

K.W. Johansen y el origen del cálculo plástico en las cáscaras cilíndricas largas de cubierta

Mónica Martínez Martínez

La primera cáscara cilíndrica larga de cubierta aparece en Alemania en 1924, para cubrir un edificio perteneciente a la compañía Zeiss.

Hasta los años 20, concretamente en Alemania, el comportamiento estructural de las cáscaras delgadas de hormigón se venía estudiando como si de «membranas» se trataran. Estos estudios determinaron que si los esfuerzos existentes en una cáscara delgada, pero lo suficientemente rígida, fueran exclusivamente de compresión, tracción y tangencial, todos ellos contenidos en el espesor de la cáscara y sin existir en ningún caso esfuerzos de flexión, el espesor de la lámina podría ser muy pequeño, hasta unos pocos centímetros, con tal de que su forma y sus condiciones de sustentación satisficieran ciertas condiciones fundamentales. Obviamente el material que se ajustaba a este modelo matemático era el hormigón armado, por su capacidad moldeable, incluyendo en su interior armaduras de refuerzo para contrarrestar esfuerzos de tracción y cortante. Sin embargo, para ello, era necesario cumplir con una serie de premisas referentes al modo de sustentación. Por esta razón, y para que las ecuaciones de equilibrio siguieran siendo válidas tras la deformación de la cáscara, los desplazamientos debían ser pequeños en comparación con su espesor.

Tras la Primera Guerra Mundial, las cáscaras cilíndricas de cubierta se impusieron como tipologías estructurales capaces de cubrir grandes luces con un gasto mínimo de material; surgiendo un nuevo sistema estructural de cubrición, ideal para espacios de tipo utilitario, tales como estaciones, almacenes, na-

ves y hangares, etc., en definitiva, espacios que hasta el momento se construían en acero (figura 1).

A partir de los años 20, confluyeron dos condiciones claves que determinaron el origen del cálculo estructural de las cáscaras cilíndricas largas; por un lado, urgía establecer un método de cálculo debido al auge constructivo y, por otro, coincidió con un momento caracterizado por un significativo aprecio por las matemáticas.

Estos hechos repercutieron enormemente en los métodos de cálculo surgidos, aplicados al análisis estructural de las cáscaras cilíndricas largas y basados en el método matemático de referencia: la Teoría de la Elasticidad.

APLICACIÓN DE LA TEORÍA ELÁSTICA AL CÁLCULO ESTRUCTURAL DE LAS CÁSCARAS CILÍNDRICAS LARGAS DE CUBIERTA

El aporte revelador de la escuela alemana fue el origen, y posterior desarrollo, del cálculo estructural de las cáscaras cilíndricas largas de cubierta, basado en el marco teórico de referencia del momento: la Teoría de la Elasticidad.

La aplicación de la teoría de la elasticidad al cálculo estructural de estas tipologías fue desarrollada en el decenio de 1930, en Alemania, gracias a la labor de los ingenieros Fr. Dischinger (Dischinger 1928a; 1930b; 1935c; 1936d) y U. Finsterwalder (Finsterwalder 1932a; 1935b; 1936c), y posterior-

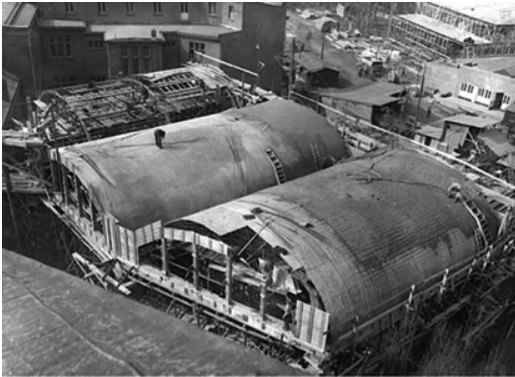


Figura 1
Cáscaras cilíndricas largas de la cubierta, en construcción, del Dywidaghalle. Fr. Dischinger y U. Finsterwalder. 1.926. «Die Dywidag-Halle auf der Gesolei». *Der Bauingenieur* 7, figura 3, pp. 929, 930.

mente del noruego A. Aas Jakobsen (Jakobsen 1937a; 1939b).

A pesar de la repercusión constructiva que despertaron, el principal problema seguía siendo la dificultad que poseían los ingenieros del momento para formular analíticamente su comportamiento estructural y resolver las ecuaciones surgidas del proceso matemático.

La determinación del problema matemático, proporcionada por las ecuaciones de equilibrio, se convertía en indeterminada cuando la cáscara se unía a otros elementos estructurales deformables, tales como vigas de borde, otras cáscaras análogas y contiguas, etc. En estos casos, el problema se convertía en hiperestático, por lo que no bastaban las ecuaciones de equilibrio para resolver el problema, siendo necesarias otras ecuaciones derivadas de teoremas de trabajo que aumentaban considerablemente la complejidad del desarrollo matemático.

Gracias a los estudios realizados por los ingenieros Finsterwalder (Finsterwalder 1932) y Dischinger (Dischinger 1935), se determinó la existencia de momentos flectores debidos a la presencia de nuevos esfuerzos en el borde de la cáscara, como consecuencia de la ubicación del elemento de borde. Ante ello, la formulación matemática aportada por la teoría analítica, tan enraizada en este momento y referida a materiales ideales, homogéneos e isotrópicos, que respondían a la ley de Hooke, fue aplicada igualmente al cálculo estructural de las cáscaras cilíndricas largas de hormigón armado, sin detenerse a analizar las ca-

racterísticas propias del nuevo material constructivo; por lo que, tras el cálculo, se conseguía obtener cáscaras perfectas, realizadas con un material ideal, pero no reales.

