2.2. Respuesta al impulso del filtro digital

La respuesta al impulso, $h_{md2}[n]$, del filtro se determina mediante la DTFT inversa de (4.17), es decir,

$$h_{md2}[n] = \mathfrak{F}^{-1}\{H_{md2}(\omega)\},$$

pero

$$H_{md2}(\omega) = H_d(\omega) * \Psi_{2d}^{[p,q]}(\omega),$$

donde

$$H_d(\omega) = \mathfrak{F}\{h_d[n]\} \quad \text{y} \quad \Psi_{2d}^{[p,q]}(\omega) = \mathfrak{F}\{F_{2d}^{[p,q]}[n]\},$$

y de las propiedades de la operación de convolución, se obtiene

$$h_{md2}[n] = \mathfrak{F}^{-1}\{H_{md2}(\omega)\} = \mathfrak{F}^{-1}\{H_d(\omega)\} \cdot \mathfrak{F}^{-1}\{\psi_{2d}^{[p,q]}(\omega)\} = h_d[n] \cdot F_{2d}^{[p,q]}[n].$$

Teniendo en cuenta (3.60) y (4.14), podemos escribir

$$h_{md2}[n] = \frac{\omega_c}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right)\left[\frac{\sin\{(\Delta_d n)/(2(p+\alpha q))\}}{\Delta_d n/(2(p+\alpha q))}\right]^p \left[\frac{\sin\{(\alpha\Delta_d n)/(2(p+\alpha q))\}}{\alpha\Delta_d n/(2(p+\alpha q))}\right]^q,$$

o de modo equivalente

$$h_{md2}[n] = \frac{\omega_c}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right)\left[\text{sinc}\left(\frac{\Delta_d n}{2\pi(p+\alpha q)}\right)\right]^p \left[\text{sinc}\left(\frac{\alpha\Delta_d n}{2\pi(p+\alpha q)}\right)\right]^q. \tag{4.18}$$

Las ecuaciones (4.18) y (4.17) representan, respectivamente, la respuesta al impulso y la respuesta en frecuencia del filtro.

La expresión (4.18) puede ser interpretada de dos formas diferentes. En la primera de ellas se puede afirmar que las funciones $\alpha$-spline de tipo II se han utilizado para modelar una banda de transición entre la banda de paso y la banda de rechazo, mientras que una

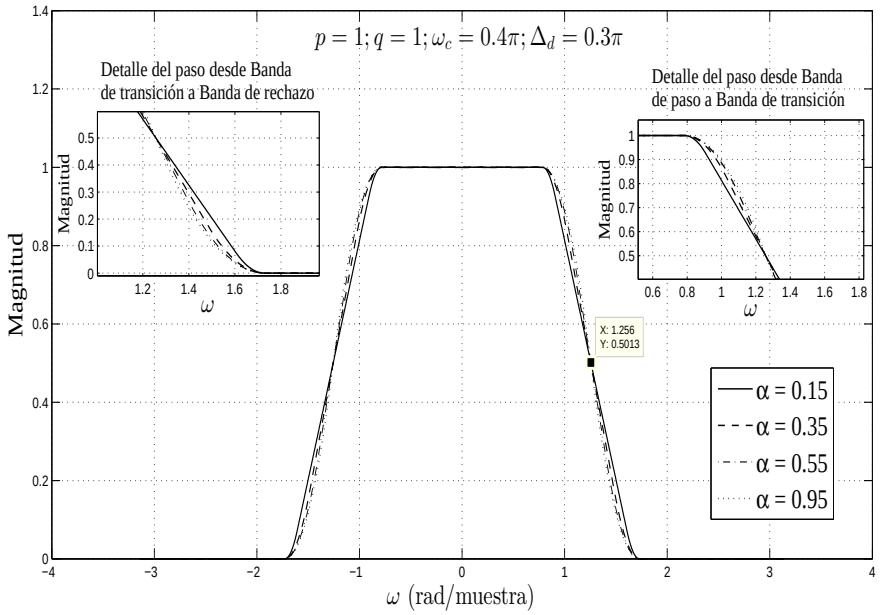


**Figura 4.5** – Respuestas en frecuencia del filtro paso-bajo $H_{md2}(\omega)$.

interpretación alternativa sugiere que nuestras funciones sean contempladas como unas funciones de enventanado $w[n]$ en el sentido de poder expresar la respuesta al impulso en la forma $h_{md2}[n] = h_d[n] \cdot w_{md2}[n]$, donde

$$w_{md2}[n] = \left[\text{sinc}\left(\frac{\Delta_d n}{2\pi(p+\alpha q)}\right)\right]^p \left[\text{sinc}\left(\frac{\alpha\Delta_d n}{2\pi(p+\alpha q)}\right)\right]^q. \tag{4.19}$$

En la figura 4.5 se muestran las respuestas en frecuencia obtenidas de (4.18) utilizando los valores $\omega_c = 0.4\pi$ para la frecuencia de corte y $\Delta_d = 0.3\pi$ para la anchura de la banda de transición. Se han representado cuatro respuestas para unos valores concretos de los órdenes spline $p = q = 1$, tomando cuatro valores distintos del parámetro $\alpha = 0.15$, 0.25, 0.55 y 0.95. El número de muestras escogidas en (4.18) ha sido suficientemente elevado para lograr la simulación ideal.

En la figura 4.6 se observan en detalle las bandas de transición completas de los filtros visualizados en la figura 4.5. En la misma están marcados los tres puntos comunes a las cuatro bandas de transición, que se producen a las frecuencias $\omega_c - \Delta_d/2$, $\omega_c$ y $\omega_c + \Delta_d/2$.

### 4.2.3. Modelado mediante funciones $\alpha$-spline de tipo I

Utilizando las funciones $\alpha$-spline de tipo I, $\Psi_{1d}^{[p,q]}(\omega)$ dadas por (3.39), las cuales se caracterizan por presentar un soporte compacto de anchura $(p+\alpha q)\Delta_d$ variable con el número de pulsos $p$ y $q$ que intervienen en su construcción, para realizar el proceso de convolución con la respuesta en frecuencia ideal, con el fin de modelar las bandas de

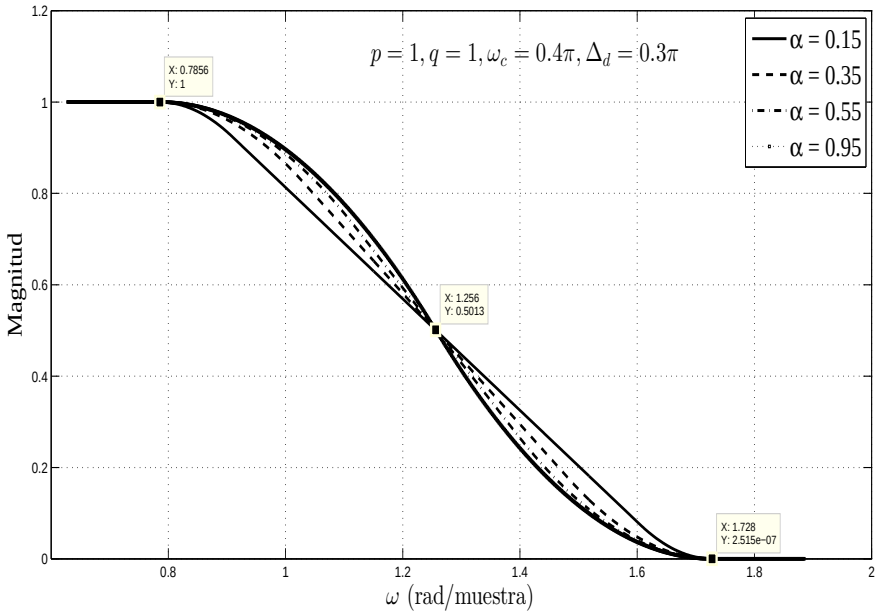


**Figura 4.6** – Bandas de transición del filtro ideal modificado.

transición, se obtienen las funciones representativas de las nuevas respuestas en frecuencia. Procediendo de un modo similar al utilizado en la sección previa, y denotando por $H_{md1}(\omega)$ a la respuesta en frecuencia modificada por medio de las funciones $\alpha$-spline de tipo I (FDI), se puede escribir

$$\begin{aligned} H_{md1}(\omega) = H_d(\omega) * \Psi_{1d}^{[p,q]}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\xi)\Psi_{1d}^{[p,q]}(\omega-\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega-\xi)\Psi_{1d}^{[p,q]}(\xi)d\xi, \end{aligned} \tag{4.20}$$

cuya resolución conduce a la expresión cerrada dada por

$$H_{md1}(\omega) = 1 - \frac{1}{(p+q)!\alpha^q}\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} C_{kl}\left\{\frac{|\omega|-\omega_c}{\Delta_d} - \left[(k+\alpha l) - \frac{p+\alpha q}{2}\right]\right\}_+^{p+q}, \tag{4.21}$$

que es válida para todo $\omega$ tal que $-\pi < \omega \leq \pi$ y verifica que $H_{md1}(\omega) = 1$ si $0 \leq |\omega| < \omega_c - (p+\alpha q)\Delta_d/2$, siendo nula en el intervalo $\omega_c + (p+\alpha q)\Delta_d/2 \leq |\omega| < \pi$. El resto de frecuencias no contempladas en los intervalos anteriores forman la banda de transición que une de un modo continuo, con mayor o menor suavidad, las bandas de paso y eliminada.

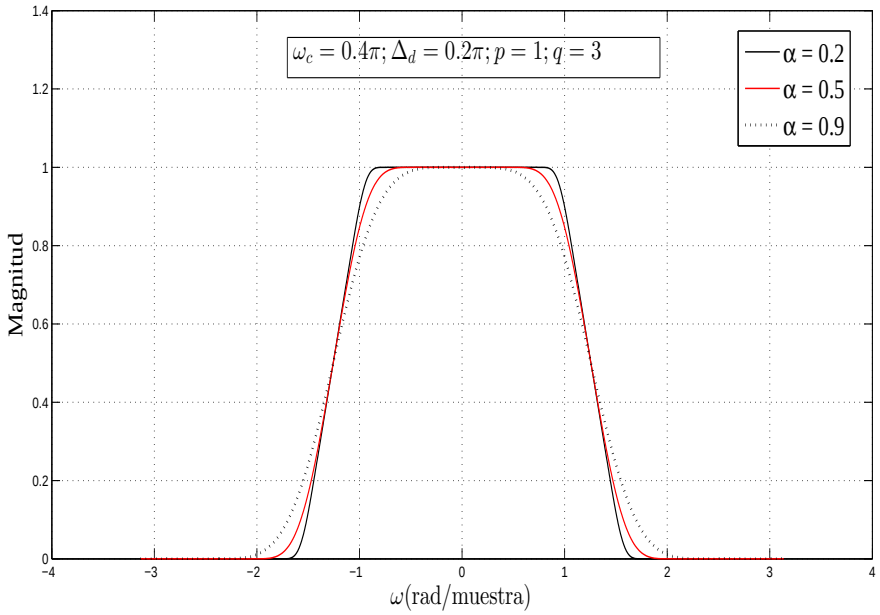


**Figura 4.7** – Respuestas en frecuencia del filtro paso-bajo $H_{md1}(\omega)$.

De igual modo, la respuesta al impulso $h_{md1}[n]$ es

$$h_{md1}[n] = \frac{\omega_c}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right)\left[\text{sinc}\left(\frac{\Delta_d n}{2\pi}\right)\right]^p\left[\text{sinc}\left(\frac{\alpha\Delta_d n}{2\pi}\right)\right]^q, \tag{4.22}$$

y utilizando la descripción $h_{md1}[n] = h_d[n] \cdot w_{md1}[n]$, se tendría que

$$w_{md1}[n] = \left[\text{sinc}\left(\frac{\Delta_d n}{2\pi}\right)\right]^p\left[\text{sinc}\left(\frac{\alpha\Delta_d n}{2\pi}\right)\right]^q.$$

En la figura 4.7 se muestran las respuestas en frecuencia de tres filtros modificados mediante funciones $\alpha$-spline de tipo I. Todos ellos tienen la misma frecuencia de corte $\omega_c = 0.4\pi$ y el mismo parámetro que define la anchura de los pulsos de partida $\Delta_d = 0.2\pi$. El número de pulsos de ambos tipos también están fijados y tienen unos valores $p = 1$, $q = 3$. Los filtros solo difieren en el valor del parámetro $\alpha$, que ha tomado los valores $\alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 0.5$ y $\alpha_3 = 0.9$. En la figura 4.8 se presentan las bandas de transición de los filtros anteriores. Las bandas de transición están centradas en la frecuencia de corte del filtro y sus anchuras vienen dadas por $(p + \alpha q)\Delta_d$ y, por tanto, aumentan con el valor de $\alpha$, si el resto de los parámetros se mantienen fijos, como sucede en el supuesto planteado.

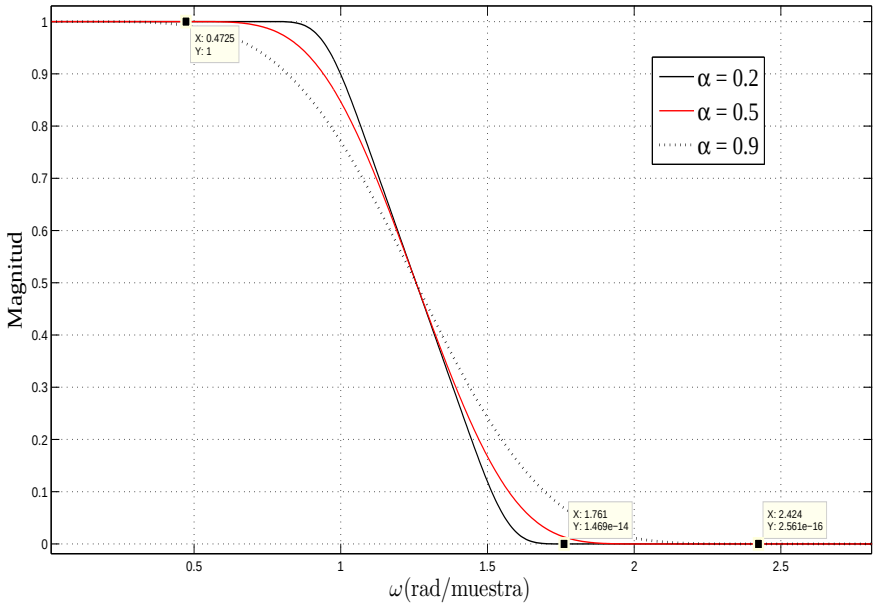


**Figura 4.8** – Bandas de transición del filtro paso-bajo $H_{md1}(\omega)$.

### 4.2.4. Modelado mediante funciones $\alpha$-spline de tipo III

Sea $H_{md3}(\omega)$ la respuesta en frecuencia modificada por medio de las funciones $\alpha$-spline de tipo III (FDIII), que se caracterizan por presentar un soporte compacto de anchura $(1+\alpha)\Delta_d$ que varía con el valor del parámetro $\alpha$, pero es independiente del número de pulsos $p$ y $q$ utilizados para su construcción. Entonces

$$\begin{aligned} H_{md3}(\omega) = H_d(\omega) * \Psi_{3d}^{[p,q]}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\xi)\Psi_{3d}^{[p,q]}(\omega-\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega-\xi)\Psi_{3d}^{[p,q]}(\xi)d\xi, \end{aligned} \tag{4.23}$$

y mediante el mismo proceso descrito para las funciones de tipo II, se llega a la expresión cerrada dada por

$$H_{md3}(\omega) = 1 - \frac{p^p q^q}{(p+q)!\alpha^q}\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} C_{kl}\left\{\frac{|\omega|-\omega_c}{\Delta_d} - \left(\frac{k}{p}+\alpha\frac{l}{q}\right) + \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right\}_{+}^{p+q}, \tag{4.24}$$

que es válida para todo $\omega$ tal que $-\pi < \omega \leq \pi$ y verifica que $H_{md3}(\omega) = 1$ si $0 \leq |\omega| < \omega_c - (1+\alpha)\Delta_d/2$ mientras que $H_{md3}(\omega) = 0$ si $\omega_c + (1+\alpha)\Delta_d/2 \leq |\omega| < \pi$. El resto de frecuencias no contempladas en los intervalos anteriores forman la banda de transición

que une de un modo continuo, con mayor o menor suavidad, las bandas de paso y de rechazo.

De igual modo, la respuesta al impulso $h_{md3}[n]$ es

$$h_{md3}[n] = \frac{\omega_c}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right)\left[\text{sinc}\left(\frac{\Delta_d n}{2\pi p}\right)\right]^p\left[\text{sinc}\left(\frac{\alpha\Delta_d n}{2\pi q}\right)\right]^q, \tag{4.25}$$

y utilizando la descripción $h_{md3}[n] = h_d[n] \cdot w_{md3}[n]$, se tendría que

$$w_{md3}[n] = \left[\text{sinc}\left(\frac{\Delta_d n}{2\pi p}\right)\right]^p\left[\text{sinc}\left(\frac{\alpha\Delta_d n}{2\pi q}\right)\right]^q.$$

En la figura 4.9 se muestran las respuestas en frecuencia de dos filtros modificados mediante funciones $\alpha$-spline de tipo III. Ambos tienen la misma frecuencia de corte $\omega_c = 0.45\pi$ y el mismo parámetro que define la anchura de los pulsos de partida $\Delta_d = 0.15\pi$. El número de pulsos de cada tipo también está fijado y tienen unos valores $p = 2$, $q = 2$. Los filtros solo difieren en el valor del parámetro $\alpha$, que ha tomado los valores $\alpha_1 = 0.1$ y $\alpha_2 = 0.9$.

En la figura 4.10 se presentan las bandas de transición de los filtros anteriores. Las bandas de transición están centradas en la frecuencia de corte del filtro y sus anchuras, que son independientes del número de pulsos que intervienen en la formación de las funciones $\alpha$-spline de tipo III, vienen dadas por $(1 + \alpha)\Delta_d$ y, por tanto, aumentan con el valor de $\alpha$, si el resto de los parámetros se mantienen fijos, como se observa en el caso descrito.

## 4.3. Modelado de bandas de transición para filtros analógicos paso-bajo

En esta sección se va a tratar el caso de la formulación de filtros analógicos. Se inicia el diseño especificando la respuesta en frecuencia ideal deseada

$$H_I(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c, \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c, \end{cases} \tag{4.26}$$

en la cual se tiene un salto abrupto a la frecuencia de corte $\Omega_c$ del filtro entre las bandas de paso y eliminada.

### 4.3.1. Modelado de la banda de transición mediante funciones $\alpha$-spline de tipo II

Con el fin de suavizar la brusca caída entre las bandas de paso y eliminada, se va a modelar la banda de transición mediante una operación de convolución, en el dominio de

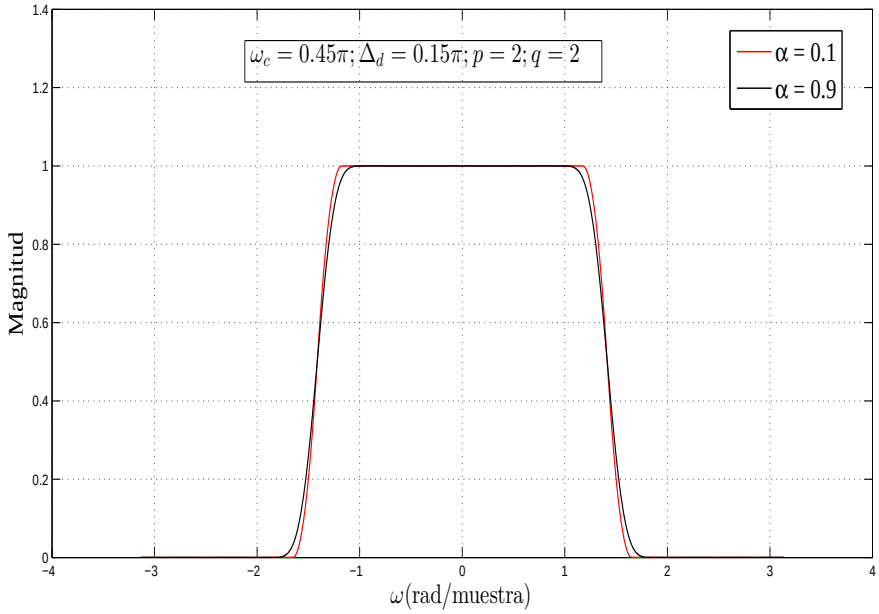


**Figura 4.9** – Respuestas en frecuencia del filtro paso-bajo $H_{md3}(\omega)$.

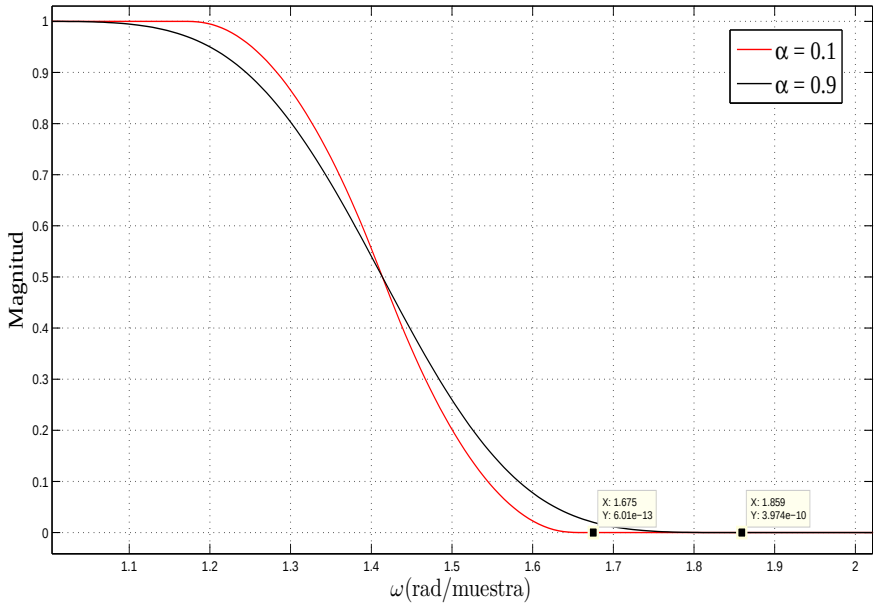


**Figura 4.10** – Bandas de transición del filtro paso-bajo $H_{md3}(\omega)$.

la frecuencia, entre la respuesta ideal dada en (4.26) y las diferentes familias de funciones $\alpha$-spline definidas en frecuencia en el capítulo 3. Al igual que se hizo en el dominio del tiempo discreto, se hará el desarrollo para las funciones $\alpha$-spline de tipo II dadas por (3.52), y tan solo daremos la respuesta en frecuencia y la respuesta al impulso de los filtros obtenidos usando las funciones $\alpha$-spline de tipos I y III.

La operación de convolución en frecuencia (3.6), mostrada esquemáticamente en la figura 4.11, entre (4.26) y (3.52) se expresa como

$$\begin{aligned} H_{ma2}(\Omega) = H_I(\Omega) * \Psi_2^{[p,q]}(\Omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_I(\xi)\Psi_2^{[p,q]}(\Omega-\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_I(\Omega-\xi)\Psi_2^{[p,q]}(\xi)d\xi, \end{aligned} \tag{4.27}$$

donde

$$H_I(\Omega-\xi) = \begin{cases} 1, & |\Omega-\xi| < \Omega_c, \\ 0, & \Omega_c < |\Omega-\xi| < \pi. \end{cases}$$

Como las funciones del integrando de (4.27) son polinomios cuyos términos adoptan la forma $(\xi/\Delta_a - \gamma_{\alpha,kl})^{p+q-1}$, la convolución se lleva a cabo dividiendo el intervalo completo de la variable $\Omega$ en diferentes subintervalos, cada uno de ellos caracterizado por el grado de solapamiento entre las funciones que convolucionan. Con este criterio podemos distinguir, en la integral de convolución, varios subintervalos, dentro de los cuales los resultados de la convolución, teniendo en cuenta la relación dada en (4.16), son

1. Para $\Omega < -(\Omega_c + \Delta_a/2)$, no hay intersección y la solución es

$$H_{ma2}(\Omega) = H_I(\Omega-\xi)\Psi_2^{p,q}(\xi) = 0.$$

2. Para $-(\Omega_c + \Delta_a/2) \leq \Omega < -(\Omega_c + \Delta_a/2)$, la intersección no nula se produce para el rango de valores $-\Delta_a/2 < \xi < (\Omega + \Omega_c)$ de la variable de integración, y la solución es

$$H_{ma2}(\Omega) = B\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} C_{kl}\left\{\frac{\Omega+\Omega_c}{\Delta_a} - \gamma_{\alpha,kl}\right\}_+^{p+q},$$

donde

$$B = \frac{(p+\alpha q)^{p+q}}{(p+q)!\alpha^q}.$$

3. Para $-(\Omega_c - \Delta_a/2) \leq \Omega \leq (\Omega_c - \Delta_a/2)$, la intersección no nula se produce para el rango de valores $-\Delta_a/2 < \xi < \Delta_a/2$ de la variable de integración, y la solución es

$$H_{ma2}(\Omega) = B\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} C_{kl}\left\{1 - \frac{k+\alpha l}{p+\alpha q}\right\}_+^{p+q} = 1.$$

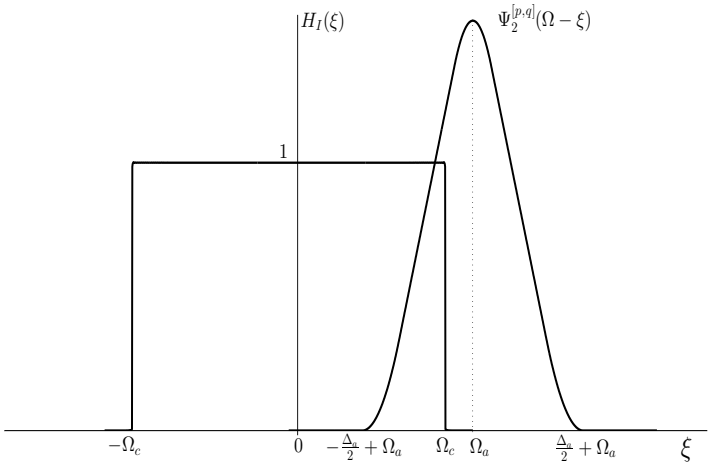


**Figura 4.11** – Proceso de convolución. Respuestas en frecuencia de un filtro paso-bajo ideal y de una función $\alpha$-spline.

4. Para $(\Omega_c - \Delta_a/2) < \Omega \leq (\Omega_c + \Delta_a/2)$, la intersección no nula se produce para el rango de valores $(\Omega - \Omega_c) < \xi < \Delta_a/2$ de la variable de integración, y la solución es

$$H_{ma2}(\Omega) = 1 - B \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{ \frac{\Omega - \Omega_c}{\Delta_a} - \gamma_{\alpha,kl} \right\}_+^{p+q}.$$

5. Para $\Omega > (\Omega_c + \Delta_a/2)$, nuevamente tenemos intersección nula y la solución es

$$H_{ma2}(\Omega) = H_I(\Omega - \xi)\Psi_2^{p,q}(\xi) = 0.$$

El conjunto de todas las funciones obtenidas en los diferentes intervalos se puede resumir en la siguiente expresión cerrada

$$H_{ma2}(\Omega) = 1 - B \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{ \frac{|\Omega| - \Omega_c}{\Delta_a} - \gamma_{\alpha,kl} \right\}_+^{p+q},$$

y sustituyendo los valores de las constantes auxiliares por sus valores originales, resulta

$$H_{ma2}(\Omega) = 1 - \frac{(p+\alpha q)^{p+q}}{(p+q)!\alpha^q} \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{ \frac{|\Omega| - \Omega_c}{\Delta_a} - \left( \frac{k+\alpha l}{p+\alpha q} - \frac{1}{2} \right) \right\}_+^{p+q}, \qquad (4.28)$$

que representa la respuesta en frecuencia del filtro analógico obtenido utilizando las funciones $\alpha$-spline de tipo II (FAII), y que es válida $\forall -\infty < \Omega < \infty$ , $0 < \alpha < 1$ ,

$p > 0$ y $q \geq 1$. La respuesta en frecuencia del filtro, de acuerdo con (4.28), presenta las siguientes características

1. Si $0 < |\Omega| < \left(\Omega_c - \frac{\Delta_a}{2}\right)$ , tenemos que

$$H_{ma2}(\Omega) = 1.$$

2. Si $(\Omega_c + \Delta_a/2) < |\Omega| < \infty$ , tenemos que

$$H_{ma2}(\Omega) = 0.$$

3. Si $(\Omega_c - \Delta_a/2) < |\Omega| < (\Omega_c + \Delta_a/2)$, tenemos que

$$H_{ma2}(\Omega) \in (0, 1).$$

### 4.3.2. Respuesta al impulso del filtro analógico

La respuesta al impulso del filtro ideal,

$$h_I(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{H_I(\Omega)\}$$

se determina aplicando (3.4) a (4.26), obteniéndose:

$$h_I(t) = \frac{\sin(\Omega_c t)}{\pi t} = \frac{\Omega_c}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{\Omega_c t}{\pi}\right). \tag{4.29}$$

De las propiedades de la convolución, la respuesta al impulso del filtro modificado, $h_{ma2}(t)$, a partir de las expresiones (4.29) y (3.48), viene dada por:

$$h_{ma2}(t) = \frac{\Omega_c}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{\Omega_c t}{\pi}\right)\left[\frac{\sin\{(\Delta_a t)/(2(p+\alpha q))\}}{\Delta_a t/(2(p+\alpha q))}\right]^p\left[\frac{\sin\{(\alpha\Delta_a t)/(2(p+\alpha q))\}}{\alpha\Delta_a t/(2(p+\alpha q))}\right]^q,$$

o de modo equivalente

$$h_{ma2}(t) = \frac{\Omega_c}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{\Omega_c t}{\pi}\right)\left[\text{sinc}\left(\frac{\Delta_a t}{2\pi(p+\alpha q)}\right)\right]^p\left[\text{sinc}\left(\frac{\alpha\Delta_a t}{2\pi(p+\alpha q)}\right)\right]^q. \tag{4.30}$$

Las ecuaciones (4.30) y (4.28) representan, respectivamente, la respuesta al impulso y la respuesta en frecuencia del filtro modificado.

### 4.3.3. Modelado de la banda de transición mediante funciones α-spline de tipo I

Si se realiza la convolución en frecuencia entre la característica ideal del filtro y la familia de funciones $\alpha$-spline en frecuencia de tipo I dada por (3.38), se obtiene la respuesta en frecuencia modificada con una banda de transición cuya forma es cambiante con los valores de los parámetros que la definen, $p$, $q$ y $\alpha$. Llamando $H_{ma1}(\Omega)$ y $h_{ma1}(t)$ a las respuestas en frecuencia y al impulso del filtro modificado respectivamente, y siguiendo el mismo argumento que para el caso de la familia $\alpha$-spline en frecuencia de tipo II, se obtiene

$$H_{ma1}(\Omega) = 1 - \frac{1}{(p+q)!\alpha^q} \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{ \frac{|\Omega| - \Omega_c}{\Delta_a} - \left[ (k+\alpha l) - \frac{p+\alpha q}{2} \right] \right\}_+^{p+q}, \quad (4.31)$$

que representa la respuesta en frecuencia del filtro analógico obtenido utilizando las funciones $\alpha$-spline de tipo I (FAI), y que es válida $\forall -\infty < \Omega < \infty$, $0 < \alpha < 1$, $p \geq 0$ y $q \geq 1$. Dicha respuesta en frecuencia se caracteriza por ser la unidad en el intervalo frecuencial $0 \leq |\Omega| < \Omega_c - (p+\alpha q)\Delta_a/2$ y por ser nula en el intervalo $\Omega_c + (p+\alpha q)\Delta_a/2 \leq |\Omega| < \infty$. El intervalo de frecuencias no contemplado en los casos previos forma la banda de transición.

La respuesta al impulso resulta ser

$$h_{ma1}(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \mathrm{sinc}\left(\frac{\Omega_c t}{\pi}\right) \left[\mathrm{sinc}\left(\frac{\Delta_a t}{2\pi}\right)\right]^p \left[\mathrm{sinc}\left(\frac{\alpha \Delta_a t}{2\pi}\right)\right]^q. \quad (4.32)$$

### 4.3.4. Modelado de la banda de transición mediante funciones α-spline de tipo III

Denotando $H_{ma3}(\Omega)$ y $h_{ma3}(t)$ a las respuestas en frecuencia y al impulso del filtro modificado por medio de la familia de funciones $\alpha$-spline en frecuencia de tipo III respectivamente, se obtienen los resultados que se muestran a continuación. Así,

$$H_{ma3}(\Omega) = 1 - \frac{p^p q^q}{(p+q)!\alpha^q} \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{ \frac{|\Omega| - \Omega_c}{\Delta_a} - \left( \frac{k}{p} + \alpha \frac{l}{q} \right) + \left( \frac{1+\alpha}{2} \right) \right\}_+^{p+q}, \quad (4.33)$$

representa la respuesta en frecuencia del filtro analógico obtenido utilizando las funciones $\alpha$-spline de tipo III (FAIII), y que es válida $\forall -\infty < \Omega < \infty$ , $0 < \alpha < 1$ , $p \geq 0$ y $q \geq 1$. Dicha respuesta en frecuencia se caracteriza por ser la unidad en el intervalo frecuencial $0 \leq |\Omega| < \Omega_c - (1+\alpha)\Delta_a/2$ y por ser nula en el intervalo $\Omega_c + (1+\alpha)\Delta_a/2 \leq |\Omega| < \infty$. El intervalo de frecuencias no contemplado en los casos previos forma la banda de transición.

Finalmente, la respuesta al impulso viene dada por la expresión

$$h_{md3}(t) = \frac{\Omega_c}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{\Omega_c t}{\pi}\right)\left[\text{sinc}\left(\frac{\Delta_a t}{2\pi p}\right)\right]^p\left[\text{sinc}\left(\frac{\alpha\Delta_a t}{2\pi q}\right)\right]^q. \tag{4.34}$$

## 4.4. Consideraciones finales sobre la formulación analógica

Dada la forma funcional de las ecuaciones (4.28), (4.31) y (4.33), parece bastante evidente la dificultad que entraña la implementación de dichos filtros con elementos analógicos básicos, por lo que posteriormente no aplicaremos dicha formulación al diseño de filtros. Tan solo se debe indicar que, como se comentó anteriormente, con todas las restricciones que impone el teorema del muestreo, podemos pasar de esta formulación a la del dominio del tiempo discreto haciendo los cambios de variable $t = nT$ , $\omega = \Omega T$ y $\Delta_d = \Delta_a T$, para finalmente, y sin pérdida de generalidad, tomar el periodo de muestreo $T = 1$. Haciendo esta sustitución en las ecuaciones analógicas (4.30), (4.32) y (4.34), que representan las respuestas al impulso, se obtendrían idénticas ecuaciones a las obtenidas directamente mediante el procedimiento desarrollado totalmente en el ámbito digital, (4.18), (4.22) y (4.25), representativas de las respuestas al impulso en el dominio discreto (método de la invarianza al impulso).

## 4.5. Resumen de las respuestas de los filtros digitales

Se presentan en esta sección, teniendo en cuenta los resultados expuestos en la sección 4.2, a modo de recopilación, las respuestas en frecuencia y al impulso de los filtros digitales obtenidos mediante el procedimiento descrito en la memoria.

Para el modelo basado en las funciones $\alpha$-spline de tipo I, las respuestas en frecuencia y al impulso, que vienen dadas por las ecuaciones (4.21) y (4.22), se escriben a continuación

$$H_{md1}(\omega) = 1 - \frac{1}{(p+q)!\alpha^q}\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} C_{kl}\left\{\frac{|\omega| - \omega_c}{\Delta_d} - \left[(k+\alpha l) - \frac{p+\alpha q}{2}\right]\right\}_+^{p+q},$$

y

$$\begin{aligned} h_{md1}[n] &= \frac{\omega_c}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right)\left[\text{sinc}\left(\frac{\Delta_d n}{2\pi}\right)\right]^p\left[\text{sinc}\left(\frac{\alpha\Delta_d n}{2\pi}\right)\right]^q \\ &= \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{\pi n}\left[\frac{\text{sen}\,(\Delta_d n/2)}{\Delta_d n/2}\right]^p\left[\frac{\text{sen}\,(\alpha\Delta_d n/2)}{\alpha\Delta_d n/2}\right]^q. \end{aligned}$$

Utilizando las funciones $\alpha$-spline de tipo II, las respuestas en frecuencia y al impulso, contempladas en las ecuaciones (4.17) y (4.18), son

$$H_{md2}(\omega) = 1 - \frac{(p+\alpha q)^{p+q}}{(p+q)!\alpha^q} \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{ \frac{|\omega| - \omega_c}{\Delta_d} - \left( \frac{k+\alpha l}{p+\alpha q} - \frac{1}{2} \right) \right\}_+^{p+q},$$

y

$$\begin{aligned} h_{md2}[n] &= \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right) \left[\text{sinc}\left(\frac{\Delta_d n}{2\pi(p+\alpha q)}\right)\right]^p \left[\text{sinc}\left(\frac{\alpha \Delta_d n}{2\pi(p+\alpha q)}\right)\right]^q \\ &= \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{\pi n} \left[\frac{\text{sen}\left\{\Delta_d n/(2(p+\alpha q))\right\}}{\Delta_d n/(2(p+\alpha q))}\right]^p \left[\frac{\text{sen}\left\{\alpha \Delta_d n/(2(p+\alpha q))\right\}}{\alpha \Delta_d n/(2(p+\alpha q))}\right]^q. \end{aligned}$$

Finalmente, reescribimos las respuestas en frecuencia y al impulso utilizando el modelado con las funciones $\alpha$-spline de tipo III, dadas por las ecuaciones (4.24) y (4.25),

$$H_{md3}(\omega) = 1 - \frac{p^p q^q}{(p+q)!\alpha^q} \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{ \frac{|\omega| - \omega_c}{\Delta_d} - \left( \frac{k}{p} + \alpha \frac{l}{q} \right) + \left( \frac{1+\alpha}{2} \right) \right\}_+^{p+q},$$

y

$$\begin{aligned} h_{md3}[n] &= \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right) \left[\text{sinc}\left(\frac{\Delta_d n}{2\pi p}\right)\right]^p \left[\text{sinc}\left(\frac{\alpha \Delta_d n}{2\pi q}\right)\right]^q \\ &= \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{\pi n} \left[\frac{\text{sen}\left\{\Delta_d n/(2p)\right\}}{\Delta_d n/(2p)}\right]^p \left[\frac{\text{sen}\left\{\alpha \Delta_d n/(2p)\right\}}{\alpha \Delta_d n/(2p)}\right]^q. \end{aligned}$$

En el apéndice A se ofrece una representación conjunta de todas las familias de funciones $\alpha$-spline y de los filtros formulados con ellas, por medio de un conjunto de dos parámetros constructivos.