En 1935, Dischinger, apoyándose en los estudios previos de Finsterwalder, logra obtener una teoría rigurosa de cálculo estructural analítico para las cáscaras cilíndricas basándose en los principios de la teoría de la elasticidad (Dischinger 1935).

A pesar de su enorme complejidad matemática, el método de cálculo se convirtió en sinónimo de exactitud, gracias al cual era posible conocer, con precisión, el estado tensional en cada punto de la cáscara, a partir de la resolución de ecuaciones diferenciales de octavo orden de gran complejidad matemática (figura 2).

Por tanto, parecía que el comportamiento estructural de las cáscaras cilíndricas largas había sido definido al fin. Sin embargo, la realidad resultó ser muy distinta puesto que, para poder proceder en la práctica, fue necesario introducir una serie de hipótesis de tal importancia que se obvió que éstas eran legítimas, siempre y cuando no implicasen contradicción con los resultados reales.

1. Aufstellen der Differentialgleichungen.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen des Flächenelementes der Zylinderschale $ds dx$ gegen Verschieben und Verdrehen ergeben sich die nachstehenden sechs Gleichungen:

$$\begin{cases} \partial N_x ds + \partial N_{xx} dx + X ds dx = 0 \\ \text{hieraus (1a) } N_x' + N_{xx}' + Xa = 0, \\ \partial N_y dx + \partial N_{yy} ds - Q_y dx dy - Y ds dx = 0 \\ \text{hieraus (1b) } N_y' + N_{yy}' - Q_y + Ya = 0, \\ \partial Q_y dx + \partial Q_x ds + N_y dx dy + Z ds dx = 0 \\ \text{hieraus (1c) } Q_y' + Q_x' + N_y + Za = 0, \\ \partial M_y dx + \partial M_{yy} ds - Q_y dx ds = 0 \\ \text{hieraus (1d) } M_y' + M_{yy}' - Q_y a = 0, \\ \partial M_x ds + \partial M_{xx} dx - Q_x ds dx = 0 \\ \text{hieraus (1e) } M_x' + M_{xx}' - Q_x a = 0, \\ N_{yy} dx ds - N_{xx} ds dx + M_{yy} dx dy = 0 \\ \text{hieraus (1f) } a(N_{yy} - N_{xx}) + M_{yy} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Abb. 2. Darstellung der positiven Richtungen der äußeren Kräfte X, Y, Z , der inneren Kräfte $N_x, N_y, N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}$ und Q_x, Q_y , der Biege- und Drillungsmomente M_x, M_y und M_{xx}, M_{yy} sowie die Verschiebungen u, v, w .

Figura 2
Ecuaciones diferenciales debidas a las condiciones de equilibrio de un elemento superficial de una cáscara cilíndrica. (Dischinger 1935).

Un estado estructural en el que, por una parte, se obviaba las posibles imperfecciones acontecidas durante la construcción de la cáscara, sumado a la consideración de un único y constante módulo de elasticidad para toda la estructura, no podía ser considerado como real. El sentido del término «*real*» de una estructura significa un estadio accidental acontecido por la reacción entre la estructura y su entorno. En este sentido, los tres principales problemas surgidos fueron sin duda: la alta dificultad que entrañaba resolver las ecuaciones diferenciales de octavo orden, la contradicción entre esa dificultad y la forma de dimensionar la cáscara y el refuerzo, por lo que todo el minucioso y complejo trabajo matemático desarrollado perdía importancia; y, en tercer lugar, los resultados obtenidos por el cálculo elástico diferían de los obtenidos en ensayos sobre estructuras reales (figura 3).

En consecuencia, la teoría de la elasticidad no podía garantizar la certeza de sus resultados más que en la medida de la exactitud de las hipótesis que se hubieran establecido previamente.

ORIGEN Y APLICACIÓN DEL ANÁLISIS LÍMITE AL CÁLCULO ESTRUCTURAL DE LAS CÁSCARAS CILÍNDRICAS LARGAS DE CUBIERTA

Aunque las hipótesis de la teoría elástica parecían razonables, el sentido común indicaba que un defecto o imperfección trivial en la cáscara, o al menos impredecible, no podía afectar a su resistencia. Por tanto,



Figura 3
Puesta en carga de un modelo de cáscara cilíndrica larga. (Morice 1952)

el cálculo de tensiones elásticas no era relevante para predecir la resistencia real de las cáscaras cilíndricas de hormigón armado.

La resistencia de una estructura real, construida con un material dúctil como es el hormigón armado, no depende de que aparezca la tensión elástica límite en un punto de ella, sino por el inaceptable crecimiento de las deformaciones debidas a la acción de las cargas. Por ello, el cambio del pensamiento elástico al plástico, no fue consecuencia de la evolución de un método a otro, sino debido a las insuficiencias de la teoría anterior, en este caso la elástica.

Origen de los estudios sobre plasticidad.

Hasta bien entrado el s. XX, las explicaciones más obvias y comprobadas, de cualquier fenómeno estructural, se desechaban por ser «*poco científicas*» si no iban acompañadas de su correspondiente despliegue formulístico, basado en la teoría de la elasticidad. No obstante, las ideas no-lineales no se perdieron de vista, aunque cuando eran mencionadas eran consideradas como curiosidad científica.

El húngaro Gábor Kazinczy (1888–1964) fue el primer ingeniero que basó el cálculo de la plasticidad de las estructuras no sólo en teorías, sino en datos empíricos obtenidos a partir de ensayos. En 1914 logró demostrar que el cálculo de tensiones elásticas no era relevante para predecir la resistencia real de una estructura de acero (Kazinczy 1914).

Posteriormente, en 1933, Kazinczy publicó otro artículo referente a la plasticidad del hormigón armado (Kazinczy 1933); donde propone el concepto de redistribución de los momentos de flexión simple, basado en el comportamiento plástico, tanto del acero como del hormigón (figura 4).

La rotura de la viga debía producirse, según la teoría de la elasticidad, con una carga que resultase de aumentar la admisible por un factor de seguridad; sin embargo, experimentalmente esto no sucedió así al poderse incrementar la carga considerablemente sin que la viga llegase a su estado límite de rotura. En el momento de producirse el colapso, el reparto de momentos no tenía por qué coincidir con lo determinado por la teoría analítica; de hecho, en el estado de rotura, este reparto se produjo con el mismo valor en las tres secciones críticas de la viga. Al variar la recta de cierre del diagrama isostático se puede conseguir la

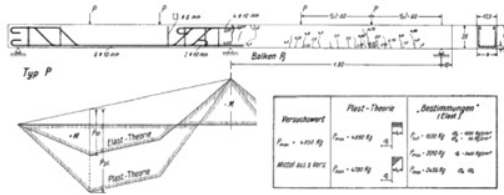


Figura 4
Diferencia entre los momentos flectores de una viga continua de hormigón armado, según la teoría de la elasticidad y la teoría de la plasticidad. (Kazinczy 1933).

distribución de momentos que se considerase más conveniente, siempre y cuando se dispusieran las armaduras de acuerdo con dicha elección.

Tres años más tarde, en 1936, confluyen dos hechos significativos en relación al estudio de los métodos plástico: las relevantes ponencias sobre plasticidad aportadas en el Segundo Congreso del IABSE, en Berlín, y los teoremas de la plasticidad anunciados por el ruso A. A. Gvozdev.

A pesar de existir un pensamiento conformista, y generalizado, en el campo teórico de las estructuras

Inhaltsverzeichnis.

I

Die Bedeutung der Zähigkeit des Stahles für die Berechnung und Bemessung von Stahlbauwerken, insbesondere von statisch unbestimmten Konstruktionen.

11	Allgemeine Plastizitätstheorie. Göttingenfelder. Dr. Ing. A. FREUDENTHAL, Warschau.	3
12	Grundlagen der Plastizitätstheorie. Dr. techn. J. FRITSCHIE, Professor an der Deutschen Technischen Hochschule, Prag.	15
13	Über Fließgrenzen und Biegekennlinien. Dr. Ing. F. BINAGL, Professor an der Technischen Hochschule, Wien.	43
14	Theorie statisch unbestimmter Systeme. Dr. Ing. E. MELAN, Professor an der Technischen Hochschule, Wien.	45
15	Tragfähigkeit von Fachwerkträgern. Dr. Ing. E. KOHL, Professor an der Technischen Hochschule, Hannover.	69
16	Sicherheit der Bauwerke. R. LÉVI, Ingénieur en Chef Adjoint au Service de la Voie et des Bâtimens des Chemins de fer de l'Etat, Paris.	83
17	Versuche, Ausdeutung und Anwendung der Ergebnisse. Dr. Ing. H. MAIER-LEIBNITZ, Professor an der Technischen Hochschule, Stuttgart.	103
18	Bemessung statisch unbestimmter Systeme nach der Plastizitätstheorie (Traglastverfahren). Bausat Dr. Ing. F. BLEICH, Zivilingenieur, Wien.	157

Figura 5
1936, IABSE Congress, Preliminary Report, Vol 2. Berlin.

referente a la teoría de la elasticidad, el Congreso de Berlín, celebrado en 1936, supuso un acontecimiento decisivo en el avance de las investigaciones referentes a la plasticidad (IABSE 1936). Por primera vez, en el informe preliminar del congreso se presentaron ocho ponencias sobre la teoría de la plasticidad, donde se trataron temas relacionados con la resistencia de materiales en la formación de rótulas plásticas y comportamientos no-lineales en estructuras (figura 5).

De todas ellas cabe destacar la ponencia «*Test Results, their Interpretation and Application*» (Maier-leibnitz 1936), donde Maier-Leibnitz utiliza para sus experimentos una viga continua sobre tres apoyos sometida a la acción de una carga exterior, al mismo tiempo que desplazaba hacia arriba o abajo su apoyo central (figura 6).

Maier-leibnitz comprobó que al realizar el cálculo según la teoría de la elasticidad el valor de las cargas posibles dependía de la situación del apoyo central.