## 4.6. Filtros FIR máximamente planos

Una característica de interés que pueden presentar los filtros es la de ser máximamente planos. Esta propiedad está relacionada con la derivada de su respuesta en frecuencia con respecto a la variable $\omega$, en el caso que nos ocupa dada por funciones del tipo $H_{md}(\omega)$. Sea $H'_{md}(\omega)$ dicha derivada, entonces si para un valor concreto de la variable $\omega = \omega^*$ la función derivada $H'_{md}(\omega = \omega^*)$ tiene $B$ ceros, entonces se dice que el filtro, en $\omega = \omega^*$, es máximamente plano de grado $B$. Los valores más usuales para definir esta característica de los filtros son $\omega = 0$ y $\omega = \pi$.

Los prototipos de filtros paso-bajo definidos mediante las respuestas en frecuencia (4.17), (4.21) o (4.24) son máximamente planos a lo largo de toda la banda de paso y de toda la banda eliminada, al igual que en los puntos de unión de dichas bandas con

los extremos de la banda de transición. Además las primeras $p + q - 1$ derivadas son a su vez funciones máximamente planas; por lo tanto los filtros reales resultantes (tras el truncamiento) pueden exhibir buenas propiedades respecto a la citada característica. En el apéndice B se ponen de manifiesto las propiedades de las respuestas en frecuencia de los filtros formulados con bandas de transición modeladas con las funciones $\alpha$-spline de la familia de tipo II. De igual modo se demostrarían las mismas propiedades de los filtros con las otras dos familias de funciones $\alpha$-spline.

# Capítulo 5

# Técnicas de diseño de filtros FIR

## 5.1. Terminología

Para el diseño de un filtro digital se deben especificar las características del mismo a través de ciertas tolerancias permitidas en las diferentes bandas espectrales predefinidas por medio de la respuesta en frecuencia, dando lugar a lo que se conoce como especificaciones, plantilla de especificaciones o máscara espectral del filtro.

### 5.1.1. Parámetros de diseño

Sin pérdida de generalidad, nos centraremos en el diseño de filtros paso-bajo. Del mismo modo, como las funciones de diseño conducen a respuestas al impulso simétricas, que proporcionan características de fase lineal, se estudiarán únicamente las descripciones del módulo de la respuesta en frecuencia. Teniendo en cuenta que los coeficientes de los filtros presentados en las formulaciones del capítulo previo son reales, solo será necesario especificar la respuesta en frecuencia en el intervalo $0 \leq \omega \leq \pi$. En dicha región, también hay que delimitar una banda de transición que una de modo suave las dos bandas de las que se componen las respuestas en frecuencia de los filtros paso-bajo. La banda de paso abarcará la región $0 \leq \omega \leq \omega_p$, la banda eliminada se extenderá en la región $\omega_s \leq \omega \leq \pi$, mientras que la banda de transición ocupará la región $\omega_p \leq \omega \leq \omega_s$. La caracterización de todos estos elementos está bastante normalizada, pudiendo encontrarse en cualquier publicación especializada sobre el tema; siguiendo en particular a [133] se definen los siguientes parámetros:

$\delta_1$ o desviación de la banda de paso **:** diferencia entre el máximo valor del módulo de la respuesta en frecuencia y la unidad,

$\delta_2$ o desviación de la banda eliminada **:** valor máximo del módulo de la respuesta en frecuencia en la banda eliminada,

$A_s = -20 \log_{10} \delta_2$ **:** Atenuación mínima de la banda eliminada en dB,

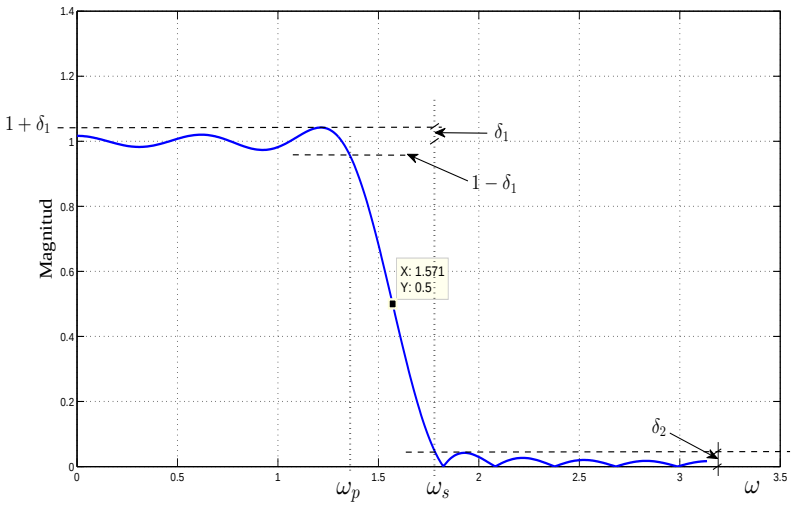


**Figura 5.1** – Especificaciones de diseño de un filtro paso-bajo.

$A_p = -20\log_{10}(1-\delta_1)$ **:** Maxima desviación de la banda de paso en dB,

$\omega_p$ o límite de la banda de paso **:** Pulsación máxima que le corresponde un valor del módulo de la respuesta en frecuencia de $(1-\delta_1)$,

$\omega_s$ o límite inferior de la banda eliminada **:** Pulsación mínima que le corresponde un valor del módulo de la respuesta en frecuencia de $\delta_2$,

$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$ **:** Anchura de la banda de transición en radianes,

$\Delta f = \Delta\omega/(2\pi)$ **:** Anchura de la banda de transición en Hz.

Las representaciones gráficas de los módulos de las respuestas en frecuencia se suelen hacer en función de la variable $\omega$ o de la variable $f$ utilizando diferentes rangos de variación de las mismas, por ejemplo, $0 \leq \omega \leq \pi$ o $0 \leq f \leq 1/2$. En la figura 5.1 se indican los parámetros previamente definidos que especifican las tolerancias permitidas. En las figuras 5.2 y 5.3 se pueden ver detalles de la banda de paso y de la banda eliminada respectivamente.

### 5.1.2. Métodos de diseño de filtros

A lo largo del tiempo se han elaborado diferentes técnicas o procedimientos que generan filtros digitales que cumplen con determinadas especificaciones definidas de antemano. En general se diseñan filtros paso-bajo, también denominados filtros prototipo, y a partir de ellos, mediante diversas trasformaciones, se puede obtener cualquier otro tipo de filtros. Para el diseño de los filtros prototipo se pueden utilizar técnicas que pueden

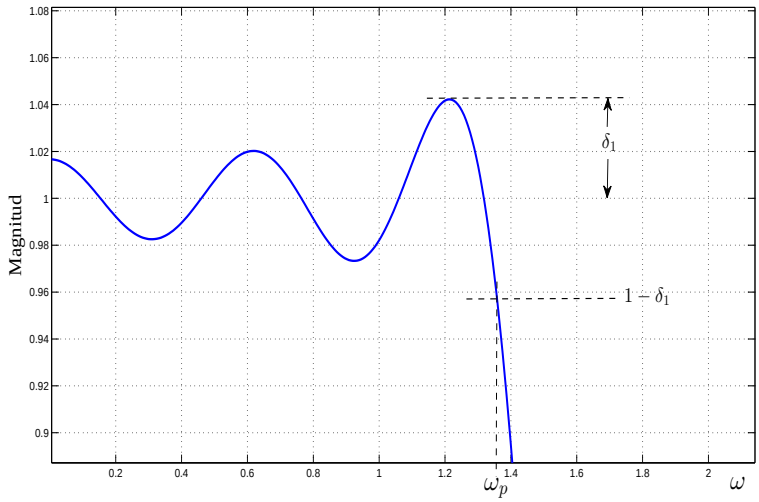


**Figura 5.2** – Detalle especificaciones en la banda de paso.

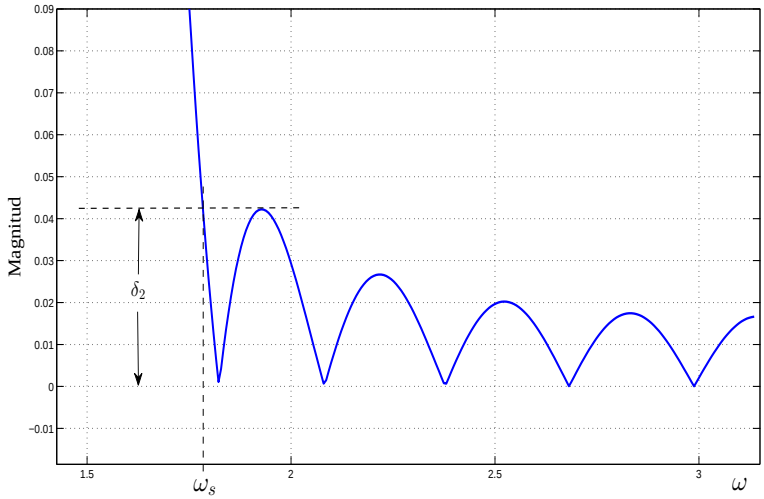


**Figura 5.3** – Detalle especificaciones en la banda eliminada.

ser muy simples o pueden requerir procesos elaborados. Algunas de las técnicas están basadas en la teoría de la aproximación de funciones, con el objetivo de obtener respuestas en frecuencia implementables que sean una buena aproximación al filtro deseado. Otras técnicas se abstraen de la aproximación implícita y se basan directamente en determinados criterios de optimización o restricciones que tienen como objetivo proporcionar algunos ahorros, ya sean de coste computacional o de necesidades de almacenamiento. En general, siguiendo a [134], las técnicas de optimización tienen como propósito la determinación de unos parámetros de diseño, representados por un vector $x = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, que se consideran los valores más adecuados para caracterizar el diseño en algún sentido previamente definido. El proceso se describe por medio de una función objetivo dependiente de la variable que representa los parámetros buscados, $f_{\text{obj}}(x)$, la cual debe ser maximizada o minimizada de acuerdo a un conjunto de restricciones, definidas mediante un grupo de igualdades, por ejemplo $R_i(x) = 0,\ (i = 1, 2, \cdots, m^*)$, o de desigualdades, por ejemplo $R_i(x) < 0,\ (i = m^* + 1, m^* + 2, \cdots, m)$, o de limitaciones en los valores que pueden tomar los parámetros de diseño o variables de optimización. Las diversas técnicas difieren, fundamentalmente, en que la búsqueda del valor óptimo se realiza sobre un conjunto más o menos exhaustivo dentro del espacio total de soluciones. De acuerdo con esta descripción, cuando se habla de filtros óptimos, se debe entender que son los mejores posibles en algún sentido predefinido valorado por un parámetro o métrica que cuantifique alguna prestación o prestaciones del filtro. A continuación se enumeran algunas de las técnicas empleadas en el diseño de filtros.

1. **Método de diseño por medio de funciones ventana.** El diseño es simple y robusto, sin embargo no es óptimo en ningún sentido cuando la ventana es diferente a la ventana rectangular, la cual da lugar a filtros óptimos en el sentido del mínimo error integral cuadrático.

2. **Método del muestreo en frecuencia.** La respuesta en frecuencia es exacta en las muestras consideradas, pero en cambio es difícil de controlar el valor del módulo de la respuesta en frecuencia entre muestras consecutivas.

3. **Método minimax.** Consiste en que para unos valores fijos de $N$ y $\Delta f$ asociados al filtro se debe hacer mínimo el valor máximo de las desviaciones en la banda de paso $\delta_1$ y en la banda eliminada $\delta_2$. Esto se deriva del teorema de la alternancia [135]. Basado en este teorema, se ha resuelto el problema de diseño de filtros de fase lineal de rizado constante usando la técnica del algoritmo de la alternancia de Remez. El algoritmo resultante [136] y [137] permite configurar valores de rizado diferentes en cada una de las bandas del filtro. Además, las soluciones dadas por el algoritmo son tales que el error cometido, en cada una de las bandas espectrales, está distribuido uniformemente.

4. **Método del mínimo error cuadrático medio.** Consiste en hacer mínima la integral, sobre una determinada banda de frecuencias, del cuadrado de la diferencia

entre las respuestas en frecuencia ideal y real. Esto da lugar a los filtros óptimos en el sentido de mínimos cuadrados. El cumplimiento de las especificaciones no está garantizado a priori, y a menudo se requieren intentos de prueba y error para lograr el óptimo. El ejemplo más simple es el de los filtros FIR basados en la función ventana rectangular, que es óptimo en este sentido cuando se contempla sobre todo el conjunto de frecuencias (banda de paso, banda de transición y banda eliminada) [123].

5. **Método de respuesta máximamente plana.** Se especifica en términos del número de ceros de la función derivada de la respuesta en frecuencia del filtro, con respecto a $\omega$, a determinadas frecuencias, en particular en $\omega = 0$. Dan lugar a filtros con respuestas en frecuencia muy planas en la banda de paso alrededor de la frecuencia $\omega = 0$ [138], los cuales pueden ser de interés en ciertas aplicaciones muy exigentes con las tolerancias permitidas en la banda de paso, por ejemplo, algunas aplicaciones de audio profesional o aplicaciones médicas de diagnóstico [124] y [139].

Las técnicas para el diseño de filtros contemplados en esta memoria, que emergen de respuestas al impulso de filtros formulados con bandas de transición generadas con funciones $\alpha$-spline, se pueden interpretar como procedimientos de enventanado sujetos a determinadas restricciones. A continuación se da una visión de conjunto del método de enventanado, así como una breve introducción de las funciones ventana más comunmente utilizadas.

## 5.2. Generalidades del diseño de filtros mediante ventanas

Gracias a su simplicidad, el método de enventanado es uno de los procedimientos más comunes utilizados en el diseño de filtros FIR. Las propiedades de los filtros FIR diseñados dependen directamente de las características de las funciones ventana utilizadas. El esquema general se puede abordar, siguiendo por ejemplo a [128], bajo la perspectiva del diseño de un filtro paso-bajo ideal, cuya respuesta en frecuencia viene dada por (4.13). La respuesta al impulso (4.14) tiene la forma de una función "sinc", de duración infinita, no causal e inestable, y por tanto imposible de implementar en la práctica. Para resolver esta situación, la forma más directa que tenemos de actuar consiste en truncar la serie infinita con la que se representa su respuesta en frecuencia y elegir un número finito de términos de la respuesta al impulso, digamos $N$ muestras tomadas de la forma $-M \leq n \leq M$. Este proceso de simple truncamiento es equivalente a multiplicar la respuesta al impulso infinita por una ventana de longitud $N$ y de amplitud constante e igual a la unidad en todas sus muestras. Como la respuesta al impulso y la función

ventana rectangular son simétricas respecto a $n = 0$, tienen respuestas en frecuencia de fase cero y vienen representadas por funciones reales y pares de $\omega$. De este modo la respuesta al impulso del filtro truncado también presentará las mismas características.

En efecto, si $h_d[n]$ representa la respuesta al impulso del filtro paso-bajo ideal y $w_R[n]$ representa la ventana rectangular de longitud $2M+1$, tal que $-M \leq n \leq M$, entonces la respuesta al impulso del filtro enventanado $h[n]$ viene dado por

$$h[n] = h_d[n] \cdot w_R[n].$$

La respuesta en frecuencia del filtro resultante $H(\omega)$ se obtiene mediante la convolución, en el dominio de la frecuencia, de las respuestas en frecuencia del filtro paso-bajo ideal $H_d(\omega)$ y de la ventana rectangular $W_R(\omega)$, es decir,

$$H(\omega) = H_d(\omega) * W_R(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\omega - \theta) d\theta.$$

La respuesta en frecuencia de una ventana rectangular simétrica respecto a $n = 0$ y de longitud $N = 2M+1$, viene dada por

$$W_R(\omega) = \frac{\text{sen}(\omega(M + 1/2))}{\text{sen}(\omega/2)}$$

y presenta un lóbulo principal y una serie de lóbulos secundarios, que condicionan totalmente la respuesta en frecuencia del filtro resultante. En la figura 5.4 se puede ver la respuesta en frecuencia del filtro ideal, la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular, que se muestra centrada en cuatro pulsaciones distintas a medida que se desarrolla la operación de convolución, y la respuesta en frecuencia del filtro truncado, para $M = 7$. Como se observa en la citada figura, la respuesta en frecuencia resultante presenta ondulaciones en ambas bandas de frecuencia y una región de transición no abrupta que conecta las mismas, llamada banda o región de transición. Centrándose en la zona de frecuencias correspondientes a la banda de transición, algunas consideraciones de interés que pueden extraerse del análisis de la gráfica son:

1. La máxima contribución a la integral de convolución de la respuesta en frecuencia de la ventana, que se corresponde con la pulsación $\omega_1$ para la que se obtiene el valor pico $1+\delta_1$ en la banda de paso, se produce cuando la función $W_R(\omega-\theta)$ está localizada de forma que su primer lóbulo lateral negativo, a la derecha del lóbulo principal, comienza justamente en la frecuencia de corte $\omega_c$. El lóbulo principal y los lóbulos laterales a su izquierda son las zonas que contribuyen a la integral de convolución.

2. Sucesivos despazamientos a partir de la posición anterior, hacen que la contribución de $W_R(\omega-\theta)$ a la integral de convolución vaya disminuyendo, de modo que cuando

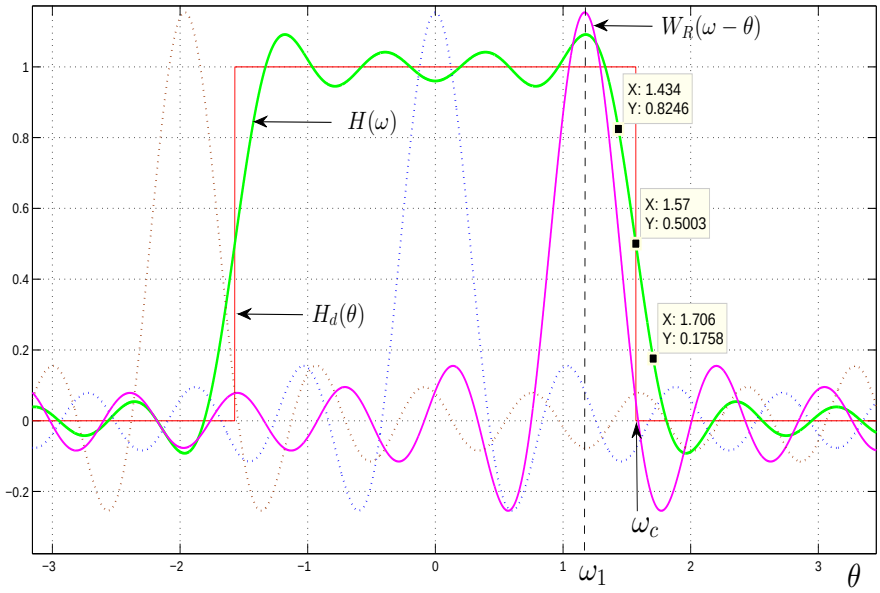


**Figura 5.4** – Convolución entre las respuestas en frecuencia de una ventana rectangular y del filtro ideal. Respuesta en frecuencia del filtro truncado.

esté centrada en la frecuencia de corte del filtro $\omega_c$, la mitad del lóbulo principal y los lóbulos laterales a su izquierda son las zonas que contribuyen a la integral de convolución.

3. Cuando $W_R(\omega-\theta)$ está centrada en una pulsación a la izquierda de la frecuencia de corte $\omega_c$, digamos en $\omega_c-\Delta$, la zona que contribuye a la integral de convolución está formada por los lóbulos laterales a la izquierda del lóbulo principal, la mitad izquierda del lóbulo principal, más una pequeña parte de la mitad derecha del lóbulo principal, y si está centrada en una pulsación a la derecha de $\omega_c$, desplazada el mismo valor $\Delta$, es decir, centrada en $\omega_c+\Delta$, entonces la zona que contribuye a la integral de convolución está formada por los lóbulos laterales a la izquierda del lóbulo principal y la mitad izquierda del lóbulo principal menos una parte del mismo que tiene un área idéntica a la parte derecha del lóbulo principal que contribuía en el supuesto anterior.

4. Se produce la mínima contribución a la integral de convolución de la respuesta en frecuencia de la ventana, que se corresponde con la pulsación $\omega_2$ (el máximo de la función $W_R(\omega-\theta)$ que aparece más a la izquierda en la mencionada gráfica se corresponde con $-\omega_2$, siendo la situación simétrica en $-\omega_c$) para la que se obtiene el valor pico negativo $-\delta_2$ en la banda eliminada, cuando la función $W_R(\omega-\theta)$ está localizada de forma que su primer lóbulo lateral negativo, a la izquierda del lóbulo principal, comienza justamente en la frecuencia de corte $\omega_c$.

5. De los puntos anteriores se infiere que a iguales variaciones de la pulsación por encima y por debajo de la pulsación de corte $\omega_c$, les corresponde iguales variaciones en la respuesta en frecuencia. Esto quiere decir que si efectuamos un cambio del origen de referencia, desde el punto $(0,0)$ al punto $(\omega_c, H(\omega_c))$, entonces la zona de la respuesta en frecuencia representativa de la banda de transición, descrita ahora por las variables $\omega' = \omega - \omega_c$ y $H'(\omega') = H(\omega) - H(\omega_c)$ resulta ser una función impar de $\omega'$, es decir se verifica que $H'(\omega') = -H'(-\omega')$. Así, si desde la frecuencia de corte nos acercamos hacia el valor pico en la banda de paso, los excesos sobre la unidad de los valores de la respuesta en frecuencia, son los mismos que los valores negativos que toma la respuesta en frecuencia según nos acercamos hacia el valor pico negativo en la banda eliminada, por tanto $\delta_1 \cong \delta_2$, y, en consecuencia, $H(\omega_1) + H(\omega_2) = 1 + \delta_1 - \delta_2 \cong 1$. En particular, para cualesquiera dos frecuencias equidistantes de la frecuencia de corte se verifica que $H(\omega_c - \omega) + H(\omega_c + \omega) \cong 1$.

6. Las variaciones iguales de la respuesta en frecuencia a un lado y a otro de la frecuencia de corte, nos dice que $H(\omega_c - \omega) - H(\omega_c) \cong H(\omega_c) - H(\omega_c + \omega)$ de lo que se deduce que $2H(\omega_c) \cong H(\omega_c - \omega) + H(\omega_c + \omega) \cong 1$, por tanto, $H(\omega_c) \cong 0.5$.

De lo expuesto, podemos concluir que las características de los rizados y de la región de transición dependen fuertemente de la forma de los lóbulos presentes en la respuesta en frecuencia de la función ventana rectangular. Así, los rizados están relacionados con el tamaño de las áreas de los lóbulos laterales, de modo que cuanto mayores sean las áreas bajo los mismos, mayores serán los rizados en la banda de paso y en la banda eliminada, mientras que la anchura espectral de la región de transición está relacionada de forma directa con la anchura espectral del lóbulo principal del espectro de la ventana.

Se desearía poder diseñar filtros reales utilizando pocos coeficientes, ya que el número $N$ de coeficientes está directamente relacionado con la complejidad computacional del filtro, y tal que su respuesta en frecuencia se aproxime lo máximo posible al filtro paso-bajo ideal, para lo cual se necesitaría que la respuesta en frecuencia de la función ventana estuviese próxima a una función delta de Dirac definida en frecuencia. Desafortunadamente estos dos supuestos son contradictorios. Para la ventana rectangular la anchura del lóbulo principal disminuye a medida que aumenta el número de términos de la ventana, pero el área bajo los lóbulos laterales permanece constante a medida que el número de términos $N$ aumenta, ya que esta característica depende exclusivamente de la forma de la ventana.

En esta descripción cualitativa podemos encontrar las propiedades relevantes que se han de tener en cuenta para el diseño de filtros mediante la técnica basada en funciones ventana. La simetría que presentan las funciones ventana utilizadas para el diseño de filtros hace que los filtros diseñados presenten una serie de características que enumeramos a continuación. A saber,

1. La anchura de la banda de transición es igual a ambos lados de la frecuencia de corte ideal, es decir $\omega_c - \omega_p = \omega_s - \omega_c$.

2. El pico del error de aproximación $\delta$ en la banda de paso es igual al de la banda eliminada, $\delta_1 = \delta_2$.

3. La separación espectral entre la pulsacion más alta a la que le corresponde un valor $1 + \delta_1$ del módulo de la respuesta en frecuencia en la banda de paso y la pulsación más baja a la que le corresponde un valor $\delta_2$ del módulo de la respuesta en frecuencia de la banda eliminada es aproximadamente igual a la anchura del lóbulo principal de la función ventana.

4. La anchura de la región de transición está directamente relacionada con la anchura del lóbulo principal de la función ventana.

5. El pico del error de aproximación está determinado por la forma de la ventana, y es independiente del orden del filtro.

Los rizados característicos que se presentan en las bandas del filtro se conocen con el nombre de fenómeno de Gibbs, y la razón del mismo hay que buscarla en la brusca transición a cero de la ventana rectangular en sus dos extremos, o para ser más precisos, las oscilaciones se deben a la convergencia no uniforme de la serie de Fourier de la función "sinc".

## 5.3. Funciones ventana

Para solventar este problema se han propuesto diferentes soluciones, la más inmediata es la utilización de funciones ventana cuyas formas en el dominio del tiempo decaigan suavemente a cero a medida que nos acercamos a sus extremos, de este modo se eliminan las discontinuidades abruptas en el dominio del tiempo (que son las responsables de la aparición de altas frecuencias en el espectro en forma de lóbulos laterales pronunciados) lo que da lugar a respuestas en frecuencia con lóbulos laterales reducidos y en consecuencia se consigue que los rizados en las bandas sean menores. Esta reducción se hace a expensas de incrementar la anchura de la región de transición, efecto que puede compensarse aumentando la longitud del filtro.

Para ejemplificar esta idea, podemos hacer uso de una ventana de Hamming para truncar la respuesta al impulso ideal. Si denominamos $w_{Hm}[n]$ a la ventana de Hamming, entonces la respuesta al impulso del filtro enventanado $h[n]$ viene dado por

$$h[n] = h_d[n] \cdot w_{Hm}[n].$$

En la figura 5.5 se observan los valores de las funciones ventana rectangular y de Hamming, así como las respuestas al impulso del filtro ideal y de los filtros truncados

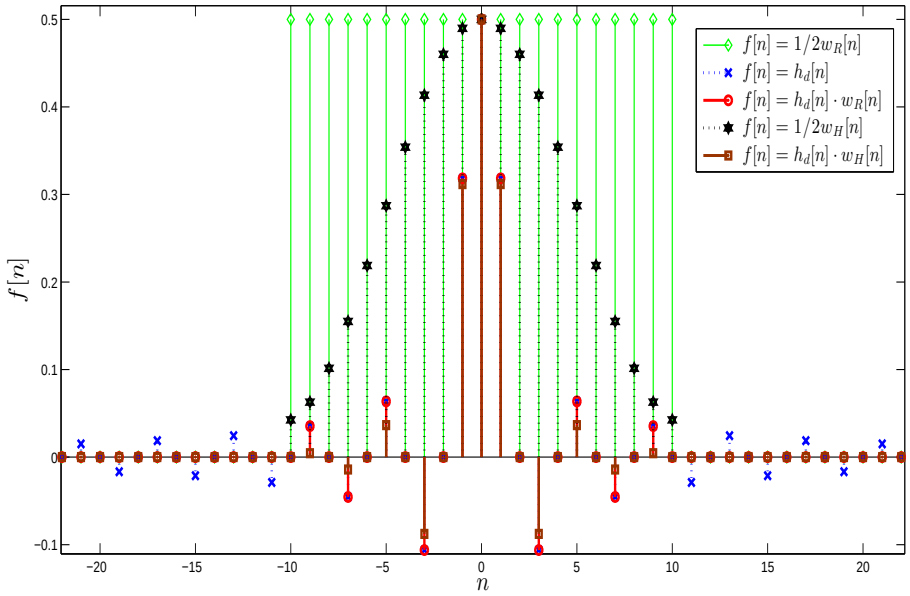


**Figura 5.5** – Multiplicación de la respuesta al impulso del filtro ideal y funciones ventana rectangular y Hamming.

por medio de las ventanas citadas, donde se pone de manifiesto el decaimiento hacia cero de los valores de la ventana de Hamming según nos aproximamos a los extremos y, en consecuencia, la menor amplitud de las muestras de las respuestas al impulso truncadas mediante dicha ventana. La respuesta en frecuencia del filtro resultante $H(\omega)$ se obtiene mediante la convolución, en el dominio de la frecuencia, de las respuestas en frecuencia del filtro paso-bajo ideal $H_d(\omega)$ y de la ventana rectangular $W_{Hm}(\omega)$, es decir,

$$H(\omega) = H_d(\omega) * W_{Hm}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_{Hm}(\omega - \theta) d\theta.$$

En la figura 5.6 se muestra el proceso de convolución descrito. En la misma están representadas la respuesta en frecuencia de la función ventana correspondiente a una ventana de longitud $N = 15$, la respuesta en frecuencia del filtro ideal y la respuesta en frecuencia del filtro enventanado resultante. Comparando visualmente las figuras 5.4 y 5.6 se pueden observar las propiedades anteriormente descritas, es decir, la anchura espectral del lóbulo principal es mayor en la ventana de Hamming que la correspondiente a la ventana rectangular, pero las amplitudes de los lóbulos secundarios de la ventana de Hamming son menores que las amplitudes de los de la ventana rectangular. Todo esto conduce a que la respuesta en frecuencia del filtro enventanado mediante la ventana de Hamming presente menores rizados en las bandas de paso y eliminada y una mayor anchura espectral de la banda de transición resultante que los valores correspondientes a la respuesta en frecuencia del filtro truncado (uso de la ventana rectangular). Esto es, si

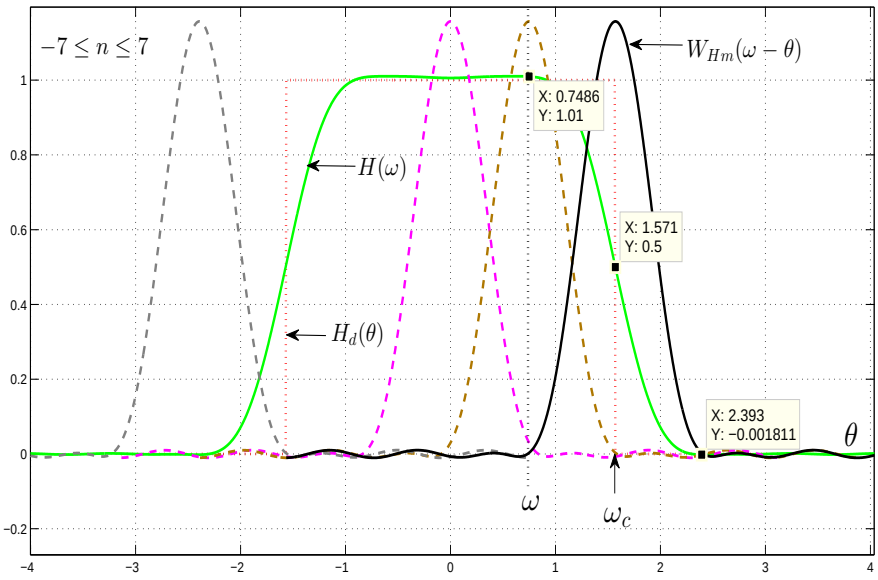


**Figura 5.6** – Convolución entre las respuestas en frecuencia de una ventana Hamming y del filtro ideal. Respuesta en frecuencia del filtro enventanado.

la complejidad del filtro es fija, la mejora en una propiedad (menores rizados) conlleva el deterioro en alguna otra (aumentos en la anchura espectral de la banda de transición).

### 5.3.1. Funciones ventana de parámetros fijos

Las funciones ventana se pueden clasificar en dos grandes grupos, el primero de ellos es el grupo de ventanas fijas que incluye, entre otras, la ventana de Hanning (también conocida con el nombre de Hann), la ventana de Hamming y la ventana de Blackman como las más comunes. Todas ellas pueden calcularse fácilmente [128] ya que sus formas funcionales pueden expresarse en función de la ventana rectangular modulada con funciones de tipo cosenoidal. Para funciones ventana de longitud impar $N = 2M + 1$, las formas funcionales de las distintas ventanas contempladas se pueden expresar [140] como

$$w[n] = \left[C_1 + C_2 \cos\left(\frac{2\pi n}{2M+1}\right) + C_3 \cos\left(\frac{4\pi n}{2M+1}\right)\right] w_R[n], \quad -M \leq n \leq M,$$

donde $w_R[n]$ representa la función ventana rectangular simétrica de longitud $N = 2M + 1$. Los distintos valores de los coeficientes $\{C_1, C_2, C_3\}$ definen los diferentes tipos de funciones ventana. Los valores correspondientes a cada una de las citadas funciones ventana se detallan en la tabla 5.1.

**Tabla 5.1** – Coeficientes de las funciones ventana de parámetros fijos

| Tipo de ventana | Coeficiente $C_1$ | Coeficiente $C_2$ | Coeficiente $C_3$ |
|---|---|---|---|
| Hann | 0.50 | 0.50 | 0 |
| Hamming | 0.54 | 0.46 | 0 |
| Blackman | 0.42 | 0.50 | 0.08 |

Al igual que la función ventana rectangular, todas estas ventanas son simétricas respecto a $n = 0$, lo que conlleva que las características de los filtros diseñados con estas ventanas presentarán las mismas características generales que los desarrollados mediante el truncamiento de la respuesta al impulso del filtro ideal. En particular, sus respuestas en frecuencia son de fase cero y vienen representadas por funciones reales y pares de $\omega$. Asimismo, la respuesta del filtro enventanado para la frecuencia de corte es aproximadamente igual a 0.5 y los rizados son los mismos en ambas bandas. Los tres tipos de funciones ventana descritos presentan la característica deseable de que sus transformadas de Fourier se concentran alredededor de $\omega = 0$, pudiéndose determinar las mismas mediante operaciones básicas con la transformada de Fourier de la ventana rectangular. Del mismo modo que sucedía con el filtro obtenido mediante truncamiento, para conseguir una rápida transición entre bandas se necesitan pequeñas anchuras del lóbulo principal de la ventana, mientras que para reducir los rizados en las bandas se requiere que el área bajo los lóbulos laterales sea muy pequeño. Por desgracia, estos dos requerimientos son contradictorios, por lo que el uso de ventanas de parámetros fijos hace que se pueda reducir la amplitud de los rizados en la banda de paso y atenuada, manteniendo la característica de que la amplitud del rizado en la banda de paso es la misma que en la banda atenuada y no dependen de la longitud del filtro o de la frecuencia de corte. Esto se traduce en que la atenuación que presenta el filtro resultante sea fija, mientras que la anchura de la banda de transición del filtro sea inversamente proporcional a su longitud, como en el caso del filtro obtenido por truncamiento. Los parámetros más representativos de las ventanas fijas enumeradas, así como las características de los filtros paso-bajo obtenidos, utilizando el método de enventanado para su diseño, pueden encontrarse en [140]. A modo de resumen, en la tabla 5.2 se muestran las relativas a las ventanas anteriormente citadas.

### 5.3.2. Funciones ventana de parámetros ajustables

Para tener control sobre las desviaciones de las bandas de paso y eliminada se ha desarrollado un segundo grupo de funciones, cuya velocidad de transición y su forma general son ajustables. A continuación se citan algunas de estas ventanas junto con las ideas principales que contribuyen a su génesis.