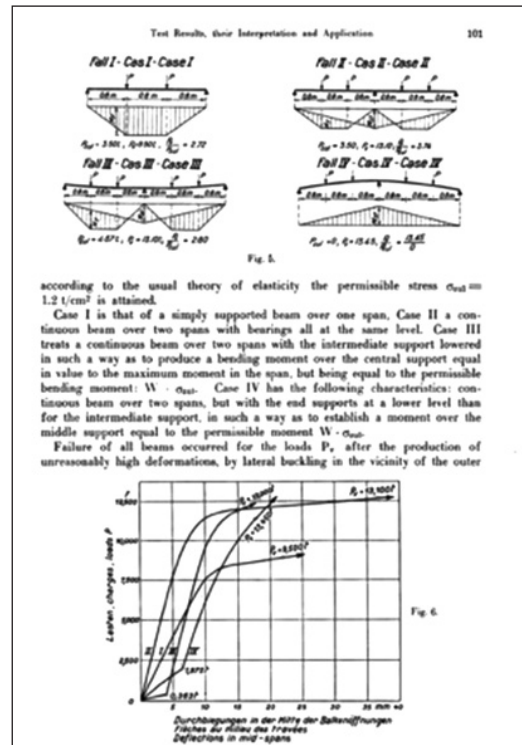


Figura 6
Artículo «*Test Results, Their Interpretation and Application*». (Maier-Leibnitz 1936).

Sin embargo, al realizar el ensayo el valor de la carga de colapso no se veía afectado por la diferente nivelación de los apoyos. El colapso sólo se producía cuando se formaban un número suficiente de rótulas para constituir un mecanismo, independientemente de las imperfecciones iniciales que pudieran existir en la estructura.

Paralelamente, y ante la necesidad por establecer principios teóricos que definieran la teoría plástica, en la URSS se estaban realizando estudios sobre plasticidad que resultaron ser cruciales. En 1936, el ruso A. A. Gvozdev presenta una comunicación (Gvozdev 1936), en ruso, referente a la determinación del valor de la carga de colapso para sistemas estáticamente indeterminados, cuyo texto sentará las bases de la teoría plástica (figura 7).

Gvozdev enumera tres condiciones que deben cumplirse en el estado de colapso: condición de equilibrio, condición de cedencia y la condición de mecanismo, es decir, debe producirse algún tipo de meca-

nismo de deformación que conlleve al colapso de la estructura.

Por tanto, el problema residía en encontrar el valor de la carga de colapso para la cual se satisficieran las tres condiciones, deduciendo, de esta manera, los tres Teoremas Fundamentales de la Teoría de la Plasticidad: teorema de la unicidad, teorema de la inseguridad, o teorema del límite superior, y teorema de la seguridad o teorema del límite inferior (Baker, Horne y Heyman 1956). La relevancia del tercer teorema fue tal que se convertiría en herramienta básica para proyectar cualquier tipo de estructura, basándose en posibles estados de equilibrio seguros y adecuadamente elegidos, tal y como estudió posteriormente el profesor Jacques Heyman (Heyman 1967a, 1977b).

El análisis límite puede ser aplicado a cualquier estructura que posea propiedades plásticas en ausencia de problemas de estabilidad o de grandes deformaciones, por lo que las tensiones elásticas se pueden despreciar; mientras que la ductilidad adecuada del material garantiza la correcta redistribución de las tensiones, sin que se produzcan daños en la estructura o la rotura de ésta.

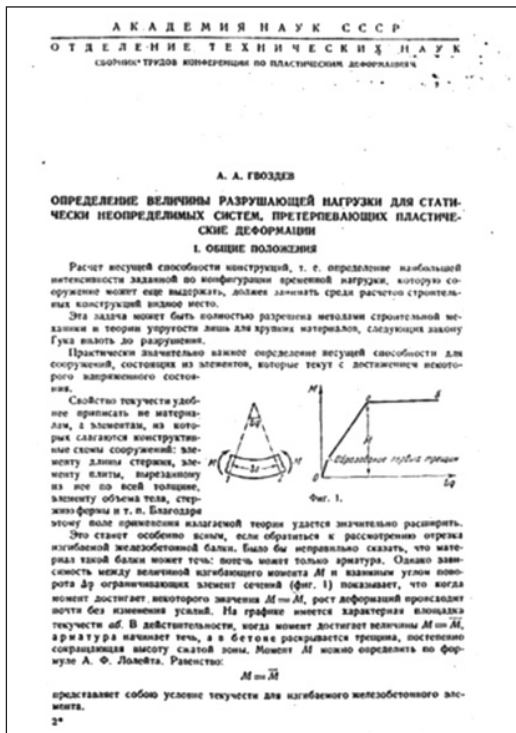


Figura 7
Artículo. (Gvozdev 1936).

K. W. JOHANSEN Y LA APLICACIÓN DEL ANÁLISIS LÍMITE A LAS CÁSCARAS CILÍNDRICAS LARGAS DE CUBIERTA

A los dos hechos descritos anteriormente, referentes a los avances producidos en los métodos plásticos, hay que añadir un tercero en Dinamarca relativo a los estudios llevados a cabo por el ingeniero danés K. W. Johansen (Johansen 1944a, 1948b), y posteriormente desarrollados por el también ingeniero danés H. Lundgren (Lundgren 1949) y por el húngaro G.v. Kazinczy (Kazinczy 1949).

En la literatura existente, antes de la publicación del libro *Cylindrical Shell* de H. Lundgren en 1949 (Lundgren 1949), no existían apenas escritos que trataran la problemática del cálculo estructural de las cáscaras cilíndricas largas más allá de lo especificado por la teoría de la membrana o, sobre todo, por la teoría de la elasticidad. Pero, aunque el estado «real» de la cáscara no se pudiera conocer, sí se podía calcular con gran precisión su «resistencia», siendo además muy insensible a las agresiones del entorno.