**Tabla 5.2** – Propiedades de algunas funciones ventana de parámetros fijos

| Tipo de ventana | Anchura del lóbulo principal | Nivel relativo del lóbulo lateral | Atenuación mínima de la banda eliminada | Anchura de la la banda de transición |
|---|---|---|---|---|
| Rectangular | $4\pi/(2M+1)$ | $-13.3$ | 20.9 | $0.92\pi/M$ |
| Hann | $8\pi/(2M+1)$ | $-31.5$ | 43.9 | $3.11\pi/M$ |
| Hamming | $8\pi/(2M+1)$ | $-42.7$ | 54.5 | $3.32\pi/M$ |
| Blackman | $12\pi/(2M+1)$ | $-58.1$ | 75.3 | $5.56\pi/M$ |

### 1.- Ventana basada en funciones de onda esferoidales

Todas estas funciones tienen como finalidad conseguir un grado de compatibilidad aceptable entre esas dos características contrapuestas. El objetivo fundamental es encontrar funciones cuya respuesta en frecuencia se concentre fundamentalmente alrededor de la frecuencia nula, $\omega = 0$. Este tema fue abordado con mucho detalle, en la década de los sesenta, por Slepian, Landau y Pollack en una serie de artículos clásicos [141]. La solución que encontraron estos autores se construía por medio de las llamadas funciones de onda esferoidales. A partir de las mismas, se generan las secuencias de ondas esferoidales (llamadas secuencias *prolate* en la literatura anglosajona), $w_s[n]$, [142] que son secuencias reales de longitud finita y energía unidad, y verifican que la energía correspondiente a una banda especificada que incluya las más altas frecuencias $\vartheta \leq \omega \leq \pi$ sea mínima. La longitud y $\vartheta$ forman el par de parámetros de la familia de dichas secuencias. Si $W_s(z)$ es la transformada $Z$ de la secuencia $w_s[n]$ con $-M \leq n \leq M$, se trata de minimizar la cantidad

$$\frac{1}{\pi}\int_{\vartheta}^{\pi} |W_s(e^{j\omega})|^2 d\omega, \tag{5.1}$$

teniendo en cuenta las consideraciones de energía unidad de la secuencia que puede expresarse como

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} |W_s(e^{j\omega})|^2 d\omega = 1 \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{N} w_s^2[n] = 1.$$

Los elementos de las secuencias de onda esferoidales para valores de $M = 1, 2 \cdots 10$ y para diferentes valores del parámetro $\vartheta$ se pueden encontrar en [143]. En MATLAB viene implementada la función **dpss.m** que nos proporciona secuencias esferoidales elongadas discretas. Los argumentos esenciales de la función son la longitud de las secuencias $N$ y el producto de la longitud de la secuencia y $f_1$ que representa el extremo superior del rango de frecuencias $[-f_1, f_1]$ normalizado, $f_1 < 1/2$, donde se desea que esté concentrada principalmente la energía del espectro, es decir $Nf = N \cdot f1$.

### 2.- Ventana de Kaiser

La ventana ajustable más usada es la ventana de Kaiser [144] que, para una longitud $N = 2M + 1$, viene dada [133] por

$$w_k[n] = \frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-(n/M)^2}\right)}{I_0(\beta)}, \quad -M \leq n \leq M,$$

donde $I_0(x)$ es la función de Bessel modificada de orden cero, la cual puede calcularse mediante la serie de potencias

$$I_0(x) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{(x/2)^l}{l!}\right)^2,$$

y que es positiva para todo número real $x$. A todos los efectos prácticos, es suficiente tomar los primeros veinte términos de la serie infinita de la función $I_0(x)$. El filtro obtenido, utilizando la ventana de Kaiser, tiene fase cero ya que tanto la respuesta al impulso ideal $h_d[n]$, como la ventana de Kaiser $w_k[n]$ son funciones con simetría par en el tiempo. El parámetro $\beta$ es el factor de forma de la ventana, controla la transición de la ventana en el tiempo y por tanto, la atenuación mínima del filtro cuando se utiliza en el proceso de enventanado; juega el mismo papel que el parámetro $\vartheta$ en la ventana óptima generada por las secuencia de ondas esferoidales. La respuesta en frecuencia de la ventana de Kaiser es una excelente aproximación de la respuesta en frecuencia de la secuencia *prolate*.

Dados los valores de la atenuación $A_s$ y de la anchura de la banda de transición en hercios $\Delta f$, Kaiser proporcionó fórmulas empíricas que estiman los valores de los parámetros $\beta$ y $N$ necesarios para tales fines [144]; así $\beta$ puede encontrarse por medio de

$$\beta = \begin{cases} 0, & \text{si } A_s < 21, \\ 0.5842(A_s - 21)^{0.4} + 0.07886(A_s - 21), & \text{si } 21 < A_s < 50, \\ 0.1102(A_s - 8.7), & \text{si } A_s > 50, \end{cases}$$

mientras que la longitud del filtro $N$ se encuentra a partir de la expresión

$$N \approx \frac{A_s - 7.95}{14.36\Delta f}. \tag{5.2}$$

Como en el resto de las ventanas anteriormente citadas, no tenemos ningún control sobre el rizado de la banda de paso $\delta_1$ una vez que hayamos determinado $\beta$ y $N$; no obstante, en la mayoría de los casos $\delta_1$ resulta ser aproximadamente igual a $\delta_2$, que en última instancia se determina mediante el valor de la atenuación. Las propiedades de la ventana van cambiando con los diferentes valores del factor de forma, en función de este factor, la ventana puede adoptar la forma de las ventanas fijas que se han considerado.

### 3.- Ventana de Saramäki

Saramäki en [145] introduce un nuevo tipo de funciones ventana ajustables a partir de la función ventana rectangular haciendo una trasformación en frecuencia. Esta transformación contiene un parámetro ajustable con el que se controla la anchura del lóbulo principal y, consecuentemente, la atenuación mínima de la banda eliminada del filtro resultante. Como en el caso de la ventana de Kaiser, la ventana de Saramäki es una muy buena aproximación a las funciones esferoidales discretas que minimizan la energía de los lóbulos laterales. Los filtros FIR que se obtienen por medio de esta ventana son ligeramente superiores (menos de un dB, en términos de atenuación mínima) a los obtenidos mediante la ventana de Kaiser. Respecto a la ventana de Kaiser, las principales ventajas de la ventana de Saramäki son que ésta posee expresiones cerradas y sencillas de evaluar tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia y que no se necesitan expansiones en series de potencias para determinar los valores de la función ventana. Por otro lado y como sucede con el resto de las ventanas, la anchura de la banda de transición del filtro se controla por medio del orden del filtro.

La construcción de la ventana parte de la respuesta en frecuencia de una ventana rectangular de longitud $N = 2M + 1$, que puede expresarse en términos de polinomios de Chebyshev de diferente orden $T_k(x)$ en la forma

$$W_R(\omega) = \sum_{n=-M}^{n=M} e^{-j\omega n} = 1 + 2\sum_{k=1}^{M} T_k(\cos\omega) = \frac{\operatorname{sen}[(2M+1)\omega/2]}{\operatorname{sen}(\omega/2)}. \tag{5.3}$$

A continuación, sobre (5.3), el autor aplica la transformación $\cos\omega \longrightarrow \gamma\cos\omega + (\gamma - 1)$, con

$$\gamma = \left(1 + \cos\frac{2\pi}{2M+1}\right) \Big/ \left(1 + \cos\frac{2\beta\pi}{2M+1}\right), \tag{5.4}$$

y donde $\beta$ es un parámetro ajustable que está directamente relacionado con la anchura del lóbulo principal, obteniendo

$$\widehat{W}(\omega) = \sum_{n=-M}^{M} \widehat{w}[n]e^{-j\omega n} = 1 + 2\sum_{j=1}^{M} T_j[\gamma\cos\omega + (\gamma - 1)].$$

Como $\widehat{w}[0]$ no es igual a la unidad, Saramäki realiza un proceso de normalización y obtiene la expresión de la función ventana que se escribe como $w_{srm}[n] = \widehat{w}[n]/\widehat{w}[0]$ para $-M \leq n \leq M$, mientras que su respuesta en frecuencia se expresa mediante la relación $W_{srm}(\omega) = \widehat{W}(\omega)/\widehat{w}(0)$. Los coeficientes $\widehat{w}[n]$ para $-M \leq n \leq M$ pueden determinarse mediante la expresión

$$\widehat{w}[n] = v_0[n] + 2\sum_{j=1}^{M} v_j[n],$$

donde los elementos $v_j[n]$ se pueden obtener de manera recursiva mediante las relaciones

$$v_0[n] = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad n = 0, \\ 0, & \text{si} \quad n \neq 0, \end{cases}$$

$$v_1[n] = \begin{cases} \gamma - 1, & \text{si} \quad n = 0, \\ \gamma/2, & \text{si} \quad |n| = 1, \\ 0, & \text{para cualquier otro valor de } n, \end{cases}$$

y

$$v_j[n] = \begin{cases} 2(\gamma - 1)v_{j-1}[n] - v_{j-2}[n] + \gamma[v_{j-1}[n-1] + v_{j-1}[n+1]], & \text{si} \quad |j| \leq n, \\ 0, & \text{si} \quad |j| > n, \end{cases}$$

Finalmente, en [145], se establece que mediante un conjunto de datos experimentales, se obtienen unas expresiones empíricas que determinan el valor de $\beta$ en función de la atenuación deseada del filtro realizado utilizando la ventana citada. La longitud necesaria del filtro, para una determinada anchura de la banda de transición, se determina mediante (5.2), que es la misma expresión que se utiliza con la ventana de Kaiser.

### 4.- Ventana de Dolph-Chebyshev

Otra función ventana ajustable es la de Dolph-Chebyshev, $w_{dc}[n]$, construida de modo que se minimiza el nivel del mayor lóbulo secundario en una banda especificada de frecuencias que incluye todas las frecuencias superiores a una dada, es decir, en el intervalo $\vartheta \leq \omega \leq \pi$. La ventana de Dolph-Chebyshev de longitud $N = 2M+1$ se define [146]

$$w_{dc}[n] = \frac{1}{2M+1}\left[\frac{1}{\gamma} + 2\sum_{j=1}^{M} T_j\left(\beta \cos\frac{j\pi}{2M+1}\right)\cos\frac{2j\pi n}{2M+1}\right], \quad -M \leq n \leq M,$$

donde

$$\gamma = \frac{\text{Amplitud del lóbulo lateral más alto}}{\text{Amplitud del lóbulo principal}},$$

$$\beta = \cosh\left(\frac{1}{2M}\cosh^{-1}\frac{1}{M}\right),$$

y $T_k(x)$ es el polinomio de Chebyshev de grado $k$-ésimo, definido como

$$T_k(x) = \begin{cases} \cos(k\cos^{-1}x), & \text{si } |x| \leq 1, \\ \cosh(k\cosh^{-1}x), & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Al igual que sucede con las demás funciones ventana la anchura del lóbulo principal disminuye al aumentar el número de términos de la misma. Algunas propiedades intere-

santes de estas ventanas es que todos los lóbulos secundarios tienen la misma altura y en consecuencia los filtros diseñados mediante estas ventanas tienen un comportamiento de rizado constante en la banda eliminada, por otro lado comparada con otras ventanas cualesquiera de la misma longitud, ésta tiene el lóbulo principal de anchura más pequeña, lo que se traduce en filtros que presentan la anchura de la banda de transición más pequeña [133].

En [147] se pueden encontrar las definiciones y propiedades más relevantes de todas las funciones ventana ajustables que se han citado, así como una comparativa entre ellas.

Salvo la ventana rectangular que produce filtros óptimos en el sentido de minimizar el error integral cuadrático, los filtros FIR basados en el método de la ventana en general no son óptimos en ningún sentido, aún cuando la propia ventana sea óptima en algún sentido definido. Una excepción lo constituyen un tipo de filtro paso-bajo llamado *eigenfilters* [148] que son óptimos en un sentido de mínimos cuadrados, pero definiendo la función objetivo del error de aproximación como una suma de errores asociados a las bandas de paso y atenuada. Esta función de error se obtiene añadiendo un segundo sumando a la función dada en (5.1) que fue usada para diseñar una ventana óptima. Este segundo sumando representa una desviación, en el sentido cuadrático, de la respuesta en la banda de paso respecto a la respuesta ideal. Esta formulación permite obtener los coeficientes del filtro óptimo por medio de un vector propio asociado a una matriz apropiada.

## 5.4. Funciones $\alpha$-spline en el diseño de filtros FIR

Una segunda forma de reducir las oscilaciones asociadas al fenómeno de Gibbs, es proporcionar una zona de transición entre las bandas de paso y eliminada, en la cual la amplitud de la respuesta en frecuencia decaiga suavemente y de manera continua desde el valor unidad en la banda de paso al valor cero en la banda eliminada. Con este fin se han usado funciones spline, definidas en frecuencia. En particular, en el capítulo 4 de esta memoria se han formulado filtros paso-bajo modificados, cuyas respuestas en frecuencia vienen dadas por (4.17), (4.21) ó (4.24), que presentan bandas de transición generadas mediante las funciones $\alpha$-spline, definidas en frecuencia, pertenecientes a uno cualquiera de los tres tipos de familias que se presentaron en el capítulo 3. Estas funciones, con independencia de la familia a la que pertenecen, son positivas y son no nulas en un intervalo cerrado de frecuencias cuyo tamaño depende de los parámetros de definición de las mismas, es decir, para cada función su energía está distribuida sobre un intervalo de frecuencias cerrado, como puede verse en la figura 5.7.

A las respuestas en frecuencia anteriormente citadas les corresponden respuestas al impulso dadas, respectivamente, por las ecuaciones (4.18), (4.22) ó (4.25) que dan lugar a filtros no causales y de longitud infinita. Estas respuestas al impulso de los filtros modificados, $h_{mdl}[n]$, donde $l$ indica la familia $\alpha$-spline utilizada para modelar la banda de transición, son simétricas alrededor de $n = 0$, ya que se obtienen mediante el producto

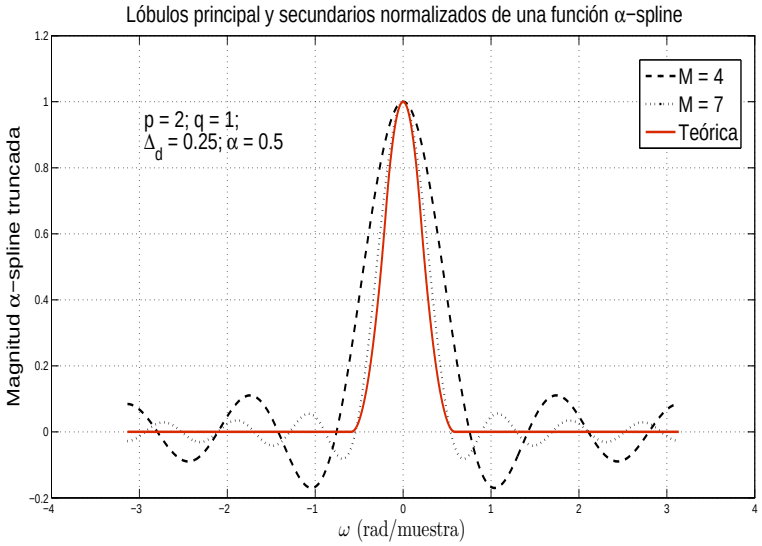


**Figura 5.7** – Lóbulos principal y secundario de una función $\alpha$-spline.

de la representación temporal de las funciones $\alpha$-spline y la respuesta al impulso del filtro ideal, que también lo son. En consecuencia, las respuestas en frecuencia de los filtros modificados son de fase cero.

A partir de dichas respuestas al impulso de longitud infinita se pretenden diseñar filtros FIR, para lo cual se hace imprescindible la realización de un truncamiento de la respuesta al impulso. Así, si se desea diseñar un filtro FIR de longitud $N = 2M + 1$, los coeficientes del filtro resultante serán $h_r[n] = h_{mdl}[n]$ donde $-M \leq n \leq M$. Este truncamiento es equivalente, a todos los efectos prácticos, al método de diseño basado en funciones ventana, del que ya se han esbozado las líneas generales en 5.2.

La representación temporal truncada de las funciones $\alpha$-spline hace que su energía no se concentre en un lóbulo único, sino que aparezca distribuida entre un lóbulo principal centrado en la pulsación $\omega = 0$ y varios lóbulos secundarios con amplitudes, y en consecuencia energías, decrecientes.

En la figura 5.7, además de darse la respuesta en frecuencia correspondiente a la respuesta al impulso infinita (no truncamiento), se muestran el lóbulo principal y varios lóbulos secundarios de una función que pertenece a la familia $\alpha$-spline de tipo III, para los supuestos de dos diferentes truncamientos.

Las características de estos lóbulos influyen, de manera directa, en las propiedades de los filtros FIR diseñados. En particular, las bandas ya no son planas sino que presentan rizados cuyos tamaños dependen de las amplitudes de los lóbulos secundarios de la respuesta en frecuencia correspondiente a la función $\alpha$-spline temporal truncada. Por otro lado, la anchura de la banda de transición del filtro modificado resultante depende de la anchura del lóbulo principal, intervalo frecuencial comprendido entre los dos pri-

meros cruces por cero a la derecha e izquierda del origen, de la respuesta en frecuencia correspondiente a la función $\alpha$-spline temporal truncada.

El truncamiento necesario para la obtención del filtro realizable conduce a plantearse una serie de preguntas previas, como pueden ser, ¿dónde realizar el truncamiento? o ¿qué grado[1] de las funciones spline es el más idóneo? a las que debemos contestar antes de proseguir.

Para responder a estas preguntas, es necesario comprender las relaciones entre los parámetros con los que se formulan los filtros, la frecuencia de corte $\omega_c$, la anchura de la banda de transición $\Delta_d$, el número de términos del filtro $N$ y el grado $\alpha$ o $\beta$ spline ($p + \alpha q$ o $\rho$), y su influencia sobre los filtros resultantes.

Salvo el grado $\alpha$-spline que puede seleccionarse de manera totalmente libre, los demás parámetros están sujetos a ciertas limitaciones, por ejemplo la frecuencia de corte $\omega_c$ típicamente viene determinada por la aplicación y no puede ser cambiada por el diseñador, por otra parte, la anchura de la banda de transición $\Delta_d$, aunque fijada por especificaciones de diseño, puede alterarse ligeramente en algunos supuestos, mientras que la longitud del filtro $N$ estará limitada en primera aproximación por cuestiones tales como la complejidad computacional, consideraciones de memoria o restricciones de retardo en la velocidad de grupo; por tanto, en este procedimiento de diseño de filtros se dan dos procesos separados y consecutivos. El primero, la utilización de funciones spline para generar bandas de transición, tiene por objetivo mitigar el fenómeno de Gibbs, mientras que el segundo, el proceso de truncamiento basado en algún criterio de optimización, pretende obtener un filtro realizable.

En la figura 5.8 se comparan los espectros de la ventana rectangular y de una función $\alpha$-spline de tipo III truncada, de la misma longitud que la ventana rectangular. Como puede observarse, el comportamiento respecto a la anchura del lóbulo principal es idéntico, es decir la anchura se reduce al aumentar la longitud de las funciones, sin embargo, el comportamiento es muy diferente con respecto a las amplitudes de los lóbulos secundarios donde se producen comportamientos totalmente distintos. Al aumentar la longitud, las amplitudes de los lóbulos laterales disminuyen para la función $\alpha$-spline, pero se mantienen invariables para el caso de la ventana rectangular, lo que pone de manifiesto que la convergencia de la serie basada en funciones $\alpha$-spline es más rápida que la debida a la ventana rectangular y, por lo tanto, las oscilaciones en las bandas de los filtros basados en las funciones $\alpha$-spline se reducen, respecto a las obtenidas a través de la ventana rectangular.

En la figura 5.9 puede verse este efecto para $M = 7$, donde se muestran las respuestas en frecuencia obtenidas a partir de la respuesta al impulso ideal y de la respuesta ideal de un filtro modificado con funciones $\alpha$-spline de tipo III truncadas, utilizando el valor $\omega_c = 0.5\pi$ como pulsación de corte del filtro paso-bajo.

[1] Utilizábamos el término orden para referirnos a las distintas funciones spline. En este capítulo usaremos el término grado para no confundir con el orden del filtro.

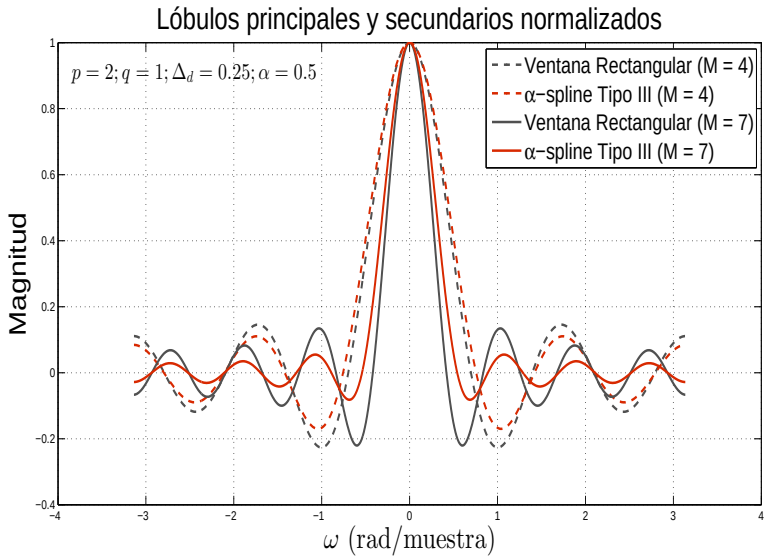


**Figura 5.8** – Espectros de una función $\alpha$-spline truncada y de la ventana rectangular.

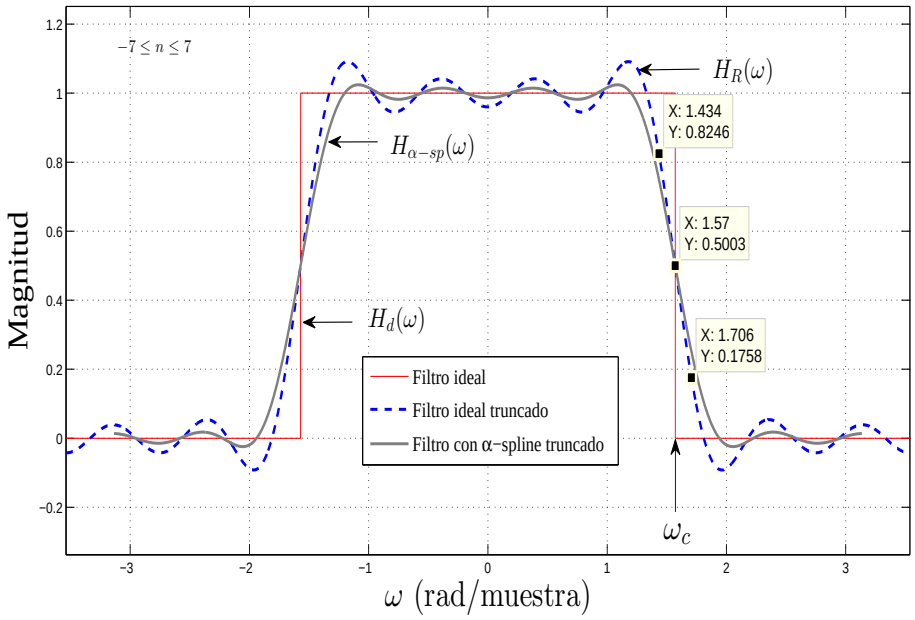


**Figura 5.9** – Espectros de los filtros ideal y basado en función $\alpha$-spline truncados.

Obtenida esta respuesta de longitud finita, se puede construir una respuesta causal introduciendo un retardo de $M$ muestras, con lo que la respuesta al impulso se convierte en $h_c[n] = h_r[n - M]$, donde $0 \leq n \leq (N - 1)$, siendo el filtro obtenido de fase lineal.

En todo el proceso descrito se ha tratado de obtener un prototipo de filtro paso-bajo, pero de manera totalmente similar se pueden obtener distintos tipos de filtros. Por ejemplo, un filtro paso-alto se genera a partir del prototipo paso-bajo restando de la unidad la respuesta en frecuencia del primero, mientras que un filtro paso-banda puede, igualmente, ser construido a partir del prototipo paso-bajo por medio de substracciones y/o modulaciones.

Las funciones $\beta$-spline, de exponente racional, presentan una fuerte limitación, ya que tienen que ser truncadas de modo que la base de la función no sea negativa, ya que podrían producirse valores complejos según el exponente utilizado; el presente trabajo se inició con el objetivo de superar esta limitación del truncamiento a puntos donde las bases de la representación temporal de las funciones $\beta$-spline fuesen positivas, generalizando el problema. Por ello se generaron las diferentes familias de funciones $\alpha$-spline en frecuencia, cuyas representaciones temporales, que se componen de funciones potenciales al igual que las funciones $\beta$-spline, están definidas para todo valor, positivo o negativo, de sus bases y que mediante ellas se pudiesen obtener unos filtros de iguales o mejores prestaciones que los definidos en los trabajos mencionados. A partir de los filtros ideales modificados con bandas de transición, construidas por medio de las funciones $\alpha$-spline, trataremos de obtener, con una elección concreta de los parámetros de partida y de un truncamiento adecuado de la respuesta al impulso, filtros de interés práctico (realizables) que cumplan ciertas especificaciones y que comparados con los filtros diseñados mediante las técnicas $\beta$-spline de exponente racional, presenten ciertas mejoras en algunas de sus características. En los siguientes epígrafes, se abordan dichos supuestos.

## 5.5. Aproximaciones del mínimo error integral cuadrático

La integral del cuadrado del error es un criterio de aproximación usado a menudo en el diseño de filtros ya que es una medida de la energía asociada a los términos desechados de la repuesta al impulso infinita. Si $h_{mdl}[n]$ representa la respuesta al impulso de cualquiera de los filtros formulados en el capítulo 4, el principal objetivo de diseño, atendiendo a este criterio, es la obtención de un filtro FIR de longitud $N$, cuya respuesta al impulso $h[n]$ es una versión truncada de $h_{mdl}[n]$, de manera que su respuesta en frecuencia $H(\omega)$ se aproxime a la respuesta en frecuencia teórica $H_T(\omega)$, entendida en este contexto como la respuesta en frecuencia de los filtros modificados con bandas de transición basadas en funciones $\alpha$-spline dadas por (4.21), (4.17) o (4.24), esto es, $H_T(\omega) = H_{mdl}(\omega)$, sobre una banda especificada de frecuencias, bajo el condicionante de que se minimice la integral

del error cuadrático dada por

$$\epsilon_{LISE} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_r}^{\omega_r} |H(\omega) - H_T(\omega)|^2\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_r}^{\omega_r} |H(\omega) - H_{mdl}(\omega)|^2\, d\omega, \tag{5.5}$$

donde con el subíndice $LISE$ se hace referencia al mínimo error integral cuadrático.

Se ha de buscar una relación entre el grado de las funciones $\alpha$-spline, la longitud del filtro y la anchura de la banda de transición de modo que las propiedades del filtro resultante se aproximen, en la banda de frecuencias especificada, lo máximo posible a las propiedades del filtro teórico. Aunque el planteamineto es válido para las funciones de cualquiera de las tres familias de funciones $\alpha$-spline definidas, las conclusiones que se extraen en este capítulo hacen referencia únicamente a las funciones pertenecientes a la familia de tipo II, [149]. La razón de esto es que el número de combinaciones posibles de los parámetros que definen los dos tipos de familias restantes es demasiado amplio y, en consecuencia, se hace complicado abordar un proceso de sistematización de resultados, por tanto, en el resto del trabajo, para el desarrollo de técnicas de diseño de filtros FIR se hará uso de la formulación de filtros modificados basados en funciones $\alpha$-spline de tipo II, cuyas respuestas en frecuencia y al impulso vienen dadas por (4.17) y (4.18) respectivamente, es decir, la respuesta al impulso $h[n]$ donde $-M \leq n \leq M$ es la versión truncada de la respuesta al impulso infinita $h_{md2}[n]$ (4.18). Este procedimiento de diseño, no proporciona ningún control sobre la atenuación de la banda eliminada.

### 5.5.1. Minimización del error integral cuadrático total (MEICT)

Este problema puede plantearse como la minimización de

$$\begin{aligned}\epsilon_T &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega) - H_{md2}(\omega)|^2\, d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k] - h_{md2}[k]|^2 \\ &= \sum_{k=-M}^{M} |h[k] - h_{md2}[k]|^2 + 2\sum_{k=M+1}^{\infty} |h_{md2}(k)|^2,\end{aligned} \tag{5.6}$$

donde

$$h_{md2}[k] = \frac{\omega_c}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{\omega_c k}{\pi}\right)\left[\text{sinc}\left(\frac{\Delta_d k}{2\pi(p+\alpha q)}\right)\right]^p\left[\text{sinc}\left(\frac{\alpha\Delta_d k}{2\pi(p+\alpha q)}\right)\right]^q,$$

y $h[k]$ es su versión truncada

$$\begin{aligned}h[k] &= \frac{\omega_c}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{\omega_c k}{\pi}\right)\left[\text{sinc}\left(\frac{\Delta_d k}{2\pi(p+\alpha q)}\right)\right]^p \cdot \\ &\quad \left[\text{sinc}\left(\frac{\alpha\Delta_d k}{2\pi(p+\alpha q)}\right)\right]^q \quad -M \leq k \leq M.\end{aligned} \tag{5.7}$$

El mínimo global de la expresión (5.6) se obtiene cuando el primer sumando de la segunda igualdad de la ecuación (5.6) se anula, lo cual exige que las respuestas al impulso teórica y truncada deben ser iguales en el intervalo $-M \leq k \leq M$, es decir, se debe verificar que $h[k] = h_{md2}[k]$, donde $-M \leq k \leq M$; con esta elección, el error de aproximación se representa mediante la suma de los términos desechados del filtro modificado que viene dado por

$$\epsilon_2 = 2 \sum_{k=M+1}^{\infty} |h_{md2}[k]|^2. \tag{5.8}$$

La pregunta que nos hacemos se puede formular como sigue. Dado el conjunto de especificaciones del filtro, formado por la frecuencia de corte $\omega_c$, la anchura de la banda de transición $\Delta_d$, y una determinada longitud del filtro $N$, ¿qué grado $\rho = p + \alpha q$ de las funciones $\alpha$-spline es el más adecuado?

Para responder a la cuestión anterior, se han realizado abundantes pruebas, donde se ha medido el error de aproximación $\epsilon_2$ en función del orden del filtro, para distintos valores del grado $\rho$ de las funciones $\alpha$-spline, para un conjunto de valores fijos tanto de $\omega_c$, como de $\Delta_d$. Para limitar la amplía casuística, todas las simulaciones, de las que se han obtenido conclusiones, se han realizado haciendo $q = 1$ en el grado de las funciones $\alpha$-spline, es decir, $\rho = p + \alpha$.

Una de estas pruebas se muestra en la figura 5.10; en ella se representa el logaritmo del error frente al semiorden del filtro $M$ para distintos valores del grado de las funciones $\alpha$-spline, tomando como frecuencia de corte $\omega_c = 0.45\pi$, y como anchura de la banda de transición $\Delta_d = 0.1\pi$.

De las pruebas realizadas, de las cuales la mostrada en la figura 5.10 es un ejemplo representativo, se pueden sacar las siguientes conclusiones:

1. El valor del logaritmo del error va decayendo continuamente a medida que $M$ aumenta, ya que el filtro diseñado se aproxima cada vez más al filtro teórico. Dentro de esta tendencia general, aparecen zonas donde el logaritmo del error se mantiene constante para diferentes intervalos de $M$.

2. El valor de $M$ donde comienzan las regiones planas, así como la anchura de las mismas, se incrementa al aumentar el grado de las funciones $\alpha$-spline.

3. Cambiando los valores de la frecuencia de corte y la anchura de la banda de transición de los filtros diseñados, se observa el mismo comportamiento del logaritmo del error de aproximación. Por otro lado, para un mismo valor del grado $\alpha$-spline, los valores iniciales de $M$, en las zonas donde el logaritmo del error de aproximación se mantiene constante, aumentan a medida que se exige una menor anchura de la banda de transición.

Con el fin de ajustar lo más fielmente posible la anchura obtenida de la banda de transición a la anchura de la banda de transición teórica hay que situarse en un

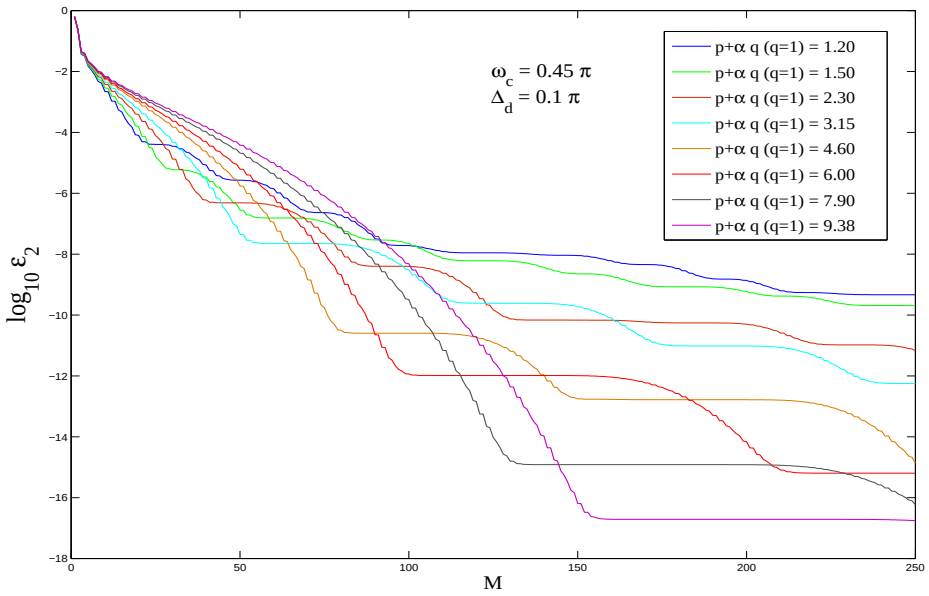


**Figura 5.10** – Logaritmo del error de aproximación ($\log_{10}\epsilon_2$) frente al semiorden $M$ del filtro. Parámetro $\{p+\alpha q(q=1)\}$.

punto próximo al inicio de alguna de las zonas planas que se ven en la figura 5.10. Las zonas planas coinciden con puntos situados en las proximidades de los cruces por cero de nuestras funciones $\alpha$-spline; así, si nos situamos en las cercanías del inicio de cualquier zona que no sea la primera, estaremos alargando innecesariamente la longitud del filtro ya que habrá términos que prácticamente no contribuyan a disminuir el error de aproximación, incrementando el número de operaciones necesarias para determinar la salida del filtro. De la argumentación anterior se aconseja la elección de un punto situado justo a la derecha del primer codo de la curva donde se localiza la primera zona plana de las curvas que se muestran en la figura 5.10; este punto se corresponderá con algún punto próximo al primer cero de la representación temporal de las funciones $\alpha$-spline, pero no necesariamente coincidir con él.

El valor del grado $\alpha$-spline buscado no es fácil de localizar analíticamente. La razón está en la representación temporal de las funciones $\alpha$-spline, que modelan la banda de transición. En dicha representación, el grado $p+\alpha q$, aparece tanto en el argumento de funciones tipo seno, que están elevadas a distintas potencias $p$ o $q$, como en las bases de funciones potenciales de exponente $p+q$; debido a esto, es difícil evaluar su incidencia, sobre todo a medida que el grado de las funciones $\alpha$-spline se incrementa. Para hacernos una idea aproximada del problema se va a considerar la forma que tienen nuestras funciones $\alpha$-spline en el dominio temporal, ya que las propiedades del filtro dependen directamente de las características de las funciones utilizadas para modelar las bandas de transición.

Con el propósito de acotar la zona de búsqueda del valor óptimo, localizado en un entorno del primer cruce por cero de las funciones $\alpha$-spline, se inicia un procedimiento que actúa sobre las funciones $\alpha$-spline en el dominio del tiempo continuo. La razón de la elección de este ámbito de actuación se debe a que en dicho entorno la localización de los puntos de interés se realiza de manera más fácil y de forma más precisa. Se está interesado en la delimitación de una zona alrededor del primer cruce por cero de las funciones $\alpha$-spline, que se extenderá a ambos lados de la misma. Las propiedades o comportamientos de las funciones cambian en las distintas regiones comprendidas entre puntos singulares de la función como pueden ser máximos y mínimos, inflexiones y ceros, por tanto parece lógico limitar la zona de búsqueda entre puntos notables que se encuentren a la izquierda y a la derecha del cruce por cero.

Haciendo el cambio de variable

$$\frac{\Delta_d t}{2\pi(p+\alpha q)} = x, \tag{5.9}$$

las funciones $\alpha$-spline de tipo II se pueden escribir como

$$F_\alpha(x) = \mathrm{sinc}^p(x) \cdot \mathrm{sinc}^q(\alpha x) = \left[\frac{\mathrm{sen}(\pi x)}{\pi x}\right]^p \cdot \left[\frac{\mathrm{sen}(\alpha\pi x)}{\alpha\pi x}\right]^q. \tag{5.10}$$

Estas funciones son simétricas alrededor del origen, y para valores positivos de $x$ van decayendo suavemente a medida que $x$ aumenta. En esta disminución paulatina las funciones pasan primero por un punto donde cambia la concavidad de la función (punto de inflexión), luego por otro punto donde se anulan, para finalmente llegar a un punto donde la función es mínima (el primer mínimo). Los puntos enumerados son importantes ya que en ellos las funciones cambian su comportamiento. Los primeros puntos singulares (inflexión, cruce por cero y mínimo) de la función se corresponden con ciertos valores de la variable independiente $x$ y que delimitan la zona de búsqueda del valor óptimo. Para todas las funciones el primer cero se sitúa en $x = 1$. Para determinar la posición de los mínimos de la función dada por (5.10), hay que igualar a cero su primera derivada. Si $q = 1$, la primera derivada de la función resulta

$$\begin{aligned} F'_\alpha(x) &= \left(\frac{\mathrm{sen}(\pi x)}{\pi x}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{\alpha\pi^2 x^3} \cdot [-(p+1)\mathrm{sen}(\alpha\pi x)\mathrm{sen}(\pi x) + \\ &+ p\pi x \mathrm{sen}(\alpha\pi x)\cos(\pi x) + \alpha\pi x \mathrm{sen}(\pi x)\cos(\alpha\pi x)]. \end{aligned} \tag{5.11}$$

La ecuación $F'_\alpha(x) = dF_\alpha(x)/dx = 0$ puede tener distintas soluciones, dependiendo de los valores de $p$, que se pueden determinar a partir de alguna de las siguientes ecuaciones:

$$\mathrm{sen}(\pi x) = 0 \Rightarrow x = k\,;\ k \in \mathbb{N} \tag{5.12}$$

$$\tan(\alpha\pi x) = \alpha\pi x \rightarrow x_{min} = 4.4934/(\alpha\pi) \tag{5.13}$$

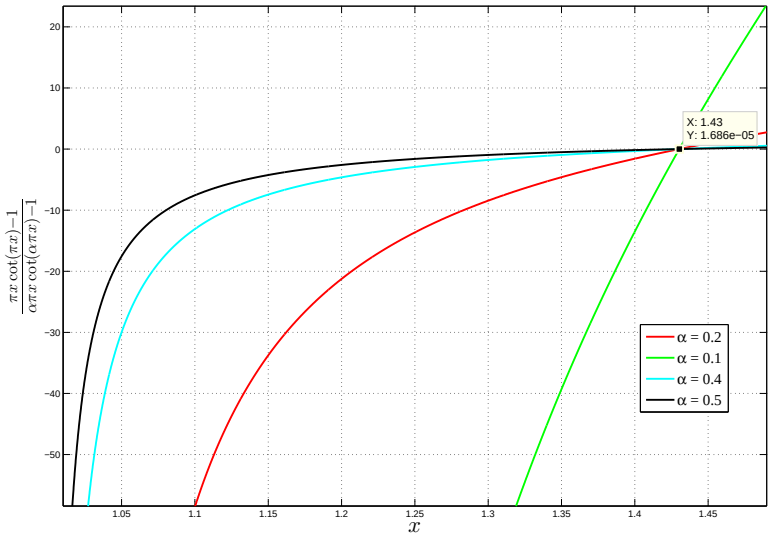


**Figura 5.11** – Función $F_{m,cot}(x)$ - $x$.

$$F_{m,cot}(x) = \frac{\pi x \cot(\pi x) - 1}{\alpha\pi x \cot(\alpha\pi x) - 1} = -\frac{1}{p} \tag{5.14}$$

Salvo para la ecuación (5.14), es claro que el primer mínimo solo puede localizarse para valores $x \geq 1$. Esto mismo sucede para la ecuación (5.14), cuyas únicas soluciones (valores de $x$ tales que la función sea exactamente igual a $-1/p < 0$) se localizan en valores de $x > 1$, ya que la función

$$y = \frac{y1}{y2} = \frac{\pi x \cot(\pi x) - 1}{\alpha\pi x \cot(\alpha\pi x) - 1}$$

siempre es positiva en el intervalo $[0, 1]$ para cualquier valor $0 < \alpha < 1$. En dicho intervalo se verifica que $y1 < 0$, $y2 < 0$ e $|y1| > |y2|$, y, por tanto, la función $y(x)$ es mayor que 1. Más aún, la función es estrictamente creciente en dicho intervalo y se verifica que

$$\lim_{x\to 0} y(x) = \frac{1}{\alpha^2}.$$

En la figura 5.11 se muestra la representación gráfica de la función $y(x)$ en el intervalo $1 < x < 1.5$, para diferentes valores del parámetro $\alpha$, donde la función puede tomar valores negativos y es por tanto una zona de posibles soluciones de la ecuación (5.14).

Para determinar las localizaciones de los puntos de inflexión de la función $F_\alpha(x)$ tenemos que igualar a cero su segunda derivada. De (5.10), la función derivada segunda se puede escribir como

$$
\begin{aligned}
F''_\alpha(x) &= \left(\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x}\right)^{p-2} \cdot \frac{1}{\alpha\pi^3 x^5} \times \{p(p-1)\pi^2 x^2 \cos^2(\pi x)\operatorname{sen}(\alpha\pi x) \\
&- 2p(p+1)\pi x \operatorname{sen}(\alpha\pi x)\operatorname{sen}(\pi x)\cos(\pi x) \\
&+ 2p\alpha\pi^2 x^2 \cos(\pi x)\operatorname{sen}(\pi x)\cos(\alpha\pi x) - 2(p+1)\alpha\pi x \operatorname{sen}^2(\pi x)\cos(\alpha\pi x) \\
&+ [(p+1)(p+2) - (p+\alpha^2)\pi^2 x^2]\operatorname{sen}(\alpha\pi x)\operatorname{sen}^2(\pi x)\}, \qquad (5.15)
\end{aligned}
$$

y para detectar las posiciones de los puntos de inflexión (en particular el primer punto), es conveniente remitirse a la representación gráfica de las funciones primera derivada $F'_\alpha(x)$ y segunda derivada $F''_\alpha(x)$ de la función original $F_\alpha(x)$, dadas por las ecuaciones (5.11), (5.15) y (5.10) respectivamente. En la figura 5.12 se muestran la primera y segunda derivada de las funciones $F_\alpha(x)$, para distintos valores del grado de las funciones $\alpha$-spline. En la misma se observa como a medida que el grado de las funciones crece, el primer punto de inflexión de la función $F_\alpha(x)$, que se corresponde con el primer mínimo de la primera derivada $F'_\alpha(x)$ o con los ceros de la segunda derivada $F''_\alpha(x)$, antes de pasar por cero, se va desplazando hacia valores más pequeños de $x$. El primer punto de inflexión, en todos los casos, se encuentra para valores $x < 1$, de modo que el más alejado del origen, que corresponde al menor grado de las funciones $\alpha$-spline, se alcanza en un valor que no va más allá de $x = 0.7$.

Con las condiciones expuestas, el valor de la variable $x = x_{opt}$, para unos valores $\omega_c$, $\Delta_d$ y $M$, debe buscarse dentro del intervalo comprendido entre el primer punto de inflexión y el mínimo de la representación temporal de la función $\alpha$-spline considerada. En cada caso, el valor buscado indica el extremo superior que debe alcanzar la variable $x$, y marcará la relación entre los parámetros $M$, $\Delta_d$ y $p+\alpha q$. Si se tomasen valores algo mayores al valor óptimo de $x$, el filtro resultante presentaría menores anchuras de las bandas de transición (mayores valores de $M$), mientras que valores menores conllevarían mayores anchuras de las bandas de transición (menores valores de $M$).

Con el fin de encontrar el valor $x = x_{opt}$, se han realizado un número considerable de pruebas con diferentes combinaciones de la anchura de la banda de transición $\Delta_d$, el grado de las funciones $\alpha$-spline y distintos valores del semiorden del filtro $M$, de modo que a través del cambio de variable resultasen valores de $x$ comprendidos entre los puntos correspondientes al primer punto de inflexión y al primer mínimo. De todo este proceso empírico se pudo extraer la conclusión de que el valor buscado, con un grado aceptable de aproximación, es el mismo en cualquier circunstancia, resultando ser $x_{opt} = 0.857$, valor que corresponde a un punto localizado entre el primer punto de inflexión y el primer cruce por cero de la función $\alpha$-spline. Este valor ha podido ser contrastado a través de un algoritmo genético usado como herramienta útil para la búsqueda del grado de las funciones $\alpha$-spline, y que se describe en la sección 5.9, que ha ayudado a establecer el procedimiento propuesto.

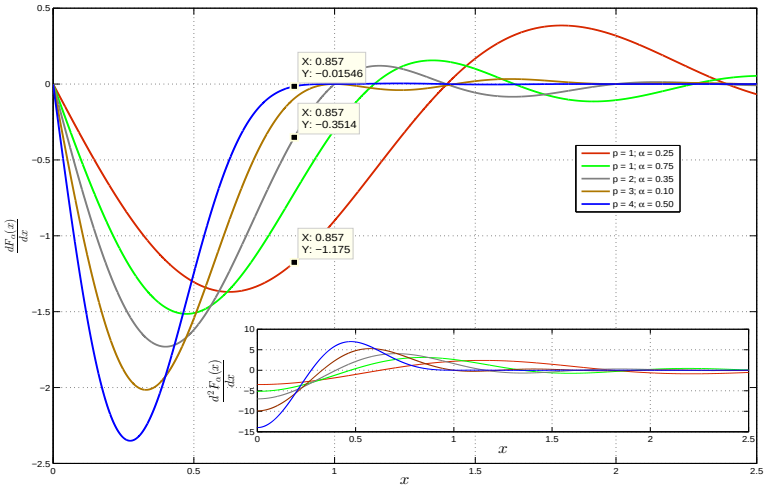


**Figura 5.12** – Derivada de $F_\alpha(x)$ frente $x$ $\{p + \alpha q(q = 1)\}$, $\Delta_d$ = Constante.

Deshaciendo el cambio de variable (5.9) y pasando al dominio discreto, donde $t = nT$ y $T = 1$ sin pérdida de generalidad, y teniendo en cuenta que el valor $x_{opt} = 0.857$ se corresponde con el $t_{max} = MT$, se puede escribir

$$\frac{\Delta_d M}{2\pi(p + \alpha q)} = 0.857,$$

y expresado en términos de la anchura de la banda de transición en hercios, $\Delta f = \Delta_d/(2\pi)$, se concluye que para minimizar el error, el grado $\alpha$-spline, el semiorden del filtro y la anchura de la banda de transición, en hercios, deben relacionarse por medio de la expresión

$$\Delta f M = 0.857(p + \alpha q). \tag{5.16}$$

En consecuencia, podemos describir el algoritmo del diseño del filtro como un procedimiento de tres etapas como se indica a continuación

---

**Procedimiento de diseño MEICT**

---

1. Seleccionar la longitud del filtro ($N = 2M+1$), la anchura de la banda de transición ($\Delta_d$) y la frecuencia de corte ($\omega_c$).

2. Calcular el orden de la función $\alpha$-spline a partir de (5.16).

3. Determinar los $2M + 1$ coeficientes del filtro usando (5.7).

---

C. S. Burrus y otros autores han utilizado las funciones $\beta$-spline, en el dominio de la frecuencia, como instrumento modelizador de bandas de transición. Los resultados

obtenidos están publicados en [5], y en un contexto más amplio, en el libro [120] del que es coautor, junto a T. W. Parks. En el trabajo citado, se puede encontrar que la respuesta al impulso del filtro resultante viene dada por

$$h_B[n] = \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{\pi n}\left[\frac{\text{sen}(\Delta_d n/(2\rho_b))}{\Delta_d n/(2\rho_b)}\right]^{\rho_b}, \tag{5.17}$$

y establece, como resultado de diversas experimentaciones numéricas, que el valor óptimo de $\rho_b$ que minimiza (5.6), sustituyendo las respectivas respuestas al impulso, para unos valores determinados de la longitud del filtro y de la anchura de la banda de transición, se determina mediante la expresión

$$\rho_b = 0.62\frac{\Delta_d N}{2\pi} = 0.62\Delta f N, \tag{5.18}$$

donde $\Delta f$ es la anchura de la banda de transición, expresada en hercios (Hz).

El hecho de que las funciones $\alpha$-spline se han generado con los objetivos de soslayar ciertas limitaciones que presentan las funciones $\beta$-spline de exponente racional y de mejorar los rendimientos de los filtros diseñados, hace pensar que aunque las expresiones (5.16) y (5.18) son similares, los grados encontrados por medio de ellas generarán filtros con propiedades ligeramente distintas como se verá en la sección 5.11.

### 5.5.2. Minimización del error integral cuadrático sobre las bandas de paso y eliminada (MEICEP)

En otras ocasiones es de interés centrarse, con exclusividad, en la banda de paso, con rango de frecuencias $[0, \omega_p]$ y en la banda atenuada, con rango de frecuencias $[\omega_s, \pi]$, donde $\Delta_d = \omega_s - \omega_p$ representa la anchura de la banda de transición. En este supuesto se trata de minimizar el error integral cuadrático sobre el conjunto de frecuencias que componen tanto la banda de paso como la banda eliminada, que viene dado por

$$\epsilon_{ps} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_p} |H(\omega) - H_T(\omega)|^2\, d\omega + \frac{1}{\pi}\int_{\omega_s}^{\pi} |H(\omega) - H_T(\omega)|^2\, d\omega, \tag{5.19}$$

donde $H_T(\omega)$ y $H(\omega)$ representan, respectivamente, la respuesta en frecuencia teórica y la respuesta en frecuencia del filtro truncado. Este problema también fue abordado por Burrus en el artículo previamente citado [5], utilizando las funciones $\beta$-spline en el dominio de la frecuencia para el modelado de bandas de transición en el diseño de filtros, cuya respuesta al impulso viene dada por la ecuación (5.17). En el mismo se afirma que, fijadas la longitud y la anchura de la banda de transición de un filtro deseado, los datos acumulados, tras una exhaustiva experimentación numérica, le han permitido elaborar unas expresiones empíricas que permiten determinar el grado necesario de la función $\beta$-spline que minimiza el error de aproximación (5.19) sobre el conjunto de frecuencias

pertenecientes a las bandas de paso y eliminida. En [5] se presenta un método para obtener el valor óptimo que minimiza (5.19), dadas una longitud $N$ y una anchura de la banda de transición $\Delta f$, expresado en hercios, se puede calcular mediante la relación que se muestra a continuación

$$\rho_b = KN\Delta_1, \tag{5.20}$$

donde

$$K = \begin{cases} 0.453 + 0.386/(N\Delta_1), & N\Delta_1 \leq 1.25, \\ 0.774 - 0.0251N\Delta_1, & 1.25 < N\Delta_1 < 5, \\ 0.648, & 5 < N\Delta_1, \end{cases} \tag{5.21}$$

y $\Delta_1 = 1.12 \cdot \Delta f$, and $\Delta_d = 2\pi\Delta_1$.

Con el fin de comprobar cómo se comportan las funciones $\alpha$-spline en este escenario, se ha realizado una aproximación empírica para intentar encontrar alguna relación entre los parámetros del filtro $N$, $\Delta_d$ y el grado óptimo de las funciones $\alpha$-spline que modelan la transición, con el fin de minimizar (5.19). Para ello se han realizado varias simulaciones analizando el comportamiento del error de aproximación (5.8) en diferentes situaciones.

Un primer grupo se compone de simulaciones que miden el error de aproximación en función del grado spline, para diferentes valores del orden del filtro, para valores fijos de la frecuencia de corte y de la anchura de la banda de transición.

En la figura 5.13, donde se representa la función $\log_{10} \epsilon_2$ en función del grado $\alpha$-spline, utilizando $M$ como parámetro, se muestra un ejemplo representativo de una de estas situaciones. En la misma se han utilizado unos valores fijos de $\omega_c = 0.45\pi$ y $\Delta_d = 0.1\pi$.

De la observación de la figura, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. Para cada semiorden de filtro $M$, hay un valor del grado de la función $\alpha$-spline que hace mínimo el error de aproximación.

2. Si el semiorden del filtro utilizado aumenta, manteniendo invariables los parámetros $\omega_c$ y $\Delta_d$, estos mínimos son más pronunciados y se producen para un grado mayor de las funciones $\alpha$-spline.

En un segundo grupo de experimentos, se mide el error de aproximación en función del grado $\alpha$-spline, para diferentes valores de la anchura de la banda de transición, fijando valores tanto para la frecuencia de corte como para el orden del filtro. En la figura 5.14 se plantea una de dichas situaciones, donde los parámetros fijos son $\omega_c = 0.45\pi$ y $M = 64$, y de la que se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. Al variar la anchura de la banda de transición $\Delta_d$, manteniendo fijos $M$ y $\omega_c$, el error de aproximación y el valor del grado $\alpha$-spline donde ocurre el mínimo cambian apreciablemente.

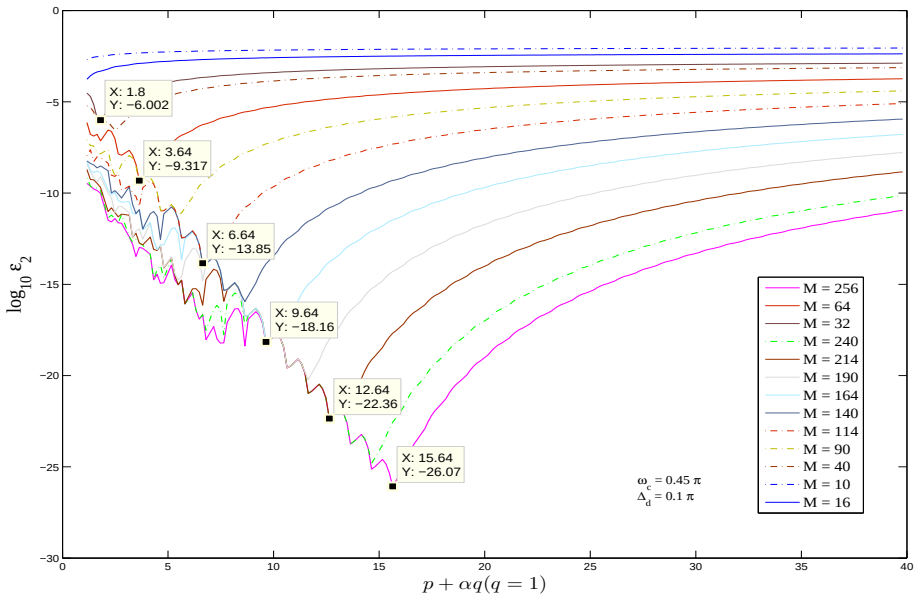


**Figura 5.13** – Logaritmo del error de aproximación ($\log_{10}\epsilon_2$) frente $\{p + \alpha q(q = 1)\}$. Parámetro $M$.

2. Al aumentar la anchura de la banda de transición $\Delta_d$, la aproximación es mejor y el grado $\alpha$-spline donde se produce el mínimo crece, lo que a su vez da lugar a que el filtro diseñado presente una mayor atenuación de la banda eliminada.

Un tercer grupo de pruebas ha consistido en medir el error de aproximación en función del grado de las funciones $\alpha$-spline, para distintas combinaciones de la anchura de la banda de transición $\Delta_d$ y del semiorden del filtro $M$, pero cumpliendo que el producto de ambos sea constante.

En las figuras 5.15, 5.16 y 5.17 se representan tres ejemplos representativos concretos, correspondientes a los valores $\Delta_d \cdot M = 8.84$, $\Delta_d \cdot M = 6\pi$ y $\Delta_d \cdot M = 10\pi$ respectivamente. De las mismas, se pueden extraer algunas conclusiones:

1. Para cualquier combinación de $\Delta_d$ y $M$ tal que su producto $\Delta_d M$ sea fijo, el mínimo error de aproximación se consigue para un mismo valor del grado de las funciones $\alpha$-spline.

2. El error va disminuyendo, conforme $M$ aumenta y, en consecuencia, $\Delta_d$ se reduce.

3. A medida que se hace mayor el producto $\Delta_d M$, el grado de las funciones $\alpha$-spline donde se produce el mínimo error de aproximación se hace más grande.

A partir de estas ideas previas, se realizaron un número significativo de simulaciones para obtener el grado de las funciones $\alpha$-spline que minimiza el error de aproximación

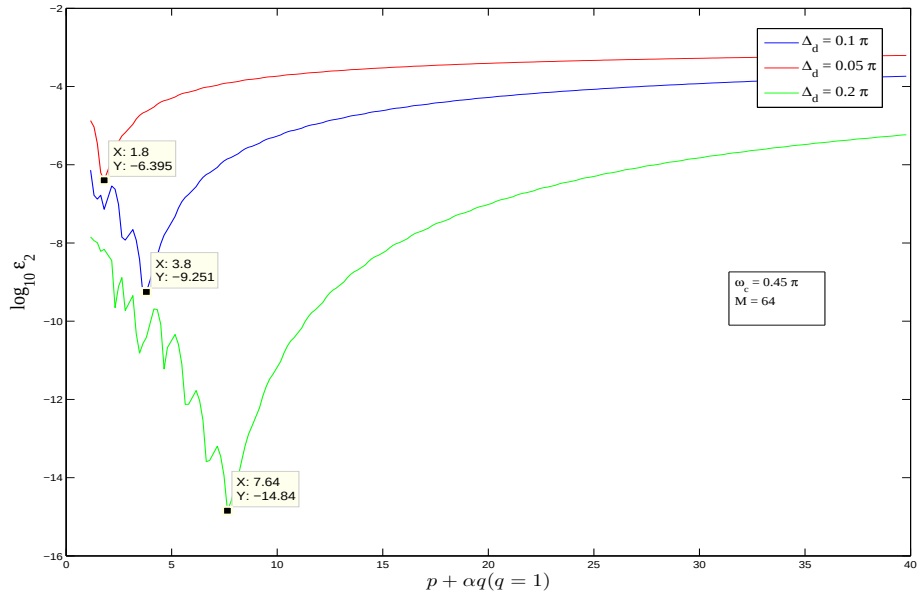


**Figura 5.14** – Logaritmo del error de aproximación $(\log_{10}\epsilon_2)$ frente $\{p+\alpha q(q=1)\}$. $M=64$ y parámetro $\Delta_d$.

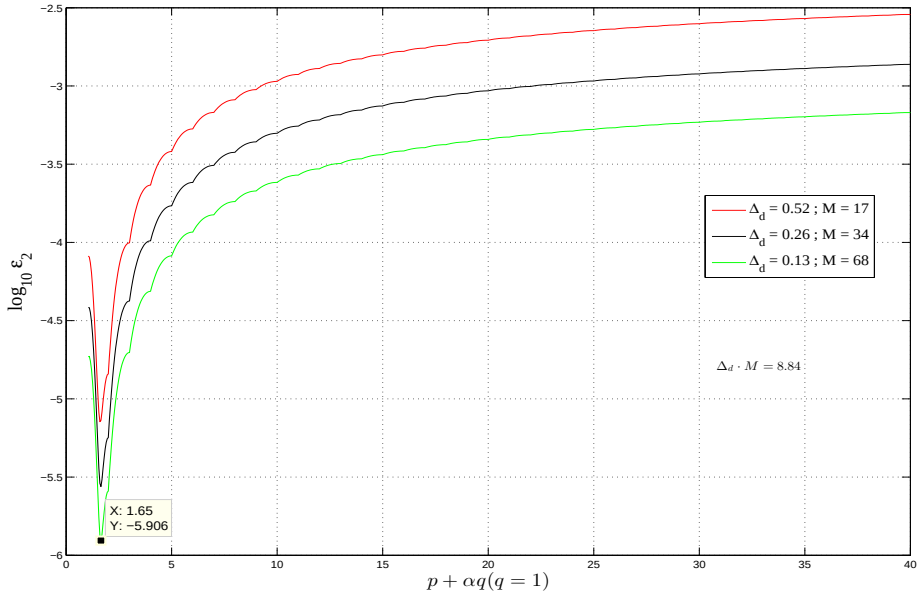


**Figura 5.15** – Logaritmo del error de aproximación $(\log_{10}\epsilon_2)$ frente $\{p+\alpha q(q=1)\}$. Parámetro $\Delta_d \cdot M = 8.84$.

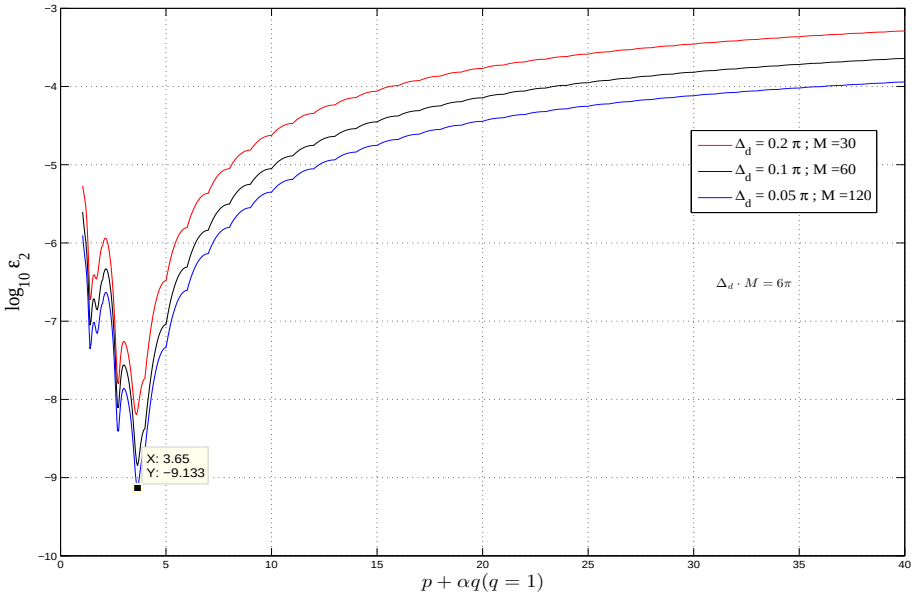


**Figura 5.16** – Logaritmo del error de aproximación $(\log_{10}\epsilon_2)$ frente $\{p + \alpha q(q = 1)\}$. Parámetro $\Delta_d \cdot M = 6\pi$.

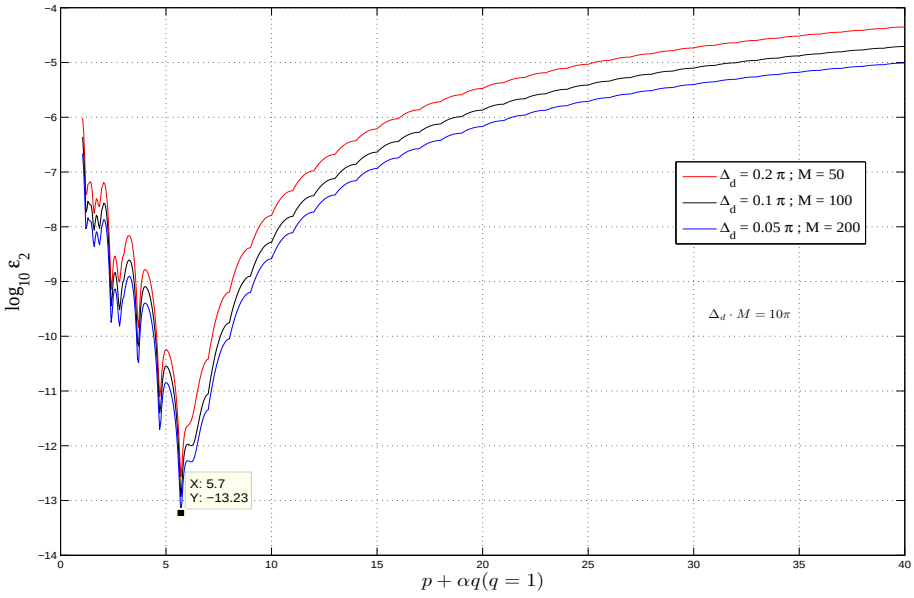


**Figura 5.17** – Logaritmo del error de aproximación $(\log_{10}\epsilon_2)$ frente $\{p + \alpha q(q = 1)\}$. Parámetro $\Delta_d \cdot M = 10\pi$.

**Tabla 5.3** – Coeficientes para la obtención de $\rho$ por medio de (5.22)

| $x = M \cdot \Delta_d$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $1.75\pi \leq x < 4.00\pi$ | $-0.0294$ | $0.5394$ | $-1.1575$ |
| $4.00\pi \leq x < 5.75\pi$ | $-0.0178$ | $0.5745$ | $-1.9071$ |
| $5.75\pi \leq x < 7.50\pi$ | $-0.0097$ | $0.4256$ | $-0.9189$ |
| $7.50\pi \leq x < 9.25\pi$ | $-0.0103$ | $0.5555$ | $-2.7449$ |
| $9.25\pi \leq x < 10.75\pi$ | $-0.0055$ | $0.3542$ | $-0.0147$ |
| $10.75\pi \leq x < 12.50\pi$ | $-0.0056$ | $0.4208$ | $-1.1893$ |
| $12.50\pi \leq x < 14.25\pi$ | $-0.0061$ | $0.5195$ | $-3.3449$ |

sobre la banda de paso y la banda eliminada, dado por la expresión (5.19). En todas las pruebas realizadas, fijados el semiorden del filtro $M$, la anchura de la banda de transición $\Delta_d$ y la frecuencia de corte $\omega_c$ del filtro paso-bajo a diseñar, se encuentra que el grado óptimo de las funciones $\alpha$-spline es aquel que minimiza la función $\log_{10} \epsilon_2(p+\alpha q)$, contemplando el producto $\Delta_d \cdot M$ como parámetro.

La información conseguida con las simulaciones previas tenían como objetivo el encontrar una relación analítica entre el grado de la función $\alpha$-spline $\rho = p + \alpha q\,(q = 1)$, necesario para minimizar el error de aproximación, y una variable que represente el producto del semiorden del filtro y la anchura de la banda de transición, es decir, $x = M \cdot \Delta_d$. De la acumulación heurística de resultados experimentales se desprende que a medida que la variable $x$ crece, el grado necesario de la funciones $\alpha$-spline también lo hace. Este crecimiento no es uniforme, siendo más acusado para valores pequeños del parámetro $\alpha$, esto es, cuando estamos más cerca de un grado natural de la función spline. Debido a esto, se divide todo el rango de variación (valores plausibles) de la variable $x$ en intervalos de modo que en cada uno de ellos a cada valor de la variable $x$ le corresponde un grado de la función $\alpha$-spline cuya parte entera es la misma para todos los valores del intervalo considerado. Con la división propuesta, en cada uno de los intervalos contemplados los pares de valores $(x, \rho)$ guardan una relación que puede modelarse mediante una función polinómica de segundo grado de la forma

$$\rho = ax^2 + bx + c, \tag{5.22}$$

y con diferentes coeficientes $(a, b, c)$ en cada tramo contemplado. El valor de este conjunto de coeficientes se ha determinado mediante el procedimiento de regresión polinómica por mínimos cuadrados, cuya forma básica se da en el apéndice C. En la tabla 5.3 se presentan los diferentes conjuntos de coeficientes que se deben utilizar en la expresión (5.22).

En la figura 5.18 se muestra la función polinómica correspondiente al intervalo $9.25\,\pi \leq x < 10.75\,\pi$.

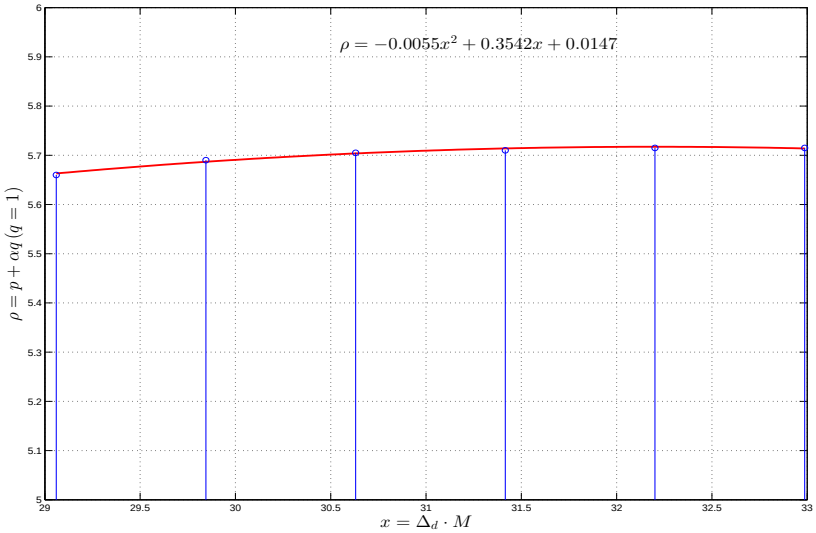


**Figura 5.18** – Curva de regresión polinómica correspondiente al intervalo $9.25\,\pi \leq x < 10.75\,\pi$.

En relación con el supuesto de minimización del error integral cuadrático sobre el conjunto de frecuencias que componen la banda de paso y la banda eliminada, las consideraciones previas nos conducen a describir el algoritmo de diseño de un filtro paso-bajo (algoritmo MEICEP), mediante un proceso de tres etapas, como se muestra a continuación

---

**Procedimiento de diseño MEICEP**

---

1. Seleccionar la longitud del filtro ($N = 2M+1$), la anchura de la banda de transición ($\Delta_d$), y la frecuencia de corte ($\omega_c$).

2. Calcular el grado de la función $\alpha$-spline por medio de (5.22) usando los coeficientes $(a, b, c)$ dados en la tabla 5.3.

3. Determinar los $2M + 1$ coeficientes del filtro utilizando (5.7).

---

## 5.6. La frecuencia de corte en el error de aproximación

Se han realizado dos conjuntos de pruebas adicionales con el propósito de indagar si existen variaciones del error de aproximación con la frecuencia de corte $\omega_c$ del filtro diseñado. En el primero, se han mantenido fijos los valores de la longitud $N$ del filtro y del grado de la función $\alpha$-spline usada para el diseño del filtro, y se ha buscado la

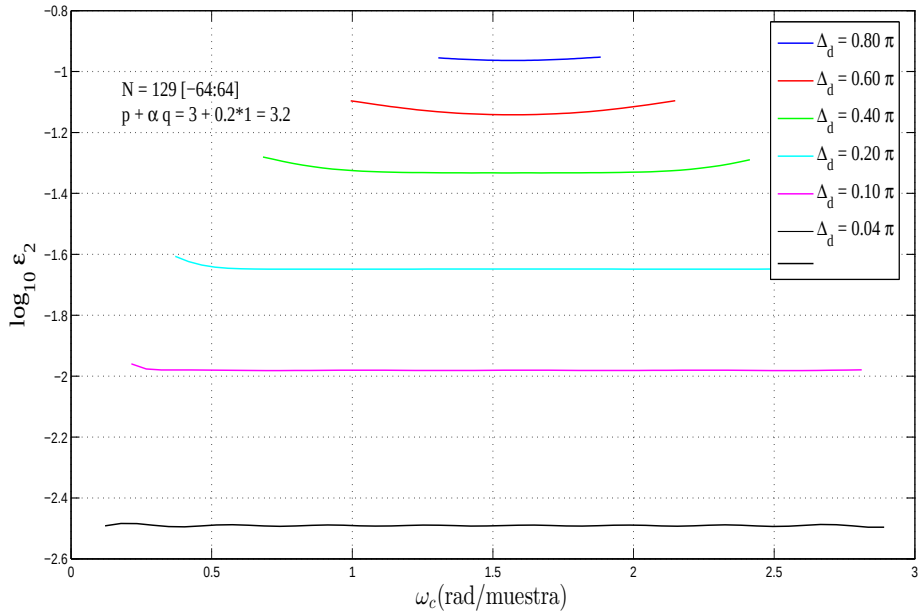


**Figura 5.19** – Logaritmo del error de aproximación ($\log_{10}\epsilon_2$) frente $\omega_c$. Parámetro $\Delta_d$.

dependencia del error de aproximación con la pulsación de corte del filtro $\omega_c$. En la figura 5.19 se muestran los resultados en el supuesto en el que la longitud es $N = 129$ y el grado $\alpha$-spline es $p + \alpha q = 3.2$, para distintos valores de la anchura de la banda de transición $\Delta_d$. De la misma se pueden inferir las conclusiones siguientes:

1. Fijados $N$ y $(p + \alpha q)$, el logaritmo del error de aproximación disminuye a medida que se reduce la anchura de la banda de transición $\Delta_d$.

2. Para valores concretos de la anchura de la banda de transición, el logaritmo del error de aproximación es aproximadamente independiente de la frecuencia de corte del filtro.

En el segundo, fijadas la longitud del filtro $N$, la anchura de la banda de transición $\Delta_d$ y el grado $\alpha$-spline $p+\alpha q$, hemos buscado la relación del error de aproximación con la frecuencia de corte $\omega_c$, para diferentes combinaciones $\{p, \alpha, q\}$ tal que $p+\alpha q =$ constante. En la figura 5.20 se muestra el logaritmo del error de aproximación para el caso concreto en el que $N = 129$, $\Delta_d = 0.6\pi$ y $p + \alpha q = 3.2$, para cuatro diferentes combinaciones de $\{p, \alpha, q\}$. Se observa que el logaritmo del error de aproximación es independiente de la frecuencia de corte para una combinación de $\{p, \alpha, q\}$ dada, pero disminuye muy ligeramente a medida que el valor de $\alpha$, en cada combinación, aumenta. Se concluye que el error de aproximación se puede considerar independiente de la frecuencia de corte del filtro paso-bajo diseñado.

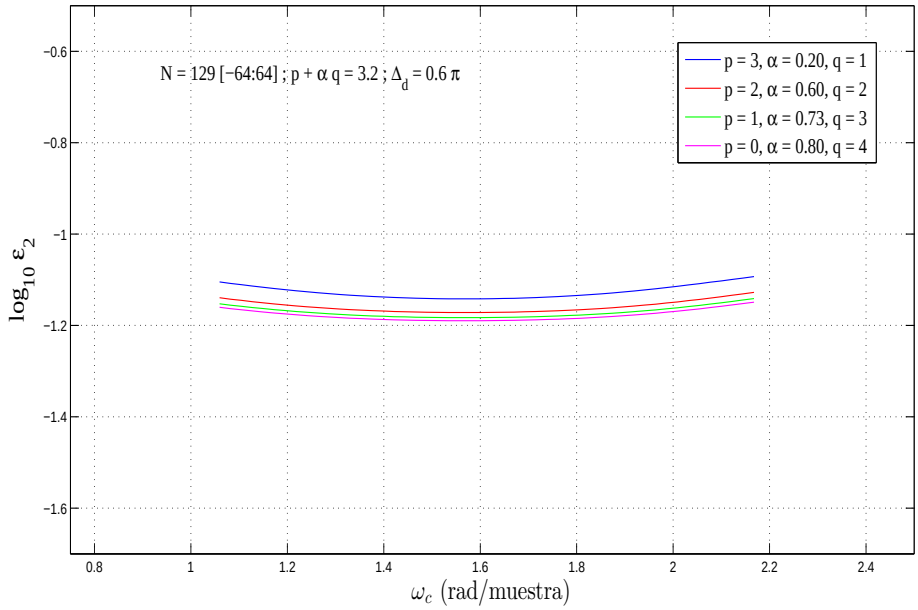


**Figura 5.20** – Logaritmo del error de aproximación ($\log_{10}\epsilon_2$) frente $\omega_c$. Parámetro $\{p, \alpha, q\}$).

## 5.7. Filtros principalmente planos (PF)

Como se ha podido observar en las secciones previas, los procedimientos de diseño propuestos no proporcionan un control a priori de la atenuación mínima de la banda eliminada, pudiendo afirmar tan solo que dicha atenuación se incrementa a medida que se utilizan funciones spline de mayor grado en el diseño.