En este sentido, las aportaciones del ingeniero Knud Winstrup Johansen fueron cruciales, puesto

que marcará el origen de la aplicación del análisis límite a estas tipologías estructurales con un enfoque plástico del equilibrio.

En 1944, K.W. Johansen (1901–1978), profesor y doctor en Ingeniería de la Construcción y presidente de la Universidad Técnica de Delft, publicó un artículo en danés; referente al análisis y cálculo estructural de una cáscara cilíndrica larga completa y asimétrica de hormigón armado (Johansen 1944) (figura 8).

La cáscara conforma la cubierta de un restaurante construido en 1938, que cubría un espacio de 16m de ancho y 36m de longitud; dividida ésta en dos vanos, uno de 24m y otro de 12m, por medio de un tabique dispuesto transversalmente (figura 9). En la cara norte del edificio, la cáscara se apoya en pilares, separados 3,2m, en la cara sur del edificio no existen soportes y en sus laterales se encuentra delimitada por dos muros transversales.

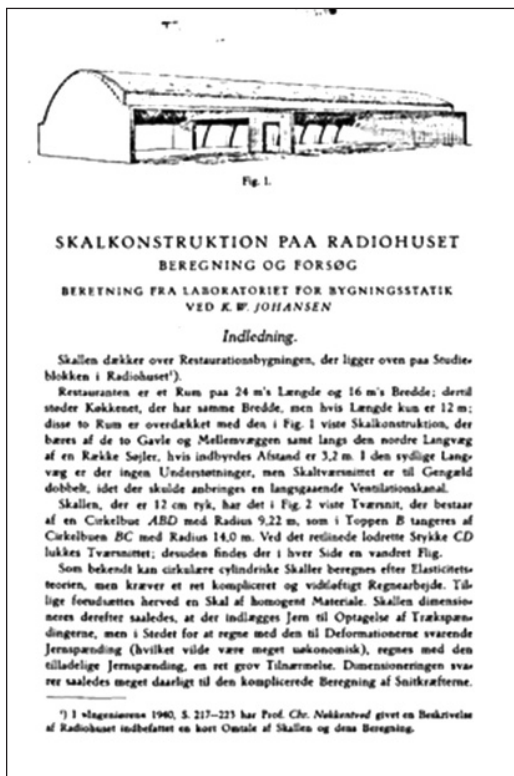


Figura 8
Artículo. (Johansen 1944).

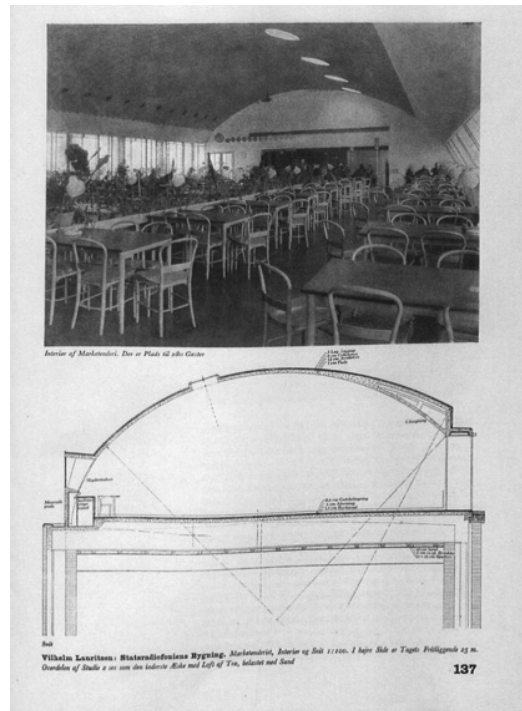


Figura 9
Statsradiofonien. 1946. «Radiohuset: den Danske Statsradiofonins nybygning i Kobenhavn». Akademisk Arkitektfore-

La sección transversal de la cubierta, de 12cm de espesor, es aproximadamente cilíndrica, pero contiene un canal de ventilación en su interior. Esta sección se modeliza por medio de un arco de círculo ABD, de radio 9,22 m. En el punto B, de dicho arco, toca tangencialmente otro arco de círculo BC, de radio 14m., a su vez en el punto C parte un tramo recto vertical CD, quedando así cerrada la sección junto con un talón de hormigón a modo de marquesina (figura 10).

Método de análisis.

Las hipótesis previas establecidas por Johansen fueron (Johansen 1944):

1. Modelizar la sección transversal de la cáscara, dividiéndola en dos partes debido a su desigual comportamiento estructural.

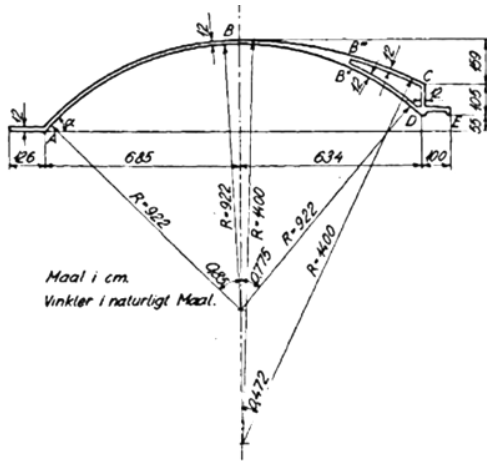


Figura 10
Definición geométrica de la sección transversal de la cáscara cilíndrica larga. (Johansen 1944)

La parte de la cáscara considerada cerrada y definida por los puntos B, C y D, debido a su rigidez, Johansen asemeja su comportamiento al de una viga de hormigón. Por otro lado, la parte definida por los puntos A y B, debido a su baja rigidez a flexión, la considera similar al de una membrana. Por lo que el valor de las reacciones obedecerá a la expresión:

$$S = Pr \cos \alpha \quad [1]$$

2. La segunda hipótesis consiste en no tener en cuenta la contribución a tracción del hormigón; mientras que la tensión admisible de las armaduras corresponderá a la de fluencia entre un coeficiente de seguridad.
3. Por último, Johansen señala que, en condiciones estáticamente indeterminadas, los momentos se distribuirán en conformidad con la armadura dispuesta.

Cálculo longitudinal de la cáscara

Considerando un valor para la carga permanente de 340 kg/m² y para la variable de 100 kg/m², el valor de la resultante sería L= 9,18 t/m, actuando a una distancia de 1,06 m del punto B (figura 11).

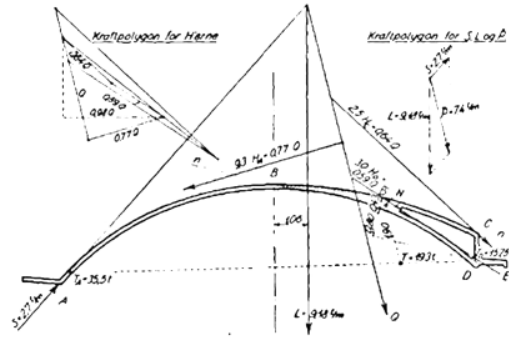


Figura 11
Representación de fuerza exteriores e interiores en la sección transversal de la cáscara cilíndrica correspondiente al momento positivo. (Johansen 1944).

Las reacciones en los pilares serán de valor 2,70 t/m [1], para un ángulo $\alpha=48,62^\circ$ y cuyas componentes vertical y horizontal, serán:

$$S_y = 2,00t / m \text{ y } S_v = 1,80t / m$$

Combinando la componente horizontal, en un polígono de fuerzas (parte derecha superior de la figura 11), con la resultante de las fuerzas exteriores L, se obtiene la resultante oblicua de valor P=7,40 t/m.

Mientras que la parte de la cáscara definida por los puntos A y B se apoya en pilares, la otra parte de la cáscara, definida por los puntos B, C y D, posee su extremo libre. Esta parte de la cubierta está constituida por dos vanos; donde cada uno de ellos queda definido por el muro transversal extremo y el tabique ubicado en la parte intermedia del edificio.

Como resultado de estas características, se propone calcular la primera parte de la cáscara como si de una viga continua de hormigón de dos vanos se tratara, respetando las características del material estructural utilizado. Aquí es donde reside realmente la sencillez y validez del método propuesto puesto que el momento de empotramiento vendría definido por la sencilla expresión:

$$M_{emp} = \frac{3}{32} \cdot 7,40 \frac{t}{m} \cdot (24m)^2 = 400tm \quad [2]$$

Debido a que la sección transversal de la cáscara no tiene capacidad para resistir momentos de torsión, circunstancia común en las secciones abiertas, la fi-

bra neutra debe situarse respondiendo a una única premisa: que la resultante de las fuerzas tangenciales tenga igual magnitud y dirección opuesta a la resultante debida al cortante Q ; que por otra parte debe ser igual al valor obtenido para la resultante oblicua de las cargas. Es decir, partiendo de una condición de equilibrio de fuerzas, se puede establecer la ubicación de la línea neutra obteniendo una solución al problema estructural pero no la única. Una vez situada se puede determinar sin dificultad el área de refuerzo necesario, así como la tensión del hormigón y la tensión tangencial.

El punto situado a mayor distancia de la fibra neutra es el punto denominado B' , por lo que ese punto poseerá la máxima tensión a compresión. Por otro lado, se colocan barras de refuerzo en el contorno de la cáscara, situándolas en los centros de masas T_a y T_d .

Posteriormente se procede a calcular el módulo, la dirección y el punto de aplicación de la resultante de las tensiones de compresión N , correspondiente a un valor de $N = 193$ t.

El punto de aplicación se obtiene por la intersección de dos rectas; una, la recta que une las resultantes de las tracciones, es decir la recta T_a-T_b ; mientras que la segunda es una recta paralela a la dirección de Q , y que pasa por el punto B' , es decir resultante de las compresiones.

La distancia entre los puntos B' y T determina el brazo de palanca entre el par de fuerzas, constituyendo una distancia de 1,9 m. Por lo que el valor del momento será de:

$$M = 193t \cdot 1,90m = 367tm \quad [3]$$

En resumen, el esquema de cálculo, basado en la obtención de sucesivos resultados por equilibrio de fuerzas, es el siguiente:

1. Obtención del valor de las cargas exteriores.
2. Cálculo de los momentos flectores, positivos y negativos.
3. Obtención de la ubicación de la fibra neutra en la sección transversal de la cáscara por equilibrio de fuerzas.
4. Cálculo de la tensión máxima de compresión del hormigón.
5. Obtención de los valores de las fuerzas normales, de tracción y compresión.
6. Cálculo del refuerzo longitudinal en la cáscara.