En esta sección se aborda el problema del diseño de filtros, cuando la atenuación mínima en la banda eliminada sea un parámetro a contemplar en el diseño. Este asunto ha sido contemplado por R. M. Roark y M. A. Escabí [4] para el diseño de filtros. Los autores proponen filtros digitales FIR, para aplicaciones generales, con excelentes características tanto en la banda de paso como en la banda eliminada, utilizando $\beta$-spline en el dominio de la frecuencia, que modelan bandas de transición que conectan suavemente la banda de paso y la banda eliminada. Los coeficientes del filtro se determinan de forma cerrada, a partir de la transformada inversa de Fourier toda vez que los $\beta$-spline han sido usados para reemplazar los bordes de transición abruptos del módulo de la respuesta en frecuencia del filtro paso-bajo ideal. Al igual que Burrus en [5], estos autores amplian la representación temporal de las funciones $\beta$-spline al caso en el que el exponente pueda tomar valores racionales positivos, en vez de números naturales. La forma general es

$$w_\beta[n] = \left[\frac{\text{sen}(\Delta_d n/(2\rho))}{\Delta_d n/(2\rho)}\right]^\rho,$$

donde $\rho$ representa el número de pulsos (definidos en el dominio de la frecuencia) que hay que convolucionar para generar una determinada función $\beta$-spline. Tal ampliación, si $p$ se considera como el número de pulsos a convolucionar para generar splines no es consistente, ya que debe ser un número natural. Los autores la fundamentan en el hecho concreto de diseño de que tan solo se requieren valores de $w_\beta[n]$ en los cuales la base de la función potencial únicamente toma valores positivos, ya que, como se ha dicho en párrafos previos, si la base pudiera tomar valores negativos la función $w_\beta[n]$ no estaría definida en el campo de los números reales. Estas funciones $\beta$-spline se utilizan para generar filtros cuya respuesta al impulso toma la misma forma general que la dada por Burrus (5.17), y que reescribimos para Roark cambiando el subíndice $B$ por el subíndice $R$ y el grado de las funciones $\beta$-spline, $\rho_b$ por $\rho$ simplemente; así se tiene

$$h_R[n] = \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{\pi n} w_\beta[n] = \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{\pi n} \left[ \frac{\text{sen}(\Delta_d n/(2\rho))}{\Delta_d n/(2\rho)} \right]^\rho . \tag{5.23}$$

Con el objetivo de superar la limitación descrita, se van a utilizar las funciones $\alpha$-spline para el diseño de filtros FIR que tengan prescripciones de características máximamente planas en las bandas de paso y eliminada.

Las respuestas en frecuencia (4.17) de los filtros formulados en el capítulo 4 tienen respuestas en frecuencia cuyos módulos presentan la notable propiedad de que valen la unidad sobre toda la banda de paso, siendo nulas sobre toda la banda eliminada por lo que son maximalmente planos para todas las derivadas de $H_{md2}(\omega)$ con respecto a $\omega$ en los intervalos $0 \leq \omega < \omega_c - \Delta_d/2$ y $\omega_c + \Delta_d/2 < \omega \leq \pi$. Además, $H_{md2}(\omega)$ es maximalmente plana en $\omega = \omega_c - \Delta_d/2$ y en $\omega = \omega_c + \Delta_d/2$ en el sentido de que las primeras $(p + q - 1)$ derivadas son nulas en dichos puntos. En consecuencia, se puede inferir que las bandas de los filtros prototipos diseñados, mediante las funciones $\alpha$-spline, tengan características máximamente planas, en el sentido de la técnica de optimización dada en el criterio número 5 de la sección 5.1.2. La necesidad del trucamiento de las respuestas al impulso (4.18) para generar filtros FIR, limitará el alcance de las propiedades descritas de los filtros modificados de ser maximalmente planos.

Una pregunta surge inmediatamente, ¿dónde o cómo realizar el truncamiento para generar un filtro de $N = 2M + 1$ coeficientes, cuyas características se aproximen a las propiedades prescritas por el criterio de ser maximalmente planas? A los filtros truncados obtenidos, atendiendo a este criterio, se les denomina filtros principalmente planos (Principally Flat).

Para responder a esta pregunta hay que fijarse, nuevamente, en las propiedades de la ventana rectangular. A través de ella se ha puesto de manifiesto que cambios bruscos en la respuesta al impulso generan respuestas en frecuencia que presentan oscilaciones amplias tanto en la banda de paso como en la banda eliminada; así que si deseamos diseñar filtros que presenten respuestas en frecuencia con características muy planas en las bandas de interés conviene que el truncamiento de las respuestas al impulso de los

filtros diseñados con $\alpha$-spline, se haga exactamente en alguno de los cruces por cero de dichas respuestas. En la ecuación (4.18), que se reproduce a continuación

$$h_{md2}[n] = \frac{\omega_c}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right)\left[\text{sinc}\left(\frac{\Delta_d n}{2\pi(p+\alpha q)}\right)\right]^p\left[\text{sinc}\left(\frac{\alpha\Delta_d n}{2\pi(p+\alpha q)}\right)\right]^q,$$

se pueden identificar dos partes,

$$h_d[n] = \frac{\omega_c}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right),$$

y

$$F_{2d}^{[p,q]}[n] = w_\alpha[n] = \text{sinc}^p\left(\frac{\Delta_d n}{2\pi(p+\alpha q)}\right)\text{sinc}^q\left(\frac{\alpha\Delta_d n}{2\pi(p+\alpha q)}\right),$$

que puede ser interpretada como una función ventana.

En términos de funciones seno, esta última ecuación se reescribe

$$w_\alpha[n] = \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\Delta_d n}{2(p+\alpha q)}\right)}{\frac{\Delta_d n}{2(p+\alpha q)}}\right]^p\left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\alpha\Delta_d n}{2(p+\alpha q)}\right)}{\frac{\alpha\Delta_d n}{2(p+\alpha q)}}\right]^q, \tag{5.24}$$

y es la función donde debemos buscar los ceros. Los ceros de (5.24) se presentan en puntos que verifiquen

$$\text{sen}\left(\frac{\Delta_d n}{2(p+\alpha q)}\right) = 0, \Rightarrow \frac{\Delta_d n}{2(p+\alpha q)} = k\pi;\ k \in \{Z - \{0\}\}$$

o

$$\text{sen}\left(\frac{\alpha\Delta_d n}{2(p+\alpha q)}\right) = 0, \Rightarrow \frac{\alpha\Delta_d n}{2(p+\alpha q)} = k_1\pi;\ k_1 \in \{Z - \{0\}\},$$

pero como $\alpha < 1$, los primeros ceros deben buscarse en la primera de las ecuaciones, es decir,

$$\frac{\Delta_d n}{2(p+\alpha q)} = k\pi;\ k \in \{Z - \{0\}\}. \tag{5.25}$$

Los ceros están localizados simétricamente a la derecha y a la izquierda del máximo de la función (5.24) que se consigue en $n = 0$.

Las muestras $-M \leq n \leq M$ tomadas, que darán lugar a los coeficientes del filtro, deben estar equiespaciadas y distribuirse entre los puntos cero elegidos a la derecha e izquierda del origen, el cual coincidirá con $n = 0$. Por tanto se ha de cumplir que

$$\frac{\Delta_d M}{2(p+\alpha q)} = k\pi;\ k \in \{\mathbb{Z} - \{0\}\} \Rightarrow \frac{\Delta_d}{2(p+\alpha q)} = \frac{k\pi}{M};\ k \in \{\mathbb{Z} - \{0\}\}. \tag{5.26}$$

Con esta elección, las funciones ventana $w_\beta[n]$ y $w_\alpha[n]$ se hacen cero en los puntos finales de la serie de convolución, por lo que, en realidad, la longitud del filtro es, de hecho, $N - 2$, en lugar de $N$. Para tener en cuenta estos dos términos, con el fin de

reducir el error cuadrático medio de las serie de convolución, vamos a forzar a que la función ventana se haga cero no en $n = \pm M$, sino en $n = \pm(M+1)$, lo que además conlleva una ligera disminución de la anchura de la banda de transición.

Estos mismos argumentos fueron esgrimidos por Roark en [4] y aplicados sobre $w_\beta[n]$; por tanto, llevando (5.26) a (5.24), o de modo similar, llevando (5.26), con la equivalencia $\rho = p+\alpha q$, a (5.23), para posteriormente sustituir $M$ por $M+1$, se obtienen las respuestas al impulso finitas, de $N$ elementos, de las respectivas funciones ventana como

$$\begin{aligned} w_\alpha[n] &= \operatorname{sinc}^p\left(\frac{kn}{M+1}\right)\operatorname{sinc}^q\left(\frac{k\alpha n}{M+1}\right) \\ &= \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi kn}{M+1}\right)}{\frac{\pi kn}{M+1}}\right]^p\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\alpha kn}{M+1}\right)}{\frac{\pi\alpha kn}{M+1}}\right]^q \quad -M \le n \le M, \end{aligned} \tag{5.27}$$

o

$$w_\beta[n] = \operatorname{sinc}^\rho\left(\frac{kn}{M+1}\right) = \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi kn}{M+1}\right)}{\frac{\pi kn}{M+1}}\right]^\rho \quad -M \le n \le M; \tag{5.28}$$

mientras que las respuestas al impulso finitas, de $N$ elementos, de los respectivos filtros PF paso-bajo diseñados, que denotaremos con $h_{PF,\alpha}[n]$ para el filtro PF basado en $\alpha$-spline y con $h_{PF,\beta}[n]$ para el filtro basado $\beta$-spline, vienen dadas por

$$\begin{aligned} h_{PF,\alpha}[n] &= \frac{\omega_c}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right)\operatorname{sinc}^p\left(\frac{kn}{M+1}\right)\operatorname{sinc}^q\left(\frac{k\alpha n}{M+1}\right) \\ &= \frac{\operatorname{sen}(\omega_c n)}{\pi n}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi kn}{M+1}\right)}{\frac{\pi kn}{M+1}}\right]^p\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\alpha kn}{M+1}\right)}{\frac{\pi\alpha kn}{M+1}}\right]^q \quad -M \le n \le M, \end{aligned} \tag{5.29}$$

o

$$\begin{aligned} h_{PF,\beta}[n] &= \frac{\omega_c}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right)\operatorname{sinc}^\rho\left(\frac{kn}{M+1}\right) \\ &= \frac{\operatorname{sen}(\omega_c n)}{\pi n}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi kn}{M+1}\right)}{\frac{\pi kn}{M+1}}\right]^\rho \quad -M \le n \le M. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Si la limitación se centra en el número de términos $N$, o de modo equivalente $M = (N-1)/2$, entonces la mejor opción es elegir $k = 1$ ya que así se toman todas las muestras en la zona donde se concentra la mayor parte de la energía asociada a la función $\alpha$-spline; pero si no tenemos tal limitación y está permitido, por ejemplo, doblar el número de muestras, entonces sería preferible hacer $k = 2$, pues esto permitiría reducir la anchura de la banda de transición resultante.

Este es un caso donde los filtros generados con las funciones $\beta$-spline modificadas, descritas en [4] y [5], no cumplen con la predición formulada en el párrafo anterior y que sí verifican los filtros formulados mediante las funciones $\alpha$-spline propuestas. La razón

de esta discrepancia se encuentra en que la base de la representación temporal de la función $\beta$-spline está obligada a tomar valores negativos más allá del primer cruce por cero y en esos puntos la función $w_\beta[n]$ no está definida en el dominio real. No ocurre lo mismo con las funciones $\alpha$-spline que permiten mejorar la respuesta en frecuencia.

Para poner esto de manifiesto contemplemos el siguiente supuesto determinado por $\omega_c = 0.5\pi$, $\Delta_d = 0.1\pi$ y $\rho = 2.5$ o $p + \alpha q = 2.5 \rightarrow \{p = 2, \alpha = 0.5, q = 1\}$. Si tomamos $k = 1$, las $2M+1$ muestras se encuentran distribuidas uniformemente entre los primeros ceros, situados a la derecha y a la izquierda del valor máximo, de la función $\alpha$-spline. Esto nos proporciona, aplicando la ecuación (5.26), el valor $M = 2k\pi\rho/\Delta_d = 50$. Las respuestas en frecuencia asociadas a (5.29) y (5.30) deben ser muy similares; en cambio, si tomamos $k = 2$, las $2M' + 1$ muestras se toman entre el segundo cruce por cero a la izquierda del origen, $n = 0$, y el segundo cruce a la derecha del mismo; esto nos proporciona, aplicando la ecuación (5.26), el valor $M' = 2k\pi\rho/\Delta_d = 100$. En este segundo caso, las respuestas en frecuencia dejan de ser similares, de modo que la proporcionada por Roark según (5.30) es incluso peor que la obtenida con $M = 50$. La explicación está en que hay valores de su respuesta al impulso $h_R[n]$ que no están definidos, mientras que la respuesta al impulso propuesta en (5.29) está definida para cualquier valor y en consecuencia reduce la anchura de la banda de transición resultante (principio de indeterminación).

En la figura 5.21 se muestran las respuestas en frecuencia de los filtros obtenidos en cada uno de los supuestos contemplados, pudiendo apreciarse las similitudes y diferencias de las propiedades conseguidas. En la misma figura, también se pone de manifiesto, en los cuatro supuestos estudiados, las buenas características, respecto al criterio de prescripción plana, que presentan las primeras zonas, correspondientes a las más bajas frecuencias, de las bandas de paso. A partir de ahora, debido al coste computacional que supone aumentar el número de coeficientes del filtro, tomaremos el valor de $k = 1$, los primeros cruces por cero a la derecha e izquierda del origen, para efectuar el truncamiento de las funciones $\alpha$-spline.

## 5.8. Diseño de filtros principalmente planos

Las funciones ventana $\beta$-spline truncadas (5.28) o las funciones ventana $\alpha$-spline truncadas (5.27) conducen a filtros principalmente planos cuyas respuestas al impulso vienen dadas por (5.30) y (5.29), respectivamente. Se quiere encontrar una relación que nos determine el grado necesario de la función $\alpha$-spline y el número de coeficientes del filtro necesarios para lograr una atenuación de la banda eliminada y una determinada anchura de la banda de transición previamente definidas. El trabajo de Roark y Escabí [4] es de especial relevancia, ya que después de un gran número de simulaciones, fueron capaces de acumular una amplia colección de datos empíricos con los cuales pudieron desarrollar expresiones explícitas que relacionaban el parámetro $M = (N-1)/2$ con la

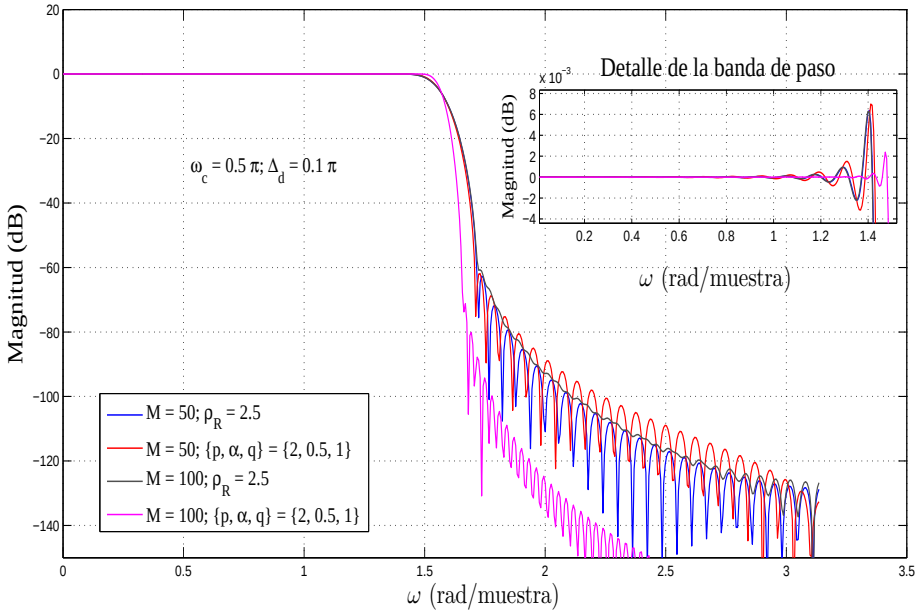


**Figura 5.21** – Diferencia entre los filtros diseñados mediante funciones $\alpha$ y $\beta$-spline en los supuestos de cruces por cero distintos, cambiando el número de términos del filtro.

**Tabla 5.4** – Filtros PF. Diseño de fórmulas para obtener la longitud ($N = 2M + 1$) del filtro digital paso-bajo [4].

| Atenuación en banda eliminada $A_s$ | Length $M$ |
|---|---|
| $21 \leq A_s < 120$ dB | $M = \frac{\pi}{\Delta_d}\left(\frac{24.3}{1+(149/A_s)^{1.6}} - 0.085\right) - 1$ |
| $120 \leq A_s < 150$ dB | $M = \frac{\pi}{\Delta_d}\left[-0.00075\,(200.3 - A_s)^2 + 14.74\right] - 1$ |
| $A_s \geq 150$ dB | $M = \frac{\pi}{\Delta_d}\left[0.00001087\,(A_s + 245.6)^2 - 3.1\right] - 1$ |

anchura de la banda de transición $\Delta_d$, y el parámetro $\rho$ con la atenuación de la banda eliminada. Dichas expresiones se pueden encontar en [4, Table I] y permiten el diseño explícito de filtros PF utilizando funciones $\beta$-spline modificadas para el modelado de la banda de transición.

Debido a la similitud entre las funciones $\alpha$ y $\beta$-spline, y con el objetivo de comprobar si las fórmulas de diseño citadas eran también válidas para la aproximación $\alpha$-spline, se han llevado a cabo un conjunto completo de experimentos haciendo variar a los parámetros, grado $\rho = p + \alpha q$ de las funciones $\alpha$-spline y semiorden del filtro, sobre intervalos de valores similares a los que se dan en [4]. En concreto los rangos de variación usados fueron $1 \leq (p + \alpha q) \leq 15$ y $4 \leq M \leq 250$.

En las simulaciones numéricas realizadas se han empleado las fórmulas de diseño, que determinan el valor del semiorden del filtro $M = (N-1)/2$ en función de la atenuación $A_s$ y de la anchura de la banda de transición $\Delta_d$, proporcionadas por Roark y Escabí en [4] y que reproducimos en la tabla 5.4, adaptadas al diseño de filtros con $\alpha$-spline.

**Tabla 5.5** – Fórmulas de diseño aproximadas para la obtención de $p \geq 1$ and $0 \leq \alpha \leq 1$ para el diseño de filtros FIR PF $\alpha$-spline paso-bajo.

| Atenuación en SB $A_s$ | $p$ | $\alpha$ |
|---|---|---|
| $21 \leq A_s < 120$ dB | $p = \left\lfloor \frac{13}{1+(126/A_s)^{1.6}} - 0.7 \right\rfloor - q$ | $\alpha = \left( \left( \frac{13}{1+(126/A_s)^{1.6}} - 0.7 \right) - p \right) \Big/ q$ |
| $A_s \geq 120$ dB | $p = \left\lfloor \frac{0.5}{1+[(A_s-120)/20]^{1.6}} + 0.063\,(A_s - 120) + 5.06 \right\rfloor - q$ | $\alpha = \left( \frac{0.5}{1+[(A_s-120)/20]^{1.6}} + 0.063\,(A_s - 120) + 5.06 - p \right) \Big/ q$ |

Por otra parte, para la obtención de las expresiones que proporcionan el grado de las funciones $\alpha$-spline $(p + \alpha q)$ en términos de la atenuación de la banda eliminada $A_s$, se ha asumido que $p = \lfloor \rho \rfloor - q$, $p \geq 1$, and $\alpha = (\rho - p)/q$, $0 \leq \alpha \leq 1$, donde $\lfloor \rho \rfloor$ representa la parte entera de $\rho$, y en consecuencia, se han adaptado también las expresiones suministradas por Roark en la forma que se muestra en la tabla 5.5.

Después de ejecutar las pruebas heurísticas, se pudo comprobar que las expresiones contempladas en las tablas 5.4 y 5.5 proporcionan una aproximación razonable para obtener los parámetros necesarios para obtener filtros $\alpha$-spline concretos, [150] y [151]. Conviene resaltar que las citadas expresiones deben manejarse con cuidado, ya que las características del filtro dependen de la selección que se haga de los parámetros $\{p, \alpha, q\}$ de manera que se mantenga constante el valor de $p+\alpha q$. En las simulaciones realizadas, se ha podido comprobar que en algunos supuestos la elección apropiada de los parámetros $\{p, \alpha, q\}$ pueden conducir a mejoras de diseño.

A continuación se esquematiza el proceso de diseño de filtros PF paso-bajo basado en funciones $\alpha$-spline.

---

**Procedimiento de diseño PF**

---

1. Fijar la atenuación en la banda atenuada $(A_s)$, la anchura de la banda de transición $(\Delta_d)$ y la frecuencia de corte $(\omega_c)$.

2. Calcular los valores del semiorden del filtro $(M)$ y el grado $\rho = p + \alpha q$ de las funciones $\alpha-$spline a partir de las tablas 5.4 y 5.5.

3. Determinar los $2M + 1$ coeficientes del filtro utilizando la ecuación (5.29).

---

## 5.9. Diseño de filtros con funciones $\alpha$-spline mediante algoritmo genético.

Los algoritmos genéticos tratan de resolver problemas basándose en las reglas de la selección natural que guían la evolución. Parten de una población inicial aleatoria, de la cual se derivan generaciones sucesivas que convergen después de un proceso iterativo, normalmente largo, a una solución.

En todas las técnicas expuestas de diseño de filtros, se parte de un conjunto de especificaciones definidas en términos de la frecuencia de corte $\omega_c$, la anchura de la banda de transición $\Delta_d$ y la longitud del filtro $N$; este último parámetro viene dado explícitamente o puede obtenerse indirectamente, en términos de la atenuación de la banda eliminada y la anchura de la banda de transición, a través de la tabla 5.4. En todos los supuestos estudiados, se evalúa el grado necesario de las funciones $\alpha$-spline, para cumplir con los objetivos de diseño, mediante la ecuación (5.16), o bien a través de (5.22) usando los coeficientes $(a, b, c)$ dados en la tabla 5.3, o finalmente con las expresiones que aparecen en la tabla 5.5. En virtud de que los filtros modificados ya incorporan una banda de transición, generada mediante funciones $\alpha$-spline, una propuesta alternativa, vista mas como una técnica de análisis del problema de diseño de filtros que como una técnica de diseño propiamente dicha, se centra en la búsqueda del grado de las funciones $\alpha$-spline, utilizando algoritmos genéticos. Los filtros obtenidos de este modo pueden compararse con los filtros desarrollados con las técnicas propuestas en esta memoria con el fin de apreciar el orden de similitud o discrepancia de sus respuestas en frecuencia.

Con este fin, a partir de la respuesta al impulso de los filtros modificados (4.18), el problema se plantea en los siguientes términos. Dados unos valores concretos de los parámetros $\omega_c$, $\Delta_d$ y $N$, se trata de buscar el grado $\rho$ de las funciones $\alpha$-spline, es decir, los valores de la terna $\{p, \alpha, q\}$, que minimiza la función de coste $\epsilon_2$, dada en (5.8), que representa la energía desechada por el truncamiento de la respuesta al impulso $h_{md2}[n]$ (4.18). El planteamiento es como sigue

$$\begin{aligned} \min_{p,q,\alpha}(\epsilon_2) &= \min_{p,q,\alpha}\left(\sum_{n=M+1}^{\infty} 2|h_{md2}[n]|^2\right), \\ \text{s.t.} \quad & p, q \in \mathbb{N}, \\ & \alpha \in \mathbb{R}, \\ & \alpha \in \left[\ 0, \quad 1\ \right]. \end{aligned} \tag{5.31}$$

La preferencia de un algoritmo genético a la de otros algoritmos para la búsqueda de una solución, en este caso la búsqueda del grado de las funciones $\alpha$-spline, se debe a que a pesar de ser algoritmos ciegos tienen la ventaja de gestionar de manera natural las restricciones correspondientes al rango de variación de las variables que intervienen en el problema, como son que dos de ellas son naturales y una tercera es real y acotada. La utilidad del mismo queda constatada ya que ha permitido confirmar y por tanto validar las soluciones obtenidas en las propuestas desarrolladas en la memoria.

Se utiliza MATLAB para implementar el algoritmo genético que nos determinará el grado de las funciones $\alpha$-spline, que nos minimice la función objetivo. Se ha evaluado el grado de las funciones $\alpha$-spline mediante esta herramienta en algunos de los ejemplos que se muestran en la sección 5.11.

## 5.10. Parámetros de calidad

Con el propósito de evaluar la calidad de los filtros obtenidos, ya sea mediante las técnicas propuestas o mediante técnicas similares basadas en funciones $\beta$-spline, y poder comparar los resultados, se van a definir una serie de parámetros (parámetros de calidad) que, una vez medidos en situaciones concretas, pondrán de manifiesto las bondades de los diseños. Para poder comparar los diferentes filtros, los parámetros de calidad se definen respecto a un filtro ideal paso-bajo.

El primero de ellos es el error de aproximación integral cuadrático promedio, definido por

$$\varepsilon_{aisae} = \sum_{n=-M}^{M} |h_d[n] - h[n]|^2 + 2 \sum_{n=M+1}^{\infty} |h_d[n]|^2, \tag{5.32}$$

donde $h_d[n]$ es la respuesta al impulso ideal y $h[n]$ la respuesta al impulso de los filtros obtenidos en cada caso.

El segundo es el error en la banda de paso, dado por

$$\varepsilon_{pbe} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_p} |H(\omega) - H_d(\omega)|^2 \, d\omega, \tag{5.33}$$

donde $H_d(\omega)$ es la respuesta en frecuencia ideal.

El tercero es el error en la banda eliminada, que se define

$$\varepsilon_{ebe} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_s}^{\pi} |H(\omega)|^2 \, d\omega. \tag{5.34}$$

El cuarto es la desviación máxima en la banda de paso, obtenida como

$$\varepsilon_{dev} = \max_{|\omega|<\omega_p} |H(\omega) - H_d(\omega)|, \tag{5.35}$$

y por último, la atenuación mínima de la banda eliminada $A_s$, siendo $H(\omega)$ la respuesta en frecuencia real de los filtros correspondientes, filtro $\alpha$-spline, filtro $\beta$-spline u otro obtenido por cualquier procedimiento.

## 5.11. Ejemplos de diseño de filtros

En esta sección, se van a desarrollar diversos ejemplos de diseño de filtros con el objetivo de comparar los resultados obtenidos mediante las técnicas descritas en esta memoria, basadas en funciones $\alpha$-spline, con los logrados con métodos previos basados en funciones $\beta$-spline.

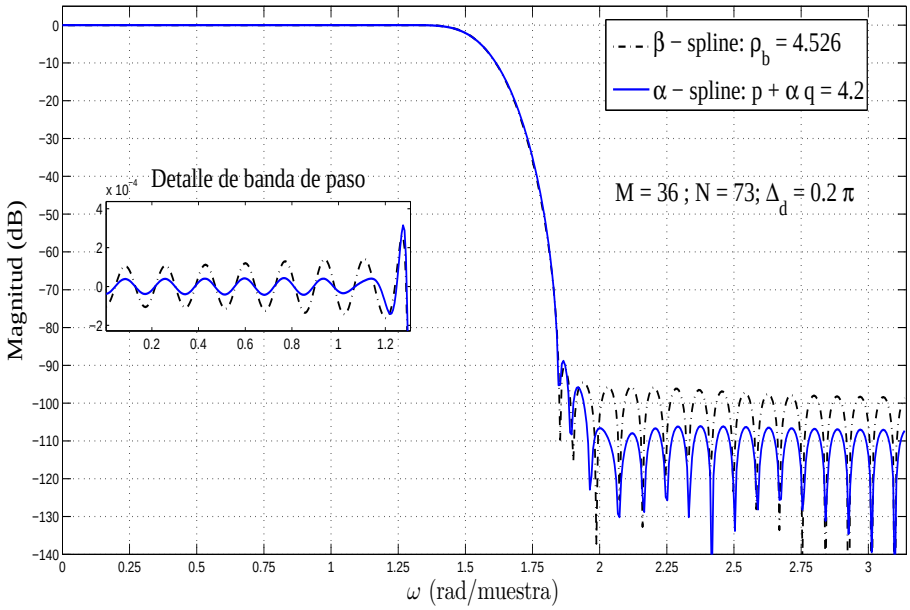


**Figura 5.22** – *Ejemplo de diseño* 1. Magnitud de las respuestas en frecuencia de filtros paso-bajo diseñados con funciones $\alpha$ y $\beta$-spline minimizando el error integral cuadrático total

### 5.11.1. Diseño de filtros basado en el procedimiento MEICT

Para evaluar el procedimiento de diseño MEICT y poder comparar los resultados de los filtros obtenidos utilizando un tipo u otro de funciones, $\alpha$-spline o $\beta$-spline, se presenta el siguiente ejemplo representativo. En el mismo, al que se denomina *Ejemplo de diseño* 1, se pretende obtener un filtro paso-bajo de longitud $N = 73$ ($M = 36$), con una anchura de la banda de transición $\Delta_d = 0.2\pi$ y una frecuencia de corte $\omega_c = 0.5\pi$. Para las funciones $\beta$-spline, y a partir de (5.18) se obtiene el valor $\rho_b = 4.526$, mientras que para las funciones $\alpha$-spline, y a partir de (5.16) se obtiene $p+\alpha q = 4.2$, que conduce a la terna de valores $(p = 4, \alpha = 0.2, q = 1)$. En la figura 5.22 se representa la magnitud de la respuesta en frecuencia de los filtros de fase lineal diseñados.

La visualización de la misma nos permite inferir que las bandas de transición son práctiamente idénticas, mientras que el filtro $\alpha$-spline presenta un mejor rendimiento tanto en la banda de paso como en la banda eliminada.

Con los mismos parámetros de diseño, la utilización del algoritmo genético sobre la función de coste, dada por (5.31), proporciona unos valores óptimos para los elementos que determinan el grado de la función $\alpha$-spline de $p = 2$, $\alpha = 0.655$ y $q = 3$.

Para estimar la calidad de los filtros se han medido los parámetros de calidad, definidos en la sección 5.10. En la tabla 5.6 se muestran los valores de dichos parámetros. Los mejores resultados obtenidos se indican con caracteres en negrita. Los valores de dichos

**Tabla 5.6** – *Ejemplo de diseño*1. Resultados de la simulación para el error integral cuadrático total ($\omega_c = 0.5\pi$, $\Delta_d = 0.2\pi$, $M = 36$).

| Técnica de diseño | $\varepsilon_{aisae}$ | $\varepsilon_{pbe}$ | $\varepsilon_{ebe}$ | $\varepsilon_{dev}$ | $A_s$ (dB) |
|---|---|---|---|---|---|
| $\beta$-spline ($\rho$=4.526) (Ref. [5]) | $6.506 \cdot 10^{-3}$ | $4.215 \cdot 10^{-11}$ | $4.215 \cdot 10^{-11}$ | $1.890 \cdot 10^{-5}$ | 94.5 |
| $\alpha$-spline Eq. (5.7) con $(p, q, \alpha) = (4, 1, 0.2)$ | $6.643 \cdot 10^{-3}$ | $\mathbf{6.970 \cdot 10^{-12}}$ | $\mathbf{6.970 \cdot 10^{-12}}$ | $1.626 \cdot 10^{-5}$ | 95.8 |
| $\alpha$-spline Ec. (5.31) Optimización con $(p, q, \alpha) = (2, 3, 0.655)$ | $\mathbf{6.345 \cdot 10^{-3}}$ | $2.135 \cdot 10^{-11}$ | $2.135 \cdot 10^{-11}$ | $\mathbf{1.206 \cdot 10^{-5}}$ | **98.4** |

parámetros permiten comparar el filtro diseñado por medio de (5.16) y el diseñado a través de (5.18).

Comentar, por último, que debido a la manera de definir la anchura de la banda de transición práctica, la anchura de la banda de transición obtenida es menor que la teórica, caracterizada por el parámetro $\Delta_d$ en el diseño del filtro.

### 5.11.2. Diseño de filtros basado en el procedimiento MEICEP

Procediendo de modo similar al supuesto de minimización del error integral cuadrático total, y con el objetivo de poder comparar el comportamiento de las funciones $\alpha$-spline y $\beta$-spline en el diseño de filtros de fase lineal, se plantea el siguiente ejemplo representativo, al que se llama *Ejemplo de diseño* 2. En este caso, se pretenden diseñar filtros paso-bajo de longitud $N = 115$ ($M = 57$), con una anchura de la banda de transición $\Delta_d = 0.112\pi$ y una frecuencia de corte $\omega_c = 0.45\pi$. Para las funciones $\beta$-spline, estos parámetros de diseño dan lugar a que $N\Delta_1 = 115 \cdot 0.112/2 = 6.44$, y de (5.21) y (5.20), se obtiene el valor del grado óptimo de la función $\beta$-spline que resulta ser $\rho_b = 4.17312$, mientras que para las funciones $\alpha$-spline, se tiene que $M\Delta_d = 6.384\pi$. De la tabla 5.3 y de la relación (5.22), se desprende que el grado óptimo de la función $\alpha$-spline es $\rho = 3.7$, que conduce a los valores $(p = 3, \alpha = 0.7, q = 1)$.

En la figura 5.23 se muestran los módulos de las respuestas en frecuencia de los filtros diseñados. De nuevo podemos observar que las anchuras de la banda de transición son prácticamente idénticas, mientras que el filtro $\alpha$-spline propuesto presenta mejoras tanto en la banda de paso como en la banda eliminada.

Con los mismos parámetros de diseño, la utilización del algoritmo genético sobre la función de coste, dada por (5.31), proporciona unos valores óptimos para los elementos que determinan el grado de la función $\alpha$-spline de $p = 2$, $\alpha = 0.73$ y $q = 2$.

Se han medido los parámetros de calidad dados por las ecuaciones (5.32), (5.33),(5.34) y (5.35), así como la atenuación mínima de la banda eliminada para los filtros de fase lineal obtenidos. En la tabla 5.7 se muestran los valores de dichos parámetros de calidad.

También en este caso, la aproximación propuesta se comporta mejor que la técnica basada en las funciones $\beta-$spline en casi todas las medidas de calidad, con la excepción del error de aproximación integral cuadrático medio.

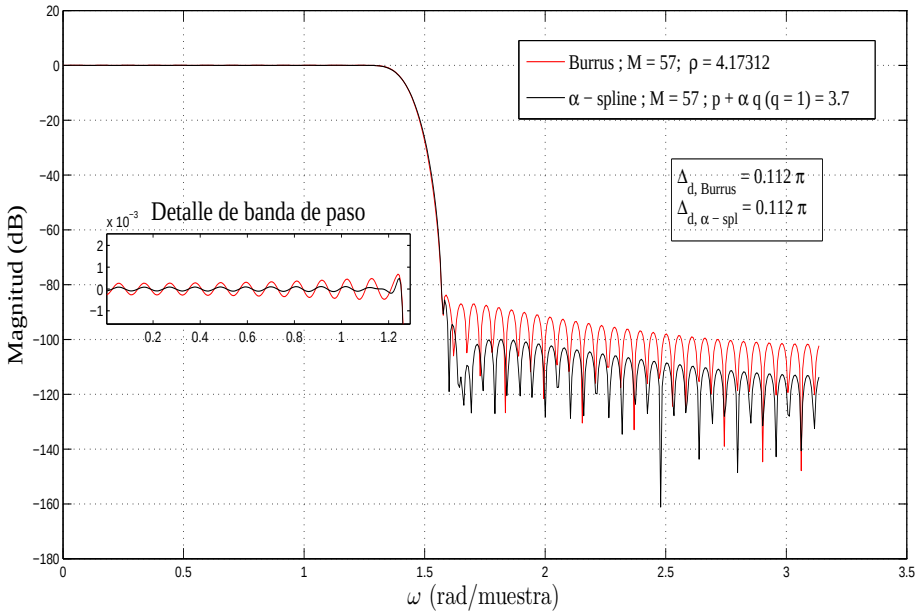


**Figura 5.23** – *Ejemplo de diseño* 2. Magnitudes de la respuesta en frecuencia de filtros paso-bajo diseñados con funciones $\alpha$ y $\beta$-spline minimizando el error integral cuadrático sobre la banda de paso y la banda eliminada.

**Tabla 5.7** – *Ejemplo de diseño* 2. Resultados de la simulación para el error integral cuadrático, sobre la banda de paso y la banda eliminada, optimizado ($\omega_c = 0.45\pi$, $\Delta_d = 0.112\pi$, $M = 57$).

| Técnica de diseño de filtro | $\varepsilon_{aisae}$ | $\varepsilon_{pbe}$ | $\varepsilon_{ebe}$ | $\varepsilon_{dev}$ | $A_s$ (dB) |
|---|---|---|---|---|---|
| $\beta$-spline ($\rho$=4.173) (Ref. [5]) | $\mathbf{3.803 \cdot 10^{-3}}$ | $3.353 \cdot 10^{-10}$ | $1.423 \cdot 10^{-10}$ | $7.706 \cdot 10^{-5}$ | 83.8 |
| $\alpha$-spline Eq. (5.7) con $(p, q, \alpha) = (3, 1, 0.7)$ | $3.936 \cdot 10^{-3}$ | $2.880 \cdot 10^{-11}$ | $\mathbf{1.152 \cdot 10^{-11}}$ | $4.402 \cdot 10^{-5}$ | 88.0 |
| $\alpha$-spline Ec. (5.31) Optimización con $(p, q, \alpha) = (2, 2, 0.73)$ | $3.950 \cdot 10^{-3}$ | $\mathbf{1.418 \cdot 10^{-11}}$ | $1.197 \cdot 10^{-11}$ | $\mathbf{3.301 \cdot 10^{-5}}$ | **89.9** |

### 5.11.3. Diseño de filtros basado en el procedimiento PF.

Respecto a este último procedimiento, se van a mostrar tres ejemplos representativos, donde se contemplan diferentes aspectos.