Cálculo transversal de la cáscara.

En primer lugar, es necesario obtener el valor de la resultante de las fuerzas tangenciales.

Para ello, se puede comenzar aplicando la teoría del tirante; donde las fuerzas normales en la dirección de la cáscara N_x se sitúan concentradas en una única generatriz, que se denomina tirante, y aplicadas en el centro de masas de la zona en cuestión; mientras que las fuerzas tangenciales N_{xq} , de la sección transversal de la cáscara, se mantendrían constantes dentro de cada intervalo existente entre dos tirantes.

Al dividir la sección transversal de la cáscara analizada en tres arcos diferentes: AB' , $B'D$ y $B'CD$, se denominarán las fuerzas tangenciales:

$$H_A, H_C, H_D,$$

siendo la resultante de cada una de ellas sería (figura 11):

$$9,3H_A, 2,5H_C \text{ y } 3,0H_D$$

Al descomponer la fuerza transversal Q , o fuerza cortante (polígono de fuerzas situado en la parte superior izquierda de la figura 11), de acuerdo con esas tres resultantes se obtiene el valor:

$$H_A = \frac{0,77Q}{9,3} = 0,083Q \quad H_C = \frac{0,64Q}{2,5} = 0,256Q$$

$$H_D = \frac{0,59Q}{3,0} = 0,197Q \quad [4]$$

Dado que el brazo de palanca es de 1,90 m, entonces:

$$H = H_A + H_C + H_D = \frac{Q}{1,90m} \quad [5]$$

De igual manera, realizando cortes únicamente por T_a y T_d , se obtiene:

$$H_A = \frac{Q}{1,90} \cdot \frac{T_A}{T} = 0,097Q \quad [6]$$

$$H_C = 0,243Q \quad \text{y} \quad H_D = 0,187Q$$

De esta manera, se asegura la exacta ubicación de la fibra neutra.

Del mismo modo se actuaría para las secciones transversales de la cáscara correspondientes a la ubicación de momento negativo.

Cálculo de los momentos transversales:

Al seccionar un elemento de la cáscara, de longitud dx en la dirección de la generatriz de la cáscara y de anchura δs , ortogonal a la anterior, se observa como en él actúa la resultante de las tensiones tangenciales H , debidas a la acción de las cargas exteriores. Como la resultante de las tensiones tangenciales H , es proporcional a la fuerza transversal, o cortante Q , las tensiones tangenciales t deberán ser igualmente proporcionales a las cargas exteriores, es decir:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \bar{P} = 7,4t/m \quad [7]$$

De acuerdo con los valores anteriormente calculados para las fuerzas tangenciales, los valores de las tensiones tangenciales t serían:

Para el tramo AB:

$$t_A = 0,097 \cdot 7,4 = 0,72t/m^2 \quad [8]$$

Para el tramo B''C:

$$t_C = 0,243 \cdot 7,4 = 1,80t/m^2 \quad [9]$$

Para el tramo B''D:

$$t_D = 0,187 \cdot 7,4 = 1,38t/m^2 \quad [10]$$

Como t no varía a lo largo de la longitud de la cáscara, los momentos tangenciales también serán constantes a lo largo de dicha longitud (figura 12).

Momento transversal debido a la fuerza tangencial t , (figura 12.6):

$$\begin{aligned} m_t &= \int_0^\varphi (r - r \cos(\varphi - \theta)) \cdot t \cdot r d\theta = \\ &= \int_0^\varphi r^2 t [1 - \cos(\varphi - \theta)] d\theta = (\varphi - \sin \varphi) t r^2 \end{aligned} \quad [11]$$

Momento debido a la carga exterior P (figura 12.7):

$$m_p = -pr\varphi z \quad [12]$$

Y, por último, el momento debido a la reacción en los soportes (figura 12.8):

$$m_s = S_r r (1 - \cos \varphi) - S_N r \sin \varphi \quad [13]$$

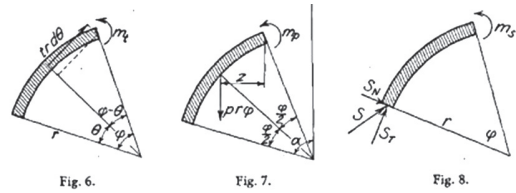


Figura 12
Obtención de los momentos tangenciales. (Johansen 1944)

En definitiva, el momento resultante vendrá dado por la suma de los tres momentos anteriores, es decir:

$$m_\varphi = m_t + m_p + m_s \quad [14]$$

Por tanto, el análisis transversal de la cáscara es resuelto de manera sumamente sencilla:

1. Cálculo de las fuerzas transversales y su ubicación en la sección transversal de la cáscara.
2. Cálculo de los momentos transversales debidos a los esfuerzos tangenciales, a la carga exterior y a las reacciones en los apoyos.

Con todos estos datos la obtención de la armadura necesaria en la cáscara es inmediata.

Por tanto, mediante una apropiada selección del momento como de la fuerza transversal, o cortante, en el tramo CD, todo ello realizado con un enfoque plástico del equilibrio de las fuerzas, se pueden llegar a obtener momentos resultantes en B' y B'' de igual magnitud, de igual manera a como se actuaría en una viga.

CONCLUSIONES

La teoría elástica de cáscaras, desarrollada en el decenio de 1930, resultó prácticamente inaplicable al ser incapaz de dar una imagen, ni siquiera aproximada, del comportamiento estructural de las cáscaras cilíndricas largas de cubierta.