**Procedimiento PF: Ejemplo de diseño 3.**

En el primer ejemplo desarrollado mediante el procedimiento PF, que se nombra *Ejemplo de diseño* 3, se va a poner de manifiesto el asunto citado al final de la sección 5.8 sobre los diferentes rendimientos de los filtros diseñados, en función de las diferentes combinaciones de los parámetros $p, \alpha, q$ que definen las funciones $\alpha$-spline.

En este ejemplo se desea diseñar filtros digitales $\alpha$ y $\beta$-spline PF paso-bajo, determinando, a partir de las tablas 5.4 y 5.5 para el caso $\alpha$-spline o a partir de la tabla I que se da en [4], los valores de $M$ y $\rho = p + \alpha q$ que deben usarse en (5.29) o (5.30), para lograr las características del filtro a diseñar. Las especificaciones del filtro que deseamos obtener son las siguientes:

- Atenuación mínima en la banda atenuada $A_s = 80$ dB.
- Frecuencia de corte $\omega_c = 0.5\pi$.
- Anchura de la banda de transición $\Delta_d = 0.25\pi$.

De la tabla I en [4], para el filtro digital basado en los $\beta$-spline, se obtienen unos valores para el semiorden del filtro y el grado $\beta$-spline que son $M = 25$ y $\rho = 3.537$. Idénticos valores se obtienen a partir de las tablas 5.4 y 5.5, lo que permite utilizar diferentes combinaciones de $(p, \alpha, q)$ para obtener $p + \alpha q = \rho = 3.537$. En particular, se han probado tres combinaciones distintas $(3, 0.537, 1)$, $(2, 0.768, 2)$ y $(1, 0.846, 3)$ para el método $\alpha$-spline propuesto.

En la figura 5.24 se muestran las respuestas en frecuencia de los filtros digitales PF $\beta$-spline y $\alpha$-spline paso-bajo de fase lineal.

En la tabla 5.8 se dan los parámetros de calidad definidos mediante (5.32), (5.33), (5.34) y (5.35), además de la atenuación mínima en SB. De acuerdo a los valores de los mencionados parámetros de calidad de la tabla 5.8 se pueden sacar las siguientes conclusiones

1. La aproximación propuesta, basada en las funciones $\alpha$-spline, supera al diseño $\beta$-spline en cuanto a la atenuación mínima en la banda eliminada y anchura de la banda de transición. También suministra valores inferiores para los errores integrales cuadráticos, tanto en el total como en el que se limita a las bandas de paso y atenuada.

2. El filtro $\alpha$-spline diseñado con el mayor valor de $\alpha$, es decir, el asociado al conjunto de parámetros $(p, q, \alpha) = (1, 3, 0.846)$ proporciona los mejores parámetros de calidad.

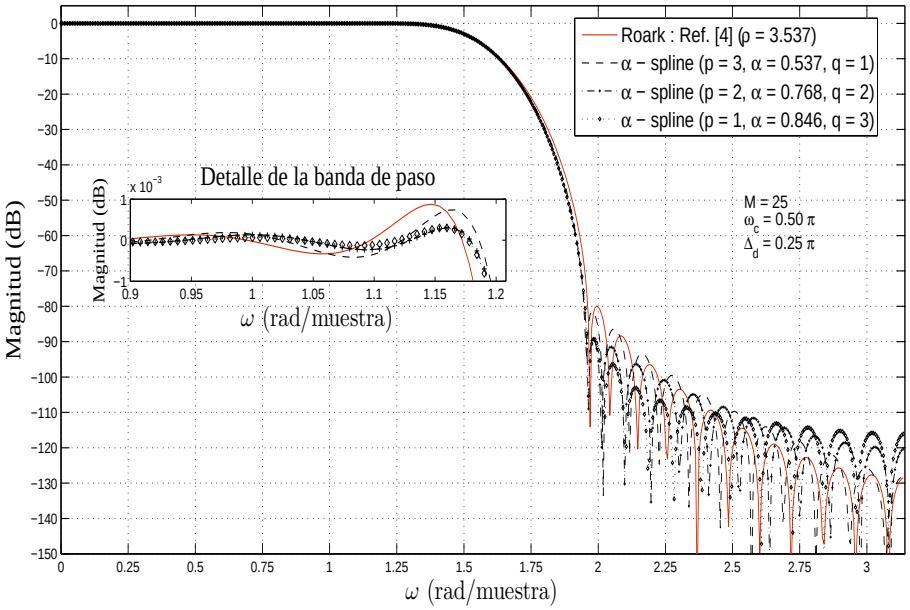


**Figura 5.24** – *Ejemplo de diseño* 3. Magnitud de las respuestas en frecuencia de filtros digitales PF paso-bajo basados en $\alpha$ y $\beta$-spline.

**Tabla 5.8** – *Ejemplo de diseño* 3. Resultados de la simulación para el diseño de filtros PF optimizados ($\omega_c = 0.5\pi$, $\Delta_d = 0.25\pi$, $M = 25$, $A_s = 80$ dB).

| Técnica de diseño de filtro | $\varepsilon_{aisae}$ | $\varepsilon_{pbe}$ | $\varepsilon_{sbe}$ | $\varepsilon_{dev}$ | $A_s$ (dB) |
|---|---|---|---|---|---|
| $\beta$-spline ($\rho$=3.537) (Ref. [4] o Ec. (5.30)) | $1.009 \cdot 10^{-2}$ | $1.457 \cdot 10^{-10}$ | $1.457 \cdot 10^{-10}$ | $1.009 \cdot 10^{-4}$ | 79.9 |
| $\alpha$-spline Ec. (5.29) con $(p, q, \alpha) = (3, 1, 0.537)$ | $9.732 \cdot 10^{-3}$ | $1.142 \cdot 10^{-10}$ | $1.142 \cdot 10^{-10}$ | $8.546 \cdot 10^{-5}$ | 81.4 |
| $\alpha$-spline Ec. (5.29) con $(p, q, \alpha) = (2, 2, 0.768)$ | $9.549 \cdot 10^{-3}$ | $2.519 \cdot 10^{-11}$ | $2.519 \cdot 10^{-11}$ | $3.503 \cdot 10^{-5}$ | 89.1 |
| $\alpha$-spline Ec. (5.29) con $(p, q, \alpha) = (1, 3, 0.846)$ | $\mathbf{9.486 \cdot 10^{-3}}$ | $\mathbf{1.522 \cdot 10^{-11}}$ | $\mathbf{1.522 \cdot 10^{-11}}$ | $\mathbf{3.485 \cdot 10^{-5}}$ | **89.2** |

**Procedimiento PF: Ejemplo de diseño 4.**

Con el siguiente ejemplo, *Ejemplo de diseño* 4, se pretende diseñar un filtro PF paso-bajo con las siguientes especificaciones

- Mínima atenuación en la banda atenuada $A_s = 60$ dB.
- Frecuencia de corte $\omega_c = 0.25\pi$.
- Anchura de la banda de transición $\Delta_d = 0.05\pi$.

Para cumplir las especificaciones anteriores, de la tabla 5.4 se obtiene un valor para el semiorden del filtro $M = 90$. Posteriormente, se determina el valor de $\rho$ de las expresiones dadas en la tabla I de [4, Table I], resultando un valor $\rho = 2.339$ para el diseño del filtro PF basado en $\beta$-spline. Iguales valores resultan para el diseño del filtro PF basado en las funciones $\alpha$-spline, eligiendo cualquier combinación $\{p, \alpha, q\}$ tal que $\rho = p + \alpha q$. Para comparar los rendimientos de ambas realizaciones, la aproximación $\beta$-spline y la aproximación $\alpha$-spline, tomamos para la terna de valores $\{p, \alpha, q\}$, la combinación dada por $p = 1$, $\alpha = 0.6695$ y $q = 2$.

En la figura 5.25 se muestran las magnitudes de la respuesta en frecuencia para los filtros PF diseñados.

Con los mismos parámetros de diseño, la utilización del algoritmo genético sobre la función de coste, dada por (5.31), proporciona unos valores óptimos para los elementos que determinan el grado de la función $\alpha$-spline de $p = 1$, $\alpha = 0.753$ y $q = 2$.

En la tabla 5.9 se presentan, para cada realización, los parámetros de calidad dados por las ecuaciones (5.32), (5.33), (5.34) y (5.35), así como la atenuación mínima $A_s$ y la anchura de la banda de transición $\Delta_d$ realmente alcanzadas. Los mejores resultados, con respecto a las medidas de calidad definidas, están resaltados con carácteres en negrita.

A la vista de la figura 5.25 y de los datos proporcionados por la tabla 5.9 se pueden extraer las siguientes conclusiones.

1. El filtro diseñado mediante el procedimiento descrito en [4], basado en las funciones $\beta$-spline, satisface las especificaciones del diseño.

2. En lo que se refiere al enfoque $\alpha$-spline dado por (5.29), se puede comprobar que la aproximación propuesta supera al diseño $\beta$-spline en cuanto a la atenuación mínima en la banda eliminada y anchura de la banda de transición. La aproximación propuesta, también suministra valores inferiores para los errores integrales cuadráticos, tanto en el total como en el que se limita a las bandas de paso y atenuada.

Resumiendo, la técnica propuesta, basada en las funciones $\alpha$-spline, proporciona filtros que tienen una mejor precisión de aproximación y supera a la técnica, basada en las funciones $\beta$-spline, descrita en [4].

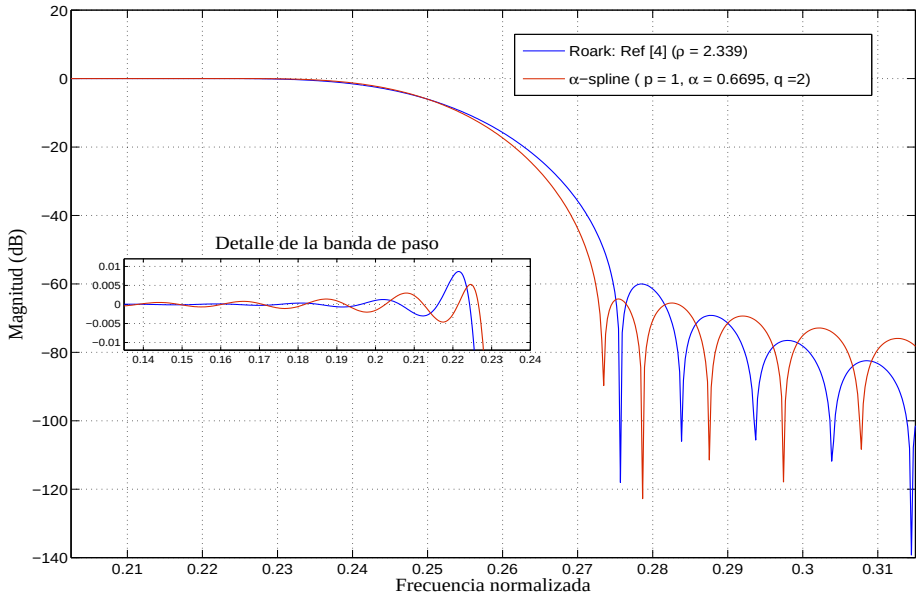


**Figura 5.25** – *Ejemplo de diseño* 4. Magnitud de las respuestas en frecuencia para filtros PF spline paso-bajo ($A_s = 60$ dB, $\omega_c = 0.25\pi$, $\Delta_d = 0.05\pi$).

**Tabla 5.9** – *Ejemplo de diseño* 4. Resultados de la simulación para diferentes filtros digitales PF paso-bajos ($A_s = 60$ dB, $\omega_c = 0.25\pi$, $\Delta_d = 0.05\pi$).

| Técnica de diseño del filtro | $\varepsilon_{aisae}$ | $\varepsilon_{pbe}$ | $\varepsilon_{sbe}$ | $\varepsilon_{dev}$ | $A_s$ (dB) | $\Delta_d(\times\pi)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Roark $\beta$-spline ($\rho$=2.339) | $2.387 \cdot 10^{-3}$ | $4.696 \cdot 10^{-9}$ | $4.696 \cdot 10^{-9}$ | $9.984 \cdot 10^{-4}$ | $-60.01$ | $4.951 \cdot 10^{-2}$ |
| $\alpha$-spline Ec. (5.29) con $(p, q, \alpha) = (1, 2, 0.6695)$ | $\mathbf{2.146 \cdot 10^{-3}}$ | $3.193 \cdot 10^{-9}$ | $3.093 \cdot 10^{-9}$ | $\mathbf{6.069 \cdot 10^{-4}}$ | $\mathbf{-64.38}$ | $\mathbf{4.479 \cdot 10^{-2}}$ |
| $\alpha$-spline Ec. (5.31) Optimización con $(p, q, \alpha) = (1, 3, 0.618)$ | $2.260 \cdot 10^{-3}$ | $\mathbf{1.388 \cdot 10^{-9}}$ | $\mathbf{1.354 \cdot 10^{-9}}$ | $9.971 \cdot 10^{-4}$ | $-60.00$ | $5.000 \cdot 10^{-2}$ |

**Procedimiento PF: Ejemplo de diseño 5.**

Un último ejemplo, al que se designa mediante *Ejemplo de diseño* 5, consiste en el diseño de un filtro PF cuyas especificaciones vienen propuestas por Roark, en la subsección III.D. de [4], donde se propone el uso de las funciones $\beta$-spline para el diseño de filtros PF. El prototipo a diseñar consiste en un filtro paso-bajo de longitud $N = 257$ ($M = 128$), con una atenuación mínima en la banda eliminada $A_s = 80$ dB y una frecuencia de corte localizada en $\omega_c = 0.4\pi$. En este caso, vamos a realizar el diseño por medio de tres aproximaciones diferentes.

1. Por medio de una ventana de Kaiser. El parámetro $\beta_{A_s}$ de la ventana, con los datos de partida, resulta ser $\beta_{A_s} = 7.8573$.

2. A través de la aproximación de filtros PF de Roark, basada en las funciones $\beta$-spline. De acuerdo con los datos, de la tabla I [4, Table I] se obtiene un valor para el grado de la función $\beta$-spline $\rho = 3.537$.

3. El tercer filtro se obtiene de la aproximación propuesta (5.29), basada en las funciones $\alpha$-spline. De la tabla 5.5, teniendo en cuenta las especificaciones de partida, se puede tomar cualquier terna de valores $\{p, q, \alpha\}$ tal que $p + \alpha q = \rho = 3.537$. La elección seleccionada es $p = 2$, $q = 2$, and $\alpha = 0.768$.

Los módulos de las respuestas en frecuencia resultantes de los filtros diseñados se pueden ver en la figura 5.26.

Se han medido los parámetros de calidad (5.32), (5.33), (5.34) y (5.35), así como la atenuación mínima $A_s$ y la anchura de la banda de transición $\Delta_d$ realmente alcanzadas, para los tres diseños considerados. En la tabla 5.10 se muestran los valores obtenidos de cada uno de los parámetros considerados.

Tanto de la contemplación de la figura 5.26, como del análisis de los datos que se ofrecen en la tabla 5.10, se infiere, en primer lugar, que la banda de transición más estrecha se obtiene con el enfoque basado en la ventana de Kaiser, pero el precio a pagar es que este prototipo presenta peor comportamiento respecto a la propiedad de poseer una banda de paso principalmente plana. Para visualizar mejor esta característica, se muestra en la figura un detalle ampliado de las respuestas en frecuencia de las bandas de paso, que aparecían con menor detalle en la figura 5.26.

Una segunda conclusión es que la propuesta basada en las funciones $\alpha$-spline supera a la técnica basada en funciones $\beta$-spline considerando todos los parámetros de calidad, y también supera, si solo tenemos en consideración los errores en las bandas de paso y eliminada, a la aproximación basada en la ventana de Kaiser.

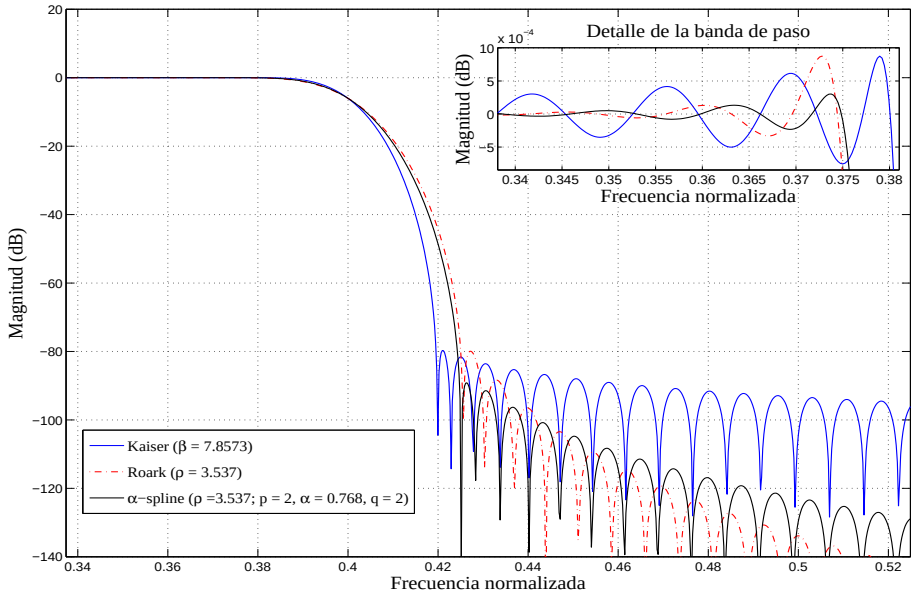


**Figura 5.26** – *Ejemplo de diseño* 5. Magnitud de las respuestas en frecuencia para diferentes filtros paso-bajo ($M = 128$, $A_s = 80$ dB, $\omega_c = 0.4\pi$).

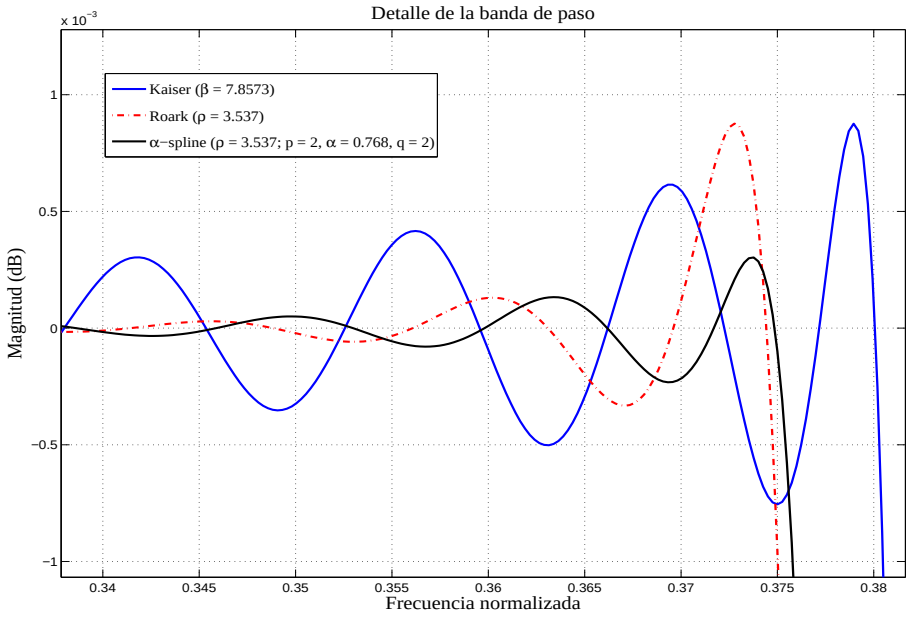


**Figura 5.27** – *Ejemplo de diseño* 5. Detalle ampliado de la magnitud de las respuestas en frecuencia para diferentes filtros paso-bajo ($M = 128$, $A_s = 80$ dB, $\omega_c = 0.4\pi$).

**Tabla 5.10** – *Ejemplo de diseño* 5. Resultados de la simulación para diferentes filtros digitales PF paso-bajos ($M = 128$, $A_s = 80$ dB, $\omega_c = 0.4\pi$).

| Técnica de diseño de filtro | $\varepsilon_{aisae}$ | $\varepsilon_{pbe}$ | $\varepsilon_{sbe}$ | $\varepsilon_{dev}$ | $A_s$ (dB) | $\Delta_d(\times\pi)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ventana de Kaiser ($\beta_{A_s}$=7.8573) | $\mathbf{1.636 \cdot 10^{-3}}$ | $7.774 \cdot 10^{-11}$ | $9.051 \cdot 10^{-11}$ | $8.681 \cdot 10^{-5}$ | 81.60 | $\mathbf{3.913 \cdot 10^{-2}}$ |
| Roark-spline (Ref. [4]) | $2.033 \cdot 10^{-3}$ | $2.998 \cdot 10^{-11}$ | $2.999 \cdot 10^{-11}$ | $1.009 \cdot 10^{-4}$ | 79.921 | $5.008 \cdot 10^{-2}$ |
| $\alpha$-spline Ec. (5.29) con $(p, q, \alpha) = (2, 2, 0.768)$ | $1.925 \cdot 10^{-3}$ | $\mathbf{5.102 \cdot 10^{-12}}$ | $\mathbf{5.102 \cdot 10^{-12}}$ | $\mathbf{3.499 \cdot 10^{-5}}$ | **89.12** | $4.858 \cdot 10^{-2}$ |

## 5.12. Resumen

En este capítulo, se han desarrollado, después de determinados análisis teóricos y amplios trabajos numéricos, diferentes herramientas empíricas que pueden ser usadas para el diseño de filtros digitales, basados en una de las formulaciones de filtros que se presentaron en el capítulo 4 y que contenían bandas de transición creadas mediante una de las familias de funciones $\alpha$-spline que se desarrollaron en el capítulo 3, sujetos a determinadas restricciones. En primer lugar se ha elaborado una técnica, con base en un proceso de optimización, consistente en la minimización del error integral cuadrático en distintas bandas de frecuencia, en este sentido, también se ha propuesto la utilización de un algoritmo genético que opera minimizando las colas desechadas de las respuestas al impulso infinitas del filtro modificado mediante las funciones $\alpha$-spline, para la determinación de los citados parámetros.

Una segunda técnica se centra en el diseño de filtros basado en que las bandas de frecuencia resultantes se aproximen a la condición de ser máximamente planas (filtros principalmente planos (PF)).

Las simulaciones realizadas con dichas herramientas, basadas en funciones $\alpha$-spline, generan filtros que pueden competir satisfactoriamente con técnicas de diseño previas, basadas en funciones $\beta$-spline. Para poner de manifiesto los comportamientos y propiedades de los diferentes filtros diseñados se han utilizado un conjunto de parámetros de calidad definidos en la sección 5.10.

# Capítulo 6

# Conclusiones y líneas de estudio futuras

Esta tesis se enmarca en la utilización de técnicas polinómicas, en particular en el contexto de los polinomios spline, para la generación de funciones definidas en el dominio de la frecuencia que, con posterioridad, se emplearán en la modelización de bandas de transición para la formulación de filtros FIR. En este capítulo se van a enumerar las aportaciones, conclusiones principales y líneas futuras que se derivan de este trabajo de investigación de acuerdo con los objetivos iniciales planteados.

## 6.1. Conclusiones y aportaciones

En el capítulo 2 se ofrece una retrospectiva de las funciones spline incidiendo en la evolución de las mismas, que puede encontrarse en una amplia bibliografía, y sus aplicaciones. En esta recapitulación se muestran las diferentes variaciones desarrolladas a partir de su formulación original, contemplando los diferentes enfoques constructivos. Aunque todos son equivalentes, el planteamiento de generación basado en operaciones de convolución de pulsos rectangulares entronca directamente con sistemas cuyas respuestas se obtienen a partir de sistemas lineales e invariantes en el tiempo en general. El trabajo presentado descansa sobre dos pilares que se citan en dicho capítulo, el primero está relacionado con las denominadas funciones spline de base racional (sección 2.5.2) y el segundo con las funciones spline definidas en la variable frecuencia (sección 2.9). De acuerdo con estos dos elementos, en el capítulo 3 se han propuesto tres tipos de familias spline, definidas en el dominio de la frecuencia, denominadas familias $\alpha$-spline de tipos I, II y III. Las aportaciones de este capítulo se centran en las siguientes cuestiones:

- Definición y construcción de las diferentes familias $\alpha$-spline tanto en el dominio de la frecuencia asociada a un entorno de tiempo continuo, como en el de la frecuencia asociada a un dominio de tiempo discreto.

- Desarrollo, en los dominios de la frecuencia, de las formas funcionales de las funciones pretenecientes a cualquiera de los tres tipos de familias $\alpha$-spline.

- Obtención de la forma explícita de las mismas funciones, producto de potencias de exponentes naturales y cuyas bases son funciones "sinc", en los dominios del tiempo.

Los diferentes perfiles de las distintas funciones así como la anchura del intervalo de definición donde son no nulas, delimitarán las hipotéticas aplicaciones de las diferentes funciones $\alpha$-spline. En particular los distintos perfiles dependen, para las tres familias, de todos los parámetros de definición de las mismas, es decir, del número de pulsos de uno y otro tipo $p$ y $q$, de la anchura de los mismos, a través de $\alpha$ y $\Delta$. Por otro lado, la dependencia de la anchura del intervalo cerrado, donde son no nulas, es diferente para las distintas familias. Así,

- Para las funciones de la familia de tipo I, dicho intervalo depende de los mismos parámetros que su forma y viene dado por $[-(p+\alpha q)\Delta/2, (p+\alpha q)\Delta/2]$ que es creciente con el aumento de los susodichos parámetros.

- Para las funciones de la familia de tipo II, el intervalo cerrado solo depende del parámetro $\Delta$, la anchura de uno de los dos tipos de pulsos que intervienen en su construcción, y viene dado por $[-\Delta/2, \Delta/2]$, siendo independiente de $p$, $\alpha$ y $q$.

- Para las funciones de la familia de tipo III, la anchura del intervalo depende tanto de $\Delta$ como de $\alpha$, viene dado por $[-(1+\alpha)\Delta/2, (1+\alpha)\Delta/2]$, pero es independiente de $p$ y $q$.

En el capítulo 4 se estudian y formulan filtros paso-bajo modificados con bandas de transición generadas mediante las funciones $\alpha$-spline en el dominio de la frecuencia. Dentro de esta parte del trabajo, las contribuciones más relevantes son:

- Formulación de los filtros mediante operaciones de convolución en el dominio de la frecuencia entre la respuesta en frecuencia del filtro paso-bajo ideal con las funciones de las diferentes familias $\alpha$-spline. Los desarrollos se han realizado en los entornos de tiempo continuo (este desarrollo se puede entender como una herramienta que ha servido de guía y de comprobación para el desarrollo en el entorno discreto) y de tiempo discreto.

- Construcción de las respuestas en frecuencia de los filtros mediante formas funcionales cerradas que se componen de sumas de polinomios a tramos que dependen de los tres tipos de familias $\alpha$-spline.

- Obtención de la forma explícita de las respuestas al impulso de longitud infinita (IIR), producto de potencias de exponentes naturales y cuyas bases son funciones "sinc", en los dominios del tiempo.

- Estudio de las propiedades de derivabilidad y continuidad de las respuestas en frecuencia de los filtros formulados, que puede verse en el apéndice B.

En el capítulo 5, dedicado al diseño de filtros, solo se abordan filtros digitales FIR. En el diseño de filtros FIR abordado en este capítulo se han contemplado diversos aspectos, los cuales han sido tratados tanto desde una perspectiva teórica, para acotar el rango de variación de algunos parámetros, como desde una aproximación empírica debido a la dificultad de dar una solución analítica.

El truncamiento necesario de la respuesta al impulso infinita de los filtros modificados hace que la respuesta en frecuencia resultante se degrade respecto a la respuesta en frecuencia teórica, cuyas bandas de paso y eliminada no presentan errores de aproximación y su banda de transición está totalmente definida. Los objetivos de diseño persiguen que dicha degradación sea la más pequeña posible.

En concreto se han explorado diferentes planteamientos de diseño basados en diversas técnicas de optimización, como es la minimización del error integral cuadrático sobre diferentes bandas de frecuencia, o la basada en la condición de obtener filtros que presenten la característica de ser máximamente plana o principalmente plana.

Desde la perspectiva del criterio de minimización del error integral cuadrático se han desarrollado dos procesos de diseño diferenciados; en ambos supuestos no se tiene control sobre la atenuación de la banda eliminada. En el primero, la optimización se ha realizado sobre todo el rango de frecuencias. En este sentido, las contribuciones del trabajo se resumen en los siguientes puntos:

- Se ha llevado a cabo una aproximación teórica para determinar el rango de variación del valor óptimo del grado de las funciones $\alpha$-spline necesario para minimizar el error de aproximación. El mencionado grado se expresa en términos de los valores deseados de los parámetros de diseño, que en estos supuestos son la anchura de la banda de transición y la longitud del filtro.

- Se ha hecho un tratamiento empírico, para determinar el valor óptimo del grado de las funciones $\alpha$-spline, consistente en la realización de un gran número de simulaciones con el fin de poder dar una solución al problema.

- A partir de los dos aspectos previamente citados se ha obtenido la suficiente información que ha contribuido a elaborar una relación funcional que proporciona el valor óptimo del grado de la función $\alpha$-spline en términos de la anchura de la banda de transición y de la longitud deseada del filtro a diseñar.

Otro aspecto estudiado, en relación con el problema de la optimización, ha sido la minimización del error de aproximación sobre los rangos de frecuencia pertenecientes a las bandas de paso y eliminada, excluyendo las frecuencias de la banda de transición. En este sentido, se ha abordado el problema desde un punto de vista empírico, estudiando el comportamiento del error de aproximación asociado a los términos desechados con

el truncado. De las pruebas preliminares se obtuvieron algunas conclusiones relevantes sobre esta función que enumeramos a continuación.

- Fijado el parámetro $\Delta_d$, para cada semiorden del filtro $M$ hay un valor del grado de las funciones $\alpha$-spline que hace mínimo el error de aproximación. A medida que $M$ crece, el mínimo es más pronunciado y el grado $\alpha$-spline es mayor.

- Fijado el parámetro $M$, al variar $\Delta_d$ varia el grado $\alpha$-spline donde se produce el mínimo error de aproximación, de modo que si se aumenta $\Delta_d$ el mínimo es más pronunciado y ocurre para valores mayores del grado de las funciones $\alpha$-spline utilizadas para el modelado de la banda de transición.

- Para diferentes combinaciones de los parámetros $M$ y $\Delta_d$ de modo que $M \cdot \Delta_d$ sea constante, el mínimo error de aproximación se produce para el mismo valor del grado de las funciones $\alpha$-spline, de modo que el mínimo es más acusado conforme $M$ aumenta; por otro lado, a medida que $M \cdot \Delta_d$ crece, el grado $\alpha$-spline donde se produce el mínimo aumenta.

- Con los datos obtenidos, se ha encontrado una relación cuadrática que permite determinar el grado $\rho = p + \alpha q \, (q = 1)$ óptimo de las funciones $\alpha$-spline en términos del producto $M \cdot \Delta_d$.

Los filtros formulados mediante bandas de transición generadas con funciones $\alpha$-spline son máximamente planos en ambas bandas. De esta característica emana la tercera técnica de diseño que se ha elaborado, la cual tiene como objetivo lograr que las respuestas al impulso truncadas den respuestas en frecuencia con una forma suavizada y con mínimas oscilaciones en las bandas de paso y eliminada. A los filtros resultantes se les denomina filtros principalmente planos. En este sentido, los aspectos principales se centran en los siguientes puntos:

- Identificación del punto de truncado de la representación temporal de las funciones $\alpha$-spline. Las muestras seleccionadas con el proceso pueden identificarse como una función ventana.

- Definida la función ventana, la segunda etapa tiene como finalidad encontrar los valores de la longitud del filtro y el grado de las funciones $\alpha$-spline que permiten conseguir unas especificaciones de atenuación $A_s$ de la banda eliminada y de anchura de la banda de transición $\Delta_d$, dadas de antemano. En este sentido se han simulado gran cantidad de respuestas en frecuencia, para un amplio abanico de valores del grado $p + \alpha q$, donde se ha considerado $q = 1$, de las funciones $\alpha$-spline y de $M$, y se han medido la atenuación y la anchura de la banda de transición alcanzadas en cada supuesto.

- A partir de los datos empíricos, se han elaborado fórmulas de diseño que, con un grado razonable de aproximación, permiten predecir por un lado el grado $p + \alpha q\,(q = 1)$ en función de la atenuación $A_s$, y por otro, el semiorden del filtro $M$ en términos de $\Delta_d$ y $A_s$.

Para comprobar la bondad de los diseños, en todos los casos contemplados, se han desarrollado ejemplos donde se comparan los resultados de los filtros obtenidos por medio de las técnicas propuestas con los proporcionados a través de otras propuestas formuladas por diversos autores, elaboradas con el mismo objetivo y basadas en funciones $\beta$-spline de exponente racional. Para verificar las soluciones obtenidas, utilizando tanto las propuestas planteadas en la memoria como las planteadas por otros autores, se ha aplicado un método de diseño basado en algoritmos genéticos.

Como colofón, se puede decir que se han alcanzado los objetivos principales planteados al inicio del trabajo, a saber:

- Generar familias de funciones $\alpha$-spline en el dominio de la frecuencia con consistencia formal y que representen una ampliación de las funciones $\beta$-spline de exponente racional.

- Diseñar filtros, formulados con bandas de transición modeladas con funciones $\alpha$-spline, que presentan propiedades que en el peor de los casos igualan y que en general mejoran a los diseños previamente existentes.

Algunos de los resultados más relevantes de este trabajo de investigación se han difundido en dos revistas y un congreso científico:

1. M. Á. Raposo-Sánchez, J. Sáez-Landete, F. Cruz-Roldán. "$\alpha$-spline design of finite impulse response digital filters". En *Signal Processing*, Volumen 122, páginas 204-212, mayo 2016.

2. M. Á. Raposo-Sánchez, J. Sáez-Landete, F. Cruz-Roldán. "Analog and Digital Filters with $\alpha$-Splines". En *Digital Signal Processing* (2017), 10.1016/j.dsp.2017.03.003.

3. M. Á. Raposo-Sánchez, J. Sáez-Landete, F. Cruz-Roldán. "Modelado de Bandas de Transición mediante Funciones alfa Splines". En *Actas del XXX Simposium Nacional de la URSI*. Pamplona, septiembre 2015.

## 6.2. Líneas de estudio futuras

En todos los procedimientos de diseño de filtros que se han abordado en la memoria, se han analizado los supuestos en los cuales las funciones utilizadas para la modelización de las bandas de transición pertenecían a la familia de tipo II.

Se pueden abrir nuevas líneas de diseño de filtros partiendo de las formulaciones de filtros modificados basados en las funciones $\alpha$-spline de tipo I o de tipo III. Por ejemplo, distintas combinaciones de los parámetros $\Delta_d$ y $\alpha$ que den lugar a la misma anchura espectral de las funciones $\alpha$-spline, para unos valores fijos de $p$ y $q$, generan funciones que presentan diferencias en sus perfiles; los distintos perfiles darán lugar a variaciones en las propiedades de los filtros resultantes que pueden ser relevantes para algunas aplicaciones.

Otra posible línea de trabajo puede plantearse teniendo en cuenta el conjunto de pruebas exhaustivas realizadas para determinar el grado óptimo de las funciones $\alpha$-spline correspondiente al diseño de filtros principalmente planos. En dichas pruebas el grado de las funciones $\alpha$-spline $p + \alpha q$, se restringió a valores de $q = 1$. Con este procedimiento de diseño, se han llevado a cabo algunas pruebas aisladas, realizadas con valores de $q > 1$ y de modo que $p + \alpha q$ se mantenga constante, las cuales sugieren que las propiedades de los filtros obtenidos superan a las logradas con aquellos diseñados utilizando $q = 1$ en el grado de las funciones $\alpha$-spline. A partir de estos resultados preliminares, se puede abordar un estudio sistemático, que sería bastante laborioso ya que las combinaciones posibles son muy numerosas, sobre la influencia del grado $p + \alpha q\,(q > 1)$ sobre los rendimientos de los filtros y obtener fórmulas de diseño en el supuesto de que los resultados fuesen prometedores.

Por otro lado, una temática de interés investigador en la que se podría profundizar como futura línea de trabajo se centra en el diseño de filtros prototipo para bancos de filtros y transmultiplexadores [123], denominados en la actualidad como sistemas multiportadora con bancos de filtros (filter bank multicarrier -FBMC systems)[152], [153]. Dentro de las distintas clases de bancos de filtros que se pueden encontrar en la literatura, los bancos de filtros modulados han recibido una especial atención por dos razones fundamentales: la facilidad de diseño, que se basa en la obtención de los coeficientes de un filtro prototipo, y la existencia de algoritmos rápidos de ejecución, que dependen del esquema de modulación (trigonométrica o exponencial), algunos de los cuales se pueden encontrar en [154], [155], y las referencias incluidas en estos trabajos. El interés hacia los bancos de filtros es notable y estable desde la década de los 80, mientras que el diseño de FBMC es un tema de gran actualidad investigadora, ya que se contemplan como alternativa a OFDM en los sistemas de quinta generación (5G) [153], [156], [157], [158] y [159]. La línea que se propone explorar se basa en la obtención de filtros prototipo modificando la técnica propuesta en [160], en la cual se diseñaban los filtros mediante la técnica $\beta$-spline. En dicho trabajo, se presentaba un análisis comparativo de los filtros $\beta$-spline con otras técnicas de diseño de filtros prototipo, y se mostraban resultados de simulación en los que se encontraban mejoras atendiendo a la medida de diversos parámetros de calidad del sistema, tanto en bancos de filtros como en transmultiplexadores. Hemos corroborado mediante unas pruebas experimentales de carácter preliminar que la calidad del sistema diseñado se puede incrementar, atendiendo a diversos parámetros,

introduciendo filtros $\alpha$-spline en la técnica de diseño. La flexibilidad que permite el uso de órdenes no enteros para el spline es a su vez una oportunidad que puede conducir a diseños más robustos para sistemas de codificación subbanda, o bien para sistemas de transmisión de datos.

# Apéndice A

# Familias de funciones $\alpha$-spline y filtros paso-bajo asociados

Las diferentes familias de funciones $\alpha$-spline, tanto en el dominio de la frecuencia como en el dominio del tiempo, así como en tiempo continuo como en tiempo discreto, y los filtros generados por medio de ellas se pueden sistematizar de forma compacta mediante dos parámetros que intervienen en la definicion de los pulsos de partida y que son diferentes para cada familia. Centrándonos en el dominio del tiempo discreto, se consideran dos tipos de pulsos rectangulares, donde los subíndices $d$ nos van a indicar el ámbito discreto de trabajo, dependientes de dos parámetros $k_1$ y $k_2$, y definidos como sigue:

$$\phi_{d,\ell}(\omega) = \begin{cases} k_1 \frac{2\pi}{\Delta_d}, & |\omega| < \frac{\Delta_d}{2k_1}, \\ 0, & \frac{\Delta_d}{2k_1} < |\omega| < \pi, \end{cases} \tag{A.1}$$

$$\phi_{\alpha,d,\ell}(\omega) = \begin{cases} k_2 \frac{2\pi}{\alpha\Delta_d}, & |\omega| < \frac{\alpha\Delta_d}{2k_2}, \\ 0, & \frac{\alpha\Delta_d}{2k_2} < |\omega| < \pi, \end{cases} \tag{A.2}$$

Los diferentes valores que toman los parámetros $k_1$ y $k_2$ dan lugar a las diferentes familias de funciones $\alpha$-spline, de acuerdo a la tabla A.1.

De acuerdo con la tabla anterior, las diferentes familias de funciones $\alpha$-spline, definidas en frecuencia, resultantes de la convolución de $p$ pulsos del primer tipo y $q$ pulsos del segundo tipo, es decir,

**Tabla A.1** – Diferentes familias de funciones $\alpha$-spline en frecuencia

| Parámetros | Familia $\alpha$-spline Tipo I | Familia $\alpha$-spline Tipo II | Familia $\alpha$-spline Tipo III |
|---|---|---|---|
| $k_1$ | 1 | $p + \alpha q$ | $p$ |
| $k_2$ | 1 | $p + \alpha q$ | $q$ |

$$\Psi_{d,\ell}^{[p,q]}(\omega) = \overbrace{\phi_{d,\ell}(\omega) * \ldots * \phi_{d,\ell}(\omega)}^{(p-1)\ veces} * \overbrace{\phi_{\alpha,d,\ell}(\omega) * \ldots * \phi_{\alpha,d,\ell}(\omega)}^{(q-1)\ veces}.$$

se pueden representar por la expresión

$$\begin{aligned} \Psi_{d,\ell}^{[p,q]}(\omega) &= \frac{2\pi k_1^p k_2^q}{\alpha^q \Delta_d (p+q-1)!} \cdot \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} (-1)^{k+l} \binom{p}{k} \binom{q}{l} \times \\ &\times \left\{ \frac{\omega}{\Delta_d} - \left( \frac{k}{k_1} + \frac{\alpha l}{k_2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{p}{k_1} + \frac{\alpha q}{k_2} \right) \right\}_+^{p+q-1}, \end{aligned} \tag{A.3}$$

Todas estas funciones son positivas y presentan simetría par. Son no nulas en un intervalo finito $[a, b]$ de la variable independiente $\omega$ que depende de los parámetros de definición de los pulsos y del número de pulsos, de uno y otro tipo, que convolucionan, pudiendo expresarse en forma general para las diferentes familias como

$$\left[ -\left( \frac{p}{k_1} + \frac{\alpha q}{k_2} \right) \frac{\Delta_d}{2}, \left( \frac{p}{k_1} + \frac{\alpha q}{k_2} \right) \frac{\Delta_d}{2} \right]$$

La transformada inversa de Fourier de la función previa, da como resultado

$$F_{d,\ell}^{[p,q]}[n] = \left[ \frac{\sin\{(\Delta_d n)/(2k_1)\}}{\Delta_d n/(2k_1)} \right]^p \left[ \frac{\sin\{(\alpha \Delta_d n)/(2k_2)\}}{\alpha \Delta_d n/(2k_2)} \right]^q. \tag{A.4}$$

La convolución en el dominio de la frecuencia de una función de cualquiera de las familias $\alpha$-spline definidas en frecuencia con la respuesta en frecuencia de un filtro ideal paso-bajo, con frecuencia de corte $\omega_c$, da como resultado la respuesta en frecuencia de un filtro paso-bajo con una determinada banda de transición, que se expresa como

$$\begin{aligned} H_{md,\ell}^{[p,q]}(\omega) &= 1 - \frac{2\pi k_1^p k_2^q}{\alpha^q (p+q)!} \cdot \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} (-1)^{k+l} \binom{p}{k} \binom{q}{l} \times \\ &\times \left\{ \frac{|\omega| - \omega_c}{\Delta_d} - \left( \frac{k}{k_1} + \frac{\alpha l}{k_2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{p}{k_1} + \frac{\alpha q}{k_2} \right) \right\}_+^{p+q-1}, \end{aligned} \tag{A.5}$$

están definidas en el intervalo $-\pi < \omega \leq \pi$. Dentro del intervalo $0 \leq \omega \leq \pi$, las funciones representativas de la respuesta en frecuencia valen la unidad en el intervalo dado por

$$\left[ 0, \omega_c - \left( \frac{p}{k_1} + \frac{\alpha q}{k_2} \right) \frac{\Delta_d}{2} \right],$$

son nulas en el intervalo dado por

$$\left[\omega_c + \left(\frac{p}{k_1} + \frac{\alpha q}{k_2}\right)\frac{\Delta_d}{2}, \pi\right],$$

mientras que la banda de transición, que conecta la banda de paso y la banda eliminada, se extiende sobre el intervalo

$$\left[\omega_c - \left(\frac{p}{k_1} + \frac{\alpha q}{k_2}\right)\frac{\Delta_d}{2}, \omega_c + \left(\frac{p}{k_1} + \frac{\alpha q}{k_2}\right)\frac{\Delta_d}{2}\right].$$

tomando un continuo de valores entre cero y la unidad.

La transformada inversa de Fourier de la expresión anterior, nos da la siguiente respuesta al impulso

$$h_{md,\ell}[n] = \frac{\omega_c}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right)\left[\text{sinc}\left(\frac{\Delta_d n}{2\pi k_1}\right)\right]^p\left[\text{sinc}\left(\frac{\alpha\Delta_d n}{2\pi k_2}\right)\right]^q.$$

El subíndice $\ell$ puede tomar los valores $1, 2$ y $3$, y hace referencia a los diferentes tipos de familia $\alpha$-spline, es decir, a las familias denominadas de tipo I, II y III, respectivamente.

Las expresiones para el caso analógico o de tiempo continuo tienen la misma forma funcional que las expresiones de tiempo discreto sin más que cambiar $\Delta_d$ por $\Delta_a$, $\omega_c$ por $\Omega_c$ y $n$ por $t$.

# Apéndice B

# Derivabilidad y continuidad de la respuesta en frecuencia

Vamos a poner de manifiesto algunas de las propiedades generales que van implícitas en cualquiera de las ecuaciones (4.17), (4.21), ó (4.24), como son su suavidad y su aproximación a una función escalón. Esto nos dará información sobre las características de la banda de transición de todos los filtros obtenidos. El desarrollo se realizará sobre el modelo que utiliza las funciones $\alpha$-spline de tipo II, (4.17), para el modelado de dicha banda, obteniendo unos resultados generales válidos para cualquiera que sean los valores de los parámetros que definen el filtro: la frecuencia de corte $\omega_c$, la anchura de la banda de transición $\Delta_d$, y el número de pulsos de uno u otro tipo que tengamos que convolucionar. En esencia, vamos a estudiar las propiedades de derivabilidad y continuidad de la respuesta en frecuencia de los filtros paso-bajo desarrollados en esta sección. Idénticas conclusiones se derivarían con las otras dos familias de funciones $\alpha$-spline contempladas en la memoria, (4.21) ó (4.24).

Para generalizar el procedimiento conviene realizar un cambio de variable que nos trasladará la anchura de la banda de transición, cualquiera que ésta sea, al intervalo $[0, 1]$. En lugar de trabajar con la respuesta en frecuencia del filtro paso-bajo dado por (4.17), el análisis de las propiedades lo realizaremos sobre la función paso alto $G(\omega) = 1 - H(\omega)$ asociada.

Debido a que la función es simétrica en la frecuencia nos centraremos en el intervalo positivo de las mismas, es decir, $0 \leq \omega \leq \pi$. De (4.17) se obtiene

$$G(\omega) = \frac{(p+\alpha q)^{p+q}}{(p+q)!\alpha^q} \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{ \frac{\omega - \omega_c}{\Delta_d} - \left( \frac{k+\alpha l}{p+\alpha q} - \frac{1}{2} \right) \right\}_+^{p+q}, \tag{B.1}$$

cuya banda de transición abarca el intervalo $\omega_c - \Delta_d/2 \leq \omega \leq \omega_c + \Delta_d/2$. Podemos reescribir la expresión anterior en la forma

$$G(\omega) = \frac{(p+\alpha q)^{p+q}}{(p+q)!\alpha^q} \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{\omega - \omega_c}{\Delta_d/2} + 1 \right] - \left( \frac{k+\alpha l}{p+\alpha q} \right) \right\}_+^{p+q}, \tag{B.2}$$

y realizando el cambio de variable

$$\frac{\omega - \omega_c}{\Delta_d/2} + 1 = 2x,$$

resulta una función que depende de la variable $x$, que llamaremos $P(x)$, y que adquiere la forma

$$P(x) = \frac{(p+\alpha q)^{p+q}}{(p+q)!\alpha^q} \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{ x - \left( \frac{k+\alpha l}{p+\alpha q} \right) \right\}_+^{p+q}, \tag{B.3}$$

donde los extremos de la banda de transición y la frecuencia de corte vienen ahora definidos por los valores de la variable $x$ siguientes

$$x = \begin{cases} 0, & \text{para} \quad \omega = \omega_c - \frac{\Delta_d}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \text{para} \quad \omega = \omega_c, \\ 1, & \text{para} \quad \omega = \omega_c + \frac{\Delta_d}{2}. \end{cases}$$

La función $P(x)$ definida en (B.3) verifica

$$\begin{aligned} P(x) &= 0, \quad \text{si} \quad x \leq 0, \\ P(x) &= 1, \quad \text{si} \quad x \geq 1, \end{aligned} \tag{B.4}$$

y $0 < P(x) < 1$ si $0 < x < 1$.

A continuación se demuestra que $P(x)$ puede interpretarse como una función escalón suavizada que presenta unas excelentes propiedades de continuidad y derivabilidad.

En primer lugar nos centraremos en el estudio para valores $x < 0$. En este rango de la variable independiente, para cualesquiera que sean los valores de los enteros $k$ y $l$, se verifica que $x - \left(\frac{k+\alpha l}{p+\alpha q}\right) \leq 0$ y, por tanto, cada término del polinomio original $\left[x - \frac{k+\alpha l}{p+\alpha q}\right]_+^{p+q} = 0$, lo que conlleva que $P(x) = 0$. Centrándonos en las propiedades de continuidad nos vamos a fijar en un entorno de $x = 0$ aproximándonos desde valores positivos de la variable, es decir hacemos que $x \to 0^+$; en estas circunstancias los términos $\left[x - \frac{k+\alpha l}{p+\alpha q}\right]_+^{p+q} < 0$ excepto para los valores de los índices $k = l = 0$, donde la función

resultante se reduce a la contribución de un solo término y que puede expresarse como

$$P(x) = \frac{(p+\alpha q)^{p+q}}{(p+q)!\alpha^q}\{x\}^{p+q}, \tag{B.5}$$

que obviamente es mayor que cero y tiende a cero si así lo hace la variable $x$. Por lo tanto, $P(x)$ es un polinomio de grado $p+q$ en $x$ y tiene $p+q-1$ derivadas nulas en $x=0$.

En segundo lugar, vamos a demostrar que $P(x) = 1\ \forall x \geq 1$; para ello vamos a desarrollar la potencia del binomio que aparece en (B.3), obteniendo como resultado

$$P(x) = \frac{(p+\alpha q)^{p+q}}{(p+q)!\alpha^q}\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q}C_{kl}\sum_{n=0}^{p+q}(-1)^n\begin{pmatrix} p+q \\ n \end{pmatrix}\{x\}^{p+q-n}\left(\frac{k+\alpha l}{p+\alpha q}\right)^n,$$

y reordenando factores, se llega a

$$P(x) = \frac{(p+\alpha q)^{p+q}}{(p+q)!\alpha^q}\sum_{n=0}^{p+q}\begin{pmatrix} p+q \\ n \end{pmatrix}\{x\}^{p+q-n}\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q}h_{kl}^n\left(\frac{k+\alpha l}{p+\alpha q}\right)^n,$$

en la que

$$h_{kl}^n = (-1)^{k+l+n}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ l \end{pmatrix}.$$

Si definimos el factor $S_{pq}^n$ como

$$S_{pq}^n = \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q}h_{kl}^n\left(\frac{k+\alpha l}{p+\alpha q}\right)^n, \tag{B.6}$$

entonces podemos escribir $P(x)$ en la forma

$$P(x) = \frac{(p+\alpha q)^{p+q}}{(p+q)!\alpha^q}\sum_{n=0}^{p+q}\begin{pmatrix} p+q \\ n \end{pmatrix}\{x\}^{p+q-n}S_{pq}^n. \tag{B.7}$$

Demostraremos a continuación que se verifica la relación

$$S_{pq}^n = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad n < (p+q), \\ \frac{(p+q)!\alpha^q}{(p+\alpha q)^{p+q}}, & \text{si} \quad n = (p+q), \end{cases} \tag{B.8}$$

y para lograr este objetivo nos ayudaremos del método de inducción completa. En primer lugar vamos a comprobar si la relación (B.8) es cierta para los primeros números

naturales. Si inicialmente tomamos $p = 1$ y $q = 0$, entonces (B.6) se reduce a

$$S_{10}^{n} = \sum_{k=0}^{1} h_{k0}^{n} \left[\frac{k}{1}\right]^{n}, \text{ con } n = 0, 1. \tag{B.9}$$

Sustituyendo por los valores correspondientes

$$S_{10}^{0} = \sum_{k=0}^{1} h_{k0}^{0} [k]^{0} = h_{00}^{0} + h_{10}^{0} = 1 - 1 = 0, \tag{B.10}$$

$$S_{10}^{1} = \sum_{k=0}^{1} h_{k0}^{1} [k]^{1} = h_{10}^{1} = 1 = \frac{(1+0)!\alpha^{0}}{(1+\alpha 0)^{1+0}}. \tag{B.11}$$

Elegimos ahora los valores $p = 0$ y $q = 1$; en estas circunstancias la relación (B.6) se convierte en

$$S_{01}^{n} = \sum_{l=0}^{1} h_{0l}^{n} [l]^{n} \text{ con } n = 0, 1, \tag{B.12}$$

$$S_{01}^{0} = \sum_{l=0}^{1} h_{0l}^{0} [l]^{0} = h_{00}^{0} + h_{01}^{0} = 1 - 1 = 0, \tag{B.13}$$

$$S_{10}^{1} = \sum_{l=0}^{1} h_{0l}^{1} [l]^{1} = h_{10}^{1} = 1 = \frac{(0+1)!\alpha^{1}}{(0+\alpha 1)^{1+0}}. \tag{B.14}$$

Tomemos a continuación la pareja de valores $p = 1$ y $q = 1$

$$S_{11}^{n} = \sum_{k=0}^{1} \sum_{l=0}^{1} h_{kl}^{n} \left(\frac{k+\alpha l}{1+\alpha}\right)^{n}, \text{ con } n = 0, 1, 2, \tag{B.15}$$

$$S_{11}^{0} = \sum_{k=0}^{1} \sum_{l=0}^{1} h_{kl}^{0} \left(\frac{k+\alpha l}{1+\alpha}\right)^{0} = h_{00}^{0} + h_{01}^{0} + h_{10}^{0} + h_{11}^{0} = 1 - 1 - 1 + 1 = 0, \tag{B.16}$$

$$\begin{aligned} S_{11}^{1} = \sum_{k=0}^{1} \sum_{l=0}^{1} h_{kl}^{1} \left(\frac{k+\alpha l}{1+\alpha}\right)^{1} &= h_{01}^{1} \frac{\alpha}{1+\alpha} + h_{10}^{1} \frac{1}{1+\alpha} + h_{11}^{1} \\ &= \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha} - 1 = 0, \end{aligned} \tag{B.17}$$

$$S_{11}^2 = \sum_{k=0}^{1}\sum_{l=0}^{1} h_{kl}^2 \left(\frac{k+\alpha l}{1+\alpha}\right)^2 = h_{01}^2\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2 + h_{10}^2\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^2 + h_{11}^2$$
$$= -\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2 - \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^2 + 1$$
$$= \frac{(1+1)!\alpha^1}{(1+\alpha)^{1+1}} = \frac{2\alpha}{(1+\alpha)^2}. \qquad \text{(B.18)}$$

Por tanto, queda probado que la expresión (B.8) se verifica para los primeros números naturales, es decir en los supuestos $p=1, q=0$; $p=0, q=1$; y $p=1, q=1$.

El segundo paso de la demostración consiste en suponer que la relación es cierta para $q=m, \forall p$; es decir, supondremos que se verifica

$$S_{pm}^n = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad n < (p+m), \\ \frac{(p+m)!\alpha^m}{(p+\alpha m)^{p+m}}, & \text{si} \quad n = (p+m). \end{cases} \qquad \text{(B.19)}$$

Para completar el proceso nos preguntamos por el valor de la expresión $S_{p(m+1)}^n$, $\forall n = 0, 1, 2, \cdots\cdots, (p+m), (p+m+1)$. Explicitamente el valor de $S_{p(m+1)}^n$ viene dado por

$$S_{p(m+1)}^n = \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{m+1} h_{kl}^n \left(\frac{k+\alpha l}{p+\alpha(m+1)}\right)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{p}(-1)^{k+n}\binom{p}{k}\sum_{l=0}^{m+1}(-1)^l\binom{m+1}{l}\left(\frac{k+\alpha l}{p+\alpha(m+1)}\right)^n. \qquad \text{(B.20)}$$

Dados dos números naturales $m$ y $d$, se verifican, entre otras, las siguientes relaciones entre números combinatorios

$$\binom{m+1}{d} = \binom{m}{d} + \binom{m}{d-1}, \qquad \text{(B.21)}$$

y

$$\binom{m+1}{0} = \binom{m}{0} \quad , \quad \binom{m+1}{m+1} = \binom{m}{m}. \qquad \text{(B.22)}$$

Teniendo en cuenta (B.21) y (B.22), la expresión (B.20) se puede poner como la suma de dos términos $A_{1n}$ y $A_{2n}$:

$$S_{p\,(m+1)}^n = A_{1n} + A_{2n}, \qquad \text{(B.23)}$$

donde

$$A_{1n} = \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{m}(-1)^{k+l+n}\left(\begin{array}{c} p \\ k \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} m \\ l \end{array}\right)\left(\frac{k+\alpha l}{p+\alpha(m+1)}\right)^n, \tag{B.24}$$

$$A_{2n} = \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{m}(-1)^{k+l+n+1}\left(\begin{array}{c} p \\ k \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} m \\ l \end{array}\right)\left(\frac{k+\alpha(l+1)}{p+\alpha(m+1)}\right)^n. \tag{B.25}$$

Si en las bases de las funciones potenciales que aparecen en la expresión de $A_{1n}$ multiplicamos y dividimos por el término $p+\alpha m$, entonces se puede reescribir de la forma

$$\begin{aligned} A_{1n} &= \left(\frac{p+\alpha m}{p+\alpha(m+1)}\right)^n \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{m}(-1)^{k+l+n}\left(\begin{array}{c} p \\ k \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} m \\ l \end{array}\right)\left(\frac{k+\alpha l}{p+\alpha m}\right)^n \\ &= \left(\frac{p+\alpha m}{p+\alpha(m+1)}\right)^n S_{pm}^n. \end{aligned} \tag{B.26}$$

De (B.19), podemos decir que $A_{1n}$ es nulo para $n = 0, 1, 2\cdots, (p+m-1)$ mientras que para $n = (p+m)$ toma el valor

$$A_{1n} = \left(\frac{p+\alpha m}{p+\alpha(m+1)}\right)^n \frac{(p+m)!\alpha^m}{(p+\alpha m)^{(p+m)}} = \frac{(p+m)!\alpha^m}{[p+\alpha(m+1)]^{(p+m)}}. \tag{B.27}$$

Reordenando la expresión $A_{2n}$ se consigue

$$A_{2n} = (-1)^1 \sum_{k=0}^{p}(-1)^{k+n}\left(\begin{array}{c} p \\ k \end{array}\right)\sum_{l=0}^{m}(-1)^l\left(\begin{array}{c} m \\ l \end{array}\right)\left(\frac{k+\alpha(l+1)}{p+\alpha(m+1)}\right)^n, \tag{B.28}$$

y procediendo sobre la expresión anterior, del mismo modo que se hizo con $A_{1n}$, se obtiene

$$\begin{aligned} A_{2n} &= (-1)^1\left(\frac{p+\alpha m}{p+\alpha(m+1)}\right)^n \\ &\times \sum_{k=0}^{p}(-1)^{k+n}\left(\begin{array}{c} p \\ k \end{array}\right)\sum_{l=0}^{m}(-1)^l\left(\begin{array}{c} m \\ l \end{array}\right)\left(\frac{k+\alpha l}{p+\alpha m}+\frac{\alpha}{p+\alpha m}\right)^n. \end{aligned} \tag{B.29}$$

Desarrollando la potencia del binomio

$$A_{2n} = -\left(\frac{p+\alpha m}{p+\alpha(m+1)}\right)^n \sum_{s=0}^{n} A_{3n}\left(\begin{array}{c} n \\ s \end{array}\right)\left(\frac{\alpha}{p+\alpha m}\right)^s, \tag{B.30}$$

$$A_{3n} = \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{m}(-1)^{k+l+n}\left(\begin{array}{c} p \\ k \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} m \\ l \end{array}\right)\left(\frac{k+\alpha l}{p+\alpha m}\right)^{(n-s)}, \tag{B.31}$$

donde el índice $s$ varía en el conjunto $s = 0, 1, 2, \cdots, n$.

Manipulando la expresión (B.31) para que tome la forma de (B.19), podemos reescribir $A_{3n}$ en la forma

$$A_{3n} = (-1)^s \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{m} (-1)^{k+l+(n-s)} \left( \begin{array}{c} p \\ k \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} m \\ l \end{array} \right) \left( \frac{k+\alpha l}{p+\alpha m} \right)^{(n-s)}. \tag{B.32}$$

Como el índice $n$ puede variar en el conjunto $n = 0, 1, 2, \cdots, (p+m), (p+m+1)$, teniendo en cuenta (B.19) se desprende que si $n \leq (p+m-1)$, entonces $(n-s) < (p+m-1)$, y en consecuencia $A_{3n}$ es cero. Como $A_{3n}$ interviene como factor de $A_{2n}$, este último término es igualmente cero. De lo dicho en este párrafo y considerando (B.26) y (B.27), podemos decir que si $n \leq (p+m-1)$, entonces $S^n_{p\,(m+1)} = A_{1n} + A_{2n}$ es cero.

Si $n = (p+m)$, entonces $(n-s) < (p+m)$ excepto cuando $s = 0$. En este supuesto, de (B.32) y (B.19), $A_{3n}\{n = (p+m), s = 0\}$ es

$$\begin{aligned} A_{3n}\{n = (p+m), s = 0\} &= (-1)^0 \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{m} (-1)^{k+l+n} \left( \begin{array}{c} p \\ k \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} m \\ l \end{array} \right) \left( \frac{k+\alpha l}{p+\alpha m} \right)^{n} \\ &= \frac{(p+m)!\alpha^m}{(p+\alpha m)^{(p+m)}}. \end{aligned} \tag{B.33}$$

Entonces $A_{2n}\{n = (p+m), s = 0\}$ verifica que

$$\begin{aligned} -A_{2n}\{n = (p+m), s = 0\} &= \left( \frac{p+\alpha m}{p+\alpha(m+1)} \right)^{(p+m)} A_{3n}\{n = (p+m), s = 0\} \\ &\times \left( \begin{array}{c} p+m+1 \\ 0 \end{array} \right) \left( \frac{\alpha}{p+\alpha m} \right)^{0} \\ &= \frac{(p+m)!\alpha^m}{(p+\alpha(m+1))^{(p+m)}}, \end{aligned} \tag{B.34}$$

y de esta última expresión y de (B.27), se infiere que $S^{(p+m)}_{p(m+1)} = 0$.

En el supuesto final $n = (p+m+1)$, se verifica que $(n-s) < (p+m)$, excepto cuando $s = 0$ y $s = 1$. El valor de $A_{1n}\{n = p+m+1\}$ es

$$\begin{aligned} A_{1n}\{n = p+m+1\} &= -\left( \frac{p+\alpha m}{p+\alpha(m+1)} \right)^{(p+m+1)} \\ &\times \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{m} (-1)^{k+l+p+m} \left( \begin{array}{c} p \\ k \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} m \\ l \end{array} \right) \\ &\times \left( \frac{k+\alpha l}{p+\alpha m} \right)^{(p+m+1)}, \end{aligned} \tag{B.35}$$

que hay que sumar con las contribuciones de $A_{2n}\{n = p+m+1, s = 0\}$ y $A_{2n}\{n = p+m+1, s = 1\}$; así si $s = 0$, los valores de $A_{3n}\{n = p+m+1, s = 0\}$ y $A_{2n}\{n =$

$p+m+1, s=0\}$ son

$$A_{3n}\{n=(p+m+1),s=0\} = (-1)^1 \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{m}(-1)^{(k+l+p+m)} \times \left[\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix}\left(\frac{k+\alpha l}{p+\alpha m}\right)^{(p+m+1)}\right], \quad \text{(B.36)}$$

$$-A_{2n}\{n=(p+m+1),s=0\} = A_{3n}\{n=(p+m+1),s=0\}\begin{pmatrix} p+m+1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \left(\frac{\alpha}{p+\alpha m}\right)^0\left(\frac{p+\alpha m}{p+\alpha(m+1)}\right)^{(p+m+1)},$$

$$A_{2n}\{n=(p+m+1),s=0\} = -A_{3n}\{n=(p+m+1),s=0\}\left(\frac{p+\alpha m}{p+\alpha(m+1)}\right)^{(p+m+1)},$$

$$A_{2n}\{n=(p+m+1),s=0\} = \left(\frac{p+\alpha m}{p+\alpha(m+1)}\right)^{(p+m+1)} \times \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{m}(-1)^{k+l+p+m}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix} \times \left(\frac{k+\alpha l}{p+\alpha m}\right)^{(p+m+1)}. \quad \text{(B.37)}$$

La suma de (B.35) y (B.37) da cero, por lo que al resultado final solo contribuye el término $A_{2n}\{n=p+m+1, s=1\}$, cuyo valor depende del término $A_{3n}\{n=p+m+1, s=1\}$ que es

$$A_{3n}\{n=(p+m+1),s=1\} = (-1)^1\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{m}(-1)^{(k+l+p+m)}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix} \times \left(\frac{k+\alpha l}{p+\alpha m}\right)^{(p+m)} = -S_{pm}^{(p+m)}. \quad \text{(B.38)}$$

Llevando el resultado de (B.38) a (B.30), se tiene que

$$A_{2n}\{n=(p+m+1),s=1\} = \begin{pmatrix} p+m+1 \\ 1 \end{pmatrix}A_{3n}\{n=(p+m+1),s=1\} \times \left(\frac{\alpha}{p+\alpha m}\right)^1\left(\frac{p+\alpha m}{p+\alpha(m+1)}\right)^{(p+m+1)}$$

$$A_{2n}\{n=(p+m+1), s=1\} = \left(\frac{\alpha}{p+\alpha m}\right)(p+m+1) \times \left(\frac{p+\alpha m}{p+\alpha(m+1)}\right)^{(p+m+1)} S_{pm}^{(p+m)}, \quad \text{(B.39)}$$

$$\begin{aligned} S_{p(m+1)}^{(p+m+1)} &= A_{2n}\{n=(p+m+1), s=1\} = \left(\frac{p+\alpha m}{p+\alpha(m+1)}\right)^{(p+m+1)} \\ &\times (p+m+1)\left(\frac{\alpha}{p+\alpha m}\right)\frac{(p+m)!\alpha^m}{(p+\alpha m)^{(p+m)}} \\ &= \frac{(p+m+1)!\alpha^{(m+1)}}{((p+\alpha(m+1))^{(p+m+1)}}. \end{aligned} \quad \text{(B.40)}$$

Se procedería de un modo totalmente similar, suponiendo cierto el resultado para $p=m, \forall q$, y demostrando que se cumpliría para $p=m+1$. Concluimos que se cumple

$$S_{pq}^{n} = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad n<(p+q), \\ \frac{(p+q)!\alpha^q}{(p+\alpha q)^{(p+q)}}, & \text{si} \quad n=(p+q), \end{cases} \quad \text{(B.41)}$$

$\forall p \in \mathbb{N}$ y $\forall q \in \mathbb{N}$. Llevando este resultado a (B.7) se concluye

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{(p+\alpha q)^{p+q}}{(p+q)!\alpha^q}\sum_{n=0}^{p+q}\left(\begin{array}{c} p+q \\ n \end{array}\right)\{x\}^{p+q-n}S_{pq}^{n} \\ &= \frac{(p+\alpha q)^{p+q}}{(p+q)!\alpha^q}\left(\begin{array}{c} p+q \\ p+q \end{array}\right)\{x\}^{p+q-p-q}S_{pq}^{(p+q)} = 1, \end{aligned} \quad \text{(B.42)}$$

$\forall x \geq 1$.

Finalmente nos vamos a centrar en el comportamiento de nuesta función $P(x)$ en la zona $0<x<1$. Para ello vamos a escribir nuestra función, dada en (B.3), en la forma

$$P(x) = \frac{(p+\alpha q)^{p+q}}{(p+q)!\alpha^q}\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} C_{kl}\{x-N_{kl}\}_{+}^{p+q}, \quad \text{(B.43)}$$

donde $N_{kl}$ representa la serie de valores siguiente,

$$N_{kl} = \left(\frac{k+\alpha l}{p+\alpha q}\right), \quad \text{(B.44)}$$

con $k=0,1,2,\cdots,p$ y $l=0,1,2,\cdots,q$.

Ordenando en sentido creciente, podemos escribir $\{d_1=0<d_2<d_3<\cdots<d_{\text{max-1}}<d_{\text{max}}=1\}$; estos puntos permiten dividir el intervalo $(0,1)$ en los siguientes subintervalos $\{(0,d_2),(d_2,d_3),\cdots,(d_{i-1},d_i),\cdots,(d_{\text{max-1}},1)\}$. Al valor de la función

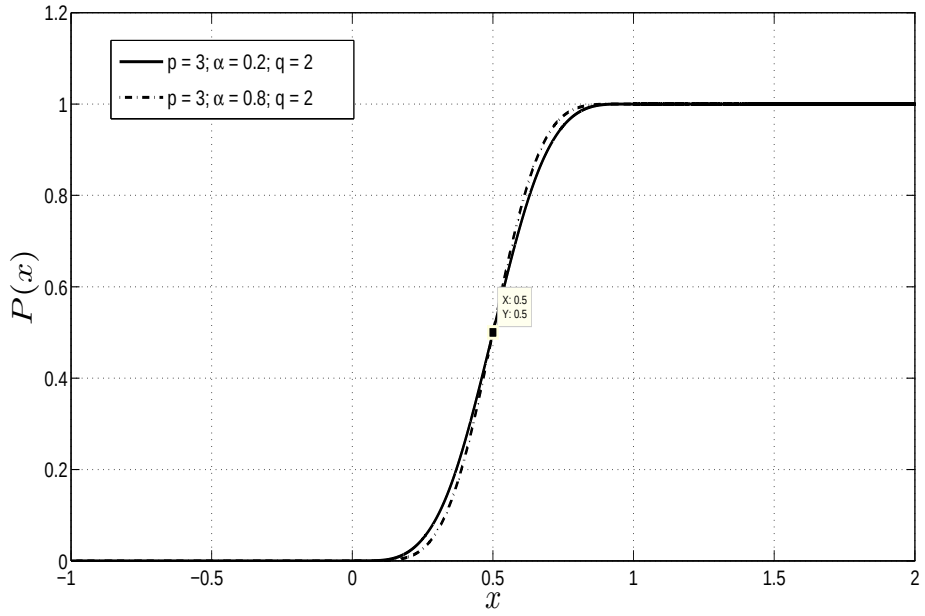


**Figura B.1** – Funciones paso-alto ($P(x)$).

$P(x)$, para cada $x$, contribuyen solo algunos de los términos que aparecen en su definición y que pueden escribirse $Q_T^{(r)}(x) = C_{kl}\{x - d_r\}_+^{(p+q)}$, donde el superíndice $(r)$ indica el último término que contribuye al valor de la función en el subintervalo $(x_r, x_{r+1})$. En el primer intervalo solo contribuye el término $Q_T^{(1)}(x) = C_{00}\{x\}_+^{(p+q)} > 0$, el cual está presente en el resto de los intervalos; al segundo de los subintervalos contribuyen $Q_T^{(1)}(x)$ y $Q_T^{(2)}(x) = C_{kl}\{x - d_2\}_+^{(p+q)}$, pudiendo ser esta última, en el peor de los casos, negativa; pero como $|Q_T^{(r)}(x)| > |Q_T^{(r+1)}(x)|$ para cualesquiera dos términos contribuyentes al valor de la función en cualquier subintervalo, entonces podemos afirmar que nuestra función objetivo $P(x)$ es definida positiva en el intervalo $(0, 1)$. En la figura B.1, se observan dos perfiles de la función dada por (B.3) para unos valores fijos del número de pulsos de ambos tipos que convolucionan, $p = 3$ y $q = 2$, y dos valores diferentes del parámetro $\alpha$, en concreto para $\alpha_1 = 0.2$ y $\alpha_2 = 0.8$.

De (B.43) podemos calcular la derivada $P'(x)$ de $P(x)$ con el resultado

$$P'(x) = \frac{(p + \alpha q)^{p+q}}{(p+q)!\alpha^q}(p+q)\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} C_{kl}\left\{x - N_{kl}\right\}_+^{p+q-1}, \tag{B.45}$$

que como puede observarse mantiene la forma de nuestra función original $P(x)$, y por tanto es positiva en $(0, 1)$. Si la derivada es positiva, entonces $P(x)$ es una función positiva y estrictamente creciente en el intervalo $(0, 1)$. De manera iterativa podemos afirmar que en $(0, 1)$ existen $(p + q - 1)$ funciones derivadas de la original. En la figura

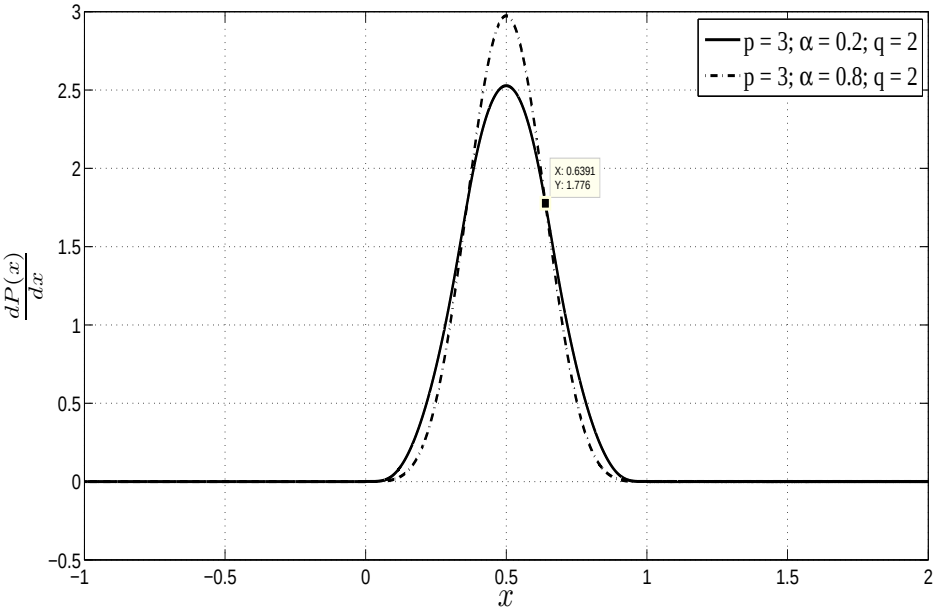


**Figura B.2** – Derivada de funciones paso-alto $(dP(x)/dx)$.

B.2 se muestran los perfiles de las funciones derivadas (B.45) de las funciones (B.3) representadas en la figura B.1.