Un marco teórico mucho más adecuado resultó ser el análisis a rotura. Aunque el estado «real» de la estructura no se podía conocer, la resistencia de ésta sí se podía calcular con precisión; siendo, además, muy insensible a las supuestas imperfecciones de fabricación y ejecución o a pequeñas variaciones en las condiciones de contorno.

En este sentido, los estudios iniciados por el ingeniero danés K.W. Johansen marcaron el origen de la aplicación del análisis límite al cálculo estructural de las cáscaras cilíndricas largas, con un enfoque plástico del equilibrio, permitiendo aplicar un cálculo sencillo y seguro.

El estado de equilibrio en la cáscara se consigue por medio del traspaso de esfuerzos de las zonas más solicitadas a las que lo están menos; todo ello, dependiendo de la geometría transversal de la cáscara, la ubicación de la fibra neutra y las diferentes disposiciones que se elija para la armadura. Por tanto, este estado de equilibrio es una solución al problema, pero no la única.

Al abandonar la búsqueda de la solución «única» para la cáscara, se concluye que el aspecto esencial del análisis límite es la aplicación del «enfoque del equilibrio», principal corolario del Teorema Fundamental de la Seguridad. De esta manera se obvía consideraciones referentes a compatibilidad y deformación en la cáscara.

LISTA DE REFERENCIAS

- Baker, J. F., Horne, M.R. y Heyman J. 1956. *The steel skeleton. Vol. 2: Plastic behavior and design*. Cambridge: University Press.
- Bredt, R. 1896. Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizität. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 40: 785–790.
- Dischinger, Fr. 1928. Schalen und Rippenkuppeln. *4a ed. Handbuch der Eisenbetonbau. VI Band, Zweiter Teil*. F. von Emperger (ed.). Berlín: Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, 163–383.
- Dischinger, Fr. 1930. «The Zeiss-Dywidag system of construction for reinforced concrete shell roofs over large spans». *First International Congress for Concrete and Reinforced Concrete*, Liège.
- Dischinger, Fr. 1935. Die strenge Theorie der Kreiszyllinderschale in ihrer Anwendung auf die Zeiss-Dywidag-Schalen. *Beton u. Eisen*, 34: 257–264, 283–294.
- Dischinger, F. 1936. «Shell Construction in Reinforced Concrete». *Second Congress IABSE (International Association for Bridge and Structural Engineering)*, Berlín, preliminary Report, 2: 693–706.
- Finsterwalder, U. 1932. Die Theorie der kreiszyllindrischen Schalgewölbe System Zeiss-Dywidag und ihre Anwendung auf die Grossmarkthalle in Budapest. *Journal of Bridge and Structural Engineering*. Primer Congreso IABSE, París, 127–152.
- Finsterwalder, U. 1935. «Les voiles minces cylindriques raidis transversalement à section en forme de segment circulaire». *Ingenieur Archiv*, nº IV.
- Finsterwalder, U. 1936. «Cylindrical shell structures». *Second Congress IABSE (International Association for Bridge and Structural Engineering)*, Berlín, Rapport Final, 2: 449–453.
- Gvozdev, A.A. 1936. Opredelenie velichiny razrushayushchei nagruzki dlya staticheskoi neopredelimoj sistemy, preterpevayushchikh plasticheskie deformatsii. *Proceedings of the Conference on Plastic Deformations*, Akademia Nauk SSSR, Moscow-Leningrad, 19–30.
- Heyman, J. 1967. «Westminster Hall roof». *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 37: 137–262.
- Heyman, J. 1977. *Equilibrium of Shell Structures*. Oxford, Oxford University Press.
- Jakobsen, A.Aas. 1937. «Sur le calcul de la voûte cylindrique circulaire». *Travaux*, 60: 529–535.
- Jakobsen, A.Aas. 1939. «Über das Randstörungsproblem an Kreiszyllinderschalen». *Der Bauingenieur*, 29: 394–405.
- Johansen, K.W. 1944. Skalkonstruktion paa Radiohuset. *Bygningsstatistiske Meddelelser*, 15: 1–26.
- Johansen, K.W. 1948. «Critical notes on the calculation and design of cylindrical shells». *Third Congress IABSE (International Association for Bridge and Structural Engineering)*, Liège, rapport final, IVc.: 601–606.
- Kazinczy, G.v. 1914. Experiments with Clamped end Beams. *Betonszemle*, 4, 5 y 6: 68–71, 83–87, 101–104.
- Kazinczy, G.v. 1933. Die Plastizität des Eisenbetons. *Beton und Eisen*, 32: 74–80.
- Kazinczy, G.v. 1949. «Beräkning av cylindriska skal med hänsyn till den armerade betongens egenskaper». *Betong*, 34: 239–261.
- Lundgren, H. 1949. *Cylindrical Shells*. Volumen I: Cylindrical Roofs. The Danish Technical Press the Institution of Danish Civil Engineers.
- Maier-Leibnitz, H. 1936. «Test Results, Their Interpretation and Application». IABSE Congress, Preliminary Report, Vol 2. Berlín.
- Morice, P.B. 1952. Research on concrete shell structures. *Proceedings of a Symposium on Concrete Shell Roof Construction*. *Second Congress IABSE (International Association for Bridge and Structural Engineering)*, 1936, Berlín, Preliminary Report, vol. 2.