A continuación se demostrará que la función es continua en $x = 1$. De (B.42) se infiere que tanto el valor de la función en $x = 1$, como el límite por la derecha $\lim_{x\to 1^+}$ son iguales y de valor 1, por lo que solo tendremos que determinar el límite por la izquierda, $\lim_{x\to 1^-} P(x)$. Viendo la forma funcional de $P(x)$, se observa que la función $P(x \to 1^-)$ solo difiere del valor $P(x) = 1$, $\forall x \geq 1$, en el término correspondiente a los valores $k = p$ y $l = q$, que toma la forma

$$\frac{(p+\alpha q)^{p+q}}{(p+q)!\alpha^q} C_{pq} \left\{x - N_{pq}\right\}_+^{p+q} = \frac{(p+\alpha q)^{p+q}}{(p+q)!\alpha^q} C_{pq} \left\{x - 1\right\}_+^{p+q}. \tag{B.46}$$

Claramente, dicho término tiende a cero cuando $x \to 1$; por tanto:

$$\lim_{x\to 1^-} P(x) = 1.$$

Concluimos que la función es continua en $x = 1$, y por lo tanto es derivable, siendo su derivada nula; esto último lo podemos deducir de (B.45) en $x = 1$. Así tenemos,

$$P'(x=1) = \frac{(p+\alpha q)^{p+q}}{(p+q)!\alpha^q}(p+q) \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} C_{kl} \left\{1 - \left(\frac{k+\alpha l}{p+\alpha q}\right)\right\}_+^{p+q-1}. \tag{B.47}$$

Procediendo con los términos que aparecen en (B.47) de un modo análogo (aplicando el método de inducción completa) a como se hizo para la demostración de la expresión (B.8), se obtiene que

$$\sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q} C_{kl}\left\{1-\left(\frac{k+\alpha l}{p+\alpha q}\right)\right\}_{+}^{p+q-j} = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad j \neq 0, \\ \frac{(p+q)!\alpha^q}{(p+\alpha q)^{(p+q)}}, & \text{si} \quad j = 0, \end{cases} \tag{B.48}$$

que se verifica $\forall j = 0, 1, 2, \cdots, (p+q)$.

Contemplando el resultado anterior podemos inferir que (B.47) es idénticamente nulo, lo que asegura que si el dominio de nuestra función es el intervalo $0 \leq x \leq 1$, su imagen tiene un tamaño idéntico, es decir $0 \leq P(x) \leq 1$.

Aplicando reiteradamente este argumento podemos asegurar que sucede lo mismo en todas las funciones derivadas hasta el orden $(p+q-1)$. Todas las funciones derivadas cumplen la condición de ser nulas en los extremos del intervalo, es decir $P^{(n}(x=0) = P^{(n}(x=1) = 0 \ \forall n = 0, 1, 2, \cdots, (p+q-1)$.

Todo lo anterior nos conduce a que, al igual que sucede con las funciones $\beta$-spline, podamos obtener nuestra función $P(x)$ en el intervalo $(0, 1)$ a través de una función $\alpha$-spline modificada bien sea con $p+q-1$ nodos igualmente espaciados en dicho intervalo o por el contrario por medio de los nodos representados por la serie anteriormente citada $\{d_r\}$ que no están igualmente espaciados.

# Apéndice C

# Procedimiento de regresión polinómica por mínimos cuadrados

## C.1. Problema general de mínimos cuadrados

Un sistema de $n$ ecuaciones lineales con $m$ incógnitas, $\mathbf{At} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz de dimensión $n \times m$ y $\mathbf{t}$ y $\mathbf{b}$ son vectores columna de dimensiones $m$ y $n$ respectivamente, tiene solución exacta si $\mathbf{b}$ pertenece al espacio de columnas de $\mathbf{A}$, dado que el producto $\mathbf{At}$ es una combinación lineal de columnas de $\mathbf{A}$. Si el vector $\mathbf{b}$ no cumple con la condición anterior,el sistema no tiene solución exacta, pero siempre queda la posibilidad de encontrar alguna solución aproximada, de acuerdo a restricciones impuestas. En el sentido de los mínimos cuadrados, la solución aproximada $\mathbf{t}^*$ es la que minimiza la norma del error $E = ||\mathbf{At}^* - \mathbf{b}||$. La solución $\mathbf{t}^*$ verifica que $\mathbf{At}^*$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre el espacio de columnas de $\mathbf{A}$; en consecuencia, $\mathbf{b} - \mathbf{At}^*$ debe ser ortogonal al espacio de columnas de $\mathbf{A}$ y el producto escalar entre cualquier vector perteneciente al espacio de columnas de $\mathbf{A}$ y el vector $\mathbf{b} - \mathbf{At}^*$ debe ser nulo. Esto conduce a que para cualquier vector perteneciente al espacio de columnas $\mathbf{v} = \mathbf{Ad}$, donde $\mathbf{d}$ es un vector columna de dimensión $m$, se debe cumplir que el producto escalar, que se representa $\langle \mathbf{v}, (\mathbf{At}^* - \mathbf{b}) \rangle$, sea nulo, es decir,

$$\langle \mathbf{v}, (\mathbf{At}^* - \mathbf{b}) \rangle = 0 \rightarrow \mathbf{v}^T(\mathbf{At}^* - \mathbf{b}) = 0 \rightarrow \mathbf{d}^T\mathbf{A}^T(\mathbf{b} - \mathbf{At}^*) = 0,$$
$$\mathbf{d}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{b} - \mathbf{A}^T\mathbf{At}^*) = 0 \rightarrow \mathbf{A}^T\mathbf{b} = \mathbf{A}^T\mathbf{At}^*,$$

donde el superíndice $T$ indica el vector o la matriz traspuesta.

La solución buscada $\mathbf{t}^*$ viene dada por

$$\mathbf{t}^* = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}. \tag{C.1}$$

## C.2. Regresión polinómica

Se trata de encontrar los $m$ coeficientes de una función polinomica de grado $(m-1)$, que puede escribirse en la forma $y = a_0x^{m-1} + a_1x^{m-2} + \cdots + a_{m-2}x + a_{m-1}$, que ajuste, en el sentido de los mínimos cuadrados, un conjunto de $n$ pares de datos experimentales $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{n}$. Con el conjunto de pares de datos, podemos construir un sistema de $n$ ecuaciones con $m < n$ incógnitas de la forma

$$a_0x_k^{m-1} + a_1x_k^{m-2} + \cdots + a_{m-1}x_k + a_m = y_k, \quad k = 1, 2, \cdots n, \tag{C.2}$$

o de manera equivalente, $\mathbf{At} = \mathbf{b}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1^{m-1} & x_1^{m-2} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{m-1} & x_2^{m-2} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ x_n^{m-1} & x_n^{m-2} & \cdots & x_n & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{t} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{C.3}$$

Haciendo las operaciones matriciales indicadas en (C.1), se obtiene la solución buscada.

## C.3. Caso particular: Regresión cuadrática

En este caso se trata de encontrar los coeficientes $(a, b, c)$ del polinomio de segundo grado que toma la forma $y = ax^2 + bx + c$. En este supuesto se tiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$ax_k^2 + bx_k + c = y_k, \quad k = 1, 2, \cdots n, \tag{C.4}$$

o de manera equivalente, $\mathbf{At} = \mathbf{b}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{t} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{C.5}$$

Si se definen los elementos

$$[xxxx] = \sum_{k=1}^{n} x_k^4, \quad [xxx] = \sum_{k=1}^{n} x_k^3, \quad [xx] = \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \quad [x] = \sum_{k=1}^{n} x_k, \tag{C.6}$$

entonces, la matriz a invertir, $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, se escribe como

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [xxxx] & [xxx] & [xx] \\ [xxx] & [xx] & [x] \\ [xx] & [x] & n \end{pmatrix}. \tag{C.7}$$

Si se definen los elementos

$$[xxy] = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 y_k, \quad [xy] = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \quad [y] = \sum_{k=1}^{n} y_k, \tag{C.8}$$

entonces la matriz $\mathbf{A}^T\mathbf{b}$ toma la forma

$$\mathbf{A}^T\mathbf{b} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [xxy] \\ [xy] \\ [y] \end{pmatrix}. \tag{C.9}$$

Invirtiendo la matriz dada por (C.7) y multiplicando la matriz resultante por la matriz dada en (C.9) se obtiene el vector solución $\mathbf{t}^*$ que está formado por los coeficientes $(a, b, c)$ del polinomio buscado.

# Bibliografía


[1] S. Horbelt, A. M. Barrutia, T. Blu y M. Unser, "Spline kernels for continuous-space image processing," in *Proc. International Conference on Acoustic, Speech, and Signal Processingeedings*, vol. 4. Istanbul, Turkey, junio 2000, pp. 2191–2194.

[2] J. Ibañez, I. Santamaría, C. Pantaleón y L. Vielva, "Parametric smoothing of spline interpolation," in *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP '04)*, vol. 2. Montreal, Canadá, mayo 2004, pp. 597–600.

[3] M. Unser y T. Blu, "Fractional splines and wavelets," *SIAM Review*, vol. 2, no. 1, pp. 43–67, enero 2000.

[4] R.M. Roark y M.A. Escabí, "$\beta$ - spline design of maximally flat and prolate spheroidal-type FIR filters," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 47, no. 3, pp. 701–716, marzo 1999.

[5] C.S. Burrus, A.W. Soewito y R.A. Gopinath, "Least squared error FIR filter design with transition bands," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 40, pp. 1327–1340, 1992.

[6] I. J. Schoenberg, "Contribution to the problem of aproximation of equidistant data by analytic functions. Part. A - On the problem of smothing or graduation. A first class of analytic aproximation formulae," *Quart. Appl. Math.*, vol. 4, no. 1, pp. 45–99, 1946.

[7] C. de Boor, *A Practical Guide to Splines*, 1st ed. Springer-Verlag, New York, 1978.

[8] L. Schumaker, *Spline functions: Basic theory.* John Willey and Sons, New York, 1981.

[9] H. B. Curry y I.J. Schoenberg, "On spline distributions and their limits: The pólya distribution functions," *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 53, p. 1114, 1947.

[10] ——, "On pólya frequency functions. IV: The fundamental spline functions and their limits," *J. d'Analyse Math*, vol. 17, pp. 71–107, 1966.

[11] F. Palmieri y L. P. Bolgiano Jr., "Window functions obtained from B-splines," in *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing.* Tampa F.L., USA, abril 1985, pp. 85–88.

[12] P. Dierckx, *Curve and surface fitting with splines.* Oxford University Press, Oxford, 1995.

[13] G. Farin, *Curves and Surface for Computer Aided Geometric Design: A practical Guide.* MA: Academic, Boston, 1988.

[14] R. Bartels, J. Beatty y B. Barsky, *Splines for Use in Computer Graphics*, C. Morgan Kaufmann, Los Altos, Ed., 1987.

[15] R. L. Burden y J. D. Faires, *Numerical Analysis*, 8th ed., Thomson, Ed., 2005.

[16] D. Knuth, *TEXand METAFONT: New Directions in Typesetting.*, N. Y. N. Willey, Ed. MA: American Mathematical Soc.,and Bedford, 1979.

[17] H.S. Hou y H.C. Andrews, "Cubic spline for image interpolation and digital filtering," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-26, pp. 508–517, diciembre 1978.

[18] J. Marot y S. Bourennane, "Phase distortion estimation by direct and spline interpolation algorithms," *IEEE SIGNAL PROCESSING LETTERS*, vol. 14, no. 7, pp. 461–464, julio 2007.

[19] F. Stenger, *Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions*, B. G. Springer-Verlag, Ed., 1993.

[20] J. Wu y L. Carley, "A table-based time-domain simulation method for oversampled microelectromechanical systems," in *Proceedings 2000 IEEE/ACM International Workshop on Behavioral Modeling and Simulation.* Orlando, Florida, 19 - 20 Oct. 2000, pp. 37 – 41.

[21] F. Xie, R. Weiss y R. Weigel, "Simple Mathematical Operation-Based Calibration Method for Giant Magnetoresistive Current Sensor Applying B-Spline Modeling," *IEEE SENSORS JOURNAL*, vol. 16, no. 12, pp. 4733–4739, Junio 2016.

[22] D. Kindcaid y W. Cheney, *Análisis Numérico: Las matemáticas del cálculo científico*, B. A. A. Addison Wesley Iberoamericana, Ed., 1994.

[23] E. Meijering, "A chronology of interpolation: From ancient astronomy to modern signal and image processing," *Proceedings of the IEEE*, vol. 90, no. 3, pp. 317–342, 2002.

[24] E. Cheney, *Introduction to approximation theory*, 2nd ed., N. Y. Chelsea Publishing Company, Ed., 1982.

[25] V. A. Bloomfield, *Using R for Numerical Analysis in Science and Engineering*, 8th ed., Chapman and Hall/CRC, Eds., 2014.

[26] E. Wittaker, "On the functions which are represented by the expansions of interpolating-theory," *Proc. R. Soc. Edinburgh*, vol. 35, pp. 181–194, 1915.

[27] J. Encke, "Über interpolation," *Berliner Astromishes Jahrbuch*, vol. 55, pp. 265–284, 1830.

[28] E. Wittaker, "On the cardinal function of interpolating theory," *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, vol. 1, pp. 41–46, 1927.

[29] ——, "The Fourier theory of the cardinal function," *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, vol. 1, pp. 169–176, 1927.

[30] C. Shannon, "Communication in the presence of noise," *Proceedings of the IRE*, vol. 37, pp. 10–21, 1949.

[31] I. J. Schoenberg, "Contribution to the problem of aproximation of equidistant data by analytic functions. Part. B-on the problem of osculatory interpolation. A second class of analytic aproximation formulae," *Quart. Appl. Math.*, vol. IV, no. 2, pp. 112–141, 1946.

[32] K. S. Shanmugam, *Digital and Analog Communication Systems*, N. Y. Wiley, Ed., 1979.

[33] L. Couch, *Digital and Analog Communication Systems*, 4th ed., N. Y. Macmillan, Ed., 1993.

[34] R. Marks, *Introduction to Shannon Sampling and Interpolation Theory*, B. Springer-Verlag, Ed., 1991.

[35] A. J. Jerri, "The Shannon sampling theorem - its various extensions and applications: A tutorial review," *Proccedings of the IEEE*, vol. 65, no. 11, pp. 1565–1596, noviembre 1977.

[36] A.V. Oppenheim y R.W. Schafer, *Digital Signal Processing.* Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1975.

[37] R. Hamming, *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, 2nd ed. McGraw-Hill, New York, 1973.

[38] F. Stenger, "Numerical methods based on Whittaker cardinal, or sinc functions," *SIAM Rev.*, vol. 23, no. 2, pp. 165–224, 1981.

[39] A.S.B. Holland y B.N. Sahney, *The general Problem of Approximation and Spline Functions*, 2nd ed. Krieger, Melbourne FL, 1979.

[40] G. Nürnberger, *Approximation by Spline Functions.* Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[41] B. D. Bojanov, H. A. Hakopian y A. A. Sahakian, *Spline Functions and Multivariate Interpolations.* Kluwer, Norwell MA, 1993.

[42] H. Späth, *One Dimensional Spline Interpolations Algorithms*, A. K. Peters, Ed. Wellesley MA, 1995.

[43] P. Prenter, *Splines and Variational Methods Digital and Analog Communication Systems.* Wiley, New York, 1975.

[44] Y. Liu, Z. Yuan, P. N. Markham, R. W. Conners y Y. Liu, "Power grid frequency data conditioning using robust statistics and B-spline functions," in *IEEE Power and Energy Society General Meeting.* San Diego, CA, 22 - 26 julio 2012.

[45] L. Repele, R. Muradore, D. Quaglia y P. Fiorini, "Improving performance of networked control systems by using adaptive buffering," *IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS*, vol. 61, no. 9, pp. 4847–4856, septiembre 2014.

[46] J.H. Ahlberg, E.N. Nilson y J.L. Walsh, *The Theory of Splines and Their Applications.* Academic Mathmatics in Science and Engineerring, New York, 1967, vol. 38.

[47] G.H. Golub y C.F. Van Loan, *Matrix Computations*, 2nd ed. John Hopkins Univ. Press, Baltimore MD, 1989.

[48] M. Unser, A. Aldroubi y M. Eden, "Fast B-spline transforms for continuous image representation and interpolation," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 13, pp. 277–285, marzo 1991.

[49] ——, "B-spline signal processing: Part. I - Theory," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, pp. 821–833, febrero 1993.

[50] ——, "B-spline signal processing: Part. II - Efficient design and applications," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41, pp. 834–848, febrero 1993.

[51] K. Toraichi, S. Yang, M. Kamada y R. Mori, "Two-dimensional spline interpolation for image reconstruction," *Pattern Recognit.*, vol. 21, no. 3, pp. 275–284, 1988.

[52] A. Goshtasby, F. Cheng y B. A: Barsky, "B-spline curves and surfaces viewed as digital filters," *Comput. Vis., Graphics, Image Processing*, vol. 52, no. 2, pp. 264–275, 1990.

[53] M. Unser, "Splines: A perfect fit for signal and image processing," *IEEE Signal Processing Magazine*, noviembre 1999.

[54] M. Unser y A. Aldroubi, "A general sampling theory for nonideal acquisition devices," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, no. 11, pp. 2915–2925, noviembre 1994.

[55] M. Unser y J. Zerubia, "A generalized sampling theory without band-limiting constrains," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 45, no. 8, pp. 959–969, agosto 1998.

[56] D. Pang, L. A. Ferrari y P. V. Sanzar, "B-spline FIR filters," *Circuits, Systems and Signal Processing*, vol. 13, no. 1, pp. 31–64, 1994.

[57] M. Scarpiniti, D. Comminiello, R. Parisi y A. Uncini, "Non linear spline adaptive filtering," *Signal Processing*, no. 93, pp. 772–783, 2013.

[58] D. Lamb, L.F.O. Chamon y V.H. Nascimento, "Efficient filtering structure for spline interpolation and decimation," *ELECTRONICS LETTERS*, vol. 52, no. 1, pp. 39–41, Enero 2016.

[59] M. Kamada, K. Toraichi y R. E. Kalman, "A smooth signal generator based on quadratic B-spline functions," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, no. 5, pp. 1252–1255, mayo 1995.

[60] M. Unser, P. Thevenaz y L. Yarslavsky, "Convolution-based interpolation for fast, high-quality rotation of images," *IEEE Transactions Images Processing*, vol. 4, pp. 1371–1381, octubre 1995.

[61] M. Unser, A. Aldroubi y M. Eden, "Enlargment or reduction of digital images with minimum loss of information," *IEEE Transactions Images Processing*, vol. 4, pp. 247–258, marzo 1995.

[62] C. Lee, M. Eden y M. Unser, "High-quality image resizing using oblique projection operators," *IEEE Transactions Images Processing*, vol. 7, pp. 679–692, mayo 1998.

[63] Li Kai-yu, W. Wen-dong, Z. Kai-wen, L. Wen-bo y X. Gui-li, "The application of b-spline based interpolation in real-time image enlarging processing," in *2nd International Conference on Systems and Informatics (ICSAI 2014).* Shanghai, China, 15 - 17 Nov. 2014, pp. 823 – 827.

[64] P. Thévenaz, E. U. Ruttimann y M. Unser, "A pyramid approach to subpixel registration based on intensity," *IEEE Transactions Image Processing*, vol. 7, pp. 27–41, enero 1998.

[65] J. Kybic, P. Thévenaz, A. Nirkko y M. Unser, "Unwarping of unidirectionally distorted EPI images," *IEEE Transactions Med. Images*, vol. 19, pp. 80–93, febrero 2000.

[66] C. L. Huang y K. C. Chen, "Directional moving averaging interpolation for texture mapping," *Graph. Models Images Processing*, vol. 58, no. 4, pp. 301–313, 1996.

[67] T. J. Lim y M. D. Macleod, "On-line interpolation using spline functions," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 3, pp. 144–146, septiembre 1996.

[68] L. A. Ferrari, J. H. Park, A. Healey y S. Leeman, "Interpolation using a fast spline transform (FST)," *IEEE Transations Circuits Systems I*, vol. 46, pp. 891–906, agosto 1999.

[69] M. Unser, "Sampling-50 years after Shannon," *Proc. IEEE*, vol. 88, pp. 569–587, abril 2000.

[70] M. Unser, A. Aldroubi y M. Eden, "Polynomial spline signal approximation: Filter design and asymptotic equivalence with shannon's sampling theorem," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 38, pp. 95–103, enero 1992.

[71] Q. Wang y W. Lu, "Translation invariance and sampling theorem of wavelet," *IEEE Transations on Signal Processing*, vol. 48, pp. 1472–1474, mayo 2000.

[72] A. Neubauer, "Approximation error of shifted signal in spline spaces," *IEEE Transations on Signal Processing*, vol. 52, no. 4, pp. 921–928, abril 2004.

[73] S. Mallat, "Multiresolution approximations and wavelet orthogonal bases of $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$," *Trans. Amer. Math. Soc.,315*, pp. 69–87, 1989.

[74] C. Chui, *An Introduction to Wavelets*, 8th ed. Academic Press, 1992.

[75] M. J. Vhrel, C. Lee y M. Unser, "Fast continuous wavelet transform: A least-squares formulation," *Signal Processing*, vol. 57, no. 2, pp. 103–119, 1997.

[76] M. Unser, A. Aldroubi y M. Eden, "The $L_2$ polynomial spline pyramid," *IEEE Transactions Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 15, pp. 364–379, abril 1993.

[77] I. P. Wang y S. L. Lee, "Scale-space derived from B-splines," *IEEE Transactions Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 20, pp. 1040–1055, octubre 1998.

[78] L. Ortiz-Gracia y J. J. Masdemont, "Peaks and jumps reconstruction with b-splines scaling functions," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, no. 272, pp. 258–272, 2014.

[79] Z. Hea, Y. Zhangb, Z. Mab, F. Hub y Y. Sunb, "A low-pass differentiation filter based on the 2nd-order b-spline wavelet for calculating augmentation index," *Medical Engineering and Physics*, no. 36, pp. 786–792, 2014.

[80] A. Z. Averbuch y V. A. Zheludev, "A new family of spline-based biorthogonal wavelet transforms and their application to image compression," *IEEE TRANSACTIONS ON IMAGE PROCESSING*, vol. 13, no. 7, pp. 993–1007, julio 2004.

[81] C. K. Chui, J. de Villiers y X. Zhuang, "Multirate systems with shortest spline - wavelet filters," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, no. 41, pp. 266–296, 2016.

[82] T. Blu y M. Unser, "A complete family of scaling functions: The ($\alpha$, $\tau$) - fractional splines," in *Proceedings of the Twenty-Eighth IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP'03)*, vol. VI. Hong Kong, China, abril 2003, pp. 421–424.

[83] M. Unser y T. Blu, "Cardinal exponential splines. Part. I: Theory and filtering algorithms," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, no. 4, pp. 1425–1438, abril 2005.

[84] M. Unser, "Cardinal exponential splines. Part. II: Think analog, act digital," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, no. 4, pp. 1439–1449, abril 2005.

[85] Y. Meyer, *Wavelets and Filter Banks.* Hermann, Paris, France, 1990.

[86] C. de Boor, *A Practical Guide to Splines. Revised Edition.* Springer, New York, diciembre 2001.

[87] J. Ibáñez, "Técnicas polinómicas en procesado de señal: apliaciones en interpolación, modelado y comunicaciones," Ph.D dissertation, Universidad de Cantabria, 2004.

[88] K. Shirakawa, M. Shimiz, N. Okubo y Y. Daido, "A large signal characterization of a hemt using a multilayer neural network," *IEEE Transactions on Microwavw Theory and Technology*, vol. 45, pp. 1630–1633, 1997.

[89] L.O. Chua y A.C. Deng, "Canonical piecewise-linear modeling," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 35, pp. 101–111, 1988.

[90] F. Harris, "On the use of windows for harmonic analysis with the Discrte Fourier Transform," *Proc. IEEE*, vol. 66, no. 1, pp. 51–83, enero 1978.

[91] A. Nuttal, "A two parameter class of Bessel weightings with controllable sidelobe..." Naval Underwater System Center, Tech. Report 6761, Connecticut. USA, julio 1982.

[92] A. Watt, *Avanced Animation and Rendering Techniques. Theory and Practice.* Addison - Wesley, New York, 1992.

[93] V. Uhlmann, J. Fageot y M. Unser, "Hermite snakes with control of tangents," *IEEE TRANSACTIONS ON IMAGE PROCESSING*, vol. 25, no. 6, pp. 2803–2816, junio 2016.

[94] R. Riesenfeld, "Applications of B - spline: Approximation to geometric problems of computer - aided design," Ph.D dissertation, Syracuse Univ. N.Y., 1973.

[95] M. Cox, "The numerical evaluation of b - splines," *J. Inst. Mathematics and Applications*, vol. 10, pp. 134–149, 1972.

[96] S. Okaniwa, A. Nasri, H. Lin, A. Abbas, Y. Kineri y T. Maekawa, "Uniform B-spline curve interpolation with prescribed tangent and curvature vectors," *IEEE TRANSACTIONS ON VISUALIZATION AND COMPUTER GRAPHICS*, vol. 18, no. 9, pp. 1474–1487, septiembre 2012.

[97] K.R. Kim, P. T. Kim, J.Y. Koo y M. R. Pierrynowski, "Frenet-Serret and the estimation of curvature and torsion," *IEEE JOURNAL OF SELECTED TOPICS IN SIGNAL PROCESSING*, vol. 7, no. 64, pp. 646–654, agosto 2013.

[98] Z. Hu y Y. Yan Lu, "Computing optimal waveguide bends with constant width," *JOURNAL OF LIGHTWAVE TECHNOLOGY*, vol. 25, no. 10, pp. 3161–3167, octubre 2007.

[99] M. Premaratne, "Numerical simulation of nonuniformly time-sampled pulse propagation in nonlinear fiber," *JOURNAL OF LIGHTWAVE TECHNOLOGY*, vol. 23, no. 8, pp. 2434–2442, agosto 2005.

[100] L. Lizzi, F. Viani y A. Massa, "Dual-band spline-shaped PCB antenna for Wi-Fi applications," *IEEE ANTENNAS AND WIRELESS PROPAGATION LETTERS*, vol. 8, pp. 616–619, 2009.

[101] A. D. C. Nascimento, M. M. Horta, A. C. Frery y R. J. Cintra, "Comparing edge detection methods based on stochastic entropies and distances for PolSAR imagery," *IEEE JOURNAL OF SELECTED TOPICS IN APPLIED EARTH OBSERVATIONS AND REMOTE SENSING*, vol. 7, no. 2, pp. 648–663, Febrero 2014.

[102] C. Granet y G. L. James, "Spline-profile smooth-walled C-band horn," *IEEE ANTENNAS AND WIRELESS PROPAGATION LETTERS*, vol. 6, pp. 415–418, 2007.

[103] A. Wedel, H. Badino, C. Rabe, H. Loose, U. Franke y D. Cremers, "B-spline modeling of road surfaces with an application to free-space estimation," *IEEE TRANSACTIONS ON INTELLIGENT TRANSPORTATION SYSTEMS*, vol. 10, no. 4, pp. 572–583, diciembre 2009.

[104] Sung-Uk Zhang y Ashok V. Kumar, "Magnetostatic analysis using implicit boundary finite-element method," *IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS*, vol. 46, no. 5, pp. 1159–1166, mayo 2010.

[105] N. Almeida, D. Friboulet, S. I. Sarvari, O. Bernard, D. Barbosa, E. Samset y J. D'hooge, "Left-atrial segmentation from 3-D ultrasound using B-spline explicit active surfaces with scale uncoupling," *IEEE TRANSACTIONS ON ULTRASONICS, FERROELECTRICS, AND FREQUENCY CONTROL*, vol. 63, no. 2, pp. 212–221, febrero 2016.

[106] K. Versprille, "Computer - aided design applications of the rational B - spline approximation form," Ph.D dissertation, Syracuse Univ. N.Y., 1975.

[107] G. Maiorino, "Intergraph approach in computer aided geometric design using free - form surfaces," in *Proc. Symp. Automotive Technology and Automation*, vol. 2. Graz, Austria, abril 1985, pp. 401–421.

[108] A. van Dam, "Phigs+, functional description revision 3.0," *Computer Graphics*, vol. 22, no. 3, pp. 125–218, 1988.

[109] L.Piegl, "ON NURBS: A survey," *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 11, pp. 55–71, enero 1991.

[110] L.Piegl y W. Tiller, "Curve and surface constructions using rational B - splines," *Computer - Aided Design*, vol. 19, no. 9, pp. 485–498, 1987.

[111] C. Delgado, M. F. Cátedra y R. Mittra, "Application of the characteristic basis function method utilizing a class of basis and testing functions defined on nurbs patches," *IEEE TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION*, vol. 56, no. 3, pp. 784–791, marzo 2008.

[112] R. Vázquez, A. Buffa y L. di Rienzo, "Isogeometric FEM implementation of high-order surface impedance boundary conditions," *IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS*, vol. 50, no. 6, pp. 7 400 508,1–7 400 508,8, junio 2014.

[113] N. Wang, Hao-Bo Yuan, Xiao-Jie Dang y Chang-Hong Liang, "Edge diffraction in NURBS-UTD method," *IEEE TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION*, vol. 60, no. 5, pp. 2590–2593, mayo 2012.

[114] Shyh-Leh Chen y Chang-Yan Chou, "Contouring control of multi-axis motion systems for NURBS paths," *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATION SCIENCE AND ENGINEERING*, vol. 13, no. 2, pp. 1062–1071, abril 2016.

[115] O. Aguilar, R. Tapia, A. Valderrabano y H. Minor, "Design and performance comparison of pi and adaptive current controllers for a WECS," *IEEE LATIN AMERICA TRANSACTIONS*, vol. 13, no. 5, pp. 1361–1368, mayo 2015.

[116] X. Hong, S. Chen, Y. Gong y C. J. Harris, "Nonlinear equalization of hammerstein OFDM systems," *IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING*, vol. 62, no. 21, pp. 5629–5638, noviembre 2014.

[117] D. Van De Ville, T. Blu, M. Unser, W. Philips, I. Lemahieu y R. Van de Walle, "Hex-splines: A novel spline family for hexagonal lattices," *IEEE TRANSACTIONS ON IMAGE PROCESSING*, vol. 13, no. 6, pp. 758–772, junio 2004.

[118] B. Csébfalvi, "Cosine-weighted b-spline interpolation: A fast and high-quality reconstruction scheme for de body-centered cubic lattice," *IEEE TRANSACTIONS ON VISUALIZATION AND COMPUTER GRAPHICS*, vol. 19, no. 9, pp. 1455–1466, septiembre 2013.

[119] P.M. Prenter, *Splines and Variational Methods*, dover ed. Dover Publications Inc., New York, marzo 2009.

[120] T.W. Parks y C.S. Burrus, *Digital Filter Design.* Willey, New York, 1987.

[121] R. M. Merserau, Z. S. Shen y M. H. Hayes, "Effect of ideal transition specifications on window designs," in *Proc. EUPSICO-88.* Grenoble, Francia, septiembre 1988.

[122] V.R. Algazi y M. Suk, "On the frequency weghtet least square design of finite duration filters," *IEEE Transactions Circuits Systems*, vol. 22, no. 12, pp. 943–953, 1975.

[123] P. Vaidyanathan, *Multirate Systems and Filter Banks*, 8th ed. Prentice Hall P T R, 1993.

[124] Z. Duo, L. G. Durand y H. C. Lee, "Comparison of time-frequency distribution techniques for analysis of stimulated Doppler ultrasound signals of the femoral artery," *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 41, pp. 332–342, 1994.

[125] H. Nyquist, "Certain topics in telegraph transmission theory," *Trans. AIEE*, vol. 47, pp. 617–644, abril 1928.

[126] C. Shannon, "Communication in the presence of noise," *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, no. 2, pp. 447–457, 1998.

[127] M. J. Lighthill, *Introduction to Fourier's Analysis and Generalized Functions.* Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1958.

[128] Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer y John R. Buck, *Tratamiento de señales en tiempo discreto*, 2nd ed. Prentice Hall, Madrid, 2000.

[129] M. Bôcher, "On Gibb's Phenomenon," *J. reine angew Math.*, vol. 144, pp. 41–47, 1914.

[130] H. S. Carslaw, *An Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals.* Dover, New York, 1952.

[131] E. Hewitt y R. E. Hewitt, "The Gibbs-Wilbraham phenomenon: An episode in Fourier analisys," *Hist. Exact Sci.*, vol. 21, pp. 129–160, 1979.

[132] J. F. A. Ormsby, "Design of numerical filters with applications to missile data processing," *Journal of ACM*, vol. 8, pp. 440–466, julio 1961.

[133] S. Mitra, *Digital Signal Processing. A computer - Based Approach.* McGraw-Hill Irwin, NY, 2001.

[134] Jorge Nocedal y Stephen J. Wright, *Numerical Optimization*, 2nd ed. Springer, New York, 2006.

[135] L. R. Rabiner y B. Gold, *Theory and application of digital signal processing*, 2nd ed. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1975.

[136] T. W. Parks y J. H. McClellan, "Chebyshev approximation for nonrecursive digital filters with linear phase," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT19, pp. 189–194, marzo 1972a.

[137] ——, "A program for the design of linear phase finite impulse response filters," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, vol. AU20, pp. 195–199, agosto 1972b.

[138] J. Kaiser, "Design subroutine (MXFLAT) for symmetric FIR lowpass digital filters with maximally flat pass and stop bands," in *Programs for digital signal processing.* IEEE Press. N.Y., 1979, pp. 5.3–1 – 5.3–6.

[139] R.M. Roark, E.M. Dowling, R.D. DeGroat, B.C. Watson y D. Schaefer, "Time-Frequency analyzes of thyroarytenoid myoelectric activity in normal and spasmodic dysphonia subjects," *J. Speech Hearing Res.*, vol. 38, pp. 289–303, abril 1995.

[140] T. Saramaki, "Capítulo 4: Finite impulse response filter design," in *Handbook for Digital Signal Processing*, S. M. y J.F. Kaiser, Ed. Wiley-Interscience, New York, 1993, pp. 155 – 278.

[141] D. Slepian, H. Landau y H.O. Pollack, "Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis, and uncertainty principle (i and ii)," *Bell System Technical J.*, vol. 40, pp. 43–80, enero 1961.

[142] D. Slepian, "Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis, and uncertainty principle - V: the discrete case," *Bell System Technical J.*, vol. 57, pp. 1371–1430, mayo 1978.

[143] A. Papoulis y M.S. Bertran, "Digital filtering and prolate functions," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-19, pp. 674–681, noviembre 1972.

[144] J. Kaiser, "Nonrecursive digital filter design using the $I_0$-sinh window function," in *Pro. IEEE Int. Symp. on Circuits and Sys.* San Francisco, abril 1974, pp. 20–23.

[145] T. Saramaki, "A class of window functions with nearly minimum sidelobe energy for designing FIR filters," in *Pro. IEEE Int. Symp. on Circuits and Sys.* Portland, mayo 1989, pp. 359 – 362.

[146] H. D. Helms, "Digital filter with equiripple or minimax response," *IEEE Trans. Audio Electroacust.*, vol. AU-19, pp. 87–94, marzo 1971.

[147] T. Saramaki, "Adjustable windows for the design of FIR filters - A tutorial," in *Pro. 6th Mediterranean Electrothecnical Conference.* Ljubljana, mayo 1991, pp. 28 – 33.

[148] P. P. Vaidyanathan y T. Q. Nguyen, "Eigenfilters: a new approach to least-squares FIR filter design and applications including Nyquist filters," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. CAS-34, pp. 11–23, enero 1987a.

[149] M. Á. Raposo-Sánchez, J. Sáez-Landete y F. Cruz-Roldán, "Analog and digital filters with $\alpha$-splines," *Digital Signal processing*, 2017, 10.1016/j.dsp.2017.03.003.

[150] ——, "Modelado de Bandas de Transición mediante Funciones $\alpha$-Splines," in *Actas del XXX Simposium Nacional de la URSI 2015.* Pamplona, septiembre 2015.

[151] ——, "$\alpha$-spline design of finite impulse response digital filters," *Signal processing*, vol. 122, pp. 204–212, 2016.

[152] Y.-P. Lin, S.-M. Phoong y P. P. Vaidyanathan, *Filter Bank Transceivers for OFDM and DMT systems.* Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[153] B. Farhang-Boroujeny, "Filter bank multicarrier modulation: A waveform candidate for 5G and beyond." *Advances in Electrical Engineering*, vol. 2014, 2014.

[154] F. Cruz-Roldán, M. Blanco-Velasco, J.I. Godino, "Zero-padding or cyclic prefix for MDFT-based filter bank multicarrier communications," *Signal processing*, vol. 92, no. 7, pp. 1646–1657, julio 2012.

[155] F. Cruz-Roldán, M y Blanco-Velasco, "Joint use of DFT filter banks and modulated transmultiplexers for multicarrier communications," *Signal processing*, vol. 91, no. 7, pp. 1622–16 352, julio 2011.

[156] S. M. J. A. Tabatabaee and H. Zamiri-Jafarian, "Per-subchannel joint equalizer and receiver filter design in OFDM/OQAM systems," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 64, pp. 5094–5105, octubre 2016.

[157] D. Gregoratti y X. Mestre, "Uplink FBMC/OQAM-based multiple access channel: Distortion analysis under strong frequency selectivity," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 64, pp. 4260–4272, agosto 2016.

[158] R. Gerzaguet, N. Bartzoudis, L. G. Baltar, J.-B. D. V. Berg, D. Kténas, O. Font-Bach, X. Mestre, M. Payar´o, M. Färber, y K. Roth, "The 5G candidate waveform race: A comparison of complexity and performance," in *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, vol. 2017, no. 1, enero 2017.

[159] E. Kofidis, "Preamble-based estimation of highly frequency selective channels in FBMC/OQAM systems," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 65, pp. 1855–1868, abril 2017.

[160] F. Cruz Roldán, P. Martín, J. Sáez, M. Blanco-Velasco, T. Saramäki, "A fast windowing-based technique exploiting spline functions for designing modulated filter banks," *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Regular papers*, vol. 56, no. 1, pp. 168–178, enero 2009.